МАТЕМАТИКА
НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ
РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: Ю.И. МАНИН, С.П. НОВИКОВ
45

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЯ

Избранные труды семинара Н. Бурбаки

Сборник статей

Перевод с английского и французского
под редакцией А. Н. Варченко

МОСКВА «МИР» 1990

СОДЕРЖАНИЕ

ББК 22.16+22.151
М34
УДК 517+514

Математический анализ и геометрия: Сб. статей 1983—
М34 1987 гг.: Пер. с англ. и франц. — М.: Мир, 1990. — 248 с., ил.
ISBN 5-03-001708-9

Сборник избранных докладов семинара Н. Бурбаки, отражающих новые результаты по приложениям анализа в математической физике, по топологическим вопросам анализа по геометрии. Научный уровень изложения очень высокий, главное внимание уделяется основным идеям, а не техническим деталям. Среди авторов статей — известные математики из Франции, США, Великобритании: М. Громов, Н. Хитчин, П. Дуади, П. Картье, Ф. Фам, А. Конн.

Для математиков разных специальностей, механиков, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов университетов.

М $\frac{1702030000—453}{041(01)—90}$ 14—90, ч. 1 ББК 22.16+22.151

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001708-9 (русск.)

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Настоящая книга — сборник переводов избранных докладов, прочитанных на знаменитом семинаре Бурбаки в Париже в 1983—1987 гг. Сборник включает доклады по математическому анализу и геометрии и дополняет вышедший в издательстве «Мир» в 1987 г. сборник переводов докладов, посвященных алгебре и теории чисел («Алгебра и теория чисел с приложениями»).

Научный уровень статей, как обычно, в семинаре Бурбаки очень высокий, а кроме того, эти статьи выделяются высоким качеством изложения, при котором наибольшее внимание уделяется основным идеям, а не техническим деталям. В этом смысле семинар Бурбаки по своему стилю противоположен известному трактату того же автора по элементам математики. Темы статей отражают наиболее актуальные, быстро развивающиеся области анализа и геометрии и дают ясное представление о последних достижениях в этих областях. Среди докладов, включенных в сборник, — доклад Хитчина об уравнениях Янга — Миллса и топологии, доклад Аньара о неравенствах Морса по Виттену, доклад Конна — алгебры Гекке и узлы — о построении Джонсом новых инвариантов узлов, доклад Бовилля — проблема Шотки и гипотеза Новикова — о приложении теории нелинейных дифференциальных уравнений к проблеме описания модулей римановых поверхностей. В докладе Картье обсуждаются связи поставленного в третьей проблеме Гильберта вопроса о равносоставленности многогранников с современными проблемами арифметики и алгебраической K-теории.

К сожалению, ограниченность объема сборника не позволила редактору включить в него все интересные доклады, прочитанные на семинаре Бурбаки. К радости советских математиков, издательство «Мир» планирует публикацию переводов всех докладов семинара Бурбаки, начиная с прочитанных в 1988—1989 учебном году.

При подготовке русского издания были сделаны отдельные примечания и пополнены списки литературы. В этом нам помогли А. А. Воронов, Б. А. Дубровин и А. В. Пажитнов, которым мы выражаем благодарность.

Сборник будет интересен как студентам, так и специалистам-математикам, а также механикам и физикам-теоретикам, использующим анализ и геометрию.

22 октября 1989 г. *А. Н. Варченко*

ИНДЕКСЫ ПОДФАКТОРОВ, АЛГЕБРЫ ГЕККЕ И ТЕОРИЯ УЗЛОВ (по Вогану Джонсу) [1]

А. Конн

ВВЕДЕНИЕ

В. Джонс начал с решения следующей невзрачной на вид задачи: найти подмножество Σ в $\mathbb{R}_+$, образованное значениями индекса $[M:N]$ подфактора N в факторе M типа II_1. Он показал, что

$$\Sigma = \left\{4\cos^2\frac{\pi}{n};\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\right\}\cup[4,\ +\infty].$$

Можно заметить, что в его доказательстве естественно появляется возрастающая последовательность $\mathscr{H}_m(q)$, $m\in\mathbb{N}$, алгебр Гекке, ассоциированных с системами Кокстера симметрических групп и с переменной $q\in\mathbb{C}$. Далее он выводит отсюда доказательство существования замечательного следа на $\mathscr{H}_\infty(q) = \bigcup_m \mathscr{H}_m(q)$. Скомбинировав эти следы с описанием узлов в $\mathbb{R}^3$ на основе группы кос B_n, принадлежащим Артину, Александеру и Маркову, он получает новый полиномиальный инвариант для узлов [21]. Затем этот инвариант был обобщен Фрейдом, Иеттером, Хостом, Ликоришем, Миллеттом и Окнеану до инвариантного полинома от двух переменных, включающего в себя как частный случай и полином Александера [15].

В этом докладе мы будем довольно близко следовать пути, пройденному Джонсом, а также присоединим замечательный результат Окнеану о классификации положительных следов на $\mathscr{H}_\infty(q)$.

I. ИНДЕКС ПОДФАКТОРА ФАКТОРА ТИПА II_1

Пусть M — фактор типа II_1, а Tr_M — единственный след на M с $\mathrm{Tr}_M(1)=1$. Пусть $L^2(M)$ — гильбертово пространство, полученное пополнением отделимого предгильбертова пространства M со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$; $\langle x, y\rangle = \mathrm{Tr}_M(y^*x)\ \forall x, y\in M$.

[1]) Connes A. Indice des sous facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds [D'après Vaughan Jones]. — Seminaire Bourbaki: 37e année, 1984—85, n° 647, Astérisque 133—134, 1986, p. 289—308.

Пусть λ — левое регулярное представление M в $L^2(M)$.

$$\lambda(x)\,y = xy \quad \forall x \in M, \quad y \in M.$$

Для каждого нормального представления π фактора M в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ следующие два условия эквивалентны:

a) коммутант $\pi(M)'$ группы $\pi(M)$ — фактор типа II_1;

b) π эквивалентно подпредставлению в конечной сумме копий λ.

В этом случае будем говорить, что $(\mathfrak{H}, \pi)$ — представление *конечной кратности.* Кратность $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi)$ (или, короче, $\dim_M(\mathfrak{H})$) удовлетворяет в общем случае следующим условиям:

1) $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi) \in [0, \infty[$, $\dim_M(L^2(M), \lambda) = 1$;

2) $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi) = \dim_M(\mathfrak{H}', \pi')$ тогда и только тогда, когда представления π и π' эквивалентны;

3) $\dim_M\left(\bigoplus\limits_1^\infty (\mathfrak{H}_n, \pi_n)\right) = \sum\limits_1^\infty \dim_M(\mathfrak{H}_n, \pi_n)$ $\Big($если прямая сумма $\bigoplus\limits_1^\infty (\mathfrak{H}_n, \pi_n)$ имеет конечную кратность$\Big)$;

4) если $e \in \pi(M)'$ — проектор, а π_e — ограничение π на пространство $e\mathfrak{H}$, то

$$\dim_M(e\mathfrak{H}, \pi_e) = \mathrm{Tr}_{\pi(M')}(e) \cdot \dim_M(\mathfrak{H}, \pi);$$

5) $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi) \cdot \dim_{M'}(\mathfrak{H}) = 1$, где M' — коммутант $\pi(M)$.

Пусть теперь $N \subset M$ — подфактор в M типа II_1. Говорят, что N имеет *конечный индекс* в M, если ограничение левого регулярного представления λ фактора M в $L^2(M)$ на N имеет конечную кратность, т. е. если коммутант $\lambda(N')$ — фактор типа II_1.

Определение 1. Индекс $[M:N]$ подфактора N в M — это кратность $\dim_N(L^2(M), \lambda)$.

Предложение 2. a) *Пусть N — подфактор M конечного индекса. Для каждого представления $(\mathfrak{H}, \pi)$ конечной кратности фактора M его ограничение π_N на N имеет конечную кратность, причем*

$$\dim_N(\mathfrak{H}, \pi_N) = [M:N] \cdot \dim_M(\mathfrak{H}, \pi).$$

b) *Пусть N и M те же, что и в* a), *а P — подфактор конечного индекса в N. Тогда P — подфактор конечного индекса в M, причем* $[M:P] = [M:N]\,[N:P]$.

c) *Пусть N, M, $\mathfrak{H}$, π те же, что и в* a). *Тогда коммутант $\pi(M)'$ — подфактор конечного индекса в $\pi(N')$, причем*

$$[\pi(N)' : \pi(M)'] = [M:N].$$

Свойство a) получается непосредственно, b) следует из a), а c) следует из свойства 5) функции размерности $\dim_M$.

Примеры. α) Пусть Γ — дискретная группа. Рассмотрим коммутант M_Γ правого регулярного представления Γ в гильбертовом пространстве $l^2(\Gamma)$. Чтобы M_Γ было фактором, необходимо и достаточно, чтобы каждый нетривиальный класс сопряженности в Γ имел бесконечную мощность. Более того, в этом случае M_Γ — фактор типа II_1. Поскольку алгебра фон Неймана M_Γ порождена алгеброй $\mathbb{C}\Gamma$ группы Γ, действующей левой сверткой в $l^2(\Gamma)$, то для каждой подгруппы $\Gamma_1 \subset \Gamma$ конечного индекса подалгебра фон Неймана N в M_Γ, порожденная $\mathbb{C}\Gamma_1 \subset \mathbb{C}\Gamma$, — подфактор в M_Γ конечного индекса, изоморфный M_{Γ_1}, причем

$$[M_\Gamma : N] = [\Gamma : \Gamma_1].$$

β) Пусть M — фактор типа II_1, а $e \in M$ — проектор. Обозначим через M_e фактор $\{x \in M;\ xe = ex = x\}$. Для того чтобы M_e был изоморфен M_{1-e}, необходимо и достаточно, чтобы положительное вещественное число $\lambda_0/(1-\lambda_0)$, где $\lambda_0 = \mathrm{Tr}_M(e)$, лежало в фундаментальной группе M ([41]). Пусть тогда $\theta\colon M_e \to M_{1-e}$ — изоморфизм; положим

$$N = \{x + \theta(x);\quad x \in M_e\}.$$

По построению N — подфактор в M, причем непосредственное вычисление $\dim_N(L^2(M), \lambda)$ показывает, что

$$[M:N] = \lambda_0^{-1} + (1-\lambda_0)^{-1}.$$

Так как фундаментальная группа гиперконечного фактора R совпадает с $\mathbb{R}_+^*$, эта конструкция дает существование подфактора N в R с $[R:N] = \alpha$ при произвольном $\alpha \geqslant 4$.

В обозначениях введения объединение примеров α) и β) показывает, что

$$\{1, 2, 3\} \cup [4, +\infty[\subset \Sigma.$$

Кроме того, результат Голдмана [18] указывает, что $\Sigma \cap [1, 2] = \{1, 2\}$, так что остается определить $\Sigma \cap [2, 4]$, с чего и началась деятельность Джонса.

II. КОНСТРУКЦИЯ ДЖОНСА

Пусть M, $L^2(M)$, Tr_M и λ те же, что и выше. Рассмотрим такую изометрическую инволюцию J из $L^2(M)$ в $L^2(M)$, что $J(x) = x^*$ $\forall x \in M$.

Для $x \in M$ пусть $\lambda'(x)$ — оператор в $L^2(M)$ умножения справа на $x:\lambda'(x)\,y = yx$ $\forall y \in M$.

При $x \in M$ имеем $J\lambda(x)^* J = \lambda'(x)$ $\forall x \in M$. Более того, $\lambda'(M)$ равно коммутанту $\lambda(M)$ в $L^2(M)$ ([14]), так что

$$\lambda(M)' = \lambda'(M) = J\lambda(M)J.$$

Пусть N — подалгебра в M, а e_N — оператор ортогонального проектирования в $L^2(M)$ на замыкание N в $L^2(M)$. Согласно построению, $Je_NJ = e_N$; кроме того ([47]), справедливо

Предложение 3. а) *Ограничение E_N оператора e_N на подпространство $M \subset L^2(M)$ — проекция алгебры фон Неймана M на подалгебру N;*

b) *для любых $a, b \in N$ и $x \in M$;*

$$E_N(axb) = aE_N(x)b;$$

c) $E_N(x) \in N^+$ *для любого* $x \in M^+$.

В этом случае говорят, что отображение $E_N: M \to N$ — условное нормальное ожидание, ассоциированное с парой (M, N). Оператор e_N — проектор, причем b) показывает, что

$$(*) \qquad e_N\lambda(a) = \lambda(a)e_N \quad \forall a \in N;$$

$$(**) \qquad e_N\lambda(x)e_N = \lambda(E_N(x)) \quad \forall x \in M.$$

В частности, $e_N \in \lambda(N)'$. Кроме того, имеет место.

Предложение 4. $\lambda(N')$ — *алгебра фон Неймана, порожденная $\lambda(M)'$ и e_N.*

Теорема фон Неймана о бикоммутанте показывает, что достаточно вывести равенство $\lambda(M) \cap \{e_N\}' = \lambda(N)$. Однако при $x \in M$ и $\lambda(x)e_N = e_N\lambda(x)$

$$\lambda(x)1 = (\lambda(x)e_N)1 = (e_N\lambda(x))1 = e_N(x) = \lambda(E_N(x))1,$$

откуда $x = E_N(x)$ и $x \in N$.

Положим $M_1 = J\lambda(N)'J$. Предложение 4 показывает, что M_1 — алгебра фон Неймана в $L^2(M)$, порожденная $\lambda(M)$ и e_N.

Предложение 5. *Предположим, что N — подфактор M конечного индекса.*

а) *M_1 — фактор типа II_1, а $\lambda(M)$ имеет конечный индекс в M_1 с*

$$[M_1 : \lambda(M)] = [M : N];$$

b) $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) = [M : N]^{-1}$;

c) *пусть E_M — каноническое условное нормальное ожидание для фактора M_1 над $\lambda(M)$; тогда* $E_M(e_N) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)1$;

d) *векторное подпространство в M_1, порожденное $\lambda(M)$ и $\lambda(M)e_N\lambda(M)$, — инволютивная подалгебра, слабо плотная в M_1;*

e) *гомоморфизм $x \in N \to e_N\lambda(x) \in M_1$ — изоморфизм из N на приведенную алгебру фон Неймана*

$$(M_1)_{e_N} = \{z \in M_1 : e_Nz = ze_N = z\}.$$

Пункт d) легко следует из равенств $(*)$ и $(**)$. Чтобы доказать e), используем $(*)$ для установления гомоморфности и d) для установления сюръективности. Инъективность получается автоматически, так как каждый фактор типа II_1 — простая алгебра. Равенство a) следует из

$$[M_1 : \lambda(M)] = [J\lambda(N)'J : \lambda(M)] = [\lambda(N)' : \lambda(M)'] = [M : N]$$

(предложение 2c)).

Докажем равенство b). Так как $Je_NJ = e_N$, то

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) = \mathrm{Tr}_{\lambda(N)'}(e_N).$$

Свойство 4 кратности $\dim_N$ показывает, что

$$\mathrm{Tr}_{\lambda(N)'}(e_N) = \dim_N(e_NL^2(M)) \cdot \dim_N(L^2(M))^{-1} = [M : N]^{-1}.$$

Докажем c). Согласно e) и единственности следа Tr_N на N, имеем $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_Nz) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,\mathrm{Tr}_N(z)$ при всех $z \in N$. Поэтому при любом $y \in M$

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_NE_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) \cdot \mathrm{Tr}_N(E_N(y)) =$$
$$= \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) \cdot \mathrm{Tr}_M(y) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,\mathrm{Tr}_{M_1}(y).$$

Равенство $(**)$ показывает теперь, что для любого $y \in M$ выполнено соотношение

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_Ny) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_Nye_N) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_NE_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,\mathrm{Tr}_{M_1}(y),$$

т. е. что $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)1$ — проекция $E_M(e_N)$. □

Основная идея Джонса — повторять проведенную выше конструкцию пары $M \subset M_1$ по паре $N \subset M$. Так получается возрастающая последовательность $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ факторов типа II_1 и последовательность $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ проекторов $e_m \in M_m$, свойства которых легко выводятся из предложения 5. Обозначим через P фактор типа II_1, полученный взятием индуктивного предела возрастающей последовательности $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$, а через Tr_P — нормализованный след на P. Тогда справедливы следующие свойства:

J_1. Для любого m M_m имеет конечный индекс в M_{m+1}, причем

$$[M_{m+1}:M_m]=[M:N].$$

J_2. $e_m\in M_m$, $e_m=e_m^*=e_m^2$.

J_3. $e_m x = x e_m \qquad \forall x\in M_{m-1}$.

J_4. M_{m+1} — алгебра фон Неймана, порожденная M_m и e_{m+1}.

J_5. Пусть E_m — условное ожидание для M_{m+1} над M_m. Тогда

$$E_{m-1}(x)\,e_{m+1}=e_{m+1}xe_{m+1} \qquad \forall x\in M_m.$$

J_6. Пусть $\tau=[M:N]^{-1}$. Тогда

$$E_{m-1}(e_m)=\tau.$$

J_7. $e_{m+1}e_me_{m+1}-\tau e_{m+1}=0$.

J_8. $e_me_{m+1}e_m-\tau e_m=0$.

J_9. $e_ie_j=e_je_i$, если $|i-j|\geqslant 2$.

J_{10}. Подалгебра A_m алгебры P, порожденная $e_1,\ldots,e_m$ и 1, конечномерна, причем $E_m(A_{m+1})\subset A_m$.

J_{11}. Отображение $x\longmapsto xe_{m+1}$ из A_{m-1} в редуцированную алгебру $(A_{m+1})_{e_{m+1}}=\{z\in A_{m+1}: ze_{m+1}=e_{m+1}z=z\}$ — изоморфизм.

J_{12}. Для любого $x\in A_m$ выполнено $\mathrm{Tr}_P(xe_{m+1})=\tau\,\mathrm{Tr}_P(x)$.

III. ТЕОРЕМА ДЖОНСА

Теорема 6. *Пусть Σ — подмножество в $\mathbb{R}^+$, образованное значениями индекса $[M:N]$ для факторов M и N типа II_1, $N\subset M$. Тогда*

$$\Sigma=\left\{4\cos^2\frac{\pi}{n}: n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\right\}\cup[4,+\infty[.$$

Для того чтобы доказать, что $\Sigma\cap[1,4]\subset\{4\cos^2\pi/h;\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\}$, нужно точнее изучить подалгебры A_n в P (в обозначениях разд. II). Для каждого проектора $e\in P$ имеем $\mathrm{Tr}_P(e)\in[0,1]$; более того, если e и f — такие проекторы, что $e\leqslant f$, то $\mathrm{Tr}_P(e)\leqslant \mathrm{Tr}_P(f)$, причем равенство выполняется только при $e=f$. Обозначим через $e\vee f$ (соответственно $e\wedge f$) наименьший проектор в P, превосходящий и e и f (соответственно наибольший из проекторов, которые меньше и e и f). Проекторы $e\vee f$ и $e\wedge f$ принадлежат алгебре фон Неймана, порожденной e и f, причем выполнено основное тождество [46]:

$$(*)\qquad \mathrm{Tr}_P(e\vee f)+\mathrm{Tr}_P(e\wedge f)=\mathrm{Tr}_P(e)+\mathrm{Tr}_P(f).$$

Вернемся к обозначениям разд. II и положим $q_n=e_1\ldots e_N$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

По построению

$$q_n\leqslant q_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad q_{n+1}=q_n\vee e_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad q_m\in A_m.$$

Кроме того, так как A_m порождено 1 и $e_1,\ldots,e_m$, то проектор q_m лежит в центре A_m, так что

$$A_m=\mathbb{C}(1-q_m)+(A_m)_{q_m}.$$

Теперь вычислим рекуррентно по m значение $\mathrm{Tr}_P(q_m)$. Центральное место — это

Лемма 7. *Если $q_m\neq 1$, то $q_m\wedge e_{m+1}=e_{m+1}q_{m-1}$.*

Доказательство. Так как q_{m-1} коммутирует с e_{m+1} (по J_3), то $e_{m+1}q_{m-1}\leqslant q_m\wedge e_{m+1}$. Далее

$$q_m\wedge e_{m+1}\leqslant e_{m+1}q_me_{m+1}=E_{m-1}(q_m)\,e_{m+1}.$$

Поэтому, используя J_{11}, получаем $q_{m-1}\leqslant E_{m-1}(q_m)$. Так как $E_{m-1}(q_m)\in A_{m-1}=\mathbb{C}(1-q_{m-1})+(A_{m-1})_{q_{m-1}}$, то $E_{m-1}(q_m)=\lambda(1-q_{m-1})+z$,

$$z\in(A_{m-1})_{q_{m-1}} \text{ и } q_{m-1}\leqslant z\leqslant 1 \text{ (предложение 3c)},$$

откуда $z=q_{m-1}$. Предложение 3c) показывает, что $0\leqslant\lambda\leqslant 1$; согласно посылке леммы, $\mathrm{Tr}_P(q_m)<1$, откуда $\lambda<1$. Так как $q_m\wedge e_{m+1}$ — это спектральный проектор $e_{m+1}q_me_{m+1}$, отвечающий собственному значению 1, то $q_m\wedge e_{m+1}=e_{m+1}q_{m-1}$. □

Свойство J_{12} показывает, что $\mathrm{Tr}_P(e_{m+1}q_{m-1})=\tau\,\mathrm{Tr}_P(q_{m-1})$; равенство $(*)$ дает при $q_m\neq 1$ соотношение

$$\mathrm{Tr}_P(q_{m+1})+\tau\,\mathrm{Tr}_P(q_{m-1})=\mathrm{Tr}_P(q_m)+\mathrm{Tr}_P(e_{m+1})=\mathrm{Tr}_P(q_m)+\tau.$$

Пусть теперь $\alpha_m=1-\mathrm{Tr}_P(q_m)$. Имеем $\alpha_m\in[0,1]$ и $\alpha_{m+1}\leqslant\alpha_m$. Более того, $\alpha_m\neq 0$ тогда и только тогда, когда $q_m\neq 1$. Пусть $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность полиномов с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, определяемая условиями

$$P_0=0,\ P_1=1,\ \ldots,\ P_{n+1}(\tau)=P_n(\tau)-\tau P_{n-1}(\tau).$$

Лемма 8. а) *Пусть $\alpha_n>0$ при любом $n<n_0$* и $\alpha_n=0$ *при любом $n\geqslant n_0$, $n_0\in\{1,2,\ldots\}$. Тогда $\alpha_n=P_n(\tau)$ при любом $n\leqslant n_0$.*

b) *Если $\tau>\frac{1}{4}$, то $n_0<\infty$, $\tau=\left(4\cos^2\frac{\pi}{n_0}\right)^{-1}$.*

Доказательство. Пункт a) уже доказан. Докажем b). Пусть $\beta\in\mathbb{C}$, $\beta^2=1-4\tau$. Можно доказать, что (при $\beta\neq 0$)

$$P_n(\tau)=\left(\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\beta}{2}\right)^n\right)\beta^{-1}.$$

Если $\tau>1/4$, то $\beta\in i\mathbb{R}$ и $P_n(\tau)=(\sigma^n-\bar\sigma^n)/(\sigma-\bar\sigma)$, где $\sigma=(1+\beta)/2$, так что $P_n(\tau)>0$ не может быть выполнено при любом n. Действительно,

$$P_n(\tau)=|\sigma|^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},\ \text{где}\ \theta=\operatorname{Arg}\sigma.$$

Значит, $n_0<\infty$, и так как $P_{n_0}(\tau)=0$, то $\theta=\pi/n_0$, $\sqrt{4\tau-1}=\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\pi/n_0)$ и $4\tau=1+\operatorname{tg}^2(\pi/n_0)=1/\cos^2(\pi/n_0)$.

Лемма 8 завершает доказательство включения

$$\Sigma\subset\left\{4\cos^2\frac{\pi}{n};\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\right\}\cup[4,\ +\infty].$$

Для того чтобы доказать, что Σ включает значения $4\cos^2(\pi/n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, Джонс использовал свою конструкцию (разд. II), примененную к паре $N\subset M$ конечномерных алгебр фон Неймана ([23]).

IV. АЛГЕБРЫ ГЕККЕ $\mathscr{H}_n(q)$ ([19], [8])

Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов и n — ненулевое целое число. Рассмотрим группу $G=SL_n(\mathbb{F}_q)$ матриц порядка n с коэффициентами в $\mathbb{F}_q$ и детерминантом 1. Пусть $B\subset G$ — подгруппа Бореля, образованная верхнетреугольными матрицами. Обозначим через $\mathscr{H}_n(q)$ алгебру (относительно свертки на G), состоящую из функций f: $G\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$f(bgb')=f(g)\quad\forall b,\ b'\in B\quad\forall g\in G.$$

Пусть X есть G-пространство $X=G/B$, состоящее из флагов в векторном пространстве $E=\mathbb{F}_q^n$. Элемент F из X задается возрастающей последовательностью $(F_i)_{i=0,\ldots,n}$ таких линейных подпространств E, что

$$\dim F_i=i\quad\forall i=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть L — комплексное векторное пространство $L=\mathbb{C}^X$. Это G-модуль (так как G действует на множестве X). Определим для любого $f\in\mathscr{H}_n(q)$ оператор $\pi(f)\in\operatorname{End}(L)$ с матрицей $\pi(f)_{g_1,g_2}=f(g_1^{-1}g_2)$ $\forall g_1,\ g_2\in G/B$.

Нормировав меру Хаара μ на G так, что $\mu(B)=1$, получаем, что π — строгое представление группы $\mathscr{H}_n(q)$, образ которого — алгебра инвариантов группы G в L. Поэтому π — изоморфизм:

$$\pi:\mathscr{H}_n(q)\to\operatorname{End}_G(L).$$

Разложению Брюа $G=\bigcup_{w\in S_n}BwB$ группы G, где S_n — группа подстановок, соответствует естественный базис $(t_w)_{w\in S_n}$ векторного пространства $\mathscr{H}_n(q)$:

$$t_w(g)=1,\ \text{если}\ g\in BwB,\ t_w(g)=0,\ \text{если}\ g\notin BwB.$$

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}_n(q))=n!$. Более того, показывается, что $\pi(t_w)=T_w\in\operatorname{End}_G(L)$ описывается *соответствием* на множестве X, которое флагу F сопоставляет множество таких флагов F', что

$$\dim(F_i\cap F'_j)=\text{мощность}\ (\{1,\ \ldots,\ j\}\cap w\{1,\ \ldots,\ i\})$$
$$\forall i,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть s_i при $i=1,\ \ldots,\ n-1$ — перестановка $(i,\ i+1)$. Тогда $s_i\in S_n$. Для простоты обозначим $T_i=T_{s_i}$. Нетрудно вычислить произведение соответствий T_w и получить следующее описание алгебры $\mathscr{H}_n(q)$:

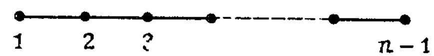
Предложение 9. *Алгебра $\mathscr{H}_n(q)$ порождается t_i, $i=1,\ \ldots$ $\ldots,\ n-1$, и допускает описание соотношениями*

a) $(t_i+1)(t_i-q)=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n-1;$

b) $t_it_j=t_jt_i\quad\forall i,\ j,\quad|i-j|>1;$

c) $t_{i+1}t_it_{i+1}=t_it_{i+1}t_i\quad\forall i=1,\ \ldots,\ n-2.$

Это описание $\mathscr{H}_n(q)$ соответствует описанию симметрической группы S_n как группы Коксетера на основе симметрий $(s_i)_{i=1,\ldots,n}$ и графа Коксетера типа A_{n-1}:



Более общо (ср. [19] и [8, упр. 23, с. 55]), с каждой системой Коксетера (W,S) и каждым отображением f: $S\to\mathbb{C}$, постоянным на классах смежности в S относительно W, канонически связывается некоторая алгебра. В интересующем нас случае все s_i сопряжены в $W=S_n$, так что такая функция f — константа. Поэтому общая конструкция позволяет в этом случае q принимать произвольное значение в $\mathbb{C}$.

Определение 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ [1]), а $q \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\mathscr{H}_n(q)$ алгебру над $\mathbb{C}$, порожденную $(t_i)_{i=1,\ldots,n-1}$ со следующими соотношениями:

$$(t_i+1)(t_i-q)=0 \quad \forall i=1, \ldots, n-1;$$
$$t_i t_j = t_j t_i \quad \forall i, j, |i-j| \geqslant 2;$$
$$t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1} \quad \forall i=1, \ldots, n-2.$$

При $q=1$ алгебра $\mathscr{H}_n(q)$ есть групповая алгебра $\mathbb{C}S_n$ симметрической группы. При $q^n \neq 1$, $q \neq 0$, $\mathscr{H}_n(q)$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}S_n$. При $q \neq 1$, $q^n = 1$, или $q=0$ алгебра $\mathscr{H}_n(q)$ не полупроста.

Согласно определению, алгебры $\mathscr{H}_n(q)$ при $n \in \mathbb{N}$ образуют индуктивную систему алгебр относительно гомоморфизма $\rho_{n,m}$: $\mathscr{H}_n(q) \to \mathscr{H}_m(q)$, $n < m$, однозначно определенного условием

$$\rho_{n,m}(t_{j,n}) = t_{j,m} \quad \forall j=1, \ldots, n-1.$$

Определение 11. Обозначим через $\mathscr{H}_\infty(q)$ индуктивный предел последовательности $\mathscr{H}_n(q)$.

Согласно определению, $\mathscr{H}_\infty(q)$ порождена образующими t_j, $j \in \mathbb{N}^*$, и допускает описания очевидными соотношениями.

Лемма 12. a) *Предположим, что $q \neq -1$. Положим $e_j = \frac{1}{q+1} t_{j+1}$. Тогда e_j, $j \in \mathbb{N}^*$, порождают $\mathscr{H}_\infty(q)$, причем $\mathscr{H}_\infty(q)$ описывается соотношениями*

$$e_j^2 = e_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^*; \quad e_i e_j = e_j e_i \quad \forall i, j, |i-j| > 1;$$
$$e_{i+1} e_i e_{i+1} - \tau e_{i+1} = e_i e_{i+1} e_i - \tau e_i \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,$$

в которых $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$.

b) *При $\tau \in \mathbb{R}$ существует единственный антилинейный инволютивный антиавтоморфизм $x \mapsto x^*$ алгебры $\mathscr{H}_\infty(q)$, такой, что*

$$e_j^* = e_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Утверждение a) доказывается непосредственным вычислением, а b) следует из инвариантности описания a).

Эта конструкция и теорема Джонса приводят к следующему результату.

[1]) Здесь и далее $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. — *Прим. перев.*

Теорема 13. ([24]). *Пусть $q \in [1, +\infty[\cup \{e^{2\pi i/m}, m=3, 4, \ldots\}$, $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$, а $\mathscr{H}_\infty(q)$ — описанная выше алгебра с инволюцией $x \mapsto x^*$ из леммы 12b. Тогда*

1) *Существует единственный след φ на $\mathscr{H}_\infty(q)$, такой, что $\varphi(1)=1$, а $\varphi(xe_{i+1}) = \tau\varphi(x)$ $\forall x \in \mathscr{H}_i(q)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

2) *След φ положителен (т. е. $\varphi(x^*x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathscr{H}_\infty(q)$) и левое регулярное представление $\mathscr{H}_\infty(q)$ в гильбертовом пространстве, связанном с φ, порождает гиперконечный фактор **типа** II_1.*

3) *Подалгебра фон Неймана в M, порожденная $(e_i)_{i \geqslant 2}$, — это подфактор N в M, причем $[M:N]=\tau$.*

Фактически достаточно сравнить описание $\mathscr{H}_\infty(q)$ из леммы 12 с соотношениями J_2, J_7, J_8, J_9 на проекторы e_j из конструкций Джонса. При этом получается инволютивный гомоморфизм ρ из $\mathscr{H}_\infty(q)$ в P, и достаточно положить $\varphi = \mathrm{Tr}\, p \circ \rho$. Единственность φ при условии 1) получается непосредственно.

Теперь мы изложим два замечательных результата Окнеану.

Теорема 14 ([42], [15]). *Пусть $q \in \mathbb{C}$, причем $q \neq -1$, $q + q^{-1} \in \mathbb{R}$. Пусть $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$. Для того чтобы существовало нетривиальное инволютивное представление алгебры с инволюцией $(\mathscr{H}_\infty(q), *)$ в гильбертовом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы q принадлежало множеству*

$$\{e^{2\pi i/m};\ m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 3\} \cup [1, +\infty[$$

(под тривиальным представлением π понимается такое представление, что $\pi(e_j) \in \{0, 1\}$ $\forall j \in \mathbb{N}$).

Теорема 15 ([42]). a) *Пусть $q, z \in \mathbb{C}$, $q \neq -1$. Тогда на $\mathscr{H}_\infty(q)$ существует единственный след $\varphi_{q,z}$, такой, что*

$$\varphi(xe_{n+1}) = z\varphi(x) \quad \forall x \in \mathscr{H}_n(q).$$

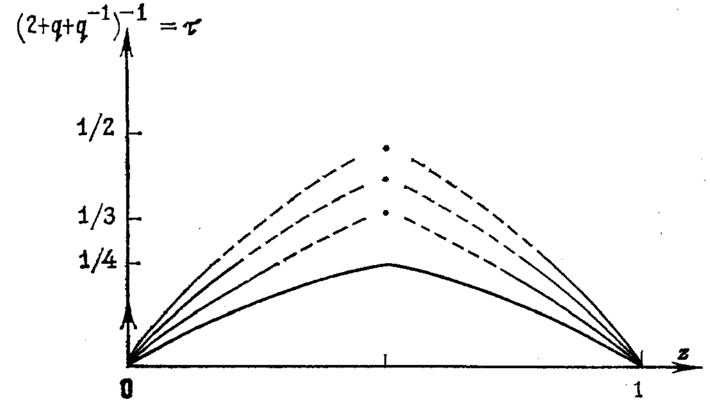
b) *Пусть $q \in \{e^{2\pi i/m};\ m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 3\} \cup [1, \infty[$ и $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$.*

Для того чтобы $\varphi_{q,z}$ был положительным следом на инволютивной алгебре $(\mathscr{H}_\infty(q), *)$, необходимо и достаточно, чтобы $z \in [0, 1]$, причем пара (q, z) удовлетворяла следующим условиям:

1) $q \geqslant 1$, $(1+q)^{-1} \leqslant z \leqslant q(1+q)^{-1}$;

2) $q \geqslant 1$ *и существует* $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $z = \dfrac{1-q^{k-1}}{(1+q)(1-q^k)}$;

3) $q = e^{2\pi i/m}$ *и существует* $k \in \mathbb{Z}, |k| \leqslant m-1$ *с* $z = \dfrac{1-q^{k+1}}{(1+q)(1-q^k)}$.



Как и в теореме 13, 3), для каждого значения (q, z) получается подфактор N гиперконечного фактора. Индекс таких подфакторов как функция q и z был вычислен Венцлем [50].

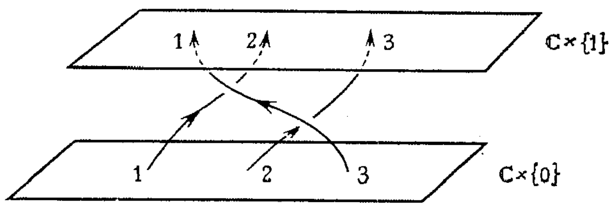
V. ГРУППЫ КОС, УЗЛЫ И ТЕОРЕМЫ АЛЕКСАНДЕРА И МАРКОВА

Пусть $n \in \mathbb{N}$, а Y_n — множество подмножеств в $\mathbb{C}$ мощности n. Снабдим Y_n топологией как фактор открытого множества $\Omega_n \subset \mathbb{C}^n$:

$$\Omega_n = \{(z_i)_{i=1,\ldots,n};\ z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j\}$$

по действию группы подстановок. По определению группа кос B_n есть $\pi_1(Y_n)$. Рассмотрим $\mathbb{C} \times [0, 1]$ как часть $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ и зафиксируем начальную точку p в Y_n, скажем $p = \{1, 2, \ldots, n\} < \mathbb{C}$. Теперь путь $\varphi \in C(S^1, Y_n)$, $\varphi(0) = p$, можно представлять себе как косу в $\mathbb{R}^3$, обозначаемую $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi} = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times [0, 1];\ z \in \varphi(t)\}.$$



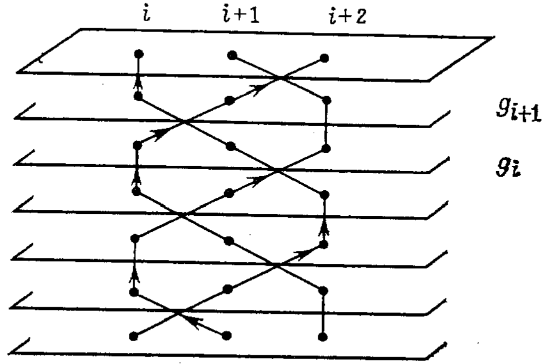
Закон умножения в $B_n = \pi_1(Y_n)$ соответствует геометрически соединению двух кос конец в конец. Обозначим при $j = 1, \ldots$

$\ldots, n-1$ через $g_i \in B_n$ элемент $\pi_1(Y_n, p)$, отвечающий классу пути φ_j,

$$\varphi_j(t) = \{k;\ k \neq j,\ j+1\} \cup \left\{j + \tfrac{1}{2}(1 \pm e^{\pi i t})\right\}, \quad t \in [0, 1].$$

Следующий рисунок показывает, что при любом i

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}.$$

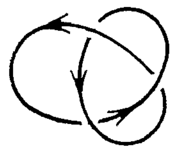


Теорема 16 (Артин [3]). *Группа* B_n *при любом* n *порождается* $g_1, \ldots, g_{n-1}$ *и допускает описание соотношениями*

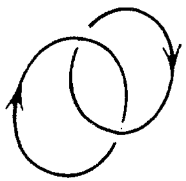
a) $g_i g_j = g_j g_i \quad \forall i, j \mid |i-j| > 1.$

b) $g_{i+1} g_i g_{i+1} = g_i g_{i+1} g_i \quad \forall i = 1, \ldots, n-2.$

Назовем *зацеплением* в $\mathbb{R}^3$ любое *ориентированное* одномерное C^∞-подмногообразие в $\mathbb{R}^3$. Назовем связное зацепление *узлом*. Для любого узла L можно найти C^∞-вложение l: $S^1 \to \mathbb{R}^3$, которое будет ориентированным диффеоморфизмом S^1 на L. Главная проблема теории узлов — это классификация с точностью до изотопии вложений S^1 в $\mathbb{R}^3$. Зацепление можно описывать его проекцией на плоскость, т. е. объединением трансверсально пересекающихся кривых, причем для каждой точки пересечения можно показать, что проходит над чем, обычным образом.



УЗЕЛ



ЗАЦЕПЛЕНИЕ

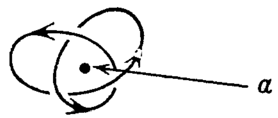
Пусть $g \in B_n$, а $\varepsilon(g)$ — соответствующая перестановка множества $p = \{1, 2, \ldots, n\}$. Выберем такой представитель φ для g, что $\varphi \in C^\infty(S^1, Y_n)$, причем $\varphi(t) \subset \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$ при $t \in S^1$. Рассмотрим прямую $\Delta = \{(0, s, 0);\ s \in \mathbb{R}\}$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть R_θ, $\theta \in S^1$, — поворот на угол θ вокруг оси Δ. Отождествим $\mathbb{C}^+ \times S^1$ с дополнением в $\mathbb{R}^3$ до Δ с помощью отображения ρ,

$$\rho(z, \theta) = R_\theta(x, y, 0) \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad \theta \in S^1.$$

Подмногообразие $\rho(Z)$, где $Z = \{(z, \theta) \in \mathbb{C}^+ \times S^1;\ z \in \varphi(\theta)\}$, будет зацеплением, снабженным ориентацией (возникающей из проекции на S^1). Связные компоненты Z индексируются циклами перестановки $\varepsilon(g)$. Согласно определению, класс изотопии зацепления $\rho(z)$ зависит только от $g \in B_n$, но не от выбора φ. Мы получили отображение $g \longmapsto \hat{g}$ из B_n в множестве α классов изотопии зацеплений в $\mathbb{R}^3$.

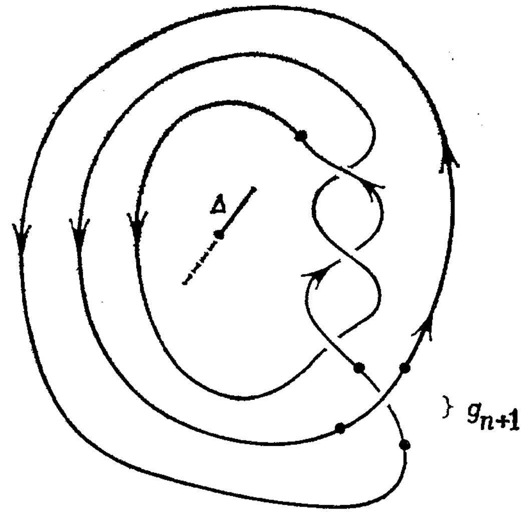
Теорема 17 (Александер 2). *Отображение $g \longmapsto \hat{g}$ из дизъюнктного объединения $\coprod_1^\infty B_n$ в α — сюръекция.*

Для того чтобы найти g с $\hat{g} = L$, достаточно найти прямую Δ в $\mathbb{R}^3$, не пересекающуюся с L и такую, чтобы угол между плоскостью $P(x)$, проведенной через Δ и $x \in L$, и фиксированной плоскостью P_0, $\Delta \subset P_0$, был возрастающей функцией x.

$L =$ 

Пример.
Возьмем в качестве Δ ось, перпендикулярную плоскости рисунка и проходящую через a. Получаем $L = \hat{g}$, где g обозначает косу:

Очевидно, что $\hat{g}$ зависит лишь от класса сопряженности g в B_n. Более того, если рассмотреть естественное включение B_n в B_{n+1} $(g_i^n \mapsto g_i^{n+1})$, то получим $(g g_{n+1}^{\pm 1})^\wedge = g \quad \forall g \in B_n$;



Теорема 18 ([34], [6]). *Отношение эквивалентности $g_1 \sim g_2$ при $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ на $\coprod_n B_n$ порождается следующими образующими:*

a) *Если $g_1, g_2 \in B_n$ сопряжены в B_n, то $g_1 \sim g_2$.*

b) *Если $g \in B_n$, то $g g_{n+1}^{\pm 1} \sim g$.*

Поэтому любое отображение Ψ из $\coprod_n B_n$ в некоторое множество, удовлетворяющее соотношениям $\psi(aga^{-1}) = \psi(g)$, $\psi(g g_{n+1}^{\pm 1}) = \psi(g)$ при $g \in B_n$, определяет изотопический инвариант зацепления в $\mathbb{R}^3$.

При сравнении описания алгебры Гекке из определения 10 с описанием Артина группы кос B_n (теорема 16) получаем, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}^*$ существует единственный гомоморфизм π_n^λ из B_n в $\mathscr{H}_n(q)$, такой, что

$$\pi_n^\lambda(g_i) = \lambda t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Теперь любой след μ_n на $\mathscr{H}_n(q)$ определяет при композиции с π_n^λ отображение ψ из B_n в $\mathbb{C}$, постоянное на любом классе сопряженности. Положим $\mu_n = \alpha_n \varphi$, где $\alpha_n \in \mathbb{C}$, а φ — определенный Джонсом след из теоремы 13. Тогда применение 13.1 дает

$$\varphi(\pi^\lambda(gg_{n+1})) = \lambda\left(\frac{-1}{1+g}\right)\varphi(\pi^\lambda(g)) \qquad \forall g \in B_n;$$

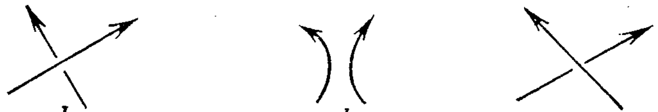
$$\varphi(\pi^\lambda(gg_{n+1}^{-1})) = \lambda^{-1}\left(\frac{-g}{1+g}\right)\varphi(\pi^\lambda(g)) \quad \forall g \in B_n.$$

Поэтому при $\lambda^2 = g$ и $\alpha_{n+1} = \frac{-\lambda}{1+q}\alpha_n$ имеем $\mu_{n+1}(\pi_{n+1}^\lambda(gg_{n+1}^{\pm 1})) = \mu_n(\pi_n^\lambda(g))$ для любого $g \in B_n$. Значит, верна

Теорема 19 ([21]). *Пусть L — зацепление в $\mathbb{R}^3$, n — целое число, а $g \in B_n$ и $\hat{g} = L$. Существует единственный полином Лорана V_L по $\sqrt{q}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, такой, что*

$$V_L(q) = \left(\frac{-\sqrt{q}}{1+q}\right)^{n-1}\varphi\left(\pi_n^{\sqrt{q}}(g)\right).$$

Полином V_L зависит лишь от класса изотопии L. Более того, если L имеет нечетное число связных компонент, то V_L — полином Лорана по q. Используем символы L_+, L_0, L_- для обозначения зацеплений, проекции которых на некоторую плоскость совпадают вне малого диска, а внутри него описываются следующими рисунками:



L_+ L_0 L_-

Конвей показал, что полиномы Александера Δ_L удовлетворяют соотношению

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t) = 0.$$

Точно так же полиномы Джонса удовлетворяют соотношению

$$tV_{L_+}(t) - t^{-1}V_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) = 0.$$

Следующий результат был одновременно получен Фрейдом, Иеттером, Хостом, Ликоришем, Миллеттом и Окнеану [15]:

Теорема 20 ([15]). *Существует единственное отображение P из множества классов изотопии зацеплений в $\mathbb{R}^3$ в множество полиномов Лорана степени однородности 0 от x, y, z, такое, что*

1) $xP_{L_+}(x, y, z) + yP_{L_-}(x, y, z) + zP_{L_0}(x, y, z) = 0.$

1) $P_L(x, y, z) = 1$, *если узел L тривиален.*

Полиномы P_L обладают следующими свойствами:

1) Полиномы Александера — Конвея есть

$$\Delta_L(q) = P_L(1, -1, q^{1/2} - q^{-1/2}).$$

2) Полиномы Джонса есть

$$V_L(q) = P_L(q, -q^{-1}, q^{1/2} - q^{-1/2}).$$

3) При одновременной смене ориентаций всех связных компонент L полином P_L не изменяется.

4) При смене ориентации $\mathbb{R}^3$

$$P_{\tilde{L}}(x, y, z) = P_L(y, x, z).$$

5) Если L — связная сумма[1]) L_1 и L_2, то

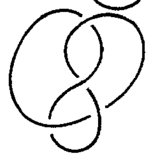
$$P_L = P_{L_1}P_{L_2}.$$

Примеры.

a) $L =$  $P_L = yz^{-1} + x^{-1}y^2z^{-1} - x^{-1}z$

b) $L =$  $P_L = x^{-2}z^2 - 2x^{-1}y - x^{-2}y^2$

c) $L =$  $P_L = y^{-2}z^2 - 2xy^{-1} - x^2y^{-2}$

d) $L =$  $P_L = x^{-1}y^{-1}z^2 - xy^{-1} - x^{-1}y - 1$

В частности, P_L (а также V_L) различает трилистник и его зеркальное отражение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexander J. W. A lemma on systems of knotted curves, Proc. Nat. Acad. 9 (1923), 93—95.
2. Alexander J. W. Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc., 30 (1928), 275—306.

[1]) То есть $L = \tilde{L}_+$, а $\tilde{L}_0$ — несвязная сумма L_1 и L_2. — *Прим. перев.*

3. Artin E. Theorie der Zopfe. Hamburg, Abh. 9, p. 47—72.
4. Baxter R. J. Exactly solved nodels in statistical mechanics, Acad. Press. London, 1982. [Имеется перевод: Бэкстер Р. Дж. Точно решаемые задачи в статистической механике. — М.: Мир, 1985.]
5. Bennequin D. Enterlacements et structures de contact, Thèse, Paris, 1982.
6. Birman J. Braids, links and mapping class groups, Ann. Math. Studies, 82 (1974).
7. Birman J. On the Jones polynomial of the closed 3 braids, Preprint.
8. Bourbaki N. Groupes et Algèbres de Lie. Chap. 4, 5, 6, no. 1337, Hermann, Paris, 1960—1972. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972.]
9. Bratelli O. Inductive limits of finite dimensional C^* algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 171 (1972), 195—234.
10. Brieskorn E. Sur les groupes de tresses. Sém. Bourbaki, no. 401, 1971—1972. [Имеется перевод: Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду). — Математика, 1974., т. 18, вып. 3., с. 46—59.]
11. Bruhat F., Tits J. Groupes réductifs sur un corps local, Ch. 1. Publ. IHES, vol. 41 (1972).
12. Burau W. Über Zopfgruppen und gleichsinning verdrillte verkettunger, Abh. Math. Sem. Hanischen Univ., 11 (1936), 171—178.
13. Conway J. H. An enumeration of knots and links, Computational problems in Abstract Algebra, Pergamon, N. Y. (1970), 329—358.
14. Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, Deuxième édition, Gauthier-Villars, 1969.
15. Freyd P., Yetter D., Hoste J., Lickorish W. B. R., Millett K. and Ocneanu A. A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc., 12, no. 2 (April 1985).
16. Freyd P., Yetter D. A new invariant for knots and links, Preprint, Sept. 1985.
17. Garside F. The braid group and other groups, Quart. J. Math., Oxford, 20 (1969), 235—254.
18. Goldman M. On subfactors of type II_1, Mich. Math. J., 7 (1960), 167—172.
19. Ivahori N. and Matsumoto H. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, Publ. IHES, vol. 25 (1965), 5—48.
20. Jones V. L'indice des sous-facteurs de type II_1, C. R. Ac. Sci. Paris, 286 (1977), 597—598.
21. Jones V. A polynomial invariant for knots via von Neumann Algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 12 (1985), 103—112.
22. Jones V. Groupes de tresses, algèbres de Hecke et facteurs de type II_1, C. R. Ac. Sci. Paris, 298, Sér. 1, no. 20 (1984).
23. Jones V. Index for subfactors, Invent. Math., 72 (1983), 1—25.
24. Jones V. Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors, Proc. Japan—US Conf. (1983), Preprint.
25. Jones V. Sur la conjugaison des sous-facteurs des facteurs de type II_1, C. R. Ac. Sci. Paris, 286 (1977), 597—598.
26. Kauffman L. H. A geometric interpretation of the generalized polynomial, Preprint, 1985.
27. Kazhdan D., Lusztig G. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math., 53 (1979), 165—184.
28. Kazhdan D. Lusztig G. Shubert varieties and Poincaré duality, Proc. Symp. Pure Math., 36 (1980).
29. Kosaki H. Extension of Jones' theory of index to arbitrary factors, Preprint MSRI. Berkeley, 1985.
30. Lannes J. Sur l'invariant de Kervaire pour les noeuds classiques, Preprint, Ecole Polytechnique, 1984.

31. Lickorish W. B. R., Millett K. C. A polynomial invariant of oriented links, Preprint. January 1985.
32. Lickorish W. B. R. Prime knots and tangles, Trans. Math. Soc., 267 (1981).
33. Tempercey H. N. V., Lieb E. H. Proc. Royal Soc., London (1971), 251—280.
34. Markov A. A. Über die freie Aequivalenz geschlossener Zopfe, Мат. сб., 1 (1935), 73—78.
35. Matsumoto H. Analysic harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine, Lecture Notes in Math., Springer, Vol. 590, 1977.
36. Morton H. R. The Jones polynomial for unoriented links, Preprint, University of Liverpool, 1985.
37. Morton H. R. Threading knot diagrams, Preprint, University of Liverpool.
38. Morton H. R. Closed braids representatives for a link and its Jones—Conway polynomial, Preprint, 1985.
39. Murasugi K. Jones polynomials of special alternating knots, Preprint.
40. Murray F., von Neumann J. On rings of operators II, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 208—248.
41. Murray F., von Neumann J. On rings of operators IV, Ann. Math., 4 (1943), 716—808.
42. Ocneanu A. A polynomial invariant for knots. A combinatorial and an algebraic approach, Preprint MSRI, 1984.
. Pimsner M., Popa S. Entropy and index for subfactors, Preprint INCREST, Bucharest, 1983.
44. Przytycki J. H., Traczyk P. Invariants of links of Conway type, Preprint, 1985.
45. Seifert B. The spherical traces for Hecke algebras associated to type II_1 factors, Preprint IHES, 1985.
46. Takesaki M. Theory of operator algebras I, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1979.
47. Umegaki H. Conditional expectation in an operator algebra I, Tohoku Math. J., 6 (1954), 358—362.
48. van Buskirk J. A version of the generalized Jones polynomial which is positive for positive knots, Preprint, University of Oregon, 1985.
49. Wassermann A. Automorphic actions of compact groups. Thesis, University of Pennsylvania, 1981.
50. Wenzl H. On sequences of projections, Preprint, University of Pennsylvania, 1984.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Reshetikhin N. Yu. Quantized universal envellopping algebras. the Yang—Baxter equations and invariants of links, I, II. LOMI Preprints E-4-87, E-17-87, 1988.
2*. Turaev V. G. The Yang—Bixter equation and invariants of links, LOMI Preprint E-3-87, 1987.
3*. Jones V. F. R. On knot invariants related to some statistical mechanical models. Preprint, University of California at Berkeley, 1988, 1—42.
4*. Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial, Princeton, Preprint IASSNS-83/33.
5*. Дринфельд В. Г. Квазихопфовы алгебры. — Алгебра и анализ, 1989, т. 1, вып. 4.
6*. Решетихин Н. Ю.. Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок. — Алгебра и анализ, т. 1, вып. 2, с. 169—188.

РАЗБИЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ: К ВОПРОСУ О ТРЕТЬЕЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА[1])

Пьер Картье

ВВЕДЕНИЕ

Париж, 1900 г. В связи со Всемирной выставкой Второй международный математический конгресс собирает цвет эпохи. Руководит им Пуанкаре. Доклад Гильберта ожидается с особым нетерпением. Он читается утром в среду, 8 августа 1900 г. В этот день в Париже сильная жара. Гильберт представляет свой знаменитый список из 23 проблем. Впрочем, из-за недостатка времени он, следуя совету Гурвица и Минковского, ограничивается выборкой из 10 проблем. Текст его доклада появился в 1902 г. на немецком языке — этот текст воспроизведен в собрании его сочинений — и в английском переводе в Бюллетене Американского математического общества; этот перевод повторен в трудах симпозиума 1974 г.

Вот формулировка третьей проблемы в моем переводе с немецкого:

«3. *Равенство объемов двух тетраэдров с равными основаниями и высотами.*

В двух письмах к Герлингу Гаусс выразил сожаление, что некоторые теоремы геометрии тел зависят от метода исчерпывания, т. е., в современной терминологии, от аксиомы непрерывности (или аксиомы Архимеда). Гаусс, в частности, упомянул теорему Евклида (книга XII, предл. 5), согласно которой две треугольные пирамиды находятся в том же отношении, что и их основания. Однако аналогичная задача для площадей плоских фигур решена полностью; Герлингу удалось доказать равенство объемов двух симметричных многогранников путем разбиения их на части, совмещаемые перемещением. В то же время мне кажется, что доказать таким способом цитированную выше теорему Евклида в общем случае невозможно; задача состоит в строгом доказательстве невозможности этого. Мы получим такое доказательство, если нам удастся *найти два тетраэдра с одинаковым основанием и одинаковой высотой, которые невозможно разбить на когруэнтные тетраэдры и невозможно дополнить когруэнтными тетраэдрами до многогранников, для которых возможно подобное разбиение на конгруэнтные тетраэдры.»*

[1]) Pierre Cartier. Décomposition des polyèdres: Le point sur le troisième problème de Hilbert. — Seminaire Bourbaki, 37 ème année, 1984—85, n° 646, Astérisque 133—134, 1986, p. 261—288.

История этой проблемы довольно любопытна. Еще до публикации Гильберта Ден дал ее решение ([11], [12]) в требуемой Гильбертом форме; что важнее, он еще и определил инвариант, носящий его имя, — к инварианту мы вернемся позже. К тому же при устном сообщении Гильберт не сохранил 3-ю проблему в ограниченном списке. Поскольку она была решена, да к тому же относилась к элементарной геометрии, ею продолжали интересоваться лишь несколько швейцарских, датских и русских геометров. В 1974 г. конференция в Де Кальбе (США) рассмотрела положение с проблемами Гильберта. По поводу 3-й проблемы было устное сообщение, но в двух опубликованных томах [2] нет ни одной печатной работы по этому поводу.

Тем не менее, начиная с 1975 г., различные задачи топологии и дифференциальной геометрии приводили к рассмотрению когомологий групп Ли с дискретной топологией и вещественных алгебр Ли, рассматриваемых как алгебры над полем рациональных чисел. Те же самые группы появляются в алгебраической *K*-теории. Имеется волнующая аналогия с современными проблемами, связанными с калибровочными полями; она позволяет предположить существование неожиданных связей между арифметикой, топологией и математической физикой, выражаемых на языке циклических гомологий. В определенной степени этот доклад — не что иное, как продолжение моего предыдущего доклада № 621 [1]).

Я приношу искреннюю благодарность Ж.-Л. Катлино, К. Шемла, Д. Хьюзмюллеру и Дж. Милнору за любезно предоставленные ими материалы, а также К. Касселу, Ж.-Л. Лодею и К. А. Са за разрешение использовать при подготовке этого доклада их неопубликованные заметки.

1. ПРЕЛЮДИЯ: ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМЫ ДО 1900 Г.

1.1. Евклид и площади плоских фигур

Конец I книги и VI книга «Начал» Евклида посвящены площадям плоских фигур. Начало I книги посвящено признакам равенства треугольников (вернее говоря, конгруэнтности

[1]) Имеется перевод: П. Картье. Циклические гомологии: обзор недавних работ Конна, Каруби, Лодея, Квиллена... — Алгебра и теория чисел с приложениями. — М.: Мир, 1987, с. 175—203. — *Прим. перев.*

треугольников, если мы называем конгруэнтными две фигуры A и B, для которых существует перемещение, переводящее A в B). Начиная с предложения I.34, изложение посвящено различным случаям, в которых про треугольники или параллелограммы можно сказать, что они имеют один и тот же объем (см. табл. I в конце статьи). В частности, предложение I.41 можно было бы перефразировать классической формулировкой: площадь треугольника есть половина произведения основания на высоту. Но трудно было бы найти что-нибудь более противоречащее духу Евклида: он нигде не определяет понятие площади и для него было бы немыслимо приписывать площади числовое значение.

Если проанализировать доказательства Евклида и то, что понимается под *общими положениями* (или ОП—это аксиомы общего вида, приведенные в «Началах» вслед за списком геометрических постулатов), то приходится считать, что он рассматривает отношение эквивалентности на множестве многоугольников[1]), которое интерпретируется как равенство площадей. Это отношение эквивалентности[2]) удовлеворяет следующим условиям:

a) конгруэнтные фигуры эквивалентны (ОП 4);

b) если фигура A состоит из двух частей A' и A'', а B состоит из B' и B'', то эквивалентность A' с B' и A'' с B'' влечет за собой эквивалентность A с B (ОП 2);

c) в условиях b), если A эквивалентно B, а A' эквивалентно B', то A'' эквивалентно B'';

d) если фигура A состоит из n частей, эквивалентных A', а B — из n частей, эквивалентных B', то из эквивалентности A с B следует эквивалентность A' с B'.

Завершает I книгу *теорема Пифагора*: в прямоугольном треугольнике ABC со сторонами a, b, c, где угол A прямой, выполняется равенство $a^2 = b^2 + c^2$. Это равенство интерпретируется буквально следующим образом[3]): квадрат, построенный на стороне a, эквивалентен фигуре, состоящей из двух квадратов, равных квадратам, построенным на сторонах b и c. В таблице II воспроизведены различные конфигурации, обосновывающие эту теорему посредством манипуляций с площадями.

[1]) В действительности Евклид не дает общего определения многоугольника, но рассматривает в основном треугольники и четырехугольники (определения с 19 по 22).

[2]) Евклид не считал нужным различать конгруэнтность фигур и их эквивалентность (т.е. равенство площадей) и называл то и другое равенством фигур.

[3]) Известно, что манипуляции с площадью замещают алгебру в книгах Евклида (в частности, см. книгу VI).

В книге VI Евклид использует результаты о пропорциях, полученные в книге V; он сможет изучить подобие и доказать два следующих фундаментальных результата:

a) если фигура A' подобна фигуре A в отношении t, то отношения площадей A' и A есть t^2;

b) если в параллелограмме увеличить одну пару параллельных сторон в t раз, а другую в t' раз, то площадь увеличится в tt' раз.

При этом мимоходом посредством эквивалентности площадей доказывается и теорема Фалеса.

1.2. Теория площадей плоских фигур в XIX в.

В XIX веке многие математики, в том числе и Бойяи-отец, снова обратились к мысли развить понятие площади, не прибегая к понятию непрерывности. Результаты этих исследований обобщаются в гл. IV «Оснований геометрии» Гильберта [7] (см. также дополнение III). Первым делом необходимо четко определить понятие многоугольника (или, скорее, многоугольной области) на плоскости как конечное объединение треугольных областей. Говорят, что многоугольник A разбит на многоугольники B и C, если $A = B \cup C$, причем пересечение $B \cap C$ есть объединение отрезков прямых; аналогично и определение разбиения на конечное число многоугольников.

Определение 1. Два многоугольника A и A' *эквивалентны относительно разбиений* ("zerlegungsgleich"), если A можно разбить на треугольники $T_1, \ldots, T_n$, а A' — на треугольники $T'_1, \ldots, T'_n$ так, что каждый треугольник T_i конгруэнтен треугольнику T'_i.

Определение 2. Два многоугольника A и A' *эквивалентны относительно дополнений* ("ergänzunggleich"), если существуют два таких эквивалентных относительно разбиений многоугольника C и C', что C разбит на A и B, а C' — на A' и B', причем B и B' эквивалентны относительно разбиений.

Ясно, что многоугольники, эквивалентные в смысле 1, будут эквивалентны и в смысле 2. Обратное верно в вещественной плоской геометрии, но уже в плоской геометрии над упорядоченным неархимедовым полем верно не будет. Таким образом, в вещественном случае, которым мы здесь и ограничимся, имеется единственное понятие эквивалентности; оно удовлетворяет всем требованиям Евклида. Применяя эти соображения, можно доказать элементарными методами следующий результат (Евклид, I.45):

Пусть AB — отрезок, взятый за единицу длины. Для любого многоугольника P существует прямоугольник $ABCD$, эквивалентный P, причем ровно один[1] [2].

За единицу площади примем площадь квадрата со стороной AB. Теперь площадь упомянутого многоугольника P измеряется в этих единицах величиной отношения CB/AB.

1.3. Обобщение на размерности $\geqslant 3$

Начнем с нескольких общих конструкций. Пусть K — упорядоченное поле, T — векторное пространство над K конечной размерности n, а E — аффинное пространство, соответствующее пространству переносов T. *Симплекс* $[s_0, \ldots, s_p]$ размерности p в E определяется $p+1$ точками $s_0, \ldots, s_p$ с линейно независимыми векторами $\overrightarrow{s_0 s_i}$ (при $1 \leqslant i \leqslant p$). Он состоит из точек вида $\sum\limits_{i=0}^{p} c_i s_i$ с такими коэффициентами $c_i \geqslant 0$ из K, что $\sum\limits_{i=0}^{p} c_i = 1$. *Политопом*[3] в E (в размерности 3 говорят *полиэдр* или *многогранник*) назовем объединение конечного числа симплексов; политоп называется *вырожденным*, если все эти симплексы имеют размерность $< n$.

Говорят, что политоп P *разбит* на политопы $P_1, \ldots, P_r$, если $P = P_1 \cup \ldots \cup P_r$, причем $P_i \cap P_j$ — вырожденный политоп при $i \neq j$.

Для обоснования понятия объема политопа вводить метрику не обязательно; достаточно n-линейной антисимметрической формы ω на T. По определению объем n-симплекса равен $\frac{1}{n!}|\omega(v_1, \ldots, v_n)|$, где v_i — вектор $\overrightarrow{s_0 s_i}$, причем объем p-симплекса при $p < n$ полагается равным нулю. Политоп P можно разбить на симплексы $T_1, \ldots, T_r$, и чисто алгебраическими методами доказывается, что сумма объемов симплексов $T_1, \ldots, T_r$ зависит только от P. Она называется *объемом* P и обозначается $\operatorname{vol}(P)$. При этих определениях выполнены следующие свойства (Хадвигер [5, ch. 2]):

a) *Если P и P' — два политопа, то*

$$\operatorname{vol}(P \cap P') + \operatorname{vol}(P \cup P') = \operatorname{vol}(P) + \operatorname{vol}(P'). \tag{1}$$

b) *Если политоп P вырожден, то* $\operatorname{vol}(P) = 0$.

---

[1]) Евклид не считал нужным доказывать единственность, которая в его изложении вытекала из аксиомы «целое больше, чем его часть» (ОП 5).

[2]) По-видимому, имеется в виду ориентированный прямоугольник. — *Прим. перев.*

[3]) Общность и простота этого определения не должны скрывать всей сложности ведущего к нему исторического пути (ср. обсуждение у Лакатоса [8] тождества Эйлера $F - A + S = 2$).

c) *Если u — автоморфизм аффинного пространства E, а u_T — соответствующий автоморфизм T, то*

$$\operatorname{vol}(u(P)) = |\det(u_T)| \operatorname{vol}(P) \tag{2}$$

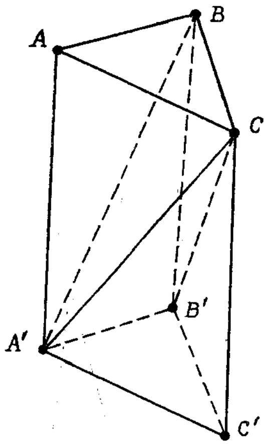
для любого политопа P.

Вернемся к евклидовой геометрии. Поле K здесь — поле вещественных чисел, а T снабжено положительно определенным скалярным произведениям. Нормализуем ω по $|\omega(e_1, \ldots, e_n)| = 1$, где $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный ортонормированный базис T. Для ω есть два возможных выбора, а именно ω_0 и $-\omega_0$, соответствующих двум возможным ориентациям T (или E). Заменив «треугольник» на «симплекс», а «многоугольник» на «политоп», можно повторить определения 1 и 2 из п. 1.2. В случае $n = 3$ Сидлер [18] показал, что две этих эквивалентности не совпадают; на произвольную размерность этот результат обобщили Зилев ([20], [21]) и Хадвигер [5].

1.4. Третья проблема Гильберта и инвариант Дена

Поскольку все изометрии евклидова пространства имеют детерминант ± 1, то по свойству c) объемов два конгруэнтных политопа имеют одинаковые объемы. Поэтому два эквивалентных политопа имеют один и тот же объем. Третью проблему Гильберта можно уточнить так:

Эквивалентны ли два политопа равных объемов?



На этот вопрос при $n = 2$ ответ будет *положительным* (Бойяи, около 1832 г., см. п. 1.2).

В размерности 3 важный результат Евклида (XII. 7) гласит, что три пирамиды $ABCA'$, $BCA'B'$, $A'B'C'C$, составляющие вместе треугольную призму $ABCA'B'C'$ имеют равный объем (ср. с плоским случаем из I. 4 «Начал» Евклида). Для доказательства достаточно показать равенство объемов двух тетраэдров $ABCD$ и $ABCD'$ при условии, что прямая DD' параллельна плоскости ABC, а это следует из XII. 5 «Начал» Евклида. Однако последний результат потребовал (как от Евклида, так и от Лежандра, например)[1] применения метода исчерпания, т. е. бесконечно

---

[1]) Замечательно, что невзирая на заметное отличие точек зрения, а также географическую и культурную отдаленность, у Евклида в XII.3 и у Лю Хуэй (автора китайского труда III века) употреблена одна и та же конструкция (см. статью Вагнера (D. B. Wagner) в Historia Mathematica, 6 (1979), p. 164—188).

кратно повторяющегося разбиения и применения аксиомы Архимеда.

Ден показал, что *в случае* $n=3$ *можно найти два неэквивалентных полиэдра равного объема.* В общем случае будем говорить, что для политопов определен инвариант I, принимающий значения в некоторой коммутативной группе Γ, если каждому политопу P ставится в соответствие некоторый элемент этой группы $I(P)$, причем

а) *Если P и P' — два политопа, то*

$$I(P\cap P')+I(P\cup P')=I(P)+I(P').$$

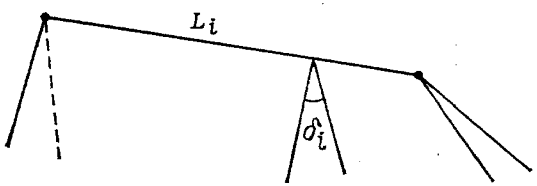
b) *Если политоп P вырожденный, то* $I(P)=0$.

с) *Если P и P' — два политопа, для которых при некотором выборе элемента g группы G (перемещений)* $P'=gP$, *то* $I(P)=I(P')$.

Немедленно получаем, что $I(P)=I(P')$, если два политопа P и P' эквивалентны. В размерности 3 Ден построил инвариант D следующим образом: обозначим группу углов между прямыми на плоскости [1]) через Δ и положим $\Gamma=\mathbb{R}\bigotimes_{\mathbb{Z}}\Delta$; если P — полиэдр с ребрами $L_1, \ldots, L_r$, то

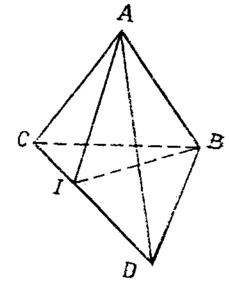
$$D(P)=\sum_{i=1}^{r}|L_i|\otimes\delta_i,$$

где $|L_i|$ — длина отрезка L_i, а δ_i — двугранный угол, образованный двумя примыкающими к L_i гранями полиэдра P.



Доказательство аддитивности инварианта Дена сводится к элементарному случаю разбиения тетраэдра $P=ABCD$ на два:

[1]) Эта группа естественно отождествляется с $SO_2(\mathbb{R})/\{1;\ -1\}$; при измерении углов в радианах ее можно отождествить с $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.



$P'=ABCI$ и $P''=ABDI$. Ребро CD разбивается на два: CI и ID, двугранные углы при них равны δ, откуда $|CD|=|CI|+|ID|$ и

$$|CD|\otimes\delta=|CI|\otimes\delta+|ID|\otimes\delta.$$

Ребро AB — общее для трех тетраэдров; углы при нем равны δ_1 в P, δ_2 в P' и δ_3 в P''; так как $\delta_1=\delta_2+\delta_3$, то

$$|AB|\otimes\delta_1=|AB|\otimes\delta_2+|AB|\otimes\delta_3.$$

Остальные ребра и двугранные углы в двух тетраэдрах общие [1]), поэтому $D(P)=D(P')+D(P'')$.

Теперь рассмотрим куб C и правильный тетраэдр T равных объемов. Пусть l — длина ребра C, а l' — длина ребра T'. Все двугранные углы в кубе равны $\pi/2$, их 12, откуда

$$D(C)=12l\otimes\frac{\pi}{2}=6l\otimes\pi=0,$$

так как плоский угол π есть нуль группы Δ. Аналогично, $D(T)=6l'\otimes\delta$. Однако в группе $\Gamma=\mathbb{R}\bigotimes_{\mathbb{Z}}\Delta$ равенство $l\otimes\delta=0$ выполнено тогда и только тогда, когда δ — рациональное кратное π. При этом $\cos\delta=1/3$, что исключает рациональность δ/π, откуда $D(T)\neq 0$.

Поэтому $\mathrm{vol}(C)=\mathrm{vol}(T)$, *но* $D(C)\neq D(T)$ *и полиэдры C и T неэквивалентны.*

Замечание. В группе углов Δ элементы конечного порядка — это рациональные кратные плоского угла π. Они образуют подгруппу Δ_0 группы Δ, изоморфную $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Факторгруппу Δ/Δ_0 можно считать векторным пространством над $\mathbb{Q}$, а группа $\Gamma=\mathbb{R}\bigotimes_{\mathbb{Z}}\Delta$ изоморфна $\mathbb{R}\bigotimes_{\mathbb{Q}}(\Delta/\Delta_0)$. В частности, существует инъективный гомоморфизм Δ/Δ_0 в Γ, и именно это свойство и использовалось в приведенном выше доказательстве. Поскольку в 1900 г. все эти понятия были совершенно неизвестны, для их выражения Дену пришлось прибегать к весьма непрямым способам, которые часто воспринимались как малоубедительные.

[1]) Или смежные, т. е. противоположные по величине угла. — *Прим. перев.*

2. ГРУППЫ ПОЛИЭДРОВ

2.1. Теорема Сидлера (1965)

Казалось, что результат Дена закрыл вопрос окончательно, и до 1940 г. фактически наблюдался лишь несущественный прогресс. Интерес к этой проблеме оживил, по-видимому, Хопф. Одному из учеников Хопфа Сидлеру предстояло добиться продвижения в третьей проблеме Гильберта. Он начал работать над ней около 1943 г., и к 1965 г. доказал, наконец, свой результат, который принес ему премию Датского королевского общества:

Два полиэдра эквивалентны тогда и только тогда, когда их объемы и инварианты Дена равны.

Доказательство было в последствии, в 1968 г., сильно упрощено Йессеном и его учениками [15], [16]. Далее мы будем излагать их версию [1]).

В п. 1.4 мы определили, что нужно понимать под инвариантом полиэдра. Следуя испытанной традиции, введем (аналогично группам Витта или Гротендика) коммутативную группу $\mathscr{P}$ с образующими $[P]$ (по одной для каждого многогранника P) и соотношениями

(3) $$[P \cup P'] = [P] + [P'], \text{ если } P \cap P' \text{ — вырожденный многогранник},$$

(4) $$[g(P)] = [P], \text{ если } g \text{ — перемещение}.$$

Инварианты I со значениями в коммутативной группе Γ биективно соответствуют гомоморфизмам φ из $\mathscr{P}$ в Γ согласно $I(P) = \varphi([P])$. В частности, объем и инвариант Дена определяют гомоморфизмы

$$\mathrm{vol}\colon \mathscr{P} \to \mathbb{R}, \qquad D\colon \mathscr{P} \to \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta.$$

Более того, полиэдры P и P' эквивалентны тогда и только тогда, когда $[P] = [P']$ в группе $\mathscr{P}$.

Пусть $\mathscr{Z}$ — подгруппа $\mathscr{P}$, порожденная призмами. Опираясь на доказанные для плоских многогранников результаты, можно доказать, что любая призма эквивалентна некоторой прямой призме, в основании которой лежит фиксированный квадрат со стороной 1. Значит, объем — это изоморфизм $\mathscr{Z}$ на $\mathbb{R}$, а теорема Сидлера эквивалентна совпадению $\mathscr{Z}$ и ядра D. Впрочем, равенство нулю инварианта Дена призмы доказывается легко, поэтому D определяет гомоморфизм D из $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ в $\mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta$. На самом деле *можно доказать точность последовательности Йессена*

(J) $$0 \to \mathscr{P}/\mathscr{Z} \xrightarrow{\bar{D}} \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \to 0,$$

которая влечет за собой теорему Сидлера. Под $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ понимается модуль кэлеровых дифференциалов расширения $\mathbb{R}$ поля $\mathbb{Q}$ (см., например, Бурбаки Н. Алгебра, гл. V, § 16), а под δ — канонический дифференциал из $\mathbb{R}$ в $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$. Согласно Катлино [22], гомоморфизм δ определяется следующим образом: угол между прямыми θ представляется парой матриц $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ с $a^2 + b^2 = 1$, или тангенсом $t = b/a$ (равным ∞ при $a = 0$); определим гомоморфизм $\delta_{\mathbb{Q}}$ из Δ в $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ как

(5) $$\delta_{\mathbb{Q}}(\theta) = a \cdot d_{\mathbb{Q}} b - b \cdot d_{\mathbb{Q}} a = d_{\mathbb{Q}} t/(1 + t^2)$$

(мы полагаем $d_{\mathbb{Q}} \infty = 0$). Имеем $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $t = \operatorname{tg}\theta$; при измерении θ в радианах возникает искушение записывать $\delta_{\mathbb{Q}}(\theta) = d\theta$ с учетом правил

$$d(\cos\theta) = -\sin\theta \cdot d\theta, \qquad d(\sin\theta) = \cos\theta\, d\theta.$$

Это одновременно и хорошая аналогия, и ловушка. Отметим, что тангенс отождествляет Δ с $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, наделенным законом умножения

$$(t, t') \longmapsto (t + t')/(1 - tt').$$

В этих обозначениях положим

(6) $$\delta(x \otimes \theta) = x\delta_{\mathbb{Q}}\theta = \frac{x}{1 + t^2} d_{\mathbb{Q}} t;$$

при этом δ — сюръективный гомоморфизм из $\mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta$ на $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$.

2.2. Доказательство теоремы Сидлера

Выберем в трехмерном евклидовом пространстве E_3 начало координат 0. Пусть h_t — гомотетия с центром в 0 и коэффициентом t. Определим действие группы $\mathbb{R}^*$ на группе $\mathscr{P}$ как

(7) $$H_t[P] = \begin{cases} [h_t P], & \text{если } t > 0 \\ -[h_t P], & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

При этом объем имеет вес 3, а инвариант Дена — вес 1:

(8) $$\mathrm{vol}(H_t \xi) = t^3 \,\mathrm{vol}(\xi), \qquad D(H_t \xi) = tD(\xi)$$

[1]) Подробное изложение этой версии можно найти в работе В. Г. Болтянского [1] и Са [9]. Я настоятельно рекомендую ознакомиться со статьями Йессена [15. 16, 17] и Дюпона [23].

при ξ из $\mathscr{P}$. Так как гомотетия переводит призму в призму, действие $\mathbb{R}^*$ опускается на $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$. Более того, произвольный тетраэдр P разбивается на два тетраэдра P' и P'', конгруэнтных соответственно h_tP и $h_{1-t}P$ (где t — произвольное вещественное число между нулем и единицей), и две призмы (см. табл. VI в конце статьи). Отсюда

(9) $$\xi = H_t\xi + H_{1-t}\xi \quad (\text{где } \xi \text{ — из } \mathscr{P}/\mathscr{Z}),$$

откуда в свою очередь получаем на $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ структуру вещественного векторного пространства, в которой H_t — умножение на t.

Для фиксированных чисел a и b из интервала $]0, 1[$ обозначим через $T(a, b)$ класс в $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ произвольного тетраэдра $ABCD$ с взаимно перпендикулярными ребрами AB, BC и CD, длины которых определяются через

(10) $$|AB|^2 = a^{-1} - 1, \quad |CD|^2 = b^{-1} - 1, \quad |BC| = |AB| \cdot |CD|.$$

Ясно, что

(11) $$T(a, b) = T(b, a);$$

кроме того, геометрические соображения позволяют показать, что

(12) $$T(a, b) + T(ab, c) = T(a, c) + T(ac, b).$$

Докажем, что существует такое семейство элементов $U(a)$ группы $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ (где $a \in]0, 1[$), что

(13) $$T(a, b) = U(a) + U(b) - U(ab).$$

Для этого рассмотрим в множестве $W_0 =]0, 1[\times \mathscr{P}/\mathscr{Z}$ коммутативный закон умножения

(14) $$(a, P) \cdot (b, Q) = (ab, P + Q - T(a, b)).$$

Можно доказать, что на любой элемент W_0 можно сокращать, поэтому W_0 погружается в свою группу частных W. Значит, имеется точная последовательность

$$0 \to \mathscr{P}/\mathscr{Z} \to W \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}_+^* \to 0.$$

Так как группа $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ делима, эта точная последовательность расщепляется; существует гомоморфизм из $\mathbb{R}_+^*$ в W, левый обратный к π и, значит, имеющий вид $a \mapsto (a, U(a))$. Теперь (13) следует из (14).

Проблема: *существует ли явная конструкция* $U(a)$?

В качестве следующего шага положим (для $a > 0$, $b > 0$)

(15) $$G(a, b) = aU\left(\frac{a}{a+b}\right) + bU\left(\frac{b}{a+b}\right),$$

откуда с очевидностью следуют соотношения

(16) $$G(a, b) = G(b, a), \quad G(\lambda a, \lambda b) = \lambda G(a, b).$$

Наконец, геометрически показывается, что

(17) $$G(a, b) + G(a + b, c) = G(a, c) + G(a + c, b).$$

Для этого тетраэдр $OABC$ с взаимно перпендикулярными ребрами OA, OB и OC с $|OA|^2 = bc$, $|OB|^2 = ca$, $|OC|^2 = ab$ разбивается на части двумя способами.

На этот раз сконструируем по коциклу G коммутативное кольцо A, порожденное $\mathbb{R} \times \mathscr{P}/\mathscr{Z}$ с операциями

(18) $$(a, P) + (b, Q) = (a + b, P + Q - G(a, b)) \quad (\text{при } a > 0, b > 0)$$

(19) $$(a, P) \cdot (b, Q) = (ab, aQ + bP).$$

Теперь $I = \mathscr{P}/\mathscr{Z}$ — идеал с нулевым квадратом в A, а A/I изоморфно полю $\mathbb{R}$. Выберем гомоморфизм σ из $\mathbb{R}$ в A, левый обратный к проекции τ из A в A/I (см. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра, гл. IX), и, следовательно, отображение H из $\mathbb{R}_+^*$ в $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$, удовлетворяющее условиям

(20) $$G(a, b) = aH(a) + bH(b) - (a + b)H(a + b),$$

(21) $$H(ab) = H(a) + H(b),$$

(22) $$\sigma(a) = (a, aH(a)).$$

Наконец, определим отображение φ из Δ в $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ как

(23) $$\varphi(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \cdot (U(\sin^2\alpha) - H(\sin^2\alpha)).$$

Осталось показать, что φ — гомоморфизм. В этом случае он продолжается до $\mathbb{R}$-линейного отображения Φ из $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$ в $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$; легко показывается, что $\Phi \circ \bar{D}$ есть тождественное отображение $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$. Для этого заметим, что векторное пространство $\mathscr{P}/\mathscr{Z}$ порождается элементами $T(a, b)$, инвариант Дена которых легко вычислить.

Итак, мы доказали, что $\bar{D}$ инъективно. Для завершения доказательства точности последовательности (J) используем тот факт, что левые обратные к τ гомоморфизмы кольца $\mathbb{R}$ в A образуют главное однородное пространство группы гомоморфизмов из $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ в $I = \mathscr{P}/\mathscr{Z}$.

2.3. Открытые проблемы

Инвариант Дена был обобщен Хадвигером [5] на размерности больше трех. Пусть E_n — евклидово пространство размерности n. Построим, как и в п. 2.1, группу $\mathcal{P}_n$, порожденную политопами в E_n. Если i — целое число, $1 \leqslant i \leqslant n-1/2$, то инвариант Дена — Хадвигера $D_i(P)$ политопа P определяется как сумма элементов $\mathrm{vol}(P_i) \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_i$ в $\Delta^i = \mathbb{R} \otimes \Delta \otimes \ldots \otimes \Delta$ (i сомножителей Δ) по всем убывающим последовательностям $P = P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_i$, где P_j — грань размерности $n - 2_j$ политопа P, а α_j — двугранный угол в P_{j-1}, ограниченный двумя гранями размерности $n - 2j + 1$, содержащимися в P_{j-1} и содержащими P_j. Точно так же можно положить $D_0(P) = \mathrm{vol}(P)$.

Проблема: доказать инъективность гомоморфизма из $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$ *в* $\Delta^0 \times \Delta^1 \times \ldots \times \Delta^{[(n-1)/2]}$, *определенного* $D_0, D_1, \ldots, D_{[(n-1)/2]}$.

Если $n = 3$, то это теорема Сидлера. Если $n = 4$, то Йессен в Göttingen Nachr., 1972, p. 47—53, показал, каким образом этот вопрос сводится к случаю $n = 3$. *Для* $n \geqslant 5$ *ничего не известно.* Аналогичные вопросы можно поставить и в случае неевклидовых пространств, либо эллиптических, либо гиперболических. Ден разобрал случай размерности 2, для больших размерностей ничего не известно.

3. ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

3.1. Разбиение политопов: случай параллельных переносов

Пусть E — аффинное пространство размерности n, соответствующее векторному пространству T. Для начала мы не будем рассматривать никакой евклидовой метрики. Определим по аналогии с п. 1.4 группу $\Pi(E)$, порожденную политопами с соотношениями

$$(24) \qquad \begin{array}{ll} [P \cup P'] = [P] + [P'], & \text{если } P \cap P' \text{ — вырожденный политоп,} \\ [uP] = [P], & \text{если } u \text{ — параллельный перенос.} \end{array}$$

Эта группа приспособлена к изучению разбиения политопов на части, которые разрешается сдвигать параллельными переносами. Как и в п. 2.2, в $\Pi(E)$ можно определить гомотетии.

Хадвигер [5] и Йессен — Торуп [17] уточнили структуру группы $\Pi(E)$ следующим образом: $\Pi(E)$ *можно снабдить такой структурой векторного пространства над полем* $\mathbb{R}$, *что* $\Pi(E)$ *разлагается в прямую сумму* $\Pi^1(E) \oplus \ldots \oplus \Pi^n(E)$, причем $H_t\xi = t^i\xi$, если $t \in \mathbb{R}^*$, а $\xi \in \Pi^i(E)$.

Приведем основные моменты доказательства этого утверждения.

Снабдим E структурой векторного пространства, выбрав начало отсчета 0. Предположим, что E разбито в прямую сумму векторных подпространств $E_1, \ldots, E_i$, и отождествим $E_1 \times \ldots \times \ldots \times E_i$ с E при помощи биекции $(v_1, \ldots, v_i) \mapsto v_1 + \ldots + v_i$. Если P_1 — политоп в E_1, а P_2 — политоп в $E_2, \ldots$, то прямое произведение $P_1 \times \ldots \times P_i$ будет политопом в E. Обозначим через $\mathcal{Z}_i$ подпространство $\Pi(E)$, порожденное всеми такими политопами для всевозможных разложений E в прямую сумму $E_1 \oplus \ldots \oplus E_i$. Итак,

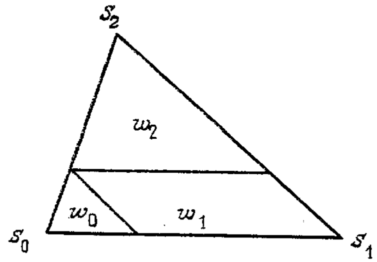
$$(25) \qquad \Pi(E) = \mathcal{Z}_1 \supset \mathcal{Z}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{Z}_n \supset \mathcal{Z}_{n+1} = 0,$$

причем $\mathcal{Z}_n$ — подгруппа, порожденная параллелотопами (обобщениями параллелограммов и параллелепипедов). При $n = 3$ подгруппа $\mathcal{Z}_2$ порождена призмами.

Формулу (9) можно обобщить так:

$$(26) \qquad H_{t'+t''}\xi \equiv H_{t'}\xi + H_{t''}\xi \pmod{\mathcal{Z}_2} \quad (\text{если } \xi \in \mathcal{Z}_1).$$

Для этого достаточно ограничиться случаем элемента ξ, определенного симплексом $\sigma = [s_0, \ldots, s_n]$ с $0 = s_0$. Положим $\sigma'_i = [s_0, \ldots, s_i]$, $\sigma''_i = [s_i, \ldots, s_n]$. Теперь симплекс $h_{t'+t''}\sigma$ разбивается на политопы $w_0, w_1, \ldots, w_n$, где w_i эквивалентно (относительно параллельного переноса) $h_{t'}\sigma'_i \times h_{t''}\sigma''_i$ (при $1 \leqslant i \leqslant n-1$), а $w_0 = h_{t'}\sigma$ и w_n эквивалентно (относительно параллельного переноса) $h_{t''}\sigma$. Значит, $w_i \in \mathcal{Z}_2$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$, откуда получаем (26). Из этого соотношения выводится



$n = 2$

$$(27) \qquad H_t\xi \equiv t\xi \pmod{\mathcal{Z}_2} \text{ для любого целого числа } t \neq 0,$$

откуда уже получается

$$(28) \qquad H_t\xi \equiv t^i\xi \pmod{\mathcal{Z}_{i+1}} \quad (\text{при } \xi \in \mathcal{Z}_i)$$

для целых t: можно ограничиться случаем элемента ξ, определенного политопом $P_1 \times \ldots \times P_i$, откуда $H_t\xi = [h_tP_1 \times \ldots \times h_tP_i]$. Применив (27) к аффинному пространству E_j, получаем разложение h_tP_j на t политопов, эквивалентных P_j (относительно параллельного переноса), и на политопы вида $P'_j \times P''_j$, соответствующие разложениям $F_j = E'_j \oplus E''_j$, откуда и получается (28).

При целом $t \neq 0$ гомотетия H^t группы $\Pi(E)$ будет автоморфизмом; она индуцирует автоморфизм $\mathcal{Z}_i/\mathcal{Z}_{i+1}$. Согласно (28), любая коммутативная группа $\mathcal{Z}_i/\mathcal{Z}_{i+1}$ допускает однозначное деление. Значит, то же самое верно и для $\Pi(E)$, которое оказывается снабженным структурой векторного пространства над $\mathbb{Q}$.

Доказательство формулы (26) показывает, что при любом целом $t \geqslant 1$ симплекс $h_t\sigma$ разбивается на политопы w_i, где w_i эквивалентен (относительно параллельного переноса) произведению $h_{t-1}\sigma'_i \times \sigma''_i$. Двойной индукцией по n и t можно показать, что для любого ξ из $\Pi(E)$ существуют такие элементы ξ_j из $\mathcal{Z}_j$ (при $1 \leqslant j \leqslant n$), что

$$H_t\xi = \sum_{j=1}^{n} \binom{t}{j} \xi_j \tag{29}$$

при любом целом $t \neq 0$. Другими словами, существуют такие $\mathbb{Q}$-линейные операторы $e_1, \ldots, e_n$, действующие в $\Pi(E)$, что

$$H_t\xi = \sum_{i=1}^{n} t^i e_i(\xi). \tag{30}$$

Учитывая $H_tH_{t'}\xi = H_{tt'}\xi$, получим $e_i^2 = e_i$ и $e_ie_j = 0$ при $i \neq j$, откуда получаем разложение $\Pi(E) = \Pi^1(E) \oplus \ldots \oplus \Pi^n(E)$, где e_j — проектор $\Pi(E)$ на $\Pi^j(E)$. Мы также получаем, что $\mathcal{Z}_i = \sum_{j>i} \Pi^j(E)$, а соотношение $H_t\xi = t^i\xi$ справедливо при ξ из $\Pi^i(E)$ и целом (или рациональном) $t \neq 0$.

Для завершения доказательства зафиксируем i, $1 \leqslant i \leqslant n$, отождествим $\Pi^i(E)$ с $\mathcal{Z}_i/\mathcal{Z}_{i+1}$ и рассмотрим отображение $t \to H_t\xi$ из $\mathbb{R}$ в $\Pi^i(E)$ при фиксированном ξ. Если ξ ассоциировано с политопом вида $P_1 \times \ldots \times P_i$, то из формулы (26) можно вывести (имитируя доказательство (28)) существование такого $\mathbb{Q}$-полилинейного отображения f из $\mathbb{R}^i$ в $\Pi^i(E)$, что

$$f(t_1, \ldots, t_i) \equiv [h_{t_1}P_1 \times \ldots \times h_{t_i}P_i] \pmod{\mathcal{Z}_{i+1}}. \tag{31}$$

Наконец, *теорему Фалеса* можно обобщить, показав, что если P имеет вид $P' \times P''$, то $h_tP' \times P''$ и $P' \times h_tP''$ эквивалентны (посредством разбиения и параллельных переносов) с точностью до суммы политопов вида $Q_1 \times Q_2 \times Q_3$. Другими словами, величина (31) зависит только от произведения $t_1 \cdot \ldots \cdot t_i$ и поэтому существует $\mathbb{Q}$-линейное отображение g_ξ из $\mathbb{R}$ в $\Pi^i(E)$, такое, что $f(t_1, \ldots, t_i) = g_\xi(t_1 \cdot \ldots \cdot t_i)$ и, в частности,

$$g_\xi(t^i) = [h_tP_1 \times \ldots \times h_tP_i] = H_t\xi \pmod{\mathcal{Z}_{i+1}}. \tag{32}$$

Теперь структуру вещественного векторного пространства на $\Pi^i(E)$ можно определить с помощью отображения $(t, \xi) \mapsto g_\xi(t)$, откуда $H_t\xi = t^i\xi$.

3.2. Гомологическая интерпретация группы $\Pi(E)$

На вещественном аффинном пространстве E можно выбрать одну из двух возможных ориентаций. Их можно рассматривать как две образующих бесконечной циклической группы, которую мы обозначим $\mathrm{Or}(E)$. Положим с этого момента $\overline{\Pi}(E) = \Pi(E) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{Or}(E)$. Если σ есть n-симплекс с вершинами $s_0, s_1, \ldots, s_n$, то через $\langle s_0, \ldots, s_n\rangle$ обозначим элемент $\overline{\Pi}(E)$, равный $[\sigma] \otimes \varepsilon$, где ε — ориентация базиса $\overrightarrow{s_0s_1}, \overrightarrow{s_1s_2}, \ldots, \overrightarrow{s_{n-1}s_n}$ пространства T. Комбинаторные соображения (или немного топологии) показывают, что группа $\overline{\Pi}(E)$ определяется образующими $\langle s_0, \ldots, s_n\rangle$ и соотношениями[1])

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \langle s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_{n+1}\rangle = 0, \tag{33}$$

$$\langle s_0, \ldots, s_n\rangle = \langle a + s_0, \ldots, a + s_n\rangle \text{ при } a \in T. \tag{34}$$

Перевод на гомологический язык осуществляется так. Пусть $C_*(E)$ — стандартный комплекс Эйленберга — Маклейна: группа $C_p(E)$ степени p — это свободная абелева группа, порожденная символами $(s_0, \ldots, s_p)$, соответствующими наборам из $p+1$ точек E; граничный оператор ∂: $C_p(E) \to C_{p-1}(E)$ определяется как

$$\partial(s_0, \ldots, s_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_p). \tag{35}$$

Группа T действует переносами в $C_*(E)$ (аналогично формуле (34)). Пусть $D_*(E)$ — подкомплекс $C_*(E)$, порожденный символами $(s_0, \ldots, s_p)$, для которых существует гиперплоскость

[1]) Здесь применяется общепринятое соглашение: член s_i под крышкой нужно опустить.

в E, содержащая точки s_i. Тогда определены следующие группы гомологий [1]):

$$(36)\qquad H_p((C_*(E)/D_*(E))_T) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < n; \\ \overline{\Pi}(E), & \text{если } p = n. \end{cases}$$

3.3. Инварианты Хадвигера политопа

Пусть H — гиперплоскость в E. Выберем ориентацию ε_E в E и ориентацию ε_H в H. Они выделяют одно из двух полупространств, на которые H делит E. Определим, согласно Хадвигеру [13], гомоморфизм $R_{H,E}$ из $\overline{\Pi}(E)$ в $\overline{\Pi}(H)$: для политопа P из E и каждой его грани F размерности $n-1$, параллельной H, рассмотрим (определенный с точностью до параллельного переноса) политоп F' в H, полученный параллельным переносом из F, и число t, равное 1 или -1 в зависимости от того, находится ли P по ту же сторону от F, что и E_+ от H, или нет. Теперь $R_{H,E}$ переводит $[P]\otimes\varepsilon_E$ в $\sum_F t\cdot[F']\otimes\varepsilon_H$, где сумма берется по всем таким граням F размерности $n-1$ политопа P. Этот гомоморфизм не зависит от выбора ориентации ε_H и ε_E.

Объем можно понимать как не зависящий от ориентации гоморфизм vol_n: $\overline{\Pi}(E)\to\bigwedge^n T$, переводящий $\langle s_0, \ldots, s_n\rangle$ в $v_1\wedge\ldots\wedge v_n$, где $s_i = v_i + s_0$. Инварианты Хадвигера—это гомоморфизмы $V(T_n, \ldots, T_p)$ из $\overline{\Pi}(E)$ в $\bigwedge^p T_p$; при каждой фиксированной убывающей последовательности $T = T_n \supset T_{n-1} \supset \ldots \supset T_p$ подпространств T_i пространства T с $\dim T_i = i$ это отображение есть композиция $R_{E_p, E_{p+1}}\circ\ldots\circ R_{E_{n-1} E_n}$, где E_i — аффинное подпространство E с направляющим пространством T_i.

В частности, если P — политоп в E, то ему можно поставить в соответствие семейство элементов $V(T_1, \ldots, T_p)([P])$ из $\bigwedge^p T_p$, которые мы будем называть инвариантами Хадвигера P. Очевидна их связь с обобщенными инвариантами Дена.

Как утверждает фундаментальная теорема, *два политопа P и P' имеют один и тот же класс в $\overline{\Pi}(E)$, или, другими словами, эквивалентны относительно разбиений и параллельных переносов тогда и только тогда, когда их инварианты Хадвигера совпадают.*

Эта теорема была доказана Хадвигером и Глуром [14] в 1951 г. в случае размерности 2, распространена на размерность 3 Хадвигером [13] в 1968 г., затем на размерность 4 Йессеном (Göttingen Nachr., 1972, p. 47—53). Наконец, общий случай был доказан Йессеном и Торупом [1]) (1972 г., опубликовано в [17] в 1978 г.) и независимо Са [9].

Конечно же, теорема означает, что элемент ξ из $\overline{\Pi}(E)$, для которого $\mathrm{vol}_n(\xi)=0$ и $R_{H,E}(\xi)=0$ при любой гиперплоскости $H\subset E$, обязательно равен нулю. В этом виде она легко следует из результатов п. 3.1, если применить простую геометрическую конструкцию, обобщенную со случая размерности 2, разобранного в [1, § 10].

3.4. Многообразия флагов

В своей книге [9] Са поставил вопрос о сизигиях, т. е. линейных соотношениях между инвариантами Хадвигера некоторого политопа. Ответ дал Дюпон [23], который применил использованный ранее Люстигом симплициальный комплекс, введенный Титсом.

Далее мы уже не будем следить за различием между векторным и аффинным пространствами. Итак, пусть T — вещественное векторное пространство размерности n. Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathscr{C}(T)$ с векторными подпространствами T (отличными от 0 и T) в качестве вершин; p-симплексами будут последовательности $(V_0, V_1, \ldots, V_p)$ с $V_0\supset V_1\supset\ldots\supset V_p$. Для данного целого числа $q\geqslant 0$ определим пучок $\bigwedge^q_{\mathbb{R}} V_p$ на $\mathscr{C}(T)$, группа значений которого на симплексе $(V_0, \ldots, V_p)$ есть $\bigwedge^q_{\mathbb{R}} V_p$, т. е. q-я внешняя степень пространства V_p, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Любое векторное пространство над $\mathbb{R}$ можно рассматривать и как пространство над $\mathbb{Q}$; таким образом мы получим другой пучок $\bigwedge^q_{\mathbb{Q}}$.

Пусть V — вещественное векторное пространство, а $H_q(V,\mathbb{Z})$ есть q-я группа когомологий (дискретной) группы V с целыми коэффициентами. Так как функтор гомологий групп совместим с индуктивными пределами, а когомологии $\mathbb{Z}^n$ совпадают с когомологиями тора $\mathbb{T}^n = B\mathbb{Z}^n$, то можно определить канонический изоморфизм $H_q(V,\mathbb{Z})$ на $\bigwedge^q_{\mathbb{Z}} V$, что совпадает с $\bigwedge^q_{\mathbb{Q}} V$.

Пусть Γ_q — пучок на $\mathscr{C}(T)$, который симплексу $(V_0, \ldots, V_p)$ ставит в соответствие однородные q-цепи группы V_p (иначе говоря, группу коинвариантов V_p в свободной абелевой группе, порожденной последовательностями $(v_0, \ldots, v_q)$ элементов V_p).

[1]) Если M — коммутативная группа, на которой действует группа G, то через M_G обозначается факторгруппа M по подгруппе, порожденной разностями $gm - m$, где $m\in M$, а $g\in G$ (группа коинвариантов).

[1]) Похоже, что В. Г. Болтянский не знал об этом результате; в своей книге 1978 г. он детально описывает случай размерностей 2, 3 и замечает, что общий случай остается открытым.

Сказанное ранее позволяет определить комплекс

$$\Gamma_*\colon\ \Gamma_0 \leftarrow \Gamma_1 \leftarrow \ldots \leftarrow \Gamma_q \leftarrow \Gamma_{q+1} \leftarrow \ldots$$

пучков на симплициальном комплексе $\mathscr{C}(T)$; его q-й пучок гомологий есть $\wedge^q_{\mathbb{Q}}$.

Используя общие теоремы гомологической алгебры и формулу (36), можно доказать изоморфизм

$$\overline{\Pi}(T) \to \bigoplus_{q=1}^{n} H_{n-q-1}\left(\mathscr{C}(T),\ \wedge^q_{\mathbb{Q}}\right);$$

здесь разложение в прямую сумму соответствует в прообразе стрелки разложению $\Pi(T) = \bigoplus\limits_{q=1}^{n} \Pi^q(T)$, определенному весом по отношению к гомотетиям (п. 3.1).

Применение теоремы Йессена — Торупа позволяет получить из этого результата группы гомологий $\mathscr{C}(T)$:

$$H_i\left(\mathscr{C}(T),\ \wedge^q_{\mathbb{Q}}\right) = H_i\left(\mathscr{C}(T),\ \wedge^q_{\mathbb{R}}\right) \tag{37}$$

при $i \leqslant n-q-1$, причем эти группы нулевые при $i \neq n-q-1$.

3.5. Возвращение к группам перемещений

Здесь мы предположим, что пространство $T = \mathbb{R}^n$ снабжено (обычной) квадратичной формой. Все предшествующие гомоморфизмы были ковариантны относительно действия ортогональной группы $O_n(\mathbb{R})$. Более того, по самому своему определению группа полиэдров $\mathscr{P}_n$, ассоциированная с $\mathbb{R}^n$ (см. п. 2.3), есть группа коинвариантов $O_n(\mathbb{R})$ в $\Pi(\mathbb{R}^n)$. Если положить $\overline{\mathscr{P}}_n = \mathscr{P}_n \bigotimes\limits_{\mathbb{Z}} \mathrm{Or}(\mathbb{R}^n)$, то можно к тому же получить изоморфизм $\overline{\mathscr{P}}_n$ с $H_0(O_n(\mathbb{R}),\ \overline{\Pi}(\mathbb{R}^n))$. Учитывая определение $\overline{\Pi}(\mathbb{R}^n)$, данное в п. 3.4, получаем изоморфизм

$$\overline{\mathscr{P}}_n = \bigoplus_{q \equiv n (2)} H_0\left(O_n(\mathbb{R}),\ H_{n-q-1}\left(\mathscr{C}(\mathbb{R}^n),\ \wedge^q_{\mathbb{R}}\right)\right). \tag{38}$$

В частности, при $n = 3$ группа $\mathscr{P}_3$ есть прямая сумма группы $\mathscr{Z}_3$ призм (веса 3 относительно гомотетий) и ядра объема (веса 1 относительно гомотетий). Далее, частный случай точной последовательности, введенной Люстигом [25], дает точную последовательность

$$0 \to \Pi^1(\mathbb{R}^3) \to \bigoplus_P \Pi^1(P) \to \bigoplus_D \Pi^1(D) \to \mathbb{R}^3 \to 0,$$

где P пробегает плоскости, а D — прямые в $\mathbb{R}^3$. Все члены — модули над группой $O_3(\mathbb{R})$; переходя к гомологиям, получаем точную последовательность

$$0 \to H_2(SO_3(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}^3) \to \mathscr{P}_3/\mathscr{Z}_3 \to \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta \to H_1(SO_3(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}^3) \to 0.$$

Все эти рассуждения не зависят от теоремы Сидлера. Однако она может быть теперь выражена в виде

$$H_1\left(SO_3(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}^3\right) = \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}, \quad H_2\left(SO_3(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}^3\right) = 0.$$

Недавно Катлино получил следующий аналогичный результат:

$$H_1\left(\mathfrak{sl}_3,\ \mathbb{R}^3\right) = \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}, \quad H_2\left(\mathfrak{sl}_3,\ \mathbb{R}^3\right) = 0,$$

где $\mathfrak{sl}_3$ обозначает алгебру Ли группы $SO_3(\mathbb{R}^3)$, рассматриваемую как алгебра Ли над $\mathbb{Q}$.

3.6. Эллиптическая и гиперболическая геометрии

Для сферической геометрии можно, разумеется, поставить вопросы, аналогичные 3-й проблеме Гильберта. Точно так же можно рассмотреть полиэдры в пространстве Лобачевского H^n размерности n. По аналогии его связанной с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ группой $\mathscr{P}_n$ можно определить и группы полиэдров $\mathscr{P}(S^n)$ и $\mathscr{P}(H^n)$. Об этих группах мало что известно, хотя Дюпон [23] и применил в этом случае свои методы, получив две точные последовательности

$$0 \to A \to H_3(SU_2(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z}) \xrightarrow{I} \mathscr{P}(S^3)/Z \xrightarrow{D} \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta \to$$
$$\to H_2(SU_2(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z}) \to 0,$$
$$0 \to B \to H_3(SL_2(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})^- \xrightarrow{I} \mathscr{P}(H^3) \xrightarrow{D} \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Delta \to$$
$$\to H_2(SL_2(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})^- \to 0.$$

Группы A и B анулируются степенью двойки, индекс «—» во второй строчке означает, что рассматриваются нечетные относительно комплексного сопряжения элементы.

Нормализуем объем сферы S^3 единицей; теперь объем сферического полиэдра определяет гомоморфизм $\mathscr{P}(S^3)/\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$; рассмотрев композицию с гомоморфизмом I, получаем гомоморфизм $H_3(SU_2(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})$ в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, введенный Чигером и Саймоном [30].

4. ПОСЛЕСЛОВИЕ: ГЛЯДЯ В XXI В.

4.1. Гомологии «дискретных» групп Ли

Пусть G — связная группа Ли, вещественная или комплексная. Пусть G^δ — та же группа с дискретной топологией. Группы когомологий Эйленберга — Маклейна $H_i(G, M)$ появляются в алгебраической K-теории, в теории слоений (см. Хефлигер [45]) и в теории расслоений с интегрируемой связностью — *частные случаи были рассмотрены выше*. Напомним, что с топологической группой G ассоциировано «классифицирующее» пространство BG, т. е. база главного G-расслоения со стягиваемым тотальным пространством EG. Точно так же определено и классифицирующее пространство BG^δ. Тождественное отображение G определяет непрерывный гомоморфизм G^δ в G, который определяет непрерывное отображение BG^δ в BG, а поэтому и гомоморфизм

$$\mu_i\colon H_i(BG^\delta, M) \to H_i(BG, M).$$

Классический результат (Хопфа — Эйленберга) утверждает, что $H_i(BG^\delta, M)$ совпадает с $H_i(G, M)$, если G действует на M тривиально.

Фридландер [33] и Милнор [35] предположили, что μ_i — изоморфизм при любом $i \geqslant 0$, если группа коэффициентов M конечна. Естественно, высказана и гипотеза о изоморфизме для дуальных гомоморфизмов

$$\mu^i\colon H^i(BG, M) \to H^i(BG^\delta, M).$$

Фридландер сформулировал в [33] другой вариант, в котором G замещается групповой схемой над алгебраически замкнутым полем k, откуда получается (признанный законным) изоморфизм

$$\nu^i\colon H^i_{\text{et}}(BG, M) \to H^i(BG(k)^\delta, M)$$

(здесь BG рассматривается как симплициальная схема, H^i_{et} — этальные когомологии).

Известно несколько примеров к этой гипотезе. Во-первых, Милнор [35] доказал ее для *разрешимой* группы G; отвинчивание легко сводит этот случай к случаю коммутативной группы. Этот же метод сводит общий случай гипотезы к случаю односвязной некоммутативной группы G. При этих условиях Дюпон, Парри и Са [32] *недавно разобрались со случаем* $i \leqslant 2$ (но с 11 исключениями при G типа F_4, E_6, E_7 или E_8).

Эти результаты доказываются с использованием алгебраической K-теории. Для поля F обозначим через F^* его мультипликативную группу, а через $K_2(F)$ — фактор $F^* \bigotimes_{\mathbb{Z}} F^*$ по подгруппе, порожденной элементами $a \otimes (1 - a)$. Известно (Стейнберг — Матцумото — Мур), что для простой расщепимой односвязной групповой схемы G и поля F, каждый элемент которого является квадратом (например, алгебраически замкнутого поля), группа *мультипликаторов Шура* $H_2(G(F), \mathbb{Z})$ изоморфна $K_2(F)$.

Перейдем к случаю $F = \mathbb{C}$; комплексное сопряжение определяет автоморфизм $K_2(\mathbb{C})$ порядка 2, откуда получается разложение $K_2(\mathbb{C}) = K_2(\mathbb{C})_+ \oplus K_2(\mathbb{C})_-$ на четную и нечетную части. По самому своему определению $H_2(SL_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ совпадает с $K_2(\mathbb{C})$. Дюпон, Парри и Са показали, что включение $SU_2(\mathbb{C})$ в $SL_2(\mathbb{C})$ определяет изоморфизм[1] $H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ на $K_2(\mathbb{C})^+$ (предварительный результат см. в [38]). Матер (не опубликовано) изучил гомоморфизм $H_2(U_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ в $H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, а Альперин и Деннис определили изоморфизм $K_2(\mathbb{H})$ на $K_2(\mathbb{C})^+$ ($\mathbb{H}$ — это тело кватернионов). На следующем шаге [37] доказывается, что для компактной односвязной простой неисключительной группы Ли G вложение $SU_2(\mathbb{C})$ в G, связанное с простым корнем, определяет изоморфизм $H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ на $H_2(G, \mathbb{Z})$. Наконец, предположим, что G — односвязная группа Ли. Если G — простая вещественная (соответственно комплексная) группа Ли, то $H_2(G, \mathbb{Z})$ изоморфно $K_2(\mathbb{C})^+$ (соответственно $K_2(\mathbb{C})$). Теперь при $i \leqslant 2$ гипотеза Милнора легко доказывается.

Наиболее впечатляющие результаты получены Суслиным в четырех статьях [40], [41], [42], [43]. Они относятся к группам GL_n. Окончательная формулировка утверждает, что гомоморфизм μ_i: $H_i(BG^\delta, M) \to H_i(BG, M)$ — это изоморфизм при конечном M и группе G вида $GL_n(\mathbb{R})$ или $GL_n(\mathbb{C})$), если $n \geqslant i$ (стабильный случай). Суслин [41] доказал сначала стабильность: для всех бесконечных полей F канонический гомоморфизм $H_i(GL_n(F), \mathbb{Z})$ в $H_i(GL_{n+1}(F), \mathbb{Z})$ является изоморфизмом при $n \geqslant i$. Обозначим предельную группу через $H_i(GL(F), \mathbb{Z})$. Введем также аналогичное обозначение для конечного поля $\mathbb{F}_l$ коэффициентов. Сложная часть доказательства — это сравнение групп $H_i(GL(F), \mathbb{F}_l)$ для различных алгебраически замкнутых полей F характеристики либо 0, либо p, где p — простое число, не равное l: оказывается, что эти группы не зависят от поля F. Теперь все сводится к случаю, когда F — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$, а он разобран Квилленом [39].

[1] В этом месте появляются разбиения полиэдров в гиперболическом пространстве.

4.2. Гомологии рациональных алгебр Ли

Терстон определил *гомотопический слой* $\bar{G}$ гомоморфизма G^δ в G. Простую реализацию можно получить, рассмотрев расслоенное произведение $C \underset{G}{\times} G^\delta$, где C — группа путей в G с началом в единичном элементе. При этом $B\bar{G}$ можно реализовать как тотальное пространство расслоения $BG^\delta \underset{BG}{\times} EG$ с базой BG^δ. Это пространство классифицирует интегрируемые связности на тривиальном расслоении (калибровочные потенциалы для нулевого поля). Другую конструкцию $B\bar{G}$ можно найти в работе Суслина [43]. При нашей конструкции слой $\bar{G}$ для группы и для ее универсальной накрывающей совпадают; поэтому $\bar{G}$ зависит только от алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и вместо $B\bar{G}$ можно писать $B\mathfrak{g}$.

Каноническое отображение BG^δ в BG является (с точностью до гомотопии) расслоением со слоем $B\mathfrak{g}$. Применив спектральную последовательность Серра для расслоений, получаем, что гипотеза Милнора эквивалентна

$$H_i(B\mathfrak{g}, \mathbb{F}_p) = 0 \text{ при простом } p \text{ и } i > 0.$$

Эквивалентная формулировка: $H_i(B\mathfrak{g}, \mathbb{Z})$ есть векторное пространство над $\mathbb{Q}$ (отметим аналогию с результатами п. 3.1, где показано, что $\Pi(E)$ — это векторное пространство над $\mathbb{Q}$). Кассел и Лодей сообщили мне следующую гипотезу (или вопрос):

Группы $H_i(B\mathfrak{g}, \mathbb{Z})$ *и* $H_i(\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$ *изоморфны для любого целого* $i \geqslant 1$.

Здесь $H_i(\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$ обозначает i-ю группу гомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемой как алгебра Ли над $\mathbb{Q}$ и действующей нулем на $\mathbb{Q}$.

Вот несколько фактов в поддержку этой гипотезы.

a) Предположим, что группа G *нильпотентна* и *односвязна*. Пространство группы G стягиваемо, поэтому то же самое верно и для BG. В этом случае пространства $B\mathfrak{g}$ и BG^δ имеют одинаковый гомотопический тип, откуда $H_i(B\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) = H_i(G, \mathbb{Z})$. Однако Хефлигер [46] определил изоморфизм $H_i(G, \mathbb{Z})$ на $H_i(\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$ (другое доказательство см. в [44]).

b) Суслин [43] показал, что [1])

$$K_i(\mathbb{C}) = \begin{cases} V_i \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } i \text{ нечетно;} \\ V_i, & \text{если } i \text{ четно,} \end{cases}$$

[1]) Случай $i = 1$ (где $K_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$) тривиален, случай $i = 2$ известен уже давно.

где V_i — векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Применив $+$-конструкцию Квиллена к упомянутому выше расслоению, получаем расслоение

$$\text{(F)} \qquad (B\mathfrak{g})^+ \to (BG^\delta)^+ \to BG.$$

Рассмотрим точную гомотопическую последовательность, ассоциированную с (F) в случае, когда $G = GL(\mathbb{C}) = \varinjlim GL_n(\mathbb{C})$. Известно (периодичность Ботта), что $\pi_i(BG)$ равно $\mathbb{Z}$ при четном i и нулю при нечетном. Согласно определению Квиллена, $\pi_i((BG^\delta)^+) = K_i(\mathbb{C})$. Рассмотрим, наконец, гомотопические группы $(B\mathfrak{g})^+$. Есть веские основания полагать, что это векторные пространства над $\mathbb{Q}$; по теореме Милнора — Мура $\pi_i((B\mathfrak{g})^+)$ будет примитивной частью $H_i((B\mathfrak{g})^+, \mathbb{Q})$; последняя группа равна $H_i(B\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$ согласно $+$-конструкции. *Приняв указанную выше гипотезу*, получаем $H_i(B\mathfrak{g}, \mathbb{Q}) = H_i(\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$. Однако, согласно Лодею — Квиллену (см. мой доклад № 621 [1])), примитивная часть $H_i(\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$ изоморфна циклическим гомологиям $HC_{i-1}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ поля $\mathbb{C}$, рассматриваемого как алгебра над $\mathbb{Q}$. Теперь, собрав все вместе, получаем гипотетическую точную последовательность

$$\ldots \to HC_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \to HC_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{E_i} K_{i+1}(\mathbb{C}) \to HC_{i-1}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \to \ldots$$

Если заметить, что $HC_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ равно $\mathbb{Z}$ или 0 при четном и нечетном i, то мы (гипотетически) определяем группу Суслина.

Наконец, имеется несколько общих результатов о группах гомологий $H_i(\mathfrak{g}, \mathbb{Q})$. Если $\mathfrak{g}$ равно $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ или $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, то по цитированным результатам Лодея и Квиллена эти гомологии связаны с циклическими гомологиями. Очевидно, что $H_0(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, а $H_1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Рассмотрев частный случай результатов Кассела и Катлино, получаем изоморфизм

$$H_2(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}) = \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}/d\mathbb{R}, \quad H_3(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

в случае, когда $\mathfrak{g}$ — простая расщепимая алгебра над $\mathbb{R}$, причем в случае H_3 не изоморфная $\mathfrak{sl}_n$.

4.3. Если помечтать...

В настоящий момент не удается определить гомоморфизм E_i из $HC_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ в $K_{i+1}(\mathbb{C})$. Похоже, что при $i = 1$ он связан с дилогарифмом. В этом случае он был бы связан с вычислением объемов тетраэдров с прямым трехгранным углом в сфериче-

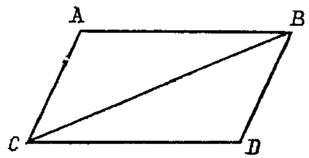
[1]) См. примечание на стр. 27. — *Прим. перев.*

ской геометрии (см. [53]); к тому же функциональное уравнение для дилогарифма может быть доказано с использованием аддитивности объема...

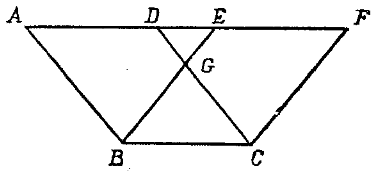
Таблица I

Некоторые предложения Евклида

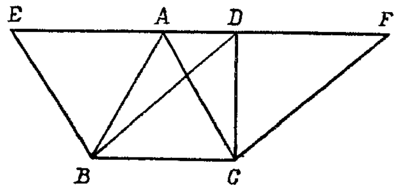
I. 34. Треугольники ABC и BCD в параллелограмме $ABCD$ конгруэнтны



I. 35. Параллелограммы $ABCD$ и $BCFE$ эквивалентны (треугольники ABE и CDF конгруэнтны; отрезаем треугольник DGE, затем добавляем треугольник BGC к двум треугольникам ABE и CDF).



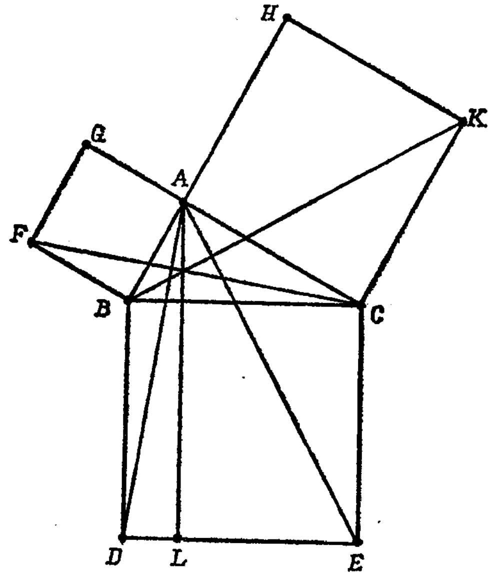
I. 37. Треугольники ABC и DBC эквивалентны, если прямая AD параллельна BC.



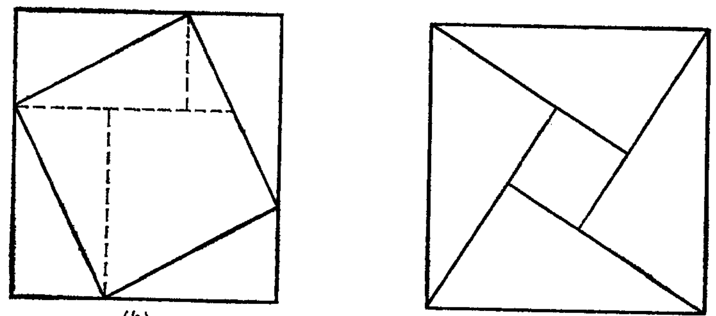
(Треугольник ABC — это половина параллелограмма $AEBC$, треугольник DBC — это половина параллелограмма $IDBC$ по 1.34, а параллелограммы $AEBC$ и $FDBC$ эквивалентны по I. 35.)

Таблица II

Теорема Пифагора



(a)



(b) (c)

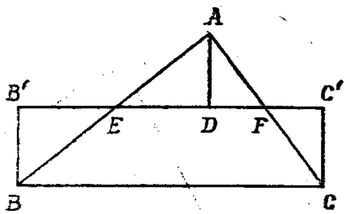
(a) Способ Евклида, (b) способ Лежандра, (c) традиционный китайский и индийский способ.

Таблица III

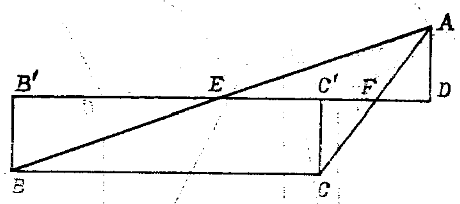
Разбиение площадей

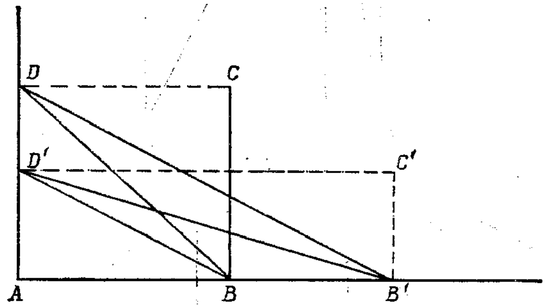
Треугольники ADF и $CC'F$ конгруэнтны, то же самое для треугольников ADE и $BB'E$, поэтому треугольник ABC эквивалентен прямоугольнику $BB'C'C$.

Случай добавления



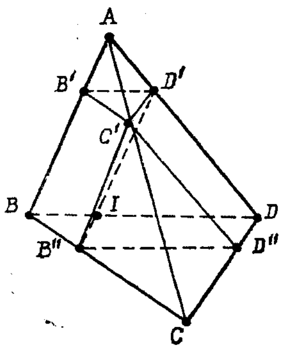
Случай удаления





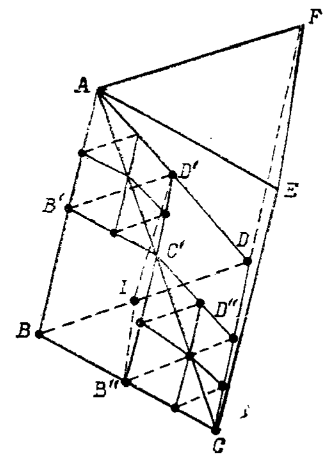
Теорема Фалеса: прямоугольники $ABCD$ и $AB'C'D'$ эквивалентны, если прямые BD' и $B'D$ параллельны.

Таблица IV



Тетраэдр $P = ABCD$ разбивается на:
тетраэдр $P' = AB'C'D'$;
тетраэдр $P'' = CC'B''D''$;
призму $BB''IB'C'D'$;
призму $C'B''D''ID'D$.
P' гомотетичен P с отношением $t = C'A/CA$.
P'' гомотетичен P с отношением $1-t = C'C/CA$.

Каждая из призм $BB''IB'C'D'$ и $C'B''D''ID'D$ эквивалентна 1/8 большой призмы $\Pi = AEFBCD$. Тетраэдры $P' = AB'C'D'$ и $P'' = CC'B''D''$ равны и гомотетичны P с отношением 1/2. Если принять, что объем однороден с весом 3, то $\mathrm{vol}(P') = \mathrm{vol}(P'') = \frac{1}{8}\mathrm{vol}(P)$, откуда легко выводится $\mathrm{vol}(P) = \frac{1}{3}\mathrm{vol}(\Pi)$.



N. B. Евклид и Лю Хуэй продолжили процесс уменьшения в 2 раза и использовали соображение, эквивалентное формуле $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1}{3}$.

КОММЕНТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Я не повторяю ссылок из моего предыдущего доклада № 621[1]).

A. Работы общего характера

1. Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. — М.: Наука, 1977.
2. Browder F. E. (Editor). Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems. Proc. Symp. Pure Math., Vol. XXVIII (in two parts), Amer. Math. Soc., Providence, 1976.
3. Euclid. The thirteen books of Euclid's Elements. Présentés par T. L. Heath, en 3 vol., Dover. New York, 1976. [Ср. Евклид. Начала Евклида. В 3 т. — М. — Л.: Гостехиздат, 1949—1950.]
4. Federico P. J. Descartes on Polyhedra (A study of the «De Solidorum Elementis»), Springer, Berlin, 1982.
5. Hadwiger H. Vorlesungen über Inhalt. Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, Berlin, 1957.
6. Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen, In 3 vol., Chelsea, New York, 1965.
7. Hilbert D. Grundlagen der Geometrie. II^e éd., Teubner, Stuttgart, 1968.
8. Lakatos I. Proofs and refutations (The logic of mathematical discovery). Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
9. Sah C. H. Hilbert's third problem: scissors congruence, Pitman, London, 1979.

B. Решение третьей проблемы

10. Bricard R. Sur une question de géométrie relativie aux polyèdres, Nouv. Ann. Math., 15 (1896), 331—334.
11. Dehn M. Über raumgleiche Polyeder. Nachr. Akad. Wiss., Göttingen Math—Phys. Kl. 1900, 345—354.

[1]) См. примечание на стр. 27. — *Прим. перев.*

12. Dehn M. Über den Rauminhalt, Math. Ann., 55 (1902). 465—478.
13. Hadwiger H. Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder des gewöhnlichen Raumes, J. Reine Angew. Math., 233 (1968), 200—212.
14. Hadwiger H., Glur P. Zerlegungsgleichheit ebener Polygone, Elem. Math., 6 (1951), 97—106.
15. Jessen B. The algebra of polyhedra and the Dehn—Sydler theorem, Math. Scand., 22 (1968), 241—256.
16. Jessen B., Karpf J., Thorup A. Some functional equations in groups and rings, Math. Scand., 22 (1968), 257—265.
17. B. Jessen, A. Thorup. The algebra of polytopes in affine spaces, Math. Scand., 43 (1978), 211—240.
18. Sydler J.-P. Sur la décomposition des polyèdres., Comment. Math. Helv., 16 (1943/4), 266—273.
19. Sydler J.-P. Conditions nécessaires et suffiisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions, Comment. Math. Helv., 40 (1965), 43—80.
20. Зылев В. Б. О равносоставленности двух равнодополняемых многогранников. — ДАН СССР, 1965, т. 161, вып. 3, с. 515—516.
21. Зылев В. Б. О G-составленности и G-дополняемости — ДАН СССР, 1968, т. 179, вып. 3, с. 529—530.

С. Гомологические методы в третьей проблеме

22. Cathelineau J.-L. Remarques sur l'homologie de $SO(n, \mathbb{R})$ considéré comme groupe discret, C. R. Ac. Sci. Paris, 295. Sér. 1. (1982), 281—283.
23. Dupont J. L. Algebra of polytopes and homology of flag complexes, Osaka J. Math., 19 (1982), 599—641.
24. Dupont J. L. and Sah C. H. Scissor congruences II, J. Pure Appl. Algebra, 25 (1982), 159—195.
25. Lusztig G. The discrete series of GL_n over a finite field, Annals of Math., Studies 81, Princeton University Press, Princeton, 1974.
26. Sah C. H. Scissor congruences I: The Gauss-Bonnet map, Math. Scand., 49 (1981), 181—210.

D. K-теория и группы Ли, рассматриваемые как дискретные группы

27. Alperin R. C., Dennis R. K. K_2 of quaternion algebras, J. Algebra, 56 (1979), 262—273.
28. Bloch S. Higher regulators, algebraic K-theory and regulators of elliptic curves, Publ. Math. IHES.
29. Cheeger J. Invariants of flat bundles. In: Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974, 3—6.
30. Cheeger J., Simons J. Differential characters and geometric invariants., Preprint, 1973.
31. Chern S., Simons J. Characteristic forms and geometric invariants, Ann. Math., 99 (1974), 48—69.
32. Dupont J. L., Parry W., Sah C. H. Schur multipliers of classical Lie groups II, A paraître.
33. Friedlander E. M., Mislin G. Cohomology of classifying spaces of complex Lie groups and related discrete groups, Comment. Math. Helv., 59 (1984), 347—361.
34. Karoubi M. Homology of the infinite orthogonal and symplectic groups over algebraically closed fields, Invent. Math., 73 (1983), 241—245.
35. Milnor J. On the homology of Lie groups made discrete, Comment. Math. Helv., 58 (1983), 72—85.
36. Parry W., Sah C. H. Third homology of $SL(2, \mathbb{R})$ made discrete, J. Pure Appl. Algebra, 30 (1983), 181—209.

37. Sah C. H. Schur multipliers of classical Lie groups, I, A paraître.
38. Sah C. H.. Wagoner J. B. Second homology of Lie groups made discrete, Comm. in Algebra, 5 (1977), 611—642.
39. Quillen D. On the cohomology and K-theory of the general linear group over a finite field, Ann. Math., 96 (1972), 552—586.
40. Suslin A. A. Stability in algebraic K-theory. Lecture Notes in Math., Springer, Vol. 961, 1982, p. 304—333.
41. Suslin A. A. Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory, Preprint, Leningrad, 1982.
42. Suslin A. A. On the K-theory of algebraically closed fields, Invent. Math., 73 (1983), 241—245.
43. Suslin A. A. On the K-theory of local fields, Preprint, Leningrad, 1983.

E. Слоения и гомологии групп Ли

44. Blanc P. (Co)homologie différentiable et changement de groupe, Astérisque, 124—125 (1985), 13—29.
45. Haefliger A. Sur les classes caractéristiques des feuilletages, Sém. Bourbaki, no. 412 (Juin 1972); Lecture Notes in Math., Springer, Vol. 317, 1973.
46. Haefliger A. The homology of nilpotent Lie groups made discrete. Astérisque. 113—114 (1984), 206—211.
47. Van Est W. T. A generalization of the Cartan — Leray spectral sequence, Nederl. Akad. Weten. Proc. Serie A, 61 (1958), 399—405, 406—413.

F. Объем тетраэдров

48. Aomoto K. Analytic structure of Schläfli function, Nagoya Math. J., 68 (1977), 1—16.
49. Coxeter H. S. M. The functions of Schläfli and Labatschefsky. Quart. J. Math., Oxford, 6 (1935), 13—29.
50. Lewin L. Polylogarithms and associated functions, North. Holland. New York, 1981.
51. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc., 6 (1982), 9—24.
52. Milnor J. On the Schläfli differential equality, A paraître.
53. Schläfli. On the multiple integral $\int^n dxdy \ldots dz$ where limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \ldots + h_1z > 0,\ p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \ldots + z^2 < 1$. In: Gesammelte Mathematische Abhandlungen II, Birkhaüser Verlag, Basel, 1953, p. 219—270.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Suslin A. A. Algebraic K-Theory of Fields. Proc. of the Int. Congr. of Math., Berkeley, Calif., 222—244.
2*. Sah Chin-Han, Homology of Classical Lie Groups made discrete. III. Preprint. SUNY at Stony Brook, 1987, p. 1—63.
3*. Dupont J. L., Parry W., Sah Chin-Han. Homology of Classical Lie Groups made discrete II. H_2, H_3, and Relations with Scissors Congruences. J. of Algebra, 113, № 1 (1988), 215—260.
4*. Dupont J. L., Sah Chih-Hau. Homology of Euclidean Motion Groups Made Discrete and Euclidean Scissors Congruences. Preprint, SUNY at Stony Brook, 1989, p. 1—40.
5*. Бейлинсон А. А., Варченко А. Н., Гончаров А. Б., Шехтман В. В. Проективная геометрия и K-теория. — Алгебра и анализ, т. 2. 1990.

ОБОБЩЕННЫЕ ЯКОБИАНЫ, УНИПОТЕНТНЫЕ МОНОДРОМИИ И ИТЕРИРОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пьер Картье[1])

Посвящается памяти
Го-Цзай Чена

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОНЯТИЕ МОНОДРОМИИ

1.1. Понятие монодромии появилось в работе Римана, в которой он (вслед за Гауссом и Куммером) изучал *гипергеометрическое дифференциальное уравнение.* Напомним, что *гипергеометрический ряд*

(1) $$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} (a)_n (b)_n z^n/(c)_n n!$$

(мы ввели обозначение $(a)_n = a(a+1)\ \ldots\ (a+n-1)$) имеет радиус сходимости 1 по (комплексной) переменной z. Ряд определен, если c не является целым неположительным числом, и удовлетворяет дифференциальному уравнению

(2) $$z(1-z)D^2F + (c-(a+b+1)z)DF - abF = 0$$

(мы положили $D = d/dz$). Рассечем плоскость $\mathbb{C}$ комплексной переменной z, удалив вещественные интервалы $I_0 =]-\infty, 0[$ и $I_1 = [1, +\infty[$; полученное множество Ω будет односвязано. Функция $F(a, b; c; z)$ продолжается вне круга сходимости с помощью (эйлерова) интегрального представления

(3) $$F(a, b; c; z) = \\ = \Gamma(c)\,\Gamma(b)^{-1}\,\Gamma(c-b)^{-1}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt,$$

имеющего смысл при z из Ω. При этом определении F в Ω можно получить фундаментальную систему решений гипергеометрического дифференциального уравнения вида

(4) $$u_1(z) = F(a, b; c; z), \\ u_2 = z^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1;\ 2-c;\ z)$$

[1]) Cartier Pierre. Jacobiennes gènèralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées. — Séminair Bourbaki, 10 ème année, 1987—88, n° 687, Astérisque 161—162, 1988, p. 31—52.

(по крайней мере, если среди чисел a, b, $c-a$, $c-b$, $a-b$, $c-a-b$ нет целых).

1.2. При вещественном t определены пределы $u_k(t\pm i0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_k(t\pm i\varepsilon)$ (где $k=1, 2$, а $\varepsilon > 0$). Вместо столбца $\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z)\end{pmatrix}$ будем писать $u(z)$. Так как интервал $]0, 1[$ принадлежит области Ω, в которой $u(z)$ голоморфна, то при t из $]0, 1[$ выполнено равенство $u(t+i0) = u(t-i0)$. Если же t принадлежит интервалу I_0 или I_1, то выполнены соотношения

(5) $$u(t+i0) = M_0 u(t-i0) \text{ для } t\in I_0,$$

(6) $$u(t-i0) = M_1 u(t+i0) \text{ для } t\in I_1,$$

где M_0 и M_1 — матрицы размера 2×2 с комплексными (постоянными) коэффициентами. Фактически эти соотношения восходят к Куммеру (1836 г.). Они выводятся из формулы

(7) $$F(a, b, c; z) = A_1 F(a, b;\ a+b-c+1;\ 1-z) + \\ + A_2(1-z)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b;\ c-a-b+1;\ 1-z)$$

(где A_1 и A_2 — постоянные) и из аналогичной формулы, в которой $1-z$ заменено на $1/z$. Эти формулы справедливы при невещественном z; они связаны со свойствами инвариантности гипергеометрического уравнения при замене z на $1-z$ или $1/z$. *У Куммера монодромия гипергеометрической функции выражалось соотношениями* (5) *и* (6), *т. е. матрицами* M_0 *и* M_1.

1.3. «Современная» точка зрения восходит к Риману, который дал общие формулировки в 1851 г., а применил их к гипергеометрической функции в 1857 г. Положим $X = \mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$; обо-

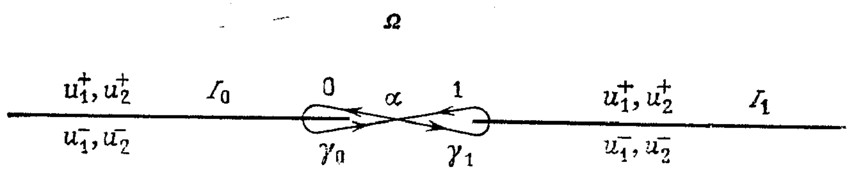


Рис. 1

значим через $\tilde{X}$ универсальную накрывающую X, а через Γ — фундаментальную группу, действующую на $\tilde{X}$ так, что $X = \tilde{X}/\Gamma$. Так как Ω односвязно, можно — и нужно — выбрать сечение s: $\Omega \to \tilde{X}$ канонической проекции p: $\tilde{X}\to X$. Это позволит отождествить Γ с $\pi_1(X, \alpha)$, где α — произвольная точка в Ω. Теперь заметим, что Γ — свободная группа с двумя образующими γ_0 и γ_1, соответствующими петлям с рис. 1. Так как $\tilde{X}$ локально гомеоморфно X, то оно является комплексным аналитическим многообразием размерности 1, поэтому на нем существуют две голоморфные функции U_k, *главные ветви* $U_k \circ s$ которых совпадают (на Ω) с u_k (где $k=1, 2$). Положим $U(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} U_1(\tilde{z}) \\ U_2(\tilde{z}) \end{pmatrix}$. В этой ситуации существует такое линейное представление M: $\Gamma \to GL_2(\mathbb{C})$, что

$$U(\gamma\tilde{z}) = M(\gamma) U(\tilde{z}) \quad (\tilde{z} \in \tilde{X},\ \gamma \in \Gamma). \tag{8}$$

Так как Γ — свободная группа, то представление M определяется по матрицам $M(\gamma_0)$ и $M(\gamma_1)$, т. е. *не по чему иному, как по* M_0 и M_1. *Монодромия у Римана выражалась соотношением* (8), откуда и возник термин *представление монодромиями* на M.

Нетрудно связать мостом точки зрения Куммера и Римана. Различные «ветви» $u_{k,\gamma}$ функций u_k определяются формулой

$$M(\gamma)\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,\gamma}(z) \\ u_{2,\gamma}(z) \end{pmatrix} = u_\gamma(z), \tag{9}$$

где $z \in \Omega$, а $\gamma \in \Gamma$. Условия согласования выводятся из соотношений (5) и (6):

$$u_\gamma(t+i0) = u_{\gamma\gamma_0}(t-i0) \quad \text{для } t \in I_0; \tag{10}$$

$$u_\gamma(t-i0) = u_{\gamma\gamma_1}(t+i0) \quad \text{для } t \in I_1. \tag{11}$$

Таким образом, гипергеометрическая функция $u_1(z) = F(a, b; c; z)$ многозначна; но ее ветви, как и ветви функций z^α или $\log z$, есть линейные комбинации конечного числа функций. Такие функции называют *конечно определенными*.

1.4. Предыдущие результаты можно обобщить на все линейные дифференциальные уравнения с рациональными коэффициентами. Как известно любому студенту, линейное дифференциальное уравнение сводится к системе первого порядка, которую мы запишем в виде

$$DF(z) = R(z) F(z). \tag{12}$$

Неизвестное здесь — это столбец

$$F(z) = \begin{pmatrix} F_1(z) \\ \cdots \\ F_n(z) \end{pmatrix}$$

решений, а $R(z)$ — квадратная матрица порядка n, рационально зависящая от z. *Регулярный по Фуксу случай* отвечает дифференциальной форме $R(z)dz$ с полюсами первого порядка (в том числе в ∞). Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — конечные полюсы, а $A_1, \ldots, A_k$ — такие постоянные матрицы, что $R(z) - A_j/(z-a_j)$ не имеет полюса в $z = a_j$. Положим $X = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$. Фундаментальная группа Γ пространства X свободна и имеет образующие $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, где γ_j соответствует дуге, обходящей a_j в положительном направлении. В представлении монодромиями $M(\gamma_j)$ имеет вид $U_j e^{2\pi i A_j} U_j^{-1}$ (обобщение случая $n=1$, в котором получаются функции z^a).

Прямая задача — явное вычисление матриц $M(\gamma_j)$, как в случае гипергеометрической функции. *Обратная задача*, известная как задача Римана — Гильберта, или 21-я проблема Гильберта — показать, что любое линейное представление группы Γ есть представление монодромиями регулярного в смысле Фукса уравнения вида (12). Она решена Д. Биркгофом и Плеймелем, а также в более общем виде Делинем в [E1].

1.5. Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений в вещественной области вида

$$d\chi(t)/dt = A(t) \cdot \chi(t). \tag{13}$$

Процедура Пикара состоит в переписывании (13) в виде интегрального уравнения

$$\chi(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)\chi(s)\, ds; \tag{14}$$

оно решается итерациями: положим $\chi_0(t) = \chi(t_0)$ и при $n \geqslant 0$

$$\chi_{n+1}(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)\chi_n(s)\, ds; \tag{15}$$

предел $\chi(t)$ функций $\chi_n(t)$ существует и удовлетворяет уравнению (14). Более явно, решение находится в виде $\chi(t_1) = U(t_1, t_0)\chi(t_0)$; матрица $U(t_1, t_0)$ дается *рядом Дайсона*

$$U(t_1, t_0) = \sum_{n \geqslant 0} \int \ldots \int A(s_n) \ldots A(s_1)\, ds_1 \ldots ds_n, \tag{16}$$

где n-кратный интеграл берется по области $t_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant t_1$ в $\mathbb{R}^n$.

1.6. Лаппо-Данилевский дал аналогичную формулу в комплексном случае [A6]. Для инвариантности рассмотрим комплексное аналитическое многообразие X размерности 1 и универсальное накрытие p: $\tilde{X} \to X$ многообразия X. Пусть $\omega = (\omega_{ij})$ — матрица размера $n \times n$ из голоморфных дифференциальных форм на X. Дифференциальное уравнение принимает вид

$$dF = \omega \cdot F. \tag{17}$$

Если z_0 и z_1 — две точки из $\tilde{X}$, а α — голоморфная дифференциальная форма на $\tilde{X}$, то корректно определен интеграл $\int_{z_0}^{z_1} \alpha$. *Итерированный интеграл* $\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \ldots \alpha_1$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — голоморфные; дифференциальные формы на $\tilde{X}$ (или на X), определяется рекуррентно как

$$\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \ldots \alpha_1 = \int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \cdot f, \tag{18}$$

где функция f на $\tilde{X}$ задается формулой

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1. \tag{19}$$

Более явно, выберем путь γ: $[t_0, t_1] \to \tilde{X}$ с концами z_0 и z_1 положим $\gamma^* \alpha_i = a_i(t)\, dt$. Тогда

$$\int_{z_0}^{z_1} \alpha_n \ldots \alpha_1 = \int \ldots \int a_n(s_n) \ldots a_1(s_1)\, ds_1 \ldots ds_n, \tag{20}$$

где область интегрирования та же, что и в формуле Дайсона. Это означает, что дифференциальное уравнение $dF = \omega F$ решается с помощью формулы $F(z_1) = U(z_1, z_0) F(z_0)$, где матрица $U(z_1, z_0)$ дается формулой

$$U(z_1, z_0) = \sum_{n \geqslant 0} \int_{z_0}^{z_1} \omega \ldots \omega \tag{21}$$

(n множителей ω), где определение (20) обобщено на матричные функции.

1.7. *Унипотентный случай* — это случай, когда ряд (21) имеет только конечное число ненулевых слагаемых. Вот типичный пример:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & & 0 \\ & 0 & \alpha_2 & \\ & & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Соответствующая матрица U определяется условиями

$$u_{ij} = 0 \text{ при } i > j,\ u_{ii} = 1,\ u_{ij}(z_1, z_0) = \int_{z_0}^{z_1} \alpha_i \ldots \alpha_{j-1} \text{ при } i < j. \tag{23}$$

Уравнение резольвенты $U(z_2, z_0) = U(z_2, z_1) U(z_1, z_0)$ можно переписать как фундаментальное соотношение

$$\int_{z_0}^{z_2} \alpha_1 \ldots \alpha_n = \sum_{j=0}^{n} \int_{z_1}^{z_2} \alpha_1 \ldots \alpha_j \cdot \int_{z_0}^{z_1} \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n; \tag{24}$$

его можно также доказать разбиением области интегрирования.

1.8. Интересен случай, когда X — дополнение в $\mathbb{C}$ конечного подмножества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, причем $\alpha_j = dz/(z - a_j)$. Функция $\int_0^z \alpha_1 \ldots \alpha_n$ голоморфна на универсальной накрывающей пространства X; это — полилогарифм $L(z \mid a_1, \ldots, a_n)$, рассмотренный уже Лаппо-Данилевским. Он лежит в основе разложения в ряд «восстановимых» функций Экаля; аналитическое продолжение полилогарифма и его монодромия исследовались Блохом и Рамакришнаном, а более полно — Дюпоном [H1].

Объясним их методы на примере *дилогарифма*. Рассмотрим матрицу из дифференциальных форм

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & dz/z & 0 \\ 0 & 0 & dz/(1-z) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Определим на рассеченной плоскости Ω (см. разд. 1.1) матрицу

$$u(z) = \begin{pmatrix} 1 & \log z & \mathrm{Li}_2(z) \\ 0 & 1 & \log 1/(1-z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

удовлетворяющую уравнению $du = \omega u$. У логарифма берется главная ветвь, а дилогарифм $\mathrm{Li}_2(z)$ определяется аналитическим продолжением ряда $\sum_{n \geqslant 1} z^n/n^2$, сходящегося при $|z| \leqslant 1$. Обозначим через $G(\mathbb{C})$ комплексную группу Ли матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а через $G(\mathbb{Z})$ — ее подгруппу, определенную как

$\begin{pmatrix} 1 & Z(1) & Z(2) \\ 0 & 1 & Z(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; следуя обозначениям Делиня, мы положили $\mathbb{Z}(p)=(2\pi i)^p\mathbb{Z}$. В обозначениях разд. 1.3 существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{U} & G(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ X & \xrightarrow{V} & G(\mathbb{C})/G(\mathbb{Z}) \end{array},$$

где U и V голоморфны, а u — главная ветвь $U \circ s$ функции U. Монодромия дилогарифма полностью описывается этой диаграммой; представление монодромиями становится гомоморфизмом $M\colon \Gamma \to G(\mathbb{C})$ с образом $G(\mathbb{Z})$. Эта конструкция обобщена Паршиным [C3].

Рассмотрим $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$; обозначим через $\wedge^p_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ внешние степени этого векторного пространства. Определим отображение φ из $G(\mathbb{C})$ в $\wedge^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ как

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2\pi i)^{-2}(2b-ac)\wedge 1-(2\pi i)^{-1}a\wedge(2\pi i)^{-1}c. \tag{27}$$

Это отображение спускается на фактор $G(\mathbb{C})/G(\mathbb{Z})$ как отображение Φ из него в $\wedge^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$; отображение $\Phi\circ V$ из $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$ в $\wedge^2_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ было определено Блохом. Более явно, значение Φ в точке $z\in\Omega$ есть

$$\Phi(V(z)) = \tag{28}$$

$$=(2\pi i)^{-2}(\mathrm{Li}_2(z)-\mathrm{Li}_2(1-z))\wedge 1-(2\pi i)^{-1}\log z\wedge(2\pi i)^{-1}\log\frac{1}{1-z}.$$

Идея перехода к Φ использовалась в общем виде Дюпоном в [H1].

2. СВЯЗЬ С ИТЕРИРОВАННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

2.1. Систематически итерированные интегралы были развиты Ченом; синтетическое изложение этой темы он дал в [C2]. Описание, данное здесь, содержит большое количество новых моментов, причем использует в основном симплициальные методы.

Напомним кое-что из симплициальной теории. Для каждого целого $n \geqslant 0$ реализуем *симплекс* Δ^n как множество точек из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$; удобно ввести избыточные координаты $t_0=0$, $t_{n+1}=1$ и вложить симплекс Δ^n в $\mathbb{R}^{n+2}$. Вершины *симплекса* — это точки $e_i=(0^{i+1}, 1^{n+1-i})$ с $i+1$ координатами, равными нулю, и с $n+1-i$ координатами, равными единице (здесь i пробегает множество $[n]$ целых чисел $(0, 1, \ldots, n)$).

Объектами категории $\mathscr{D}$ являются множества $[n]$, а морфизмами — (нестрого) возрастающие отображения. Отображение φ из $[m]$ в $[n]$ определяет аффинное отображение $\bar\varphi$ из Δ^m в Δ^n, переводящее вершину e_i в вершину $e_{\varphi(i)}$. В частности, для i из $[n]$ имеются отображение грани δ^i: $[n-1]\to[n]$ и отображение вырождения σ^i: $[n+1]\to[n]$. Отображения $d^i=\bar\delta^i$ из Δ^{n-1} в Δ^n и $s^i=\bar\sigma^i$ из Δ^{n+1} в Δ^n описываются так:

$$d^i(t_0, \ldots, t_n)=(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_i, \ldots, t_n) \ (t_i \text{ повторен}); \tag{29}$$

$$s^i(t_0, \ldots, t_{n+2})=(t_0, \ldots, t_i, t_{i+2}, \ldots, t_{n+2}) \ (t_{i+1} \text{ опущен}). \tag{30}$$

Симплициальное множество E — это контравариантный функтор из $\mathscr{D}$ в категорию множеств; аналогичны определения симплициальной группы, симплициального многообразия и т. д. Можно описать E, задав последовательность множеств $E_0, E_1, E_2, \ldots$ с отображениями грани d_i: $E_n\to E_{n-1}$ и вырождения s_i: $E_n\to E_{n+1}$ при $0\leqslant i\leqslant n$, удовлетворяющих соотношениям, которых мы не будем здесь повторять. *Косимплициальное множество* — это ковариантный функтор из $\mathscr{D}$; он описывается последовательностью множеств $E^0, E^1, E^2, \ldots$ с отображениями грани d^i: $E^{n-1}\to E^n$ и вырождения s^i: $E^{n+1}\to E^n$ при $0\leqslant i\leqslant n$.

2.2. Пусть X — дифференцируемое многообразие, скажем, класса C^∞. Классическая конструкция ставит в соответствие X симплициальное множество $C_\cdot(X)$, которое в степени n состоит из множества $C_n(X)$ непрерывных отображений Δ^n в X (*сингулярных симплексов*). Мы используем геометрический вариант кобар-конструкции; косимплициальное многообразие $M^\cdot(X)$ состоит из многообразий $M^n(X)=X^{n+2}$ и операторов d^i и s^i, определяемых формулами (29) и (30) соответственно.

Для дифференцируемого многообразия Y обозначим через $\boldsymbol{a}^p(Y)$ пространство внешних дифференциальных p-форм на Y, а через d: $\boldsymbol{a}^p(Y)\to\boldsymbol{a}^{p+1}(Y)$ — внешний дифференциал.

Возвращаясь к многообразию X, свяжем с ним бикомплекс C (в «четвертом квадранте») с $C^{m,-n}=\boldsymbol{a}^m(X^{n+2})$ при $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$. Два дифференциала — это, с одной стороны, внешний дифференциал d, отображающий $C^{m,-n}=\boldsymbol{a}^m(X^{n+2})$ в $C^{m+1,-n}=\boldsymbol{a}^{m+1}(X^{n+2})$, а с другой — комбинаторный дифференциал Δ из $C^{m,-n}=\boldsymbol{a}^m(X^{n+2})$ в $C^{m,-n+1}=\boldsymbol{a}^m(X^{n+1})$, переводящий μ в $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{m+i}(d^i)^*\mu$ (через $(d^i)^*\mu$ обозначен обратный образ μ при отображении d^i из X^{n+1} в X^{n+2}). Обозначим через $\Gamma^\bullet$ ассоциированный комплекс. Элемент из Γ^p — это последовательность $\mu=(\mu_0, \mu_1, \ldots)$, где μ_n — дифференциальная форма степени $n+p$ на X^{n+2}; его дифференциал — это последовательность $\nu=(\nu_0, \nu_1, \ldots)$ из Γ^{p+1}, описываемая формулой

(31) $$\nu_n = d\mu_n + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n+i}(d^i)^*\mu_{n+1}.$$

Этот комплекс называется *комплексом Чена*.

Если α и β — две дифференциальные формы на X, обозначим через $\alpha * \beta$ форму $\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta$ на X^2, где π_1 и π_2 — проекции X^2 на X. Аналогично определяется $\alpha\times\beta\times\gamma$ на X^3 и т. д. Комплекс де Рама $\boldsymbol{a}^\bullet(X)$ — дифференциальная градуированная алгебра; бар-конструкция, примененная к $\boldsymbol{a}^\bullet(X)$, отождествляется с подкомплексом $\Gamma^\bullet$, образованным последовательностями, в которых каждое μ_n разлагается в конечную сумму мономов вида $\alpha_0\times\ldots\times\alpha_{n+1}$, причем μ_n обращается в нуль для достаточно больших n.

2.3. Пространство $\mathscr{P}X$ путей в X состоит из C^∞-отображений γ: $I=[0, 1]\to X$. Хоть это и не многообразие, но касательный к $\mathscr{P}X$ в пути γ вектор можно определить как C^∞-подъем ξ пути γ в касательное расслоение $\mathscr{T}X$ (иными словами, $\xi(t)$ — касательный вектор к X в точке $\gamma(t)$). Поэтому определено касательное векторное пространство к $\mathscr{P}X$ в γ. Значит, внешняя дифференциальная форма ω на $\mathscr{P}X$ — это антисимметрическая полилинейная функция $\omega(\gamma; \xi_1, \ldots, \xi_p)$ от элементов $\xi_1, \ldots, \xi_p$ пространства $\mathscr{T}_\gamma(\mathscr{P}X)$.

Пусть S — дифференцируемое многообразие, а φ — отображение класса C^∞ из $S\times I$ в X; свяжем с ним отображение Φ из S в $\mathscr{P}X$, заданное формулой $\Phi(s)(t)=\varphi(s, t)$. Легко понять, что такое обратный образ $\Phi^*\omega$ p-формы ω на $\mathscr{P}X$. Будем говорить, что ω — форма (слабого) класса C^∞, если все формы вида $\Phi^*\omega$ будут класса C^∞. Теперь можно определить комплекс де Рама $\boldsymbol{a}^\bullet(\mathscr{P}X)$ так, что $\Phi^\bullet$: $\boldsymbol{a}^\bullet(\mathscr{P}X)\to\boldsymbol{a}^\bullet(S)$ всегда будет совместимо с дифференциалом.

В частном случае $p=0$ мы получаем определение функции (слабого) класса C^∞ на $\mathscr{P}X$; ее дифференциал — элемент из $\boldsymbol{a}^1(\mathscr{P}X)$ есть не что иное, как вариация $\delta F(\gamma, \xi)$ функционала $F(\gamma)$ в смысле вариационного исчисления.

2.4. *Итерированный интеграл* — это гомоморфизм I комплекса Чена $\Gamma^\bullet$ в комплекс де Рама пространства $\mathscr{P}X$.

Для любого целого $n\geqslant 0$ рассмотрим отображения h_n из $\mathscr{P}X\times\Delta^n$ в X^{n+2}, переводящее $(\gamma, t_1, \ldots, t_n)$ в точку $(\gamma(0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n), \gamma(1))$ многообразия $M^n(X)=X^{n+2}$. Слегка обобщив подход из разд. 2.3, можно определить дифференциальные формы на $\mathscr{P}X\times\Delta^n$. Будем считать известной процедуру частичного интегрирования (или взятия прямого образа), сопоставляющую дифференциальной форме Λ степени $n+p$ на $S\times\Delta^n$ p-форму $\lambda=\int_{\Delta^n}\Lambda$ на S. Так как в $\mathscr{P}X$ можно отображать (настоящие) многообразия S, эта процедура обобщается на дифференциальные формы на $\mathscr{P}X\times\Delta^n$.

Пусть теперь $\mu=(\mu_0, \mu_1, \ldots)$ — элемент из Γ^p. Для каждого $n\geqslant 0$ на $\mathscr{P}X\times\Delta^n$ определена дифференциальная форма $h_n^*\mu_n$ степени $n+p$. Положим $I(\mu)=\sum_{n\geqslant 0}\int_{\Delta_n} h_n^*\mu_n$; если ряд сходится, то это — p-форма на $\mathscr{P}X$. Если элемент $\nu=d\mu+\Delta\mu$ из Γ^{p+1} определен по формуле (31), то $dI(\mu)=I(\nu)$.

Более привычен следующий вариант: зададим n дифференциальных форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ степени 1 на X и положим $\mu_n=1\times\alpha_1\times\ldots\times\alpha_n\times 1$, а $\mu_m=0$ при $m\neq n$. Мы получаем элемент μ из Γ^0; $I(\mu)$ будет функцией класса C^∞ на $\mathscr{P}X$, значение которой в γ Чен обозначал $\int_\gamma\alpha_1\ldots\alpha_n$. Ясно, что итерированные интегралы из разд. 1.6 — частный случай этой конструкции.

2.5. Фиксируем две точки a и b на X. Обозначим через $\mathscr{P}_{a,b}X$ пространство путей с началом a и концом b. Предшествующие определения можно модифицировать, получив комплекс Чена $\Gamma^\bullet_{a,b}$ и итерированный интеграл $I_{a,b}$: $\Gamma^\bullet_{a,b}\to\boldsymbol{a}^\bullet(\mathscr{P}_{a,b}X)$. Фундаментальная теорема Чена [C1] утверждает, что *когомологии комплекса $\Gamma^\bullet_{a,b}$ совпадают с сингулярными когомологиями пространства путей $\mathscr{P}_{a,b}X$, по крайней мере если X — компактное односвязное многообразие*. В частности, при $a=b$ получаются когомологии пространства петель многообразия X.

2.6. Другая область приложений касается определения *многозначных функций* через итерированные интегралы. Если a и b — две точки из X, то обозначим через $\Pi_{a,b}X$ множество линейно связных компонент пространства $\mathscr{P}_{a,b}X$; в частности, $\Pi_{a,a}X$ — это фундаментальная группа $\pi_1(X, a)$ пространства X. На самом деле можно определить факторпространство ΠX пространства

$\mathscr{P}X$, накрывающее $X\times X$ со слоем $\Pi_{a,b}X$ над точкой (a, b) из $X\times X$ (группоид Пуанкаре X). Отметив на X точку a, можно реализовать $\tilde{X}$ — универсальное накрытие X — как подмногообразие в ΠX, точнее, объединение $\Pi_{a,b}X$, где b пробегает X.

Пусть теперь $\mu=(\mu_0, \mu_1, \ldots)$ — элемент из Γ^0; иными словами, μ_n — дифференциальная форма степени n на X^{n+2}. Тогда $I(\mu)$ — функция на $\mathscr{P}X$; она опускается до функции F на ΠX тогда и только тогда, когда ее ограничение на $\mathscr{P}_{a,b}X$ локально постоянно при фиксированных a и b. В дифференциальной форме это описывается как система уравнений

$$d\mu_n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}(d^i)^*\mu_{n+1}=0. \tag{32}$$

В случае когда необходимо сосчитать дифференциал dF, формулы (31) и (32) можно скомбинировать: $dI(\mu)=I(\nu)$, где

$$\nu_n=(-1)^n(d^0)^*\mu_{n+1}-(d^{n+1})^*\mu_{n+1}. \tag{33}$$

Зафиксировав точку a на X, функцию F можно ограничить до функции $\tilde{F}$ на $\tilde{X}$ — универсальной накрывающей X. Это будет *многозначная функция на X, соответствующая* μ.

2.7. Настало время вернуться к монодромии. Пусть $\omega=(\omega_{ij})$ — матрица размера $m\times m$ из дифференциальных 1-форм на X. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $dF=\omega F$, или, более явно,

$$dF_i=\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}F_j \quad \text{при} \quad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{34}$$

Параллельный перенос выражается формулой

$$U(\gamma)=\sum_{n\geqslant 0}\int_\gamma \omega\ldots\omega \quad (n \text{ множителей } \omega), \tag{35}$$

где γ — произвольный путь (обобщение разд. 1.6). Другими словами, отображение $\gamma\longmapsto U(\gamma)=(U_{ij}(\gamma))$ из $\mathscr{P}X$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ задано посредством формулы $U_{ij}=I(\Omega_{ij})$, где $\Omega_{ij}=(\Omega_{ij,0}, \Omega_{ij,1}, \ldots)$ — элемент из Γ^0, причем

$$\Omega_{ij,n}=\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}}1\times\omega_{ii_1}\times\omega_{i_1i_2}\times\ldots\times\omega_{i_{n-1}j}\times 1. \tag{36}$$

Условие интегрируемости системы (34) записывается классически в виде $d\omega-\omega\wedge\omega=0$, или, точнее,

$$d\omega_{ij}-\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=0. \tag{37}$$

Для того чтобы матрица $U(\gamma)$ для пути с фиксированными концами a и b зависела только от класса гомотопии $[\gamma]$ пути γ, необходимо и достаточно, чтобы формы $\Omega_{ij,n}$ удовлетворяли условию (32). Простое вычисление показывает, что *это эквивалентно условию интегрируемости* (37). Если оно выполнено, то после выбора фиксированной точки *a представление монодромиями M: $\pi_1(X, a)\to GL_m(\mathbb{C})$ дается* формулой $M([\gamma])=U(\gamma)$.

2.8. Введем алгебру $A_p=\mathbb{C}\langle T_1, \ldots, T_p\rangle$ полиномов от некоммутирующих переменных $T_1, \ldots, T_p$. Наименьшее векторное подпространство A_p, содержащее переменные $T_1, \ldots, T_p$ и стабильное относительно скобки $[u, v]=uv-vu$, называется свободной алгеброй Ли $\mathscr{L}_p$. Существует гомоморфизм алгебр c: $A_p\to A_p\otimes A_p$, характеризуемый свойством $c(T_j)=T_j\otimes 1+1\otimes T_j$, причем $\mathscr{L}_p$ состоит из элементов u из A_p со свойством $c(u)=u\otimes 1+1\otimes u$. Рассмотрим также алгебру $\hat{A}_p=\mathbb{C}\langle\langle T_1, \ldots, T_p\rangle\rangle$ формальных рядов от $T_1, \ldots, T_p$, и замыкание $\hat{\mathscr{L}}_p$ алгебры Ли $\mathscr{L}_p$ в $\hat{A}_p$; $\hat{\mathscr{L}}_p$ характеризуется аналогично $\mathscr{L}_p$ (обо всем этом см. Бурбаки [A2, гл. 2]).

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — дифференциальные 1-формы на X, и пусть $\omega=T_1\alpha_1+\ldots+T_p\alpha_p$. Возвращаясь к формуле параллельного переноса (35), мы приходим к определению формального ряда

$$U(\gamma)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{i_1,\ldots,i_n}\left(\int_\gamma\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_n}\right)\cdot T_{i_1}\ldots T_{i_n}. \tag{38}$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_{m+n}$ суть 1-формы на X. Для каждого пути γ выполнено условие «перетасовывания»

$$\int_\gamma\mu_1\ldots\mu_m\int_\gamma\mu_{m+1}\ldots\mu_{m+n}=\sum_\sigma\int_\gamma\mu_{\sigma(1)}\ldots\mu_{\sigma(m+n)}, \tag{39}$$

где σ пробегает множество тех перестановок из S_{m+n}, которые возрастают на интервалах $[1, m]$ и $[m+1, m+n]$. Геометрически это отвечает разбиению $\Delta^m\times\Delta^n$ на симплексы. Этого уже достаточно для обоснования соотношения $c(U(\gamma))=U(\gamma)\otimes U(\gamma)$, обозначающего, что ряд $\log U(\gamma)$ лежит в алгебре Ли $\hat{\mathscr{L}}_p$ (об этом см. [C4]).

3. ИНТЕРЛЮДИЯ: ТЕОРИЯ ХОДЖА

3.1. Начнем с нескольких обозначений. Пусть X — гладкое (т. е. без особых точек) комплексное алгебраическое многообразие, а d — его комплексная размерность. Введем различные пространства дифференциальных форм:

$\mathfrak{a}^n(X)$ — дифференциальные формы степени n [1]) класса C^∞;
$\Omega^n(X)$ — голоморфные дифференциальные формы степени n;
$F^p\mathfrak{a}^n(X)$ — формы, локально разложимые в конечную сумму форм вида $\alpha\wedge\beta$, где α голоморфна степени p, а β есть C^∞-форма степени $n-p$;
$\mathfrak{a}^{p,q}(X)$ — формы, локально разложимые в сумму членов $f\alpha\wedge\bar{\beta}$, где f C^∞-функция, α голоморфна степени p, а β голоморфна степени q [2]).

Естественно, X можно заменить на любое его открытое подмножество, поэтому определены *пучки* $\mathfrak{a}^n$, Ω^n, $F^p\mathfrak{a}^n$, $\mathfrak{a}^{p,q}$. Если $\mathcal{F}$ — один из этих пучков (за исключением Ω^n), то $H^i(X,\mathcal{F})=0$ при любом целом $i>0$.

3.2. Для таких пространств, как X, существуют тождества между сингулярными когомологиями и когомологиями Чеха и де Рама. Поэтому можно считать, что $H^n_{\mathbb{C}}=H^n(X,\mathbb{C})$ — это n-я группа когомологий комплекса де Рама $\mathfrak{a}^\bullet(X)$. Имеется убывающая последовательность подкомплексов

$$\mathfrak{a}^\bullet(X)=F^0\mathfrak{a}^\bullet(X)\supset F^1\mathfrak{a}^\bullet(X)\supset\ldots\supset F^p\mathfrak{a}^\bullet(X)\supset F^{p+1}\mathfrak{a}^\bullet(X)\supset\ldots.$$

Обозначим через $F^pH^n_{\mathbb{C}}$ образ в $H^n_{\mathbb{C}}$ n-й группы когомологий подкомплекса $F^p\mathfrak{a}^\bullet(X)$ комплекса $\mathfrak{a}^\bullet(X)$; тогда имеется убывающая последовательность подпространств

$$H^n_{\mathbb{C}}=F^0H^n_{\mathbb{C}}\supset F^1H^n_{\mathbb{C}}\supset\ldots\supset F^pH^n_{\mathbb{C}}\supset$$
$$\supset F^{p+1}H^n_{\mathbb{C}}\supset\ldots\supset F^nH^n_{\mathbb{C}}\supset F^{n+1}H^n_{\mathbb{C}}=0,$$

которая называется *фильтрацией Ходжа* когомологий многообразия X.

Но из леммы Дольбо легко следует, что q-я группа когомологий комплекса $F^p\mathfrak{a}^\bullet(X)/F^{p+1}\mathfrak{a}^\bullet(X)$ отождествляется с $H^q(X,\Omega^p)$ (когомологиями пучка Ω^p). Из фильтрации комплекса $\mathfrak{a}^\bullet(X)$ подкомплексами $F^p\mathfrak{a}^\bullet(X)$ выводится спектральная последовательность

$$E_1^{p,q}=H^q(X,\Omega^p)\Rightarrow H^{p+q}(X;\mathbb{C}).$$

3.3. Предположим, что X — *проективное многообразие*, а потому компактно. Из теории Ходжа гармонических форм следует, что *упомянутая спектральная последовательность вырождается на уровне* E_1. Иначе говоря, обозначим через $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ (или просто $H^{p,q}$) подпространство в $H^{p+q}_{\mathbb{C}}$, образованное классами когомологий, представленными формами из $\mathfrak{a}^{p,q}$. Можно отождествить $H^{p,q}$ с $H^q(X,\Omega^p)$. Более того, выполнены соотношения

(40) $$H^n_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{p+q=n}H^{p,q},$$

(41) $$F^pH^n_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{r\geqslant p}H^{r,n-r},$$

(42) $$H^{q,p}=\overline{H}^{p,q}\quad\text{при } p+q=n.$$

Делинь выразил эти свойства словами «фильтрация Ходжа определяет *структуру Ходжа веса* n на $H^n_{\mathbb{C}}$». Из предыдущих формул выводится равенство

(43) $$H^{p,n-p}=F^pH^n_{\mathbb{C}}\cap\overline{F^{n-p}H^n_{\mathbb{C}}},$$

поэтому разложение $H^n_{\mathbb{C}}$ в сумму $H^{p,q}$ однозначно определяется фильтрацией Ходжа.

3.4. Большое достижение Делиня [E2] относится *к случаю некомпактных алгебраических многообразий.*

Предположим, что X — дополнение к дивизору D с нормальными пересечениями в гладком проективном многообразии $\bar{X}$. В нескольких интересных случаях $\bar{X}$ возникает естественно; для произвольного X его существование следует из теоремы Хиронаки о разрешении особенностей.

Поясним предположение о *нормальных пересечениях*: существует убывающая последовательность $\bar{X}_0\supset\bar{X}_1\supset\ldots\supset\bar{X}_d$ алгебраических подмногообразий в $\bar{X}$, где $\bar{X}_0=\bar{X}$, $\bar{X}_1=D$, $\bar{X}_j$ имеет комплексную размерность $d-j$ и, кроме того, во всех точках $\bar{X}_r\setminus\bar{X}_{r+1}=X_r$ можно найти такую локальную голоморфную систему координат $z_1,\ldots,z_d$ на $\bar{X}$, что D в окрестности x задается уравнением $z_1\ldots z_r=0$.

Для вычисления когомологий многообразия X используется спектральная последовательность Лере включения X в $\bar{X}$. Для этого необходимо рассмотреть пучок $R^qj_*\mathbb{C}$ на $\bar{X}$: слой этого пучка в точке x из $\bar{X}$ есть индуктивный предел групп $H^q(X\cap U,\mathbb{C})$, где U пробегает открытые окрестности точки x в $\bar{X}$. Эти пучки вычисляются согласно гипотезе о нормальных пересечениях, так как в точке из X_r пара $(\bar{X},X)$ ведет себя как пара $(\mathbb{C}^d,\mathbb{C}^{*r}\times\times\mathbb{C}^{d-r})$ в начале координат в $\mathbb{C}^d$.

Делинь ввел фильтрацию дифференциальных форм по их весам. Для каждого целого s из промежутка $0\leqslant s\leqslant n$ определим подпространство $W_{s+n}\mathfrak{a}^n(X)$ в $\mathfrak{a}^n(X)$ следующим образом: это дифференциальные формы степени n на $\bar{X}$, которые в точке x

[1]) В вещественном смысле. — *Прим. перев.*
[2]) Если u — комплексное число (или функция, или форма), то через $\bar{u}$ обозначается комплексно сопряженное к u.

из X_r локально записываются как

$$(44)\qquad \omega=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant r}\alpha_{i_1\ldots i_s}\wedge\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{dz_{i_s}}{z_{i_s}},$$

где формы $\alpha_{i_1\ldots i_s}$ степени $n-s$ лежат в классе C^∞ в окрестности точки x в $\bar{X}$, а система координат $z_1, \ldots, z_d$ та же, что и выше.

Наконец, обозначим через $W_{s+n}H^n_{\mathbb{C}}$ подпространство в $H^n_{\mathbb{C}}$, образованное классами когомологий с представителями из $W_{s+n}a^n(X)$. *Весовая фильтрация в* $H^n_{\mathbb{C}}$ — это возрастающая последовательность подпространств

$$(45)\quad 0\subset W_nH^n_{\mathbb{C}}\subset W_{n+1}H^n_{\mathbb{C}}\subset\ldots\subset W_{2n-1}H^n_{\mathbb{C}}\subset W_{2n}H^n_{\mathbb{C}}=H^n_{\mathbb{C}}.$$

Удобно положить $W_tH^n_{\mathbb{C}}=0$ при $t<n$ и $W_tH^n_{\mathbb{C}}=H^n_{\mathbb{C}}$ при $t>2n$. Ключевой момент — это то, что *пространства* $W_tH^n_{\mathbb{C}}$ зависят только от X, а не от вложения X в гладкое компактное многообразие $\bar{X}$.

3.5. Подытожим ситуацию. Будем писать $H^n_{\mathbb{Z}}$ вместо $H^n(X, \mathbb{Z})$; аналогично введем $H^n_{\mathbb{Q}}$.

a) $H^n_{\mathbb{Z}}$ — *коммутативная группа конечного типа*;

b) $H^n_{\mathbb{Q}}$ *можно отождествить с* $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}H^n_{\mathbb{Z}}$, *а* $H^n_{\mathbb{C}}$ — *с* $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}H^n_{\mathbb{Z}}$. Кроме того, на $H^n_{\mathbb{C}}$ определена *фильтрация Ходжа*, т. е. *убывающая* последовательность подпространств $F^pH^n_{\mathbb{C}}$ (при p из $\mathbb{Z}$), и *весовая фильтрация*, т. е. *возрастающая* последовательность подпространств $W_rH^n_{\mathbb{C}}$ (при r из $\mathbb{Z}$). Выполнены следующие свойства:

c) *Существуют такие подпространства* $W_rH^n_{\mathbb{Q}}$ *векторного пространства* $H^n_{\mathbb{Q}}$ *над* $\mathbb{Q}$, *что* $W_rH^n_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}}W_rH^n_{\mathbb{Q}}$ (весовая фильтрация определена над полем рациональных чисел);

d) *положим* $\mathrm{Gr}^W_r H^n_{\mathbb{C}}=W_rH^n_{\mathbb{C}}/W_{r-1}H^n_{\mathbb{C}}$; *снабдим это пространство фильтрацией, определенной образами подпространств* $F^pH^n_{\mathbb{C}}\cap W_rH^n_{\mathbb{C}}$; *тогда* $\mathrm{Gr}^W_r H^n_{\mathbb{C}}$ *с этой фильтрацией есть структура Ходжа веса* r *в смысле* разд. 3.3.

Именно эти свойства Делинь и выбрал в качестве аксиом *смешанной структуры Ходжа.*

3.6. Согласно свойству d) из разд. 3.5, пространство $\mathrm{Gr}^W_r H^n_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму подпространств $H^n_{p,q}$ (для $p+q=r$). Поэтому размерность h^n пространства $H^n_{\mathbb{C}}$ равна $\sum_{p,q} h^n_{p,q}$, где

$h^n_{p,q}$ — размерность $H^n_{p,q}$. В интересующих нас случаях $h^n_{p,q}=0$, кроме как при $p\leqslant n$, $q\leqslant n$ и $p+q\geqslant n$. Если группа $\mathrm{Gr}^W_r H^n_{\mathbb{C}}$ не равна нулю, то говорят, что вес r входит в группу когомологий $H^n_{\mathbb{C}}=H^n(X, \mathbb{C})$; входить могут только веса $n, n+1, \ldots, 2n$. Вес n соответствует образу $W_nH^n_{\mathbb{C}}$ гомоморфизма ограничения из $H^n(\bar{X}, \mathbb{C})$ в $H^n(X, \mathbb{C})$.

Предположим, что $\bar{X}=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, а $D=\{0, \infty\}$, т. е. $X=\mathbb{C}^*$. Обозначим через $\mathbb{Z}(-1)$ смешанную структуру Ходжа на $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$. Выбором в качестве базиса класса когомологий dz/z это пространство отождествляется с $\mathbb{C}$, откуда $\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}$. Целочисленные классы когомологий — это целые кратные $dz/2\pi iz$, откуда следует, что $\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{Z}}=(2\pi i)^{-1}\mathbb{Z}$. Наконец, в $\mathbb{Z}(-1)$ входит только вес 2, $W_1\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}}=0$, $W_2\mathbb{Z}(-1)_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}$, причем $H^1_{1,1}=\mathbb{C}$. Другими словами, $\mathbb{Z}(-1)$ — *чистая структура веса* 2 *типа* (1, 1).

4. ОБОБЩЕННЫЕ ЯКОБИАНЫ

4.1. Пусть X — компактная риманова поверхность рода g. Отметим точку a на X и базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ пространства $\Omega^1(X)$ голоморфных 1-форм на X. Пусть, наконец, $\tilde{X}$ — универсальное накрытие X относительно a. Определим отображение $\tilde{\varphi}_a$ из $\tilde{X}$ в $\mathbb{C}^g$ формулой $\tilde{\varphi}_a(z)=\left(\int_a^z\alpha_1, \ldots, \int_a^z\alpha_g\right)$; пусть Λ — множество векторов из $\mathbb{C}^g$ вида $\left(\int_\gamma\alpha_1, \ldots, \int_\gamma\alpha_g\right)$, где γ — петля, проходящая через a. Хорошо известно, что Λ — изоморфная $\mathbb{Z}^{2g}$ дискретная подгруппа в $\mathbb{C}^g$. *Якобиан* $J(X)$ — это комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, причем можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_a} & \mathbb{C}^g\\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'}\\ X & \xrightarrow{\varphi_a} & J(X)\end{array}$$

аналогичную диаграмме разд. 1.8.

4.2. Можно действовать более общо и более инвариантно, определив *многообразие Альбанезе* $\mathrm{Alb}(X)$ гладкого проективного алгебраического многообразия X.

Сначала обозначим через F^pV^* подпространство сопряженного к V пространства V^*, ортогональное $F^{1-p}V$, где векторное пространство V снабжено убывающей фильтрацией подпространствами F^pV. Таким образом в V^* получается убывающая фильтрация, причем пространство $\mathrm{Gr}^p V^* = F^pV^*/F^{p+1}V^*$ двойственно пространству $\mathrm{Gr}_F^{-p} V = F^{-p}V/F^{-p+1}V$. Аналогичные соглашения мы примем и относительно возрастающей фильтрации $(W_nV)_{n \in \mathbf{Z}}$. Поэтому можно определить двойственную к смешанной структуре Ходжа структуру.

На пространстве $H^1(X, \mathbb{C})$ фильтрация Ходжа описывается как

$$F^0H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{C}), \quad F^1H^1(X, \mathbb{C}) = \Omega^1(X), \quad F^2H^1(X, \mathbb{C}) = 0.$$

Поэтому на группе гомологий $H_1 = H_1(X, \mathbb{C})$, двойственной к $H^1(X, \mathbb{C})$, имеется фильтрация Ходжа

$$H_1 = F^{-1}H_1 \supset F^0H_1 \supset F^1H_1 = 0.$$

Теперь многообразие Альбанезе определено формулой

$$\mathrm{Alb}(X) = H_1(X, \mathbb{Z})\backslash H_1(X, \mathbb{C})/F^0H_1(X, \mathbb{C});$$

пространство $H_1(X, \mathbb{C})/F^0H_1(X, \mathbb{C})$ отождествляется с сопряженным $\Omega^1(X)^*$ к пространству $\Omega^1(X)$. Выберем базисную точку a на X; обозначим через $\tilde{X}$ универсальную накрывающую X. Определим отображение $\tilde{\varphi}_a$ из $\tilde{X}$ в $\Omega^1(X)^*$ формулой $\langle \tilde{\varphi}_a(z), \omega \rangle = \int_a^z \omega$ при ω из $\Omega^1(X)$; этот интеграл корректно определен, так как $d\omega = 0$. Переход к факторам определяет отображение φ_a из X в $\mathrm{Alb}(X) = H_1(X, \mathbb{Z}) \diagdown \Omega^1(X)^*$.

4.3. Напомним кое-что из *теории Мальцева нильпотентных групп*[1]). Предположим пока, что X — дифференцируемое многообразие; отметим точку a и положим $\pi = \pi_1(X; a)$. Пусть π конечно порождена — это выполнено в случае комплексного алгебраического многообразия.

Пусть $\mathbb{C}\pi$ — групповая алгебра π с комплексными коэффициентами, образованная конечными суммами $\sum_g a_g g$. Сопряженное к $\mathbb{C}\pi$ пространство отождествляется с пространством $\mathcal{F}(\pi)$ комплексных функций на π. Пусть J — двусторонний идеал в $\mathbb{C}\pi$, определяемый соотношением $\sum_g a_g = 0$, откуда $\mathbb{C}\pi/J = \mathbb{C}$; пусть $J^0 = \mathbb{C}\pi$, $J^1 = J$, $J^2 = J \cdot J$, ... — степени идеала J. Для любого целого $s \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{F}_s(\pi)$ ортогональное дополнение

[1]) См. Квиллен [D3].

к J^{s+1} в $\mathcal{F}(\pi)$, т. е. множество таких отображений f из π в $\mathbb{C}$, что

$$\langle f, (1 - g_0) \dots (1 - g_s) \rangle = 0$$

при $g_0, \dots, g_s \in \pi$. Мы определили возрастающую последовательность $\mathcal{F}_s(\pi)$ подпространств в $\mathcal{F}(\pi)$; обозначим через $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ ее предел.

Если π — это группа $\mathbb{Z}^n$, то $\mathcal{F}_s(\pi)$ состоит из ограничений на $\mathbb{Z}^n$ полиномов степени $\leqslant s$ на $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ — пространство полиномиальных функций на π.

В общем случае назовем *унипотентным*[1]) линейное представление $\sigma\colon \pi \to \mathrm{GL}(V)$, где V — конечномерное линейное пространство над $\mathbb{C}$, если оператор $1_V - \sigma(g)$ нильпотентен для любого $g \in \pi$. Теперь $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ состоит из коэффициентов унипотентных представлений π. Как обычно, $\mathcal{F}(\pi) \otimes \mathcal{F}(\pi)$ отождествляется с подпространством $\mathcal{F}(\pi \times \pi)$ так, что $f_1 \otimes f_2$ переходит в функцию $(g_1, g_2) \longmapsto f_1(g_1) f_2(g_2)$. Теперь можно показать, что $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ — подалгебра в $\mathcal{F}(\pi)$ (с умножением $(f_1f_2)(g) = f_1(g) f_2(g)$), причем существует такой гомоморфизм c из $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ в $\mathcal{F}_\infty(\pi) \otimes \mathcal{F}_\infty(\pi)$, что $cf(g_1, g_2) = f(g_1g_2)$ при $f \in \mathcal{F}_\infty(\pi)$, g_1, g_2 из π. Другими словами, $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ — это *биалгебра* в смысле Бурбаки (некоторые говорят «алгебра Хопфа»). Обозначим через $G_\infty(\mathbb{C})$ множество гомоморфизмов алгебры $\mathcal{F}_\infty(\pi)$ в $\mathbb{C}$; благодаря копроизведению c, на $G_\infty(\mathbb{C})$ можно определить умножение, превращающее его в группу. Фактически это множество комплексных точек аффинной групповой схемы G_∞, определенной над $\mathbb{Q}$; значит, можно рассмотреть и подгруппу $G_\infty(\mathbb{Q})$ рациональных точек.

При каждом целом $s \geqslant 0$ $\mathcal{F}_s(\pi)$ — конечномерное векторное пространство функций на G; двойственное к нему пространство отождествляется с $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Если g — точка из $G_\infty(\mathbb{C})$, то отображение $f \longmapsto f(g)$ из $\mathcal{F}_s(\pi)$ в $\mathbb{C}$ определяет элемент $\gamma_s(g)$ из $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Отображение $g \longmapsto \gamma_s(g)$ — гомоморфизм из $G_\infty(\mathbb{C})$ в мультипликативную группу $(\mathbb{C}\pi/J^{s+1})^*$ конечномерной алгебры над $\mathbb{C}$; образ γ_s — унипотентная аффинная алгебраическая группа $G_s(\mathbb{C})$. Так как каждый элемент из $G_s(\mathbb{C})$ имеет вид $1 + u$, где u из J/J^{s+1} (и поэтому нильпотентен), то корректно определены экспоненциальное и логарифмическое отображения. Поэтому существует такая подалгебра Ли $\mathfrak{g}_s$ алгебры $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$ (со скобкой $[u, v] = uv - vu$), что экспонента отождествляет $\mathfrak{g}_s$ с $G_s(\mathbb{C})$; ясно, что $\mathfrak{g}_s$ — это алгебра Ли комплексной группы Ли $G_s(\mathbb{C})$. В действительности G_s можно рассматривать как

[1]) Здесь появляются «унипотентные **монодромии»** из названия статьи.

групповую схему над $\mathbb{Q}$, откуда получается рациональная форма $\mathfrak{g}_s^{\mathbb{Q}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_s$ с $\mathfrak{g}_s = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_s^{\mathbb{Q}}$.

Группа $G_\infty(\mathbb{C})$ — проективный предел групп $G_s(\mathbb{C})$, а ее алгебра Ли $\mathfrak{g}_\infty$ — предел $\mathfrak{g}_s$. Обозначим через $\Gamma^1\pi \supset \Gamma^2\pi \supset \ldots$ убывающий центральный ряд для группы π, а через $\Gamma^1 G_\infty \supset \supset \Gamma^2 G_\infty \supset \ldots$ — для группы $G_\infty = G_\infty(\mathbb{C})$; обозначим также через $\Gamma^1\mathfrak{g}_\infty \supset \Gamma^2\mathfrak{g}_\infty \supset \ldots$ убывающий центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{g}_\infty$. Имеются изоморфизмы

$$G_s(\mathbb{C}) = G_\infty/\Gamma^{s+1}G_\infty, \qquad \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_\infty/\Gamma^{s+1}\mathfrak{g}_\infty,$$
$$\Gamma^s G_\infty/\Gamma^{s+1}G_\infty = (\Gamma^s\pi/\Gamma^{s+1}\pi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \Gamma^s\mathfrak{g}_\infty/\Gamma^{s+1}\mathfrak{g}_\infty.$$

Положим $G_s(\mathbb{Z}) = \pi/\Gamma^{s+1}\pi$. Существует естественный гомоморфизм из $G_s(\mathbb{Z})$ в $G_s(\mathbb{C})$, ядро которого — конечная подгруппа $G_s(\mathbb{Z})$, а образ — дискретная подгруппа в $G_s(\mathbb{C})$. В частности, $G_1(\mathbb{Z}) = H_1(X; \mathbb{Z})$, а $G_1(\mathbb{C}) = H_1(X; \mathbb{C})$.

4.4. Опишем явно связи между группами G_s и итерированными интегралами, полученные *Ченом* и *Столлингсом*.

Отметим в X точку a. Определим следующий вариант комплекса Чена $\Gamma^\bullet$. Обозначим через $M_a^n(X)$ для любого целого числа $n \geqslant 0$ подмногообразие $a \times X^n \times a$ многообразия $M^n(X) = X^{n+2}$; получаем симплициальное многообразие $M_a^\bullet(X)$. Комплекс $\Gamma_a^\bullet$ — фактор комплекса $\Gamma^\bullet$; при целом $p \geqslant 0$ элемент из Γ_a^p — это последовательность $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$, в которой μ_n — дифференциальная форма степени $n+p$ на $a \times X^n \times a$. Дифференциал $d + \Delta$ из Γ_a^p в Γ_a^{p+1} уже описан формулой (31) из разд. 2.2.

Обозначим через $B_s\Gamma_a^p$ для целого $s \geqslant 0$ подпространство Γ_a^p, образованное последовательностями $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ с $\mu_n = 0$ при $n > s$. Получается подкомплекс $B_s\Gamma_a^\bullet$ в $\Gamma_a^\bullet$. Итак, пространство $H^0(\Gamma_a^\bullet)$ фильтровано образами $B_sH^0(\Gamma_a)$ групп когомологий $H^0(B_s\Gamma_a^\bullet)$.

Теперь итерированный интеграл определяет при любом $s \geqslant 0$ *изоморфизм из* $B_sH^0(\Gamma_a)$ на $\mathcal{F}_s(\pi)$.

4.5. Вернемся к случаю гладкого алгебраического многообразия X; будем считать, что оно дано в виде $\bar{X} \setminus D$, как и в разд. 3.4, где дивизор D имеет нормальные пересечения. Говорят, что дифференциальная форма степени n имеет *логарифмические особенности*, если она лежит в $W_{2n}\mathfrak{a}^n(X)$. Во введенных выше обозначениях элемент $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots)$ из Γ_a^p имеет логарифмические особенности, если μ_n есть конечная сумма форм вида $1 \times \omega_1 \times \ldots \times \omega_n \times 1$, где $\omega_1, \ldots, \omega_n$ имеют логарифмические особенности. Так мы получаем подкомплекс $\Gamma_{a,\log}^\bullet$ в $\Gamma_a^\bullet$. Этот комплекс можно еще и профильтровать подкомплексами $B_s\Gamma_a^\bullet \cap \Gamma_{a,\log}^\bullet = B_s\Gamma_{a,\log}^\bullet$. Переходя к когомологиям, получаем пространство $H^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$, фильтрованное образами когомологий $H^0(B_s\Gamma_{a,\log}^\bullet)$, обозначаемыми $B_sH^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$.

Доказательство Чена и Столлингса преобразуется так, чтобы доказать, что *итерированный интеграл определяет изоморфизм из* $B_sH^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$ *на* $\mathcal{F}_s(\pi)$ [1])

4.6. Полученный результат — ключевой для определения *смешанной структуры Ходжа* на $\pi = \pi_1(X, a)$. Сначала она была построена Морганом [D2] с использованием методов рациональных гомотопий, развитых им вместе с Сулливаном; метод итерированных интегралов принадлежит Хейну [F3].

При целом $n \geqslant 0$ многообразие X^n — дополнение к дивизору с нормальными пересечениями в $\bar{X}^n$. Значит, на дифференциальных формах класса C^∞ на X^n можно определить фильтрацию Ходжа и весовую фильтрацию. Из них последовательно получаются фильтрации F и W на $\Gamma_{a,\log}^\bullet$, на $B_s\Gamma_{a,\log}^\bullet$, на $H^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$ и на $B_sH^0(\Gamma_{a,\log}^\bullet)$. Приняв во внимание изоморфизм из предыдущего раздела, приходим к определению смешанной структуры Ходжа на $\mathcal{F}_s(\pi)$.

Наконец, перенесем, как в разд. 4.2, эти фильтрации F и W на сопряженное к $\mathcal{F}_s(\pi)$ пространство $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$ с помощью двойственности, затем индуцируем их на подпространстве $\mathfrak{g}_s$ из $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Итак, *на алгебре Ли* $\mathfrak{g}_s$ *комплексной нильпотентной группы Ли* $G_s(\mathbb{C})$ *построена смешанная структура Ходжа.*

4.7. Фильтрации F и W на $\mathfrak{g}_s$ совместимы со скобкой Ли (в очевидном смысле). Поэтому их можно перенести с алгебр Ли на группы. Подытожим достигнутое:

a) *для каждого целого* $s \geqslant 0$ *построена аффинная групповая схема* G_s *над полем* $\mathbb{Q}$;

b) *построена возрастающая последовательность* $(W_nG_s)_{n\leqslant 0}$ *групповых подсхем в* G_s;

c) *группа* $G_s(\mathbb{C})$ *комплексных точек из* G_s — *односвязная нильпотентная комплексная группа Ли; поэтому экспоненциальное отображение осуществляет изоморфизм комплексного аналитического многообразия* $\mathfrak{g}_s$ *на* $G_s(\mathbb{C})$;

d) *факторгруппа* $G_s(\mathbb{Z})$ *группы* $\pi_1(X; a)$ *по подгруппе* $\Gamma^{s+1}\pi_1(X; a)$ — *нильпотентная конечно порожденная группа; она*

[1]) Отметим, что $H^0(\Gamma_a^\bullet) = H^0(P_{a,a}X) = \{$функции на $\pi_0(P_{a,a}X)\} = \{$функции на $\pi_1(X, a)\}$. — *Прим. перев.*

отображается в $G_s(\mathbb{C})$ *гоморфизмом с конечным ядром и дискретным образом;*

e) *построена убывающая последовательность* $(F^pG_s)_{p\geqslant 0}$ *комплексных подгрупп Ли в* $G_s(\mathbb{C})$.

Группа $\pi_1(X; a)$ снабжена смешанной структурой Ходжа именно в этом смысле. То же можно сделать и со старшими гомотопическими группами $\pi_i(X; a)$ — с теми упрощениями, что это коммутативные группы конечного типа, и потому к ним применимы определения Делиня из разд. 3.5; это сделано и Морганом [D2], и Хейном [F2], у каждого своим методом.

Укажем также, что Хейн и Цукер [F5] дали характеризацию смешанной структуры Ходжа на $\pi_1(X; a)$ на языке «вариаций смешанных структур Ходжа». Это тема важна для изучения «модулей».

4.8. *Общее определение многообразий Альбанезе* дано Хейном и Цукером в [F5]. Положим

$$\mathrm{Alb}_s(X) = G_s(\mathbb{Z})\backslash G_s(\mathbb{C})/F^0G_s(\mathbb{C}).$$

Заметим, что комплексное аналитическое многообразие $G_s(\mathbb{C})/F^0G_s(\mathbb{C})$ односвязно, а фактор группы $G_s(\mathbb{Z}) = \pi/\Gamma^{s+1}\pi$ по ее (конечной) подгруппе кручения действует свободно и строго на $G_s(\mathbb{C})/F^0G_s(\mathbb{C})$. Если X — гладкое проективное многообразие, то многообразие $\mathrm{Alb}(X)$, определенное в разд. 4.2, получается как частный случай при $s = 1$.

Положение сильно упрощается в случае, когда все голоморфные дифференциальные 1-формы на $\bar{X}$ нулевые $(\Omega^1(\bar{X}) = 0)$; так получается, например, если X — дополнение в проективном пространстве $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$ к гиперповерхности с нормальными пересечениями (случай, подробно изученный Аомото и Коно [G1, G4, G6]).

Предположим, что, действительно, $\Omega^1(\bar{X}) = 0$. Тогда $F^0G_s = 0$, откуда

$$\mathrm{Alb}_s(X) = G_s(\mathbb{Z})\backslash G_s(\mathbb{C}).$$

Нам нужно описать алгебру Ли $\mathfrak{g}_s$. Обозначим $\Omega^p(X \log D)$ пространство $\Omega^p(X) \cap W_{2p}a^p(X)$ голоморфных дифференциальных форм степени p на X с логарифмическими особенностями вдоль D. Эти формы замкнуты, откуда получаем гомоморфизм

$$c_p\colon \Omega^p(X \log D) \to H^p(X, \mathbb{C}),$$

который биективен при $p = 1$ и инъективен при $p = 2$. Внешнее произведение форм определяет линейное отображение δ_2 из $\wedge^2\Omega^1(X \log D)$ в $\Omega^2(X \log D)$; отождествив сопряженное к $\Omega^1(X \log D)$ пространство с $H_1 = H_1(X, \mathbb{C})$, получаем, что сопряженное к δ_2 отображение переводит $\Omega^2(X \log D)^*$ в $\wedge^2 H_1$; обозначим его образ через R_2. Рассмотрим свободную алгебру Ли $\mathscr{L}(H_1)$, построенную по векторному пространству H_1; она естественно градуирована подпространствами $\mathscr{L}_p(H_1)$; имеем

$$\mathscr{L}_0(H_1) = 0, \quad \mathscr{L}_1(H_1) = H_1, \quad \mathscr{L}_2(H_1) = \wedge^2 H_1.$$

Теперь $\mathfrak{g}_s$ *отождествляется с фактором* $\mathscr{L}(H_1)$ *по идеалу, порожденному* $R_2 + \mathscr{L}_{s+1}(H_1)$.

Так как H_1 и $\Omega^1(X \log D)$ двойственны, в $\Omega^1(X \log D) \otimes H_1$ имеется каноническая дифференциальная форма. Ее можно интерпретировать как голоморфную дифференциальную форму с коэффициентами в алгебре Ли $\mathfrak{g}_s$, причем $\mathfrak{g}_s$ вложена в ассоциативную алгебру $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$. Тогда ω_s удовлетворяет условию интегрируемости $d\omega_s + \omega_s \wedge \omega_s = 0$ благодаря определению R_2. Теперь можно начать привычную игру:

a) *рассмотреть универсальную накрывающую* X *многообразия* X *относительно* a;

b) *если* γ — *путь в* X *с началом* a *и концом* b, *вычислить параллельный перенос с помощью ряда* $U_s(\gamma) = \sum_{n\geqslant 0} \int_\gamma \omega_s \ldots \omega_s$;

c) *условие интегрируемости* $d\omega_s + \omega_s \wedge \omega_s = 0$ *гарантирует, что* $U_s(\gamma)$ *зависит лишь от соответствующей точки из* $\tilde{X}$, *откуда получаем голоморфное отображение* U_s *из* $\tilde{X}$ *в* $\mathbb{C}\pi/J^{s+1}$;

d) *отображение* U_s *принимает значения в* $G_s(\mathbb{C})$ *и определяет (переходам к факторам) голоморфное отображение* u_s *из* X *в его многообразие Альбанезе* $\mathrm{Alb}_s(X) = G_s(\mathbb{Z})\, G_s(\mathbb{C})$.

По поводу конструкции в общем случае, когда $\Omega^1(\bar{X})$ — не нуль, отошлем к работе Хейна и Цукера [F5].

4.9. Предоставляем читателю изучить в качестве иллюстрации случай $\bar{X} = P^1(\mathbb{C})$ и восстановить в этом частном случае конструкции разд. 1.8.

Коно подробно изучил случай, когда X есть дополнение к конечному семейству гиперплоскостей в $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$. Предположим, в частности, что X — множество векторов в $\mathbb{C}^d$ с попарно несовпадающими координатами; по определению, $\pi_1(X)$ — это группа кос. Изучение линейных представлений, связанных с монодромией на X, позволяет восстановить и обобщить некоторые результаты Джонса (см. [G4], [G5] и [G6]). За неимением места оставляем читателя на милость его любопытства...

КОММЕНТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

A. Работы общего характера

1. Birman J. Braids, links and mapping class groups, Ann. Math. Studies 82, Princeton University Press, Princeton, 1974.

2. Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, chap. 2—3. Hermann. Paris, 1972. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М., Мир: 1974.]
3. Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, chap. 4—6. Masson. Paris, 1981. [Имеется перевод первого издания: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — [М., Мир: 1972.]
4. Cattani E. et al. (éditeurs). Hodge theory, Proc. Conf. Sant. Cugat, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, Vol. 1246, 1987.
5. Griffiths P. A., Morgan J. W. Rational homotopy theory and differential forms, Birkhäuter, Boston, 1981.
6. Lappo-Danilevsky J. A. Théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, Chelsea, New York, 1953.
7. Magnus W., Karass A., Solitar D. Combinatorial group theory, Dover, New York, 1976.

B. Доклады на семинарах Бурбаки на смежные темы

1. Brieskorn E. Sur les groupes de tresses, Sém. Bourbaki no. 401, 1971—1972. [Имеется перевод: Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду). — Математика, 1973, т. 17, вып. 5, с. 3—56.]
2. Cartier P. Arrangements d'hyperplans; un chapitre de géométrie combinatoire, No. 561, 1980/1.
3. Cartier P. Décomposition de polyèdres, le point sur le 3-e problème de Hilbert, No. 646, 1984/5. [Имеется перевод в настоящем сборнике.]
4. Connes A. Index des sous-facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds (d'après Vaughan Jones), No. 647, 1984/5. [Имеется перевод в настоящем сборнике.]
5. Verdier J.-L. Groupes quantiques (d'après Drinfel'd), No. 685, 1986/7.

C. Итерированные интегралы

1. Chen K. T. Iterated integrals of differential forms and loop space homology, Ann. Math., 97 (1973), 217—246.
2. Chen K. T. Iterated path integrals, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 831—879.
3. Паршин А. Н. Об одном обобщении якобиевого многообразия. — Изв. АН СССР, сер. матем. 1966, т. 30, вып. 1, с. 175—182.
4. Ree R. Lie elements and an algebra associated with shuffles., Ann. Math., 68 (1958), 210—220.

D. Рациональные гомотопии и их приложения

1. Deligne P., Griffiths P., Morgan J., Sullivan D. Real homotopy theory of Kähler manifolds, Invent. Math., 29 (1975), 245—274.
2. Morgan J. The algebraic topology on smooth algebraic varieties, Publ. Math. IHES. Vol. 48 (1978), 157—204.
3. Quillen D. Rational homotopy theory, Ann. Math., 90 (1969), 205—295.
4. Sullivan D. Infinitesimal computations in topology, Publ. Math. IHES, Vol. 47 (1977), 269—331.

E. Теория Ходжа (классические статьи)

1. Deligne P. Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, Vol. 163, 1970.
2. Deligne P. Théorie de Hodge I: Congrès Int. Math. Nice 1970, Vol. 1, p. 425—430; II: Publ. Math. IHES, Vol. 40 (1971), 5—58. [Имеется перевод: Делинь П. Теория Ходжа II. — Математика, 1973, т. 17, вып. 5, с. 3—56.]; III: Publ. Math. IHES, Vol. 44 (1974), 5—77.
3. Deligne P. Théorème de Letschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. Publ. Math. IHES, Vol. 35 (1968), p. 107—126.

4. Grothendieck A. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. IHES, Vol. 29 (1966), p. 351—359.
5. Griffiths P., Schmidt W. Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results. Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Bombay Colloquium 1973). Oxford Univ. Press. 1975.

F. Теория Ходжа (недавние результаты)

1. Beilinson A. A. Notes on absolute Hodge cohomology, Contemporary Maths, vol. 55, p. 35—68, Amer. Math. Soc., 1986.
2. Hain R. The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties I, II, À paraître.
3. Hain R. The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group, Algebraic geometry, Bowdoin College 1985; À paraître dans Proc. Symp. Pure Math.
4. Hain R. On a generalization of Hilbert's 21st problem., Ann. Scient. E. N. S., 19 (1986), 1. 609—627.
5. Hain R., Zucker S. Unipotent variations of mixed Hodge structure, Invent. Math., 88 (1987), p. 83—124.
См. также статьи Хейна, Цукера и Наварро—Азнара в [A4].

G. Монодромия, системы гиперплоскостей, группы кос

1. Aomoto K. Fonctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotents, J. Fac. Sci. Tokyo, 25 (1978). 149—156.
2. Falk M., Randell R. The lower central series of a fiber-type arrangement, Invent. Math., 82 (1985), 77—88.
3. Jones V. Index of subfactors, Invent. Math., 72 (1983), 1—25.
4. Kohno T. Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures, Invent. Math., 82 (1985), 57—75.
5. Kohno T. Poincaré series of the Malcev completion of generalized pure braid groups, À paraître.
6. Kohno T. On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces. Nagoya Math. J., 92 (1983), 21—37.
7. Kohno T. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations, Annales Inst. Fourier, Colloque en l'honneur de J.-L. Koszul. 1987. V. 37, № 4, 139—140.
8. Kohno T., Oda T. The lower central series of the pure braid group of an algebraic curve, À paraître.

H. Увертюры

1. Dupont J.-L. On polylogarithms, Aarhus, Prépublication. 1987.
2. Ihara Y. Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. Math., 123 (1986), 43—106.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Beilinson A., MacPherson R., Schechtman V. Notes on motivic cohomology. Duke Math. J., v. 54, No 2, (1987), 679—710.
2*. Zagier D. The Remarkable Dilogarithm, Bonn, 1987. Preprint. 1—15.
3*. Deligne P. Le Groupe Fondamental de la Droite Projective Moius Trois Points, Preprint, 1988. 1—219.
4*. Бейлинсон А. А., Варченко А. Н., Гончаров А. Б., Шехтман В. В. Проективная геометрия и K-теория. — Алгебра и анализ, 1990, т. 2.

НЕРАВЕНСТВА МОРСА (по Виттену)

Ги Аньар [1])

0.1. Этот доклад должен рассматриваться как *введение* в предложенные Виттеном в его недавних статьях [22] и [23] методы. Мы иллюстрируем эти новые идеи на простом, но поучительном примере: дадим (следуя [22]) аналитическое по своей природе доказательство классических неравенств Морса для вещественнозначной функции с невырожденными критическими точками на гладком компактном многообразии. Читатель может убедиться сам в естественности и элегантности применяемого метода. Он заслуживает внимания еще и потому, что возможны многочисленные иные его применения (и обобщения), которые мы обсудим коротко в § 5.

0.2. В § 1 мы напомним, что такое неравенства Морса, в § 2 обсудим метод Виттена, собственно же доказательству посвящен § 4. В § 3 мы опишем причины, побудившие Виттена к уточнению неравенств Морса путем введения геометрической модели для целочисленных когомологий гладкого компактного многообразия M. Эта модель строится по римановой структуре и морсовской функции на M. В § 5, кроме нескольких других применений метода Виттена, мы еще и очень кратко покажем, как (в настоящий момент гипотетическое) обобщение на случай бесконечномерных многообразий приводит к решению некоторых задач о нарушенной симметрии в суперсимметричных моделях квантовой теории поля; к тому же именно эти задачи были главной мотивировкой Виттена в работе [22].

0.3. Считаю своим долгом выразить благодарность М. Верню за изложение [9], [10] и [18], а также Л. Буте де Монвелю, Т. Фэку, Ж. Ломону, И. Сьёстранду и в особенности А. Конну за беседы по теме этого доклада.

1. НЕРАВЕНСТВА МОРСА

1.1. Пусть M есть C^∞-дифференцируемое связное компактное многообразие, n — его размерность, а h: $M \to \mathbb{R}$ — функция класса C^∞ на нем. Критическая точка функции h — это точка из M, в которой обращается в 0 дифференциал dh этой функции. В критической точке p можно определить гессиан Hh_p функции h — симметрическую билинейную форму на касательном к M в точке h пространстве $T_p(M)$; в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки p в M матрица Hh_p в базисе пространства $T_p(M)$, образованном $\frac{\partial}{\partial x_i}$, — это $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p)$. Говорят, что критическая точка p функции h *невырожденна*, если Hh_p — обратимая билинейная форма на $T_p(M)$; *индексом* критической точки p называется индекс формы Hh_p, обозначаемый $\lambda(p)$. Напомним знаменитую лемму Морса [20, с. 6].

[1]) Henniart Guy. Les inégalités de Morse. — Séminaire Bourbaki, 36e année, 1983/84, n° 617, Astérisque 121—122, 1985, p. 43—61.

Лемма 1.1. *Пусть p — невырожденная критическая точка функции h; положим $\lambda = \lambda(p)$. Тогда в некоторой окрестности U точки p существует такая локальная система координат $x_1, \ldots, x_n$, что $x_i(p) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$, причем на U выполнено неравенство $h = h(p) - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2$.*

В частности, ясно, что невырожденная критическая точка изолирована. Будем говорить, что h — *функция Морса* на M, если все ее критические точки невырожденны. В этом случае множество C критических точек конечно. Известно, что для любого целого $k \geqslant 0$ множество функций Морса на M плотно в пространстве $\mathcal{F}$ функций класса C^∞ из M в $\mathbb{R}$, рассматриваемых с C^k-топологией [20, с. 37].

1.2. Начиная с этого места, предположим, что h — *функция Морса* на M. Зафиксируем поле K. Обозначим через m_i при целом i число критических точек функции h с индексом i, а через b_i обозначим i-е число Бетти многообразия M относительно K, т. е. $b_i = \dim_K H_i(M, K)$, где $H_i(M, K)$ есть i-я группа сингулярных гомологий для M с коэффициентами в K. Неравенства Морса можно выразить так:

$$m_0 \geqslant b_0,$$
$$m_0 - m_1 \leqslant b_0 - b_1,$$
$$m_0 - m_1 + m_2 \geqslant b_0 - b_1 + b_2,$$
$$\cdots$$
$$m_0 - m_1 + \ldots + (-1)^n m_n = b_0 - b_1 + \ldots + (-1)^n b_n.$$

Последняя строчка выражает эйлерову характеристику M через числа Морса m_i. Положив

$$P(t) = \sum_{i \geqslant 0} b_i t^i, \text{ а } M(t) = \sum_{i \geqslant 0} m_i t^i,$$

перепишем эти неравенства как условия существования такого полинома Q с целыми положительными коэффициентами, что

$$M(t) - P(t) = (1+t)\,Q(t).$$

1.3. Эти неравенства дают много информации о гомологиях многообразия M. В частности, имеется следующий критерий:

Морсовский принцип лакун: предположим, что $m_i m_{i+1} = 0$ для любого целого i. Тогда $Q(t) = 0$, а $M(t) = P(t)$ независимо от поля K. В частности, группа $H_i(M, \mathbb{Z})$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль ранга m_i.

Красивое применение этого принципа — вычисление в [12] гомологий $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Выберем вещественные числа $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Рассмотрим функцию $f(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i |z_i|^2$ на сфере $S = \left\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1\right\}$. Эта функция спускается на фактор $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ пространства S — получается функция Морса h с критическими точками только четного индекса. Фактически точка $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ с единицей на i-м месте — это единственная критическая точка индекса $2i$. Поэтому $b_i = 0$ при нечетном i и $b_i = 1$ при четном i, $i \leqslant 2n$.

1.4. Еще один способ сформулировать неравенства Морса — это сказать, что существует комплекс $E^\bullet$ векторных пространств над K

$$0 \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^n \to 0$$

с $\dim_K E^k = m_k$, $\dim H^k(E^\bullet) = b_k$. Доказательство Виттена дает (в случае $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}^K$) такой комплекс, сконструированный по h и комплексу дифференциальных форм на M. Поэтому фактически речь идет о комплексе, «вычисляющем» не сингулярные гомологии, а когомологии де Рама. Причина интереса к этому методу заключается в том, что, по контрасту с классическими методами доказательства, он имеет аналитическую, а не топологическую или геометрическую ([20], [12], [13]) природу. В частности, его можно применить в случаях, когда старые методы не срабатывают (ср. § 5). Итак, рассмотрим функцию Морса h на M и обозначим через $b_i = \dim H^i_{DR}(M)$ размерность i-го пространства когомологий комплекса де Рама многообразия M (*комплекснозначных* дифференциальных форм)

$$0 \to \mathscr{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1(M) \to \ldots \xrightarrow{d} \mathscr{A}^n(M) \to 0.$$

1.5. Если M снабжено римановой структурой (а это можно предполагать всегда), то теория Ходжа позволяет вычислить b_i. Известно, что если ввести сопряженный к d оператор d^* и лапласиан $\Delta = dd^* + d^*d$, то подкомплекс гармонических форм $\operatorname{Ker}\Delta$ (на котором дифференциал d оказывается нулевым) имеет в степени i размерность b_i. В действительности лапласиан Δ — это эллиптический оператор на $\mathscr{A}(M)$, и если рассмотреть его как (неограниченный) самосопряженный оператор на пространстве $\mathscr{A}_{L_2}(M)$ сечений расслоения дифференциальных форм с интегрируемым квадратом (относительно римановой метрики на M), то это будет положительный оператор с дискретным спектром; его собственные значения $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$ стремятся к бесконечности. Значит, если фиксировать вещественное число A, то подкомплекс $\mathscr{A}(M)$, порожденный собственными векторами, отвечающими собственным значениям $\leqslant A$ (известно, что эти векторы принадлежат $\mathscr{A}(M)$), будет комплексом конечномерных векторных пространств с когомологиями, изоморфными $\operatorname{Ker}\Delta$.

1.6. Основная идея Виттена — использовать h для возмущения дифференциала d комплекса $\mathscr{A}(M)$ — а значит, и лапласиана Δ — для получения оператора со спектром простой структуры, однако позволяющего вычислить $H_{DR}(M)$.

Замечание. Эта идея — обычная для математической физики — появилась также у некоторых математиков ([28], [29]).

Пусть t — вещественный параметр. Положим теперь

$$d_t = e^{-ht}\, de^{ht};$$

обозначим через d_t^* сопряженный к d_t оператор $d_t^* = e^{ht} d^* e^{-ht}$; пусть

$$\Delta_t = (d_t + d_t^*)^2 = d_t d_t^* + d_t^* d_t'.$$

Так же как и Δ, оператор Δ_t — эллиптический оператор; если рассматривать его как (неограниченный) самосопряженный оператор в $\mathscr{A}_{L_2}(M)$, то он будет положительным оператором с дискретным спектром. Так как d_t получается из d сопряжением с помощью функции e^{ht}, то когомологии комплекса $\mathscr{A}(M)$ с дифференциалом d — те же, что и с дифференциалом d_t; поэтому $\operatorname{Ker}\Delta$ и $\operatorname{Ker}\Delta_t$ изоморфны. Значит, неравенства Морса вытекают из следующего результата:

Теорема 1.6 (Виттен). *Пусть A — достаточно большое вещественное число. Тогда для достаточно больших t оператор Δ_t имеет при любом i ровно m_i независимых собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\leqslant A$.*

2. ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ МЕТОДА

2.1. В этом разделе мы хотим изложить последовательность рассуждений, которые привели Виттена к этой теореме. Пусть $\omega \in \mathscr{A}(M)$. Имеем

$$d_t\omega = d\omega + t\,dh \wedge \omega,$$

откуда

$$\Delta_t\omega = \Delta\omega + t^2|dh|^2\omega + tG\omega,$$

где G есть $\mathscr{A}^0(M)$-линейный оператор, заданный эндоморфизмом векторного расслоения $\Lambda(M)$, который мы опишем в разд. 4.1. Таким образом мы получили «суперпозицию» лапласиана на M с «потенциалом», главная часть которого — это $t^2|dh|^2$. При t, стремящемся к бесконечности, этот потенциал велик всюду, кроме критических точек h. Поэтому собственные векторы оператора Δ_t имеют тенденцию концентрироваться в окрестности этих критических точек. Фактически справедлива следующая лемма, доказанная в разд. 4.2.

Лемма 2.1. *Пусть K — замкнутое подмножество в M, не содержащее критических точек. Тогда существует такая постоянная c, зависящая от M, K, h и A, что при $t \geqslant 1$ и $\Phi \in \mathscr{A}(M)$ с условием $\Delta_t\Phi = \lambda\Phi$, $\lambda \leqslant A$, выполнено неравенство*

$$\int_K \langle\Phi, \Phi\rangle \leqslant \frac{c}{t}\int_M \langle\Phi, \Phi\rangle$$

(скалярное произведение индуцировано римановой структурой на M, интегрирование ведется по римановой мере).

2.2. Мы приходим к изучению Δ_t в окрестности критических точек, точнее, к изучению собственных векторов, сконцентрированных около этих точек. Пусть p — критическая точка, l — ее индекс. Выберем в $T_p(M)$ ортогональный относительно римановой метрики базис, в котором Hh_p диагонализуется с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, первые l из которых отрицательны. Рассмотрим в окрестности p нормальную систему координат $(x_1, \ldots, x_n)$, ассоциированную с этим базисом. Теперь можно h представить в виде

$$h = h(p) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2/2 + \eta,$$

где η имеет нуль третьего порядка в p; значит, оператор Δ_t мало отличается от

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + t^2\lambda_i^2 x_i^2 - t\lambda_i K_i\right) = \sum_{i}^{n}(H_i - t\lambda_i K_i),$$

где оператор K_i коммутирует с умножением
водит dx_i в $-dx_i$ и оставляет инвариантны
Обозначим этот оператор через Δ_t'; рассмотр
тор в $\mathscr{A}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$. Если рассуждать эвристичес
значения Δ_t и Δ_t' должны иметь одно и то
лении на t. На самом деле теория возмущени
[27]) выразить собственные значения Δ_t
от t; эти собственные значения обладают аси
ложением вида $t\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{t} + \frac{\alpha_2}{t^2} + \ldots\right)$. П
разложения (т. е. коэффициент α_0) для n-го с
ния Δ_t совпадает с соответствующим коэфф
собственного значения прямой суммы Δ_t' по ра
точкам [25]. В § 4 мы обоснуем эту локализа
точках (переход от Δ_t к Δ_t') так называемым
ки» и сравним собственные значения, доказа
перь же продолжим эвристическое объяснен

2.3. Спектр Δ_t' сосчитать легко, так как э
сумма операторов, действующих только по
Операторы H_i и K_i коммутируют, и оператор
к оператору $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$ в $L^2(\mathbb{R})$, который хо
гамильтониан гармонического осциллятора; ег
чения — нечетные положительные числа и о
ние 1 отвечает функции $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Поэтому соб
Δ_t' имеют вид

$$t\left[\sum_{i=1}^{n}(1 + 2N_i)|\lambda_i| - \lambda_i\varepsilon_i\right],$$

где $N_i \in \mathbb{N}$, а $\varepsilon_i = \pm 1$. Коэффициент при t
в 0 лишь при $N_i = 0$, $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}\lambda_i$, где $i = 1,$ ..
видеть, что соответствующий собственный
нален

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-|\lambda_i|x_i^2/2}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l.$$

В частности, это l-форма. Перенося этот ре
получаем, что в формах степени l оператор Δ_t
m_l независимых собственных векторов, отве
ным значениям, не стремящимся к бесконеч

Согласно асимптотическим разложениям, эти собственные значения ограничены, что и приводит к теореме.

Замечание 1. В случае когда в окрестностях критических точек функция h квадратична, а метрика евклидова, можно (см. разд. 4.5) доказать экспоненциальное убывание этих собственных значений, в частности их асимптотическое разложение есть 0 во всех порядках. По-видимому, то же самое выполнено и в общем случае (что влечет за собой применимость теоремы 1.6 для произвольного $A > 0$): асимптотическое разложение вычисляется на самом деле по локальным данным в окрестности критической точки; если бы оно не обращалось в 0, то это означало бы, что по локальным данным можно определить, вносит ли критическая точка вклад в когомологии M, или нет.

Замечание 2. Обозначим через $T_p^-(M)$ подпространство в $T_p(M)$ размерности l, порожденное касательными векторами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_l}$; на этом подпространстве ассоциированная с Hh_p квадратичная форма отрицательно определена; тогда рассмотренная нами выше собственная для Δ_t' l-форма принимает ненулевое значение на $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_l}$; это задает ориентацию $T_p^-(M)$.

3. ВОЗВРАЩЕНИЕ К ГЕОМЕТРИИ

3.1. Прежде чем мы в § 4 придадим строгость рассуждениям из § 2, попробуем продолжить их (вместе с Виттеном) еще дальше, точнее, вычислить действие d_t на построенном нами комплексе. Асимптотическое разложение, как мы уже видели, нам здесь не сможет ничем помочь. Виттен в этом месте использует более точный подход. Определяя Δ_t, мы наложили на Δ потенциал, который велик всюду, кроме критических точек h. Собственные векторы (т. е. «состояния») с наименьшими собственными значениями в некотором смысле находятся в ямах потенциала, как в ловушках. Поэтому можно спросить, может ли такой собственный вектор пройти «под барьером» с помощью туннельного эффекта из одной ямы потенциала в другую. Говоря точно, это сводится к определению интеграла $I = \int \langle \omega, d_t\eta \rangle$ при $t \to \infty$, где ω — собственный вектор [1]), сосредоточенный около критической точки p индекса $l+1$, а η — около точки q индекса l [1]). В работе [22] Виттен наметил два метода изучения этого туннельного эффекта, один — квазиклассический (метод аппроксимации ВКБ), другой — более современный (метод инстантонов). Это дает два способа вычисления упомянутого интеграла; ниже мы их кратко обрисуем.

[1]) Точнее, линейная комбинация собственных векторов с малыми собственными значениями. — *Прим. перев.*

3.2. В методе инстантонов порожденная d_t, d_t^* и Δ_t система рассматривается как квантование лагранжевой механической системы на M; риманова метрика входит в выражение для кинетической энергии, а функция h — в выражение для потенциальной. Если принебречь в лагранжиане системы всеми членами, кроме главных, при $t \to \infty$, то получается другой лагранжиан, который в $(m, v) \in T(M)$ равен $\mathscr{L}(w, v) = \frac{1}{2}(|v|^2 + t^2|dh_m|^2)$. Траектории туннелирования минимизируют действие, ассоциированное с лагранжианом, так что легко видеть, что они совпадают с интегральными траекториями векторного поля $-\operatorname{grad} h$, соединяющими p с q. Вклад в интеграл I вдоль такой траектории можно оценить как $e^{-t(h(p)-h(q))}$ (детали см. [22, р. 19]).

3.3. В методе аппроксимации ВКБ [7] устанавливается, что при убывании ω и η как e^{-t} около соответствующих критических точек вклад в $\langle \omega, d_t\eta \rangle$ максимален вдоль траекторий векторного поля $\xi = -\operatorname{grad}(h)$, а в противном случае пренебрежим. Таким образом, задача сводится к случаю размерности 1, откуда получается то же выражение для I. Если траектория, соединяющая p с q, единственна, то, в частности, получается, что $d_t h$ отлично от нуля. Ясно, что эти рассуждения трудно сделать строгими; несмотря на это, можно ожидать, что разработанные при изучении потенциалов с несколькими ямами методы окажутся полезными в этом случае ([26] и особенно [27]). Более серьезная трудность — то, что вклады различных траекторий могут различаться по знаку, так что их сумма будет пренебрежима по сравнению с [2]) e^{-t}, однако будет отлична от нуля. Как бы то ни было, метод ВКБ позволяет следить за этими знаками; это привело Виттена к модели когомологий многообразия M, которую мы и опишем.

3.4. Ограничимся ситуацией общего положения, в которой для любой критической точки p индекса $l+1$ и q индекса l отталкивающее многообразие $W_u(p)$ (т. е. объединение траекторий ξ,

[1]) Рассмотрение туннельных переходов между точками с несоседними индексами не нужно, так как должно быть выполнено $\deg \omega = \deg \eta + 1$. — *Прим. перев.*

[2]) Точнее, с $e^{-(h(p)-h(q))}$. — *Прим. перев.*

исходящих из p; это погруженное в M пространство $\mathbb{R}^{i+1}$; его касательное пространство в p — это $T_p^-(M)$) и притягивающее многообразие $W_s(q)$ (объединение траекторий, оканчивающихся в q) пересекаются трансверсально. Тогда множество Φ траекторий ξ в $W_u(p)\cap W_s(q)$ конечно. Выберем для каждой критической точки r ориентацию $W_u(r)$ (согласно замечанию 2 из разд. 2.3, для этого можно выбрать вещественный собственный вектор[1]) оператора Δ_t' с малым собственным значением, отвечающий r). Пусть $\varphi\in\Phi$, а v касается φ в точке p. Ориентация $W_u(p)$ дает ориентацию ортогонального дополнения к v в $T_p^-(M)$; сдвинем ее вдоль φ — получим ориентацию дополнения к $T_q^+(M)$ в q, которую можно сравнить с ориентацией $W_u(q)$. Положим $n(\varphi)=+1$ или -1 в зависимости от того, совпадают эти две ориентации или нет. Обозначим сумму $\sum\limits_{\varphi\in\Phi} n(\varphi)$ через $n(p, q)$.

Замечание. Число $n(p, q)$ можно интерпретировать также как индекс пересечения «поднимающейся сферы» со «спускающейся сферой» функции h [19, с. 34].

3.5. Теперь введем комплекс свободных $\mathbb{Z}$-модулей

$$0\to E^0\xrightarrow{\partial}E^1\xrightarrow{\partial}\dots\xrightarrow{\partial}E^n\to 0,$$

где E^i снабжено базисом e_q, индексированным множеством критических точек q индекса i, причем при индексе точки q, равном i,

$$\partial(e_q)=\sum_{\substack{p\text{ — критическая точка}\\ \lambda(p)=i+1}} n(p, q)\,e_p.$$

Можно представлять себе (по крайней мере при ориентируемом M), что когомологии этого комплекса изоморфны сингулярным когомологиям многообразия M, или, иначе говоря, что при ориентируемом M $H^i(E^\bullet)$ и $H^i(M, \mathbb{Z})$ — изоморфные $\mathbb{Z}$-модули при $i=0, \dots, n$.

Замечание 1. Эта гипотеза верна во всех простых примерах.

Замечание 2. «Двойственный» комплекс

$$0\to E^n\xrightarrow{\partial'}E^{n-1}\xrightarrow{\partial'}\dots\longrightarrow E^0\to 0,$$

где

$$\partial'(e_p)=\sum_{\substack{q\text{ — критическая точка}\\ \lambda(q)=i-1}} n(p, q)\,e_q$$

[1]) См. прим. перев. на стр. 86. — *Прим. перев.*

при индексе p, равном i, введен в [16]; там, как это и должно быть, он связывается с сингулярными гомологиями M.

Замечание 3. Если M не ориентировано, то предыдущая модель должна давать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6

4.1. Вид Δ_t. Обозначим через ∇h градиент h, а через $c(\xi)$ операцию внутреннего умножения на векторное поле ξ. Имеем

$$d_t=d+t\,dh\wedge,$$

откуда

$$d_t^*=d^*+tc(\nabla h),$$

$$\Delta_t=\Delta+t^2|dh|^2+tG,$$

где G $\mathscr{A}^0(M)$-линейно, задается эндоморфизмом расслоения дифференциальных форм на M и допускает следующее описание:

$$G=\Delta h+2S,$$

где S — дифференцирование $\mathscr{A}^0(M)$-алгебры $\mathscr{A}(M)$, совпадающее в степени 1 с эндоморфизмом касательного расслоения к M, полученным при отождествлении в каждой точке $x\in M$ второй ковариантной производной h с эндоморфизмом $T_x^*(M)$. В частности, ясно, что S и G — ограниченные операторы в $\mathscr{A}_{L^2}(M)$.

4.2. Доказательство леммы 2.1. Пусть g — собственный вектор для Δ_t с собственным значением λ, где $\lambda\leqslant A$. Тогда

$$\Delta g+t^2|dh|^2 g=-tGg+\lambda g,$$

откуда интегрированием по M получаем

$$\int(\langle\Delta g, g\rangle+t^2|dh|^2|g|^2)\leqslant(t\|G\|+A)\int|g|^2.$$

Так как $|dh|$ ограничено снизу на K положительным числом ε, получаем

$$\int_K|g|^2\leqslant\varepsilon^{-1}\left(\frac{\|G\|}{t}+\frac{A}{t^2}\right)\int_M|g|^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Замечание. Получается также существование такой постоянной $c>0$, что $\int\limits_M\langle\Delta g, g\rangle\leqslant c\cdot t\int|g|^2$ при $t\geqslant 1$.

4.3. Приступим теперь к доказательству теоремы. Оно естественным образом разбивается на два шага. На первом шаге показывается, что в каждой степени l при больших t существует по меньшей мере m_l независимых собственных векторов Δ_t с собственными значениями $\leqslant A$. На втором доказывается, что остальные собственные значения стремятся к бесконечности вместе с t. Изложение каждого из этих шагов сильно проясняется при предположении, что в каждой критической точке p можно выбрать локальные координаты, в которых функция h записывается в виде $h(p)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2/2$ (как в разд. 2.2), а метрика становится евклидовой. Мы будем называть такой случай евклидовым и разберем детально именно его. В этом случае мы фактически докажем теорему 1.6 с произвольным $A>0$. Понятно, что при заданном R можно найти риманову метрику и координаты около критических точек, удовлетворяющие этому условию.

4.4. Первый шаг основан на принципе минимакса [21, т. 4, с. 76 и 78]. Напомним этот принцип. В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ рассматривается (неограниченный) самосопряженный оператор T, удовлетворяющий условию $\langle T\psi,\psi\rangle\geqslant -M\|\psi\|^2$ при некоторой постоянной M. Свяжем с ним замкнутую эрмитову форму Q_T, отображающую ψ в $\langle T\psi,\psi\rangle$ (ее область определения $\operatorname{Dom}(Q_T)$ содержит область определения T, но может быть и больше). Предположим, что T имеет дискретный спектр; занумеруем собственные значения в возрастающем порядке[1])

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\lambda_n\leqslant\ldots .$$

При этих предположениях

$$\lambda_n=\sup_{F}\ \inf_{\substack{\psi\in F^{\perp}\cap\operatorname{Dom}(Q_T)\\ \|\psi\|=1}} Q_T(\psi),$$

где верхняя грань берется по подпространствам F пространства $\mathscr{H}$ размерности не больше $n-1$.

Замечание 1. Можно заменить $\operatorname{Dom}(Q_T)$ на $\operatorname{Dom}(T)$.

Замечание 2. Выражение в правой части предыдущего неравенства называется n-м характеристическим значением формы Q_T.

4.5. Зафиксируем четную положительную C^∞-функцию φ, которая равна нулю вне $[-2,+2]$ и единице в $[-1,1]$. Положим

[1]) С учетом кратности. — *Прим. перев.*

$\varphi_B(x)=\varphi(Bx)$, $B>0$. Вернемся к обозначениям разд. 2.2 вблизи критической точки p индекса l, выберем достаточно большое B и рассмотрим l-форму $\omega_{t,p}$ с носителем около p:

$$\omega_{t,p}=\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-t|\lambda_i|x_i^2/2}\varphi_B(x_i)\right)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_l.$$

В евклидовом случае Δ_t действует на ω_{tp} в точности как Δ_t', так что сосчитать $\int\langle\Delta_t\omega_{t,p},\omega_{t,p}\rangle$ совсем просто — это произведение интегралов по x_i. Типичный интеграл — это

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-tx^2}\left[-\varphi_B\varphi_B''+2tx\varphi_B\varphi_B'+(t^2x^2-t)(1-\varphi_B^2)\right]dx;$$

так как φ_B'', φ_B' и $1-\varphi_B^2$ обращаются в нуль в окрестности нуля, тривиальная оценка дает существование такого $\beta>0$, что

$$\int\langle\Delta_t\omega_{t,p},\omega_{t,p}\rangle\leqslant e^{-\beta t}\int\langle\omega_{t,p},\omega_{t,p}\rangle.$$

При соответствующем выборе B носители форм $\omega_{t,p}$ для различных критических точек индекса l не пересекаются; обозначим F_l подпространство в $\mathscr{A}^l_{L^2}(M)$, порожденное $\omega_{t,p}$. По принципу минимакса первые m_l собственных значений Δ_t в $\mathscr{A}^l_{L^2}(M)$ экспоненциально убывают по t: действительно, для любого подпространства F пространства $\mathscr{A}^l_{L^2}(M)$ размерности $\leqslant m_l-1$ пространство $F^{\perp}\cap\operatorname{Dom}(Q_T)\cap F_l$ не равно нулю, поэтому $\lambda_{m_l}(t)\leqslant\leqslant e^{-\beta t}$, если через $\lambda_{m_l}(t)$ обозначить m-е собственное значение Δ_t в $\mathscr{A}^l_{L^2}(M)$. В неевклидовом случае Δ_t выражается как сумма Δ_t' с дополнительными членами вида

$$q(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j},\quad b(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad t^2|\lambda_i|^2c(x),\quad t|\lambda_i|d(x),$$

где $a(x)$, $d(x)$ обращаются в 0 в p, а $c(x)$ имеет нуль по меньшей мере 3-го порядка в p. Используя замену переменных $X=x\sqrt{t}$ и четность φ, находим, что

$$\int\langle\Delta_t\omega_{t,p},\omega_{t,p}\rangle\leqslant A'\int\langle\omega_{t,p},\omega_{t,p}\rangle$$

при некоторой постоянной $A'>0$. Применяя, как ранее, принцип минимакса, выводим неравенство $\lambda_{m_l}(t)\leqslant A'$, что завершает первый шаг.

Замечание. Лучший выбор $\omega_{t,p}$ позволяет заменить A' на $A'/\sqrt{t}$, что доказывает теорему 1.3 при произвольном $A > 0$.

4.6. Второй этап требует большей осторожности: нужно доказать (с использованием принципа минимакса), что при целом $r \geqslant 0$ характеристическое значение формы Q_t на $\mathscr{A}^r_{L^2}(M)$ с номером m_{r+1} превосходит γt при некотором выборе постоянной $\gamma > 0$. Поэтому нужно свести вычисление Q_t к вычислению в окрестностях критических точек. Здесь используется подход, сообщенный мне Конном. Область определения Q_t — пространство $H^1(\wedge M)$ таких форм $\psi \in \mathscr{A}_{L^2}(M)$, что потоки $d\psi$ и $d^*\psi$ также принадлежат $\mathscr{A}_{L^2}(M)$. На этом множестве

$$(*)\qquad Q_t(\psi) = \int_M (|d\psi|^2 + |d^*\psi|^2 + t^2|dh|^2|\psi|^2 + t\langle G\psi, \psi\rangle).$$

Для каждой критической точки p выберем окрестность V_p, определенную в обозначениях разд. 2.2 условием $|x_i| < \alpha$, где константу $\alpha > 0$ мы можем выбрать сколь угодно малой; предположим, в частности, что V_p не пересекаются. Положим

$$V_0 = M \setminus \overline{\bigcup_{p \in C} V_p}.$$

План действий заключается в разбиении интеграла $(*)$ по M в сумму интегралов по V_0 и V_p и в вычислении этих интегралов.

Точнее, с этого момента мы зафиксируем целое $r \geqslant 0$ и ограничимся изучением Q_t на $\mathscr{A}^r_{L^2}(M)$. Соответствующий интеграл по $V = V_0$ или $V = V_p$ определяет квадратичную форму $Q_{t,V}$ на $\mathscr{A}^r_{L^2}(V)$ с областью определения $H^1(\wedge^r V)$. Мы докажем, что если $V = V_0$ или $V = V_p$, причем индекс p не равен r, то первое характеристическое значение $Q_{t,V}$ при больших t превосходит γt при некотором $\gamma > 0$, а при $V = V_p$, где индекс p есть r, таким свойством обладает второе характеристическое значение. Отсюда выводится, что $(m_r + 1)$-е характеристическое значение Q на $\mathscr{A}^r_{L^2}(M)$ удовлетворяет тому же условию, что завершит второй шаг.

4.7. Рассуждения из разд. 4.2 доказывают требуемый результат для Q_{t,V_0}. Пусть p — критическая точка индекса l. Для изучения Q_{t,V_p} в $\mathscr{A}^r_{L^2}(V_p)$ мы вернемся к евклидову случаю (см. в разд. 4.10 указания для общего случая) и обозначениям разд. 2.2. Пусть $\psi \in H^1(\wedge_r V_r)$; можно записать ψ в виде

$$\psi = \sum_I f_I(x)\, dx_I,$$

где сумма распространяется на подмножества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ мощности r, а x_I обозначает $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}$ при $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$. Теперь интеграл $Q_{t,V_p}(\psi)$ выражается как сумма (по I) интегралов $\mathscr{F}_I$:

$$\mathscr{F}_I = \int_{V_p} \sum_{i=1}^{n} \left[\left| \frac{\partial f_I}{\partial x_i} \right|^2 + (t^2\lambda_i^2 x_i^2 - t\lambda_i \varepsilon_i^I)|f_I|^2 \right] dx_1 \ldots dx_n,$$

где $\varepsilon_i^I = -1$, если $i \in I$, и $\varepsilon_i^I = +1$, если $i \notin I$.

4.8. Изучим сначала случай размерности 1. Обозначим через I_α интервал $]-\alpha, \alpha[\subset \mathbb{R}$; рассмотрим в $L^2(I_\alpha)$ квадратичную форму

$$K_t(f) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (|f'|^2 + (t^2x^2 - t)|f|^2)\, dx$$

с областью определения $H^1(I_\alpha)$. Обозначим через $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ первое и второе характеристические значения K_t.

Лемма. *Существуют такие постоянные* $\rho, \sigma > 0$, *что*

$$\mu_1(t) \geqslant -\rho,$$
$$\mu_2(t) \geqslant \sigma t$$

для достаточно большого t.

Доказательство. Докажем сначала второе неравенство. Для $f \in L^2(I_\alpha)$ положим $U_t f(X) = t^{-1/4} f(X/\sqrt{t})$; при этом получается изометрический изоморфизм $L^2(I_\alpha)$ на $L^2(I_{\alpha\sqrt{t}})$. Пусть $g = U_t f$; теперь

$$(1)\qquad K_t(f) = t \int_{-\alpha\sqrt{t}}^{+\alpha\sqrt{t}} (|g'|^2 + (X^2 - 1)|g|^2)\, dX.$$

Положим $\beta = \sqrt{\pi/2}$. Тогда

$$(2)\qquad \int_{\beta \leqslant |X| \leqslant \alpha\sqrt{t}} (|g'|^2 + (X^2 - 1)|g|^2)\, dX \geqslant$$

$$\geqslant (\beta^2 - 1) \int_{\beta \leqslant |X| \leqslant \alpha\sqrt{t}} |g|^2\, dX;$$

с другой стороны,

$$(3)\qquad \int\limits_{|X|\leqslant\beta} (|g'|^2+(x^2-1)|g|^2)\,dX \geqslant \int\limits_{|X|\leqslant\beta} (|g'|^2-|g|^2)\,dX.$$

Однако квадратичная форма $g \mapsto \int\limits_{-\beta}^{+\beta} |g'|^2 dX$ связана с задачей Неймана на I_β. Известно, что первое собственное значение соответствующего оператора нулевое (собственный вектор — постоянная функция), а второе есть $\pi^2/4\beta^2$. Поэтому, если g ортогональна константам на I_β, то

$$(4)\qquad \int\limits_{-\beta}^{+\beta} (|g'|^2-|g|^2)\,dX \geqslant \left(\frac{\pi^2}{4\beta^2}-1\right)\int\limits_{-\beta}^{+\beta} |g|^2 dX.$$

Из (2), (3), (4) выводится неравенство

$$(5)\qquad K_t(f) \geqslant t(\beta^2-1)\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} |U_t f|^2 dx$$

для функции f с $U_t f$, ортогональной константам, и, следовательно,

$$\mu_2(t) \geqslant t(\beta^2-1).$$

Оценка снизу для $\mu_1(t)$ теперь вытекает из неравенства Темпла [21, т. 4, с. 84], примененного, например, к функции вида $\varphi_B(x)\,e^{-tx^2/2}$ при подходящем B.

4.9. Вернемся к изучению интегралов F_I. Самосопряженный оператор, связанный с определенной F_I квадратичной формой на $L^2(V_p)$, совпадает с замыканием существенно самосопряженного оператора

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{i-1 \text{ членов}} \otimes D_{i,t}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1,$$

где $D_{i,t}$ действует только по переменной x_i и непосредственно связан с квадратичной формой K_t из разд. 4.8. Применим теперь результаты из разд. 4.8. Возможно два случая:

a) или существует целое i, такое, что $\varepsilon_i^I\lambda_i < 0$, что происходит в точности когда индекс p не равен r или индекс p равен r, но $I \neq \{1, \ldots, r\}$. Тогда использование первого неравенства леммы из разд. 4.8 дает

$$(6)\qquad F_I \geqslant (\sigma' t-\rho')\int\limits_{V_p} |f_I|^2 dx_1 \ldots dx_n,$$

с постоянными ρ' и $\sigma' > 0$;

b) или же всегда $\varepsilon_i^I\lambda_i > 0$, т. е. p имеет индекс i, а $I = \{1, \ldots, r\}$; неравенство (6) справедливо, если f_I ортогонально одномерному подпространству в $L^2(V_p)$.

Случаи a) и b) дают требуемую информацию о характеристических значениях Q_{t,V_p}.

4.10. Замечания

1. Точно так же можно поступать и в неевклидовом случае; при этом при вычислении $Q_{t,V_p}(\varphi)$ в разд. 4.7 нужно учитывать дополнительные члены, возникающие из-за неплоскости метрики в окрестности p. Однако эти члены не вызывают проблем, так как они суть $o(t)$.

2. В [18] можно найти подход, непосредственно дающий в евклидовом случае неравенство $b_l \leqslant m_l$. В [25] доказано, что асимптотические разложения n-х собственных значений Δ_t и $\bigoplus_{p\in C}\Delta'_t$ (где Δ'_t — оператор на $A_{L^2}(\mathbb{R}^n)$) совпадают в первом порядке. Оба этих подхода ближе нашего к методу Виттена. Промежуточный между [18] и [25] подход с использованием оператора $d_t + d_t^*$ был сообщен мне Буте де Монвелем.

5. ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Обобщенные неравенства Морса [22, II]. Рассмотрим компактное дифференцируемое многообразие M и функцию h на M класса C^∞, но не будем больше предполагать, что h — функция Морса, а только что критические точки h образуют подмногообразие N в M (не обязательно связное), которое невырожденно в том смысле, что в каждой точке из N ранг матрицы гессиана h совпадает с рангом нормального расслоения к N. В этом случае получаются неравенства, связывающие b_i с $m_i = \dim H^i(N, \vartheta)$, где ϑ — расслоение ориентаций отрицательной части нормального расслоения к N. Интерпретируется это посредством возмущения d с помощью e^{-th}, как и в разд. 1.6. Показывается, что для больших t малые собственные значения Δ_t соответствуют собственным векторам, концентрирующимся в окрестности подмногообразия N, поэтому они связаны со спектром лапласиана N.

5.2. Векторные поля [22, III]. Пусть M — дифференцируемое многообразие, а X — векторное поле на M. Обозначим через $c(X)$ внутреннее умножение на X, а через $\mathscr{L}_X$ — дифференцирование Ли на комплексе $\mathscr{A}(M)$ дифференциальных форм на M. Положим $d_X = d + c(X)$; имеем $d_X^2 = \mathscr{L}_X$. Снабдим векторное подпространство $\mathscr{A}_X(M) \subset \mathscr{A}(M)$, состоящее из форм, аннулируемых $\mathscr{L}_X$, дифференциалом d_X. Обозначим через $H_X(M)$ когомологии полученного комплекса. При $s \neq 0$ когомологии $H_X(M)$ и $H_{sX}(M)$ изоморфны. Предположим, что M компактно, снабдим его римановой структурой и введем $D_X = d_X + d_X^*$, $H_X = D_X^2$. Изучая спектр H_{sX} при $s \to \infty$ методами, похожими на изложенные здесь (на этот раз «потенциал» — это $s^2|X|^2$, и собственные векторы концентрируются около нулей X), Виттен выразил эйлерову характеристику M $\left(\text{равную } \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim H_{sX}^i(M) \text{ при произвольном } s\right)$ через целые числа, приписанные связным компонентам многообразия нулей поля X. В случае когда нули X изолированы, получается классическая теорема Хопфа.

5.3. Векторные поля: риманов случай [22, III]. Предположим теперь, что X порождает группу изометрий римановой структуры на M. В этом случае X называют векторным полем Киллинга. Тогда $H_X = d_X d_X^* + d_X^* d_X$. Обозначим через N множество нулей X, через b_N^+ — сумму чисел Бетти множества N с четными номерами, а через b_N^- с нечетными. Положим также

$$b_X^+ = \sum_{i \text{ четно}} \dim H_X^i(M), \quad b_X^- = \sum_{i \text{ нечетно}} \dim H_X^i(M).$$

Тогда

$$b_N^+ = b_X^+, \quad b_N^- = b_X^-.$$

Теперь предположим еще, что M четномерно и ориентируемо. Тогда при действии оператора $*$ комплекс де Рама разбивается на четную и нечетную части $\mathscr{A}^+(M)$ и $\mathscr{A}^-(M)$. Эрмитов оператор

$$Q_X = e^{i\pi/4} d_X + e^{-i\pi/4} d_X^*$$

нечетен. Его можно записать как $Q_X^+ + Q_X^-$, где Q_X^+ отображает $\mathscr{A}^+(M)$ в $\mathscr{A}^-(M)$, а Q_X^- отображает $\mathscr{A}^-(M)$ в $\mathscr{A}^+(M)$. Индекс Q_{sX}^+ не зависит от s и равен сигнатуре M. Кроме того, $Q_X^2 = H_X + 2i\mathscr{L}_X$. При этом получается теорема о неподвижных точках ([2, II, § 6] или [6, III § 6]), в которой сигнатура M выражается через N.

5.4. Несколько замечаний. 1. Ясно, что утверждения разд. 5.1—5.3 допускают доказательства, аналогичные приведенным в § 4. Автор настоящего доклада таких доказательств не писал.

2. Виттен указывал, что намеченные им доказательства этих результатов — варианты доказательств, основанных на теореме об индексе [5], [6]. Интересно было бы сравнить его метод с методом из [3] (в частности, см. комментарий к [1]).

3. В [9], [10] рассматривается случай действия компактной группы Ли T на компактном дифференцируемом многообразии M. Обозначим через X^* векторное поле, полученное из действия на M элемента X алгебры Ли. Теперь $H_{-2\pi i X^*}(M)$ рассматривается как эквивариантное кольцо когомологий X. Конструируются эквивариантные характеристические классы, что приводит к теореме о неподвижных точках и к теореме об индексе (ср. [11]).

5.5. Суперсимметрия [22, § I, § IV], [24]. В контексте неравенств Морса положим

$$Q_1 = d + d^*,$$
$$Q_2 = i(d - d^*),$$
$$H = \Delta.$$

Тогда

$$\text{(I)} \qquad Q_1^2 = Q_2^2 = H \quad \text{и} \quad Q_1Q_2 + Q_2Q_1 = 0.$$

В контексте разд. 5.3 положим

$$Q_1 = Q_X,$$
$$Q_2 = e^{-i\pi/4} d_X + e^{i\pi/4} d_X^*,$$
$$H = H_X,$$
$$P = 2i\mathscr{L}_X.$$

Тогда

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} Q_1^2 &= H + P, \\ Q_2^2 &= H - P, \\ Q_1Q_2 + Q_2Q_1 &= 0. \end{aligned}$$

В каждом из этих двух случаев имеется гильбертово пространство $\mathscr{H}$, разложенное в прямую сумму четной и нечетной частей $\mathscr{H}^\pm$ и снабженное эрмитовыми операторами симметрии Q_1, Q_2: $\mathscr{H}^\pm \to \mathscr{H}^\mp$ и оператором гамильтониана H. Крайне упрощая, можно сказать, что суперсимметричная квантовая механика —

это изучение ситуаций I и II (то, что операторов симметрии два — Q_1 и Q_2, отвечает миру с одномерными пространством и временем. Ситуация I отвечает нерелятивистской механике, II — релятивистской).

Важный вопрос в задачах нарушенной симметрии — имеются ли векторы $h \in \mathscr{H}$, удовлетворяющие $Q_1h = Q_2h = 0$. Если да, то в теории существуют бозоны и фермионы равных масс. Если нет, то симметрия «спонтанно нарушена». Существование таких векторов можно проверять, изучая индекс $H = (Q_1^2 + Q_2^2)/2$. Модели, интересующие Виттена, аналогичны пространствам $\mathscr{A}^k(M)$, но риманово многообразие M бесконечномерно — обычно это пространство петель риманова многообразия B (на этот раз конечномерного). После экстраполяции своих методов на бесконечномерный случай Виттен пришел к выводу, что в определенных суперсимметричных моделях не происходит спонтанного нарушения симметрии.

5.6. Голоморфные неравенства Морса [23]. Если X — голоморфное векторное поле на компактном комплексном многообразии M, то полученная Атьей и Боттом голоморфная формула Лефшеца выражает числа Черна M через нули X [2]. Если M — кэлерово многообразие, поле X порождает действие окружности S^1 на M, причем X имеет нуль на M, то формула Лефшеца обобщена Виттеном до системы неравенств, аналогичных неравенствам Морса.

5.7. Неравенства Морса для слоений [14]. К этому результату, полученному Конном, неприменимы классические методы, но применим открытый Виттеном аналитический подход.

Пусть M — компактное многообразие со слоением и инвариантной при голономии трансверсальной мерой Λ. Выбрав риманову метрику вдоль слоев, получим поле гильбертовых пространств, образованное гармоническими k-формами с интегрируемым квадратом. Можно доказать, что существует такая измеримая трансверсаль T к слоям с конечной трансверсальной мерой, что поле $L^2(T \cap F)$ (где F — слой M) измеримо изоморфно полю гармонических k-форм. Трансверсальная мера T не зависит от выбора ни T, ни римановой метрики. Это вещественное положительное число называется k-м числом Бетти слоения и обозначается b_k.

Пусть h — функция класса C^∞ на M, $h: M \to \mathbb{R}$. Наша цель — получить теорию Морса *вдоль слоев*. Для общего h критические точки вдоль слоев образуют замкнутое подмногообразие, которое, *вообще говоря*, не трансверсально слоям. Поэтому невозможно избежать появления вырожденных критических точек.

Однако на каждой связной компоненте множества трансверсальности этого многообразия индекс постоянен. Сгруппировав связные компоненты с фиксированным индексом k и вычислив их трансверсальную меру, получим k-е число Морса слоения — вещественное положительное число. В [14] показано (по крайней мере в коразмерности $\leqslant 5$) существование такого полинома $Q(t)$ с вещественными положительными коэффициентами, что

$$\Sigma m_i t^i = \Sigma b_i t^i + (1 + t) Q(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Atiyah M. F. Circular Symmetry and Stationary—Phase Approximation, Conférence en l'honneur de L. Schwartz, Ecole Polytechnique, mai 1983.
2. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I: Ann. Math., 86 (1967), 374—407; II Ann. Math., 88 (1968), 451—491.
3. Atiyah M. F., Bott R., Patodi V. K. On the heat equation and the index theorem, Invent. Math., 19 (1973), 279—330. [Имеется перевод: Атья М., Ботт Р., Патоди В. К. Уравнение теплопроводности и теорема об индексе. — Математика, 1973, т. 17, вып. 5, с. 3—56.]
4. Atiyah M. F., Hirzebruch F. Spin manifolds and group actions., In: Essays on topology and related topics, Ed. A. Haefliger, R. Narashiman, Springer-Verlag, 1970.
5. Atiyah M. F., Segal G. B. Index of elliptic operators. II. Ann. Math., 87 (1968), 531—541. [Имеется перевод: Атья М., Сигал Дж. Б. Индекс эллиптических операторов. — УМН, 1968, т. 23, вып. 6, с. 135—149.]
6. Atiyah M. F., Singer I. M. Index of elliptic operators I. Ann. Math., 87 (1968), 484—530. [Имеется перевод: Атья М., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов I. — УМН, 1968, т. 23, вып. 5, с. 99—142.] III: Ann. Math., 87 (1968), p. 546—604. [Имеется перевод: Атья М., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов III. — УМН, 1969, т. 24, вып. 1, с. 127—182.]
7. Banks T., Bender C., Wu T. T. Coupled Anharmonic Oscillators I and II, Phys. Rev. D8 (1973), 3346—3365, 3366—3378.
8. Berger M., Gauduchon P., Mazet E. Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math., Springer, 194, 1971.
9. Berline N., Vergne M. Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, Duke Math. J., 50 (1983), 539—549.
10. Berline N., Vergne M. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. C. R. Ac. Sci. Paris, 295, 15 nov. (1983), 539—541.
11. Bott R. Vector fields and characteristic numbers, Mich. Math. J., 14 (1967), 231—244.
12. Bott R. Lectures on Morse theory, old and new. Bull. Amer. Math. Soc., 7 (2). September 1982, 331—358.
13. Bott R. Marston Morse and his mathematical works, In: Selected papers of Marston Morse, Ed. R. Bott, Springer-Verlag, 1981.
14. Connes A. Inégalites de Morse pour les feuilletages. En préparation.
15. Klingenberg W. Lectures on closed geodesics. Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag. 1978. [Имеется перевод: Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. — М., Мир: 1982.]
16. W. Klingenberg. The Morse complex, In: Symposia di Alta Matematica XXVI, Roma, 1982, p. 117—122.

17. Laumon G. Théorie de Morse à la Witten en caractéristique p. Notes munuscrites de l'auteur, juin 1983.
18. Melrose R. Elliptic operators on manifolds, Notes d'un cours au M. I. T., 1983.
19. Milnor J. Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton University Press, Princeton, 1966. [Имеется перевод: Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. — М., Мир: 1969.]
20. Milnor J. Morse theory. Annals of Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton, 1963. [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. — М., Мир: 1965.]
21. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical Physics, V. 1—4. Academic Press, New York, 1978. [Имеется перевод: Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В 4 т.т. — М., Мир: 1972—1982.]
22. Witten E. Supersymmetry and Morse theory. J. of Differential Geometry, 17 (1982), 661—692.
23. Witten E. Holomorphic Morse inequalities, Preprint, Princeton, Univ., 1983.
24. Witten E. Fermion Quantum Numbers in Kazula — Klein theory. En préparation.
25. Simon B. Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I. Ann. I. H. P., 38, No. 3, (1983), 295—308.
26. Simon B. Instantons, double-wells and large deviations, Bull. Amer. Math. Soc., 8, no. 3 (1983), 323—326.
27. Helffer B., Sjöstrand J. Multiple wells in the semi-classical limit I, Prépublication Univ. Paris-Sud 83 T25. 1983.
28. Hörmander L. On the Index of Pseudodifferential Operators. Differentialgleichungen, 10 Bd. 1 (1970), 127—146.
29. Kasparov G. G. K-theory, group C^*-algebras and Higher signatures (conspectus), part I. Preprint of the Institute of Chemical Physics, the Academy of Sciences of the USSR. Chernogolovka, 1981.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА И КОММЕНТАРИИ
(составитель А. В. Пажитнов)

1*. Witten E. Holomorphic Morse inequalities. Algebraic and Differential Topology—Global Differential Geometry, ed. G. M. Rasstas Teubner-Texte zur Mathematik Bd 70 Teubner, Leipzig, 1984.
2*. Demailly J.-P. Champs magnétique et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35, № 4 (1985), 189—229.
3*. Helffer B., Sjostrand J. Puits multiples en mécanique semi-classique. IV Etude du complex de Witten. Comm. in partial diff. équitions. 10, No 3 (1985), 245—340.
4*. Floer A. Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, Jour. Diff. Geom., 30 (1989), 207—221.
5*. Bismut J. M. The Witten complex and the degenerate Morse inequalities, Jour. Diff. Geom. 23, № 3 (1986), 207—240.
6*. Bismut J.-M. Demailly's asymplotic Morse inequalities: a heat equation proof, Uotr. Funct. Anal., 72, № 2 (1987), 263—278.
7*. Новиков С. П. Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутые 1-формы. — ДАН СССР, 1987, т. 287, № 6, с. 1321—1324.
8*. Новиков С. П .Шубин М. А. Неравенства типа Морса и неймановские Π_1-факторы. — ДАН СССР, 1986, т. 289, № 2, 289—292.
9*. Пажитнов А. В. Аналитическое доказательство вещественной части неравенств Новикова. — ДАН СССР, 1987, т. 293, № 6, 1305—1307.

Работа Виттена о голоморфных неравенствах Морса, упоминавшаяся в докладе, опубликована в [1*]. В работе Ж.-П. Демаи [2*] метод Виттена

применен в комплексно-аналитической ситуации: доказано, что для компактного комплексного многообразия X^n, голоморфного расслоения E над X и эрмитова линейного голоморфного расслоения F над X размерности когомологий $H^q(X, E^k \otimes F)$ растут при $k \to \infty$ не быстрее, чем $c \cdot k^n$. Статья Хельфера и Шёстранда [3*] содержит полное доказательство того, что квазиклассический комплекс Виттена изоморфен комплексу Морса данной функции.

После выхода работы Виттена классический комплекс Морса гладкой функции на компактном многообразии, известный по существу еще Морсу и активно изучавшийся в дифференциальной топологии, часто называют комплексом Виттена. Под таким названием этот объект обобщался в цикле работ Флёра, построившего теорию Морса для пересечений лагранжевых многообразий, см. [4*].

Квазиклассический комплекс Виттена рассмотрен с точки зрения случайных процессов и уравнения теплопроводности в работе Бисмю [5*], а в [6*] этим способом доказаны и результаты Демаи.

В работах Новикова [7*], Новикова и Шубина [8*] рассмотрен виттеновский дифференциал в пространствах дифференциальных форм с коэффициентами в плоском расслоении, определяемом представлением фундаментальной группы. Получаются аналоги неравенств Морса, включающие гомологии с локальными коэффициентами.

Аналогичный дифференциал можно рассмотреть, взяв вместо дифференциала морсовской функции произвольную замкнутую, но не точную 1-форму. Рассуждения Виттена дают и здесь оценку снизу для числа критических точек ([9*], см. также [7*]). Соответствующие числа Бетти можно вычислять через скобки Масси [7*].

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ, РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ И МЕРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ КРИВЫХ

Жан-Бенуа Бост [1])

Недавно, благодаря работам Квиллена ([44]) и Белавина — Книжника ([7], [8]) о детерминанте оператора $\bar\partial$ на римановой поверхности, была установлена замечательная связь между «теорией струн по Полякову» и алгебраической геометрией пространств модулей комплексных кривых. Мы намереваемся описать ее в этом докладе.

0.1. Струнные теории — это квантовые теории протяженных объектов, разрабатываемые в течение двух десятилетий. В отличие от квантовых теорий обычных полей они описывают не точечные объекты, а «струны», т. е. объекты пространственно одномерные.

Струнные модели были введены в начале семидесятых годов как феноменологические модели сильных взаимодействий между адронами (т. е. ядерных сил на расстоянии $\sim 10^{-13}$ см). К сожалению, эти модели лишь очень грубо воспроизводят действительность и обнаруживают признаки нефизичности, а именно, их математическое построение известно только для размерностей D пространства — времени, отличных от 4: $D=26$ для обычной (бозонной) модели, $D=10$ для моделей, обладающих фермионными степенями свободы. Впоследствии струнные модели были предложены в качестве теорий элементарных частиц, включая поля Янга — Миллса и гравитационное поле (в таком случае естественным масштабом этих моделей служит планковская длина $\sim 10^{-32}$ см).

В 1981 г. Поляков предложил переформулировку теории струн, доставляющую новое понимание критических размерностей 26 и 10. Эта переформулировка выявляет новые степени свободы струны, учет которых делает возможным построение вероятностных струнных моделей в размерностях, строго меньших критических (например, 4). Однако обычно применяемая

[1]) Bost Jean-Benoit. Fibrés déterminants, déterminants regularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes. — Séminaire Bourbaki, 39 ème année. 1986—87, n° 676, Astérisque 152—153, 1987, p. 113—149.

в настоящее время процедура устранения лишних измерений состоит в «компактификации» $D-4$ измерений в духе Калуцы — Клейна. В этой конструкции в игру вступают некоторые 3-мерные комплексные многообразия — так называемые многообразия Калаби — Яу.

Кроме того, открытие в 1984 г. замечательных свойств (отсутствия «аномалий») некоторых суперсимметричных струнных моделей с калибровочными группами $SO(32)$ и $E_8\times E_8$ вызвало значительный всплеск интереса к этим теориям, которые должны привести, как считают некоторые, к единому описанию различных фундаментальных взаимодействий.

Вместе с тем струнные теории порождают интересные проблемы статистической механики и могут быть связаны с хромодинамикой в предельном случае «бесконечного числа цветов» (что отвечает калибровочной группе $SU(N)$, $N\to\infty$).

За дополнительными сведениями и историческим обзором по теории струн можно обратиться к сборникам статей [50] и [52], а также к [40]. Со «струной Полякова» можно ознакомиться, помимо оригинальных статей Полякова ([42], [43]), по работам [21] и [1].

Добавим, что струнные модели можно рассматривать как модели теории поля в размерности 2. В действительности описываемые далее математические средства применяются также и к квантованию таких полей (см. [22], [3], [30]).

0.2. Следует подчеркнуть, что в настоящей работе затронут лишь весьма специальный раздел математики, имеющий отношение к теории струн. На самом деле она связана не только с алгебраической геометрией кривых, но также с теорией операторных алгебр, с «суперматематикой», с изучением бесконечномерных алгебр Ли и их представлений, с теорией модулярных форм, с целочисленными квадратичными формами и конечными группами, с геометрией комплексных многообразий размерностей 2 и 3... . Кроме того, теории струн и двумерных квантованных полей позволили обнаружить порой неожиданные связи между этими различными областями (см., например, [51], [32] и [22]).

В частности, мы приводим только результаты, касающиеся бозонной струны, и не затрагиваем вопросов «супергеометрии», возникающих при распространении этих результатов на суперсимметричные струнные модели (см. [34]).

0.3. В первой части работы в оправдание определения «меры Полякова» на пространстве модулей комплексных алгебраических кривых данного рода вкратце вводятся некоторые понятия теории струн «по Полякову». К этому определению приходят, оперируя формально функциональными интегралами и мерами на бесконечномерных многообразиях, точный математический смысл которых остается неясным (разд. 1.1 и 1.4). Тем не менее «мере Полякова» удается придать строгий смысл; она выражается через «детерминанты» некоторых эллиптических дифференциальных операторов на компактных поверхностях, определяемые с помощью дзета-регуляризации.

Вторая часть, независимая от первой, носит чисто математический характер. В ней описаны некоторые результаты из работ Квиллена, Бисмю и Фрида о детерминантных расслоениях собственных гладких семейств голоморфных кривых, их метриках и кривизнах.

В третьей части мы применяем эти результаты для отождествления меры Полякова с мерой, определяемой «чисто алгебраически» (теорема Белавина и Книжника,...). Далее представлены некоторые свойства меры Полякова — следствия этого отождествления (явные формулы для малого рода, асимптотическое поведение в окрестности $\overline{\mathcal{M}}_p - \mathcal{M}_p$).

1. МЕРА ПОЛЯКОВА НА $\mathcal{M}_p$ (СМ. [1], [36] и [16])

1.1. Несколько слов о теории бозонных струн

1.1.1. Струна, пространственно одномерный объект, описывает в пространстве—времени поверхность, которая в каждой точке обладает касательным времени-подобным и касательным пространственно-подобным направлениями. Эта поверхность параметризуется переменными (σ, τ), определенными в полосе $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Точки этой поверхности задаются своими координатами $x(\sigma, \tau) = x_i(\sigma, \tau)_{0 \leqslant i \leqslant D-1}$ в D-мерном пространстве—времени Минковского, т. е. в $\mathbb{R}^D$, снабженном симметричной билинейной формой

$$x \cdot y = -x_0 \cdot y_0 + \sum_{i=1}^{D-1} x_i \cdot y_i;$$

векторы $\dot{x} = \dfrac{\partial x}{\partial \tau}$ и $x' = \dfrac{\partial x}{\partial \sigma}$ соответственно времени- и пространственно-подобны. Динамика струны определяется с помощью действия Намбу — Гото, пропорционального площади этой поверхности в пространстве—времени:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma\, d\tau \sqrt{(\dot{x}.x')^2 - (\dot{x}.\dot{x})(x'.x')}.$$

Это действие — естественное обобщение на одномерные объекты действия свободной частицы массы m, пропорционального

длине ее траектории в пространстве—времени:

$$S_0 = -m \int \sqrt{-\dot{x}.\dot{x}}\, d\tau.$$

1.1.2. По построению действие S_{NG} не зависит от выбора параметров (σ, τ). Эта инвариантность подобна калибровочной инвариантности в электродинамике, что играет решающую роль при квантовании теории. Последнее может быть выполнено в гамильтоновом формализме посредством одной из следующих процедур:

«фиксация калибровки»: накладываются связи, выделяющие независимые динамические переменные, в которых гамильтоново квантование уже не вызывает затруднений (квантование в ортогональной калибровке светового конуса);

квантование «по Гупта — Блёлеру»: вводится пространство $\mathcal{H}$ квантовых состояний, отвечающее полному пространству классических фаз, норма на котором еще не является положительно определенной. Пространство физических состояний — это подпространство в $\mathcal{H}$, высекаемое ядрами «связей», рассматриваемых как квантовые операторы. Эти операторы порождают представление бесконечномерной алгебры Ли — алгебры Вирасоро.

Лоренцева ковариантность при первом подходе и устранение физических состояний с отрицательной нормой при втором вынуждают ввести в квантовую теорию бозонных струн нефизические характеристики: размерность $D = 26$ и тахионное (т. е. с мнимой массой) основное состояние.

1.1.3. Опишем теперь квантование «по Полякову» бозонной струны. Оно выполняется в евклидовом пространстве—времени и использует функциональные интегралы, введенные Фейнманом.

Евклидова версия действия Намбу — Гото — это функционал на пространстве (достаточно регулярных) отображений x поверхности M в D-мерное евклидово пространство (т. е. в $\mathbb{R}^D$, снабженное обычным скалярным произведением «·»):

$$S_{NG}(x) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M dA_x;$$

здесь dA_x обозначает элемент площади на M, индуцированный отображением x из M в $\mathbb{R}^D$, т. е. меру на M, записываемую в локальной системе координат (x_1, x_2) как

$$dA_x = [\|\partial_1 x\|^2 \|\partial_2 x\|^2 - (\partial_1 x.\partial_2 x)^2]^{1/2}\, dx_1\, dx_2.$$

Поляков исходит из следующего наблюдения, принадлежащего Бринку — Ди Веччиа — Хову и Дезеру — Зумино.

Если x — достаточно регулярное отображение из M в $\mathbb{R}^D$ и g — риманова метрика на M, положим

$$(1.1.1)\qquad S(g, x) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M \left[\sum_{i=1}^{D} \| \nabla x_i \|^2 \right] dA,$$

где ∇, $\|\cdot\|$ и dA обозначают градиент, норму и элемент площади, связанные с метрикой g. С точностью до множителя $1/2\pi\alpha'$ $S(g, x)$ — не что иное, как энергия отображения x риманова многообразия (M, g) в евклидово пространство $\mathbb{R}^D$. Можно проверить, что *функционал действия* $S(g, x)$ *«классически эквивалентен»* действию Намбу — Гото $S_{NG}(x)$: если дифференциал $S(g, x)$ по g равен нулю, то $S(g, x) = S_{NG}(x)$.

Действие $S(g, x)$ обладает тремя типами симметрии:

1) *Инвариантность при движениях в евклидовом пространстве—времени.* Если T принадлежит группе $\mathbb{R}^D \rtimes O(D)$ — полупрямому произведению групп вращений и трансляций в $\mathbb{R}^D$, то

$$S(g, x) = S(g, Tx).$$

2) *Инвариантность к репараметризациям.* Для любого диффеоморфизма f: $M \to M$

$$S(g, x) = S(f^*g, f^*x).$$

3) *Инвариантность Вейля, или конформная инвариантность.* Для любой $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$S(g, x) = S(e^\varphi g, x).$$

Для квантования классической теории, определяемой действием $S(g, x)$, Поляков рассматривает функциональный интеграл

$$(1.1.2)\qquad \int DgDxe^{-S(g, x)}.$$

В этом «наивном» выражении областью интегрирования служит произведение пространства $\mathcal{M}et$ всех метрик g на M и пространства $\mathscr{E}$ отображений M в $\mathbb{R}^D$, а $\mathscr{D}g\mathscr{D}x$ обозначает меру на этом произведении.

С этого места мы предполагаем, что M — компактная связная ориентируемая поверхность рода p. Функциональный интеграл (1.1.2) представляет тогда вклад порядка p в статистическую сумму струны Полякова. Он описывает взаимодействие «вакуум—вакуум», обусловленное рождением и уничтожением замкнутых струн. Кроме того, мы полагаем $1/2\pi\alpha' = 1$.

В действительности, поскольку S инвариантно относительно симметрий 2) и 3), а классические степени свободы струны олицетворяются фактопространством пространства $\mathcal{M}et \times \mathscr{E}$ по этим симметриям, для квантования классической теории нужно построить на таком факторпространстве некую «естественную меру», по которой и интегрировать S. В то же время, если мера $\mathscr{D}x$ «трансляционно инвариантна» на $\mathscr{E}$, то интеграл $\int \mathscr{D}xe^{-S(g, x)}$ легко вычисляется: этот интеграл гауссов ввиду квадратичности S по x.

Итак, речь идет о построении естественной меры $\mathscr{D}g\mathscr{D}x$ на $\mathcal{M}et \times \mathscr{E}$, отправляясь от которой интегрированием $\mathscr{D}g\mathscr{D}xe^{-S(g, x)}$ по x получим меру на $\mathcal{M}et$, согласованную с действием группы диффеоморфизмов и преобразований Вейля. Из такой меры факторизацией получим меру на пространстве орбит пространства $\mathcal{M}et$ по действию этих групп. Последнее отождествляется с пространством $\mathcal{M}_p$ модулей римановых поверхностей рода p (см. разд. 1.3).

Эту программу можно реализовать естественным образом только в критической размерности $D = 26$ (см. разд. 1.6). Кроме того, возникающая таким способом мера Полякова на $\mathcal{M}_p$ имеет **бесконечный объем**. Это свойство отражает наличие **тахионов** в теории бозонных струн.

1.2. Конечномерная модель

В этом разделе мы опишем конечномерную модель бесконечномерной проблемы, которую нам предстоит изучать, и проведем на этой модели строгое построение «фактормеры».

Наш способ построения известен в квантовой теории поля под названием конструкции Фаддеева — Попова.

1.2.1. *Соглашения и обозначения.* В этом разделе многообразия и группы Ли предполагаются отделимыми, паракомпактными и конечномерными.

Если F — вещественное векторное пространство конечной размерности m, то через $|\wedge|(F^*)$ обозначается 1-мерное вещественное векторное пространство плотностей на F, т. е. пространство таких вещественнозначных функций σ на множестве $\mathscr{B}(F)$ базисов в F, что $\sigma(TB) = |\det T|\sigma(B)$ для всех $B \in \mathscr{B}(F)$ и $T \in \mathrm{GL}(F)$. Если $(v_1, \ldots, v_m)$ — базис в F, то через $|v_1 \wedge \ldots \wedge v_m|^{-1}$ обозначается такая плотность σ, что $\sigma(v_1, \ldots, v_m) = 1$.

Всякая точная последовательность

$$0 \to F_0 \xrightarrow{T_0} \ldots \to F_i \xrightarrow{T_i} F_{i+1} \to \ldots \xrightarrow{T_{N-1}} F_N \to 0$$

вещественных конечномерных векторных пространств задает канонический изоморфизм

$$(1.2.0)\qquad I:\ \bigotimes_{j=0}^{[N/2]} |\wedge|(F_{2j}) \simeq \bigotimes_{j=0}^{[(N-1)/2]} |\wedge|(F_{2j+1});$$

определяемый следующим образом: если B_i' для каждого i — базис дополнения к $\ker T_i$ в F_i, а $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,k_i})$ — базис в F_i, полученный объединением B_i' и $T_{i-1}(B_{i-1}')$, то

$$I\left(\bigotimes_{j=0}^{[N/2]} |v_{2j,1} \wedge \ldots \wedge v_{2j,k_{2j}}|^{-1}\right) = \\ = \bigotimes_{j=0}^{[(N-1)/2]} |v_{2j+1,1} \wedge \ldots \wedge v_{2j+1,k_{2j+1}}|^{-1}.$$

Если $\mathbf{E}$ — вещественное векторное расслоение класса C^∞ над C^∞-многообразием M, то можно естественно определить линейное (тривиализуемое) расслоение $|\wedge|\mathbf{E}_x^*$. Положительное сечение $|\wedge|T^*M$ задает меру на M.

1.2.2. Пусть V — многообразие класса C^∞, G — вещественная группа Ли и

$$V \times G \to V:\ (v, g) \longmapsto v \cdot g$$

— собственное C^∞-действие G на V, такое, что факторпространство V/G обладает структурой многообразия, а каноническое отображение $V \twoheadrightarrow V/G$ — субмерсия (это так, если и только если $\{(v, v\cdot h),\ v \in V,\ h \in G\}$ — подмногообразие в $V \times V$, и это условие определяет структуру многообразия на V/G однозначно.

Пусть, кроме того, E — вещественное конечномерное пространство, на котором G действует справа линейными преобразованиями

$$E \times G \to F:\ (x, h) \longmapsto x \cdot h,$$

и пусть Q — отображение класса C^∞ из V в область положительно определенных квадратичных форм на E. (Обозначим $Q(v)(x)$ через $Q(v, x)$.)

Пусть, наконец, λ и H — отображения класса C^∞ со значениями >0

$$\lambda:\ V \to |\wedge|E^*:\ v \longmapsto \lambda_v,$$
$$H:\ V \to |\wedge|(\mathrm{Lie}\, G)^*,$$

и μ есть C^∞-сечение $|\wedge|(TV)^*$ всюду >0.

Предположим, что Q, λ и H удовлетворяют следующим условиям согласованности с действием G на V и E:

(i) для всех $(v, x, h) \in V \times E \times G$ $Q(v \cdot h, x \cdot h) = Q(v, x)$;

(ii) для всех $v \in V$ λ_v инвариантно относительно действия на E подгруппы

$$K_v = \{h \in G \mid v \cdot h = v\}.$$

1.2.3. По этим данным можно канонически определить положительную C^∞-плотность на V/G, «интегрируя вдоль E с последующей факторизацией по действию G» плотность на $E \times V$ вида

$$\sigma(x, v) = e^{(-1/2)\, Q(v, x)} \lambda_v(x)\, \mu(v),$$

по меньшей мере, если λ_v и $H(v)$ G-эквивариантны, а $\mu(v)$ G-инвариантна, т. е. если действие $g \in G$ на V переводит λ_v в λ_{vg}, присоединенное действие $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ на $\mathrm{Lie}\, G$ переводит $H(v)$ в $H(vg)$, а действие g на TV, переводя T_vV в $T_{vg}V$, преобразует $\mu(v)$ в $\mu(vg)$.

В явном виде пусть $\tau \in V/G$ и $v \in V$ таковы, что $\tau = vG$. Прообраз τ при отображении $(E \times V)/G \to V/G$, $[(x, v)] \longmapsto [v]$, отождествляется с фактором E/K_v. Каждый элемент $|\omega|$ из $|\wedge|(\mathrm{Lie}\, K_v)^*$ задает инвариантную меру на компактной группе K_v (эту меру мы тоже обозначим $|\omega|$) и, ввиду K_v-инвариантности λ_v, «трансверсальную меру» $\lambda_v/|\omega|$ на E/K_v. Можно также определить $\int_{E/K_v} e^{(-1/2)\, Q(v, x)} \lambda_v(x)$ как элемент из $|\wedge|(\mathrm{Lie}\, K_v)^*$ формулой

$$\int_{E/K_v} e^{(-1/2)\, Q(v, x)} \lambda_v(x) = \left[\int_{E/K_v} e^{(-1/2)\, Q(v, x)} (\lambda_v/|\omega|)([x])\right] |\omega|.$$

Иначе говоря,

$$(1.2.1)\qquad \int_{E/K_v} e^{(-1/2)\, Q(v, x)} \lambda_v(x) = \left[\int_E e^{(-1/2)\, Q(v, x)} \lambda_v(x)\right] \left[\int_K |\omega|\right]^{-1} |\omega|.$$

С другой стороны, рассмотрим точную последовательность

$$(1.2.2)\qquad 0 \to \mathrm{Lie}\, K_v \hookrightarrow \mathrm{Lie}\, G \xrightarrow{\alpha_v} T_vV \xrightarrow{\beta_v} T_\tau V/G \to 0,$$

где α_v — дифференциал отображения $g \longmapsto v \cdot g$ в единице, а β_v — дифференциал канонической проекции $V \twoheadrightarrow V/G$ в точке v. Эта точная последовательность канонически определяет изоморфизм пространств плотностей (см. 1.2.1):

$$I_v\colon |\wedge|(T_\tau V/G)^* = |\wedge|(\mathrm{Lie}\, K_v)^* \otimes |\wedge|(T_v V)^* \otimes [|\wedge|(\mathrm{Lie}\, G)^*]^*.$$

Положим тогда

$$\nu(v) = I_v\left[\int_{E/K_v} e^{(-1/2)Q(v,\,x)}\lambda_v(x) \otimes \mu(v) \otimes H(v)^{-1}\right]. \tag{1.2.3}$$

Это элемент из $|\wedge|(T_\tau V/G)^*$, который при G-эквивариантных λ_v и $H(v)$ и G-инвариантной $\mu(v)$ зависит только от класса τ точки v в V/G и, рассматриваемый как функция от v, задает положительное C^∞-сечение расслоения $|\wedge|(TV/G)^*$.

Более общо, если $\nu(v)$ зависит только от τ, мы говорим, что плотность σ спускается на V/G.

1.2.4. *Замечания* (тривиальные). Если группа G порождена подмножеством P, то σ опускается на V/G тогда и только тогда, когда $\nu(v\cdot h) = \nu(v)$ для всех $(v, h) \in V \times P$.

Кроме того, если G — собственная замкнутая подгруппа группы Ли G' и если действие G на V продолжается на G' таким образом, что для всех $(v, g') \in V \times G'$ выполняется $\nu(v\cdot g) = \nu(v)$, то σ спускается на V/G до плотности, инвариантной относительно правого действия G'/G.

1.2.5. Особенно интересен случай, когда λ, H и μ задаются метриками на E, $\mathrm{Lie}\, G$ и TV.

Пусть, таким образом, заданы для каждого $v \in V$ скалярное произведение $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_v$ на E и скалярное произведение $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_v$ на $\mathrm{Lie}\, G$, гладко зависящие от v, а также риманова метрика $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ на TV. По этим метрикам следующими формулами определяются плотности $\lambda(v)$, $H(v)$ и $\mu(v)$:

$$\lambda(v)(x_1, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-m/2}\left[\det(\langle x_i, x_j\rangle_v)_{1\leqslant i,\,j\leqslant m}\right]^{1/2} \quad (m = \dim E), \tag{1.2.4}$$

$$H(v)(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g) = (2\pi)^{-g/2}\left[\det(\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle)_{1\leqslant i,\,j\leqslant g}\right]^{1/2} \quad (g = \dim G), \tag{1.2.5}$$

$$\mu(v)(v_1, \ldots, v_l) = (2\pi)^{-l/2}\left[\det(\langle v_i, v_j\rangle)_{1\leqslant i,\,j\leqslant l}\right]^{1/2} \quad (l = \dim V). \tag{1.2.6}$$

Получаем тогда гауссов интеграл

$$\int_E e^{-Q(v,\,x)/2}\lambda_v(x) = (\det T_v)^{-1/2}, \tag{1.2.7}$$

где T_v обозначает такой эндоморфизм E, симметричный относительно $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_v$, что $Q(v, x) = \langle T_v x, x\rangle_v$.

С другой стороны, если выбрать базисы $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ в $\mathrm{Lie}\, K_v$ и $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ в $T_\tau(V/G)$ и обозначить через $\tilde\psi_1, \ldots, \tilde\psi_n$ прообразы ψ_i в $\alpha_v(\mathrm{Lie}\, G)^\perp\ (=\ker\alpha_v^*)$, то

$$I_v(|\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k|^{-1} \otimes \mu(v) \otimes H(v)^{-1} = (2\pi)^{(k-n)/2}\left[\det{}'\alpha_v^*\alpha_v\cdot\det(\langle\tilde\psi_i, \tilde\psi_j\rangle_v)_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\times \det(\langle\varphi_r, \varphi_s\rangle_v)^{-1}_{1\leqslant r,\,s\leqslant k}\right]^{1/2}|\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n|^{-1},$$

где $\det'$ означает определитель ограничения на дополнение к ядру.

Таким образом,

$$\nu(v) = (2\pi)^{(k-n)/2}(\det T_v)^{-1/2}\left[\int_{K_v}|\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k|^{-1}\right]^{-1}\times \left[\det{}'\alpha_v^*\alpha_v\cdot\det(\langle\psi_i, \psi_j\rangle_v)\cdot\det(\langle\varphi_r, \varphi_s\rangle_v)^{-1}\right]^{1/2}|\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n|^{-1}. \tag{1.2.8}$$

1.3. Некоторые сведения о компактных римановых поверхностях

В этом разделе собраны некоторые классические результаты о компактных римановых поверхностях. За дополнительными подробностями о пространствах модулей $\mathcal{T}_p$ и $\mathcal{M}_p$ можно обратиться к статье [10] и ссылкам в ней.

1.3.1. *Обозначения и определения.* Далее всюду M обозначает связную ориентированную поверхность рода $p \geqslant 1$, заданную раз и навсегда. Помимо этого:

Diff^+ — группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов M;

Diff_0 — подгруппа в $\mathrm{Diff}^+(M)$ диффеоморфизмов, гомотопных единице;

$\mathcal{W} = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Группа Diff^+ естественно действует на $\mathcal{W}$ (справа):

$$\varphi\cdot f := f^*\varphi = \varphi\circ f, \quad \varphi\in\mathcal{W}, \quad f\in\mathrm{Diff}^+. \tag{1.3.1}$$

Это действие сохраняет структуру аддитивной группы на $\mathcal{W}$ и позволяет определить полупрямое произведение $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}^+$ и его подгруппу $G = \mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}_0$.

$\mathcal{M}et$ обозначает пространство римановых метрик класса C^∞ на M. Полупрямое произведение $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}^+$, а значит, и его подгруппы $\mathscr{W}$ и Diff^+ действуют справа на $\mathscr{M}et$:

(1.3.2) $$g \cdot (\varphi, f) := f^* (e^\varphi g).$$

Кроме того, для всякой римановой поверхности X мы обозначим через ω_X, или еще проще ω, голоморфное линейное расслоение форм типа $(1, 0)$.

Для голоморфного векторного расслоения E над X определен «оператор $\bar\partial$ с коэффициентами в E»

$$\bar\partial_E \colon C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E \otimes \bar\omega).$$

В локальных тривиализующих координатах $(\mathscr{U}, z)$ на E

(1.3.3) $$\bar\partial_E s = \frac{\partial s}{\partial \bar z} \otimes d\bar z.$$

Если S есть $\mathbb{C}$-аналитическое многообразие, а $\pi\colon X \to S$ — «голоморфное семейство компактных римановых поверхностей, параметризованное S», т. е. X есть $\mathbb{C}$-аналитическое многообразие, а π — собственная голоморфная субмерсия[1]) с 1-мерными слоями, мы обозначаем через $TX|S$ касательное голоморфное подрасслоение в TX, образованное векторами, касательными к слоям π. Это расслоение линейное, его обратное — расслоение «вертикальных голоморфных дифференциальных форм» — мы обозначаем $\omega_{X|S}$.

1.3.2. Напомним связь между римановыми метриками и комплексными структурами на M.

Пусть g — некоторая C^∞-риманова метрика на M. По «теореме об изотермических координатах» всякая точка из M обладает окрестностью $\mathscr{U}$, на которой можно ввести такие локальные C^∞-координаты (x, y), ориентированные положительно, и такую C^∞-функцию ψ, что на $\mathscr{U}$

(1.3.4) $$g = e^\psi (dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

Преобразования перехода между комплексными картами на M вида $(\mathscr{U}, x + iy)$ являются голоморфными. Эти карты задают, таким образом, структуру голоморфной кривой на M.

Другими словами, всякая почти-комплексная структура в комплексной размерности 1 интегрируема.

Обратно, простое рассуждение (разбиение единицы...) доказывает, что всякая комплексная структура на M, совместимая с ее ориентацией и C^∞-структурой, порождает указанным способом C^∞-риманову метрику на M. Более того, две такие метрики g и g' задаются одной и той же комплексной структурой, если и только если $g' = e^\varphi g$ для некоторой $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

[1]) То есть собственный гладкий морфизм в смысле аналитической геометрии.

Следовательно, множество комплексных структур на M, совместимых с ее ориентацией и гладкостью, отождествляется с пространством орбит $\mathscr{M}et/\mathscr{W}$.

Как только M снабжено такой комплексной структурой, можно определить L_2-скалярное произведение на $C^\infty(M, \omega_M)$ (соответственно $C^\infty(M, \bar\omega_M)$) формулами

(1.3.5) $$(\omega_1, \omega_2) = \frac{i}{2} \int_M \omega_2 \wedge \bar\omega_1 \quad \left(\text{соответственно } (\omega_1, \omega_2) = = \frac{i}{2} \int_M \bar\omega_1 \wedge \omega_2\right).$$

Если g — риманова метрика на M, совместимая с этой комплексной структурой, а ∇, $\|\cdot\|$ и dA означают градиент, норму и элемент площади, ассоциированные с g, то для каждой $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

(1.3.6) $$\int_M \|\nabla f\|^2 dA = 4 (\partial f, \partial f),$$

где ∂ означает компоненту типа $(1, 0)$ оператора d. Это равенство устанавливает, в частности, инвариантность Вейля для действия Полякова.

1.3.3. В этом разделе считаем $p > 1$.

Назовем *поверхностью Тайхмюллера* рода p связную компактную риманову поверхность X рода p, снабженную сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом $\varphi\colon M \xrightarrow{\sim} X$, заданным с точностью до гомотопии. Множество классов изоморфизма поверхностей Тайхмюллера отождествляется с факторпространством $\mathscr{M}et/\mathscr{W} \rtimes \mathrm{Diff}_0$ и может быть снабжено естественной структурой $\mathbb{C}$-аналитического многообразия; это — *пространство Тайхмюллера* $\mathscr{T}_p$. Оно изоморфно стягиваемой ограниченной области голоморфности в $\mathbb{C}^{3p-3}$.

Действие Diff^+ на $\mathscr{M}et$ при переходе к фактору задает действие *модулярной группы Тайхмюллера* $\Gamma_p := \mathrm{Diff}^+/\mathrm{Diff}_0$ на $\mathscr{T}_p$. Кроме того, это действие голоморфно и собственно (Γ_p снабжается дискретной топологией).

Факторпространство $\mathscr{T}_p/\Gamma_p$ отождествляется с $\mathscr{M}et/\mathscr{W} \rtimes \rtimes \mathrm{Diff}^+$ — множеством классов изоморфизма связных компактных римановых поверхностей рода p; это — *пространство модулей* связных компактных римановых поверхностей рода p, обозначаемое $\mathscr{M}_p$. Как фактор $\mathscr{T}_p$ по собственному действию Γ_p это нормальное $\mathbb{C}$-аналитическое пространство; на самом деле оно комплексное квазипроективное многообразие.

Можно построить *универсальную кривую Тайхмюллера*, т. е. голоморфное семейство компактных римановых поверхностей

$$\pi\colon \mathcal{C}_p \leftarrow \mathcal{T}_p$$

и такой диффеоморфизм $\Phi\colon \mathcal{T}_p \times M \to \mathcal{C}_p$, что:

i) следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_p \times M \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \mathcal{C}_p \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{T}_p & \end{tikzcd}$$

(отсюда следует, что для каждого $s \in \mathcal{T}_p$ $\pi^{-1}(s)$ — компактная риманова поверхность рода p);

ii) для каждого $s \in \mathcal{T}_p$ поверхность $\pi^{-1}(s)$, снабженная диффеоморфизмом $\Phi(s, \cdot)\colon M \to \pi^{-1}(s)$, есть поверхность Тайхмюллера из класса изоморфизма s.

Группа Γ_p действует на $\mathcal{C}_p$, превращая π в Γ_p-эквивариантное отображение.

Выпишем точную последовательность голоморфных векторных расслоений

$$0 \to T(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p) \hookrightarrow T\mathcal{C}_p \xrightarrow{T\pi} \pi^* T\mathcal{T}_p \to 0.$$

Взятием прямого образа относительно π эта точная последовательность индуцирует морфизм пучков

$$R^0\pi_*\pi^* T\mathcal{T}_p \to R_1\pi_* T(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p).$$

Пучок $R^0\pi_*\pi^* T\mathcal{T}_p$ отождествляется с пучком сечений $T\mathcal{T}_p$, а пучок $R^1\pi_* T(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p)$ локально свободен с когомологиями $H^1(\pi^{-1}(s), T\pi^{-1}(s))$ в качестве слоя над s.

Определяемое таким образом *отображение Кодаиры — Спенсера*

(1.3.7) $$KS\colon T\mathcal{T}_p \to R^1\pi_* T(\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p),$$

(1.3.8) $$KS_s\colon T_s\mathcal{T}_p \to H^1(\pi^{-1}(s), T\pi^{-1}(s))$$

— изоморфизм. Применяя дуализацию и двойственность Серра, получаем изоморфизм

(1.3.9) $$KS'_s\colon T^*_s\mathcal{T}_p \xrightarrow{\sim} H^0(\pi^{-1}(s), \omega^{\otimes 2}).$$

1.3.4. В этой третьей части мы перечислим следующие результаты.

Пусть $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ — канонический базис в $H_1(M; \mathbb{Z})$, т. е. базис, в котором форма пересечений $(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$(a_i, a_j) = 0; \quad (b_i, b_j) = 0; \quad (a_i, b_j) = \delta_{ij}.$$

С помощью этого базиса можно отождествить $H_1(M; \mathbb{Z})$ с $\mathbb{Z}^{2p}$. Действие Diff^+ на $H_1(M; \mathbb{Z})$ тривиально при ограничении на Diff_0 и задает морфизм групп $\Gamma_p \to Sp(2p; \mathbb{Z})$. Поскольку $Sp(2p; \mathbb{Z})$ действует на полуплоскости Зигеля $\mathcal{H}_p$ (т. е. на множестве симметричных комплексных $p \times p$-матриц с положительно определенной мнимой частью), мы получаем действие Γ_p на $\mathcal{H}_p$.

Для всякого s $\Phi(s, \cdot)$ переводит базис $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ в канонический базис $(a_1(s), \ldots, a_p(s), b_1(s), \ldots, b_p(s))$ в $H_1(\pi^{-1}(s); \mathbb{Z})$. Существует единственный базис $(\omega_1(s), \ldots, \omega_p(s))$ в $H^0(\pi^{-1})(s), \omega_{\pi^{-1}(s)})$, такой, что $\int_{a_i(s)} \omega_j(s) = \delta_{ij}$. Отображение $s \mapsto (\omega_1(s), \ldots, \omega_p(s))$ — это голоморфный репер в векторном расслоении $R^0\pi_*\omega_{\mathcal{C}_p \mid \mathcal{T}_p}$. Зададим голоморфное отображение $\Omega\colon \mathcal{T}_p \to \mathcal{H}_p$, называемое *отображением периодов*, полагая

$$\Omega = (\Omega_{k,l})_{1 \leqslant k, l \leqslant p}; \quad \Omega_{k,l}(s) = \int_{b_k(s)} \omega_l(s).$$

Отображение периодов эквивариантно по отношению к действию Γ_p на $\mathcal{T}_p$ и на $\mathcal{H}_p$. Кроме того, имеют место билинейные соотношения Римана

(1.3.10) $$\frac{i}{2} \int_{\pi^{-1}(s)} \omega_k(s) \wedge \bar{\omega}_l(s) = \operatorname{Im} \Omega_{kl}(s).$$

Наконец, изоморфизм KS'_s переводит $d\Omega_{ij}(s)$ в $\omega_i(s) \otimes \omega_j(s)$.

1.3.5. *Случай* $p = 1$. Слегка злоупотребляя обозначениями, полагаем

$\mathcal{T}_1 = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$;

$\Gamma_1 = PSL(2; \mathbb{Z})$, действует на $\mathcal{T}_1$ дробно-линейно.

Пространство $\mathcal{T}_1$ отождествляется с фактором $Met/\mathcal{W} \rtimes \rtimes \mathrm{Diff}_1$, где Diff_1 — группа диффеоморфизмов поверхности M, индуцирующих $\pm\mathrm{Id}$ на $\pi_1(M)$ (Diff_1 содержит Diff_0 как подгруппу индекса 2), а Γ_1 отождествляется с $\mathrm{Diff}^+/\mathrm{Diff}_1$.

Факторпространство $\mathcal{T}_1/\Gamma_1$ отождествляется с пространством модулей $\mathcal{M}_1$ связных компактных римановых поверхностей рода 1 (эллиптических кривых). Введем над $\mathcal{T}_1$ «универсальную эллиптическую кривую»

$$\pi\colon C_1 = (\mathcal{T}_1 \times \mathbb{C})/\sim \to \mathcal{T}_1,$$
$$[(\tau, z)] \mapsto \tau,$$

где $\sim$ отождествляет (τ, z) с $(\tau, z+m+n\tau)$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Отображение Кодаиры — Спенсера, отвечающее π_1, — изоморфизм; соответствующий изоморфизм $KS'_\tau\colon T^*_\tau\mathcal{T}_1 \xrightarrow{\sim} H^0(\pi^{-1}(\tau), \omega^2) = H^0(\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}, \omega^2)$ переводит $d\tau$ в $dz^{\otimes 2}$.

Далее мы полагаем $\mathrm{Diff} = \mathrm{Diff}_0$, если $p > 1$, $\mathrm{Diff} = \mathrm{Diff}_1$, если $p = 1$.

1.3.6. В этом разделе мы укажем связь между двумя описаниями касательного пространства к пространству Тайхмюллера, полученными из изоморфизма Кодаиры — Спенсера, с одной стороны, и путем отождествления этого пространства с $\mathcal{M}et/\mathcal{W} \times \mathrm{Diff}$ — с другой.

Пусть задана C^∞-риманова метрика g на M. Эта метрика задает голоморфную структуру на M (см. 1.3.2). Построенную таким образом голоморфную кривую обозначим через X. Тождественное отображение $M \to X$ задает поверхность Тайхмюллера рода p; обозначим через s ее класс в $\mathcal{T}_p$.

Пусть N_g — векторное подрасслоение в $S^2T^*_{\mathbb{R}}M$ (расслоение квадратичных форм на $T_{\mathbb{R}}M$), слой которого над $x \in M$ — пространство квадратичных форм со следом нуль относительно g_x. Это подрасслоение зависит только от комплексной структуры, как и подрасслоение C_g в $S^2T^*_{\mathbb{R}}M$, порожденное всюду ненулевым сечением g. Кроме того,

$$S^2T_{\mathbb{R}}M = C_g \oplus N_g. \tag{1.3.11}$$

Имеют место следующие изоморфизмы вещественных векторных расслоений над M ($z = x+iy$ обозначает локальную голоморфную координату; $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$):

$$\mathrm{Re}\colon T_{\mathbb{C}}X \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{R}}M, \quad \mathrm{Re}\left(a\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

$$\mathrm{Re}\colon \bar\omega_X^2 \xrightarrow{\sim} N, \quad \mathrm{Re}(a\,d\bar z^2) = \alpha(dx\otimes dx - dy\otimes dy) + \beta(dx\otimes dy + dy\otimes dx).$$

Метрика g на $T_{\mathbb{R}}M$ при изоморфизме $\mathrm{Re}\colon T_{\mathbb{C}}X \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{R}}M$ переходит в эрмитову метрику на TX и задает, таким образом, изоморфизм $T_{\mathbb{C}}X \simeq \overline{T^*_{\mathbb{C}}X} = \bar\omega$, а после тензорного умножения — изоморфизм комплексных линейных расслоений

$$I\colon T_{\mathbb{C}}X \otimes \bar\omega \xrightarrow{\sim} \bar\omega^2.$$

Более явно, если $z = x+iy$ — локальная координата, так что g имеет вид (1.3.4), то

$$I\left(a\frac{\partial}{\partial z}\otimes d\bar z\right) = \frac{1}{4}e^{\psi}a\,d\bar z^2.$$

Обозначим через p проекцию на второе слагаемое в разложении в прямую сумму $C^\infty(M, S^2T^*_{\mathbb{R}}M) = C^\infty(M, C_g) \oplus (M, N_g)$, вытекающем из (1.3.11). Далее, положим

$$P_g\colon C^\infty(M, T_{\mathbb{R}}M) \to C^\infty(M, S^2T^*_{\mathbb{R}}M),$$
$$\xi \mapsto p(L_\xi g),$$

где L означает производную Ли. Мы пишем в дальнейшем TX вместо $T_{\mathbb{C}}X$. Очень простое локальное вычисление показывает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M, TX) & \xrightarrow{\bar\partial_{TX}} & C^\infty(M, TX\otimes\bar\omega) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Re}} & & \downarrow{\scriptstyle 4\,\mathrm{Re}\circ I} \\ C^\infty(M, T_{\mathbb{R}}M) & \xrightarrow{P_g} & C^\infty(M, N) \end{array}$$

Пространство $\mathcal{M}et$ является многообразием Фреше — на самом деле это область в $C^\infty(M, S^2T^*_{\mathbb{R}}M)$ — и каноническое отображение

$$\Pi\colon \mathcal{M}et \to \mathcal{M}et/\mathcal{W} \rtimes \mathrm{Diff} \simeq \mathcal{T}_p$$

дифференцируемо в надлежащем смысле... . Касательное пространство $T_g\mathcal{M}et$ к $\mathcal{M}et$ в g отождествляется с $C^\infty(M, S^2T^*_{\mathbb{R}}M)$. Касательное отображение $T_g\Pi$ переводит $C^\infty(M, C_g)$ в нуль. Кроме того, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X, TX\otimes\bar\omega) & \longrightarrow & H^1(X, TX) \\ \downarrow{\scriptstyle 2\,\mathrm{Re}\circ I} & & \uparrow{\scriptstyle KS_s} \\ T_g\mathcal{M}et \supset C^\infty(M, N) & \xrightarrow{T_g\Pi} & T_s\mathcal{T}_p, \end{array}$$

где морфизм в верхней строке — композиция канонического отображения $C^\infty(X, TX\otimes\bar\omega)$ на $C^\infty(X, TX\otimes\bar\omega)/\bar\partial C^\infty(X, TX)$ с изоморфизмом Дольбо.

Алгебры Ли группы Ли — Фреше Diff, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}$ отождествляются с $C^\infty(M, T_{\mathbb{R}}M)$, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ и $C^\infty(M, \mathbb{R})\rtimes$ $\rtimes C^\infty(M, T_{\mathbb{R}}M)$ соответственно.

Действие $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}$ на $\mathcal{M}et$ дифференцируемо. Обозначим через A_g дифференциал в единице отображения $\gamma\longmapsto g\cdot\gamma$ из $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}$ в $\mathcal{M}et$.

Стабилизатор $\mathcal{K}$ метрики g в $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}$ отождествляется посредством канонического отображения $\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}\to\mathrm{Diff}$ с группой $\mathrm{Aut}\,X$ голоморфных диффеоморфизмов X из Diff. Эта группа в действительности тривиальна, как и $H^0(X, TX)$, если $p>1$; она является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-расширением комплексного тора, изоморфного X, если $p=1$.

С помощью предыдущих результатов легко проверяется коммутативность следующей диаграммы, в которой строки точны:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X,TX) \arrow[r, hook] \arrow[d, dash, "\wr"'] & C^\infty(X,TX) \arrow[r, "\bar\partial_{TX}"] \arrow[d, "\frac{1}{2}\mathrm{Re}", "\wr"'] & C^\infty(X, TX\otimes\bar\omega) \arrow[r] \arrow[d, "2\,\mathrm{Re}\circ I", "\wr"'] & H^1(X,TX) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X) \arrow[r, hook] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff} \arrow[r, "P_g"] & C^\infty(M,N) \arrow[r, "T_g\Pi"] & T_s\mathcal{T}_p \arrow[r] \arrow[u, "KS_s", "\wr"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}\,\mathcal{K} \arrow[r] \arrow[u, dash, "\wr"'] & \mathrm{Lie}\,\mathcal{W}\oplus\mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff} \arrow[r, "A_g"] \arrow[u, "\mathrm{pr}_2"] & T_g\mathcal{M}et \arrow[r, "T_g\Pi"] \arrow[u, "p"] & T_s\mathcal{T}_p \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
 & & \mathrm{Lie}(\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}) \arrow[u, dash, "\wr"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(1.3.12)

1.4. В этом разделе мы применяем *формально* конструкцию 1.2 к бесконечномерной задаче, описанной в конце 1.1.

1.4.1. Положим $V=\mathcal{M}et$ и $G=\mathcal{W}\rtimes\mathrm{Diff}$. Примем за E фактор-пространство $C^\infty(M, \mathbb{R}^D)$ по действию трансляций $\mathbb{R}^D$: $E=$ $=C^\infty(M, \mathbb{R}^D)/\mathbb{R}^D$. Группа G обладает действием на V, заданным формулой (1.3.2), и действием на E, индуцированным с помощью действия Diff на $C^\infty(M, \mathbb{R}^D)$ композициями. Фактор V/G отождествляется с пространством Тайхмюллера $\mathcal{T}_p$.

На пространстве $\mathcal{M}et$ можно определить естественную риманову метрику, снабжая касательное пространство $T_g\mathcal{M}et\simeq$ $\simeq C^\infty(M, S^2T^*M)$ скалярным произведением по формуле

$$(T_1, T_2)=\frac{1}{2}\int_M G(t)(T_1(t), T_2(t))\,dA(t),$$

где dA означает элемент площади на M, ассоциированный с g, а $G(t)$ — скалярное произведение на $\otimes^2 T_t^*M$, индуцированное

скалярным произведением $g(t)$ на T_tM; в более явном виде:

$$G(t)(u\otimes v, u'\otimes v')=g'(t)(u, u')\cdot g'(t)(v, v'),$$

где $g'(t)$ — скалярное произведение на T_t^*M, двойственное скалярному произведению $g(t)$ на T_tM. Примем за μ положительную плотность на $\mathcal{M}et$, отвечающую этой римановой метрике (см. (1.2.6)).

Далее, каждая $g\in\mathcal{M}et$ задает естественное скалярное произведение на $\mathrm{Lie}\,\mathcal{W}=C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff}=C^\infty(M, T_{\mathbb{R}}M)$ и $C^\infty(M, \mathbb{R}^D)$ по формулам

$$(\varphi, \psi)_g=\int_M \varphi(t)\cdot\psi(t)\,dA(t), \qquad \varphi, \psi\in C^\infty(M, \mathbb{R});$$

$$(v, w)_g=\int_M g(t)(v(t), w(t))\,dA(t), \qquad v, w\in C^\infty(M, T_{\mathbb{R}}M);$$

$$(x, y)_g=\int_M\left[\sum_{i=1}^D x_i(t)\,y_i(t)\right]dA(t), \qquad x, y\in C^\infty(M, \mathbb{R}^D).$$

Мы обозначаем через $\|\cdot\|_g$ нормы, отвечающие скалярным произведениям $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$.

Прямая сумма метрик $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ на $\mathrm{Lie}\,\mathcal{W}$ и Lie Diff доставляет метрику на $\mathrm{Lie}\,G=\mathrm{Lie}\,\mathcal{W}\oplus\mathrm{Lie}\,\mathrm{Diff}$ и тем самым плотность $H(g)$ на $\mathrm{Lie}\,G$ (см. (1.2.5)).

Метрика $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ на $C^\infty(M, \mathbb{R}^D)$ задает плотность $\lambda_{0,g}$ на $C^\infty(M, \mathbb{R}^D)$ по формуле, аналогичной (1.2.4). Снабдим группу $\mathbb{R}^D$ мерой Лебега L. Меры $\lambda_{0,g}$ и L определяют «трансверсальную меру» $\lambda_g=\lambda_{0,g}/L$ на факторпространстве $E=C^\infty(M, \mathbb{R}^D)/\mathbb{R}^D$. Если отождествить E с ортогональным дополнением в $C^\infty(M, \mathbb{R}^D)$ к подпространству $\mathbb{R}^D$ постоянных отображений и если λ'_g — плотность на E, индуцированная скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$, ограниченным на это ортогональное дополнение, то имеет место соотношение

$$\lambda_g=(2\pi)^{D/2}\|1\|_g^D\,\lambda'_g.$$

Легко видеть, что $\|1\|_g^2$ — не что иное, как площадь M в метрике g.

Наконец, положим (см. 1.1.1):

$$Q(g, [x])=2S(g, x)=\sum_{i=1}^D\int_M\|\nabla x_i\|^2\,dA.$$

Можно проверить, что действие $\mathscr{K}_g$ на E оставляет плотность λ_g инвариантной (см. [36], добавление). Этим доказывается справедливость условия ii) из разд. 1.2.2. Условие i) также выполнено ввиду инвариантности действия S при репараметризациях и преобразованиях Вейля.

1.4.2. Оператор T_g просто выражается в терминах положительного лапласиана Δ_g, связанного с g:

$$T_g([x]) = (\Delta_g x_1, \ldots, \Delta_g x_D).$$

Находим тогда, обозначая через $\det' \Delta$ определитель лапласиана, ограниченного на ортогональное дополнение к константам:

$$(1.4.1) \qquad \int\limits_E e^{-(1/2)Q(g,x)} \lambda_g(x) = \| 1 \|_g^D \int\limits_E e^{-(1/2)(x, T_g, x)} \lambda_g'(x) = \\ = \| 1 \|_g^D (\det' \Delta)^{-D/2}.$$

Это равенство занимает место равенства (1.2.7).

Пусть $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — базис в $\mathrm{Lie}\,\mathscr{K}_g$, $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — базис в $T_{\mathbb{R},s}\mathscr{T}_p$ и $(\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_n)$ — прообразы ψ_i (при $T_g\Pi$) в $\ker A_g^*$. С учетом (1.4.1) формула (1.2.8) принимает вид

$$(1.4.2) \qquad \nu(g) = (2\pi)^{3p-3+D/2} \left[\frac{\det' \Delta_g}{\| 1 \|_g^2} \right]^{-D/2} \left[\int\limits_{\mathscr{K}_g} |\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k|^{-1} \right] \times \\ \times \left[\det' A_g^* A_g \cdot \frac{\det((\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j)_g)}{\det((\varphi_r, \varphi_s)_g)} \right]^{1/2} |\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n|^{-1}.$$

Далее, наделяя $\mathrm{Lie\,Diff}$, $\mathrm{Lie}\,\mathscr{W} \oplus \mathrm{Lie\,Diff}$, $T_g\mathscr{M}et$ и его подпространство $C^\infty(M, N)$ скалярными произведениями $(\cdot\,,\,\cdot)_g$, получаем в обозначениях диаграммы (1.3.12)

$$\mathrm{pr}_2^* \mathrm{pr}_2 = \mathrm{Id} \quad \text{и} \quad p^* p = \mathrm{Id},$$

тогда как A_g, ограниченное на $\mathrm{Lie}\,\mathscr{W} = \ker \mathrm{pr}_2$, является изометрией. Это следует, с одной стороны — из того, что $\tilde{\psi}_i$ — прообразы ψ_i (при $T_g\Pi | C^\infty(M, N)$) в $\ker P_g^*$, а с другой — из равенства

$$(1.4.3) \qquad \det' P_g^* P_g = \det' A_g^* A_g.$$

Таким образом, мера ν спускается на $\mathscr{T}_p$, а теория струн Полякова квантуется, если и только если для всех g следующее выражение зависит только от образа g в $\mathscr{T}_p$:

$$(1.4.4) \qquad \left[\frac{\det' \Delta_g}{\| 1 \|_g^2} \right]^{-D} \left[\det' P_g^* P_g \cdot \frac{\det((\tilde{\psi}_i, \tilde{\psi}_j)_g)}{\det((\varphi_r, \varphi_s)_g)} \right].$$

Поскольку вся предыдущая конструкция эквивариантна относительно действия Diff_+, это имеет место, если и только если это выражение зависит лишь от $\mathscr{W}$-орбиты g, и в таком случае мера, возникающая на $\mathscr{T}_p$, — мера Полякова — сохраняется под действием Γ_p (см. разд. 1.2.4).

Чтобы придать строгий смысл функциональным интегралам, или, что то же самое, — детерминантам операторов в выражении (1.4.4), мы собираемся применить «дзета-регуляризацию» (см. [45], [28]). (С физической точки зрения этот метод устраняет «бесконечные члены», которые в действительности можно компенсировать контрчленами, локальными на M (см. [1] и (1.5.4)). Мы увидим тогда, что при такой строгой интерпретации (1.4.4) условие инвариантности относительно $\mathscr{W}$ выполняется, если и только если D равно критической размерности 26.

1.5. Регуляризованные детерминанты

1.5.1. Пусть M — компактное d-мерное C^∞-многообразие, снабженное римановой метрикой g, а E — конечномерное векторное C^∞-расслоение над M, снабженное метрикой $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. С помощью этих метрик можно определить скалярное произведение двух сечений E над M, s_1 и s_2 по формуле

$$(s_1, s_2) = \int\limits_M \langle s_1(x), s_2(x) \rangle \mu(x),$$

где $\mu(x)$ обозначает элемент объема на M, задаваемый римановой метрикой g. Благодаря этому скалярному произведению можно построить гильбертово пространство $L_2(M, E)$ L_2-сечений E над M.

Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор порядка p (>0), действующий на C^∞-сечения E над M. Предположим, что P положителен, т. е. что для каждого C^∞-сечения s расслоения E

$$(s, Ps) \geqslant 0.$$

Как неограниченный оператор на $L_2(M, E)$ с областью определения пространством $C^\infty(M, E)$ гладких сечений E над M, P существенно самосопряжен. Спектр его замыкания является замкнутым дискретным множеством положительных вещественных чисел, конечной кратности каждое. Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

последовательность собственных значений P в порядке возрастания с повторениями согласно их кратностям.

1.5.2. *Регуляризованный детерминант* оператора P, ограниченного на $(\ker P)^{\perp}$, т. е. $\det' P$, можно определить следующим способом, известным под названием *дзета-регуляризации* (Рэй — Зингер [45]).

Заметим, что формально

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_{\lambda_n\neq 0}\lambda_n^{-s}\right)\Bigg|_{t=0} = -\sum_{\lambda_n\neq 0}\log\lambda_n.$$

Но ряд Дирихле

$$\zeta_P = \sum_{\lambda_n\neq 0}\lambda_n^{-s},$$

сходящийся при $\operatorname{Re}s > d/p$, определяет голоморфную функцию на полуплоскости и обладает мероморфным продолжением на все $\mathbb{C}$, голоморфным в 0 (Сили [46], [24]). В действительности можно вычислить ζ_P, отправляясь от $\theta_P(t) := \operatorname{trace} e^{-tP}$ $(t\in\mathbb{R}_+^*)$, с помощью преобразования Меллина:

$$\zeta_P(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty [\theta_P(t) - \dim\ker P]\, t^{s-1}\,dt, \tag{1.5.1}$$

поскольку $[\theta_p(s) - \dim\ker P]$ экспоненциально убывает, когда t стремится к $+\infty$, и обладает асимптотическим разложением в окрестности 0:

$$\theta_P(t) \sim \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i t^{(i-d)/p} \quad (t\to 0_+). \tag{1.5.2}$$

Это приводит к определению $\det' P$ равенством

$$\det' P = \exp[-\zeta_P'(0)].$$

1.5.3. **Пример 1.** Если M — окружность $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ длины l и $P = -d^2/dx^2$ — скалярный лапласиан на M, то спектр P состоит из 0 (простое собственное значение) и $(2\pi n/l)^2$, $n\in\mathbb{N}^*$ (двойные собственные значения). Следовательно,

$$\zeta_P(s) = \sum_{n=1}^\infty 2\left(\frac{2\pi n}{l}\right)^{-2s} = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right)^{2s}\zeta(2s),$$

где ζ обозначает дзета-функцию Римана. Так как

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi),$$

получаем

$$\det'\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) = l^2.$$

Полагая в этой формуле $l = 2\pi$, видим, что дзета-регуляризация придает расходящемуся произведению $\infty! = 1.2.3.4\ldots$ значение $\sqrt{2\pi}$.

Пример 2. Когда M есть 2-мерный тор, снабженный плоской римановой метрикой, а P — скалярный лапласиан на M, то ζ_P — дзета-функция Эпштейна, у которой производная в нуле дается «первой предельной формулой Кронекера» (см., например, [47, с. 73—75]). Если M изометрично фактору $\mathbb{C}/\omega\mathbb{Z}+\omega\tau\mathbb{Z}$, где $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ наделено обычной метрикой, $\omega,\tau\in\mathbb{C}^*$ и $\operatorname{Im}\tau>0$, находим

$$\det' P = A\operatorname{Im}\tau\,|\eta(\tau)|^4, \tag{1.5.3}$$

где $A = |\omega|\operatorname{Im}\tau$ — площадь M, а η — функция Дедекинда:

$$\eta(\tau) = \exp(\pi i\tau/12)\prod_{n=1}^\infty(1-\exp(2\pi i n\tau)).$$

1.5.4. Функция $\theta_P(t)$ вычисляется интегрированием следа ядра $p_t(x,y)$ оператора e^{-tP} по диагонали в $M\times M$. Когда t стремится к 0 (в $\mathbb{R}_+^*$), $p_t(x,x)$ обладает асимптотическим разложением

$$p_t(x,x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} t^{(i-d)/p} e_i(x),$$

где операторы e_n бесконечно дифференцируемы и вычисляются по универсальным локальным формулам через полный символ P и метрики на M и E.

Пусть, например, M — компактная риманова поверхность и E — голоморфное векторное расслоение над M ранга r. Снабдим $T_{\mathbb{C}}M$ (голоморфное касательное расслоение к M) и E эрмитовыми метриками $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$. Метрика $\|\cdot\|$ задает риманову метрику на M и эрмитову метрику в расслоении $\bar\omega$ форм типа (0, 1) на M. Рассмотрим оператор «$\bar\partial$ с коэффициентами в E»

$$\bar\partial_E\colon C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E\otimes\bar\omega).$$

Благодаря метрикам $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ можно определить L_2-скалярное произведение $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ на $C^\infty(M,E)$ и $C^\infty(M,E\otimes\bar\omega)$, а затем и формально сопряженный оператор

$$\bar\partial_E^*\colon C^\infty(M,E\otimes\bar\omega)\to C^\infty(M,E),$$

характеризуемый тождеством

$$\bar{\partial}_E^*(s,\ t) = (s,\ \bar{\partial}_E t).$$

Произведение $P = \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E$ является положительным эллиптическим оператором второго порядка. След на диагонали ядра p_t оператора e^{-tP} имеет следующее разложение при $t \to 0_+$ (см. [24], § 4.8):

$$(1.5.4)\quad \operatorname{trace} p_t(x,\ x) = \frac{r}{\pi t} A + \frac{r}{6} c_1(T_{\mathbb{C}}M,\ \|\cdot\|) + \frac{1}{t^2} c_1(E,\ \|\cdot\ ') + O(t),$$

где A — элемент площади на M, ассоциированный с римановой метрикой, а $c_1(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ — первая «форма Черна» эрмитова векторного расслоения (см. § 2.4).

1.5.5. Кроме того, для всякого вещественного $\lambda > 0$

$$(1.5.5)\qquad \det{}'(\lambda P) = \lambda^{\zeta_P(0)} \det{}'(P).$$

Благодаря формулам (1.5.1) и (1.5.2) получаем следующее выражение для $\zeta_P(0)$:

$$\zeta_P(0) = a_d - \dim\ker P.$$

Таким образом, когда P — оператор $\bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E$, рассмотренный в предыдущем абзаце, имеем

$$(1.5.6)\quad \zeta_P(0) = \frac{r}{6}\langle c_1(TM),\ [M]\rangle + \frac{1}{2}\langle c_1(E),\ [M]\rangle - h^0(M,\ E) = -\frac{r}{3}(p-1) + \frac{1}{2} d^0(E) - h^0(M,\ E),$$

где p означает род M. В частности, если E — тривиальное расслоение или расслоение $T_{\mathbb{C}}M$, $\zeta_P(0)$ выражается в виде функции от p.

1.6. Конформная аномалия и мера Полякова

Вернемся к обозначениям разд. 1.3 и 1.4. Благодаря дзета-регуляризации детерминанты $\det{}'\Delta_g$ и $\det{}' P_g^* P_g$ имеют теперь точный смысл. Следовательно, благодаря формулам (1.4.2) и (1.4.3), $\nu(g)$ — тоже корректно определенный положительный элемент в $|\Lambda| T_s^* \mathscr{T}_p$.

1.6.1. По формуле (1.3.6) видим, что

$$(1.6.1)\qquad \det{}'\Delta_g = \det{}' 4(\bar{\partial}^*\bar{\partial})_g.$$

В этом равенстве Δ_g действует на вещественные скалярные функции, а $\bar{\partial}^*\bar{\partial}$ — на комплексные скалярные функции. Учитывая (1.5.5) и (1.5.6), получаем

$$(1.6.2)\qquad \frac{\det{}'\Delta_g}{\|1\|_g^2} = C_p \frac{\det{}'(\bar{\partial}^*\bar{\partial})_g}{\|1\|_g^2},$$

где C_p — константа, зависящая только от p. (Индекс g при $\bar{\partial}^*\bar{\partial}$ напоминает, что $\bar{\partial}^*$ зависит от выбора g, а не только от комплексной структуры, определяемой g.)

Поскольку в диаграмме (1.3.8) изоморфизм $(1/2)\operatorname{Re}$ умножает нормы на $1/2$, а изоморфизм $2\operatorname{Re}\circ I$ — на $1/\sqrt{2}$, ясно, что собственные значения оператора $P_g^* P_g$ (действующего на вещественном гильбертовом пространстве) суть собственные значения оператора $2\bar{\partial}_{TX}^* \bar{\partial}_{TX}$ (действующего на комплексном гильбертовом пространстве) с кратностью два.

Таким образом, если $(\Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_{k/2})$ — базис комплексного векторного пространства $H^0(X,\ T_{\mathbb{C}}X)$, $(\Psi_1,\ \ldots,\ \Psi_{r/2})$ — базис комплексного векторного пространства $H^1(X, TX)$ и если $(\tilde{\Psi}_1,\ \ldots,\ \tilde{\Psi}_{r/2})$ — прообразы Ψ_i в $C^\infty(X,\ TX \otimes \bar{\omega})$, ортогональные к образу $\bar{\partial}_{TX}$, и если положить

$$(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_k) = (\Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_{k/2},\ \bar{\Phi}_1,\ \ldots,\ \bar{\Phi}_{k/2})$$

и

$$(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_r) = (\tilde{\Psi}_1,\ \ldots,\ \tilde{\Psi}_{r/2},\ \bar{\tilde{\Psi}}_1,\ \ldots,\ \bar{\tilde{\Psi}}_{r/2}),$$

получим тогда, учитывая (1.5.5) и (1.5.6), что

$$(1.6.3)\quad \det{}' P_g^* P_g \frac{\det((\tilde{\psi}_i,\ \tilde{\psi}_j)_g)}{\det((\varphi_r,\ \varphi_s)_g)} = C_p' [D(g;\ \Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_{k/r};\ \Psi_1,\ \ldots,\ \Psi_{r/2})]^2,$$

где

$$(1.6.4)\quad D(g;\ \Phi_1,\ \ldots,\ \Phi_{k/2};\ \Psi_1,\ \ldots,\ \Psi_{r/2}) = \det{}'(\bar{\partial}_{TX}^* \bar{\partial}_{TX})_g \frac{\det((\tilde{\Psi}_i,\ \tilde{\Psi}_j)_g)}{\det((\Phi_r,\ \Phi_s)_g)}$$

и где C_p' — константа, зависящая только от p.

1.6.2. *Формулы конформных аномалий.* Пусть $\rho \in C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ и $g' = e^\rho g$. Пусть R есть 2-форма кривизны расслоения $T_{\mathbb{C}}X$, снабженного метрикой g. Если $z = x + iy$ — голоморфная локальная координата на X и если $g = e^{\psi}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$, то $R = \bar\partial\partial\psi$ (см. (2.4.1)).

Преобразование выражений (1.6.2) и (1.6.3) при замене метрики g на метрику g' дается следующими формулами, называемыми *формулами конформных аномалий* (см. [42], [1], [21] и § 2.6):

$$(1.6.5)\qquad \frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_{g'}}{\|1\|^2_{g'}} = e^{L(g,\rho)}\frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g}{\|1\|^2_g},$$

$$(1.6.6)\qquad D(g'; \Phi_1, \ldots, \Phi_{k/2}; \Psi_1, \ldots, \Psi_{r/2}) = e^{13L(g,\rho)}D(g; \Phi_1, \ldots, \Phi_{k/2}; \Psi_1, \ldots, \Psi_{r/2}),$$

где

$$(1.6.7)\qquad L(g, \rho) = \frac{1}{24\pi i}\int_M [\partial\rho\wedge\bar\partial\rho + 2\rho R].$$

1.6.3. Из формул (1.6.5) и (1.6.6) вытекает, что выражение (1.4.4) умножается на $\exp\left[\left(13 - \frac{D}{2}\right)L(g, \rho)\right]$, когда g заменяется на g'.

Итак, $\nu(g)$ зависит лишь от орбиты g под действием $\mathscr{W}$, если и только если $D = 26$. И легко видеть, что *в этом случае* $\nu(g)$ *зависит лишь от* $\Pi(g) \in \mathscr{T}_p$ *и задает строго положительное* C^∞*-сечение* $|\Lambda|(T_{\mathbb{R}}\mathscr{T}_p)$, *инвариантное относительно* Γ_p (см. § 1.4.2 и теорему 2.1).

Это сечение определяет меру на $\mathscr{T}_p$ — *меру Полякова*, которую мы обозначаем μ_P. Так как μ_P Γ_p-инвариантна, ее можно отождествить с мерой на $\mathscr{M}_p$.

1.6.4. *Мера Полякова на* $\mathscr{T}_1$. Из результатов разд. 1.3.5 и формул (1.5.3), (1.5.5) и (1.5.6) легко получается следующее выражение для меры Полякова на $\mathscr{T}_1$ (см. [41]):

$$(1.6.8)\qquad \mu_P = \frac{1}{2(2\pi)^{13}}(\operatorname{Im}\tau)^{-12}|\eta(\tau)|^{-48}\frac{i}{2}\frac{d\tau\wedge d\bar\tau}{(\operatorname{Im}\tau)^2}.$$

Правая часть этого равенства инвариантна относительно действия $PSL_2(\mathbb{Z})$, так как η $\mathbb{Z}$-периодична и удовлетворяет функциональному уравнению $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\,\eta(\tau)$.

1.6.5. *Мера Полякова на* $\mathscr{T}_p$, $p > 1$. Когда $p > 1$, $\mathscr{H}_g$ и $H^0(X, TX)$ тривиальны и $r/2 = 3p - 3$. Плотность Полякова в точке из $\mathscr{T}_p$, представляемой метрикой g, обладает, таким образом, следующим выражением (в обозначениях 1.6.1):

$$(1.6.9)\qquad C''_p\left[\frac{\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g}{\|1\|^2_g}\right]^{-13}\det'(\bar\partial^*_{TX}\bar\partial_{TX})_g\det((\bar\Psi_i, \bar\Psi_j)_g)\times$$
$$\times|\Psi_1\wedge\ldots\wedge\Psi_{3p-3}\wedge\bar\Psi_1\wedge\ldots\wedge\bar\Psi_{3p-3}|^{-1}$$

при отождествлении $H^1(X, TX)$ с $T_s\mathscr{T}_p$ отображением KS_s.

По теореме об униформизации каждая связная компактная риманова поверхность рода $p > 1$ обладает единственной метрикой постоянной кривизны -1. Когда метрика g удовлетворяет этому условию, предыдущее выражение преобразуется в

$$(1.6.10)\qquad C'''_p[\det'(\bar\partial^*\bar\partial)_g]^{-13}\det'(\bar\partial^*_{TX}\bar\partial_{TX})_g\,d\mathscr{WP},$$

где $d\mathscr{WP}$ обозначает меру Вейля — Петерсона на $\mathscr{T}_p$ (см. [10]).

Регуляризованные детерминанты, фигурирующие в (1.6.10), можно выразить через значения в целых точках дзета-функции Сельберга фуксовой группы $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$, для которой $X \simeq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}/\Gamma$, и ее производные. Такие выражения позволяют изучать асимптотическое поведение μ_P «на бесконечности в $\mathscr{M}_p$» (см. [23], [20], [5], [16], [48]).

2. ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ

2.1. Детерминантное расслоение ([44], [12])

Пусть P_0 — эллиптический дифференциальный оператор на компактном многообразии X_0, действующий на сечения векторного расслоения E_0 и со значениями в сечениях векторного расслоения F_0. Оператор P_0 имеет индекс: его ядро и коядро конечномерны. Можно тем самым определить 1-мерное векторное пространство

$$\mathrm{DET}\,P_0 = (\Lambda^d\ker P_0)^*\otimes(\Lambda^{d'}\operatorname{coker}P_0),$$
$$(d = \dim\ker P_0;\ d' = \dim\operatorname{coker}P_0).$$

Можно представлять себе $\mathrm{DET}\,P_0$ как дуальное к «максимальной внешней степени» «индекса» оператора P_0, определяемого как формальная разность $\ker P_0 - \operatorname{coker}P_0$.

Пусть $\pi\colon X \to S$ — локально тривиальное C^∞-расслоение с компактными слоями, пусть E и F — векторные C^∞-расслоения над X, и пусть $P = (P_s)_{s\in S}$ есть C^∞-семейство эллиптических операторов на слоях π:

$$P_s\colon C^\infty(\pi^{-1}(s), E) \to C^\infty(\pi^{-1}(s), F).$$

Семейство векторных пространств $(\mathrm{DET}\,P_s)_{s\in S}$ обладает естественной структурой линейного C^∞-расслоения. Это линейное расслоение над S, называемое *детерминантным расслоением* семейства P, мы обозначим $\mathrm{DET}\,P$.

2.2. Детерминантное расслоение оператора $\bar\partial$ на голоморфном семействе компактных римановых поверхностей

В этом докладе мы интересуемся следующим частным примером семейства эллиптических операторов: расслоение π: $X\to S$ — голоморфное семейство компактных римановых поверхностей (см. разд. 1.3.1); E — голоморфное векторное расслоение над X и $F=E\otimes\bar\omega_{X|S}$; P — семейство операторов $\bar\partial_{E,s}$: $C^\infty(\pi^{-1}(s), E)\to C^\infty(\pi^{-1}(s), E\otimes\bar\omega_{X|S})$. Мы обозначим это семейство операторов $\bar\partial_E$.

В такой ситуации детерминантное расслоение $\mathrm{DET}\,\bar\partial_E$ обладает естественной голоморфной структурой (совместимой с C^∞-структурой), которую можно охарактеризовать следующими свойствами.

i) *Согласованность с заменой базы.* Пусть π: $X\to S$ — голоморфное семейство компактных римановых поверхностей, E — голоморфное векторное расслоение над X, S' — комплексно-аналитическое многообразие и f: $S'\to S$ — голоморфное отображение. Положим

$$X'=X\times_S S'=\{(x, s')\in X\times S'\mid\pi(x)=f(s')\};$$

$$\pi': X'\to S',\qquad \bar f: X'\to X,$$

$$(x, s')\longmapsto s',\qquad (x, s')\longmapsto x.$$

Тогда π': $X'\to S'$ — голоморфное семейство компактных римановых поверхностей. Слой $\pi'^{-1}(s')$ отождествляется с $\pi^{-1}(\bar f(s'))$, а $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\bar f^*E,s'}$ — с $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E,f(s')}$. Голоморфные структуры на $\mathrm{DET}_{\bar f^*E}$ и $\mathrm{DET}\,\bar\partial_E$ таковы, что эти изоморфизмы задают изоморфизм голоморфных линейных расслоений

$$\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\bar f^*E}\simeq f^*\,\mathrm{DET}\,\bar\partial_E.$$

ii) *Согласованность с голоморфной структурой прямых образов.* Предположим, что размерности h^0 и h^1 пространств $\ker\bar\partial_{E,s}\simeq H^0(\pi^{-1}(s), E)$ и $\operatorname{coker}\bar\partial_{E,s}=H^1(\pi^{-1}(s), E)$ не зависят от $s\in S$. Пучки $R^0\pi_*E$ и $R^1\pi_*E$ на S в этом случае локально свободны и отождествляются с пучками голоморфных сечений голоморфных векторных расслоений $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}_1$ над S со слоями

$H^0(\pi^{-1}(s), E)$ и $H^1(\pi^{-1}(s), E)$ над $s\in S$ соответственно. Голоморфная структура на $\mathrm{DET}\,\bar\partial_E$ такова, что изоморфизм семейств векторных пространств (с базой S)

$$\mathrm{DET}\,\bar\partial_E\simeq(\wedge^{h_0}\mathbb{E}_0)^*\otimes(\wedge^{h_1}\mathbb{E}_1)$$

является изоморфизмом голоморфных линейных расслоений.

iii) *Согласованность с короткими точными последовательностями расслоений.* Пусть $0\to E_1\to E_2\to E_3\to 0$ — точная последовательность голоморфных векторных расслоений над X. Для всех $s\in S$ длинная точная последовательность когомологий, ассоциированная с этой точной последовательностью векторных расслоений, ограниченной на $\pi^{-1}(s)$, задает изоморфизм

$$\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_2,s}\simeq\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_1,s}\otimes\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_3,s}.$$

Голоморфные структуры на $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_i}$, $i=1, 2, 3$, таковы, что эти изоморфизмы задают изоморфизм голоморфных линейных расслоений

$$\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_2}\simeq\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_1}\otimes\mathrm{DET}\,\bar\partial_{E_3}.$$

Понятие детерминантного расслоения первоначально было введено в рамках алгебраической геометрии ([49], [31]). В частности, если голоморфное семейство π: $X\to S$ компактных римановых поверхностей является в действительности собственным морфизмом компактных алгебраических многообразий и если E — алгебраическое векторное расслоение над X, то $\mathrm{DET}\,\bar\partial_E$ обладает канонической структурой алгебраического линейного расслоения, совместимой с его голоморфной структурой. (Предупреждаем, что «геометрическое» определение детерминантного расслоения (как в [49] и [31]) и «физическое» (приведенное здесь) различаются «знаком»:

$$\det R\pi_*E\simeq(\mathrm{DET}\,\bar\partial_E)^*.)$$

Понятие детерминантного расслоения дифференцируемого семейства эллиптических операторов появилось в литературе совсем недавно (и как раз в связи с изучением аномалий; см. [4]).

2.3. Метрика Квиллена

Вернемся к обозначениям разд. 2.1.

Пусть слои $\pi^{-1}(s)$ снабжены римановой метрикой, гладко зависящей от s (т. е. вертикальное касательное расслоение $TX|S$ снабжено C^∞-метрикой), и пусть векторные расслоения E и F снабжены C^∞-метриками.

Тогда для всех $s\in S$ вводятся скалярные произведения $(\cdot\,,\cdot)$ на $C^\infty(\pi^{-1}(s), E)$ и $C^\infty(\pi^{-1}(s), F)$, ограничения которых задают скалярные произведения на $\ker P_s$ и на $\operatorname{coker} P_s \simeq \simeq (\operatorname{im} P_s)^\perp$. Эти скалярные произведения определяют (путем тензорного умножения...) скалярное произведение на $\operatorname{DET} P_s$. В явном виде норма $\|\cdot\|_{L^2}$, отвечающая этому скалярному произведению, задается следующей формулой, где $(v_1, \ldots, v_d)$ и $(w_1, \ldots, w_{d'})$ обозначают базисы в $\ker P_s$ и $\operatorname{coker} P_s \simeq (\operatorname{im} P_s)^\perp$:

$$\|(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d)^{-1} \otimes (w_1 \wedge \ldots \wedge w_{d'})\|^2 = \frac{\det((w_i, w_j))_{1 \leqslant i, j \leqslant d'}}{\det((v_r, v_s))_{1 \leqslant r, s \leqslant d}}.$$

Кроме того, корректно определен сопряженный оператор P_s^*.

Вообще говоря, из-за «скачков» размерности $\ker P_s$ при изменении s метрика $\|\cdot\|_{L^2}$ на расслоении $\operatorname{DET} P$ не является ни гладкой, ни даже непрерывной. Однако имеет место следующая

Теорема 2.1 (Квиллен; [44], [12]). *Метрика Квиллена, определяемая на* $\operatorname{DET} P_s$ *формулой*

$$\|\cdot\|_Q = (\det' P_s^* P_s)^{1/2} \|\cdot\|_{L^2}, \tag{2.3.1}$$

является C^∞-метрикой на $\operatorname{DET} P$.

В формуле (2.3.1) $\det'$ означает детерминант, определяемый с помощью дзета-регуляризации (см. § 1.5).

2.4. Пусть F — голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{C}$-аналитическим многообразием. Для любой эрмитовой метрики $\|\cdot\|$ на F существует единственная унитарная связность ∇ на F, совместимая с голоморфной структурой на F (т. е. такая, что компонента ∇ типа $(0, 1)$ совпадает с $\bar\partial_F$). С помощью этой связности и формул Черна — Вейля для характеристических классов можно связать с $(F, \|\cdot\|)$ замкнутые дифференциальные формы, представляющие в когомологиях Де Рама его классы Черна, характер Черна и род Тодда: «формы Черна» $c_i(F, \|\cdot\|)$, «форма характера Черна» $\operatorname{Ch}(F, \|\cdot\|)$ и «форма Тодда» $\operatorname{Td}(F, \|\cdot\|)$.

Когда F — линейное расслоение, кривизна ∇ является $(1,1)$-формой, определяемой локально по формуле

$$R = \bar\partial\partial \log \|s\|^2, \tag{2.4.1}$$

где s обозначает ненулевое голоморфное сечение F, и мы получаем

$$c_1(F, \|\cdot\|) = -\frac{1}{2\pi i} R, \tag{2.4.2}$$

$$\operatorname{Ch}(F, \|\cdot\| = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} c_1(F, \|\cdot\|)^k, \tag{2.4.3}$$

$$\operatorname{Td}(F, \|\cdot\|) = 1 + \frac{1}{2} c_1(F, \|\cdot\|) + \frac{1}{12} c_1(F, \|\cdot\|)^2 + \ldots. \tag{2.4.4}$$

2.5. Локальная теорема Римана — Роха — Гротендика

Если σ — дифференциальная форма, мы обозначаем через $\sigma^{(k)}$ ее компоненту степени k.

Теорема 2.2. *Пусть π: $X \to S$ — голоморфное семейство компактных римановых поверхностей, а E — голоморфное векторное расслоение над X. Пусть $\|\cdot\|_T$ — гладкая эрмитова метрика на комплексном линейном расслоении $T = TX|S$ ($\|\cdot\|_T$ задает C^∞-семейство римановых метрик на слоях π) и $\|\cdot\|_E$ — гладкая эрмитова метрика на E. Пусть $\|\cdot\|_Q$ — метрика Квиллена на $\operatorname{DET} \bar\partial_E$, определенная с помощью этих метрик. Тогда имеет место равенство* дифференциальных форм *на S*:

$$c_1(\operatorname{DET} \bar\partial_E, \|\cdot\|_Q) = -\int_{X|S} \{\operatorname{Ch}(E, \|\cdot\|_E) \operatorname{Td}(T, \|\cdot\|_T)\}^{(4)}. \tag{2.5.1}$$

В этой формуле $\int_{X|S}$ означает интегрирование дифференциальных форм вдоль слоев π.

Когда E — линейное расслоение, эта формула с учетом (2.4.3) и (2.4.4) принимает вид

$$c_1(\operatorname{DET} \bar\partial_E, \|\cdot\|_Q) = -\int_{X|S} \Big[\frac{1}{12} c_1(T, \|\cdot\|)^2 + \frac{1}{2} c_1(T, \|\cdot\|_T) c_1(E, \|\cdot\|_E) + \frac{1}{2} c_1(E, \|\cdot\|_E)^2\Big]. \tag{2.5.2}$$

Когомологический вариант теоремы 2.2, т. е. равенство (2.5.1) с точностью до точных дифференциальных форм, непосредственно следует из теоремы Атьи — Зингера об индексе для семейств. Когда π — алгебраический морфизм комплексных квазипроективных многообразий, а E — алгебраическое векторное расслоение над X, он вытекает также из теоремы Римана — Роха — Гротендика (которая доставляет в действительности более точное равенство, справедливое в рациональной группе Чжоу многообразия S; заметим, что $c_1(\det R\pi_* E) = c_1(R\pi_* E)$).

Формула (2.5.1) была установлена Квилленом ([44]), когда X — произведение базы S на компактную риманову поверхность X_0, а $\pi = \mathrm{pr}_2$: $X_0 \times S \to S$, и Белавиным и Книжником ([7], [8]), когда $E = T^{\otimes n}$. В действительности эти авторы рассматривали специальные метрики.

Бисмю и Фрид доказали утверждение, аналогичное теореме 2.2, для C^∞-семейств операторов Дирака ([12]); их доказательство использует вероятностные методы, развитые Бисмю для доказательства локальной теоремы об индексе для семейств

([11]). Можно доказать теорему 2.2, начиная с их результата, соединенного с формулой конформных аномалий — прямым следствием (1.5.4).

Теоремы, аналогичные теореме 2.2 с X вида $X_0 \times S$, но с X_0 произвольной комплексной размерности, были доказаны Дональдсоном ([17]) и Жийе и Суле ([25]). Последняя работа мотивирована обобщением на высшие размерности «исчисления на арифметических поверхностях», развитого Аракеловым и Фальтингсом. Отметим по этому поводу, что многие обобщения результатов и методов, описанных в этом докладе, тесно связаны с конструкциями «в слоях над ∞» в исчислении Аракелова и Фальтингса на арифметических поверхностях (см. [33], [6], [3], [30]).

2.6. Покажем теперь, как формулы конформных аномалий (1.6.5) и (1.6.6) можно вывести из теоремы 2.2. Это доказательство проясняет связи между различными видами аномалий в 2-мерной теории поля (см. [2]), с одной стороны, и между «действием Лиувилля» (1.6.7) и вторичными классами Ботта и Черна (см. [14] и [25]) — с другой. В нем, в частности, значение 26 критической размерности появляется как отражение коэффициента 1/12 в формуле для рода Тодда (2.4.4): $26/2 = 12 + 1$

Пусть X_0 — компактная риманова поверхность, а $\|\cdot\|_0$ — эрмитова метрика на $T_{\mathbb{C}}X_0$; эта метрика задает эрмитову метрику на $T_{\mathbb{C}}X_0^{\otimes n}$ $(n \in \mathbb{Z})$. С помощью этих метрик строится метрика Квиллена $\|\cdot\|_{Q,0}$ на пространстве $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{TX_0^n}$. Формула конформных аномалий указывает отношение между метриками Квиллена $\|\cdot\|_{Q,0}$ и $\|\cdot\|_{Q,1}$ на этом пространстве, полученными из двух эрмитовых метрик $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ на $T_{\mathbb{C}}X_0$.

Предложение 2.3. ([43], [1]). *Если* $\|\cdot\|_1 = e^f\|\cdot\|_0$, *то*

$$\frac{\|\cdot\|_{Q,1}}{\|\cdot\|_{Q,0}} = \exp\left[\frac{6n(n+1)+1}{12\pi i}\int_{X_0}(fR + \partial f \wedge \bar\partial f)\right], \tag{2.6.1}$$

где R обозначает (1,1)*-форму кривизны голоморфного расслоения TX, наделенного метрикой $\|\cdot\|_0$ (см.* (2.4.1)).

Формулы (1.6.5) и (1.6.6) следуют из (2.6.1) с $n = 0$ и $n = 1$. (Заметим, что L_2-скалярное произведение на $\operatorname{coker}\bar\partial$ не зависит от метрики на TX; см. разд. 1.3.2.)

Если применить теорему 2.2, взяв в качестве E расслоение T^n, снабженное метрикой $\|\cdot\|_E$, полученной тензорным умножением

из $\|\cdot\|_T$, то

$$c_1(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T^n}, \|\cdot\|_Q) = -\frac{6n(n+1)+1}{12}\int_{X|S} c_1(T, \|\cdot\|_T)^2. \tag{2.6.2}$$

Выберем теперь $F \in C^\infty(X_0 \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$ так, чтобы функции $f_s = F(\cdot, s)$ зависели только от $|s|$, $f_0 = 1$, а $f_1 = f$. Предыдущая формула, примененная к тривиальному семейству $S = \mathbb{C}$, $X = X_0 \times \mathbb{C}$, $\pi = \mathrm{pr}_2$ и к метрике $\|\cdot\| = e^F\|\cdot\|_0$ на T, превращается после несложного вычисления в

$$\partial_s\bar\partial_s \log\|\cdot\|_{Q,s} = \partial_s\bar\partial_s\left\{\frac{6n(n+1)+1}{12\pi i}\int_{X_0}(f_sR + \partial f_s \wedge \bar\partial f_s)\right\}, \tag{2.6.3}$$

где $\|\cdot\|_{Q,s}$ — метрика Квиллена на $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T^n}$, полученная с помощью метрики $e^{f_s}\|\cdot\|_0$ на X_0. Так как f_s и $\|\cdot\|_{Q,s}$ зависят только от $|s|$, формула (2.6.3) влечет за собой (2.6.1).

3. МЕРА ПОЛЯКОВА И ИЗОМОРФИЗМ МАМФОРДА

3.1. Пусть π: $X \to S$ — голоморфное семейство компактных римановых поверхностей. Снабдим $T = TX|S$ эрмитовой метрикой и рассмотрим детерминантные расслоения $\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}}$ и $\mathrm{DET}\,\bar\partial_T$, наделенные метриками Квиллена $\|\cdot\|_Q$, построенными по этой метрике на T и тривиальной метрике ($\|1\| = 1$) на тривиальном расслоении $\mathcal{O}$.

Формула (2.6.2) с $n = 0$ и $n = 1$ дает следующее равенство:

Теорема 3.1 (Белавин — Книжник [7], [8]).

$$c_1(\mathrm{DET}\,\bar\partial_T, \|\cdot\|_Q) = 13c_1(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}}, \|\cdot\|_Q).$$

3.2. С другой стороны, если X и S квазипроективны и если π — алгебраический морфизм, то вычислением, аналогичным предыдущему выводу формулы (2.6.2), но, используя теорему Римана — Роха — Гротендика вместо теоремы 2.2, получим, что для некоторого натурального N линейные расслоения $(\mathrm{DET}\,\bar\partial_T)^{\otimes N}$ и $(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}})^{\otimes 13N}$ изоморфны как алгебраические расслоения. Можно установить более точный результат, приняв во внимание определенную «жесткость» пространства модулей $\mathcal{M}_p$.

Теорема 3.2. *Пусть p — целое $\geqslant 2$. Каждому голоморфному семейству π: $X \to S$ связных компактных римановых поверхностей рода p можно сопоставить изоморфизм линейных* *расслоений*

$$M_\pi\colon \operatorname{DET}\bar\partial_{TX|S} \simeq (\operatorname{DET}\bar\partial_{\mathcal{O}})^{\otimes 13},$$

причем так, что

i) *задание разных M_π согласовано с заменой базы; другими словами, в обозначениях* разд. 2.2 *следующая диаграмма линейных голоморфных расслоений над S' коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{DET}\bar\partial_{TX'|S'} & \xrightarrow{M_{\pi'}} & (\operatorname{DET}\bar\partial_{\mathcal{O}_{X'}})^{\otimes 13} \\ \wr\!\downarrow & & \wr\!\downarrow \\ f^*\operatorname{DET}\bar\partial_{TX|S} & \xrightarrow{f^*M_\pi} & f^*(\operatorname{DET}\bar\partial_{\mathcal{O}_X})^{\otimes 13} \end{array}$$

(*в этой диаграмме вертикальные стрелки — изоморфизмы, описанные в разд.* 2.2*i*)).

ii) *Если π — алгебраический морфизм комплексных квазипроективных многообразий, а значит,* $\operatorname{DET}\bar\partial_{TX|S}$ *и* $\operatorname{DET}\bar\partial_{\mathcal{O}_X}$ *обладают структурой алгебраических линейных расслоений над S, то M_π — алгебраический изоморфизм.*

Задание такого семейства $\{M_\pi\}$ мы называем изоморфизмом Мамфорда.

Если $\{M_\pi\}$ и $\{M'_\pi\}$ — два изоморфизма Мамфорда, то существует такое $\lambda \in \mathbb{C}^*$, что $M'_\pi = \lambda M_\pi$ для всех π.

Эта формулировка вытекает из теоремы Мамфорда ([39], теор. 5.10) об алгебраичности версальных деформаций компактных голоморфных кривых и из того, что обратимые регулярные функции на пространствах модулей $\mathcal{M}_p$ постоянны (последнее следует из явного описания $\mathcal{M}_p$, если $p=1$ или 2, и из соображений, использующих компактификацию Сатаке при $p \geqslant 3$; см. доказательство теоремы 3.3).

3.3. Как следствие теоремы 3.1 получается следующий замечательный результат (Бейлинсон, Дринфельд; см. [7], [8]):

Теорема 3.3. *Пусть p — целое $\geqslant 2$, и пусть $\{M_\pi\}$ — изоморфизм Мамфорда для римановых поверхностей рода p.*

Существует такая константа $C \in \mathbb{R}_+^*$, что для любого голоморфного семейства $\pi\colon X \to S$ связных компактных римановых поверхностей рода p и любой эрмитовой метрики $\|\cdot\|_T$ на $T := TX|S$ изоморфизм Мамфорда удовлетворяет тождеству

$$\|M_\pi\xi\|_Q = C\|\xi\|_Q,$$

где через $\|\cdot\|_Q$ обозначена метрика Квиллена, определенная с помощью $\|\cdot\|_T$ (см. § 3.1).

Эскиз доказательства. Из теоремы 3.1 следует, что для любого семейства $\pi\colon X \to S$ и любой метрики $\|\cdot\|_T$ существует такая функция $\varphi \in C^\infty(S, \mathbb{R}_+^*)$, что

$$\|M_\pi\xi\|_Q = \varphi\|\xi\|_Q \quad \text{и} \quad \partial\bar\partial\log\varphi = 0.$$

Формула конформных аномалий (2.6.1) с $n=0$ и $n=1$ и согласованность изоморфизма Мамфорда с заменой базы доказывают, что $\varphi(s)$ зависит лишь от класса $\pi^{-1}(s)$ в $\mathcal{M}_p$.

Если $p \geqslant 3$, отсюда следует, что φ зависит только от p: плюрисубгармоническая функция на $\mathcal{T}_p$, инвариантная относительно Γ_p, постоянна, так как через любые две точки в $\mathcal{M}_p$ проходит полная кривая (см. [27]). Это так в силу следующего факта: пусть $\tilde{\mathcal{M}}_p$ — компактификация $\mathcal{M}_p$, полученная замыканием $\mathcal{M}_p$, вложенного при помощи якобиева отображения в компактификацию Сатаке пространства модулей поляризованных (главным способом) p-мерных абелевых многообразий; тогда $\tilde{\mathcal{M}}_p$ — проективное многообразие, и $\tilde{\mathcal{M}}_p - \mathcal{M}_p$ имеет коразмерность $\geqslant 2$ в $\tilde M_p$.

Когда $p=2$, для завершения доказательства необходимо располагать верхней оценкой на рост φ на бесконечности в $\mathcal{M}_2$. Такую оценку можно получить из выражений для регуляризованных детерминантов в терминах дзета-функции Сельберга (см. § 1.6.4 и [48]).

3.4.1. Заметим, что задание гладкой положительной плотности на $\mathbb{C}$-аналитическом многообразии Z равносильно заданию эрмитовой метрики в линейном расслоении ω_Z голоморфных дифференциальных форм степени $\dim_{\mathbb{C}} Z$; такая метрика определяет плотность μ по локальной формуле

$$\mu = \|s\|^{-2}|s\wedge\bar s|,$$

где s обозначает ненулевое голоморфное сечение ω_Z.

3.4.2. Предположим теперь, что $p>1$, и рассмотрим универсальную кривую Тайхмюллера $\pi\colon \mathcal{C}_p \to \mathcal{T}_p$. Имеют место отождествления

$$I_1\colon \operatorname{DET}\bar\partial_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}_p}} \xrightarrow{\sim} (\Lambda^p\mathbb{E})^*,$$

$$I_2\colon \operatorname{DET}\bar\partial_{T\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{3p-3}T_{\mathbb{C}}\mathcal{T}_p \simeq \omega^*\mathcal{T}_p,$$

где через $\mathbb{E}$ обозначено голоморфное векторное расслоение ранга p над $\mathcal{T}_p$ со слоем $H^0(\pi^{-1}(s), \omega)$ над s, пучок голоморфных сечений которого отождествляется с $R^0\pi_*\omega_{\mathcal{C}_p|\mathcal{T}_p}$. Отождествление I_1 вытекает из того, что $R^0\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}_p}$ канонически тривиально и по двойственности Серра $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathscr{C}_p} \simeq (R^0\pi_*\omega_{\mathscr{C}_p|\mathscr{T}_p})^*$. Отождествление I_2 вытекает из обращения в нуль $R^0\pi_* T_{\mathscr{C}_p|\mathscr{T}_p}$ и изоморфизма Кодаиры — Спенсера.

Изоморфизм Мамфорда $\{M_\pi\}$ задает тогда, благодаря отождествлениям I_1 и I_2, изоморфизм

$$M\colon \omega_{\mathscr{T}_p} \simeq (\wedge^p \mathbf{E})^{\otimes 13}.$$

Расслоение $\mathbf{E}$ наделяется естественной гладкой эрмитовой метрикой, определенной на каждом слое $\mathbf{E}_s = H^0(\pi^{-1}(s), \omega)$ по формуле (1.3.5); она совпадает также с L_2-скалярным произведением, определяемым с помощью произвольной эрмитовой метрики на $T\mathscr{C}_p|\mathscr{T}_p$ и дуальной метрики на $\omega_{\mathscr{C}_p|\mathscr{T}_p}$. Эта эрмитова метрика на $\mathbf{E}$ задает эрмитову метрику $\|\cdot\|$ на $\wedge^p \mathbf{E}$. Явным образом, в обозначениях разд. 1.3.4

$$\|\omega_1(s) \wedge \ldots \wedge \omega_p(s)\|^2 = \det((\omega_i(s), \omega_j(s)))_{1 \leqslant i, j \leqslant p} = \det \operatorname{Im} \Omega(s).$$

Пусть $\|\cdot\|'$ — эрмитова метрика на $(\wedge^p \mathbf{E})^{\otimes 13}$ — «тринадцатая степень» метрики $\|\cdot\|$.

Следующая теорема утверждает, что мера Полякова имеет «алгебраическую» природу.

Теорема 3.4. *Мера Полякова μ_P на $\mathscr{T}_p$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с мерой на $\mathscr{T}_p$, определяемой метрикой на $\omega_{\mathscr{T}_p}$, полученной из метрики $\|\cdot\|'$ на $(\wedge^p \mathbf{E})^{\otimes 13}$ при изоморфизме M.*

Эта теорема — следствие теоремы 3.3 и того обстоятельства, что выражение (1.6.9) для плотности Полякова в точке s на $\mathscr{T}_p$ можно записать в следующей форме $(\sigma \in \omega_{\mathscr{T}_p|s} - \{0\})$:

$$\left[\|\omega_1(s) \wedge \ldots \wedge \omega_p(s)\|^2 \|I_1^{-1}((\omega_1(s) \wedge \ldots \wedge \omega_p(s))^{-1})\|_Q^2\right]^{-13} \times$$
$$\times \|I_2^{-1}(\sigma^{-1})\|_Q^2 |\sigma \wedge \bar{\sigma}|.$$

Связь числа 13 в теореме Римана — Роха — Гротендика, примененной к тривиальному расслоению и относительному касательному расслоению семейства кривых, с критической размерностью $26 = 2 \times 13$, по-видимому, была сначала независимо подмечена Альваресом ([2]) и Маниным ([32]), а затем заново открыта и интерпретирована другими авторами ([7], [15], [13]).

3.6. Пусть $\bar{\mathscr{M}}_p$ — компактификация $\mathscr{M}_p$ стабильными кривыми. Интерпретация меры Полякова посредством изоморфизма Мамфорда позволяет описать ее поведение в окрестности дивизора на бесконечности $\Delta = \bar{\mathscr{M}}_p - \mathscr{M}_p$.

Рассмотрим, простоты ради, стабильную кривую C рода p с единственной двойной точкой и без нетривиальных автоморфизмов. Класс $[C]$ кривой C в $\bar{\mathscr{M}}_p$ — гладкая точка в $\bar{\mathscr{M}}_p$; дивизор Δ в окрестности $[C]$ гладкий, и $[C]$ имеет такую окрестность $\mathscr{U}$ в $\bar{\mathscr{M}}_p$, что отображение $\mathscr{T}_p \to \mathscr{T}_p/\Gamma_p = \mathscr{M}_p$ является накрытием над $\mathscr{U}$ и что существует универсальная стабильная кривая $\pi\colon X \to \mathscr{U}$ над $\mathscr{U}$.

Используя теорему Мамфорда ([39, th. 5.10]) и теорию деформаций стабильных кривых, можно показать, что изоморфизм Мамфорда

$$\omega_{\mathscr{U}-\Delta} \simeq (\wedge^p \pi_* \omega_{X|\mathscr{U}-\Delta})^{\otimes 13}$$

продолжается до изоморфизма

$$\omega_{\mathscr{U}} \simeq (\wedge^p \pi_* \omega_{X|\mathscr{U}})^{\otimes 13} \otimes \mathcal{O}(-2\Delta).$$

Отсюда выводится, что если $(w_1, \ldots, w_{3p-3})$ — локальные координаты в окрестности $[C]$, в которых Δ задается уравнением $w_1 = 0$, то мера Полякова в этих координатах имеет вид ($f, g > 0$ суть C^∞-функции)

$$\mu_P = |w_1|^{-4} f(w_1, \ldots, w_{3p-3}) |dw_1 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dw_{3p-3} \wedge d\bar{w}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{w}_{3p-3}|,$$

если C приводима;

$$\mu_P = \left\{|w_1|^{-4}\left[\log|w_1|^{-1}\right]^{-13} g(w_1, \ldots, w_{3p-3}) +\right.$$
$$\left. + o\left(|w_1|^{-4}[\log|w_1|^{-1}]^{-13}\right)\right\} |dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_{3p-3} \wedge d\bar{w}_1 \wedge \ldots \wedge dw_{3p-3}|,$$

если C неприводима.

Кроме того, можно связать «вычеты» $f(0, w_2, \ldots, w_{3p-3})$ и g с мерами Полякова на пространствах модулей, отвечающих кривым, возникающим при нормализации C («факторизация»).

3.7. Мера Полякова на $\mathscr{T}_2$ и $\mathscr{T}_3$ ([9], [35], [37])

3.7.1. Для любой $\Omega \in \mathscr{H}_p$ и любых $(a, b) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ положим

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(0, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp[\pi i^t(n+a)\Omega(n+a) + 2\pi i^t(n+a)b].$$

Обозначим через $\mathbb{F}$ векторное расслоение над $\mathscr{T}_p$ со слоем $H^0(\pi^{-1}(s), \omega^2)$ над s, пучок голоморфных сечений которого отождествляется с $R^0\pi_*\omega^2_{\mathscr{C}_p|\mathscr{T}_p}$.

3.7.2. *Мера Полякова на* $\mathcal{T}_2$. Имеет место «алгебраический» изоморфизм

$$(3.7.1)\qquad \left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}_2}}\right)^{\otimes 10} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{T}_2}.$$

(В действительности группа Пикара $\mathrm{Pic}(\mathscr{M}_2)$ функтора модулей изоморфна $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ и имеет λ_1 в качестве образующей; см. [39].) Этот изоморфизм можно описать явно с помощью тета-функций. Положим

$$f_2\colon \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C},$$

$$\Omega \longmapsto \left[\prod_{\substack{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2 \in \{0,\,1\}^2\\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\in 2\mathbb{Z}}} \theta\begin{bmatrix}\varepsilon_1/2\\ \varepsilon_2/2\end{bmatrix}(0,\,\Omega)\right].$$

Это $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$-модулярная форма степени 10 на $\mathscr{H}_2$, обращающаяся в нуль только на дивизоре D — орбите $\left\{\begin{pmatrix}\tau_1 & 0\\ 0 & \tau_2\end{pmatrix}\middle|\, \mathrm{Im}\,\tau_1 > 0,\ \mathrm{Im}\,\tau_2>0\right\}$ под действием $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$. Этот дивизор служит дополнением к образу $\mathcal{T}_2$ при отображении периодов $\Omega\colon \mathcal{T}_2 \to \mathscr{H}_2$. Изоморфизм (3.7.1) задается тогда как

$$(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}})^{\otimes 10} \simeq (\Lambda^2\mathbb{E})^{\otimes 10} \to \mathcal{O}_{\mathcal{T}_2},$$
$$f_2(\Omega)\,(\omega_1\wedge\omega_2)^{\otimes 10} \longmapsto 1.$$

С другой стороны, имеет место изоморфизм

$$\left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}_2}}\right)^{\otimes 3} \simeq (\Lambda^2\mathbb{E})^{\otimes 3} \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T\mathscr{C}_2\,|\,\mathcal{T}_2}\right) \simeq \Lambda^3\mathbb{F},$$
$$(\omega_1\wedge\omega_2)^{\otimes 3} \longmapsto \omega_1^2\wedge\omega_1\omega_2\wedge\omega_2^2.$$

Изоморфизм Мамфорда получается тензорным умножением двух предыдущих изоморфизмов:

$$\left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T\mathscr{C}_2\,|\,\mathcal{T}_2}\right) \simeq \Lambda^3\mathbb{F} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{DET}\,\bar\partial)^{\otimes 13} \simeq (\Lambda^2\mathbb{E})^{\otimes 13},$$
$$\omega_1^2\wedge\omega_1\omega_2\wedge\omega_2^2 \longmapsto f_2(\Omega)\,(\omega_1\wedge\omega_2)^{13}.$$

Поскольку дуальный изоморфизм Кодаиры — Спенсера отождествляет $d\Omega_{ij}$ и $\omega_i\omega_j$, находим, что мера Полякова на $\mathcal{T}_2$ пропорциональна

$$(\det \mathrm{Im}\,\Omega)^{-13}\,|f_2(\Omega)|^{-2}\left|\prod_{i\leqslant j} d\Omega_{ij}\wedge\prod_{i\leqslant j} d\bar\Omega_{ij}\right|.$$

3.7.3. *Мера Полякова на* $\mathcal{T}_3$. Линейное расслоение $\left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T\mathscr{C}_3\,|\,\mathcal{T}_3}\right)\otimes\left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}_3}}\right)^{\otimes -4} \simeq \Lambda^6\mathbb{F}\otimes(\Lambda^3\mathbb{E})^{\otimes -4}$ обладает голоморфным

сечением

$$s = \left(\omega_1^2\wedge\omega_2^2\wedge\omega_3^2\wedge\omega_1\omega_2\wedge\omega_2\omega_3\wedge\omega_3\omega_1\right)\otimes(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3)^{-4}.$$

Пусть H — дивизор гиперэллиптических кривых на $\mathcal{T}_3$. Дивизор нулей s совпадает с H.

С другой стороны, отображение

$$f_3\colon \mathscr{H}_3 \to \mathbb{C},$$
$$\Omega \longmapsto \prod_{\substack{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\in\{0,\,1\}^3\\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\in 2\mathbb{Z}}} \theta\begin{bmatrix}\varepsilon_1/2\\ \varepsilon_2/2\end{bmatrix}(0,\,\Omega)$$

— модулярная форма 18 степени, которая в композиции с отображением периодов $\Omega\colon \mathcal{T}_3\to\mathscr{H}_3$ имеет дивизор $2H$ (см. [29]). Следовательно, $s' = f_3\circ\Omega\,(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3)^{18}$ — голоморфное Γ_3-эквивариантное сечение $(\Lambda^3\mathbb{E})^{\otimes 18}$ с дивизором $2H$.

Таким образом, $s'\cdot s^{-2}$ — голоморфное сечение $(\Lambda^3\mathbb{E})^{\otimes 26}\otimes(\Lambda^6\mathbb{F})^{\otimes -2}$, всюду ненулевое и Γ_3-эквивариантное. Получаем, что квадрат изоморфизма Мамфорда описывается как

$$\left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{T\mathscr{C}_3\,|\,\mathcal{T}_3}\right)^{\otimes 2} \simeq (\Lambda^6\mathbb{F})^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{DET}\,\bar\partial_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}_3}}\right)^{\otimes 26} \simeq (\Lambda^3\mathbb{E})^{\otimes 26}$$
$$\left(\omega_1^2\wedge\omega_2^2\wedge\omega_3^2\wedge\omega_1\omega_2\wedge\omega_2\omega_3\wedge\omega_3\omega_1\right)^2 \longmapsto f_3(\Omega)\,(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3)^{26},$$

и, стало быть, мера Полякова на $\mathcal{T}_3$ пропорциональна

$$(\det\mathrm{Im}\,\Omega)^{-1}\,|f_3(\Omega)|^{-1}\left|\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} d\Omega_{ij}\wedge\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} d\bar\Omega_{ij}\right|.$$

Добавим, что Морозов предложил выражение в терминах тета-функций для меры Полякова на $\mathcal{T}_4$, в котором участвует соотношение Шоттки, описывающее расположение образа $\mathcal{T}_4$ в $\mathscr{H}_4$ при отображении периодов ([37]).

Упомянем, наконец, «явное» описание изоморфизма Мамфорда, принадлежащее Бейлинсону и Манину ([6], см. также [33]).

Я благодарен Альваресу-Гомэ, Ж.-Ф. Арви, Т. Жоликёру, Б. Джулиа, Г. Муру, Ф. Нельсону, И. Зингеру, К. Суле и К. Вафа за состоявшиеся обсуждения по теме этого доклада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alvarez O. Theory of strings with boundaries: fluctuation, topology and quantum geometry, Nucl. Phys. B, 216 (1983), 125—184.
2. Alvarez O. Conformal anomalies and the index theorem, UCB Preprint, PhT/85—39.
3. Alvarez-Gaume L., Bost J.-B., Moore G., Nelson Ph., Vafa C. Bosonization in arbitrary genus, Phys. Lett. B, 178 (1986), 41—47.

4. Atiyah M. F., Singer I. M. Dirac operators coupled to vector potentials, Proc. Nat. Acad. Sci., 81, 1984, 2597.
5. Баранов М. А., Шварц А. С. Многопетлевой вклад в теорию струн. — Письма ЖЭТФ, 1985, т. 42, с. 340—342.
6. Beilinson A. A., Manin Yu. I. The Mumford form and the Polyakov measure in string theory, Comm. Math. Physics, 107 (1986), 359—376.
7. Belavin A. A., Knizhnik V. G. Algebraic geometry and geometry of quantum strings, Phys. Lett. B, 168 (1986), 201—211.
8. Белавин А. А., Книжник В. Г. Комплексная геометрия и теория квантовых струн. — ЖЭТФ, 1986, т. 91 № 2, с. 364—390.
9. Belavin A. A., Knizhnik V. G., Morozov A., Perelomov A. Two- and three-loop amplitudes in the bosonic string theory. Phys. Lett. B, 177 (1986) 324—328.
10. Bers L. Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations. Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 5 (1981), 131—172.
11. Bismut J.-M. The Atiyah—Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent Math., 83 (1986), 91—151.
12. Bismut J.-M., Freed D. S. The analysis of elliptic families I, II. Comm. Math. Phys., 106 (1986), 159—176, 107, 103—163.
13. Bost J.-B., Jolicoeur Th. A holomorphy property and the critical dimension in string theory from an index theorem. Nucl. Phys. B, 174 (1986), 273—276.
14. Bott R., Chern S. S. Hermitian vector bundles and equidistribution of the zeroes of their holomorphic cross sections, Acta Math., 114 (1968), 71—112.
15. Cantenacci R., Cornalba M., Martinelli M., Reina C. Algebraic geometry and path integrals for closed strings, Phys. Lett. B, 172 (1986), 328—332.
16. D'Hoker E., Phong D. H. Multiloop amplitudes for the bosonic Polyakov string, Nucl. Phys. B, 269 (1985), 205—234.
17. Donaldson S. K. Infinite determinants, stable bundles and curvature, Duke Math. J., 54, № 1, (1987), 231—247.
18. Fay J. Analytic torsion and Prym differentials. Riemann surfaces and related topics, Proc. of the 1978 Stony Brook Conference, Princeton Univ. Press, 1980, 107—122.
19. Freed D. S. Determinants, torsion and strings, Comm. Math. Phys., 107 (1986), 483—513.
20. Freed D. S. Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds, Invent. Math., 84 (1986), 523—540.
21. Friedan D. Introduction to Polyakov's string theory, In: Recent advances in field theory and statistical mechanics, Les Houches, 1982. Ed.: Zuber J.-B., Stora R., North Holland, 1984, 839—867.
22. Friedan D., Shenker S. The integrable analytic geometry of quantum strings Phys. Lett. B, 175, 1986, 287—296.
23. Gava E., Jenco R., Jayaraman T., Ramachandaran R. Multiloop divergences in the closed bosonic string theory, Trieste, 1985 (Preprint).
24. Gilkey P. B. Invariance theory, the heat equation and the Atiyah—Singer index theorem, Welmington: Publish or Perish, 1984.
25. Gillet H., Soulé Ch. Direct images of hermitian holomorphic bundles, Bull. Amer. Math. Soc., 15 (1986), 209—212.
26. Harer J. The second homology group of the mapping class group of an oriented surface. Invent Math., 72 (1983), 221—239.
27. Harris J. Recent work on $\mathcal{M}_g$, In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warzawa, North Holland, 1984, v. 1, 719—726.
28. Hawking S. W. Zeta function regularization of path integrals in curved space-time, Comm. Math. Phys., 55 (1977), 133—148.
29. Igusa J. I. Modular forms and projective invariants, Amer. Journ. of Math., 89 (1967), 817—855.

30. Knizhnik V. G. Analytic fields on Riemann surfaces, Phys. Lett. B, 180 (1986), 247—254.
31. Knudsen F. F., Mumford D. The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on «det» and «Div». Math. Scand., 39 (1976), 19—55.
32. Манин Ю. И. Критические размерности струнных теорий и дуализирующий пучок на пространстве модулей (супер)кривых. — Функцион. анализ и его прил., 1986, т. 20, вып. 3, с. 88—89.
33. Манин Ю. И. Статистическая сумма струны Полякова может быть выражена через тэта-функции. — Письма ЖЭТФ, 1986, т. 43, с. 161—163.
34. Manin Yu. I. Quantum strings and algebraic curves, In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, 1986.
35. Moore G. Modular forms and two-loop string physics. Phys. Lett. B, 176 (1986), 369—379.
36. Moore G., Nelson P. Measure for moduli, Nucl. Phys. B, 266, (1986), 58—74.
37. Morozov A. Explicit formulae for one, two, three and four loop string amplitudes, Preprint ITEP, 86—88.
38. Mumford D. Abelian quotients of the Teichmüller modular group. Journ. L'Analyse Mathématique, 18 (1967), 227—244.
39. Mumford D. Stability of projective varieties. L'Enseignement Mathématique, 23 (1977), 39—110.
40. Neveu A. Dual resonance models and strings in QCD. In: Recent advances in field theory and statistical mechanics, Les Houches 1982. Ed.: Zuber J.-B., Stora R., North Holland, 1984. 757—837.
41. Polchinski J. Evaluation of the one string path integral. Comm. Math. Phys. 104 (1986), 34—47.
42. Polyakov A. M. Quantum geometry of bosonic strings. Phys. Lett. B, 103 (1981), 207—210.
43. Polyakov A. M. Quantum geometry of fermionic strings. Phys. Lett B, 103 (1981). 211—213.
44. Квиллен Д. Детерминанты операторов Коши—Римана на римановой поверхности. — Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 1, с. 37—41.
45. Ray D., Singer I. M. R-torsion and the laplacian on Riemannian manifolds. Adv. in Math., 7 (1971), 145—210.
46. Seeley R. T. Complex powers of an elliptic operator Proc. Symp. Pure Math. AMS, 10 (1967), 288—307.
47. Weil A. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. — Springer-Verlag, 1976, [Имеется перевод: Вейль А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. — М.: Мир, 1980.]
48. Wolpert S. Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function on the space of Riemann surfaces. Maryland, 1986 (Preprint).
49. Séminaire de géométrie algebraique 6. Lect. Notes in Math., 225, Springer-Verlag, 1971.
50. Dual theory, Physics Reports reprint book. Ser. I, Ed.: Jacob M., North Holland, 1974.
51. Vertex operators in mathematics and physics, Ed.: Lepowsky J., Mandelstam S., Singer I. M. MSRI Publications 3, Springer-Verlag, 1984.
52. Superstrings, The first 15 years of superstring theory. Ed: Schwarz J. H., World Scientific, 1985.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

(Составитель *А. А. Воронов*)

Изложение дальнейшего развития физики, связанной с затронутыми здесь вопросами, заняло бы объем по меньшей мере одного доклада на семинаре Бурбаки (в частности, см. доклад К. Гавендзского [1*]), поэтому мы коснемся только некоторых математических вопросов. Упомянутая в докладе Ж.-Б. Боста локальная теорема Римана—Роха—Гротендика является с современной точки зрения лишь «метрической стороной» теоремы Римана—Роха—Делиня [2*], утверждающей, что в условиях разд. 2.5 и 3.1 при $rk\,E = 1$ имеет место каноническая изометрия

$$(\det R\pi_* E)^{\otimes 2} \otimes (\det R\pi_* \mathcal{O})^{\otimes -2} = \langle E, E \otimes T_{X|S} \rangle$$

эрмитовых линейных расслоений на S, где эрмитова структура в левой части получена перемножением метрик Квиллена, а $\langle , \rangle$ в правой части есть спаривание Вейля—Делиня ([2*], [6]), ставящее в соответствие паре эрмитовых линейных расслоений на X эрмитово линейное расслоение на S с метрикой типа Аракелова—Делиня. Существуют также другие локальные варианты теоремы Римана—Роха—Гротендика, основанные на изучении действия (в духе [32], [3*], [4*]) вертикальных векторных полей семейства π на базе S — см. работы [4*], [5*] для семейства римановых поверхностей и [6*] для семейства комплексных многообразий произвольной размерности. Обобщение теоремы 2.2 на последний случай было получено Ж. Бисмю, А. Жийе и К. Суле [7*].

1*. Gawedzki K. Conformal field theory, Seminaire Bourbaki., 1988. 41e année. n° 704.
2*. Deligne P. Le determinant de la cohomologie, Contemp. Math., 67 (1987), 93—177.
3*. Концевич М. Л., Алгебра Вирасоро и пространства Тейхмюллера. — Функцион. анализ и его прил., 1987, т. 21, вып. 2, с. 78—79.
4*. Beilinson A. A., Schechtman V. V. Determinant bundles and Virasoro algebras. Commun. Math. Phys. 118 (1988), 651—701.
5*. Albarello E., DeConcini C., Kac V. G., Procesi C. Moduli spaces of curves and representation theory. Commun. Math. Phys. 117 (1988), 1—35.
6*. Feigin B. L., Tsygan B. L. Riemann — Roch theorem and Lie algebra cohomology I, Preprint, Srni, 1988, 2nd Winter School «Geometry and Physics».
7*. Bismut J., Gillet H., Soule C. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, I, II, III, Commun. Math. Phys., 115 (1988), no. 1, 2, 49—78, 79—126, 301—351.

УРАВНЕНИЯ ЯНГА — МИЛЛСА И ТОПОЛОГИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ (по Дональдсону)[1]

Н. Дж. Хитчин

§ 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

(1.1) Теорема (Дональдсон [8]). *Пусть X — компактное гладкое односвязное ориентированное четырехмерное многообразие, такое, что форма пересечения Q на группе когомологий $H^2(X, \mathbb{Z})$ положительно определена. Тогда существует целочисленный базис группы $H^2(X, \mathbb{Z})$, в котором форма Q записывается в виде*

$$Q(u, u) = u_1^2 + \ldots + u_r^2.$$

Этот результат следует сопоставить с такой теоремой:

(1.2) Теорема (Фридман [9]). *Пусть Q — произвольная унимодулярная квадратичная форма над $\mathbb{Z}$. Тогда существует компактное односвязное топологическое четырехмерное многообразие X, для которого форма пересечения на двумерных когомологиях $H^2(X, \mathbb{Z})$ эквивалентна форме Q.*

Поскольку имеется достаточно много неэквивалентных знакоопределенных унимодулярных форм (см. [17]), ясно, что теорема Дональдсона накладывает жесткие ограничения на топологию гладких четырехмерных многообразий.

(1.3) *Доказательство теоремы* (1.1). Пусть $r = \operatorname{rank} H^2(X, \mathbb{Z}$ и $2n = \#\{u \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid Q(u, u) = 1\}$. Доказательство состоит в построении ориентированного кобордизма между многообразием X и суммой n экземпляров комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ (это делается в § 3—7). Предположим, что на p экземплярах $\mathbb{C}P^2$ ориентация индуцируется комплексной структурой, а остальные $q = n - p$ наделены противоположной ориентацией. Тогда для завершения доказательства рассуждаем следующим образом:

(i) Поскольку сигнатура инвариантна при кобордизмах, имеем

$$r = \operatorname{Sign} X = (p - q) \operatorname{Sign} \mathbb{C}P^2 = p - q \leqslant n.$$

---

[1]) Hitchin Nigel J. The Yang — Mills equations and the topology of 4-manifolds [after Simon K. Donaldson]. — Séminaire Bourbaki; 35e année, 1982/83, n° 606, Astérisque 105—106, 1983, p. 167—178.

(ii) Пусть $\{\pm x_1, \ldots, \pm x_n\} = \{u \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid Q(u, u) = 1\}$. Тогда $Q(x_i, x_j) \in \mathbb{Z}$, но, согласно неравенству Коши — Шварца, $|Q(x_i, x_j)| < 1$ при $i \neq j$. Следовательно, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — ортонормированная система элементов группы $H^2(X, \mathbb{Z})$; в частности, $n \leqslant r$.

(iii) Из (i) и (ii) следует, что $n = r$ и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — ортонормированный базис группы вещественных когомологий $H^2(X, \mathbb{R})$. Далее, если $u \in H^2(X, \mathbb{Z})$, то $u = \sum_{i=1}^{n} Q(u, x_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$, где $u_i \in \mathbb{Z}$, так что система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ на самом деле образует ортонормированный базис целочисленных когомологий $H^2(X, \mathbb{Z})$. В этом базисе $Q(u, u) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

§ 2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

(2.1) Пусть X — четырехмерное ориентированное риманово многообразие. Внешняя 2-форма $\alpha \in \Omega^2$ называется *автодуальной* (соответственно *антиавтодуальной*), если $\alpha = *\alpha$ (соответственно $\alpha = -*\alpha$), где $*\colon \Omega^2 \to \Omega^2$ — оператор Ходжа.

Пусть G — компактная группа Ли и P — главное G-расслоение над X. Связности A на расслоении P сопоставляется ее кривизна $F(A) \in \Omega^2(\mathfrak{g})$, где через $\mathfrak{g}$ обозначено векторное расслоение, ассоциированное с P посредством присоединенного представления. Для любого векторного расслоения V, ассоциированного с P, связность A определяет дифференциальный оператор $d_A\colon \Omega^p(V) \to \Omega^{p+1}(V)$. Метрика на X определяет формально сопряженный оператор $d_A^*\colon \Omega^{p+1}(V) \to \Omega^p(V)$. Тождество $d_A F(A) = 0$, справедливое для всех связностей, называется *тождеством Бьянки. Уравнения Янга — Миллса* записываются в виде одного соотношения $d_A^* F(A) = 0$.

Связность A на главном расслоении P называется *автодуальной*, если $F(A) = *F(A)$. В этом случае $d_A^* F(A) = * d_A * F(A) = * d_A F(A) = 0$ в силу тождества Бьянки, так что автодуальная связность автоматически удовлетворяет уравнениям Янга — Миллса:

Уравнения Янга — Миллса описывают критические точки функционала (или *действия*) Янга — Миллса:

$$\| F(A) \|_{L^2}^2 = \int_X | F(A) |^2 \, d\mu.$$

В случае компактного многообразия X автодуальные связности доставляют абсолютный минимум действия. Если $G = \mathrm{SU}(2)$, то, как следует из теоремы Черна — Вейля, минимальное значение равно $-8\pi^2 c_2(P)$, где $c_2(P)$ обозначает второй класс Черна ассоциированного с P векторного расслоения ранга 2.

Функционал Янга — Миллса и уравнения Янга — Миллса инвариантны относительно a) конформных преобразований метрики X и b) автоморфизмов главного расслоения P (так называемых калибровочных преобразований).

(2.2) Первоначально развитие математической теории автодуальных связностей, вызванное повышенным интересом со стороны физиков-теоретиков, было сосредоточено на случае $X = S^4$. В этом случае оказалось возможным с использованием твисторного подхода Пенроуза — Уорда [6] переформулировать проблему в терминах голоморфных векторных расслоений на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$.

В недавнее время началось изучение уравнений автодуальности на более общих четырехмерных многообразиях. Три следующих фактора дали импульс этому направлению:

(2.3) Если X — кэлерово многообразие, то пространство антиавтодуальных 2-форм Ω_-^2 совпадает с пространством примитивных 2-форм типа $(1, 1)$: $\Omega_-^2 = \Omega_0^{1,1}$. Отсюда следует, что векторное расслоение с антиавтодуальной связностью автоматически обладает голоморфной структурой (см. [3]) и, более того, стабильно в смысле Мамфорда и Такемото (см. [8], [11]). Обратные утверждения высказывались в виде гипотез; в ряде частных случаев они доказаны ([13], [8]).

(2.4) Прогрессу теории автодуальных связностей способствовали фундаментальные результаты Уленбек ([20], [21]). Одним из них является теорема об устранимой особенности:

Если A — связность с конечным действием на тривиальном $\mathrm{SU}(2)$-расслоении над проколотым шаром $B^4 \setminus \{0\}$, автодуальная относительно некоторой гладкой римановой метрики на B^4, то существует автоморфизм расслоения $g\colon B^4 \setminus \{0\} \to \mathrm{SU}(2)$, такой, что связность $g(A)$ имеет гладкое продолжение на весь шар B^4.

(2.5) Существование автодуальных связностей в очень общих предположениях гарантируется теоремой Таубса [19]:

Пусть X — четырехмерное компактное ориентированное риманово многообразие с положительно определенной формой пересечения Q, и пусть P — главное $\mathrm{SU}(2)$-расслоение над X с

$c_2(P) \leqslant 0$. *Тогда P допускает неприводимую автодуальную связность.*

Конструкция Таубса опирается на теорему о неявной функции, использующую L^p-оценки на кривизну. Следует заметить, что антиавтодуальные гармонические 2-формы могут быть препятствием к существованию автодуальных связностей, как видно из рассмотрения проективной плоскости $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ с противоположной ориентацией. На $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ нет стабильных расслоений ранга 2 с $c_2(P)=1$, и, следовательно, по п. (2.3), нет и антиавтодуальных связностей. Ситуация теоремы Таубса является отправной точкой для теоремы Дональдсона.

(2.6) Опишем пример автодуальной связности. Возьмем $X=\mathbb{R}^4$ и $G=\mathrm{SU}(2)$. Пусть x обозначает кватернионную координату в $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$. Если интерпретировать элементы из $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ как преобразования группы $\mathrm{SU}(2)$, то одноинстантонное [7] решение уравнений автодуальности можно записать в виде

$$A_\lambda = \mathrm{Im}\left(\frac{x\,d\bar{x}}{\lambda^2+|x|^2}\right).$$

Имеем

$$F(A_\lambda) = \frac{\lambda^2\,dx\wedge d\bar{x}}{\lambda^2+|x|^2}, \quad \|F(A_\lambda)\|^2_{L^2} = 8\pi^2.$$

(2.7) Предложение. *Пусть A — автодуальная $\mathrm{SU}(2)$-связность на $\mathbb{R}^4$ с действием $8\pi^2$. Тогда, с точностью до калибровочного преобразования и сдвига в $\mathbb{R}^4$, связность A совпадает с A_λ для некоторого значения $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. В силу конформной инвариантности стереографическая проекция позволяет рассматривать A как связность на $S^4 \setminus \{x\}$. По теореме об устранимой особенности эта связность допускает продолжение до связности на расслоении $P \to S^4$. Осталось сослаться на любую из работ [3] (§ 9), [2] или [6].

§ 3. ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ

(3.1) В доказательстве теоремы (1.1) кобордизм моделируется на пространстве модулей автодуальных связностей, к описанию структуры которого мы теперь переходим.

Пусть X такое же, как и в теореме (1.1). Будем считать, что X снабжено римановой метрикой. Пусть P — главное $\mathrm{SU}(2)$-расслоение на X с $c_2(P)=-1$. Используя ковариантную производную, связанную с произвольной гладкой связностью A_0 на P, можно определить пространства Соболева $L^p_q(V)$, состоящие из

сечений произвольного ассоциированного векторного расслоения V.

Обозначим через $\mathscr{A}$ аффинное пространство связностей на P, отличающихся от A_0 на элемент из $L^2_3(\Omega^1(\mathfrak{g}))$, и пусть $\mathscr{G}$ обозначает группу L^2_4-сечений ассоциированного расслоения $P\times_{\mathrm{Ad}}G$ ($\subset \mathrm{End}\,V$ для некоторого точного представления). Тогда $\mathscr{G}$ является банаховой группой Ли калибровочных преобразований, действующей гладким образом на $\mathscr{A}$ по правилу $g(A)=A-(d_Ag)g^{-1}$. Пусть $\mathscr{B}$ обозначает факторпространство по действию калибровочной группы, $p\colon \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ — естественную проекцию и $p(A)=[A]$.

(3.2) Напомним, что связность на P называется *приводимой*, если ее группа голономии является собственной подгруппой в $\mathrm{SU}(2)$. Так как X односвязно и P топологически нетривиально, редукция возможна только к подгруппе $\mathrm{U}(1)\subset\mathrm{SU}(2)$. Пусть $\Gamma_A \subset \mathscr{G}$ обозначает подгруппу ковариантно постоянных сечений относительно связности A. Тогда связность A приводима в том и только том случае, если $\Gamma_A \cong \mathrm{U}(1)$. Классы эквивалентности неприводимых связностей образуют открытое подмножество $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}$.

(3.3) Предложение. (i) *$\mathscr{B}$ — хаусдорфово пространство в фактортопологии.*

(ii) *$\mathscr{B}^*$ — банахово многообразие, картами которого служат срезы действия калибровочной группы $\mathscr{G}$ вида*

$$T_{A,\varepsilon} = \{A+a \mid d_A^* a = 0,\ \|a\|_{L^2_3} < \varepsilon\}.$$

(iii) *$p\colon p^{-1}(\mathscr{B}^*)\to\mathscr{B}^*$ — главное $\mathscr{G}/\{\pm 1\}$-расслоение со связностью, задаваемой определенными выше срезами.*

(iv) *Если связность A приводима, группа Γ_A действует на $T_{A,\varepsilon}$ и отображение $T_{A,\varepsilon}/\Gamma_A \to \mathscr{B}$ является гомеоморфизмом на окрестность точки $[A]\in\mathscr{B}$, гладким вне множества неподвижных точек.*

Доказательство получается стандартными методами (см. [3], [12], [14]), использующими теоремы об обратной и неявной функциях в банаховых пространствах.

(3.4) Пусть $\mathscr{M}\subset\mathscr{B}$ — подпространство классов эквивалентности автодуальных связностей на P. Будем называть $\mathscr{M}$ пространством модулей. Если связность $A\in\mathscr{A}$ редуцируется к связности на главном $\mathrm{U}(1)$-расслоении $Q\subset P$, то ее класс эквивалентности, с учетом односвязности X, однозначно определяется кривизной $F(A)\in\Omega^2$. Если связность A автодуальна, то кривизна

$F(A)$ является автодуальной и, следовательно, гармонической 2-формой. Как следует из теории Ходжа, $F(A)$ в этом случае однозначно определяется своим классом когомологий $2\pi i c_1(Q)$. Редукция к $U(1)$ корректно определена по модулю группы Вейля, так что класс $[A] \in \mathscr{M}$ зависит только от $\pm c_1(Q)$. Поскольку $c_2(P) = -c_1(Q)^2 = -1$, в $\mathscr{M}$ имеется n выделенных точек, представляющих приводимые автодуальные связности, где n имеет тот же смысл, что и в п. (1.3): $2n = \#\{u \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid Q(u, u) = 1\}$. Из п. (2.5) следует, что в $\mathscr{M}$ имеются также неприводимые связности.

(3.5) Автодуальная связность A на P определяет эллиптический комплекс [3]

$$\Omega^0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_A^-} \Omega^2_-(\mathfrak{g}),$$

где d_A^- обозначает проекцию d_A на антиавтодуальные 2-формы. Пусть H^p_A $(0 \leqslant p \leqslant 2)$ — соответствующие гармонические пространства. Тогда по теореме Атьи — Зингера об индексе (см. [3]) имеем

$$\sum_{p=0}^{2} (-1)^p \dim H^p_A = 8|c_2(P)| - \frac{3}{2}(\chi(X) - \operatorname{Sign}(X)) = 5.$$

(3.6) Предложение. *Пусть A — автодуальная связность на P, и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда существует окрестность U нуля в H^1_A, $0 \in U \subset H^1_A$, и гладкое отображение $\varphi\colon U \to H^2_A$, такое, что:*

(i) *если связность A неприводима, окрестность класса $[A] \in \mathscr{M}$ диффеоморфна $\varphi^{-1}(0) \subset H^1_A$;*

(ii) *если связность A приводима, окрестность класса $[A] \in \mathscr{M}$ диффеоморфна $\varphi^{-1}(0)/\Gamma_A$.*

Доказательство. Связность $A + a$ автодуальна тогда и только тогда, когда

$$\Phi(A + a) = F_-(A + a) = d_A^-(a) = \frac{1}{2}[a, a] = 0 \in L^2_2(\Omega^2_-(\mathfrak{g})).$$

При ограничении на срез $T_{A,\varepsilon}$ производная $D\Phi_A$ отображения Φ в точке A дает фредгольмов оператор $d_A^-\colon \ker d_A^* (\subset L^2_3(\Omega^1(\mathfrak{g}))) \to L^2_2(\Omega^2_-(\mathfrak{g}))$, следовательно, Φ само фредгольмово ([1], [18]). После применения локального диффеоморфизма Φ может быть представлено в виде $\Phi(x) = (D\Phi_A)x + \varphi(x)$. Метод доказательства аналогичен методам, применяемым в теории модулей комплексных структур [10].

(3.7) Из (3.5) и (3.6) следует, что если связность A неприводима и $H^2_A = 0$, то $\mathscr{M}$ — гладкое пятимерное многообразие в окрестности точки $[A]$. Имеется частный случай, когда это верно для всех неприводимых связностей A. Это случай, когда введенная на X метрика автодуальна с положительной скалярной кривизной (см. [3]). Заметим, что если связность A приводима, то Γ_A действует на H^1_A комплексным умножением (напомним, что $b_1(X) = 0$). Таким образом, если $H^2_A = 0$, то по теореме об индексе с учетом условия $\dim H^0_A = \dim \Gamma_A = 1$, получаем изоморфизм $H^1_A/\Gamma_A \cong \mathbb{C}^3/S^1$.

§ 4. КЛЮЧЕВОЙ РЕЗУЛЬТАТ

(4.1) Важным для понимания глобальной структуры пространства модулей является следующее утверждение (см. также [15]):

(4.2) Предложение. *Пусть $\tilde{A}_i \in \mathscr{A}$ — последовательность автодуальных связностей на P. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, для которой выполняется одно из следующих двух условий:*

(i) *Связности $\tilde{A}_i$ можно заменить на калибровочно эквивалентные связности $A_i \in \mathscr{A}$, сходящиеся в C^∞-топологии к некоторой связности A_∞ на P, так что для классов калибровочной эквивалентности имеем сходимость $[\tilde{A}_i] \to [A_\infty] \in \mathscr{M}$.*

(ii) *Существуют точка $x \in X$ и тривиализации ρ_i расслоения $P|K$ на дополнении K произвольного геодезического шара с центром в x, такие, что $\rho_i^* \tilde{A}_i \to \mathfrak{d}$ (тривиальная плоская связность) в $C^\infty(K)$.*

Доказательство. Нам понадобятся две леммы.

(4.3) Лемма. *Пусть даны константы $L, C > 0$, и пусть $\{f_i\}$ — последовательность интегрируемых функций на X, причем $f_i \geqslant 0$ и $\int_X f_i \, d\mu \leqslant L$. Тогда существуют подпоследовательность, конечное множество точек $\{x_1, \ldots, x_l\} \subset X$ и счетное множество $\{B_\alpha\}$ геодезических шаров в X, такие, что шары половинного радиуса покрывают $X \setminus \{x_1, \ldots, x_l\}$ и $\limsup \int_{B_\alpha} f_i \, d\mu < C$ для любого α.*

Доказательство элементарно: точки x_i выделяются тем свойством, что каждая из них не может быть включена в шар B, для которого $\limsup \int_B f_i \, d\mu \leqslant \frac{C}{2}$.

(4.4) Лемма. *Пусть h_i — последовательность метрик на B^4, достаточно близкая в евклидовой метрике и сходящаяся к какой-то метрике h_∞ в топологии $C^\infty(B^4)$. Пусть $\tilde{A}_i$ — последовательность связностей на тривиальном расслоении над B^4, и каждая связность A_i автодуальна относительно метрики h_i. Тогда существует такая константа C (не зависящая от h_i и A_i), что если $\int_{B^4} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu < C$, то найдется последовательность A_i, состоящая из связностей, калибровочно эквивалентных членам некоторой подпоследовательности связностей A_i, и сходящаяся в $C^\infty\left(\frac{1}{2}\bar{B}^4\right)$ к связности A_∞, автодуальной относительно метрики h_∞.*

Доказательство следует из теоремы (1.3) работы [21].

(4.5) Чтобы получить (4.2), сначала рассмотрим геодезическую систему координат χ на геодезическом шаре $B \subset X$ радиуса r, т. е. диффеоморфизм χ: $B_r^4 \to B$ из евклидова шара радиуса r на B. Перенося метрику h на единичный евклидов шар посредством диффеоморфизма χ и растяжения, получим метрику

$$h_r = \chi^* h(rx) = r^2 (\delta_{ij} + r^2 O(|y|^2))\, dy_i\, dy_j.$$

Выберем радиус r настолько малым, чтобы метрика $r^{-2}h_r$ на B^4 удовлетворяла условию близости к евклидовой метрике, как в формулировке леммы (4.4). В силу конформной инвариантности каждая из связностей $\tilde{A}_i$ автодуальна относительно h_r.

Теперь в лемме (4.3) возьмем константу C из (4.4); положим $f_i = |F(\tilde{A}_i)|^2$ и $L = 8\pi^2$. Тогда по лемме (4.4) на каждом шаре $\frac{1}{2}\bar{B}_\alpha$ некоторая подпоследовательность (после применения калибровочных преобразований) имеет предел $A_\infty(\alpha)$. Переходя к диагональной подпоследовательности, можно добиться сходимости одновременно для всех α.

Теперь заметим, что возникающие в этом рассуждении калибровочные преобразования не согласованы между собой для разных α. Поэтому в локальных координатах имеем матрицы связностей $A_i(\alpha) \to A_\infty(\alpha)$, сходящиеся в $C^\infty\left(\frac{1}{2} B_\alpha\right)$, и функции перехода $g_i(\alpha, \beta)$: $\frac{1}{2} B_\alpha \cap \frac{1}{2} B_\beta \to SU(2)$, такие, что

(4.6) $$A_i(\alpha) = -dg_i(\alpha, \beta)\, g_i(\alpha, \beta)^{-1} + g_i(\alpha, \beta)\, A_i(\beta)\, g_i(\alpha, \beta)^{-1}.$$

Из компактности $SU(2)$ следует равномерная ограниченность последовательности dg_i в (4.6), из которой вытекает существование равномерно сходящейся подпоследовательности. Повторное применение (4.6) дает сходимость в классе C^∞, а выбор диагональной подпоследовательности позволяет получить сходимость одновременно для всех пар (α, β):

$$(A_i(\alpha),\ g_i(\alpha, \beta)) \to (A_\infty(\alpha),\ g_\infty(\alpha, \beta)).$$

Эти данные определяют автодуальную связность на расслоении Q над $X \setminus \{x_1, \ldots, x_l\}$. Далее, если $K \subset X \setminus \{x_1, \ldots, x_l\}$ — компакт, то индукцией по числу шаров $\frac{1}{2} B_\alpha$, покрывающих K (см. [21], п. 3), можно получить изоморфизмы ρ_i: $Q|K \to P|K$, такие, что $\rho_i^* A_i \to A_\infty$ в $C^\infty(K)$.

(4.7) Пусть B'_j — малый проколотый шар с центром в точке x_j $(1 \leqslant j \leqslant l)$. Поскольку $\int_{B'_j} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu \leqslant 8\pi^2$, по лемме Фату имеем $\int_{B'_j} |F(A_\infty)|^2 d\mu \leqslant 8\pi^2$. Следовательно, по теореме об устранимой особенности (см. п. (2.4)) связность A_∞ и расслоение Q продолжаются на все X. По определению набора точек x_j имеем $\lim \int_{B'_j} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu > C/2$ для любого шара B'_j. Следовательно, если шар B'_j достаточно мал, получаем

$$\int_{B'_j} |F(A_\infty)|^2 d\mu < \lim \int_{B'_j} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu.$$

(4.8) С другой стороны, поскольку все рассматриваемые связности автодуальны, подынтегральные выражения в последнем неравенстве совпадают с формами Черна. Следовательно, интегралы можно вычислить по модулю $8\pi^2\mathbb{Z}$, заменив их на интегралы по границе от форм Черна — Саймонса. Из равномерной сходимости на границе ∂B_j получаем

$$\int_{B'_j} |F(A_\infty)|^2 d\mu \equiv \lim \int_{B'_j} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu \mod 8\pi^2\mathbb{Z}.$$

(4.9) Теперь, учитывая неравенства $\int_{B'_j} |F(A_\infty)|^2 d\mu \geqslant 0$ и

$\int\limits_{B'_l} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu \leqslant 8\pi^2$, из пп. (4.7), (4.8) получаем, что возможны лишь два случая:

(i) $l=0$ или

(ii) $\lim \int\limits_{B'_l} |F(\tilde{A}_i)|^2 d\mu = 8\pi^2$ и $\int\limits_X |F(A_\infty)|^2 d\mu < 8\pi^2$,

откуда следует, что Q тривиально и связность A_∞ плоская. Предложение (4.2) доказано.

(4.10) Из предложения видно, что автодуальная связность на P может вырождаться лишь за счет сосредоточения кривизны в окрестности одной точки. Такой тип вырождения можно проиллюстрировать примером инстантона A_λ в п. (2.6) при $\lambda \to 0$.

§ 5. ГРАНИЦА ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ $\mathcal{M}$

(5.1) Пусть β: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кочкообразная функция, аппроксимирующая индикатор отрезка $\chi_{[-1;\,1]}$ и мажорируемая им. Введем функцию

$$R_A(x, s) = \int\limits_X \beta(d(x, y)/s)\, |F(A)|^2 d\mu_y,$$

где $d(x, y)$ обозначает геодезическое расстояние на X, и положим

(5.2) $$\lambda(A) = K^{-1} \min\{s \mid \exists x\colon\ R_A(x, s) = 4\pi^2\},$$

где нормировочная константа K подбирается таким образом, чтобы для инстантона A_1 выполнялось равенство $\lambda(A_1) = 1$. Дональдсон использует эту удобную, хотя и взятую с потолка функцию как меру концентрации кривизны: если β заменить индикатором $\chi_{[-1;\,1]}$, то $\lambda(A)$ окажется равным радиусу наименьшего шара, содержащего половину действия. Во всяком случае шар радиуса $\lambda(A)$ содержит больше половины действия, и поэтому по предложению (4.2) $\lambda(A_i) \to 0$ для любой последовательности $[A_i] \in \mathcal{M}$, не содержащей сходящихся подпоследовательностей. Таким образом, $\lambda(A)$ может служить мерой удаленности класса $[A]$ от границы.

(5.3) Предложение. *Существует такое $\lambda_0 > 0$, что для любой автодуальной связности A на P с неравенством $\lambda(A) < \lambda_0$ минимум в формуле* (5.2) *достигается в единственной точке $x(A) \in X$.*

Доказательство. Возьмем малый геодезический шар радиуса r с центром в точке минимума x для данной связности A и, как в п. (4.5), перенесем метрику и связность на евклидов шар радиуса $r/\lambda(A)$. Для каждой последовательности связностей с условием $\lambda(A_i) \to 0$ перенесенные таким образом связности $\hat{A}_i$ удовлетворяют условию $\lambda(\hat{A}_i) = 1$, и, применяя (4.4), (4.2), получаем подпоследовательность, сходящуюся к автодуальной связности на $\mathbb{R}^4$. Из классификации (2.7) и выбора нормировочной константы следует, что предельная связность совпадает с инстантоном A_1. Так как $\lambda(\hat{A}_i) = 1$, из предложения (4.2) следует, что сходится любая подпоследовательность, и, следовательно, предел единствен. Итак, $\hat{A}_i \to A_1$, если $\lambda(A_i) \to 0$. Но функция R_{A_1} имеет единственный невырожденный минимум; следовательно, для достаточно малого $\lambda(A)$ то же верно и для $R_{\hat{A}}$. Учитывая, что любые два минимума для данной связности A должны быть отделены друг от друга расстоянием не более $2\lambda(A)$, поскольку шар радиуса $\lambda(A)$ с центром в каждом из них должен содержать более половины действия, из единственности минимума для $R_{\hat{A}}$ выводим единственность минимума для R_A.

Заметим, что в этом доказательстве существенно использовалась связность пространства модулей.

(5.4) Пусть $\mathcal{M}_{\lambda_0} = \{[A] \in \mathcal{M} \mid \lambda(A) < \lambda_0\}$ и $p\colon \mathcal{M}_{\lambda_0} \to X \times (0, \lambda_0)$ — проекция, определенная формулой $p(A) = (x(A), \lambda(A))$.

(5.5) Предложение. (i) *$\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{\lambda_0}$ компактно.*

(ii) *$\mathcal{M}_{\lambda_0}$ — гладкое многообразие.*

(iii) *Проекция p является гладким накрытием.*

Доказательство. (i) Утверждение этого пункта непосредственно следует из предложения (4.2).

(ii) Когда $\lambda(A) \to 0$, по предложению (4.2) $[A] \to \mathfrak{b}$ в $C^\infty(X \setminus B(x(A), r))$. Применяя метод Таубса [19], можно доказать, что $H^2_A = 0$. Теперь утверждение следует из п. (3.6).

(iii) Проекция p гладкая, так как минимум функции R_A невырожденный. То, что p — собственное отображение, следует из предложения (4.2). Остается проверить, что дифференциал p является изоморфизмом. Обратное отображение дает теорема Таубса о неявной функции.

(5.6) Предложение. *Проекция p является диффеоморфизмом.*

Доказательство. Это наиболее техническая часть доказательства Дональдсона, в которой используются довольно тонкие оценки кривизны. Идея заключается в том, чтобы показать, что любые две автодуальные связности A, B с $x(A)=x(B)$ и достаточно малой величиной $\lambda(A)=\lambda(B)$ могут быть соединены коротким путем в $\mathscr{M}$ (см. [8]).

§ 6. ВОЗМУЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ $\mathscr{M}$

(6.1) Если $H_A^2=0$ для всех автодуальных связностей, то $\mathscr{M}$ гладко на дополнении к $n(Q)$ точкам, соответствующим приводимым связностям. В общем случае это может быть неверно, и тогда в $\mathscr{M}$ содержится подмножество K, на котором $H_A^2 \neq 0$ (по предложению (5.5) K компактно). Чтобы получить гладкое многообразие, нужно пошевелить $\mathscr{M}$.

(6.2) Возмущение $\mathscr{M}$ в окрестности приводимых связностей строится очевидным образом: конечномерное отображение $\varphi(x)$ в разложении $\Phi(x)=(D\Phi_A)x+\varphi(x)$ заменяется на близкое отображение с сюръективным дифференциалом. Тогда, как в п. (3.6), окрестность точки $[A]$ становится диффеоморфной $\mathbb{C}^3/S^1$ — конусу над $\mathbb{C}P^2$. Теперь будем предполагать, что $K\subset \mathscr{M}\cap\mathscr{B}^*$.

(6.3) Так как группа $\mathscr{G}/\{\pm 1\}$ действует на банаховых пространствах $L_3^2(\Omega_-^2(\mathfrak{g}))$ и $L_2^2(\Omega_-^2(\mathfrak{g}))$, на $\mathscr{B}^*$ определены векторные расслоения $\mathscr{E}^3\subset\mathscr{E}^2$ с нормами и связностями на них, ассоциированные с главным $\mathscr{G}/\{\pm 1\}$-расслоением $p^{-1}(\mathscr{B}^*)$ над $\mathscr{B}^*$ посредством указанного действия. Существует каноническое сечение $\Phi = F_-(A)$ расслоения $\mathscr{E}^2$, и требуется найти возмущение $\sigma\in C^\infty(\mathscr{B}^*,\mathscr{E}^3)$, такое, что возмущенное сечение $\Phi+\sigma$ невырожденно во всех точках, в которых оно обращается в нуль.

(6.4) Предложение. *Существует сечение $\sigma\in C^\infty(\mathscr{B}^*,\mathscr{E}^3)$ с носителем в окрестности компакта K, такое, что $(\Phi+\sigma)^{-1}(0)$ — гладкое пятимерное многообразие.*

Доказательство. Используя конечные покрытия K открытыми множествами $T_{A,\varepsilon}$, построим два открытых множества U_1, U_2 для которых $K\subset U_1$ и $\bar U_1\subset U_2$. Пусть σ — ограниченное сечение $\mathscr{E}^3$ с носителем в U_2. Тогда множество $\hat K=\left\{[A]\in \bar U_1 \mid \|(\Phi+\sigma)(A)\|_{L_3^2}\leqslant R\right\}$ компактно. Чтобы убедиться в этом, покроем U_2 конечным множеством срезов $T_{A,\varepsilon}$; тогда на каждом из них имеем $\Phi(A)=d_A^- a+\frac{1}{2}[a,a]+\sigma(A)$, причем $d_A^* a=0$ и $\|a\|_{L_3^2}<\varepsilon$. Из L_3^2-оценок на $\sigma(A)$, a и $(\Phi+\sigma)(A)$ получаем L_3^2-оценку на $(d_A^-+d_A^*)a$, из которой в силу эллиптичности следует L_4^2-оценка на a. Поскольку вложение $L_4^2\subset L_3^2$ компактно, получаем требуемое утверждение. Таким образом, если $\Phi+\sigma$ имеет только невырожденные нули в $\bar U_1$, то то же верно для всех сечений $\Phi+\sigma'$, близких к $\Phi+\sigma$ в топологии равномерной сходимости сечения со своим дифференциалом на компактных подмножествах.

Легко видеть, что пространство таких невырожденных возмущений плотно. Действительно, возьмем в окрестности каждой точки срез, на котором имеется разложение $\Phi+\sigma=L+\varphi$, где L — линейное, а φ — конечномерное отображения. Пользуясь компактностью, выберем конечное подпокрытие и подправим $\Phi+\sigma$ вычитанием регулярного значения φ, помноженного на подходящую кочкообразную функцию. По теореме Сарда такие возмущения могут быть сделаны сколь угодно близкими в норме L_3^2 к сечению $\Phi+\sigma$.

Теперь заметим, что само сечение Φ вне $\bar U_1$ обращается в нуль невырожденным образом. По доказанному выше мы можем выбрать возмущающее сечение σ так, чтобы $\Phi+\sigma$ имело лишь невырожденные нули на $\bar U_1$ (по свойству плотности) и на $U_2\setminus\bar U_1$ (по свойству открытости, примененному к $U_2\setminus\bar U_1$). Следовательно, сечение $\Phi+\sigma$ невырожденно всюду. Положим $\mathscr{M}^\sigma=(\Phi+\sigma)^{-1}(0)$. В силу изложенного выше это пятимерное многообразие, особое множество которого состоит лишь из n факторособенностей вида $\mathbb{C}^3/S^1$ и край которого естественным образом отождествляется с X.

§ 7. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ МНОГООБРАЗИЯ $\mathscr{M}^\sigma$

(7.1) Здесь нужно рассматривать класс Штифеля — Уитни $w_1(\ker\nabla(\Phi+\sigma))$ на многообразии $\mathscr{M}^\sigma\cap\mathscr{B}^*$. От особенностей можно избавиться с помощью калибровочных преобразований, тождественных в заданной точке $x_0\in X$. Поскольку на $\mathscr{A}$ эти преобразования действуют без неподвижных точек, получаем отображение факторизации $\hat{\mathscr{B}}\xrightarrow{\pi}\mathscr{B}$. Над $\mathscr{B}^*$ оно определяет главное $\mathrm{SO}(3)$-расслоение, поэтому ориентируемость $T\mathscr{M}^\sigma\cap\mathscr{B}^*$ эквивалентна ориентируемости прообраза $\pi^{-1}(\mathscr{M}^\sigma\cap\mathscr{B}^*)$.

(7.2) При ограничении на любое компактное подмножество $Y\subset\pi^{-1}(\mathscr{M}^\sigma\cap\mathscr{B}^*)$ векторное расслоение $\ker\nabla(\Phi+\sigma)$ определяет некоторый элемент группы $\mathrm{KO}(Y)$. Этот элемент является классом индекса [5] семейства фредгольмовых операторов $d_A^*+d_A^-+$

$+(\nabla\sigma)A$. Рассмотрение деформации $d_A^* + d_{\bar A} + t(\nabla\sigma)A$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, показывает, что класс индекса не зависит от σ. Поскольку гомоморфизм w_1 пропускается через KO, для решения вопроса об ориентируемости достаточно рассмотреть класс $\operatorname{ind}(d_A^* + d_{\bar A}) \in KO(Y)$ для случая, когда Y — петля. Поскольку в этом случае индекс определен для всех классов связностей с точностью до калибровочной эквивалентности, петлю Y можно деформировать в $\hat{\mathscr{B}}$.

(7.3) Если группа SU(2) вложена в SU(3) стандартным образом, то расслоение алгебр Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ соответствующей SU(3)-связности $\tilde{A}$ имеет расщепление вида $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} \oplus V$, где V — комплексное расслоение ранга 2, а $\mathbb{R}$ — тривиальное одномерное расслоение, причем все три подрасслоения инвариантны относительно связности. Следовательно, $w_1(\operatorname{ind}(d_{\tilde A}^* + d_{\tilde A})) = w_1(\operatorname{ind}(d_A^* + d_A))$, так что петлю Y можно деформировать в пространстве $\mathscr{B}_3$ классов эквивалентности SU(3)-связностей.

(7.4) Предложение. $\pi_1(\hat{\mathscr{B}}_3) = 0$.

Доказательство. Так как группа $\mathscr{G}_0$ калибровочных SU(3)-преобразований, сохраняющих x_0, действует свободно, имеем $\pi_1(\hat{\mathscr{B}}_3) \cong \pi_0(\mathscr{G}_0)$. Главное расслоение P тривиально на дополнении к точке. Следовательно, оно и подавно тривиально на двумерном остове X. Из того, что $\pi_2(SU(3)) = 0$, следует, что любой элемент группы $\mathscr{G}_0$ можно продеформировать таким образом, чтобы он при ограничении на двумерный остов давал тождественное отображение. Стягивание в точку двумерного остова X дает сферу S^4. Гомотопический тип группы $\mathscr{G}_0$ на сфере S^4 не зависит от $c_2(P)$ (см. [4]), так что задача сводится к случаю тривиального расслоения. Но $\pi_4(SU(3)) = 0$, поэтому группа $\mathscr{G}_0$ связна.

Итак, $\mathscr{M}^\sigma \cap \mathscr{B}^*$ — ориентируемое многообразие. Вклеивание в местах проколов границы окрестности факторособенности дает кобордизм теоремы (1.1).

§ 8. ПРИМЕРЫ

(8.1) Пусть $X = S^4$ — сфера с канонической метрикой. Тогда любая автодуальная связность на P калибровочно эквивалентна связности f^*A, где $f\colon S^4 \to \mathbb{H}P^1$ — конформное отображение и A — каноническая связность на кватернионном расслоении Хопфа. Поскольку изометрии многообразия $\mathbb{H}P^1$ сохраняют A, пространство модулей совпадает с $SO(5,1)/SO(5)$, т. е. является пятимерным гиперболическим пространством. Это шар B^5, имеющий S^4 в качестве границы. Имеется много способов доказать это (см. например, [2], [3], [6]).

(8.2) Пусть $X = \mathbb{C}P^2$ с канонической метрикой. В некомпактной компоненте $\mathscr{M}$ любая связность калибровочно эквивалентна связности вида f^*A, где $f\colon \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{H}P^2$ — отображение, с точностью до действия SU(3) на $\mathbb{C}P^2$ эквивалентное отображению

$$(z, w) \longmapsto \left(z, \frac{ajz + w}{\sqrt{1-a^2}}\right), \quad a \in [0; 1),$$

записанному в аффинных координатах. При $a = 0$ эта формула задает стандартное вложение $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{H}P^2$, и соответствующая связность приводима. Пространство модулей — конус над $\mathbb{C}P^2$, в котором a в сущности измеряет расстояние до вершины. Это было доказано Донапьдсоном (не опубликовано) с использованием алгебраической геометрии многообразия флагов F_3, а также метода Пенроуза — Уорда.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abraham R., Robbin J. Transversal mappings and flows, Benjamin, New York, 1967.

[2] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I. Construction of instantons, Phys. Lett., 65A (1978), 185.

[3] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. R. Soc. (Lond.), A362 (1978), 425—461.

[4] Atiyah M. F., Jones J. D. S. Topological aspects of Yang—Mills theory, Commun. Math. Phys., 61 (1978), 97—118.

[5] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators IV, Ann. of Math., 93 (1971), 119—138. [Имеется перевод: Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. 4. — Успехи мат. наук, 1972, т. 27, вып. 4, с. 161—178.]

[6] Atiyah M. F., Ward R. S. Instantons and algebraic geometry, Commun. Math. Phys., 55 (1977), 117—124.

[7] Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Y. S. Pseudo-particle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Lett., 59B (1975), 85.

[8] Donaldson S. K. D. Phil. thesis (Oxford), 1982.

[9] Freedman M. H. The topology of four-dimensional manifolds, J. Differential Geometry, 17 (1982), 357—453.

[10] Kuranishi M. A new proof for the existence of locally complete families of complex structures, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis, Springer-Verlag, New York, 1964, 142—156.

[11] Lübke M. Stability of Einstein—Hermitian vector bundles, Preprint (Bayreuth).

[12] Mitter P. K., Viallet C. M. On the bundle of connections and the gauge orbit manifold in Yang—Mills theory, Commun. Math. Phys., 79 (1981), 457—472.

[13] Narasimhan M. S., Seshadri C. S. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math., 82 (1965), 540—567. [Имеется перевод: Нарасимхан М. С., Шешадри К. С. Стабильные и унитарные

векторные расслоения на компактной римановой поверхности. — Математика, 1969, 13 : 1, с. 27—52.]
[14] Parker T. H. Gauge theories on four-dimensional riemannian manifolds, Commun. Math. Phys., 85 (1982), 563—602.
[15] Sedlacek S. A direct method for minimizing the Yang—Mills functional over 4-manifolds, Commun. Math. Phys., 86 (1982), 515—527.
[16] Schwarzenberger R. L. E. Vector bundles on the projective plane, Proc. Lond. Math. Soc., 11 (1961), 623—640.
[17] Serre J.-P. A course in arithmetic, Springer-Verlag, New York, 1973. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Курс арифметики (Перевод с франц. издания: Serre J.-P. Cours d'arithmétique. — Paris; Presses Universitaires de France, 1970). — М.: Мир, 1972.
[18] Smale S. An infinite dimensional version of Sard's theorem, Amer. J. Math., 87 (1965), 861—866.
[19] Taubes C. H. Self-dual Yang—Mills connections on non-self-dual 4-manifolds, J. Differential Geometry, 17 (1982), 139—170,
[20] Uhlenbeck K. K. Removable singularities in Yang—Mills fields, Commun. Math. Phys., 83 (1982), 11—30.
[21] Uhlenbeck K. K. Connections with L^p bounds on curvature, Commun. Math. Phys., 83 (1982), 31—42.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Donaldson S. K. Geometry of 4-manifolds, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley. Calif. Aug. 3—11, 1986, v. 1, Providence 1987, 43—54.
2*. Donaldson S. K. Gauge theory and smooth structures on 4-manifolds. Geometry and Topology. Manifolds, Var., and Knots, Proc. Topol. Conf., Athens, Aug. 5—16, 1985, New York, 1987, 89—98.

УЗЛЫ И КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ В РАЗМЕРНОСТИ 3 (по Даниэлю Беннекену)[1]

Адриан Дуади

0. ОБЗОР

В прошлом веке Дарбу доказал, что симплектические структуры на четномерных многообразиях, так же как контактные на нечетномерных, не имеют локальных инвариантов (т. е. локально изоморфны). В 1953 г. Черн сформулировал проблему классификации этих структур на данном многообразии.

В 1959 г. Грей доказал, что оба типа структур на компактных многообразиях стабильны, т. е. каждый класс изоморфизма открыт. Лутц в своей диссертации (1971 г.) показал, что в каждом гомотопическом классе полей двумерных плоскостей в S^3 имеется контактная структура. Лутц и Мартине доказали, что каждое ориентированное трехмерное многообразие несет контактную структуру. Другое доказательство этого факта принадлежит Тёрстону и Винкельнкемперу.

Полное решение вопроса о классификации симплектических и контактных структур на открытых многообразиях принадлежит Громову. В своей диссертации (1969 г.) он классифицировал эти структуры с точностью до гомотопии. Арнольд и Громов поставили вопрос о классификации этих структур с точностью до диффеоморфизма; в частности, они сформулировали вопрос о существовании на $\mathbb{R}^n$ экзотических контактных (при нечетном n) и симплектических (при четном n) структур. Некоторые кандидаты на роль экзотической контактной структуры на $\mathbb{R}^3$ были предложены, в частности, Эрландссоном (см. рисунок на с. 162). Даниэль Беннекен в своей диссертации (ноябрь 1982 г.) доказал, что ситуация, изображенная на этом рисунке, невозможна для стандартной контактной структуры. Это утверждение основано на неравенстве $\tau(\gamma) < 0$, выполненном для всякой незаузленной лежандровой кривой γ, т. е. кривой, касательной к контактному полю плоскостей. Гипотеза о существовании такого неравенства принадлежит Терстону, а его неполное доказательство методом, отличным от метода Беннекена, было предложено

---

[1] Douady Adrien. Noeuds et structures de contact en dimension 3. — [D'aprés Daniel Bennequin]. — Seminair Bourbaki, 35éme année, 1982/83, n° 604. Astérisque 105—106, 1983, p. 129—148.

в 1981 г. Эрландссоном. Похожий результат был анонсирован также Элиашбергом, как и теорема о C^0-замкнутости групп симплектических и контактных диффеоморфизмов компактного многообразия (тем самым получен ответ на вопрос, поставленный Арнольдом и Громовым). Более сильное неравенство Беннекена представляет и самостоятельный интерес в теории узлов.

Этот доклад посвящен в основном результатам, изложенным в диссертации Беннекена.

1. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ (В РАЗМЕРНОСТИ 3)

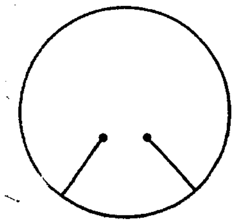
Пусть M — трехмерное многообразие. *Система Пфаффа* F, или *гладкое поле плоскостей*, на M — это гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке $m \in M$ плоскость F_m, лежащую в касательном пространстве T_mM. Если F трансверсально ориентируема, то она является ядром дифференциальной 1-формы α. Поле F является касательным к двумерному слоению тогда и только тогда, когда $\alpha \wedge d\alpha = 0$ (теорема Фробениуса). Говорят, что F — *контактная структура*, если, напротив, 3-форма $\alpha \wedge d\alpha$ отлична от нуля в каждой точке из M. Это свойство зависит только от поля F и не зависит от выбора формы α. Говорят, что α — *контактная форма*, если $F = \operatorname{Ker} \alpha$ — контактная структура, т. е. если $\alpha \wedge d\alpha$ не равно 0 ни в одной точке.

Примеры. 1) *Стандартная контактная структура* F_0 на $\mathbb{R}^3$ определяется уравнением $dz + x dy - y dx = 0$ или, в цилиндрических координатах, $dz + \rho^2 d\varphi = 0$.

2) На трехмерной сфере S^3, вложенной в $\mathbb{C}^2$ как единичная сфера, контактная структура F_0 определяется как поле двумерных плоскостей, ортогональных слоям расслоения Хопфа. Другими словами, каждой точке m отвечает плоскость, ортогональная $i \cdot m$, в T_mS^3.

3) Пусть $(q_1, q_2, p_1, p_2) \to H(q, p)$ — такая гладкая функция на $\mathbb{R}^4$, что $p_1 \partial H/\partial p_1 + p_2 \partial H/\partial p_2 > 0$, для всех $p \neq 0$, и пусть $E \in \mathbb{R}$. Тогда $M = \{(q, p) \in \mathbb{R}^4 - (0 \times \mathbb{R}^2) \mid H(q, p) = E\}$ — гладкое трехмерное многообразие, а форма Лиувилля $\lambda = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ определяет на M контактную форму. Этот пример поясняет, почему контактные структуры изучаются в механике.

Говорят, что две системы Пфаффа F и F' на M (или на двух многообразиях M и M') *изоморфны*, если существует диффеоморфизм M (на M'), который переводит F в F'.



Примеры. 1) Контактная структура F_0', заданная на $\mathbb{R}^3$ уравнением $dz = x dy$, изоморфна стандартной структуре, причем изоморфизм осуществляется диффеоморфизмом $(x, y, z) \mapsto (2y, x, z + xy)$. Со свойствами структуры F_0' приходится иметь дело всякий раз при попытке поставить свою машину у тротуара (x — тангенс угла между автомобилем и тротуаром, y и z — координаты заднего бампера машины).

2) Пусть $m_0 \in S^3$. Можно доказать, что контактная структура, индуцированная на $S^3 - \{m_0\}$, изоморфна стандартной (см. [4]).

3) Для каждой контактной структуры F на трехмерном многообразии M и для любой точки $m \in M$ существует такая окрестность U точки m, что $F|U$ изоморфна стандартной контактной структуре на $\mathbb{R}^3$ (теорема Дарбу).

Один из ярких результатов диссертации Беннекена — существование контактной структуры на $\mathbb{R}^3$, которая не изоморфна стандартной структуре.

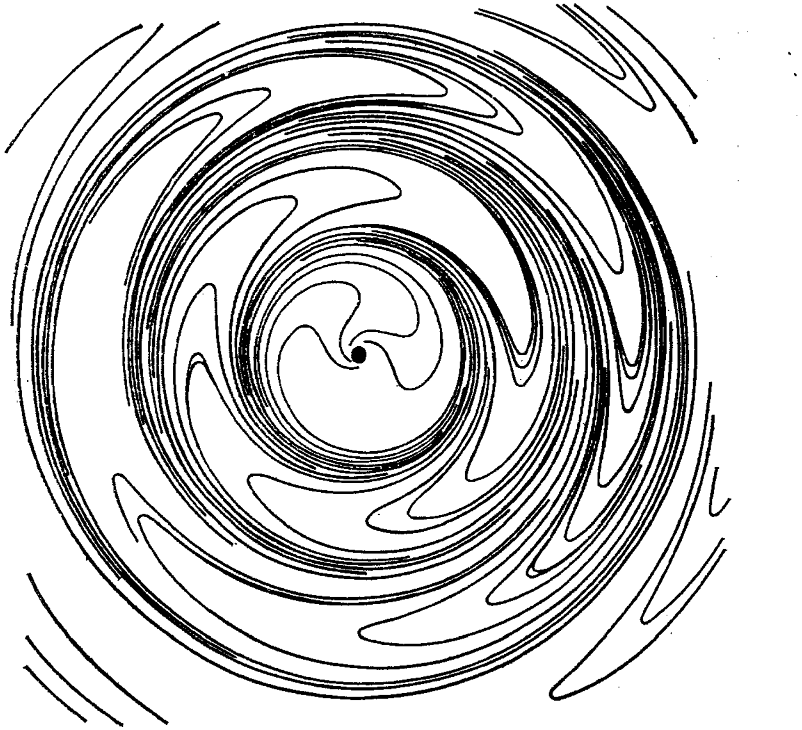
Пусть M — трехмерное многообразие, F — система Пфаффа в M и V — вложенная в M поверхность. *Критической точкой* поверхности V относительно F называется всякая такая точка $m \in V$, что $T_mV = F_m$. Если A — множество критических точек, то F индуцирует на $V - A$ гладкое поле направлений, т. е. в $V - A$ возникает одномерное слоение F_V. Если V ориентирована, то слои F_V — это траектории такого векторного поля $\eta(F, V)$, что $\eta(F, V) \lfloor \sigma = \alpha | V$, где σ обозначает 2-форму, ориентирующую V.

На $\mathbb{R}^3$ (как и на его открытых подмножествах, диффеоморфных $\mathbb{R}^3$) можно построить такую контактную структуру F и такой вложенный диск V, что слоение F_V на $V - A$ будет иметь замкнутый слой. Беннекен доказал, что это невозможно для стандартной структуры F_0; следовательно, F не изоморфна F_0.

2. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ НА ВЛОЖЕННЫХ ДИСКАХ ЗАМКНУТЫЕ КРИВЫЕ

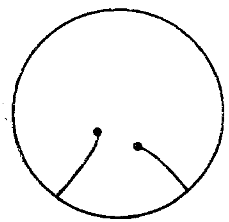
Следующий пример принадлежит Эрландссону: 1-форма $\alpha = \rho \sin \rho d\varphi + \cos \rho dz$ — это контактная форма на $\mathbb{R}^3$ (в цилиндрических координатах). Действительно, $\alpha \wedge d\alpha = (1 + \sin \rho \cos \rho/\rho)\, dx \wedge dy \wedge dz$. Слоение, возникающее на параболоиде $z = \rho^2$, имеет вид, изображенный на верхнем рисунке на с. 162.

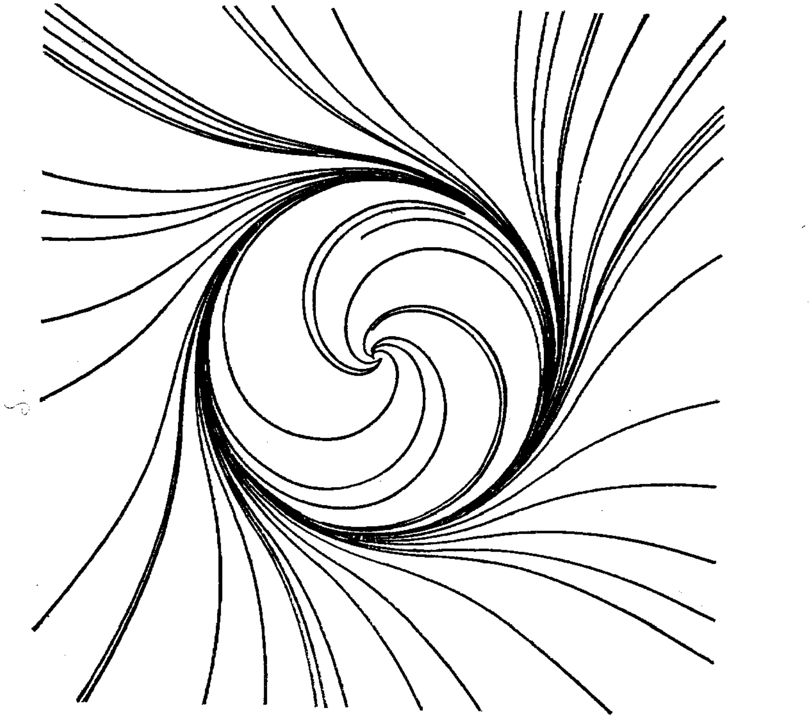
Вот еще один пример: пусть система Пфаффа F задана на $\mathbb{R}^3$ формой $\beta = (z\rho^2 - \rho^4)\, d\varphi + dz$. Тогда $\beta \wedge dz = (4\rho^2 - 2z)\, dx \wedge dy \wedge dz$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ обозначим через P_c параболоид $z = 2\rho^2 + c$. Форма β — это контактная форма на каждой из компонент связности U_+ и U_- множества $\mathbb{R}^3 - P_0$, причем каждое из множеств $U_\pm$ диффеоморфно $\mathbb{R}^3$.



Форма, индуцированная на P_c, равна $4\rho d\rho - (\rho^4 + c\rho^2) d\varphi$. Ее единственная критическая точка — это вершина параболоида P_c, а слоение F_{P_c} задается уравнением $4d\rho = (c\rho + \rho^3) d\varphi$. При $c < 0$ оно имеет вид, представленный на рис. на с. 163. В частности, окружность $\rho^2 + c = 0$ является замкнутым слоем слоения.

Последний пример имеет в действительности довольно общий характер. Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{R}^3$ и β — дифференциальная 1-форма на U, всюду отличная от нуля. Обозначим через ω форму объема $dx \wedge dy \wedge dz$, определим функцию h: $U \to \mathbb{R}$ условием $\beta \wedge d\beta = h\omega$, предположим, что 0 — регулярное значение h, и положим $V(\lambda) = h^{-1}(\lambda)$. Тогда форма β определяет на $U - V(0)$ контактную структуру F. Предположим, что в $V(0)$ имеется единственная критическая точка a_0 относительно F. Обозначим через Γ кривую, состоящую из точек a_λ, где a_λ — критическая точка $V(\lambda)$. Вычисление показывает, что функ-





ция $\operatorname{div} \eta(F, V(\lambda))$ принимает нулевое значение в точке a_0, но ее производная вдоль Γ отлична от нуля. Если траектории поля накручиваются на a_0, то семейство $F_{V(\lambda)}$ представляет собой бифуркацию Хопфа, и, следовательно, при отрицательных или при положительных значениях параметра λ поле $\eta(F, V(\lambda))$ имеет замкнутые траектории. Существует такая окрестность $U' \subset U$ точки a_0, что $U' - V(0)$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых диффеоморфна $\mathbb{R}^3$, причем для λ, близких к нулю, $V(\lambda) \cap U'$ — вложенный диск.

3. ИНВАРИАНТЫ КРИВЫХ, КАСАЮЩИХСЯ F

Пусть F — система Пфаффа на $\mathbb{R}^3$. Выберем 1-форму α, задающую F (т. е. $F = \operatorname{Ker} \alpha$). Этим мы зададим трансверсальную ориентацию F и тем самым ориентируем F. Кривая γ класса C^1 называется *касательной* к F, или *F-горизонтальной* (или *лежандровой кривой*), если $T_x\gamma \subset F_x$ в каждой точке $x \in \gamma$. Если F — контактная структура, то каждую кривую можно C^0-аппроксимировать F-горизонтальными кривыми.

Пусть ξ — непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^3$, не имеющее нулей и принимающее значение в F. Если γ — ориентированная F-горизонтальная кривая, то ее числом *вращения* в F называется степень отображения $x \mapsto$ угол $(\xi(x), T_x\gamma)$, действующего из γ в S^1. Обозначение: $\mu_F(\gamma)$, или просто $\mu(\gamma)$. Это число не зависит от выбора поля ξ, участвующего в определении.

Пусть γ и γ' — две ориентированные непересекающиеся вложенные в $\mathbb{R}^3$ кривые. Обозначим через $L(\gamma, \gamma')$ их *коэффициент зацепления*, т. е. (посчитанное с надлежащими знаками) число точек пересечения кривой γ' с погруженной компактной ориентированной поверхностью V, границей которой является γ. Ясно, что $L(\gamma, \gamma') = L(\gamma', \gamma)$.

Пусть γ — ориентированная F-горизонтальная кривая. Обозначим через $\gamma + \varepsilon\nu$ кривую, полученную малым сдвигом γ вдоль ориентирующих нормалей в распределении F. Назовем *коэффициентом самозацепления* кривой γ в F число $L(\gamma, \gamma + \varepsilon\nu)$. Обозначим его через $\tau_F(\gamma)$ или просто $\tau(\gamma)$.

Если F — стандартная контактная структура на $\mathbb{R}^3$, или, более общим образом, $\alpha = dz + u dx + v dy$ — форма Пфаффа, то значение чисел $\mu(\gamma)$ и $\tau(\gamma)$ можно «прочитать» по проекции $\pi(\gamma)$ кривой γ на плоскость (x, y). А именно, $\mu(\gamma)$ — это число вращения погруженной плоской кривой $\pi(\gamma)$, а $\tau(\gamma)$ — это число точек самопересечения кривой $\pi(\gamma)$, подсчитанных со знаками, указанными на следующем рисунке:

+1 −1

4. ИНВАРИАНТЫ КРИВОЙ, ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ F

Пусть F — система Пфаффа на $\mathbb{R}^3$. Выберем 1-форму α так, что $F = \operatorname{Ker} \alpha$, и рассмотрим ориентированную C^1-кривую γ. Кривая γ называется *положительной* (соответственно *отрицательной*), если ограничение α на γ — положительная (соответственно отрицательная) в каждой точке форма.

Снова обозначим через ξ непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^3$, не имеющее нулей и принимающее значения в F. Для трансверсальной F кривой γ обозначим через $l_F(\gamma)$ число $L(\gamma, \gamma + \varepsilon\xi)$. Это число тоже не зависит от выбора ξ.

Пример. Пусть V есть $\mathbb{C}$-аналитическая кривая в окрестности $0 \in \mathbb{C}^2$, имеющая в нуле изолированную особенность. Рассмотрим трехмерную сферу S^3 с центром в нуле и достаточно маленьким радиусом. Введем на S^3 контактную структуру $\hat{F}_0$, ортогональную слоям расслоения Хопфа, и обозначим через m число Милнора особенности. Рассмотрим кривую $\gamma = V \cap S^3$. Тогда

$$l_{\hat{F}_0}(\gamma) = m - 1 \quad [1, \text{ prop. } 5.7.1].$$

Предложение 1 ([1, 3.5.5]). *Пусть F — контактная структура, причем $\alpha \wedge d\alpha > 0$, и пусть γ — ориентированная кривая, касающаяся F. Тогда $\gamma + \varepsilon\nu$ — отрицательная кривая, $\gamma - \varepsilon\nu$ — положительная кривая и*

$$l_F(\gamma + \varepsilon\nu) = \tau_F(\gamma) + \mu(\gamma), \quad l_F(\gamma - \varepsilon\nu) = \tau_F(\gamma) - \mu(\gamma).$$

Пусть V — ориентированная поверхность и α — изолированная критическая точка поверхности V относительно F. *Индекс* $i(\alpha)$ определяется как индекс особой точки α векторного поля $\eta_{V,F}$; *скрученный индекс* $\tilde{i}(\alpha)$ определяется как $i(\alpha)$, если ориентации $T_\alpha V$ и F_α совпадают, и как $-i(\alpha)$ в противном случае.

Предложение 2 ([1, th. 4.4.4]). *Пусть γ — ориентированная положительная кривая, V — такая вложенная ориентированная поверхность, что $\partial V = \gamma$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — изолированные критические точки V относительно F. Тогда*

$$l_F(\gamma) = -\sum \tilde{i}(\alpha_j).$$

Замечание. Эта формула аналогична формуле Пуанкаре для эйлеровой характеристики V

$$\chi(V) = \sum i(\alpha_j).$$

5. КОСЫ

Рассмотрим стандартную контактную структуру F_0 на $\mathbb{R}^3$, заданную формой $\rho^2 d\theta + dz$. Единичная окружность $S^1 = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$ будет в этой структуре положительной кривой. *Замкнутой косой* мы будем называть всякую вложенную ориентированную кривую, не пересекающую ось $0z$, вдоль которой $\theta' = d\theta/dt > 0$. Обозначим через A полноторие, образованное точками из $\mathbb{R}^3$, удаленными от S^1 не более, чем на $1/4$, и через $T(A)$ — множество замкнутых кос, содержащихся в $\mathring{A}$ и удовлетворяющих неравенству $d\rho^2 + dz^2 \leqslant (1/4)\, d\theta^2$. Все замкнутые косы из $T(A)$ положительные. И все положительные замкнутые косы изотопны в классе положительных замкнутых кос элементам из $T(A)$.

Сопоставим замкнутой косе γ следующие инварианты: *число нитей* $n(\gamma)$ — это степень проекции $\gamma \to S^1$, и *алгебраическую длину* $c(\gamma)$ — это число точек самопересечения проекции кривой γ на плоскость (x, y), подсчитанных с указанными в § 3 знаками.

Предложение 3. *Пусть γ — замкнутая положительная коса. Тогда*

$$l_{F_0}(\gamma) = c(\gamma) - n(\gamma).$$

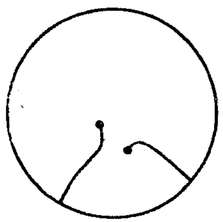
Доказательство. Рассмотрим радиальное относительно оси $0z$ поле r (например, $r(x, y, z) = (x, y, 0)$) и ненулевое поле ξ со значениями в F_0 (например, $\xi(x, y, z) = (1, 0, y)$). Тогда $c(\gamma) = L(\gamma, \gamma + \varepsilon r)$, а $L(\gamma, \gamma + \varepsilon r) - L(\gamma, \gamma + \varepsilon\xi)$ — это степень отображения $x \mapsto$ угол $(\xi(x), r(x))$, равная $n(\gamma)$.

Теорема 1. *Каждая положительная относительно F_0 кривая изотопна в классе положительных кривых положительной замкнутой косе.*

Доказательство. Пусть Γ — ориентированная компактная кривая и $\iota\colon \Gamma \to \mathbb{R}^3$ — вложение, положительное относительно F_0, образ которого — кривая γ. Можно считать, что γ не пересекает ось $0z$, что позволяет записать ι как $t \mapsto (\rho(t), \theta(t), z(t))$, где θ' и z' могут принимать нулевые значения лишь в конечном числе точек кривой Γ. Можно считать также, что проекция γ на цилиндр $S^1 \times \mathbb{R} = \{(\theta, z)\}$ — это погружение с трансверсальными пересечениями. Если $\theta' \leqslant 0$, то $z' > 0$. Рассмотрим связные компоненты кривой Γ, заданные условием $\{t \in \Gamma \mid z'(t) \geqslant 0\}$, и обозначим через $I_1, \ldots, I_{k(\gamma)}$ те из них, которые содержат точки, в которых $\theta' < 0$. Мы построим такое положительное вложение $\iota_1\colon t \mapsto (\rho_1(t), \theta_1(t), z_1(t))$ кривой Γ в $\mathbb{R}^3$, не задевающее ось $0z$ и изотопное i среди положительных вложений (не обязательно не пересекающих ось $0z$), что $z_1(t) = z(t)$ и $k(\gamma_1) = k(\gamma) - 1$.

Это делается в два шага.

Шаг 1, *подготовительный.* Посмотрим из оси $0z$ на проекцию кривой на цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. Пересечения образа интервала I_1 в точке, где $\theta' < 0$, с проекцией дуги I' относятся к одному из трех типов:



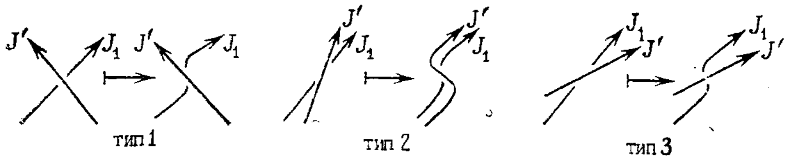
Тип 1: $\theta'(t') > 0$ и $\dfrac{z'(t')}{\theta'(t')} > \dfrac{z'(t)}{\theta'(t)}$;

Тип 2: $\theta'(t') < 0$ и $\dfrac{z'(t')}{\theta'(t')} < \dfrac{z'(t)}{\theta'(t)}$;

Тип 3: $\theta'(t') < 0$ и $\dfrac{z'(t')}{\theta'(t')} > \dfrac{z'(t)}{\theta'(t)}$

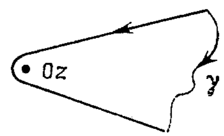
(через t обозначена точка интервала I_1, а через t' — интервала I'). Четвертый случай, когда $\theta'(t') > 0$ и $\dfrac{z'(t')}{\theta'(t')} < \dfrac{z'(t)}{\theta'(t)}$, невозможен (в силу положительности кривой).

Изменим кривую γ в окрестности точек t и t' в соответствии со следующим рисунком:



Это можно сделать так, что в тех точках, где $\theta' = 0$, будет выполнено и равенство $\rho' = 0$.

Шаг 2, основной. Каждая связная компонента множества тех $t \in I_1$, в которых $\theta' \leqslant 0$, — это дуга, которую можно деформировать в соответствии со следующим рисунком так, что она обойдет ось $0z$ и не будет пересекаться с γ.



Такая деформация не уменьшает $z' + xy' - x'y$. Поскольку эти деформации происходят в непересекающихся слоях, заключенных между горизонтальными плоскостями, все они могут быть выполнены одновременно.

В результате применения этих операций $k(\gamma)$ раз мы деформируем γ в замкнутую косу.

6. ПОВЕРХНОСТИ МАРКОВА

Обозначим через A полноторие в $\mathbb{R}^3$ с осью S^1, через $\mathscr{M}$ — слоение A на плоскости $\theta = c^{te}$, ориентированное формой $dr \wedge dz$, и через $\mathscr{P}$ слоение $\mathbb{R}^3 - \mathring{A}$ на сферы с центрами на оси $0z$, проходящие через окружность S^1, ориентированное таким образом, что $dx \wedge dy > 0$ на оси $0z$.

Определение. Пусть γ — замкнутая коса, содержащаяся в $\mathring{A}$. *Поверхностью Маркова* с краем γ, согласно Беннекену, называется компактная ориентированная поверхность V с краем γ, не имеющая компонент без края и удовлетворяющая следующим условиям:

M1. $V \cap (\mathbb{R}^3 - \mathring{A})$ — объединение конечного числа слоев слоения $\mathscr{P}$ (с ориентацией, наследуемой из слоения $\mathscr{P}$, или противоположной ориентацией).

M2. V имеет внутри A только изолированные невырожденные критические точки относительно $\mathscr{M}$, причем все эти точки индекса —1.

M3. Значения θ в этих критических точках попарно различны.

Если γ положительна относительно стандартной контактной структуры F_0 и если V — ориентированная поверхность с краем γ, удовлетворяющая условию M1, то суммы индексов ее критических точек относительно поля плоскостей F_0 и M, расположенных в A, одинаковы. То же относится и к суммам скрученных индексов. В действительности существует гомотопия, связывающая поля плоскостей M и F_0 в классе пфаффовых систем в A, трансверсальных краю $V \cap A$.

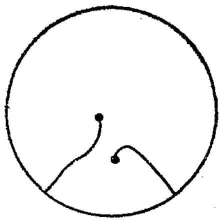
Для каждой компактной ориентированной кривой γ, вложенной в $\mathbb{R}^3$, обозначим через $\chi(\gamma)$ наибольшую эйлерову характеристику вложенных в $\mathbb{R}^3$ ориентированных компактных поверхностей V с краем γ, не имеющих замкнутых компонент.

Теорема 2 ([1], 6.3.0). *Пусть γ — замкнутая коса в $\mathring{A}$. Существует поверхность Маркова V с краем γ, для которой $\chi(V) = \chi(\gamma)$.*

Лемма 1. *Пусть V — поверхность с краем γ. Существует поверхность V', изотопная V в классе поверхностей с краем γ и удовлетворяющая условию* M1.

Доказательство. Можно считать, что V трансверсальна оси $0z$, и в окрестности каждой из точек пересечения с $0z$ она совпадает со слоем слоения $\mathscr{P}$. Пусть ζ — векторное поле на $\mathbb{R}^3$, равное нулю в окрестности γ и совпадающее на $\mathbb{R}^3 - A$ с направлением меридианов слоев слоения $\mathscr{P}$, ведущих от точки оси $0z$ к S^1. Сдвигая V вдоль поля ζ, мы получим поверхность V'.

Доказательство теоремы 2. Во-первых, $\chi(\gamma) > -\infty$, так как всегда существует ориентированная поверхность V с краем γ, и $\chi(\gamma)$ ограничена числом связных компонент кривой γ. Следовательно, существует такая ориентированная поверхность V без замкнутых компонент, что $\partial V = \gamma$ и $\chi(V) = \chi(\gamma)$. Можно считать, что V удовлетворяет следующему условию общего положения: внутри A у V имеются только невырожденные критические относительно слоения $\mathscr{M}$ точки, причем значения угла θ во

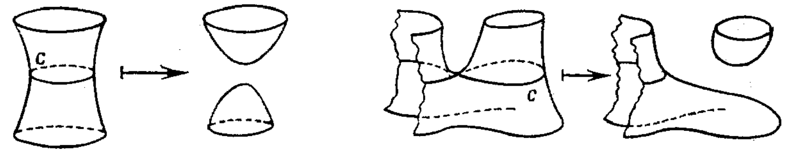


всех этих точках попарно различны. Мы будем уничтожать критические точки индекса 1 с помощью перестроек, не уменьшающих эйлерову характеристику V. А поскольку $\chi(V)$ максимальна, эта эйлерова характеристика вообще не будет меняться при перестройках.

Пусть $\theta \in S^1$; положим $H_\theta = V \cap M_\theta$. Тогда H_θ — это ориентированная кривая с краем (ориентация задана таким образом, что точки ∂H_θ, принадлежащие γ, имеют знак —1), возможно имеющая одну изолированную точку седлового типа, изображенную на следующем рисунке:

Назовем *локоном* кривой H_θ гомеоморфную окружности связную компоненту (локон *первого типа*) или $J \cup \{\alpha\}$, где α — критическая точка, а J — связная компонента в $H_\theta - \{\alpha\}$ (локон *второго типа*).

Пусть C — локон кривой H_θ, не содержащий в M_θ других компонент кривой H_θ. Определим *перестройку*, отвечающую C, в соответствии со следующим чертежом:



тип I тип II

Эта перестройка уничтожает C и увеличивает $\chi(V)$ на 2. Обозначим через E_C композицию этой перестройки с последующим отбрасыванием возникающих замкнутых компонент. В действительности при перестройке возникает не более одной замкнутой компоненты, причем ее эйлерова характеристика не превосходит двух. Поэтому отбрасывание этой компоненты не приводит к уменьшению $\chi(V)$.

Рассмотрим связную компоненту кривой H_θ, концевая точка которой принадлежит кривой γ. Эта точка отрицательно ориентирована, значит, данная компонента содержит и концевую точку с положительной ориентацией. Эта концевая точка лежит на ∂M_θ. Если H_θ не содержит изолированных точек, то каждый локон содержит внутри некоторые другие локоны кривой H_θ. Поэтому локоны $C_1, \ldots, C_k$ кривой H_θ можно занумеровать таким образом, чтобы C_j содержал только те C_i, для которых $i < j$. Определим E_θ как композицию операций $E_{C_1}, \ldots, E_{C_k}$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — критические точки индекса -1 поверхности V относительно слоения $\mathscr{M}$, а $\theta_1, \ldots, \theta_r$ — соответствующие значения θ. Поверхность V', полученная после перестроек $E_{\theta_1}, \ldots, E_{\theta_r}$, больше не содержит локонов второго типа. Тогда V' не содержит критических точек индекса 1, ибо каждая такая точка отвечает либо рождению, либо исчезновению локона первого типа. Но локон не может исчезнуть, не породив замкнутой компоненты V, а рождение локона происходит только в результате перестройки второго типа, так что поверхность V' действительно не содержит точек индекса 1.

7. НЕРАВЕНСТВО БЕННЕКЕНА И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

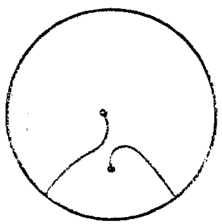
Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана стандартная контактная структура F_0. Основной результат Беннекена — это следующее неравенство:

Теорема 3 ([1, th. E]). *Пусть γ — некоторая F_0-положительная кривая. Тогда* $-\chi(\gamma) \geqslant l_{F_0}(\gamma)$.

Следовательно, эффективно вычисляемый инвариант $l_{F_0}(\gamma)$ оказывается нижней границей величины $-\chi(\gamma)$. Если γ связна, то $-\chi(\gamma) = 2g(\gamma) - 1$, где $g(\gamma)$ — род; таким образом, получается ограничение снизу на род узла $g(\gamma)$, т. е. на его сложность.

Основная лемма ([1, th. G]). *Пусть γ — замкнутая коса, содержащаяся в $\mathring{A}$, а V — поверхность Маркова с краем γ. Обозначим через s^+ (соответственно s^-) число компонент $(\mathbb{R}^3 - \mathring{A}) \cap V$, ориентация которых совпадает (соответственно противоположна) ориентации слоения $\mathscr{P}$. Обозначим через a^+ (соответственно a^-) число критических точек V в $\mathring{A}$ относительно слоения $\mathscr{M}$, ориентация которых совпадает (соответственно противоположна) ориентации $\mathscr{M}$. Тогда $s^- \leqslant a^-$.*

Вывод теоремы 3 из леммы. Пусть V — такая поверхность Маркова с краем γ, что $\chi(V) = \chi(\gamma)$ (V построена в теореме 2). Тогда $\chi(V) = \sum i(\alpha_j)$ и $l_{F_0}(\gamma) = -\sum \tilde{i}(\alpha_j)$, где α_j — критические точки V относительно F_0 (предложение 2). Пусть $\chi(V) = \chi' + \chi''$ и $l_{F_0}(\gamma) = l' + l''$, где χ' и l' (соответственно χ'' и l'') обозначают суммы, отвечающие тем точкам α_i, которые лежат в $\mathbb{R}^3 - \mathring{A}$ (соответственно в $\mathring{A}$). Критические точки, лежащие в $\mathbb{R}^3 - \mathring{A}$, сосредоточены на оси $0z$, и все имеют индекс 1. Поэтому $\chi' = s^+ + s^-$ и $l' = -s^+ + s^-$. Для вычисления внутри A заменим распределение F_0 на $\mathscr{M}$, гомотопное ему в классе пфаффовых систем, трансверсальных краю поверхности $V \cap A$. Обозначим через α'_k критические точки поверхности V относительно $\mathscr{M}$, лежащие в $\mathring{A}$. Все они имеют индекс -1; поэтому $\chi'' = \sum i(\alpha'_k) = -a^+ - a^-$ и $l'' = -\sum \tilde{i}(\alpha'_k) = a^+ - a^-$. Значит, $\chi + l = 2(s^- - a^-) \leqslant 0$, что и требовалось.



Следствие 1 ([1, th. 5.5.1, cor. 5.5.2]). *Пусть γ — замкнутая коса из n нитей, имеющая алгебраическую длину c. Тогда* $-\chi(\gamma) \geqslant |c| - n$.

В частности, если γ незаузлена, то $|c| < n$.

Доказательство. Можно считать, что $\gamma \in A$. Тогда $l(\gamma) = c - n \leqslant -\chi(\gamma)$. Симметрия относительно плоскости (x, y) меняет знак c и не меняет ни n, ни $\chi(\gamma)$. Поэтому верно и неравенство $-c - n \leqslant -\chi(\gamma)$. Значит, $|c| - n \leqslant -\chi(\gamma)$.

Следствие 2 ([1, th D, C]). *Пусть γ есть F_0-горизонтальная кривая. Тогда*

$$\tau(\gamma) \leqslant -\chi(\gamma) - |\mu(\gamma)|.$$

В частности, если γ незаузлена, то $\tau(\gamma) < 0$.

Доказательство. Для всякой ориентированной кривой η обозначим через $\eta^{\smile}$ ту же кривую с противоположной ориентацией. Тогда

$$\tau_{F_0}(\gamma) + \mu(\gamma) = l_{F_0}(\gamma + \varepsilon\nu) = l_{F_0}((\gamma + \varepsilon\nu)^{\smile}) \leqslant -\chi(\gamma)$$

и

$$\tau_{F_0}(\gamma) - \mu(\gamma) = l_{F_0}(\gamma - \varepsilon\nu) \leqslant -\chi(\gamma).$$

Таким образом, $\tau_{F_0}(\gamma) + |\mu(\gamma)| \leqslant -\chi(\gamma)$.

Следствие 3 ([1, th. A]). *Пусть V — вложенный в $\mathbb{R}^3$ диск. Векторное поле $\eta_{F_0, V}$ не имеет замкнутых траекторий.*

Действительно, такая траектория γ была бы незаузленной F_0-горизонтальной кривой с $\tau(\gamma) = 0$.

Следствие 4. *Контактные структуры, описанные в § 2, не изоморфны стандартной контактной структуре.*

Они даже не могут быть вложены в $\mathbb{R}^3$ со стандартной контактной структурой.

8. ДВА (ИЛИ ЧЕТЫРЕ) ГРАФА ПОВЕРХНОСТИ МАРКОВА

Пусть γ — замкнутая коса, а V — поверхность Маркова с краем γ. Обозначим через $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ компоненты кривой γ, а через $P_1, \ldots, P_s$ — компоненты поверхности $V \cap (\mathbb{R}^3 - \mathring{A})$, являющиеся слоями слоения $\mathscr{P}$; пусть $p_1, \ldots, p_s$ — их края, $\alpha_1, \ldots$

…, α_a — критические точки $V \cap A$ относительно $\mathcal{M}$ и $\hat{V}$ — замкнутая ориентированная поверхность, полученная приклеиванием к V дисков $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ вдоль кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Обозначим через $\delta_1, \ldots, \delta_r, \omega_1, \ldots, \omega_s$ центры дисков $\Delta_1, \ldots, \Delta_r, P_1, \ldots, P_s$ и положим $\varepsilon(\omega_i)$ и $\varepsilon(\alpha_j)$ равными ± 1 в зависимости от того, совпадет ли в этой точке ориентация V с ориентацией $\mathcal{M}$ или $\mathcal{P}$. Положим $\varepsilon(\delta_i) = -1$ для всех $i = 1, \ldots, r$.

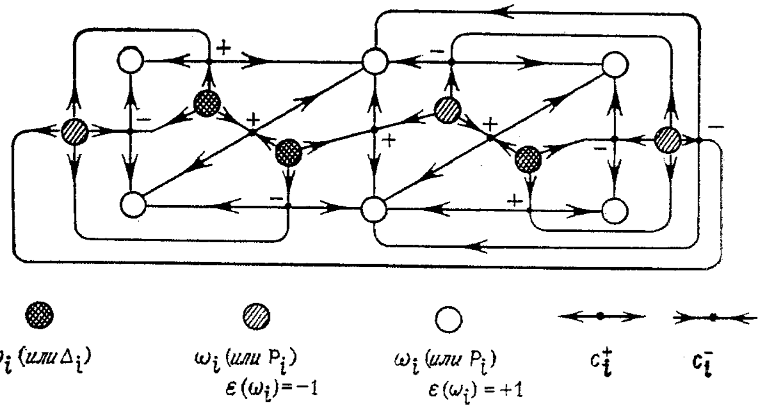
Для каждого $j = 1, \ldots, a$ обозначим через C_j^- (соответственно C_j^+) входящую (соответственно выходящую) сепаратрису поля $\eta_{V, \mathcal{M}}$ в точке α_j. Все введенные объекты можно изобразить на $\hat{V}$ посредством двух графов, двойственных друг другу в смысле двойственности Пуанкаре:

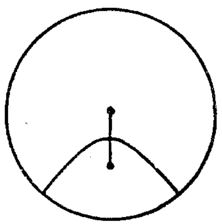
графа G^+ с вершинами, отвечающими тем точкам ω_i, для которых $\varepsilon(\omega_i) = 1$, и с ребрами, отвечающими кривым C_j^+;

графа G^- с вершинами, отвечающими точкам ω_i с $\varepsilon(\omega_i) = -1$ и точкам δ_i, и с ребрами, отвечающими C_j^-.

Каждый из этих графов — объединение двух подграфов: $G^+ = G_+^+ \cup G_-^+$, $G^- = G_+^- \cup G_-^-$. А именно, $G_\pm^+$ (соответственно G_-^+) получается, если оставить в G^+ только те вершины и ребра C_j^+, для которых $\varepsilon(\alpha_j) = +1$ (соответственно -1). Аналогично определяются G_+^- и G_-^-.

Изображая графы, мы будем придерживаться следующих обозначений (см. рисунок):





(Стрелки указывают направление поля $\eta_{V, \mathcal{M}}$; знаки $\pm$ около точек α_j указывают значения $\varepsilon(\alpha_j)$.)

Мы будем заниматься графом G_-^-, у

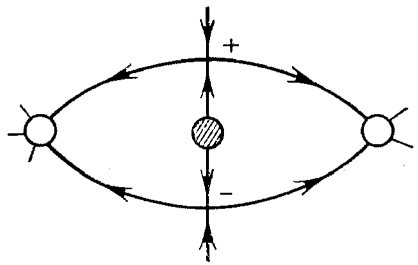
которого $s^- + r$ вершин и a^- ребер. Основная лемма вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4 ([1, th. H]). *Граф G_-^- не имеет ни одной связной компоненты X, все вершины которой были бы точками ω_i и которая была бы деревом (т. е. стягиваемым графом).*

Вывод основной леммы из предложения 4. Предположим, что $s^- > a^-$. Поскольку $\chi(G_-^-) = r + s^- - a^-$, получим, что $\chi(G_-^-) > r$. Эйлерова характеристика дерева равна 1, а эйлерова характеристика графов, не являющихся деревом, неположительна. Поэтому из неравенства $\chi(G_-^-) > r$ следует, что G_-^- имеет более r компонент, являющихся деревьями. Поскольку число вершин δ_i равно r, найдется такая компонента, все вершины которой — точки ω_i, что и требовалось.

Само же предложение 4 доказывается индукцией по числу вершин X с использованием следующих трех лемм.

Назовем *простой висячей вершиной* графа G_-^- висячую вершину (т. е. вершину, из которой выходит одно ребро), которая изображена на следующем рисунке:



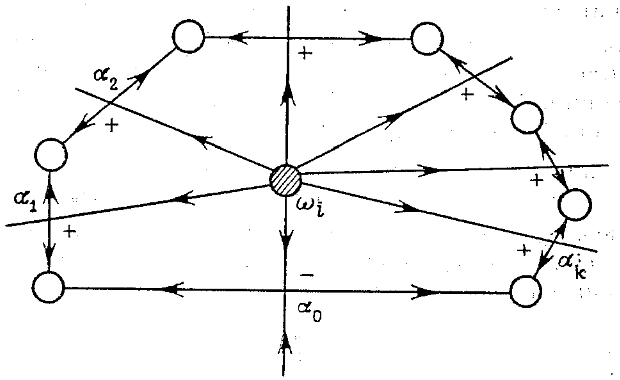
Лемма 1. *Пусть ω_i — висячая вершина графа G_-^-, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Тогда существует коса γ', изотопная γ, и поверхность Маркова V' с краем γ', изотопная V в классе поверхностей, удовлетворяющих условиям M1 и M2, такие, что в графе $G_-'^-$, построенном по V' и изоморфном G_-^-, вершина ω_i станет простой.*

Лемма 2. *Пусть ω_i — простая висячая вершина графа G_-^-. Тогда существуют такие коса γ_1 и поверхность Маркова V' с краем γ', диффеоморфная V, что соответствующий граф $G_-'^-$ имеет компоненту X', полученную из X удалением вершины ω_i и выходящего из нее ребра.*

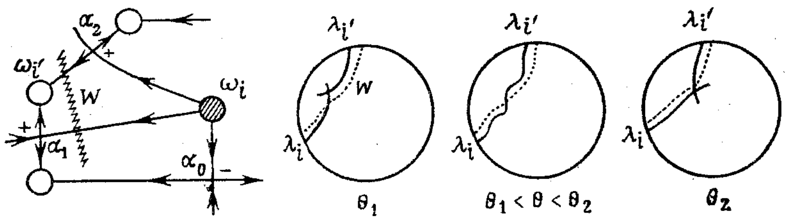
Замечание. Коса γ' не обязательно будет изотопной косе γ, но это обстоятельство нас не будет смущать.

Лемма 3. *Граф G_i^- не имеет компонент, состоящих из единственной точки ω_i.*

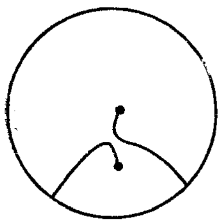
Доказательство леммы 1. Пусть $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ — критические точки, лежащие на ребрах графа G^-, выходящих из вершины ω_i, занумерованные таким образом, что значение угла θ возрастает с ростом номера (см. рисунок ниже). Пусть $\varepsilon(\alpha_0) = -1$, $\varepsilon(\alpha_1) = \ldots = \varepsilon(\alpha_k) = 1$ и $\theta_0, \ldots, \theta_k$ — значения угла θ, отвечающие точкам $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$. Мы покажем, как можно уменьшить число точек $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$, если $k \geqslant 2$.



Пусть $J \subset S^1$ — дуга окружности S^1 с угловой координатой θ. Назовем *перегородкой* в A, отвечающей J, образ W вложения $J \times [0, 1] \to A$, сохраняющего значения угла θ и удовлетворяющего условию $W \cap \partial A = J \times \{0, 1\}$. Построим по дуге $[\theta_1 - \varepsilon, \theta_2 + \varepsilon]$ перегородку W, следы которой на поверхностях V и M_θ изображены на следующем рисунке:



После надлежащей изотопии можно считать, что W имеет вид $J \times \Gamma \subset A = S^1 \times M_0$. Пусть N — окрестность W, не содержащая точек ω_j, и φ — такой диффеоморфизм A вида $(\theta, m) \mapsto (\theta', m)$, что

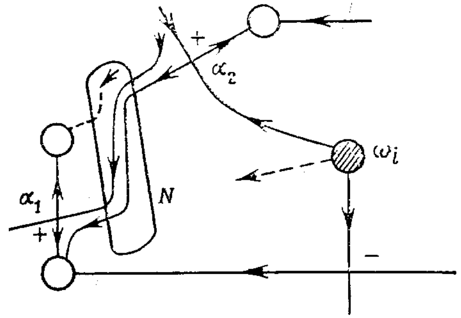


если $\theta \notin J = [\theta_1 - \varepsilon, \theta_2 + \varepsilon]$, то $\theta' = \theta$;

если $\theta = \theta_1$ и $m \in A - N$ лежит по ту же сторону от W, что α_1, то $\theta' > (\theta_1 + \theta_2)/2$;

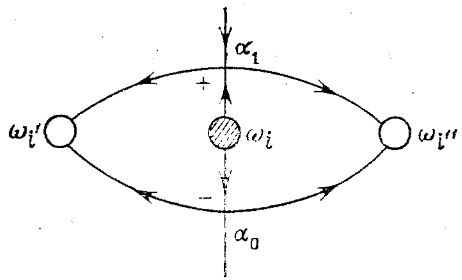
если $\theta = \theta_2$ и $m \in A - N$ лежит по ту же сторону от N, что α_2, то $\theta' < (\theta_1 + \theta_2)/2$.

Положим $V' = \varphi(V)$. Тогда слоение $\mathscr{M}_{V'}$ имеет вид, изображенный на следующем рисунке:

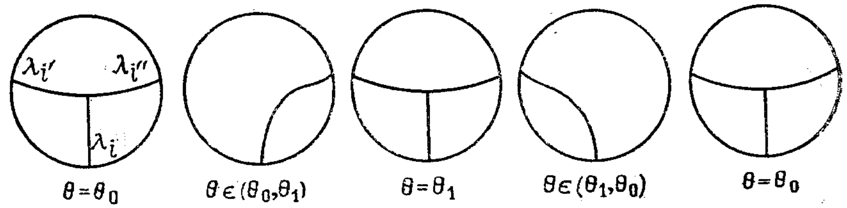


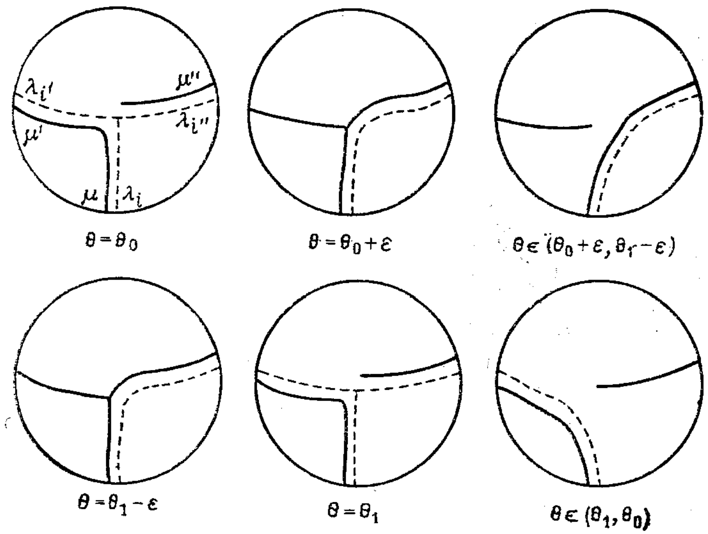
Таким образом, диффеоморфизм φ уменьшает число k на единицу, что и требовалось.

Доказательство леммы 2. Пусть α_0 и α_1 — критические точки на ребрах графа G^-, выходящих из вершины ω_i, а θ_0 и θ_1 — соответствующие значения угловой координаты θ. Обозначим через $\hat{E}$ область в V, ограниченную C_0^+ и C_1^+, а через $\omega_{i'}$ и $\omega_{i''}$ — концевые точки этих ребер, изображенные на следующем рисунке:

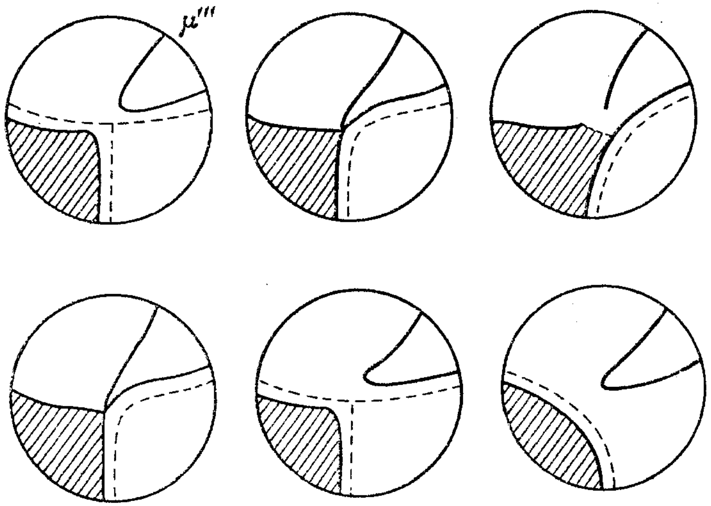


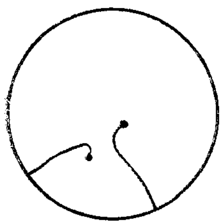
Положим $E = \hat{E} \cap A$. Изменение пересечения E с M_θ с изменением θ изображено в виде следующего «мультфильма»:





Пусть T — такое замкнутое подмножество в A, не пересекающееся с V, которое дает показанный выше «мультфильм».

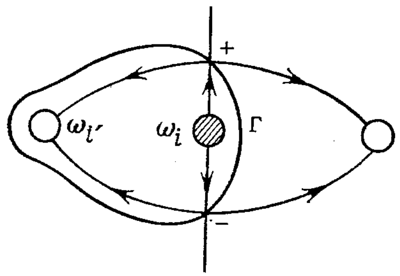




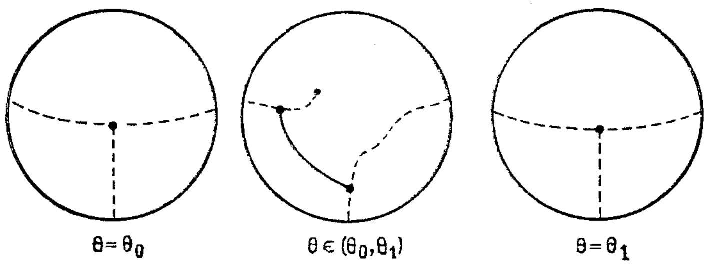
Пусть ψ — такое сохраняющее ориентацию вложение $S^1 - \{\mu, \mu', \mu''\}$ в себя, что $\psi(\mu', \mu) = (\mu', \mu''')$, где $\mu''' \in \{\mu'', \mu\}$; ψ совпадает с тождественным отображением на интервале (μ, μ''), причем $\psi(\mu'', \mu') = (\mu''', \mu')$ и $\psi(\lambda_i') = \lambda_i'$. Построим вложение Ψ множества $A - T$ в себя, которое сохраняет значение координаты θ, совпадает с тождественным на E и задает на крае A отображение $(\theta, \lambda) \longmapsto (\theta, \psi(\lambda))$. Образу Ψ отвечает «мультфильм», изображенный в центре с. 176.

(Образ Ψ_A — это замкнутый диск без заштрихованных зон и пунктирных линий.)

Образ $V \cap A$ при диффеоморфизме Ψ имеет вид $V'' \cap A$, где V'' — поверхность Маркова, и существует диффеоморфизм $\widehat{\Psi}$: $V \to V''$, совпадающий с Ψ на $V \cap A$. Рассмотрим в V'' следующую кривую Γ:

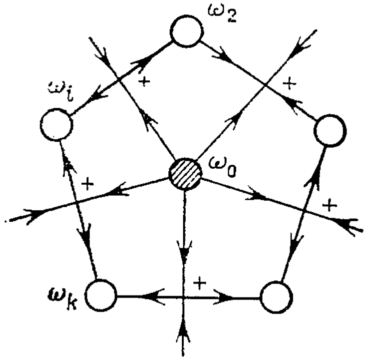


Вложим в A диск D таким образом, что $D \cap V'' = \Gamma$ в соответствии со следующим «мультфильмом»:



Подвергнув V'' перестройке, которую задает диск D, мы получим поверхность, состоящую из двух связных компонент. Одна из них сфера, содержащая P_i и $P'_{i'}$, а другая — поверхность Маркова V', которую и требовалось построить.

Доказательство леммы 3. Предположим противное (см. рисунок):



Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — значения широт параллелей $p_0, p_1, \ldots \ldots, p_k$ в ∂A. Тогда в интервале $S^1 - \{\lambda_0\}$ должны выполняться неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k < \lambda_1$. Противоречие.

Итак, доказательство теоремы 3 закончено.

9. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

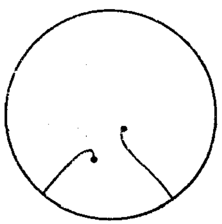
Вопрос 1 (в связи со следствием 3). *Для всякой ли контактной структуры F на $\mathbb{R}^3$, не изоморфной F_0, найдется такой вложенный диск V, что у поля $\eta_{V,F}$ есть замкнутая траектория?*

Пусть F — контактная структура на $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}_3, F)$ группу диффеоморфизмов, сохраняющих F. С помощью следствия 3 можно показать, что даже если $F = F_0$, группа $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3, F)$ не плотна в $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}^3)$ в C^0-топологии ([1, 2.3.5]).

Вопрос 2. *Замкнута ли группа* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3, F)$ *в* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^3)$ *в C^0-топологии?*

Вопрос 3. (Задача Тёрстона о велосипедной цепи). *Классифицировать F_0-горизонтальные кривые в $\mathbb{R}^3$.*

Вопрос 4. *Пусть β есть 1-форма общего положения в $\mathbb{R}^3$, а V — поверхность, состоящая из точек, в которых $\beta \wedge d\beta = 0$. Описать контактные структуры, заданные формой β в связных компонентах дополнения к V.*



Вопрос 5. *Рассмотрим стандартную контактную структуру на $\mathbb{R}^{2n+1}$. Существует ли такое вложенное многообразие $V \times S^1$, где V компактно и имеет размерность n, что все $V \times \{t\}$ — попарно незацепленные лежандровы подмногообразия?*

Вопрос 6. (Арнольд, Громов). *Рассмотрим стандартную контактную структуру в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Верно ли, что ни одно компактное лежандрово многообразие не проецируется в симплектическое пространство характеристик $\mathbb{R}^{2n}$ без самопересечений?*

Вопрос 7. *Пусть F — контактная (соответственно симплектическая) структура в $\mathbb{R}^n$ и n нечетно (соответственно четно). Будет ли группа* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n, F)$ *C^0-замкнутой в* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$? *Будет ли ее замыкание совпадать с* $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}^n)$ *(соответственно* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n, \omega)$, *где ω — форма объема)?*

Вопрос 8. *Пусть $\gamma \subset S^3 = \partial B^4$ — кривая, трансверсальная к F_0. Обозначим через $\chi'(\gamma)$ наибольшую эйлерову характеристику вложенной ориентированной поверхности $V \subset B^4$ с краем γ. Верно ли, что $-\chi'(\gamma) \geqslant l_{F_0}(\gamma)$?*

10. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ В S^3

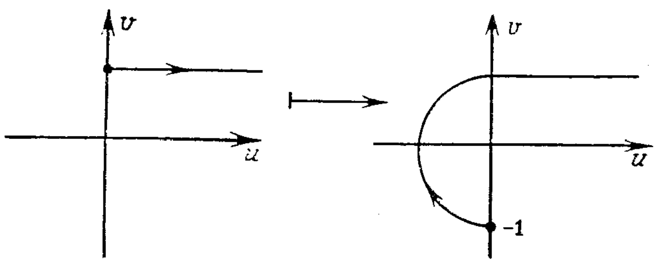
Обозначим через $\mathcal{G}$ множество изоморфных ориентированных контактных структур в S^3. Теорема стабильности Грея (см. § 0) и теорема Серфа, утверждающая связность $\mathrm{Diff}_+(S^3)$, показывают, что $\mathcal{G}$ — это также и множество связных компонент пространства всех контактных структур в S^3. В множестве $\mathcal{G}$ можно определить операцию связного суммирования.

Согласно Лутцу, естественное отображение $\mathcal{G}$ в множество F классов гомотопии полей плоскостей в S^3 является сюръекцией. Из следствия 3 теоремы 3 вытекает, что оно не инъективно. А именно, для каждого $n > 0$ контактная форма Варела ω_n, заданная формулой

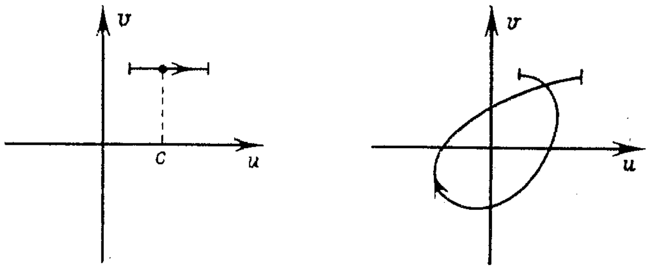
$$\omega_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\,(x_3^2 + x_4^2)\right)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + \\ + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\,(x_3^2 + x_4^2)\right)(x_3 dx_4 - x_4 dx_3)$$

определяет контактную структуру, гомотопную стандартной в классе двумерных распределений, но не изоморфную ей.

Пусть F — контактная структура в S^3. Если γ есть F-положительная кривая, то можно найти полноторие A с осью γ и такими координатами (ρ, θ, φ), что F задается в A формой $\alpha = \rho^2 d\theta + d\varphi$. *Перестройка Лутца* с осью γ — это замена α внутри A на форму $u(\rho)\,d\theta + v(\rho)\,d\varphi$, где $(u, v)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — кривая на плоскости, изображенная на следующем рисунке:



Пусть T — вложенный в S^3 тор, заданный (в некоторой окрестности N) уравнением $h = c$, h: $N \to \mathbb{R}$. Пусть контактная структура в N задана формой $\alpha = h d\theta + d\varphi$. *Перестройка Лутца с осью* T — это замена α в N на форму $u(h) d\theta + v(h) d\varphi$, где кривая (u, v) задана следующим образом:



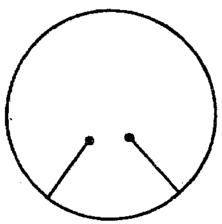
Вопрос 9. a) *Всякая ли контактная структура в S^3 является результатом последовательных перестроек Лутца стандартной структуры?*

b) *Можно ли считать оси этих перестроек (кривые и торы) попарно непересекающимися и, таким образом, выполнять все перестройки одновременно?*

c) *Когда два набора осей (кривых и торов) приводят к изоморфным контактным структурам?*

* * *

«Мультфильм» изображает поверхность Маркова для незаузленного завитка  . Просматривая этот мультфильм 2 (соответственно 3) раза, можно увидеть поверхность Маркова



простого зацепления  (соответственно трилистника ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennequin D. Entrelacements et équations de Pfaff. Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Paris VII, 24 novembre 1982.
2. Chern S. S. Pseudo-groupes continus infinis. Coll. Internat. CNRS Géom. Diff., Strasbourg, 1953, 119—135.
3. Eliashberg J. Rigidity of symplectic and contact structures, preprint, 1981.
4. Erlandsson T. Ceometry of contact transformations in dimension 3. Doctoral Dissertation, Uppsala, 1981.
5. Gray J. W. Some global properties of contact structures. Ann. of Math., 69 (1959), 421—450.
6. Громов М. Стабильные отображения слоений в многообразия. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1969, т. 33, № 4, с. 707—734.
7. Lutz R. Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension 3. Thèse, Strasbourg, 1971.
8. Lutz R. Structures de contact sur les fibres principaux en cercles de dimension 3, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 27 (1977).
9. Markov A. A. Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe, Recueil de la Soc. Math. de Moscou, 43 (1936), 73—78.
10. Martinet J. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. Proc. Liverpool Singularities Symp. 2, Springer Verlag, Lecture Notes in Math. 209, 1971, 142—163.
11. Milnor J. Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Study N61, Princeton, 1968.
12. Rolfsen D. Knots and links, Publish or perish № 7, 1976.
13. Thurston W., Winkelnkemper H. E. On the existence of contact forms. Proc. Amer. Math. Soc., 52 (1975), 345—347.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА И КОММЕНТАРИИ

Другие методы изучения нестандартных контактных многообразий представлены в [1*, 2*] (см. также доклады Громова и Элиашберга на Международном математическом конгрессе в 1986 г.). Доказательство неравенства Беннекена методами теории узлов можно извлечь из [3*]. Применение инварианта Беннекена к изучению оптических лагранжевых многообразий см. в [4*, 5*]. Обобщение инварианта Беннекена содержится в [6*], а его применение в геометрии плоских кривых — в [7*].

1*. Gromov M. Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifolds, Invent. math., 82 (1985), 307—347.
2*. Элиашберг Я. М. Теорема о структуре волновых фронтов и ее применения в симплектической топологии, Функц. анал. и его прил., 21 (1987), 65—72.
3*. Morton H. Seifert circles and knot polynomials, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 99 (1986), 107—110.

4*. Полтерович Л. В. Сильно оптические лагранжевы многообразия, Мат. заметки, 45, № 2 (1989), 95—109.
5*. Bialy M., Polterovich L. Lagrangian singularities of invariant tori of Hamilton systems with two degrees of freedom, Invent. Math., 37 (1989), 291—303.
6*. Табачников С. Л. Инвариант подмногообразия, трансверсального распределению, Успехи мат. наук, 43, № 3 (1988), 193—194.
7*. Табачников С. Л. Вычисление инварианта Беннекена лежандровой кривой по геометрии ее фронта, Функц. анал. и его прил., 22, № 3 (1988), 89—90.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ[1]) (по М. Громову)

Даниэль Беннекен

1. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ГИБКОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

1.1. Канонические преобразования

1.1.1. *Симплектическая структура* ω на гладком многообразии W — это *замкнутая* 2-форма на W, которая индуцирует на каждом касательном пространстве к W симплектическую билинейную форму (т. е. невырожденную кососимметрическую форму) (см. [1], [2]). Пара (W, ω) (или просто W) называется *симплектическим многообразием*. Стандартные примеры — это $\mathbb{R}^{2n}$ с $\omega_0 = dx \wedge dy$, кэлеровы многообразия, кокасательное расслоение T^*V гладкого многообразия. Общее обозначение симплектической формы в этих примерах ω_0. Отображение симплектических многообразий $f\colon (W', \omega') \to (W, \omega)$ называется *симплектическим*, если $f^*\omega = \omega'$.

Симплектический диффеоморфизм одной открытой области из W на другую называется *каноническим преобразованием*.

1.1.2. Невозможно перечислить все задачи геометрии, алгебры и анализа, которые сводятся к симплектической геометрии (см. [3], [4]). В [5] приводится следующий перечень программ, осуществляемых в современной математике: алгебраизация, бурбакизация, комплексификация, суперизация, симплектизация...

Несомненно, что после классической механики (Лагранж, Гамильтон, ...) и квантовой механики (Дирак, ...) теория линейных уравнений в частных производных оказала наибольшее влияние на развитие симплектической геометрии (Маслов, Хермандер, ...).

Работы Ли и Картана по бесконечным группам преобразований указывают на фундаментальный характер понятия симплектической структуры. Скажем, что (псевдо)группа диффеоморфизмов многообразия X *примитивна*, если X допускает только следующие инвариантные разбиения: тривиальное (един-

[1]) Bennequin Daniel. Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques (d'après M. Gromov). — Séminaire Bourbaki, 38 ème anneé, 1985/86, n° 657, Astérisque 145—146, 1987, p. 111—136.

4*. Полтерович Л. В. Сильно оптические лагранжевы многообразия, Мат. заметки, 45, № 2 (1989), 95—109.
5*. Bialy M., Polterovich L. Lagrangian singularities of invariant tori of Hamilton systems with two degrees of freedom, Invent. Math., 37 (1989), 291—303.
6*. Табачников С. Л. Инвариант подмногообразия, трансверсального распределению, Успехи мат. наук, 43, № 3 (1988), 193—194.
7*. Табачников С. Л. Вычисление инварианта Беннекена лежандровой кривой по геометрии ее фронта, Функц. анал. и его прил., 22, № 3 (1988), 89—90.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ[1]) (по М. Громову)

Даниэль Беннекен

1. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ГИБКОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

1.1. Канонические преобразования

1.1.1. *Симплектическая структура* ω на гладком многообразии W — это *замкнутая* 2-форма на W, которая индуцирует на каждом касательном пространстве к W симплектическую билинейную форму (т. е. невырожденную кососимметрическую форму) (см. [1], [2]). Пара (W, ω) (или просто W) называется *симплектическим многообразием*. Стандартные примеры — это $\mathbb{R}^{2n}$ с $\omega_0 = dx \wedge dy$, кэлеровы многообразия, кокасательное расслоение T^*V гладкого многообразия. Общее обозначение симплектической формы в этих примерах ω_0. Отображение симплектических многообразий f: $(W', \omega') \to (W, \omega)$ называется *симплектическим*, если $f^*\omega = \omega'$.

Симплектический диффеоморфизм одной открытой области из W на другую называется *каноническим преобразованием*.

1.1.2. Невозможно перечислить все задачи геометрии, алгебры и анализа, которые сводятся к симплектической геометрии (см. [3], [4]). В [5] приводится следующий перечень программ, осуществляемых в современной математике: алгебраизация, бурбакизация, комплексификация, суперизация, симплектизация...

Несомненно, что после классической механики (Лагранж, Гамильтон, ...) и квантовой механики (Дирак, ...) теория линейных уравнений в частных производных оказала наибольшее влияние на развитие симплектической геометрии (Маслов, Хермандер, ...).

Работы Ли и Картана по бесконечным группам преобразований указывают на фундаментальный характер понятия симплектической структуры. Скажем, что (псевдо)группа диффеоморфизмов многообразия X *примитивна*, если X допускает только следующие инвариантные разбиения: тривиальное (един-

[1]) Bennequin Daniel. Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques (d'après M. Gromov). — Séminaire Bourbaki, 38 ème anneé, 1985/86, n° 657, Astérisque 145—146, 1987, p. 111—136.

ственная часть разбиения — само X) или тождественное (разбиение X на отдельные точки). Кажется, список примитивных бесконечномерных (псевдо)групп Ли исчерпывается следующими группами:

$\mathfrak{D}$ — все локальные диффеоморфизмы многообразия X;
$\mathfrak{O}$ — локальные диффеоморфизмы, сохраняющие форму объема Ω на X;
$\mathfrak{CO}$ — конформно сохраняющие объем локальные диффеоморфизмы; $f^*\Omega = c\Omega$, $c \in \mathbb{R}$;
$\mathfrak{S}$ — канонические преобразования симплектической структуры ω на X;
$\mathfrak{CS}$ — конформно канонические преобразования: $f^*\omega = c\omega$, $c \in \mathbb{R}$;
$\mathfrak{C}$ — контактные преобразования контактной структуры на X;

(*контактная структура* F на X — это такое поле касательных к X гиперплоскостей, что для любой задающей его локально 1-формы α ограничение $d\alpha$ на каждое F_x дает симплектическую форму. Пример: F_0 задана в $\mathbb{R}^{2n+1}$ уравнением $x dy + z = 0$ (см. [1], [6]).

(В комплексно-аналитическом случае сформулированное выше утверждение о полноте списка (псевдо)групп примитивных диффеоморфизмов является теоремой Гийемина, Квиллена и Стернберга [7].)

1.1.3. Локальная симплектическая геометрия (как и контактная) обладает свойством *гибкости*. Типичный пример — следующая теорема Гивенталя: если Y и Z — ростки подмногообразий симплектического многообразия (W, ω), а f — росток диффеоморфизма Y в Z, который переводит ограничение $\omega|_Z$ формы ω в $\omega|_Y$, то f продолжается до ростка канонического преобразования W. Следствие (теорема Дарбу): локально всякая форма ω изоморфна стандартной форме ω_0.

В противоположность римановой геометрии в симплектической нет локальных инвариантов подмногообразий.

В то же время симплектической геометрии присуща *топологическая жесткость*: условие сохранения ω замкнуто в C^0-топологии.

Теорема А (Громов — Элиашберг). *Пусть (W,ω) — симплектическое многообразие и f — его диффеоморфизм. Если f_n — последовательность симплектических диффеоморфизмов многообразия W, которая сходится к f в топологии C^0-сходимости на компактах, то f тоже сохраняет симплектическую структуру.*

Эта теорема была высказана в качестве гипотезы и в значительной мере доказана (но не опубликована) Элиашбергом [8]. Полное доказательство было получено Громовым [9, 10].

Предположим, что мы приняли следующий результат Громова [10]:

Лемма. *Пусть (W^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Тогда единственной (псевдо)группой диффеоморфизмов, содержащей $\mathfrak{G}$ и отличной от нее, является $\mathfrak{O}$ (группа, сохраняющая объем ω^n).*

(Доказательство использует линейную алгебру и теорему Нэша — Мозера.)

Тогда для доказательства теоремы А достаточно показать, что существует диффеоморфизм с компактным носителем, сохраняющий ω^n, который нельзя сколь угодно точно приблизить в C^0-топологии симплектическими диффеоморфизмами (безусловно, в предположении, что $n > 1$).

Многие частные случаи были известны и до работы Громова. Например, в случае, когда W — тор T^{2n}, Эрман [11] показал, что результат следует из теоремы Конли — Цендера о неподвижных точках [12], [13].

Громов доказал также контактный вариант теоремы А: условие сохранения контактной структуры C^0-замкнуто. Поскольку аналог леммы сохраняет силу и в контактном случае (нужно заменить (W, ω) на (M, F), $\mathfrak{S}$ — на $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{O}$ — на $\mathfrak{D}$), здесь тоже нужно только установить, что контактные диффеоморфизмы не C^0-плотны среди всех диффеоморфизмов. (В размерности 3 этот результат следует [14] из изучения глобальных свойств лежандровых кривых в $(\mathbb{R}^3, F_0)$ (см. [14], [15]).)

1.1.4. Если в условии теоремы А заменить форму ω на риманову метрику g, то теорема станет очевидной, ибо метрика определяется расстоянием и наоборот. То же верно и для замены ω на форму объема Ω — объем определяется мерой. В случаях g или Ω теорема А доказывается локальными рассмотрениями. Совсем иначе обстоит дело в случае ω или F, так как при этом не используется то, что можно было бы назвать «топологической» симплектической (или контактной) структурой. (Напротив, несомненно существует понятие симплектического *гомеоморфизма.*)

Для доказательства теоремы А приходится использовать существенно глобальные результаты. Они включаются в ряд гипотез, высказанных В. И. Арнольдом в конце 50-х годов в связи с изучением периодических точек канонических преобразований [16] (см. § 4).

1.1.5. Путь, использованный Громовым для доказательства симплектической жесткости, включает в себя изучение голоморфных кривых почти-комплексных структур. На этом пути открываются глубокие связи симплектической геометрии с нелинейными эллиптическими задачами. Важность работы Громова — как в симплектических, так и в аналитических результатах. Она приводит к глобальной геометрической теории уравнений в частных производных, подобно тому как теория динамических систем является глобальной геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.2. Лагранжевы конструкции

1.2.1. В начале 70-х годов Громов [17] показал, что глобальная симплектическая и контактная топологии обладают свойством гибкости. Причина гибкости — в изобилии лагранжевых погружений. Если (W, ω) — симплектическое многообразие, то погружение $f\colon V \to W$ называется *лагранжевым*, если $\dim V = (1/2)\dim W$ и $f^*\omega = 0$. Согласно Вейнстейну, окрестность V в W симплектически изоморфна окрестности нулевого сечения V в T^*V. Графики замкнутых дифференциальных 1-форм на V в T^*V являются лагранжевыми подмногообразиями в T^*V. Следовательно, деформации лагранжева погружения $f\colon V \to W$ локально параметризуются функциями на V. С другой стороны, если (W, ω) и (W', ω') — два симплектических многообразия, то диффеоморфизм W' на W будет симплектическим, если его график — лагранжево подмногообразие в $(W' \times W, \omega' - \omega)$. Так на сцене появляются производящие функции.

1.2.2. Лагранжевы погружения удовлетворяют H-принципу (теорема Громова — Лиса ([10], [18])): переход к струям первого порядка является слабой гомотопической эквивалентностью между пространством лагранжевых погружений V в W (в C^∞-топологии) и пространством непрерывных послойно-инъективных отображений касательного расслоения TV в TW, лагранжевых на каждом слое и таких, что класс когомологий формы ω аннулируется образами циклов из V (тот же H-принцип применим к изотропным погружениям: $\dim V \leqslant (1/2)\dim W$, $f^*\omega = 0$ — и горизонтальным погружениям относительно контактной структуры).

М. Громов установил H-принцип для симплектических погружений в коразмерности 4: если (W', ω') и (W, ω) — симплектические многообразия, $(\varphi_0, f_0)\colon (TW', W') \to (TW, W)$ — гладкий морфизм векторных расслоений, причем φ_0 симплектическое на каждом слое, а $f_0^*\omega$ когомологично ω' и $\dim W \geqslant \dim W' + 4$ (а если W' открыто, то $\dim W \geqslant \dim W' + 2$), то существует такое

симплектическое погружение $f_1\colon W' \to W$, что (Df_1, f_1) гомотопно (φ_0, f_0). Более того, если f_0 — вложение, то и f_1 можно сделать вложением (см. [10]). (В качестве следствия получаем теорему Тышлера: все симплектические структуры с целыми периодами $([\omega] \in H^2(W, \mathbb{Z}))$ индуцируются посредством симплектических погружений W в $(\mathbb{CP}^N, \omega_0)$.)

1.2.3. Гибкость выражается, кроме того, теоремой существования симплектической структуры на открытых многообразиях: если W открыто и структурная группа касательного расслоения TW редуцируется к симплектической, то на W существует симплектическая структура, отвечающая этой редукции.

Условия существования симплектических структур на замкнутых многообразиях мало понятны (см. § 4), да и примеров симплектических многообразий немного (см., однако, [10], [19]). Не достаточно также примеров лагранжевых *вложений*. Вот характерный общий результат: если V допускает лагранжево погружение в $\mathbb{R}^{2n}$, то $V \times S^1$ допускает лагранжево вложение в $\mathbb{R}^{2n+2}$ (см. [10]).

1.3. Топологические соотношения неопределенности

1.3.1. Обозначим через $B^{2k}(R)$ открытый евклидов шар радиуса R в $\mathbb{R}^{2k}$ с индуцированной симплектической структурой ω_0.

Теорема B (Громов). *Не существует симплектического вложения* $B^{2n+2}(R_1')$ *в* $B^2(R_1) \times B^{2n}(R_2)$, *если* $R_1' > R_1$.

Этот результат не следует просто из сравнения объемов $\omega_0^{n+1}(B^2(R_1) \times B^{2n}(R_2))$ и $\omega_0^{n+1}(B^{2n+2}(R_1'))$.

Следствие. *Если* $n = 1$, *то числа* R_1 *и* R_2 — *симплектические инварианты бидиска* $B^2(R_1) \times B^2(R_2)$ (*считаем, что* $R_2 \geqslant R_1$).

Действительно, $R_1 R_2$ равно объему и потому сохраняется симплектическими диффеоморфизмами, а R_1 сохраняется в соответствие с теоремой B.

Соотношения неопределенности Гейзенберга (в формулировке Г. Вейля) означают симплектическую инвариантность объема области в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. [20]). Каковы следствия теоремы B в спектральной теории линейных дифференциальных операторов?

1.3.2. Другое соотношение неопределенности измеряет плотность симплектической упаковки шаров в другом шаре. Сформулируем этот результат в случае $\mathbb{R}^4$:

Теорема B′ (Громов). *Пусть* $d \geqslant 1$ — *целое число. Если*

$$r \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d+3}} R,$$

то невозможно симплектически вложить $d(d+3)/2$ шаров $B^4(r)$ в $B^4(R)$ так, чтобы они попарно не пересекались.

В частности, для двух шаров $r^4 \leqslant R^4/4$. Это в 4 раза хуже оценки $r^4 \leqslant R^4/16$, проистекающей из евклидовой геометрии, но в 2 раза лучше оценки $r^4 \leqslant R^4/2$ из соображений объема. В частности, евклидово полушарие симплектически не изоморфно шару того же объема. До работы Громова не было известно примеров открытых областей в $\mathbb{R}^{2n}$, имеющих равный объем, но не изоморфных симплектически.

Для пяти шаров теорема B′ дает неравенство $r \leqslant \sqrt{2/5}\, R$.

Упражнение: докажите это неравенство в евклидовой геометрии.

1.3.3. Теорема A следует из теоремы B. В соответствии с леммой 1.1.3 достаточно предъявить диффеоморфизм с компактным носителем пространства $\mathbb{R}^{2n+2}$ $(n \geqslant 1)$, сохраняющий ω_0^n и отправляющий шар $B^{2n+2}(R_1')$ в область $B^2(R_1'/2) \times B^{2n}(2R_1')$.

1.4. Положительные почти-комплексные структуры

1.4.1. Громов извлекает симплектическую жесткость из хорошо известной жесткости функций комплексного переменного.

Комплексная структура на векторном расслоении F — это эндоморфизм F, квадрат которого равен -1. Комплексная структура на F — это структура комплексного векторного пространства в каждом слое. *Почти-комплексная структура* на многообразии W — это комплексная структура на касательном расслоении TW. Если (F, ω) — симплектическое векторное расслоение, то почти-комплексная структура J: $F \to F$ *положительна* (относительно ω), если $\omega(u, Ju) > 0$ для всех ненулевых векторов некоторого слоя расслоения F. Скажем, что J *подчинена* ω, если J положительна и является симплектическим автоморфизмом. Тогда $\omega(u', Ju)$ — это евклидова метрика в F; почти-комплексные структуры, подчиненные ω, образуют непустое стягиваемое подпространство в $\operatorname{End} F$; то же верно для положительных J (см. [9]; Громов называет положительные структуры ручными, а подчиненные — калиброванными).

Пусть (W, J) — почти-комплексное многообразие; если J не удовлетворяет некоторым условиям интегрируемости, то не существует голоморфных отображений из открытых подмножеств W в $\mathbb{C}$; напротив, существует большое число голоморфных отображений из открытых подмножеств $\mathbb{C}$ в W ([21]). Если X — риманова поверхность, мы назовем *голоморфным отображением* X в W (или *решением* структуры J) всякое отображение f: $X \to W$ класса C^1, такое, что $J \circ Df = Df \circ i$. Мы назовем *комплексной кривой* (или *голоморфной кривой*, или *интегралом* структуры J) всякое ориентированное погруженное двумерное подмногообразие X в W, каждая касательная плоскость которого является комплексной прямой структуры J. Если X вложено, мы будем говорить о гладкой кривой.

1.4.2. Рассмотрим замкнутое симплектическое многообразие (W_0^{2n}, ω_0'), и пусть форма ω_0' имеет целые периоды по всем сферическим классам гомологий в W_0. Снабдим произведение $W^{2n+2} = S^2 \times W_0$ симплектической структурой $\omega = \omega_0 + w_0'$, где ω_0 — стандартная структура в S^2 с периодом 1.

Теорема C (Громов). *Пусть J — положительная относительно ω почти-комплексная структура на W. Тогда каждая точка $(z, w) \in W$ принадлежит образу голоморфного отображения из S^2 в W, гомологичному $S^2 \times w$ в W. Если $n = 1$, то на W существует слоение, слои которого — комплексные кривые, изотопные $S^2 \times w$ в W.*

1.4.3. Комплексная *псевдоплоскость* — это почти-комплексная структура J на $\mathbb{C}P^2$, положительная относительно стандартной структуры ω_0. Назовем псевдопрямой (соответственно псевдоконикой) интеграл J, гомологичный прямой (соответственно конике) стандартной комплексной структуры J_0 на $\mathbb{C}P^2$.

Теорема C′ (Громов). *Все псевдопрямые — это вложенные сферы, изотопные $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$. Через две точки $\mathbb{C}P^2$ проходит одна псевдопрямая и две псевдопрямые пересекаются в единственной точке. Через 5 точек (не лежащих на одной псевдопрямой) проходит одна псевдоконика. Если никакие 3 из 5 точек не лежат на псевдопрямой, то эта псевдоконика — вложенная сфера, изотопная стандартной конике в $\mathbb{C}P^2$.*

Через $d(d+3)/2$ точек в общем положении проходит гладкая комплексная кривая (для J) рода $(d-1)(d-2)/2$.

1.4.4. Теорема B следует из теоремы C. Действительно, если есть симплектическое вложение $B = B^{2n+2}(R)$ в $B^2(R_1) \times B^{2n}(R_2)$, то существует и симплектическое вложение f: $B \to W = S^2 \times T^{2n}$ с такой формой $\omega = \omega_0 + \omega_0'$, что $\omega_0(S^2) = \pi R_1^2$. Пусть $R' < R$; положим $B' = B^{2n+2}(R')$. Перенесем посредством f стандартную комплексную структуру J_0 из B' в $f(B')$ и распространим ее на все W (вследствие стягиваемости пространства структур) как положительную почти-комплексную структуру J. Теорема C (после изменения масштаба) дает решение Y структуры J, гомологичное $S^2 \times w$, проходящее через образ (z, w) центра O шара B. При этом $\omega[Y] = \pi R_1^2$. Рассмотрим $X = f^{-1}(Y \cup f(B'))$ —

это комплексная аналитическая кривая в B', проходящая через O. Поэтому ее площадь не меньше, чем $\pi(R')^2$ (см. [22]). Но площадь $\bar{X}$ равна $\int_{\bar{X}} \omega_0$ (Виртингер) — см. [22]. Значит,

$$\int_{\bar{X}} \omega_0 = \int_{Y \cap f(B')} \omega \leqslant \int_Y \omega = \pi R_1^2.$$

Следовательно, $R_1 \geqslant R'$. Но $R' < R$ было выбрано произвольно, так что $R_1 \geqslant R$.

Аналогично выводится теорема B′ из теоремы C′.

2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ

2.1. Строго эллиптические задачи в размерности 4

2.1.1. Пусть U — четырехмерное вещественное ориентированное пространство, а Q — грассманиан, составленный из его двумерных ориентированных подпространств. Если $q \in Q$, то касательное пространство T_qQ отождествляется с $\mathrm{Hom}(q, U/q)$. Поэтому многообразие Q наделено конформной структурой типа $(++--)$ (именно, если $l \in T_qQ$, то неравенство $\det l > 0$ не зависит от выбора базисов в q и U/q, согласованных с ориентацией).

Эллиптической поверхностью типа $+$ (*типа* $-$) называется замкнутое связное двумерное подмногообразие в Q, касательное пространство которого в каждой точке лежит в положительном (отрицательном) конусе описанной выше конформной структуры на Q.

Например, сфера $\mathbb{P}^1(J)$, составленная из комплексных прямых некоторой комплексной структуры J на U, — эллиптическая поверхность. Ее тип зависит от того, определяет J положительную или отрицательную ориентацию U.

Пространство всех комплексных структур J в U имеет размерность 8 (и изоморфно $S^2 \times \mathbb{R}^6$). Поэтому множества проективных прямых $\mathbb{P}(J)$ образуют 6-параметрическое семейство. Если E — эллиптическая поверхность, то через каждую ее точку e проходит единственная прямая $\mathbb{P}(J)$, касающаяся E.

Каждая конформная структура типа $(++++)$ в U задает изоморфизм $Q \simeq S^2 \times S^2$. Оператор звездочки Ходжа определяет разложение $\wedge^2 U$ на $\wedge_+$ и $\wedge_-$ (автодуальные и антиавтодуальные 2-векторы), причем каждое пространство $\wedge_\pm$ трехмерно. Обозначим через $S_\pm$ сферизации пространств $\wedge_\pm$. Изменение ориентации 2-плоскости задает антиподальную инволюцию S_-, а переход к ортогональному дополнению — антиподальную инволюцию S_+. Изменение ориентации U приводит к тому, что сферы S_+ и S_- меняются местами. Комплексная структура J на U, согласованная с ориентацией и конформной структурой, определяет прямую $\mathbb{P}(J)$, параллельную сфере S_+. Сфера S_- параметризует такие согласованные комплексные структуры J.

Каждая эллиптическая поверхность типа $+$ (типа $-$) является графиком стягиваемого отображения $S_+(S_-)$ в S_- (S_+).

Пусть E — эллиптическая поверхность. Тогда в каждой гиперплоскости в U лежит единственная 2-плоскость из E. Две 2-плоскости в U, принадлежащие E, имеют положительный или отрицательный индекс пересечения в зависимости от того, какой тип, $+$ или $-$, имеет E (см. [23]).

2.1.2. Пусть W — ориентированное четырехмерное многообразие. Обозначим через G пространство расслоения со слоем Q, ассоциированное с TW.

Эллиптическое отношение E (типа $\pm$) на W — это подмногообразие коразмерности 2 в G, которое трансверсально пересекает каждый слой Q по эллиптической поверхности (типа $\pm$). Пусть W обладает симплектической структурой ω; мы скажем, что E *положительно* (относительно ω), если ω положительно ориентирует каждый элемент E.

Например, комплексные прямые почти-комплексной структуры в W образуют эллиптическое отношение.

Пусть X — ориентированная поверхность. Назовем *решением* E всякое дифференцируемое отображение $f\colon X \to W$, для которого отображение $\wedge^2 Df$ переводит $\wedge^2 TX$ в конус над E в пространстве $\wedge^2 TW$. Назовем *интегралом* E всякое погруженное ориентированное двумерное подмногообразие X в W, касательные плоскости которого принадлежат E.

2.1.3. Пусть $z = x + iy$ пробегает открытое подмножество $\Delta \subset \mathbb{C}$, и пусть $w = u + iv$ — функция от z. Уравнение Коши — Римана $\bar{\partial} w = 0$ (т. е. $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$) определяет эллиптическое отношение в $\Delta \times \mathbb{C}$, для которого интегральными поверхностями служат графики голоморфных функций.

Аналогично, графики псевдоголоморфных функций, изучавшихся Берсом и Векуа (см. [24], [25]), служат интегралами эллиптических отношений.

Лаврентьев (см. [26], [27]) ввел системы дифференциальных уравнений на комплексные функции в Δ, определяющие общие эллиптические отношения; он называл их строго эллиптическими системами (см. [28], где теория изложена геометрически).

Отметим, что уравнение второго порядка

$$f(x,\ y,\ \varphi'_x,\ \varphi'_y,\ \varphi''_{xx},\ \varphi''_{xy},\ \varphi''_{yy})=0,$$

в которое не входит сама функция φ (например, уравнение минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$), относится к изучаемому классу. Достаточно положить $\varphi'_x=v$, $\varphi'_y=u$, и тогда уравнения $u'_x=v'_y$ и $f(x,\ y,\ u,\ v,\ u'_x,\ u'_y,\ v'_x,\ v'_y)=0$ задают подмногообразие коразмерности 2 в $\mathbb{R}^4\times Q$.

2.1.4. Шапиро и Лаврентьев перенесли большую часть результатов Римана на нелинейные эллиптические системы; Громов нашел глобальные аналоги их результатов:

Теорема D (Лаврентьев). (Эта теорема обобщает теорему Римана для односвязных областей на комплексной плоскости.) *Пусть Δ и Δ' — две относительно компактные односвязные области в $\mathbb{C}$ с гладкими границами γ и γ'. Пусть E — эллиптическое отношение в $\Delta\times\Delta'$, содержащее для каждой точки (z, w) вертикальную и горизонтальную плоскости. Пусть даны три точки, лежащие на $\gamma\times\gamma'$, причем их проекции как на γ, так и на γ' попарно различны. Тогда существует единственный диск, являющийся интегралом E, граница которого содержит эти три точки и который трансверсален вертикалям Δ' и горизонталям Δ.*

В [9] эта теорема обобщается на случай, когда *априори* не заданы вертикальное и горизонтальное интегральные слоения отношения E.

Теорема E (Громов) (обобщающая теорему Римана на случай замкнутых односвязных поверхностей). *Введем на многообразии $W=S^2\times S^2$ стандартную симплектическую структуру $\omega=\omega_0+\omega_0$, где интеграл формы ω_0 по S^2 равен 1, и рассмотрим на W эллиптическое отношение, положительное относительно ω.*

Для каждой пары положительных чисел (a, b) существует гладкий интеграл E, гомологичный $a[S^2\times 1]+b[1\times S^2]$. Этот интеграл — поверхность рода $(a-1)(b-1)$.

Многообразие W допускает пару трансверсальных слоений, слои которых — интегралы E, изотопную паре слоений, составленных из вертикальных и горизонтальных слоев.

В [9] содержится также обобщение этого результата на случай произведения S^2 на двумерную поверхность.

Отметим еще, что теорема C′ распространяется на эллиптические отношения, положительные относительно формы ω_0 на $\mathbb{C}P^2$.

2.2. Строго эллиптические задачи в размерности >4

2.2.1. В размерности 4 симплектическая структура ω на W используется только для того, чтобы гарантировать хорошее поведение в целом решений эллиптического отношения E. В старших размерностях дело обстоит иначе, и одним из достижений Громова является введение удобного понятия эллиптичности (от двух независимых переменных) в случае $\dim W>4$, которое позволяет использовать симплектическую структуру при изучении ситуации в линейном приближении.

Обозначим через Q_{2n} грассманиан ориентированных двумерных подпространств в ориентированном вещественном $2n+2$-мерном векторном пространстве U (Q_{2n} диффеоморфен гладкой квадрике комплектной размерности $2n$ в $\mathbb{C}P^{2n+2}$). Пусть ω — симплектическая структура в U и Q^+ — подмногообразие симплектических плоскостей (с надлежащей ориентацией) в Q. В каждой точке $q\in Q^+$ задана конформная структура типа $(2n, 2n)$: элемент $l\in T_qQ=\mathrm{Hom}(q, U/q)$ лежит в положительном конусе C_q^+, если l отвечает симплектическому вложению, сохраняющему ориентацию. Иными словами, нужно вместо определителя рассмотреть пфаффиан:

$$l\in C_q^+,\ \text{если}\ \mathrm{Pff}\,({}^tl\circ\omega\circ l)>0.$$

Скажем, что замкнутое связное подмногообразие вещественной коразмерности $2n$ в Q^+ — *положительное относительно ω эллиптическое многообразие*, если каждый его касательный вектор лежит в положительном конусе. Если E — положительное эллиптическое многообразие, то для каждой точки $e\in E$ пространство T_eE является симплектическим подпространством размерности $2n$ в $q^*\otimes U/q$. Например, прямые комплексной структуры на U, положительной относительно ω, образуют многообразие $\mathbb{C}P^n$, которое является положительным эллиптическим в Q.

2.2.2. *Лемма. Все положительные эллиптические подмногообразия относительно ω изотопны друг другу в классе таких подмногообразий.*

Идея доказательства. Выберем комплексную структуру J_0, *подчиненную* ω, и обозначим евклидову метрику $\omega(\ \cdot\ , J_0)$ через g_0, а подмногообразие в Q^+, составленное из комплексных прямых структуры J_0, — через $\mathbb{P}_0$. На многообразии $Q_0^+=Q^+\setminus\mathbb{P}_0$ двумерное тавтологическое расслоение θ тривиально, так как $\mathbb{P}_0$ определяет класс гомологий Q^+, двойственный классу Эйлера расслоения θ. Пусть s — ненулевое сечение θ на Q_0^+. Обозначим через G_q, где $q\in Q_0^+$, симметрию плоскости q относительно прямой $s(q)$. Тогда композиция $J_0 \circ G_q$ задает векторное поле на Q_0^+. Поток этого поля ретрагирует Q_0^+ на произвольно малую окрестность $\mathbb{P}_0$ в Q^+ и сохраняет конформную структуру.

В отличие от случая $n=1$ (т. е. $\dim W=4$), вообще говоря, не существует комплексной структуры, для которой проективное пространство комплексных прямых касалось бы E в заданной точке $e \in E$; но всегда найдется комплексная структура, подчиненная ω, для которой e была бы комплексной прямой, и этого уже достаточно.

2.2.3. Пусть (W, ω) есть $2n+2$-мерное симплектическое многообразие, а G (соответственно G^+) — расслоение со слоем Q (соответственно Q^+), ассоциированное с касательным. Определим *положительное эллиптическое отношение* (п. э. о.) на W как подмногообразие коразмерности $2n$ в G^+, трансверсальное слоям и высекающее на них положительные эллиптические подмногообразия. Как и в размерности 4, определяются *решения* и *интегралы* отношения.

2.2.4. Пусть E — п. э. о. относительно гладкой структуры ω на W^{2n+2}. При изучении решений отношения E вида (X^2, ω_0) удобно рассмотреть *расширенное фазовое пространство* $X \times W$. На нем тоже можно задать п. э. о. $\tilde{E}$ относительно формы $\omega_0+\omega$, которое в каждой точке (z, w) содержит подмногообразие E_w и множество графиков гомоморфизмов T_zX со значением в плоскости E_w (т. е. 1-струи решений отношения E). Отныне решения E вида X отождествляются с интегралами $\tilde{E}$. Это удобно, так как при таком рассмотрении все становится гладким.

2.2.5. Вот еще одна удобная конструкция: рассмотрим над G^+ расслоение H^+, слой которого над точкой $q \in Q_x^+$, $x \in W$, состоит из комплексных структур на T_xW, подчиненных ω_x, для которых q — комплексная прямая. Слои H^+ стягиваемы, поэтому можно a priori выбрать гладкое сечение $\tilde{J}$ над E. Эта конструкция вводит на множестве интегралов E комплексную структуру.

Более того, если W компактно, то можно ввести на W такую риманову метрику g, что для некоторой константы $C>0$ и для любых точек $x \in W$ и $e \in E_x$ площадь параллелограмма, натянутого на векторы (u, v) из T_xW, лежащие в e, не превосходит величины $C\omega_x(u, v)$.

2.2.6. Гладкое положительное эллиптическое отношение допускает «производную», т. е. положительное эллиптическое отношение $E^{(\prime)}$ на многообразии E (которое является симплектическим многообразием размерности $4n+2$): над точкой $e \in E_x$ $E_e^{(1)}$ состоит из графиков сохраняющих ориентацию отображений $e \subset T_xW$ в T_eE_x. Касательные плоскости интегралов отношения E образуют интегралы $E^{(\prime)}$.

2.2.7. К росткам решений п. э. о. применимы классические теоремы об эллиптических уравнениях в частных производных. Например, ***принцип максимума*** (Хопф, Берс) (см. [29]), *принцип Карлемана*: в терминах расширенного фазового пространства это означает, что если решение имеет касание бесконечного порядка с горизонталью $X \times w$ в точке (z, w), то оно совпадает с горизонталью в некоторой окрестности точки (z, w). В частности, особенности решений E изолированные.

Сохраняются также и результаты о *регулярности* (типа Дуглиса — Ниренберга) (см. [30]): непрерывность решения по Гёльдеру влечет гладкость (в случае гладкости E); но геометрические методы Громова устанавливают эти результаты прямо посредством перехода к $E^{(\prime)}$.

2.3. Априорные топологические оценки в размерности 4

2.3.1. Мы собираемся воспользоваться обобщением фундаментального наблюдения Лефшеца: индекс пересечения двух плоскостей, принадлежащих E_x, равен $+1$.

Пусть E — эллиптическое отношение типа $+$ на ориентированном многообразии W. Тогда два ростка интегралов X и Y могут иметь только конечный порядок касания (Карлеман), и этот порядок можно вычислить как число точек, на которые распадается точка пересечения после малого шевеления (в подходящих комплексно-аналитических координатах касание n-го порядка задается уравнением

$$w = z^n + O(z^{n+1}).$$

2.3.2. Кроме того, если $f\colon X \to W$ — гладкое решение E, имеющее особенность в $0 \in X$, то можно малым шевелением в окрестности $f(0)$ заменить E на E' так, что найдется близкое решение $f'\colon X \to W$ отношения E', являющееся погружением. (Это достигается применением теоремы трансверсальности к первой ненулевой струе.)

2.3.3. Пусть X — замкнутый интеграл отношения E в W^4. Если число Эйлера нормального расслоения N к X в W отрицательно (ориентация N определяется ориентациями X и W), то в окрестности X нет интегралов, отличных от него самого (см. замечание 2.3.1).

2.3.4. Пусть E — эллиптическое отношение типа $+$ на ориентированном многообразии W^4. Согласно 2.1.1, W допускает почти-комплексную структуру J, для которой эллиптическое отношение

Коши — Римана $\mathbb{P}_J$ изотопно E. Обозначим через c_1 первый класс Черна двумерного комплексного расслоения (TW, J). Предположим, что X — погруженная в W поверхность, и обозначим через $c = c_1[X]$ ее число Черна, а через ν — число Эйлера ее нормального расслоения в W. Предположим, что X находится в общем положении относительно J. Тогда существуют четыре типа точек, в которых касательное пространство к X является комплексной прямой структуры J, числа которых мы обозначим через e^+, e^-, h^+, h^-. Знак $+$ или $-$ отвечает за то, совпадает ориентация X с комплексной или нет, а буквы e и h указывают на то, с каким знаком: $+$ или $-$, пересекаются в G образ касательного гауссова отображения поверхности X и многообразие $\mathbb{P}_J$.

Обозначим через χ эйлерову характеристику поверхности X. *Формулы Леви* (см. [14]) гласят:

$$\chi + \nu = e^+ + e^- - h^+ - h^-,$$
$$c = e^+ - e^- - h^+ + h^-.$$

Следовательно, если X является интегралом E, то, заменяя E на $\mathbb{P}_Y$, мы получим *формулу для рода*:

$$\chi + \nu = c.$$

Отсюда следует такой результат о регулярности:

2.3.5. *Лемма. Пусть E — некоторое п. э. о. относительно стандартной структуры ω_0 на $\mathbb{CP}^2$ и $f\colon X \to \mathbb{CP}^2$ — такое решение E, что X — замкнутое многообразие и $f_*[X] \frown f_*[X] = 1$. Тогда f является вложением, X — сфера S^2 и f регулярно гомотопно вложению $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$.*

Действительно, после шевеления E мы получим новое отношение E' и его решение f', гомотопное f, которое будет погружением с простыми двойными точками. При этом число двойных точек f' равно порядку особенностей f. Если c, ν, χ — это число Черна f', число Эйлера нормального расслоения и эйлерова характеристика X, а δ — число двойных точек $f'(X)$, то

$$1 = f_*[X] \frown f_*[X] = f'(X) \frown f'(X) = \nu + 2\delta$$

и

$$\chi + \nu = c = 3.$$

Отсюда следует, что $\chi \leqslant 2$, а $\nu \geqslant 1$. Поэтому $\delta = 0$ (f' — вложение), $\nu = 1$ и $\chi = 2$ (X — сфера).

2.3.6. Аналогично доказывается, что решения п. э. о. относительно ω_0 в $S^2 \times V^2$, гомологичные $S^2 \times v$, являются вложенными сферами, регулярно гомотопными $S^2 \times v$.

2.4. Функциональный анализ

2.4.1. Пусть (W, ω) — замкнутое $2n+2$-мерное симплектическое многообразие. Рассмотрим многообразие Фреше $\mathcal{F}$ двумерных замкнутых погруженных подмногообразий с нормальными пересечениями в W (допускаются кратные пересечения, но запрещены касания). $\mathcal{F}$ является *ручным* многообразием Фреше в категории Нэша — Мозера (введенным Гамильтоном — см. [31], методы этой работы будут свободно использоваться в дальнейшем). Другим ручным многообразием Фреше является многообразие $\mathcal{E}$ всех положительных эллиптических отношений относительно ω. Мы будем изучать многообразие $\mathcal{M}$, составленное из пар (X, E), $X \in \mathcal{F}$, $E \in \mathcal{E}$, где X является интегралом E.

Из (микролокальной) гибкости $\mathcal{E}$ немедленно следует, что проекция $\mathrm{pr}_1\colon \mathcal{M} \to \mathcal{F}$ является *ручным* расслоением над своим образом (этот образ состоит из погруженных симплектических поверхностей с нормальным пересечением). Значит, $\mathcal{M}$ является ручным подмногообразием в $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$.

Замечание. Если разрешить касания (как и другие типы особенностей) в определении $\mathcal{F}$, то $\mathcal{M}$ тоже будет ручным подмногообразием в $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$. Однако для наших целей достаточно и такого $\mathcal{F}$, как определено выше.

2.4.2. **Теорема F.** *Проекция $\Delta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{E}$ является ручным фредгольмовым оператором, индекс которого в точке $(X_0, E_0) \in \mathcal{M}$ равен*

$$2\nu + n\chi,$$

где ν — число Эйлера нормального расслоения N многообразия X_0 в W, а χ — эйлерова характеристика X $(2n + 2 = \dim W)$.

Доказательство. Касательное пространство к $\mathcal{E}$ в E_0 распадается в прямую сумму $\mathcal{E}_0$ (это деформации E_0, постоянные на подмногообразии $\tilde{X}_0 \subset E_0$, состоящем из касательных плоскостей к X_0) и $\Gamma(M)$ (пространства гладких сечений расслоения M над X_0, полученного ограничением на $\tilde{X}_0$ нормального расслоения к E_0 в G). Касательное пространство к $\mathcal{M}$ в (X_0, E_0) распадается в свою очередь в прямую сумму $\mathcal{E}_0$ и $\Gamma(N)$ (пространства гладких сечений нормального расслоения к X_0 в W). Касательное отображение $T_{(X_0, E_0)}\Delta$ тождественно на слагаемых $\mathcal{E}_0$, а на вторых слагаемых сопоставляет вариации X_0 вариацию касательных плоскостей.

В действительности посредством связности на TG нетрудно отождествить окрестность E_0 в $\mathcal{E}$ с $E_0 \times \Gamma(M)$, а окрестность (X_0, E_0) в $\mathcal{M}$ — с $\mathcal{E}_0 \times \Gamma(N)$. При этом Δ запишется как $(\varphi, \bar{\Delta})$, где φ — диффеоморфизм окрестности 0 в $\mathcal{E}_0$ на окрестность 0 в $\mathscr{E}_0$, а $\bar{\Delta}$ будет *нелинейным дифференциальным оператором первого порядка* (в смысле Пале). Это позволяет использовать, без всяких модификаций, подход Гамильтона к таким операторам — см. [31].

Пусть $x \in X_0$ и $l \in E_0$ — точка в $\tilde{X}_0$, лежащая над x (т. е. $T_x X_0$). Обозначим через V_l пространство $T_l(E_0)_x$; тогда пространство M_x отождествляется с $T_l Q_x / V_l$, а $T_l Q_x$ — с $\operatorname{Hom}(T_x X_0, N_x) = T_x^* X_0 \otimes N_x$. После этих отождествлений символ $\sigma(x, \xi)$ оператора $T_{X_0}\bar{\Delta} = T_{(X_0, E_0)}(\Delta)|_{\Gamma(N)}$ в точке $(x, \xi) \in T^* X_0$ превращается в морфизм N_x в $T_x^* X_0 \otimes N_x / V_l$, который переводит $\delta \in N_x$ в $\xi \otimes \delta \bmod V_l$. Элемент $\xi \otimes \delta$ имеет ранг 1 в $\operatorname{Hom}(T_x X_0, N_x)$ (если, конечно, $\xi \neq 0$ и $\delta \neq 0$), а V_l составлено из элементов ранга 2 (или 0) — это следует из эллиптичности. Поэтому $\sigma(x, \xi)$ инъективно при $\xi \neq 0$. Но $\dim N_x = \dim M_x = 2n$. Значит, $T_{X_0}\bar{\Delta}$ — *эллиптический оператор* и $\bar{\Delta}$ (а значит, и Δ) фредгольмов.

Вычисление индекса $T\bar{\Delta}$ извлекается из леммы 2.2.2; E_0 изотопно в классе п. э. о. почти-комплексной структуре, для которой результат следует из теоремы Римана—Роха—Атьи—Хирцебруха.

Применяя теорему F к случаю, когда W — расширенное фазовое пространство $X \times W'$ $(\dim W' = 2n)$, а X_0 — график решения f отношения E' на W', мы находим, что индекс равен

$$2c + n\chi,$$

где c — число Черна $c_1(f^*(TW'), J')[X]$ для некоторой почти-комплексной структуры J', гомотопной E'.

2.4.3. Для псевдопрямых в $(\mathbb{C}P^2, E)$ индекс Δ равен 4; для псевдообразующих в $(S^2 \times V^2, E)$ индекс равен 2.

В этих случаях $T\Delta$ сюръективно.

Действительно, сопряженный оператор к $T\bar{\Delta}$ имеет тот же вид, что и $T\Delta$, но при замене N на N' число Эйлера $\nu' = -\nu - \chi < 0$. Из замечания 2.3.3 следует, что коядро $T\bar{\Delta}$ равно нулю.

Как показал Гамильтон, в этом случае применима теорема типа Нэша — Мозера о «постоянном ранге»; Δ допускает локальные сечения. В частности, в случае псевдопрямых в $\mathbb{C}P^2$ $\Delta^{-1}(E)$ — четырехмерное многообразие, *если только оно не пусто*. В случае псевдообразующих линейчатой поверхности $\Delta^{-1}(E)$ — двумерное многообразие, тоже *если оно не пусто*. Громов исключает эту альтернативу, доказав, что Δ — *собственное* отображение.

3. ГЕОМЕТРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

3.1. Метод

3.1.1. В общем случае нет оснований ожидать компактности решения положительного эллиптического отношения, даже при условии ограниченности площади и при фиксации класса гомологий, представляемого решением. Это хорошо видно на примере коник на комплексной плоскости: семейство невырожденных коник $xy = \varepsilon$ (которые можно параметризировать сопоставлением $z \mapsto (z, \varepsilon/z)$, чем определяется отображение $\mathbb{C}P^1$ в $\mathbb{C}P^2$) «сходится» при $\varepsilon \to 0$ к объединению прямых $x = 0$ и $y = 0$. Чтобы параметризовать этот предел, требуются уже две сферы. Мы встречаемся с образованием «пузырей» — явлением, обнаруженным Саксом и Уленбек [32] при изучении гармонических отображений поверхности в риманово многообразие. Это явление имеет большое значение в нелинейном анализе.

Однако Громову удалось проконтролировать утрату компактности; например:

Теорема G (Громов). *Пусть (W^{2n}, ω) — замкнутое симплектическое многообразие и E_k — последовательность п. э. о., сходящаяся в C^∞-топологии к п. о. э. E_∞. Пусть для каждого $k < \infty$ f_k: $(X, \omega_0) \to W$ — решение E_k, где X — замкнутое многообразие, причем площади $f_k(X)$ ограничены. Тогда существует конечное множество точек $F \subset X$, решение f_∞: $X \to W$ отношения E_∞ и такая подпоследовательность f_{k_m} последовательности f_k, что f_{k_m} сходится к f_∞ вне F (C^∞-равномерно на компактах). Кроме того, графики отображений f_{k_m} сходятся в метрике Хаусдорфа в $X \times W$ к объединению графика X_∞ отображения f_∞ и конечного числа замкнутых множеств вида $x_l \times g_l(S^2)$, где $x_l \in F$ и g_l: $S^2 \to W$ — решение E_∞. Более того, если $x_l \in F$ и $f_{k_m}(x_l)$ не сходится к $f_\infty(x_l)$, то отображение g_l — не постоянное.*

3.1.2. Скажем, что двумерный класс гомологий симплектического многообразия *прост*, если он не является суммой двух классов, на каждом из которых $\omega > 0$. Если интересоваться только решениями п. э. о., класс гомологий которых прост, то теорема компактности имеет такой вид:

Теорема H (Громов). *Пусть (W^{2n}, ω) — замкнутое симплектическое многообразие, $a \in H_2(W; \mathbb{Z})$ — простой класс гомологий, и E_k — последовательность п. э. о., которая C^∞-сходится к п. э. о. E_∞. Пусть для каждого $k < \infty$ f_k: $S^2 \to W$ — решение E_k, для* *которого* $[f_k(S^2)] = a$. *Тогда существует такая последовательность диффеоморфизмов* h_k: $S^2 \to S^2$, *что некоторая подпоследовательность последовательности* $f_k \circ h_k$ *сходится в* C^∞*-топологии к решению* f_∞: $S^2 \to W$ *отношения* E_∞.

В соединении с анализом разд. 2.4 эта теорема влечет за собой теорему C и часть теоремы C′, касающуюся псевдопрямых, а значит, и теоремы B, B′ и A. Для доказательства оставшейся части теоремы C′ и теоремы E нужно воспользоваться теоремой G.

3.1.3. Теоремы G и H следуют из компактности «касп-кривых». Пусть X — замкнутая поверхность и Γ — конечное множество простых замкнутых попарно непересекающихся кривых γ_i на X. *Касп-кривой* $C(X, \Gamma)$ называется комплекс, полученный стягиванием каждой из кривых γ_i в точку. Этот комплекс можно получить также склеиванием конечного множества замкнутых поверхностей Y_j по конечному множеству точек. *Каспидальное решение* п. э. о. E на W — это отображение $C(X, \Gamma)$ в W, являющееся решением E на каждой из поверхностей Y_j.

Теорема K (Громов). *В предположениях теоремы G существует одномерное подмногообразие* $\Gamma \subset X$, *каспидальное решение* f_∞: $C(X, \Gamma) \to W$ *отношения* E_∞ *и такая последовательность диффеоморфизмов* h_k: $X \to X$, *что некоторая подпоследовательность последовательности* $f_k \circ h_k$ *сходится к* f_∞ C^∞*-равномерно на компактах из* $X \setminus \Gamma$. *Кроме того, образы отображений этой подпоследовательности сходятся в метрике Хаусдорфа к образу* f_∞.

3.1.4. Доказательство ведется следующим образом: после перепараметризации X и выделения подпоследовательности f_k можно найти такие кольца $A_i \subset X$, что $X' = X - \bigcup A_i$ отображается посредством f_k на поверхность с меньшим радиусом инъективности. После этого из X' удаляется подходящее конечное множество P_j, что позволяет выбрать подпоследовательность метрик g_k на $X'' = X' \setminus \bigcup P_j$, сходящихся по модулю перепараметризации X'' и для которых f_k будет равностепенно непрерывной последовательностью.

Затем предел подпоследовательности находится по теореме Асколи, и доказательство заканчивается продолжением отображений в точки P_j.

Ключевое место — равностепенная непрерывность, и здесь используется подходящий вариант *леммы Шварца*. Это — одно из наиболее интересных мест работы [9].

4. ОТ ПУАНКАРЕ И БИРКГОФА К РИМАНУ И ГИЛЬБЕРТУ

4.1. Незадолго до смерти Пуанкаре сформулировал в качестве гипотезы «одну геометрическую теорему» [33]: «Уже довольно давно я доказал существование периодического решения в задаче трех тел. Этот результат оставляет чувство некоторого неудовлетворения, так как из существования решения определенного типа для малых значений масс еще нельзя сделать заключения о случае больших масс, о том, какими будут решения и когда они исчезают. Размышляя об этом, я пришел к выводу, что ответ на этот вопрос зависит от того, верна или нет одна геометрическая теорема, формулировка которой в случае двух степеней свободы чрезвычайно проста». Формулировка теоремы: всякий диффеоморфизм кольца, изотопный тождественному, сохраняющий площадь и «поворачивающий граничные окружности в противоположные стороны», имеет не менее двух неподвижных точек.

В 1913 г., после смерти Пуанкаре, геометрическое доказательство этой теоремы было получено Биркгофом [34].

В «Новых методах» [35] Пуанкаре показал, как использовать критические точки производящих функций канонических преобразований для нахождения их неподвижных точек или их периодических точек (периодических решений второго типа). Эти методы обобщались Биркгофом [36], а позже — Арнольдом [16], который сформулировал гипотезы, обобщающие теорему Пуанкаре—Биркгофа на случай преобразований пространства $T^*\mathbb{T}^n$ и тора $\mathbb{T}^{2n}$. Конли и Цендер [12], [13] доказали эти гипотезы, используя вариационное исчисление. Как заметил Вейнстейн, их метод основан на рассмотрении бесконечномерной производящей функции; Шаперон [37] показал, как редуцировать это рассуждение к конечномерному случаю, и применил этот метод к задаче о лагранжевых пересечениях торов в кокасательном расслоении $T^*\mathbb{T}^n$. Эта задача была впоследствии полностью решена.

Теорема L (Лауденбах — Сикорав [38], Хофер [39]). *Пусть* V — *замкнутое* n*-мерное многообразие (отождествляемое с нулевым сечением в своем кокасательном расслоении* T^*V), *и пусть* φ_t, $t \in [0, 1]$, — *гамильтонова изотопия* T^*V *с компактным носителем (т. е.* φ_t *задано гамильтоновым векторным полем, определенным семейством гамильтонианов* h_t, *зависящих от времени, с компактными носителями). Тогда* $\varphi_1(V) \cap V$ *содержит не меньше, чем* $C(V)$, *точек, где* $C(V)$ — *минимальное число критических точек, которые может иметь гладкая измеримая функция на векторном расслоении* E *с базой* V, *ограничение которой* *на каждый слой совпадает вне некоторой окрестности нуля с невырожденной квадратичной формой.*

В недавней работе Сикорава показано, как использовать производящие функции для нахождения неподвижных точек.

4.2. Эти методы позволили получать оценки для числа неподвижных точек канонических преобразований в случаях проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ [40], поверхностей ([41], [42]) и даже в случае произвольного симплектического многообразия, если только гамильтонова изотопия C^0-мала [43] (последний результат, впрочем, непосредственно следует из теоремы L).

Ранее Элиашберг [44] получил доказательство в случае поверхностей, следуя пути, намеченному Пуанкаре в [35]. И именно на этом пути были получены его гипотезы о жесткости. Однако наиболее общий результат о неподвижных точках принадлежит Громову:

Теорема M (Громов). *Пусть (W^{2n}, ω) — замкнутое симплектическое многообразие, а φ_t, $t \in [0, 1]$, — гамильтонова изотопия W. Тогда φ_1 обязательно имеет неподвижные точки.*

Эта теорема доказана в [9] в предположении, что $[\omega]$ аннулирует сферические двумерные классы гомологий. Оценок на число неподвижных точек в настоящее время нет.

4.3. Для доказательства теоремы M Громов распространяет теорию псевдоголоморфных кривых на римановы поверхности с краем. Это также необходимо для нелинейного обобщения результата о конформном представлении (теорема D).

Пусть E — п. э. о. на симплектическом многообразии (W, ω). Погруженное лагранжево подмногообразие $V \subset W$ называется *ортогональным к E*, если существует такая окрестность U многообразия V в W и такая ее инволюция τ, что множество неподвижных точек τ совпадает с V и $\Lambda^2 D\tau$ переводит E в $\bar{E}$, где $\bar{E}$ — множество касательных 2-плоскостей к W, которые входят в E, но с *противоположной* ориентацией.

Если V замкнуто и ортогонально E, то *решения E с краем, лежащим в V*, f: $(X, \partial X) \to (W, V)$, обладают свойствами, похожими на свойства замкнутых решений E. Функциональный анализ из разд. 2.4 распространяется и на этот случай; индекс соответствующего оператора Фредгольма Δ в точке (X_0, ∂_0) равен

$$\mu + n\chi,$$

где μ — *число Маслова* кривой $\partial_0 \subset V$ [45].

Результаты о компактности получаются посредством перехода к «дублю» $X + \bar{X}$, т. е. склеиванию $(X, \partial X)$ с собой по краю.

Громов получил также очень сильный нелинейный аналог *альтернативы Фредгольма* (см. [9]):

Теорема N (Громов). *Пусть V — замкнутое погруженное лагранжево подмногообразие в $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$. Тогда существует (отличный от точки) голоморфный диск $(D^2, S^1) \to (\mathbb{C}^n, V)$.*

Следствие. *Класс $[\omega_0] \in H^2(\mathbb{C}^n, V; \mathbb{R})$ отличен от нуля.*

Погруженное лагранжево подмногообразие V в $\mathbb{R}^{2n}$ называется *точным*, если форма Лиувилля $x\,dy$ точна на V. В качестве следствия получаем отсутствие вложенных точных замкнутых лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{R}^{2n}$. Например, не существует замкнутых вложенных точных односвязных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{R}^{2n}$; тем самым Громов справляется с последним оставшимся сомнительным случаем S^3 в $\mathbb{R}^6$.

4.4. Теорема N подтверждает удивительную интуицию Римана [46]; как иначе интерпретировать то, что говорит Риман о данных, необходимых для задания аналитической функции в диске:

«Определение функции может быть произведено и таким образом, чтобы задано было в каждой точке свое уравнение, связывающее значения двух переменных, и при движении точки по границе это уравнение может непрерывно изменяться. Не исключаются и иные возможности: разделим, например, границу на n частей и каждой точке из одной части сопоставим $n-1$ точек из других частей — по одной из каждой части, а затем свяжем значения двух переменных в этих n точках уравнениями, изменяющимися непрерывно при изменении положения этих n выбранных точек. Эти условия, совокупность которых образует непрерывное множество и которые выражаются посредством уравнений, связывающих произвольные функции, являются, вообще говоря, необходимыми и достаточными условиями для определения функции, всюду непрерывной в данной области, только при дальнейшем ограничении, именно при добавлении равенств, связывающих входящие произвольные постоянные, так как, очевидно, изложенная теория не дает возможности вычислить эти постоянные».

4.5. Для доказательства теоремы M Громов обобщает теорему N, заменив пространство $\mathbb{C}^n$ многообразием $W \times \mathbb{C}$; затем он показывает, как, исходя из гамильтоновой изотопии W без неподвижных точек, построить лагранжево подмногообразие в $W \times W \times \mathbb{C}$, противоречащее следствию теоремы N (нужно подходящим образом склеить график изотопии с графиком обратной изотопии). Для знакомства с этой конструкцией читателю рекомендуется построить точный лагранжев тор T^2 в $\mathbb{C}^2$, склеивая график тождественного отображения кольца с графиком отображения, удовлетворяющего условию геометрической теоремы Пуанкаре.

4.6. Громов показал, что теорема N влечет существование экзотической симплектической структуры в $\mathbb{R}^{2n}$. Изучая сферы, вложенные в строго псевдовыпуклые области в $\mathbb{C}^n$, Громов доказал также существование экзотических контактных структур в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (случай $n=1$ см. в [14]).

В этом месте проявляется важное различие между симплектическими и контактными структурами: как кажется, изменение структуры ω_0 на компактном множестве не способно сделать ее экзотической, в то время как в контактном случае достаточно изменения на компакте.

Например, Громов показал, используя теорему E, следующее:

Теорема O (Громов). *Пусть* (W^4, ω) — *связное открытое симплектическое многообразие, для которого* $[\omega]$ *аннулирует* $\pi_2(W)$. *Если существуют компактные множества* $K \subset W$ *и* $K_0 \subset \mathbb{R}^4$ *и диффеоморфизм* f: $W \setminus K \to \mathbb{R}^4 \setminus K_0$, *для которого* $f^*\omega_0 = \omega$, *то* (W^4, ω) *симплектически изоморфно* $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$.

4.7. Громов доказал много других красивых теорем в работе [9], однако я хочу указать на важный результат, полученный Дузой Макдуфф с использованием [9]:

Теорема (Макдуфф [47]). *Существует замкнутое 8-мерное многообразие* Y *и гладкое семейство симплектических структур* ω_t, $t \in \mathbb{R}$, *на нем, для которого*

(i) *формы* ω_k *и* ω_{-k} *диффеоморфны для всех* $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) *все формы* ω_k, $k \in \mathbb{Z}$, *когомологичны друг другу*;

(iii) *для любых* $k, l \in N$, $k \neq l$, *формы* ω_k *и* ω_l *не диффеоморфны.*

4.8. *Замечание.* В [47] показано, что многообразие комплексных кривых положительной почти-комплексной структуры, лежащих в фиксированном классе гомологий, само обладает стабильной почти-комплексной структурой. По-видимому, из исследования п. э. о., проделанного в § 2, следует, что многообразие решений п. э. о. в фиксированном классе гомологий обладает канонической симплектической структурой. Не может ли это наблюдение послужить источником новых примеров симплектических многообразий?

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
2. Weinstein A. Lectures on symplectic manifolds, A. M. S., Conf. board, regional conferences in Math., № 29, 1977.

3. Арнольд В. И. Особенности систем лучей, Успехи мат. наук, 1983, т. 38, вып. 2, с. 77—148.
4. Guillemin V., Sternberg S. Symplectic techniques in physics, Cambridge University Press, 1984.
5. Arnold V. I. Catastrophe theory, Springer Verlag, 1984.
6. Lie S. Geometrie der Berührungstransformationen, Erster Band, Teubner, Leipzig, 1986.
7. Guillemin V. Infinite dimensional primitive Lie algebras, J. Diff. Geom., 4 (1970), 257—282.
8. Элиашберг Я. М. Жесткость симплектических и контактных структур,— препринт, Ленинград, 1981.
9. Gromov M. Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifolds, Invent. Math., 82 (1985), 307—347.
10. Gromov M. Partial differential relations, Springer-Verlag.
11. Herman M. Une remarque, manuscript, Paris, 1983.
12. Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold, Invent. Math. (1983), 33—49.
13. Chaperon M. Quelques questions de géometrie symplectique (d'après, entre autres, Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder), Sém. Bourbaki, Juin 1983. expose 610, Astérisque, 105—106 (1983), 231—249.
14. Douady A. Noeuds et structures de contact en dimension 3 (d'après D. Bennequin), Sém. Bourbaki, Février 1983, exposé 604, Astérisque 105—106 (1983), 129—148. [Имеется перевод в наст. сборнике.]
15. Bennequin D. Entrelacements et equations de Pfaff, 3 rencontre de Geometrie de Schnepfenried, vol. 1, Astérisque, 107—108 (1983), 87—161.
16. Arnold V. I. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique, C. R. Acad. Sci. Paris, 261 (Novembre (1965), Groupe 1, 3719—3722.
17. Gromov M. A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities, ICM 1970, Nice, 2, 221—225, 1971.
18. Lees J. On the classilication of Lagrange immersions, Duke Math. J. (1976), 43, 217—224.
19. Thurston W. Some simple examples of symplectic manifolds, Proc. A. M. S., 55 (1976), 467—468.
20. Fefferman G. The uncertainty principle, B. A. M. S., v. 9, № 2, (1983), 129—206.
21. Nijenhuis A., Wolf W. Some integration problem in almost complex and complex manifolds, Ann. Math., 77 (1963), 424—489.
22. Stolzenberg G. Volumes, limits and extensions of analytic varieties, Springer-Verlag, Lecture Note in Math. 19, 1966.
23. Gluck H., Warner F. Great circle fibrations of the three spheres, Duke Math. J., 50 (1983), 107—132.
24. Bers L. An outline of the theory of pseudoanalytic functions, B. A. M. S. 62 (1956), 291—332.
25. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
26. Лаврентьев М. А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, т. 12, с. 513—554.
27. Лаврентьев М. А. Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей. — Матем. сб., 1947, 21 (63), с. 285—320.
28. Bojarski B. V., Iwaniec T. Quasi-conformal mappings and non linear elliptic equations in two variables 1, 2, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. Astronom. Phys., 12 (1984), 473—478, 479—484.
29. Bers L. Mathematical aspect of subsonic and transonic gas dynamics, New York, Surveys in applied Math. III, J. Wiley & Sons, 1958.
30. Douglis A., Nirenberg L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. in pure and appl Math., 8 (1955), 505—538,

31. Hamilton R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser, B. A. M. S., v. 7, № 1 (1982), 65—222.
32. Sacks J., Uhlenbeck K. The existence of minimal immersions of two-spheres, Ann. Math., 113 (1981), 1—24.
33. Poincare H. Sur un theoreme de géométrie, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 33 (1912), 375—407.
34. Birkhoff G. D. Proof of Poincare's geometric theorem, Trans. AMS, 14 (1913), 14—22.
35. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 3, Paris, 1899. [Имеется перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики, Избранные труды, т. 2. — М.: Наука, 1972.]
36. Birkhoff G. Une généralisation à n dimensions du dernier théorème de géometrie de Poincaré, C. R. Acad. Sci., 192 (1931), 196—198.
37. Chaperon M. Une idee du type «géodésiques brisées» pour les systemes hamiltoniens, C. R. Acad. Sci., 298 (1984), 293—296.
38. Laudenbach F., Sikorav J.-C. Persistance d'intersections avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibre cotangent, Invent. Math. 82, № 2 (1985), 349—358.
39. Hofer H. Lagrangian embedding and critical point theory, Preprint, 1984.
40. Fortune B., Weinstein A. A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces, Preprint, 1984.
41. Sikorav J.-C. Points fixes d'une application homologue a l'identive, Preprint, 1984.
42. Floer A. Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations for certain Kähler manifolds, Preprint, 1984.
43. Weinstein A. C^0-perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections, Seminaire sud-rhodanien de geometrie III, Travaux en cours, Paris, Hermann, 1984.
44. Элиашберг Я. М. Оценка числа неподвижных точек преобразования, сохраняющего площадь. — Препринт, Сыктывкар, 1978.
45. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. — Функц. анал. и его прил., 1967, т. 1, с. 1—13.
46. Riemann B. Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe, Dissertation inaugurale, Göttingen, 1851.
47. McDuff D. Examples of symplectic structures, Preprint, 1985.

ПРИМЕЧАНИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Теория, изложенная в докладе, продолжает в настоящее время бурно развиваться, и я не стану перечислять всю относящуюся к этому предмету литературу. [1*] — [3*] — обзоры, в которых приведены списки литературы. Пожалуй, наиболее впечатляющие результаты, сводящие воедино методы Громова и вариационные методы, принадлежат Флёру [4*] — [5*].

1*. Gromov M. Soft and hard symplectic geometry, Proc. of IMC, Berkeley, 1986, 81—98.
2*. Zehnder E. The Arnold conjecture for fixed points of symplectic mappings and periodic solutions of Hamiltonian systems. Proc. of IMC, Berkeley, 1986, 1237—1245.
3*. D. McDuff. Elliptic methods in symplectic geometry. Lect. notes distr. in conj. with Progress in math. lecture, 92 MD summer meeting of AMS, Bulder, 1989.
4*. Floer A. Morse theory of Lagrangian intersections, J. of Diff. Geom. 28 (1988), 513—547.
5*. Floer A. Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, J. of Diff. Geom., 30 (1989), 207—222.

ЭНТРОПИЯ, ГОМОЛОГИИ И ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ [1]) (по И. Иомдину)

М. Громов

1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ

1.1. *Энтропия* разбиения Π множества X на N подмножеств определяется как $\operatorname{ent}\Pi = \log N$.

Назовем *пересечением* двух разбиений (обозначается $\Pi_1 \cap \Pi_2$) множества X его разбиение, состоящее из попарных пересечений элементов Π_1 и Π_2.

Для разбиения Π множества X и отображения $g\colon Y \to X$ обратный образ Π (разбиение Π_g множества Y) определяется очевидным образом. Если f — отображение из X в себя, то можно рассмотреть обратные образы Π относительно итераций f: $f^1 = f$ $f^2 = f \circ f, \ldots, f^i = f \circ f^{i-1}$. Положим

$$\Pi^i = \Pi \cap \Pi_f \cap \ldots \cap \Pi_{f^i}.$$

Пусть $\operatorname{ent}(\Pi; f, i) = i^{-1} \operatorname{ent}(\Pi^i)_g$. Аналогично для отображения $g\colon Y \to X$ определяется $\operatorname{ent}(\Pi | Y; f, i) = i^{-1} \operatorname{ent}(\Pi^i)_g$.

1.2. Пусть X — кубический многогранник, т. е. топологическое пространство, разбитое на кубы $\square$ таким образом, что два куба могут пересекаться лишь по общей грани. Обозначим через Π разбиение X на открытые кубы (т. е. кубы без границы, а не открытые как подмножества в X кубы) полиэдральной структуры на X. Пусть $\Pi(j)$ — измельчение Π, полученное делением каждого куба $\square$ на $j^{\dim \square}$ одинаковых подкубов. Теперь определим *топологическую энтропию* $\operatorname{ent} f$ отображения $f\colon X \to X$ как нижнюю грань чисел $h \geqslant 0$, обладающих следующим свойством:

(P) *Существует сколь угодно большое целое* $k \geqslant 0$ (*зависящее от* h), *такое, что*

$$\limsup_{i \to \infty} \operatorname{ent}(\Pi(j); f^k, i) \leqslant hk$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$.

[1]) Gromov M. Entropy, homology and semialgebraic geometry [after Y. Yomdin]. — Séminaire Bourbaki, 38 ème année, 1985—86, n° 663, Astérisque 145—146, 1987, p. 225—240.

31. Hamilton R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser, B. A. M. S., v. 7, № 1 (1982), 65—222.
32. Sacks J., Uhlenbeck K. The existence of minimal immersions of two-spheres, Ann. Math., 113 (1981), 1—24.
33. Poincare H. Sur un theoreme de géométrie, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 33 (1912), 375—407.
34. Birkhoff G. D. Proof of Poincare's geometric theorem, Trans. AMS, 14 (1913), 14—22.
35. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 3, Paris, 1899. [Имеется перевод: Пуанкаре А. Новые методы небесной механики, Избранные труды, т. 2. — М.: Наука, 1972.]
36. Birkhoff G. Une généralisation à n dimensions du dernier théorème de géometrie de Poincaré, C. R. Acad. Sci., 192 (1931), 196—198.
37. Chaperon M. Une idee du type «géodésiques brisées» pour les systemes hamiltoniens, C. R. Acad. Sci., 298 (1984), 293—296.
38. Laudenbach F., Sikorav J.-C. Persistance d'intersections avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibre cotangent, Invent. Math. 82, № 2 (1985), 349—358.
39. Hofer H. Lagrangian embedding and critical point theory, Preprint, 1984.
40. Fortune B., Weinstein A. A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces, Preprint, 1984.
41. Sikorav J.-C. Points fixes d'une application homologue a l'identive, Preprint, 1984.
42. Floer A. Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations for certain Kähler manifolds, Preprint, 1984.
43. Weinstein A. C^0-perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections, Seminaire sud-rhodanien de geometrie III, Travaux en cours, Paris, Hermann, 1984.
44. Элиашберг Я. М. Оценка числа неподвижных точек преобразования, сохраняющего площадь. — Препринт, Сыктывкар, 1978.
45. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. — Функц. анал. и его прил., 1967, т. 1, с. 1—13.
46. Riemann B. Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe, Dissertation inaugurale, Göttingen, 1851.
47. McDuff D. Examples of symplectic structures, Preprint, 1985.

ПРИМЕЧАНИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Теория, изложенная в докладе, продолжает в настоящее время бурно развиваться, и я не стану перечислять всю относящуюся к этому предмету литературу. [1*] — [3*] — обзоры, в которых приведены списки литературы. Пожалуй, наиболее впечатляющие результаты, сводящие воедино методы Громова и вариационные методы, принадлежат Флёру [4*] — [5*].

1*. Gromov M. Soft and hard symplectic geometry, Proc. of IMC, Berkeley, 1986, 81—98.
2*. Zehnder E. The Arnold conjecture for fixed points of symplectic mappings and periodic solutions of Hamiltonian systems. Proc. of IMC, Berkeley, 1986, 1237—1245.
3*. D. McDuff. Elliptic methods in symplectic geometry. Lect. notes distr. in conj. with Progress in math. lecture, 92 MD summer meeting of AMS, Bulder, 1989.
4*. Floer A. Morse theory of Lagrangian intersections, J. of Diff. Geom. 28 (1988), 513—547.
5*. Floer A. Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, J. of Diff. Geom., 30 (1989), 207—222.

ЭНТРОПИЯ, ГОМОЛОГИИ И ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ [1]) (по И. Иомдину)

М. Громов

1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ

1.1. *Энтропия* разбиения Π множества X на N подмножеств определяется как $\operatorname{ent}\Pi = \log N$.

Назовем *пересечением* двух разбиений (обозначается $\Pi_1 \cap \Pi_2$) множества X его разбиение, состоящее из попарных пересечений элементов Π_1 и Π_2.

Для разбиения Π множества X и отображения $g\colon Y \to X$ обратный образ Π (разбиение Π_g множества Y) определяется очевидным образом. Если f — отображение из X в себя, то можно рассмотреть обратные образы Π относительно итераций f: $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f, \ldots, f^i = f \circ f^{i-1}$. Положим

$$\Pi^i = \Pi \cap \Pi_f \cap \ldots \cap \Pi_{f^i}.$$

Пусть $\operatorname{ent}(\Pi;\ f,\ i) = i^{-1} \operatorname{ent}(\Pi^i)_g$. Аналогично для отображения $g\colon Y \to X$ определяется $\operatorname{ent}(\Pi \mid Y;\ f,\ i) = i^{-1}\operatorname{ent}(\Pi^i)_g$.

1.2. Пусть X — кубический многогранник, т. е. топологическое пространство, разбитое на кубы $\square$ таким образом, что два куба могут пересекаться лишь по общей грани. Обозначим через Π разбиение X на открытые кубы (т. е. кубы без границы, а не открытые как подмножества в X кубы) полиэдральной структуры на X. Пусть $\Pi(j)$ — измельчение Π, полученное делением каждого куба $\square$ на $j^{\dim \square}$ одинаковых подкубов. Теперь определим *топологическую энтропию* $\operatorname{ent} f$ отображения $f\colon X \to X$ как нижнюю грань чисел $h \geqslant 0$, обладающих следующим свойством:

(P) *Существует сколь угодно большое целое* $k \geqslant 0$ (*зависящее от* h), *такое, что*

$$\limsup_{i \to \infty} \operatorname{ent}(\Pi(j);\ f^k,\ i) \leqslant hk$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$.

[1]) Gromov M. Entropy, homology and semialgebraic geometry [after Y. Yomdin]. — Séminaire Bourbaki, 38 ème année, 1985—86, n° 663, Astérisque 145—146, 1987, p. 225—240.

Точно так же определяется и $\operatorname{ent} f|Y$ для каждого пространства Y с отображением $Y \to X$.

Это определение обосновывается следующей простой теоремой:

1.3. Топологическая инвариантность энтропии. *Если X компактно, а f непрерывно, то $\operatorname{ent} f$ не зависит от структуры (кубического) полиэдра на X. То же самое верно и для случая непрерывного отображения в X компактного пространства Y. Более того, если X конечномерно, а Y — компактное подмножество в X, инвариантное относительно f, то $\operatorname{ent} f|Y$ зависит лишь от Y и f: $Y \to Y$, но не от вложения $Y \to X$ при условии, что f непрерывно на Y.*

1.4. Замечание. Рассмотрим стандартное разбиение Π_{st} пространства $\mathbb{R}^n$ на единичные кубы — грани целочисленных переносов куба $\{0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n$. Энтропия, определенная Π_{st}, не будет топологически инвариантной на всем $\mathbb{R}^n$. Однако она инвариантна на каждом компактном подмножестве Y, если $f(Y) \subset Y$ и f непрерывно на Y. Таким образом, получается инвариантная энтропия для непрерывных отображений в себя произвольных конечномерных компактных пространств Y, поскольку Y отображается в некоторое $\mathbb{R}^n$.

1.4′. Примеры. (A) Рассмотрим линейное отображение f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и определим спектральный радиус

$$\operatorname{Rad} f = \lim \|f^i\|^{1/i} \quad \text{при} \quad \|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

Обозначим через $\wedge_* f = \wedge_0 f \oplus \wedge_1 f \oplus \ldots \oplus \wedge_n f$ полную внешнюю степень f. Легко показывается, что энтропия (для стандартного разбиения $\mathbb{R}^n$) удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ent} f|Y = \log \operatorname{Rad} \wedge_* f$$

для каждого непустого ограниченного открытого подмножества Y в $\mathbb{R}^n$.

(B) Пусть f — эндоморфизм тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Легко видеть, что

$$\operatorname{ent} f = \operatorname{ent} \tilde{f}\,|Y$$

для накрывающего линейного отображения $\tilde{f}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и любого непустого ограниченного открытого подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$. Из (A) следует, что

$$\operatorname{ent} f = \log \operatorname{Rad} f_*,$$

где f_* — индуцированный эндоморфизм вещественных гомологий $H_*(T^n)$.

(C) Для каждого *голоморфного* отображения f: $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$

$$\operatorname{ent} f = \log \operatorname{Rad} f_*. \qquad (*)$$

Более того, $\operatorname{ent} f|Y = \operatorname{ent} f$ для каждого подмножества $Y \subset \mathbb{C}P^n$, дополнение до которого неплотно и инвариантно относительно f. Например, если f на $\mathbb{C}P^1$ задана полиномом f_0 на $\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}P^1$ степени $d > 0$, то $\operatorname{ent} f|Y = \log d$ для $Y = \{|z| \leqslant r\} \subset \mathbb{C}$ при условии, что $|f(z)| \geqslant r$ при $|z| \geqslant r$.

Отметим, что $\operatorname{Rad} f_*$ равен топологической степени $\deg f$ для каждого непрерывного отображения $\mathbb{C}P^n$ в себя при $\deg f > 0$.

Доказательство $(*)$ состоит из двух шагов. Первый — показать, что

(C1) $$\operatorname{ent} f \geqslant \log \deg f.$$

Второй — что

(C2) $$\operatorname{ent} f \leqslant \log^+ \deg f,$$

где обозначение $\log^+ t = \max\{0, \log t\}$ вводится, чтобы охватить случай $\deg = 0$.

Первое неравенство — немедленное следствие теоремы Мисюревича и Пржитицки (см. [4]):

1.5. Теорема. *Пусть f есть C^1-гладкое отображение компактного многообразия X в себя, причем прообраз $f^{-1}(x)$ состоит из не менее чем d точек для всех x из подмножества полной меры в X. Тогда* $\operatorname{ent} f \geqslant \log d$.

Второе неравенство (C2) следует из (очевидной) оценки

$$\operatorname{Vol} \Gamma_{f^i} \leqslant \mathrm{const} \cdot d^i$$

для $2n$-мерного объема графиков $\Gamma_{f^i} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ итераций f (см. 2.4).

1.6. Элементарные свойства энтропии

Приведенный ниже список фактов дает представление о значении энтропии в динамике отображений. Доказательства этих фактов совершенно прямолинейны.

(i) Для любых двух подмножеств X

$$\operatorname{ent} f|Y_1 \cup Y_2 = \max_{i=1,2} \operatorname{ent} f|Y_i.$$

(ii) Если $Y_1 \subset Y_2$, то $\operatorname{ent} f|Y_1 \leqslant \operatorname{ent} f|Y_2$.

(iii) Рассмотрим два непрерывных отображения в себя компактных пространств f_i: $X_i \to X_i$ при $i = 1, 2$. Пусть F: $X_1 \to X_2$ — непрерывное отображение, коммутирующее с f_i. Если F — отображение на, то $\operatorname{ent} f_1 \geqslant \operatorname{ent} f_2$. Если прообраз $F^{-1}(x)$ для каждого $x \in X_2$ конечен, то $\operatorname{ent} f_1 \leqslant \operatorname{ent} f_2$.

(iv) Предположим, что непрерывное отображение $f\colon X \to X$ тождественно на замкнутом подмножестве $X_0 \subset X$, а на дополнении $\Omega = X \setminus X_0$ является блуждающим, т. е. каждая точка $x \in \Omega$ имеет такую окрестность U, что при достаточно больших i $f^i(U)$ не пересекается с U. Тогда $\operatorname{ent} f = 0$ при условии, что X компактно.

Примеры. (а) Пусть f — линейное отображение из $\mathbb{R}^2$ в себя с двумя вещественными собственными значениями, отличными от ± 1. Такое отображение — блуждающее вне начала координат, однако $\operatorname{ent} f \mid Y$ может быть положительной на ограниченных подмножествах Y в $\mathbb{R}^2$ (см. разд. 1.4.A). Теперь расширим f до проективного отображения $\bar{f}$ проективной плоскости $P^2 \supset \mathbb{R}^2$ в себя. Это отображение $\bar{f}$ оставляет неподвижными, кроме начала координат в $\mathbb{R}^2$, еще две точки на проективной прямой $P^1 = P^2 \setminus \mathbb{R}^2$, соответствующие двум собственным подпространствам f (если собственные значения совпадают, то $\bar{f}$ тождественно на P^1). Как и f, $\bar{f}$ — блуждающее отображение вне множества неподвижных точек. Так как P^2 компактно, то $\operatorname{ent} \bar{f} = 0$ согласно (iv) (ср. с (С2)). Отметим, что $\operatorname{ent} f \mid Y \neq \operatorname{ent} \bar{f} \mid Y$ для $Y \subset \mathbb{R}^2 \subset P^2$, причем энтропия в $\mathbb{R}^2$, определенная стандартным разбиением $\mathbb{R}^2$ на «кубы», действительно зависит от разбиения и топологически неинвариантна.

(b) Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное в полярных координатах как $f\colon (\rho, \theta) \mapsto (\lambda\rho, d\theta)$ при некотором $\lambda > 1$ и целом d. Ясно, что это отображение продолжается до непрерывного отображения $\bar{f}$ одноточечной компактификации $\mathbb{R}^2$ (т. е. $S^2 \supset \mathbb{R}^2$) в себя. Отображение $\bar{f}$ — блуждающее вне двух очевидных неподвижных точек. Поэтому $\operatorname{ent} \bar{f} = 0$ и $\bar{f}$ нарушает неравенство $\operatorname{ent} \geqslant \log |\deg|$ при $|d| \geqslant 2$ (здесь $\deg \bar{f} = d$), а также теорему 1.5. Причина этому — негладкость f в начале координат $0 \in \mathbb{R}^2$.

2. ЭНТРОПИЯ И РОСТ ОБЪЕМА

2.1. Пусть X — гладкое риманово многообразие (например, подмногообразие в $\mathbb{R}^n$), а $f\colon X \to X$ есть C^1-гладкое отображение. Для l-мерного подмногообразия $Y \subset X$ положим

$$\log \operatorname{vol}(f \mid Y) = \limsup_{i \to \infty} i^{-1} \log \operatorname{Vol}(\Gamma_{f^i} \mid Y),$$

где $\Gamma_{f^i} \mid Y \subset Y \times X$ обозначает график i-й итерации f на Y, а Vol — это l-мерный риманов объем.

Отметим, что $\log \operatorname{Vol}$ можно ограничить нормой дифференциала $Df\colon T(X) \to T(X)$:

$$\log \operatorname{Vol}(f \mid Y) \leqslant \log^+ \| Df \|^l,$$

где $\| Df \| \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_x \| Df \mid T_x(X) \|$.

В этом неравенстве можно (очевидно) заменить $\|Df\|$ на $\operatorname{Rad} Df$, где[1])

$$\operatorname{Rad} Df \overset{\mathrm{def}}{=} \limsup_{i \to \infty} \| Df^i \|^{1/i}.$$

Отметим, что $\operatorname{Rad} Df \leqslant \|Df\|$, причем $\operatorname{Rad} df$ (в отличие от $\|Df\|$) не зависит от выбора римановой метрики на X (если X — компакт).

2.2. Теорема Иомдина. *Пусть f — отображение компактного C^∞-многообразия X в себя степени гладкости C^r, а $Y \subset X$ — компактное C^r-подмногообразие. Тогда*[2])

$$\log \operatorname{Vol}(f \mid Y) \leqslant \operatorname{ent}(f \mid Y) + \log^+ (\operatorname{Rad} Df)^{l/r}. \qquad (*)$$

В частности, если f и Y класса C^∞, то

$$\log \operatorname{Vol}(f \mid Y) \leqslant \operatorname{ent}(f \mid Y) \leqslant \operatorname{ent} f. \qquad (**)$$

2.3 Следствие (случай C^∞-отображений в гипотезе Шуба об энтропии). *Если f класса C^∞, то*

$$\operatorname{ent} f \geqslant \log \operatorname{Rad} f_*, \qquad (***)$$

где $\operatorname{Rad} f_*$ — спектральный радиус индуцированного отображения вещественных гомологий $f_*\colon H_*(X) \to H_*(X)$.

Доказательство. Рассмотрим пары замкнутых форм ω_1 и ω_2 на $X \times X$ при $\deg \omega_1 + \deg \omega_2 = \dim X$. Заметим, что $\operatorname{Rad} f_* =$

$$= \operatorname{Rad} f^* = \sup_{\omega_1, \omega_2} \limsup_{i \to \infty} \left| \int_{\Gamma_{f^i}} \omega_1 \times \omega_2 \right|^{1/i} \leqslant \limsup_{i \to \infty} (\operatorname{vol} \Gamma_{f^i})^{1/i}.$$

Замечание. Ясно, что спектральный радиус f_* на H_l ограничен ростом объема l-симплексов фиксированной триангуляции V при итерациях отображения f.

2.3.A. Пример. Если f — блуждающее отображение вне множества неподвижных точек f (см. 1.6(IV)), то каждое собственное значение λ отображения f_* на $H_*(X)$ удовлетворяет $|\lambda| \leqslant 1$.

[1]) Здесь и далее $Df^i = D(f^i)$ — *Прим. перев.*

[2]) l — размерность Y. — *Прим. перев.*

2.4. Верхняя оценка для энтропии. За несколько месяцев до того, как Иомдин получил свой результат, Шелдон Ньюхауз [6] обнаружил следующее обратное к (**) утверждение, касающееся C^2-отображений в себя компактных многообразий:

$$\operatorname{ent} f \leqslant \sup_Y \log \operatorname{Vol}(f \mid Y),$$

где sup берется по всем компактным C^∞-подмногообразиям $Y \subset X$. Ранее Феликс Пржитицки доказал аналогичное неравенство для диффеоморфизмов [P].

2.5. Полунепрерывность энтропии. Используя (****) и свою основную лемму (см. 3.4), Иомдин показывает, что

$$\limsup_{t \to 0} \operatorname{ent} f_t \leqslant \operatorname{ent} f_0$$

выполнено для каждого C^∞-гладкого при $t \in [0, 1]$ семейства C^∞-отображений f_t: $X \to X$ компактного многообразия X.

Пример разрывности энтропии. Рассмотрим отображение f_τ: $z \longmapsto (1-\tau) z^2$ единичного диска в $\mathbb{C}$ в себя при $\tau \in [0, 1]$. Тогда $\operatorname{ent} f_0 = 2$ (см. 1.4.C), а $\operatorname{ent} f_\tau = 0$ при $\tau > 0$, так как при $\tau > 0$ отображение f_τ — блуждающее вне центра диска.

2.6. Неравенство Иомдина (*) неулучшаемо. Для доказательства достаточно рассмотреть график функции $y = x^{r+\varepsilon} \sin x^{-1}$ в качестве $Y \subset \mathbb{R}^2$. Это подмногообразие C^r-гладко при любом r и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим проективное отображение f из $P^2 \supset \mathbb{R}^2$ в себя, полученное продолжением линейного отображения $(x, y) \longmapsto (x/2, 2y)$ из $\mathbb{R}^2$ в себя. Тогда длина $f^i(Y)$ будет примерно равна $2^{\frac{i}{r+\varepsilon}} = (\operatorname{Rad} Df)^{i/r+\varepsilon}$, в то время как $\operatorname{ent} f = 0$. Устремив ε к нулю, получим неулучшаемость (*). Если вас интересуют Y класса C^∞, а f — класса C^r, то вам нужно лишь изменить гладкую структуру на P^2.

2.7. Несколько замечаний об истории вопроса. Соответствие между энтропией и топологией было открыто Динабургом [1], заметившим, что отображение переноса за единичное время f^1 геодезического потока на компактном римановом многообразии удовлетворяет $\operatorname{ent} f^1 > 0$, если фундаментальная группа $\pi_1(V)$ имеет экспоненциальный рост. Этот результат получается при рассмотрении универсальной накрывающей для V и применении следующего простого факта к ассоциированному накрытию касательного расслоения V:

(A) *Пусть $\tilde{X} \to X$ — накрытие Галуа конечного (кубического) комплекса X. Пусть отображение f: $X \to X$ поднимается до непрерывного отображения $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \tilde{X}$. Если компактное подмножество $Y \subset \tilde{X}$ проектируется на X, то*

$$\operatorname{ent} \tilde{f} \mid Y = \operatorname{ent} f,$$

где $\operatorname{ent} \tilde{f}$ вычисляется при индуцированной кубической структуре на $\tilde{X}$.

Отметим, что из неравенства Иомдина (**) также следует $\operatorname{ent} f^1 > 0$ при условии, что V гладко класса C^∞ (доказательство Динабурга зависит лишь от непрерывности геодезического потока). На самом деле неравенство $\operatorname{ent} f^1 > 0$ следует из (**) для любого C^∞-гладкого V, на котором две точки общего положения соединяются по крайней мере C^λ геодезическими сегментами длины $\leqslant \lambda$ для всех $\lambda \geqslant 1$ при некотором $C > 1$. Такая нижняя оценка для числа геодезических сегментов удовлетворяется, например, для односвязных многообразий V, числа Бетти b_i пространства петель которых растут экспоненциально при $i = 1, 2, \ldots$ (см. [2]).

(B) Маннинг [3] доказал, что спектральный радиус f_*: $H_1(X) \to H_1(X)$ дает оценку (снизу)

$$\operatorname{ent} f \geqslant \log \operatorname{Rad} f_* \mid H_1(X)$$

для каждого непрерывного отображения компактного полиэдра X (для этого нужно применить (A) к максимальному абелеву накрытию $\tilde{X} \to X$), а Мисюревич и Пржитицки [5] уточнили это неравенство для пространств X, гомотопически эквивалентных n-тору:

$$\operatorname{ent} f \geqslant \log \operatorname{Rad} f_* = \log \operatorname{Rad} \Lambda_* f_* \mid H_1(X).$$

(C) Шуб выдвинул гипотезу, что неравенство $\operatorname{ent} f \geqslant \log \operatorname{Rad} f_*$ удовлетворяется для C^1-отображений любых многообразий (для контрпримера в C^0-случае см. 1.6). В настоящий момент эта гипотеза установлена (помимо случая торов) для C^1-отображений сфер S^n (по 1.5) и для C^∞-отображений для любых X Иомдином в (***).

3. СВЕДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ИОМДИНА К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЛЕММЕ

3.1. C^r-размер подмногообразий. Зафиксируем целое $l = 1, 2, \ldots$ и определим C^r-размер подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$ как нижнюю грань чисел $s \geqslant 0$, для которых существует C^r-отображение единичного l-куба в $\mathbb{R}^n$ (обозначим его h: $[0, 1]^l \to \mathbb{R}^n$), образ которого содержит Y, а $\|D_r h\| \leqslant s$. Здесь $D_r h$ — вектор, образованный компонентами частных производных h порядка $1, 2, \ldots, r$, а под нормой имеется в виду супремум по $x \in [0, 1]^l$:

$$\|D_r h\| = \sup_x \|D_r h(x)\|.$$

Замечание. Вместо $[0, 1]^l$ можно использовать произвольное стандартное l-мерное многообразие (например, единичный шар в $\mathbb{R}^l$ или сферу S^l), что дает эквивалентное по существу определение C^r-размера.

3.2. Очевидно, что C^r-размер монотонно растет при росте r или увеличении $Y \subset \mathbb{R}^n$ и что C^1-размер ограничивает диаметр и l-мерный объем (т. е. хаусдорфову меру) Y:

$$C^1\text{-размер } Y \geqslant \max\left((\overline{\mathrm{Vol}\, Y})^{1/l},\ l^{-1/2} \operatorname{Diam} Y\right).$$

При l и n, равных единице, C^r-размер гладкой дуги Y в $\mathbb{R}^n$ совпадает с длиной Y. В то время как C^2-размер такого Y отвечает в известном смысле тотальной кривизне Y, о геометрическом смысле C^r-размера при $\max(r, l) \geqslant 2$ сказать что-нибудь точное затруднительно.

Если подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ имеет C^r-размер $\leqslant 1$, а f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ есть C^r-отображение, то по цепному правилу образ Y^1 отображения $f|_Y$ удовлетворяет неравенству

$$C^r\text{-размер } Y' \leqslant \mathrm{const}\, \|D_r f\|, \tag{1}$$

где универсальная константа зависит лишь от r, m и h. Фактически (1) остается справедливым, если f определено только на окрестности $U \supset Y$, $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащей образ соответствующего отображения h: $[0, 1]^l \to \mathbb{R}^n$. Если C^r-размер $(Y) \leqslant \varepsilon l^{-1/2}$, то годится ε-окрестность U_ε подмножества Y.

Каждое подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ C^r-размера $\leqslant S$ можно разбить на j^l подмножеств с C^r-размером $\leqslant S/j$ для любого $j = 1, 2, \ldots$. Для этого достаточно разбить куб $[0, 1]^l$ на j^l кубов $[0, j^{-1}]^l$ и использовать (очевидное) масштабное преобразование $[0, 1]^l \to [0, j^{-1}]^l$ для каждого куба разбиения.

3.3. Алгебраическая лемма. *Пусть* $Y \subset [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ — *множество общих нулей полиномов* $p_1, \ldots, p_k$ *в* $[0, 1]^n$, *причем* $\dim Y = l$. *Для любого* $r = 1, 2, \ldots$ *существуют целое* N_0, *зависящее только от* n, r *и* $\deg Y \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \deg p_i$, *и* C^r-*отображения* h_ν: $[0, 1]^l \to Y$ (*при* $\nu = 1, \ldots, N_0$), *образы которых покрывают* Y, *а* $\|D_r h_\nu\| \leqslant 1$ *при* $\nu = 1, \ldots, N_0$. *Более того,*

(i) *каждое* h_ν — *алгебраическое степени* $\leqslant d'$, *где* d' *зависит только от* r, $\deg Y$ *и* n (*т. е. график* h_ν *в* $[0, 1]^l \times \mathbb{R}^n$ *параметризуется некоторыми полиномами суммарной степени* $\leqslant d'$);

(ii) *каждое* h_ν — *вещественно-аналитический диффеоморфизм внутренности* $[0, 1]^l$ *на ее образ, причем образы* $[0, 1]^l$ *пересекаются только по границам кубов. Это означает, что если* $h_\nu(x) = h_{\nu'}(y)$, *то* x *и* y *лежат на границе* $[0, 1]^l$ *для любых* $\nu, \nu' = 1, \ldots, N_0$.

Доказательство этого факта будет дано в 4. Для получения некоторого представления читатель может рассмотреть гиперболу $xy = \varepsilon$ в квадрате $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2$ при малом положительном ε, например $\varepsilon = 0.0001$, и поискать h_ν при $r = 2$ и $N = 6$.

3.4. Основная лемма. *Пусть* Y — *произвольное подмножество графика* $\Gamma_g \subset \mathbb{R}^{l+m} \supset [0, 1]^l \times \mathbb{R}^m$ C^r-*отображения* g: $[0, 1]^l \to \mathbb{R}^m$. *Зафиксируем положительное число* $\varepsilon \leqslant 1$. *Тогда* Y *можно разбить на* $N \leqslant C\varepsilon^{-l}(1 + \|\partial_r g\|)^{l/r}$ *подмножеств* C^r-*размера* $\leqslant C\varepsilon \operatorname{Diam} Y$, *где* $\partial_r g$ *обозначает вектор, образованный частными производными* g *порядка* r, *а* $C = C(l, m, r)$ — *универсальная постоянная.*

Доказательство. После замены $g(x) \to a g(\lambda x) + b$ мы можем считать, что $Y \subset [0, 1]^l \times [1/3, 2/3]^m$, а $\operatorname{diam} Y = 1$. Теперь используя разбиения подмножества C^r-размера $\leqslant 1$ на j^l частей C^r-размера $\leqslant j^{-1}$, мы сводим лемму к случаю $\varepsilon = 1$. После этого можно зафиксировать малое $\delta > 0$, например $\delta = (m + l + r)^{-m+l+r}$, и положить k наименьшим целым с $k \geqslant \delta^{-1} \|\partial_r g\|^{1/r}$. Теперь покроем $[0, 1]^l$ образами аффинных отображений λ_ν: $[0, 1]^l \to [0, 1]^l$ вида $\lambda_\nu(x) = k^{-1}x + a_\nu$ в числе k^n, т. е. $\nu = 1, \ldots, k^n$. Композиция $g \circ \lambda_\nu$: $[0, 1]^l \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет $\|\partial_r(g \circ \lambda_\nu)\| \leqslant k^{-r} \|\partial_r g\|$ Это сводит лемму к случаю, когда $\|\partial_r g\| \leqslant \delta^r$. (Отметим, что именно на этом шагу мы получаем больший выигрыш при больших r.)

Теперь введем в рассмотрение полином Тейлора для g степени $r - 1$ в некоторой точке $x_0 \in [0, 1]^l$. Это полиномиальное отображение p: $[0, 1]^l \to \mathbb{R}^m$ степени (каждого монома) $r - 1$, удовлетворяющее (при $\|\partial_r g\| \leqslant \delta^r$ и малом δ)

$$\|\partial_i(p - g)\| \leqslant 1/3 \text{ для } i = 0, 1, \ldots, r$$

по теореме об остаточном члене в форме Тейлора.

Применим теперь алгебраическую лемму к части Y_0 графика p, лежащей в единичном кубе $[0, 1]^{l+m}$. Мы получаем N_0 отображений h_ν: $[0, 1]^l \to [0, 1]^l \times [0, 1]^m$ с $\|D_r h_\nu\| \leqslant 1$, покрывающих Y_0. Обозначим через $\bar{h}_\nu$ и $\tilde{h}_\nu$ компоненты h_ν, относящиеся к $[0, 1]^l$ и $[0, 1]^m$ соответственно, и заметим, что $\bar{h}_\nu = p \circ \bar{h}_\nu$, поскольку $\operatorname{Im} h_\nu \subset \Gamma_p$. Заменим $h_\nu = (\bar{h}_\nu, p \circ \bar{h}_\nu)$ на $h'_\nu = (\bar{h}_\nu, g \circ \bar{h}_\nu)$. Так как $\|p - g\| \leqslant 1/3$, образ h' содержит наше Y. Итак, мы оценили $D_r h'_\nu$ как

$$\|D_r h'_\nu\| \leqslant \|D_r h_\nu\| + \|D_r(h_\nu - h'_\nu)\| \leqslant 1 + \|D_r((p-g) \circ \bar{h}_\nu)\|.$$

Так как $\|D_r \bar{h}_\nu\| \leqslant 1$, а $\|D_r(p-g)\| \leqslant r/3$, по цепному правилу мы получаем

$$\|D_r h'_\nu\| < C(l, m, r),$$

что и является оценкой C^r-размера образов h'_ν, $\nu = 1, \ldots, N_0$, покрывающих Y.

3.5. Основное следствие. *Рассмотрим открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ и отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ класса C^r. Пусть $Y_0 \subset U$ — подмножество C^r-размера $\leqslant 1$, причем Y_0 удалено от границы ∂U множества U, а именно* $\operatorname{dist}(Y_0, \partial U) \geqslant \sqrt{l}$. *Тогда пересечение Y_1 образа $f(Y_0) \subset \mathbb{R}^m$ с каждым кубом $\square \subset \mathbb{R}^m$ величины* 1 *(т. е. диаметра $\sqrt{m}$) можно разбить на $N \leqslant C' \|D_r f\|^{l/r} + 1$ подмножеств C^r-размера $\leqslant 1$, где C' — некоторая постоянная, $C' = C'(l, m, r)$.*

Доказательство. Пусть $h\colon [0, 1]^l \to \mathbb{R}^m$ — отображение с $\|D_r h\| \leqslant 1$, покрывающее Y_0. Согласно цепному правилу, композиция[1]) $g = f \circ h$ удовлетворяет $\|D_r g\| \leqslant C''(l, m, r) \|D_r f\|$, так что основная лемма применима к $Y = \Gamma_g \cap ([0, 1]^l \times \square) \subset [0, 1]^l \times \mathbb{R}^m$. Так как Y отображается на Y_1 при проекции $[0, 1]^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, покрытие Y подмножествами C_r-размера $\leqslant 1$ (обеспеченное леммой) индуцирует искомое покрытие Y_1.

Замечание. Важным частным случаем будет случай линейного отображения f, которого в действительности будет уже достаточно для доказательства теоремы Иомдина.

3.6. Предположим, что f отображает U в себя, причем $\operatorname{dist}(f(U), \partial U) \geqslant \sqrt{l}$. Тогда следствие 3.5 применимо и к частям Y_1 C^r-размера $\leqslant 1$, существование которых утверждается в 3.5. Индукция по $i = 1, 2, \ldots$ приводит к следующему заключению.

Пусть $\square_1, \ldots, \square_i$ — произвольные кубы величины 1; *пусть $\square'_i$ — прообраз $\square_i$ относительно i-й итерации f^i отображения f, а Y_i — образ пересечения $Y_0 \cap \square'_1 \cap \square'_2 \cap \ldots \cap \square'_i$ относительно f^i.*

[1]) Ее существование гарантируется удаленностью Y_0 от ∂U. — *Прим. перев.*

Тогда Y_i можно разбить на $N_i \leqslant (C' \|D_r f\|^{l/r} + 1)^i$ подмножеств C^r-размера $\leqslant 1$. В частности,

$$\operatorname{vol} Y_i \leqslant (C' \|D_r f\|^{l/r} + 1)^i. \qquad (*)$$

3.7. *Оценка для* $\operatorname{Vol} f^i(Y_0)$. Пусть Π — ограничение стандартного кубического разбиения π_{st} пространства $\mathbb{R}^m$ на рассмотренное выше множество U. Тогда в обозначениях 1.1 из $(*)$ выводится

$$i^{-1} \log \operatorname{vol} f^i(Y_0) \leqslant \operatorname{ent}(\pi \mid Y_0;\ f,\ i) + l \mid_r \cdot \log \|D_r f\| + c, \qquad (**)$$

где $c = c(l, m, r)$.

3.8. Доказательство теоремы Иомдина. В первую очередь заметим, что достаточно рассматривать случай отображений $f\colon U \to U$, удовлетворяющих предположениям 3.6, поскольку каждое многообразие X погружается в некоторое $\mathbb{R}^m$, а каждое отображение $X \to X$ продолжается на трубчатую окрестность $U \subset \mathbb{R}^m$ подмногообразия X с нормальной проекцией $U \to X$. Более того, масштабное преобразование U в $\lambda_0 U$ при некотором $\lambda_0 \geqslant 1$ позволяет добиться сколь угодно большого значения $\operatorname{dist}(X, \partial U)$.

Затем рассмотрим (перенормированные) отображения $f_j\colon jU \to jU$ при $j = 1, 2, \ldots$, определяемые как $f_j(x) = jf(j^{-1}x)$, и заметим, что

(i) $\|\partial_r f_j\| = j^{-r+1} \|\partial_r f\|$;

(ii) разбиение π множества jU на единичные кубы соответствует разбиению $\pi(j)$ множества U на j^{-1}-кубы;

(iii) множество jY_0 может быть разбито на j^l частей C^r-размера $\leqslant 1$.

Но по определению $\operatorname{ent} f \mid Y_0$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое k, что

$$\operatorname{ent}(\pi(j) \mid Y_0;\ f^k,\ i) \leqslant k \operatorname{ent} f \mid Y_0 + k\varepsilon$$

для любого j и достаточно большого i (зависящего от j^l и k). Это эквивалентно

$$\operatorname{ent}(\pi \mid jY_0;\ f_j^k,\ i) \leqslant k \operatorname{ent} f \mid Y_0 + k\varepsilon.$$

Теперь выберем j достаточно большим для достижения

$$\|D_r f_j^k\| \leqslant (1 + \varepsilon) \|Df^k\|,$$

что возможно по (i). Применив $(**)$ к f^k и разбиению jY_0 на j^l частей C^r-размера $\leqslant 1$ (см. (iii)), мы заключаем, что

$$i^{-1} \log j^{-l} \operatorname{Vol} f^{ki}(Y_0) \leqslant k \operatorname{ent} f \mid Y_0 + l/r \log \|Df^k\| + k\varepsilon \left(1 + \frac{l}{r}\right) + c$$

для достаточно больших i. Положим $i\to\infty$ и заметим, что

$$\limsup_{i\to\infty} i^{-1}\log \operatorname{Vol} f^{ki}(Y)=k\limsup_{i\to\infty} i^{-1}\log\operatorname{Vol} f^{i}(Y)$$

для каждого компактного подмногообразия $Y\subset X$. Поэтому

$$\limsup_{i\to\infty} i^{-1}\log\operatorname{Vol} f^i(Y_0)\leqslant \operatorname{ent} f\,|\,Y_0+\frac{l}{kr}\log\|Df^R\|+\varepsilon\left(1+\frac{l}{r}\right)+c/k.$$

Положим теперь $k\to\infty$, а $\varepsilon\to 0$. Мы получаем

$$\limsup_{i\to\infty} i^{-1}\log\operatorname{Vol} f^i(Y_0)\leqslant \operatorname{ent} f\,|\,Y_0+l/r\log^+\operatorname{Rad} Df$$

для всех подмножеств $Y_0\subset X$ с C^r-размером $\leqslant 1$. Так как произвольное компактное l-мерное подмногообразие Y может быть покрыто конечным числом частей C^r-размера $\leqslant 1$, это неравенство остается справедливым для любого Y.

Для доказательства неравенства Иомдина (*) из 2.2 достаточно подставить объем графика $\Gamma_{f^i}|Y$ вместо объема образа $f^i(Y)$ (мы использовали графики, а не образы в основном для того, чтобы избежать проблем кратности для инъективных отображений). Для этого заметим, что $\Gamma_{f^i}|Y=F^i(\Gamma_{\mathrm{Id}}|Y)$, где $F\colon (y, x)\mapsto (y, f(x))$, причем $\operatorname{ent} f\,|\,Y=\operatorname{ent} f\,|\,(\Gamma_{\mathrm{Id}}|Y)$. Поэтому подстановка F вместо f в неравенство приводит к неравенству Иомдина (*) для f.

3.9. C^r-энтропия и полунепрерывность. Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_i$: $[0, 1]\xrightarrow{l}\mathbb{R}^m$ — отображения класса C^r. В этом случае набор отображений $h_1, \ldots, h_N$: $[0, 1]^l\to[0, 1]^l$, образы которых покрывают $[0, 1]^l$, называется ε-покрытием, если $\|D_r h_\nu\|\leqslant\varepsilon$ и $\|D_r(g_j\circ h_\nu)\|\leqslant\varepsilon$ для любого $j=0, \ldots, i$ и $\nu=1, \ldots, N$. Пусть $\operatorname{ent}_\varepsilon(g_0, \ldots, g_i)=\log N$, где N — минимальное возможное для ε-покрытия. Заметим, что

$$\operatorname{ent}_\varepsilon\leqslant\operatorname{ent}_\delta\leqslant\operatorname{ent}_\varepsilon+\log k^l$$

при $k^{-1}\varepsilon\leqslant\delta\leqslant\varepsilon$ при любом $k=1, 2, \ldots$.

Далее, если $\{h_\nu\}$ есть ε-покрытие для $g_0, \ldots, g_i$, а $\{h_{\mu\nu}\}$ есть ε-покрытие для композиций $g_j\circ h_\nu$ при $j=1, \ldots, i$, $\nu=1, \ldots, N$, то $h_\nu\circ h_{\mu\nu}$ — также ε-покрытие для $g_0, \ldots, g_i$, если только $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0=\varepsilon_0(l, m, r)>0$ — универсальная постоянная.

Теперь рассмотрим C^r-отображение $f\colon X\to X$ для гладкого компактного подмногообразия $X\subset\mathbb{R}^m$; пусть $g\colon [0, 1]^l\to X$ имеет гладкость C^r. Тогда предел

$$\limsup_{i\to\infty} i^{-1}\operatorname{ent}_\varepsilon(g, f\circ g, \ldots, f^i\circ g\}$$

не зависит от $\varepsilon>0$, согласно предшествующему обсуждению. Он называется C^r-*энтропией* $\operatorname{ent}^r(f|g)$. Ясно, что

$$\operatorname{ent}^r(f^k|g)=k\operatorname{ent}^r(f|g)$$

для любого $k=1, 2, \ldots$, причем $\operatorname{ent}^r(f|g)\geqslant\operatorname{ent} f\,|\,g([0, 1]^l)$ при любом $r=1, 2, \ldots$.

Теперь положим

$$\operatorname{ent}_\varepsilon(f, i)=\sup i^{-1}\operatorname{ent}_\varepsilon(g, f\circ g, \ldots, f^i\circ g),$$

где верхняя грань берется по всем g с $\|D_r g\|\leqslant 1$. Если ε меньше приведенного выше $\varepsilon_0=\varepsilon_0(l, m, r)$, то очевидно, что при любых $i, j=1, 2, \ldots$.

$$\operatorname{ent}_\varepsilon(f, i+j)\leqslant(i+j)^{-1}(i\operatorname{ent}_\varepsilon(f, i)+j\operatorname{ent}_\varepsilon(f, j)).$$

Поэтому при $\varepsilon<\varepsilon_0$ существует предел

$$\operatorname{ent}^{r,l}(f)=\lim_{i\to\infty}\operatorname{ent}_\varepsilon(f, i),$$

который не зависит от ε и полунепрерывен по f.

Если f_τ C^n-гладко зависит от $\tau\in[0, 1]$, то

$$\limsup_{\tau\to 0}\operatorname{ent}^{r,l} f_\tau\leqslant\operatorname{ent}^{r,l} f_0.$$

Заметим также, что

$$\operatorname{ent}^{r,l}(f)\geqslant\sup_g\operatorname{ent}^r(f|g),$$

где sup берется по всем C^r-отображениям $g\colon [0, 1]^l\to X$.

Замечание. Имеется следующая топологическая версия $\operatorname{ent}^{r,l}$. Рассмотрим все $Y\subset X$ с C^r-размером $\leqslant 1$ и положим

$$s(j, k, i)=\sup_Y\operatorname{ent}(\pi(j)\,|\,Y;\ f^k,\ i)$$

(ср. с 1.2). Определим

$$\operatorname{top}_r^l=\liminf_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty}\limsup_{i\to\infty} s(j;\ k,\ i).$$

Ясно, что

$$\operatorname{top}_r^l f\geqslant\sup_Y\operatorname{ent} f\,|\,Y,$$

где Y пробегает все C^r-подмногообразия X размерности l. Кроме того,

$$\operatorname{top}_r^l f\leqslant\operatorname{top}_r^n f=\operatorname{ent} f$$

при любом $r=1, \ldots$ и $l\leqslant n=\dim X$.

Теперь можно применить соображения из п. 3.4—3.8 непосредственно к C^r-энтропии (без перехода к объемам) и получить

$$\operatorname{ent}^r(f\,|\,g) \leqslant \operatorname{ent} f\,|\,g([0, 1]^l) + \frac{l}{r}\log^+ \operatorname{Rad} Df$$

для любого C^r-отображения g: $[0, 1]^l \to X$ или

$$\operatorname{ent}^{r,l} f \leqslant \operatorname{top}_r^l f + \frac{l}{r}\log^+ \operatorname{Rad} Df.$$

В частности, если f C^∞-гладкое, то

$$\operatorname{ent} f = \lim \operatorname{ent}^{r,n} X$$

при $n = \dim X$, а полунепрерывность $\operatorname{ent}^{r,n}$ влечет полунепрерывность $\operatorname{ent} f$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЛЕММЫ

4.1. Докажем сначала лемму для таких алгебраических кривых в (x, y)-плоскости, проекция которых на ось x конечнолистна. Такая кривая Y может, очевидно, быть разбита на $N \leqslant d^4$ сегментов с взаимнооднозначными проекциями на ось x. Этим мы редуцируем задачу к случаю, когда Y — график такой однозначной функции $y = y(x)$ (при $x \in [0, 1]$), что $\|y(x)\| = \sup_x |y(x)| \leqslant 1$.

Теперь разобьем $[0, 1]$ на меньшие отрезки точками, в которых производная y' функции y обращается в ± 1. Поменяем роли x и y на тех отрезках, где $|y'| \geqslant 1$, и сведем лемму к случаю функции $y = y(x)$ с $\|y'\| \leqslant 1$. Это доказывает лемму при $r = 1$, так как отображение $x \mapsto (x, y(x))$ переводит $[0, 1]$ в множество Y с $\|D_1\| \leqslant \sqrt{2}$, и очевидное разбиение на два 1/2-подынтервала даст $\|D_1\| \leqslant 1$.

При $r \geqslant 2$ предположим [1])

$$\|y'\| \leqslant 1,\ \|y''\| \leqslant 1,\ \ldots,\ \|y^{(r-1)}\| \leqslant 1$$

и разобьем $[0, 1]$ нулями производной $y^{(r+1)}(x)$. Тогда $y^{(r)}(x)$ монотонна на каждом подынтервале (на котором $y^{(r+1)}$ не меняет знака) и очевидно, что задача сводится к случаю, когда $y^{(r)}(x)$ положительна и монотонно убывает на $[0, 1]$. Эта монотонность и оценка $\|y^{(r-1)} \leqslant 1\|$ влекут за собой $y^{(r)}(x) \leqslant 2x^{-1}$ при $x \in [0, 1]$. Теперь прямое вычисление показывает, что функция $z(x) = y(x^2)$ удовлетворяет неравенствам

$$\|z^{(i)}\| \leqslant 10^r \text{ при } i = 1, \ldots, r,$$

[1]) Далее доказательство проводится индукцией по r. — *Прим. перев.*

и отображение $x \mapsto (x, z(x))$ вместе с дополнительным разбиением на 10^r сегментов дает доказательство алгебраической леммы для плоских кривых Y.

4.2. Теперь предположим, что Y — кривая в $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Мы можем предположить, что проекция Y на $\mathbb{R}$ конечнолистна. Тогда Y — график $n-1$ алгебраических функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$. Предположим по индукции, что функции $y_1, \ldots, y_{n-2}$ имеют ограниченные производные порядков $\leqslant r$. Используем ту же замену переменных $x \rightsquigarrow x(t)$, что и выше, для достижения ограниченности производных y_{n-1}. Тогда все функции $z_i(t) = y_i(x(t))$, $i = 1, \ldots, n-1$, имеют ограниченные производные (на некоторых подынтервалах), что, очевидно, влечет за собой алгебраическую лемму для Y.

4.3. Рассмотрим гладкую векторнозначную алгебраическую функцию l переменных, скажем $y = y(x_1, \ldots, x_l)$. Пусть компоненты частных производных порядка $\leqslant r$ по первым $l-1$ переменным ограничены по модулю единицей. Будем искать замену переменной x_l, обеспечивающую подобную оценку для всех частных производных. Индукция по s позволяет предположить, что частные производные порядков $\leqslant s \leqslant r$ по x_l ограничены. Обозначим через $\tilde{y} = \tilde{y}(x_1, \ldots, x_l)$ векторнозначную функцию, компоненты которой — частные производные порядков $\leqslant i_j$ по x_j, где

$$\sum_{j=1}^{l} i_j = r, \text{ а } i_l \leqslant s.$$

Пусть $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N$ — компоненты $\tilde{y}$; индукция по числу компонент позволяет предположить, что

$$\left\| \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \right\| \leqslant 1 \text{ при } \nu = 1, \ldots, M-1 < N.$$

Затем для каждого фиксированного значения $x_l \in [0, 1]$ рассмотрим множество максимумов $S(x_l) \subset x_l \times [0, 1]^{l-1} = [0, 1]^{l-1}$ функции $\left| \dfrac{\partial \tilde{y}_M}{\partial x_l} \right|$ переменных $x_1, \ldots, x_{l-1}$. Теперь, очевидно, существует разбиение $[0, 1]$ на подынтервалы, скажем на I_k, и однозначные алгебраические функции s_k: $I_k \to [0, 1]^{l-1}$, такие, что (a) число подынтервалов и $\deg s_k$ ограничиваются по $\deg \tilde{y}_M$; (b) $s_k(x_l) \in S(x_l)$ для всех k и $x_l \in I_k$. Определим $\tilde{S}_k$: $I_k \to [0, 1]^{l-1} \times [-1, 1]$ как $\tilde{s}_k$: $x_l \mapsto (s_k(x_l), \tilde{y}_M(x(x_l)))$ и применим конструкцию предыдущего раздела к каждой функции

$\tilde{s}_k(x_l)$. Это ограничит производные $\frac{d^i \tilde{s}_\beta(x_l)}{dx_l^i}$ при $i = 1, \ldots, r$ и любом k, что уже без труда дает оценку для $\frac{\partial \tilde{y}_M}{\partial x_l}$.

4.4. Теперь докажем алгебраическую лемму индукцией по $l = \dim Y$ для алгебраического множества $Y \subset [0, 1]^n$. Мы будем рассматривать такое Y как график алгебраического отображения y: $[0, 1]^l \to [0, 1]^{n-l}$. Предположим, что для каждого фиксированного значения $x_l \in [0, 1]$ существует такая замена переменных $x_1, \ldots, x_{l-1}$, что в новых переменных частные производные каждой ветви y ограничены универсальной постоянной. Более того, мы предположим, что эта замена переменных кусочно-алгебраична по y_l. Это приводит нас к ситуации предыдущего раздела. Так как использованные в 4.1 конструкции кусочно-алгебраичны для семейств функций алгебраически зависящих от параметров, то индукция действительно возможна, что и доказывает алгебраическую лемму.

4.5. Эти же самые аргументы дают (полу) алгебраическое клеточное разбиение произвольного *полуалгебраического множества* Y, причем клетки могут быть разбиты на симплексы (очевидным образом) с сохранением контроля над частными производными, а число симплексов ограничивается по $\deg Y$.

Напомним, что подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется *полуалгебраическим*, если оно представимо в виде конечного объединения своих попарно непересекающихся подмножеств $Y_1, \ldots, Y_k$, где каждое Y_i — связная компонента разности алгебраических множеств $Y_i \subset A_i \setminus B_i$. Сумма степеней полиномов, определяющих все A_i и B_i, называется степенью Y.

Дадим теперь точный вариант предыдущего замечания.

Лемма о триангуляции. *Существует такая постоянная $C = C(n, r)$, что каждое компактное полуалгебраическое подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ может быть триангулировано на $N \leqslant (\operatorname{diam} Y)^n \times (\deg Y + 1)^C$ симплексов, причем для каждого замкнутого k-симплекса триангуляции $\Delta \subset Y$ существует гомеоморфизм h_Δ правильного симплекса $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ с единичным ребром на Δ, такой, что h_Δ — алгебраический морфизм степени $\leqslant (\deg Y + 1)^C$ (т. е. график h_Δ — подмножество алгебраического множества размерности k и степени $\leqslant (\deg Y + 1)^C$), регулярный вещественно-аналитический внутри каждой грани Δ. (Здесь слово «регулярный» означает необращение в 0 дифференциала h_Δ на ненулевых векторах.) Более того, $\|D_r h_\Delta\| \leqslant 1$ для всех Δ. (Конечно же, только это неравенство придает этой триангуляции настоящий интерес.)*

Из этой леммы и рассуждений § 3 получаем следствие:

Теорема о триангуляции. *Пусть f — такое отображение в себя открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ класса C^r, что $\|D_r f\| < \infty$. Пусть $Y \subset U$ — компактное полуалгебраическое подмножество. Тогда существует последовательность триангуляций T_i множества Y, в которой T_{i+1} — измельчение T_i при $i = 1, 2, \ldots$, причем*

(a) *число N_i симплексов T_i удовлетворяет неравенству*

$$\limsup_{i \to \infty} i^{-1} \log N_i \leqslant \operatorname{ent} f \mid Y + \frac{l}{r} \log^+ \operatorname{Rad} Df,$$

где $l = \dim Y$ (если Y инвариантно под действием f, то это неравенство, очевидно, влечет за собой

$$\log \operatorname{Rad} f_* \mid H_*(Y) \leqslant \operatorname{ent} f \mid Y + \frac{l}{r} \log^+ \operatorname{Rad} Df);$$

(b) *для каждого k-симплекса Δ триангуляции T_i существует алгебраический гомеоморфизм h: $\Delta^k \to \Delta$ степени $\geqslant d_i$, удовлетворяющий $\| D_r (f^j \circ h) \| \leqslant \varepsilon_i$ при всех $j \leqslant i$, где*

$$i^{-1} \log d_i \to 0 \text{ при } i \to \infty$$

и $\varepsilon_i \to 0$. (Это утверждение вместе с (a) *уточняют* (**) *в 2.2.)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1971, т. 35, вып. 2, с. 324—366.
2. Gromov M. Homotopical effects of dilatation, J. of Differential Geometry, 13 (1978), 303—310.
3. Maning A. Topological entropy and first homology group. In: Dynam. Syst., Warwick, 1975.
4. Misiurewicz M., Przytycki F. Topological entropy and degree of smooth mappings, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Math., 25 : 6 (1977), 573—574.
5. Misiurewicz M., Przytycki F. Entropy conjecture for tori, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Math., 25 : 6 (1977), 575—578.
6. Newhouse S. Entropy and volume, Preprint, 1985.
7. Przytycki F. An upper estimate for topological entropy of smooth diffeomorphisms, Invent. Math., 59 : 3 (1980). 205—213.
8. Yomdin Y. Volume growth and entropy. Preprint IHES, 1986.
9. Yomdin Y. Addendum: C^k-resolution of semialgebraic mappings, Preprint Univ. of Negev, Beer—Sheva, Israël, 1986.

ПРОБЛЕМА ШОТТКИ И ГИПОТЕЗА НОВИКОВА [1])

Арно Бовиль

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая формулировка проблемы Шоттки звучит следующим образом. Пусть C — компактная риманова поверхность рода g. Выберем симплектический базис $(\gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant 2g}$ группы гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$ (это означает, что $\gamma_i\cdot\gamma_{i+g}=-\gamma_{i+g}\cdot\gamma_i=1$ и $\gamma_i\cdot\gamma_j=0$ для $|i-j|\neq g$) и какой-нибудь базис $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ пространства голоморфных 1-форм на C. По этим данным можно определить *матрицу периодов* Ω, имеющую g строк и $2g$ столбцов, по формуле $\Omega_{ij}=\int\limits_{\gamma_j}\omega_i$.

Будем писать $\Omega=(\sigma|\tau)$ с матрицами σ, τ из $M_g(\mathbb{C})$. Можно единственным образом выбрать базис (ω_i) так, чтобы матрица σ стала единичной. При таком выборе матрица $\tau\in M_g(\mathbb{C})$ зависит только от C и от базиса (γ_j). Из билинейных соотношений Римана следует, что матрица τ симметрична и что ее мнимая часть $\operatorname{Im}\tau$ невырожденна и положительно определена. Таким образом, матрица τ определяет точку *верхней полуплоскости Зигеля*

$$H_g=\{\tau\in M_g(\mathbb{C})\,|\,\tau={}^t\tau,\ \operatorname{Im}\tau>0\},$$

являющейся открытым подмножеством в $\mathbb{C}^{\frac{1}{2}g(g+1)}$, изоморфным однородному пространству $\mathrm{U}(g)/\mathrm{Sp}(2g)$.

Риманова поверхность рода g зависит от $3g-3$ параметров (для $g\geqslant 2$). Это число строго меньше размерности области Зигеля, если только $g\geqslant 4$, поэтому матрицы периодов должны удовлетворять нетривиальным соотношениям. Проблема Шоттки состоит в явном определении этих соотношений.

Эта проблема допускает простой перевод на геометрический язык. *Главнополяризованным абелевым многообразием* называется пара (A, Θ), состоящая из комплексного тора A и гиперповерхности Θ в торе A, определенной с точностью до сдвига; требуется, кроме того, чтобы дивизор Θ был обильным, но не допускал линейных шевелений, т. е. $\dim_{\mathbb{C}} H^0(A, \mathcal{O}_A(\Theta))=1$.

[1]) Beauville Arnaud. Le probléme de Schottky et la conjecture de Novikov Séminaire Bourbaki, 39 ème année, 1986—87. n° 675, Astérisque 152—153, 1987, p. 101—112.

Каждой матрице $\tau\in H_g$ соответствует главнополяризованное абелево многообразие (A_τ, Θ_τ), конструкцию которого мы сейчас опишем. Положим $A_\tau=\mathbb{C}^g/L_\tau$, где $L_\tau=\mathbb{Z}^g\oplus\tau\mathbb{Z}^g$ — полная решетка в $\mathbb{C}^g$, определенная матрицей τ. Определим на $\mathbb{C}^g\times H_g$ голоморфную функцию θ следующим образом:

$$\theta(z,\ \tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^g}\exp\pi i\,({}^tm\tau m+2\,{}^tmz). \tag{1}$$

Если матрица τ фиксирована, будем сокращенно писать $\theta(z)=\theta(z,\tau)$. Для произвольных $p, q\in\mathbb{Z}^g$ имеем

$$\theta(z+p+\tau q)=\theta(z)\exp\pi i\,(-{}^tq\tau q-2\,{}^tqz),$$

откуда следует, что дивизор функции θ инвариантен относительно сдвигов на точки решетки L_τ в $\mathbb{C}^g$ и поэтому определяет дивизор Θ_τ на многообразии A_τ. В теории тета-функций доказывается, что таким образом получаются все с точностью до изоморфизма главнополяризованные абелевы многообразия; более того, две матрицы τ и τ' порождают изоморфные главнополяризованные абелевы многообразия тогда и только тогда, когда существует элемент γ симплектической группы $\Gamma_g=\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, такой, что $\tau'=\gamma\tau$ (действие Γ_g на H_g определяется следующим образом: если $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, где a, b, c, d — матрицы из $M_g(\mathbb{Z})$, то $\gamma\tau=(a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$). Иначе говоря, аналитическое факторпространство $A_g=H_g/\Gamma_g$ является *пространством модулей* главнополяризованных абелевых многообразий размерности g.

Если теперь матрица τ является матрицей периодов римановой поверхности C, то главнополяризованное абелево многообразие (A_τ, Θ_τ) есть не что иное, как *якобиан* JC кривой C. С геометрической точки зрения JC параметризует дивизоры степени 0 на кривой C по модулю линейной эквивалентности. Если выбрать произвольный дивизор Δ степени $g-1$ на C, то множество классов дивизоров вида $p_1+\ldots+p_{g-1}-\Delta$ по всем точкам $p_i\in C$ составляет тета-дивизор на якобиане JC. Таким образом, проблема Шоттки состоит в том, чтобы охарактеризовать якобианы среди всех главнополяризованных абелевых многообразий, или, другими словами, описать в пространстве модулей A_g подмногообразие [1]) J_g якобианов.

[1]) Если условиться включать в J_g произведения конечного числа якобианов — а мы всегда именно так и будем поступать, — то многообразие J_g становится замкнутым подмногообразием в A_g размерности $3g-3$.

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Первоначально работа над проблемой Шоттки велась в аналитическом ключе: делались попытки написать уравнения, задающие подмногообразие J_g в A_g, через модулярные формы на H_g. Теория тета-функций дает некоторые из этих форм, например так называемые *тета-константы*:

$$(2)\quad \theta\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}(\tau)=\sum_{n\in Z^g}\exp\pi i\,[{}^t(n+p)\,\tau\,(n+p)+2\,{}^t(n+p)\,q]=$$
$$=\exp\pi i\,({}^tp\tau p+2\,{}^tpq)\,\theta\,(q+\tau p)\left(p,\ q\in\frac{1}{2}Z^g\right).$$

Тета-константы являются модулярными формами веса $1/2$ для подгруппы конечного индекса группы Γ_g, обозначаемой $\Gamma_g(4,8)$. Игуза [I1] доказал, что они определяют проективные координаты на факторе $H_g/\Gamma_g(4,8)$. Следовательно, всякое замкнутое подмногообразие заведомо должно представляться как множество нулей многочленов от тета-констант; задача состоит в эффективном определении этих многочленов в случае подмногообразия J_g.

Первый результат в этом направлении принадлежит Шоттки, который в 1888 г. предъявил многочлен шестнадцатой степени от тета-констант, инвариантный относительно Γ_4, отличный от нуля на A_4 и равный тождественно нулю на J_4 [S]. По-видимому, Шоттки считал само собой разумеющимся, что этот многочлен определяет в точности J_4, хотя на самом деле это было доказано только совсем недавно Игузой ([I2], см. также [F]).

В 1909 г. Шоттки и Юнг [S — J] дали систематический метод получения многочленов от тета-констант, обращающихся в нуль на J_g, из тождеств, которым удовлетворяют общие тета-константы в размерности $g-1$ (соотношения Шоттки — Юнга являются простыми следствиями теории многообразий Прима, см. [M]). Пусть S_g обозначает подмногообразие в A_g, определенное всеми уравнениями, которые получаются таким способом. Ван Геемен недавно доказал, что J_g является неприводимой компонентой S_g [vG]. Доказательство проводится индукцией по g с использованием компактификации Сатаке $\bar{A}_g$ многообразия модулей A_g, в которой можно установить связь между границей ∂S_g многообразия S_g в $\bar{A}_g$ и многообразием S_{g-1} меньшей размерности.

К сожалению, уравнения S_g не выписываются явно, поскольку не известна полная система тождеств, которым удовлетворяют тета-константы. Кроме того, не известно, какие еще компоненты (возможно) присутствуют в S_g.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Несколько иная точка зрения заключается в том, чтобы искать геометрические характеризации якобианов, которые могут привести к более или менее явным уравнениям. Упомянем, не задерживаясь на этом, что такие характеризации имеют приложения в других областях алгебраической геометрии, например в вопросах рациональности трехмерных алгебраических многообразий (см. [M — B]).

(A) *Особенности дивизора* Θ

Пусть C — кривая рода g и (JC,Θ) — ее якобиан. Явное описание дивизора Θ, данное в § 1, позволяет запараметризовать особое множество $\operatorname{Sing}\Theta$ специальными дивизорами на C (теорема Римана об особенностях); отсюда следует, что $\dim\operatorname{Sing}\Theta\geqslant g-4$. Обозначим через $\mathcal{N}^{(g)}_{g-4}$, или просто $\mathcal{N}_{g-4}$, подмногообразие в A_g, образованное главнополяризованными абелевыми многообразиями (A,Θ) с $\dim\operatorname{Sing}\Theta\geqslant g-4$. Как доказали Андреотти и Майер [A — M], якобианы заполняют неприводимую компоненту в $\mathcal{N}_{g-4}$. Они также предложили с теоретической точки зрения явную процедуру вывода уравнений $\mathcal{N}_{g-4}$ в терминах тета-констант и их вторых производных, хотя практическое применение этой процедуры представляется очень трудновыполнимым.

Множество $\mathcal{N}_{g-4}$ имеет другие компоненты, отличные от компоненты якобианов. Для рода 4 множество $\mathcal{N}_0$ является объединением J_4 и неприводимого дивизора θ_{null}, состоящего из главнополяризованных абелевых многообразий, на которых тета-константа обращается в нуль [B]. В случае рода 5 множество $\mathcal{N}_1$ состоит уже из пяти компонент, которые можно явно описать (см. [Do], [D2]). Для рода $g\geqslant 6$ имеется некоторый список компонент $\mathcal{N}_{g-4}$ [D2], но нет никаких гарантий его полноты.

(B) *Приводимость пересечений* $\Theta\cap\Theta_a$ *и трисекущие*

Идеей этого подхода мы обязаны работе [We], в которой для доказательства теоремы Торелли использовалось следующее соображение (см. также [D1]). Пусть C — кривая, (JC,Θ) — ее якобиан, p и q — две различные точки кривой C. Из явного описания тета-дивизора легко выводится приводимость пересечения $\Theta\cap\Theta_{p-q}$. Более точно, имеем [1])

$$(3)\qquad \Theta\cap\Theta_{p-q}\subset\Theta_{p-r}\cup\Theta_{s-q},$$

каковы бы ни были точки $p,\ q,\ r,\ s\in C$ с условием $p\neq q$.

[1]) Для любого главнополяризованного абелева многообразия $(A,\ \Theta)$ и любой точки a из A через Θ_a обозначается сдвиг $\Theta+a$ дивизора Θ.

Пусть теперь (A, Θ) — произвольное главнополяризованное абелево многообразие; чтобы избежать банальных усложнений, будем предполагать, что многообразие (A, Θ) *неприводимо*, т. е. не является произведением двух главнополяризованных абелевых многообразий положительной размерности. Пусть a, x, y — различные ненулевые точки многообразия A. Пусть выполнено условие

$$\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y. \tag{4}$$

Посмотрим на эту ситуацию несколько с другой стороны. Пусть ψ: $A \to \mathbb{P}^N$ (где $N = 2^g - 1$) — морфизм, ассоциированный с линейной системой $|2\Theta|$; его образом является *многообразие Куммера — Виртингера* $K(A, \Theta)$, изоморфное фактору $A/\{\pm 1\}$. Пусть ζ — точка A, такая, что $2\zeta = x + y$. Легко видеть, что включение (4) эквивалентно следующему свойству:

(5) *Точки* $\psi(\zeta)$, $\psi(\zeta - a)$, $\psi(\zeta - x)$ *в* $\mathbb{P}^N$ *лежат на одной прямой.*

В силу (3), это свойство выполняется для якобиана кривой C, если $a = p - q$, $x = p - r$, $2\zeta = p - q - r + s$, где p, q, r, s — точки C. Следовательно, куммерово многообразие якобиана допускает четырехмерное семейство трисекущих. Это свойство совершенно исключительно; на самом деле не нужно быть большим оптимистом, чтобы сформулировать следующую гипотезу:

Гипотеза о трисекущей. *Пусть (A, Θ) — неразложимое главнополяризованное абелево многообразие. Если куммерово многообразие $K(A, \Theta)$ допускает трисекущую, то (A, Θ) — якобиан.*

Вот несколько аргументов в пользу этой формулировки. Мною совместно с Дебарром [B — D] было показано, что существование трисекущей у многообразия $K(A, \Theta)$ влечет за собой неравенство $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geqslant g - 4$; отсюда по меньшей мере вытекает, что J_g является неприводимой компонентой множества всех главнополяризованных абелевых многообразий, обладающих трисекущей. Опираясь на этот результат, Дебарр доказал утверждение гипотезы в том случае, когда пара (A, Θ) является многообразием Прима [D3]. Это полностью доказывает гипотезу для размерностей 4 и 5. С другой стороны, мы познакомимся в § 4 с доказательством гипотезы Новикова, которая является инфинитезимальным вариантом гипотезы о трисекущей.

Наконец, можно ослабить гипотезу, попробовав охарактеризовать якобианы тем свойством, что на них имеется достаточно большое семейство трисекущих. Результаты в этом направлении были получены Ганнингом [G]; позже они были улучшены Вельтерсом [W2]. Сейчас я сформулирую критерий Вельтерса, который будет играть ключевую роль в геометрическом доказательстве гипотезы Новикова в § 4. Пусть (A, Θ) — главнополяризованное абелево многообразие, и пусть α, β, γ — различные точки A. Будем предполагать, что многообразие (A, Θ) неразложимо. Положим

$$V_{\alpha, \beta, \gamma} = \{\zeta \in A \mid \psi(\zeta + \alpha),\ \psi(\zeta + \beta),\ \psi(\zeta + \gamma) \ \textit{лежат на одной прямой}\}. \tag{6}$$

Мы уже видели, что если $A = JC$, $\alpha = 0$, $\beta = q - p$, $\gamma = r - p$, то множество $V_{\alpha, \beta, \gamma}$ содержит кривую $(C + p - q - r)/2$ (на самом деле имеет место равенство). Обратно, Вельтерс доказывает, что условие $\dim V_{\alpha, \beta, \gamma} \geqslant 1$ справедливо только в том случае, если (A, Θ) — якобиан. Упомянем также другой результат Вельтерса, который тоже опирается на метод Ганнинга: если куммерово многообразие $K(A, \Theta)$ допускает непрерывное семейство трисекущих и $\dim \operatorname{Sing} \Theta \leqslant g - 4$, то пара (A, Θ) является якобианом [W — 1].

(C) *Другие методы*

В связи с гипотезой о трисекущей сформулируем одну близкую к ней задачу: характеризует ли якобианы существование в A подмногообразия, класс когомологий которого в $H^4(A, \mathbb{Z})$ совпадает с $\Theta^2/2$? Ответ известен только для $g = 4$ [R]. Обсуждение различных вопросов и гипотез о линейной системе $|2\Theta|$, связанных с тем, что изложено выше, можно найти в работе [vG — vG]. Совершенно другой подход, известный с конца XIX в. и основанный на дифференциально-геометрических соображениях, использует следующее свойство тета-дивизора на якобиане: дивизор Θ локально представляется в виде гиперповерхности в $\mathbb{C}^g$ дважды трансляционного типа. При соответствующих условиях невырожденности это свойство характеризует якобианы. К сожалению, представляется трудной задачей перевести этот результат на язык алгебраической геометрии; в частности, неясно, как из него получить уравнения J_g в A_g. Изложение связанных с этим подходом вопросов можно найти в [L].

§ 4. ГИПОТЕЗА НОВИКОВА

В дальнейшем будет предполагаться, что главнополяризованное абелево многообразие (A, Θ) ассоциировано с матрицей τ из H_g; это позволяет говорить о тета-функции многообразия A. Будет использоваться также следующий факт: в пространстве тета-функций порядка 2 существует базис $(\psi_0, \ldots, \psi_N)$

($N = 2^g - 1$), удовлетворяющий *соотношению Римана*

$$\theta(z+u)\,\theta(z-u) = \sum_i \psi_i(z)\,\psi_i(u) \tag{7}$$

для всех Z, $u \in \mathbb{C}^g$. Морфизм $\vec{\psi}$: $\mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^{N+1}$, определенный функциями ψ_i, при факторизации индуцирует морфизм ψ: $A \to \mathbb{P}^N$, ассоциированный с линейной системой $|2\Theta|$.

(A) *Формулировка*

Подходящим образом переформулировав свойства (4) и (5) § 3(Б), можно получить их специализацию в случае, когда точки a, x, y бесконечно близки к нулю. Если $a \in T_0(A)$, то определим пересечение $\Theta \cap \Theta_a$ уравнениями $\theta = D_a\theta = 0$. Тогда существование точек a, x, y, удовлетворяющих (4), эквивалентно следующему свойству:

(8) *Существует ненулевой вектор $a \in T_0(A)$, и существуют два ненулевых сечения из $H^0(\Theta \cap \Theta_a, \mathcal{O}(\Theta))$, произведение которых (являющееся элементом $H^0(\Theta \cap \Theta_a, \mathcal{O}(2\Theta))$) равно нулю.*

Так же как доказывалась эквивалентность свойств (4) и (5), доказывается, что (8) эквивалентно такому свойству:

(9) *На $\mathbb{C}^g$ существуют постоянные векторные поля D_1, D_2, D_3, с $D_1 \neq 0$, такие, что для некоторой константы $d \in \mathbb{C}$ имеет место равенство*

$$\left(\tfrac{1}{3} D_1^4 + D_2^2 - D_1 D_3 - d\right)\vec{\psi}(0) = 0.$$

Формула (7) позволяет переписать это равенство как уравнение в частных производных. Удобно пользоваться билинейным *символом Хироты*: если P — дифференциальный оператор на $\mathbb{C}^g$, через $P|\theta\cdot\theta$ обозначается значение при $u=0$ функции $P(\theta(z+u)\theta(z-u))$, где подразумевается, что P действует по переменной u. Из (7) получаем

$$P|\theta\cdot\theta = 0 \Leftrightarrow P\vec{\psi}(0) = 0, \tag{10}$$

так что (9) эквивалентно уравнению в частных производных

$$\left(\tfrac{1}{3} D_1^4 + D_2^2 - D_1 D_3 - d\right)\Big|\,\theta\cdot\theta = 0. \tag{11}$$

Несложное вычисление показывает, что функция θ удовлетворяет уравнению (11) тогда и только тогда, когда функция $u = D_1^2 \log\theta$ удовлетворяет уравнению

$$D_1\left(\tfrac{1}{3} D_1^3 u + 4uD_1 u - D_3 u\right) + D_2^2 u = 0. \tag{12}$$

Это нелинейное уравнение, называемое *уравнением Кадомцева — Петвиашвили* (*К — П*), играет фундаментальную роль в работах японской школы, в которых оно связывается с некоторыми представлениями аффинных алгебр Ли. В связи с недостатком места, мы не будем углубляться в это направление и отправим интересующихся к работе [V].

Возвращаясь к якобианам, заметим, что достаточно устремить p, q, r, s к какой-то одной точке кривой C, чтобы из включения $\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q}$ получить (8). Следовательно, тета-функция якобиана удовлетворяет уравнению К — П. Обратное утверждение, сформулированное в качестве гипотезы Новиковым, было доказано Шиотой [Sh]:

Теорема. *Пусть (A, Θ) — неразложимое главнополяризованное абелево многообразие. Предположим, что его тета-функция удовлетворяет уравнению К — П. Тогда (A, Θ) является якобианом.*

Арбарелло и Де Кончини недавно предложили более геометрическое и более простое доказательство этого результата [A — D], и именно на этом мы теперь остановимся.

(B) *Аналитический вариант критерия Вельтерса*

Критерий Вельтерса (6) сохраняет смысл также в том случае, когда точки α, β, γ становятся бесконечно близкими к нулю. В этом случае он формулируется следующим образом. Пусть Y — инфинитезимальный росток кривой в A порядка 2 (т. е. подсхема длины 3) в точке 0. Положим

$$V_Y = \{\zeta \in A \mid \text{существует прямая } l \text{ в } \mathbb{P}^N\text{, такая, что } \zeta + Y \subset \psi^{-1}(l)\}.$$

В [W2] Вельтерс доказывает, что (A, Θ) — якобиан, если только $\dim V_Y \geqslant 1$.

Легко видеть, что Y определяется двумя векторными полями $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ на A по правилу: функция f на A, определенная в окрестности начала координат, обращается в нуль на Y тогда и только тогда, когда

$$f(0) = \bar{D}_1 f(0) = (\bar{D}_1^2 + \bar{D}_2) f(0) = 0. \tag{13}$$

Таким образом, V_Y является множеством точек $\zeta \in A$, для которых точки $\psi(\zeta)$, $\bar{D}_1\psi(\zeta)$ и $(\bar{D}_1^2 + \bar{D}_2)\psi(\zeta)$ лежат на одной прямой. Отсюда легко следует, что касательное пространство к V_Y в начале координат порождается вектором $\bar{D}_1$. Следовательно, в окрестности начала координат V_Y является либо ростком гладкой кривой вида $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/t^r)$, либо гладкой кривой. В последнем случае V_Y в окрестности начала координат имеет разложение в формальный ряд вида

$$D(t)=\sum_{i\geqslant 1} D_i t^i,$$

где $D_i \in \mathbb{C}^g$, $D_1 \neq 0$.

Из определения V_Y выводим, что существуют ряды $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ в $\mathbb{C}[[t]]$, такие, что имеет место равенство

$$(14)\quad a(t)\vec{\psi}(D(t))+b(t)\overline{D}_1\vec{\psi}(D(t))+c(t)\left(\overline{D}_1^2+\overline{D}_2\right)\vec{\psi}(D(t))=0.$$

Приравнивая нулю свободный член, а затем коэффициент при первой степени t, получим соотношения $a(0)=c(0)=0$, $b(0)c'(0)\neq 0$. Делением на $b(t)$ и заменой параметра t мы можем свести дело к случаю, когда $b(t)=1$, $c(t)=-t$. Рассматривая теперь коэффициенты при t и t^2, получим $a'(0)=a''(0)=0$, $\overline{D}_1=D_1$, $\overline{D}_2=D_2$ (здесь и ниже мы отождествляем векторы D_i с постоянными векторными полями на $\mathbb{C}^g$). Уравнение (14) приобретает вид

$$(15)\quad a(t)\vec{\psi}(D(t))+D_1\vec{\psi}(D(t))-t\left(D_1^2+D_2\right)\vec{\psi}(D(t))=0.$$

Для любой функции f на $\mathbb{C}^g$, аналитической в окрестности начала координат, разложение в ряд Тейлора для $f(D(t))$ имеет вид

$$(16)\qquad f(D(t))=\sum_{s\geqslant 0} t^s\Delta_s f(0),$$

где Δ_s — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами на $\mathbb{C}^g$, определяемые формулой

$$(17)\qquad \Delta_s=\sum_{s_1+\ldots+s_p=s}\frac{D_1^{s_1}}{s_1!}\cdots\frac{D_p^{s_p}}{s_p!}.$$

Положим $\overline{\Delta}_2=D_1^2+D_2$ и $a(t)=\sum_{i\geqslant 3}a_i t^i$. В этих обозначениях приравнивание нулю коэффициента при t^s в (15) дает

$$(18)\qquad \left(\Delta_1\Delta_s-\overline{\Delta}_2\Delta_{s-1}+\sum_{i=3}^{s}a_i\Delta_{s-i}\right)\vec{\psi}(0)=0.$$

Итак, мы можем переформулировать критерий Вельтерса следующим образом: для того чтобы главнополяризованное абелево многообразие (A,Θ) было якобианом, необходимо и достаточно, чтобы существовали постоянные векторные поля $D_1, D_2, \ldots$ с $D_1\neq 0$ и скаляры $a_3, a_4, \ldots$, такие, что уравнение (18) справедливо для любого s. В силу (10) можно также заменить (18) на уравнение вида

$$(19)\qquad \left(\Delta_1\Delta_s-\overline{\Delta}_2\Delta_{s-1}+\sum_{i=3}^{s}a_i\Delta_{s-i}\right)\Big|\,\theta\cdot\theta=0.$$

Обозначим через $P_s(D_1,\ldots,D_s;\ a_3,\ldots,a_s)(z)$, или просто $P_s(z)$, левую часть (19). Имеем $P_0=P_1=P_2=0$ и

$$(20)\qquad P_3(z)=\left(-\frac{1}{3}D_1^4-D_2^2+D_1D_3+a_3\right)\Big|\,\theta\cdot\theta.$$

Уравнение $P_3(z)=0$ есть не что иное, как уравнение К—П в форме (11). Таким образом, уравнение К—П означает, что V_Y содержит в начале координат инфинитезимальный росток гладкой кривой порядка 3.

(С) *Редукция по модулю* $(\theta, D_1\theta)$

Достаточно доказать следующее утверждение: если существуют постоянные векторные поля $D_1, \ldots, D_{s-1}$ на $\mathbb{C}^g$ с условием $D_1\neq 0$ и константы $a_3,\ldots,a_{s-1}$, такие, что $P_3(z)=\ldots$ $\ldots=P_{s-1}(z)=0$, то можно подобрать D_s и a_s таким образом, чтобы P_s обращался в нуль.

Распишем явно зависимость P_s от переменных D_s и a_s. Имеем

$$(21)\quad P_s(z)=P_s^0(z)+2\theta(z)D_1D_s\theta(z)-2\left(D_1\theta(z)\right)\left(D_s\theta(z)\right)+a_s\theta(z)^2,$$

где $P_s^0(z)=P_s(D_1,\ldots,D_{s-1},\ 0;\ a_3,\ldots,a_{s-1},\ 0)(z)$.

Если P_s равен нулю, то функция P_s^0 принадлежит идеалу $(\theta, D_1\theta)$. Очень важным наблюдением работы [А—D] является обратное утверждение: если $P_s^0\in(\theta, D_1\theta)$, то существует такое постоянное векторное поле D_s на $\mathbb{C}^g$ и такое комплексное число a_s, что $P_s(D_1,\ldots,D_s;\ a_3,\ldots,a_s)=0$.

$$(22)\qquad 0\to\mathcal{O}_A(\Theta)\xrightarrow{\theta}\mathcal{O}_A(2\Theta)\to\mathcal{O}_\Theta(2\Theta)\to 0,$$

$$(23)\qquad 0\to\mathcal{O}_\Theta(\Theta)\xrightarrow{D_1\theta}\mathcal{O}_\Theta(2\Theta)\to\mathcal{O}_{\Theta\cap\Theta_{D_1}}(2\Theta)\to 0.$$

Пространство $H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$ порождается ограничениями на Θ частных производных функции θ. По конструкции P_s^0 определяет сечение пучка $\mathcal{O}_A(2\Theta)$, обращающееся в нуль на $\Theta\cap\Theta_{D_1}$. Тогда из (23) следует существование дифференцирования D_s, такого, что функция $P_s^0+2\theta D_1D_s\theta-2(D_1\theta)(D_s\theta)$ обращается в нуль на Θ, затем из (22) следует существование константы a_s, такой, что $P_s^0 + 2\theta D_1 D_s\theta - 2(D_1\theta)(D_s\theta) + a_s\theta^2 = 0$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Осталось установить импликацию

$$P_3 = \ldots = P_{s-1} = 0 \Rightarrow P_s^0 \in (\theta,\ D_1\theta). \tag{24}$$

Хотя все предыдущее — чистая алгебра, на сегодняшний день мы не умеем доказывать (24) иначе, как с привлечением довольно деликатной трансцендентной техники, которая была необходима и в доказательстве Шиоты. Арбарелло в работе [A] указывает алгебраический подход к доказательству (24), однако для этого подхода приходится накладывать дополнительные условия на (A, Θ), которые, по-видимому, трудно исключить.

Идея трансцендентного доказательства состоит в том, чтобы установить более сильное утверждение: если $P_3 = \ldots = P_{s-1} = 0$, то на $\mathbb{C}^g$ существует голоморфная функция φ, удовлетворяющая уравнению

$$(D_1\varphi)\theta - \varphi(D_1\theta) = P_s^0, \tag{25}$$

а также

$$D_1(\varphi/\theta) = P_s^0/\theta^2. \tag{26}$$

(D) *Существование локальных решений*

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^g$, на котором θ и $D_1\theta$ не обращаются в нуль одновременно. Мы сейчас покажем, что (26) допускает локальное решение в окрестности каждой точки z_0 из U. Это очевидно, если $\theta(z_0) \neq 0$, так как в этом случае функция P_s^0/θ^2 голоморфна в z_0; поэтому рассмотрим случай, когда $\theta(z_0) = 0$ (и, следовательно, $D_1\theta(z_0) \neq 0$). Мы можем предполагать, что $z_0 = 0$ и $D_1 = \partial/\partial z_1$. Подготовительная теорема Вейерштрасса позволяет в окрестности нуля записать

$$\theta(z) = (z_1 - b(z_2, \ldots, z_n))\,h(z), \tag{27}$$

причем $b(0) = 0$, $h(0) \neq 0$. Далее разложим P_s^0/θ^2 в ряд по степеням $(z_1 - b)$:

$$P_s^0/\theta^2 = \sum_{i \geq -2} (z_1 - b)^i H_i(z_2, \ldots, z_n). \tag{28}$$

Достаточно доказать, что коэффициент H_{-1} равен нулю; тогда искомое решение будет иметь вид

$$\varphi = h \sum_{i \geq -2} (z_1 - b)^{i+2} \frac{H_i}{i+1}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\Gamma = \theta^4 \left(\tfrac{1}{3} D_1^4 + D_2^2 - D_1 D_3 + 4 D_1 \left(D_1^2 \log\theta\right) D_1\right). \tag{29}$$

Довольно тонкие вычисления, использующие предположение $P_3 = \ldots = P_{s-1} = 0$, приводят к равенству $\Gamma(P_s^0/\theta^2) = 0$. С другой стороны, полярную часть $\Gamma(H_i(z_1 - b)^i)$ для $i = -1, -2$ можно легко вычислить. Учитывая (27), получаем

$$\Gamma\left(H_{-1}(z_1 - b)^{-1}\right) = -8h(0)^4 H_{-1}(z_1 - b)^{-1} + \text{голоморфная часть}, \tag{30}$$

в то время как полярная часть $\Gamma(H_{-2}(z_1 - b)^{-2})$ таинственным образом исчезает. Так как Γ — голоморфный оператор и $\Gamma(P_s^0/\theta^2) = 0$, отсюда заключаем, что $H_{-1} = 0$.

(E) *Глобализация*

Рассмотрим $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм D_1: $\theta^{-1}\mathcal{O}_U \to \theta^{-2}\mathcal{O}_U$. Обозначим через $\mathcal{N}$ его ядро и через $\mathcal{J}$ его образ. Тогда имеем точную последовательность когомологий:

$$H^0(U,\ \theta^{-1}\mathcal{O}_U) \xrightarrow{D_1} H^0(U,\ \mathcal{J}) \to H^1(U,\ \mathcal{N}). \tag{31}$$

Существование локальных решений уравнения (26), доказанное выше, означает, что сечение P_s^0/θ^2 пучка $\theta^{-2}\mathcal{O}_U$ принадлежит группе сечений $H^0(U, \mathcal{J})$; требуется доказать, что оно на самом деле содержится в образе D_1.

Имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{O}_U \xrightarrow{D_1} \mathcal{O}_U \to 0,$$

которая дает отождествление группы $H^1(U, \mathcal{N})$ с ядром гомоморфизма D_1: $H^1(U, \mathcal{O}_U) \to H^1(U, \mathcal{O}_U)$. Нетрудное вычисление показывает, что ядро равно нулю, если только D_1 в общей точке трансверсально к $(\Theta \cap \Theta_{D_1})_{\mathrm{red}}$, а это свойство эквивалентно утверждению о том, что многообразие

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C}^g \mid D_1^n\theta(z) = 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$$

имеет размерность $\leq g - 3$. Если это так, то из (31) следует, что существует голоморфное решение (26) в U; по теореме Гартогса это решение продолжается до голоморфного решения φ во всем пространстве $\mathbb{C}^g$, что завершает доказательство теоремы в этом случае.

Итак, наш метод доказательства привел нас к исключительному случаю $\dim\Sigma = g - 2$ (этот случай действительно может реализоваться). В этом случае Шиота с помощью довольно тонких рассуждений, использующих уравнение К—П, строит гладкое раздутие $\tilde{A}$ многообразия A, на которое поле D_1 продолжается до векторного поля с желаемым свойством трансверсальности. Тогда изложенное выше когомологическое доказательство, примененное к $\tilde{A}$, позволяет получить результат и в этом случае.

ЛИТЕРАТУРА

[A] Arbarello E. Fay's trisecant formula and a characterization of jacobian varieties, Proceedings of the AMS Summer Institute on Algebraic Geometry, Bowdoin College. Proc. Symp. Pure Math., vol. 46, part I (1985), 49—62.

[A—D] Arbarello E., de Concini C. Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces, Duke Math. J., 54 (1987), 163—178.

[A—M] Andreotti A., Mayer A. On period relations for abelian integrals on algebraic curves, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 21 (1967), 189—238.

[B] Beauville A. Prym varieties and the Schottky problem, Inventiones Math., 41 (1977), 149—196.

[B—D] Beauville A., Debarre O. Une relation entre deux approches du problème de Schottky, Inventiones Math., 86 (1986), 195—207.

[D 1] Debarre O. Sur la démonstration de A. Weil du théorème de Torelli pour les courbes, Compositio Math., 58 (1986), 3—11.

[D 2] Debarre O. Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3, Duke Math. J., 57 (1988), 221—273.

[D 3] Debarre O. La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym, à paraître.

[Do] Donagi D. The tetragonal construction, Bull. Amer. Math. Soc., 4 (1981), 181—185.

[F] Freitag E. Die Irreduzibilität der Schottkyrelation (Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa), Arch. Math., 40 (1983), 255—259.

[G] Gunning R. Some curves in abelian varieties, Inventiones Math., 66 (1982), 377—389.

[vG] Van Geemen B. Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves, Inventiones Math., 78 (1984), 329—349.

[vG—vG] Van Geemen B., van der Geer G. Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties, Amer. J. of Math., 108 (1986), 615—642.

[I 1] Igusa J. Theta functions, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972.

I[2] Igusa J. On the irreducibility of Schottky's divisor, J. Fac. Sci. Tokyo, 28 (1981), 531—545.

[L] Little J. Translation manifolds and the converse of Abel's theorem, Compositio Math., 49 (1983), 147—171.

[M] Mumford D. Prym varieties I. Contributions to Analysis, Academic Press, New York (1974). 325—350.

[M-B] Moret-Bailly L. Variétés stablement rationnelles non rationnelles, Sém. Bourbaki, février 1985. exp. 643, Astérisque, 133—134 (1986), 223—236.

[R] Ran Z. On subvarieties of abelian varieties, Inventiones Math., 62 (1981), 459—479.

[S] Schottky F. Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln, J. Reine Angew. Math., 102 (1988), 304—352.

[S—J] Schottky F., Jung H. Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie, S-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin), Phys. Math. Kl. 1 (1909), 282—297.

[Sh] Shiota T. Characterization of jacobian varieties in terms of soliton equations, Inventiones Math., 83 (1986), 333—382.

[V] Verdier J.-L. Les représentations des algèbres de Lie affines: applications à quelques problèmes de physique, Sém. Bourbaki, Juin 1982, exp. 596, Astérisque, 92—93 (1982), 365—377.

[W 1] Welters G. A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties, Inventiones Math., 120 (1984), 497—504.

[W 2] Welters G. A criterion for Jacobi varieties, Ann. of Math. 120 (1984), 497—504.

[We] Weil A. Zum Beweis des Torellischen Satzes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 2a (1957), 33—53.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

(составитель Б. А. Дубровин)

1*. Arbarello E. Periods of Abelian integrals, theta-functions, and differential equations of KdV type. Proceedings of the ICM. Berkeley, California, USA, 1986, 623—627.

2*. Arbarello E., DeConciniC. On a set of equations characterizing Riemann matrices. Ann. of Math., 120 (1984), 119—140.

3*. Van der Geer G. The Schottky problem. Lect. Notes in Math., vol. 1111, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.

4*. Дубровин Б. А. О гипотезе С. П. Новикова в теории тэта-функций и нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили. — Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, 541—544.

5*. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения. — УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11—80.

6*. Дубровин Б. А. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили и соотношения между периодами голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях. — Изв. АН СССР, серия мат., т. 45, № 5, с. 1015—1028.

7*. Mulase M. Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties. J. Diff. Geom., 19 (1984), 403—430.

8*. Welters G. E. On flexes of the Kummer variety Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A45 (1983), 501—520.

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ (по Экалю и Воросу)[1]

Фредерик Фам

Стороннее дифференциальное исчисление Экаля — это систематический метод изучения произвола в процессе суммирования по Борелю расходящихся рядов. Этот метод применим к довольно большому классу формальных рядов — к так называемым *восстановимым* функциям. Из многочисленных задач, к которым может быть применена эта теория (ср., например, [1], [2], [3]), одна особенно интересует меня: речь идет о гипотезах Вороса [4] о «точном полуклассическом методе» (сошлюсь на подготавливаемую к печати статью Экаля, анонсированную в первой из статей [1], а также на рукописи и неформальные сообщения...).

1. НАЧАЛА СТОРОННЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Три «модели» восстановимой функции

Рассмотрим формальный ряд

(1) $$f(z)=\sum_{n\geqslant 1} a_n z^{-n} \quad (a_n\in\mathbb{C}),$$

преобразование Бореля которого

(2) $$\varphi(\zeta)=\sum_{n\geqslant 1} a_n\zeta^{n-1}/(n-1)!$$

сходится в окрестности начала координат и *неограниченно продолжается* на $\mathbb{C}$ (причем сингулярностями будут только точки ветвления: ср. отступление ниже).

В этом случае можно определить сумму ряда (1) с помощью интегральной формулы

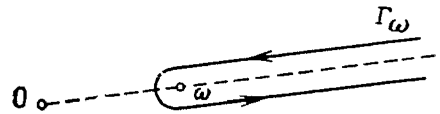
(3) $$f(z)=\int_0^\infty e^{-z\zeta}\varphi(\xi)\,d\xi$$

[1] Pham Frédéric. Introduction á la résurgence quantique (d'aprés Écall et Voros). — Séminaire Bourbaki, 38 éme année 1985—86, n° 656, Astérisque 145—146, 1987, p. 103—110.

(если φ возрастает на бесконечности медленнее некоторой экспоненты). Фактически, если путь интегрирования в (3) — это луч с аргументом θ, не попадающий в точки ветвления φ, то интеграл (3) аналитичен в полуплоскости $-\theta-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arg} z<$ $<-\theta+\frac{\pi}{2}$. Вращением луча интегрирования в (3) можно определить целое семейство аналитических в различных секторах функций (с суммарным раскрытием секторов $>2\pi$: например, если у φ есть лишь одна точка ветвления, то получается сектор с углом 3π). Эти секторы перекрываются, так что по теореме Коши разность двух определений f, соответствующих соседним секторам, есть сумма интегралов вида

(4) $$f_\omega(z)=\int_{\Gamma_\omega} e^{-z\zeta}\varphi(\xi)\,d\xi$$

(ср. рисунок, где ω — точка ветвления φ).



Если предположить, что ω — логарифмическая точка ветвления φ, т. е.

(5) $$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\varphi_\omega(\xi-\omega)\operatorname{Log}(\xi-\omega)+\psi_\omega(\xi-\omega)$$

(где φ_ω и ψ_ω гомоморфны в окрестности 0), то сдвигом переменной интегрирования интеграл (4) приводится к виду

(6) $$f_\omega(z)=e^{-\omega z}\int_0^\infty e^{-z\zeta}\varphi_\omega(\zeta)\,d\zeta.$$

Итак, мы видим, что произвол, вносимый в процессе суммирования по Борелю, — это экспоненциально малый член, домноженный на интеграл того же типа, что и (3), где φ заменилась на ее *сингулярную часть* φ_ω (из уравнения (5)).

В действительности не очень удобно запрещать у φ сингулярности вида, отличного от логарифмических точек ветвления. Поэтому у φ допускаются еще и *простые полюсы*. При этом сингулярная часть φ в простом полюсе есть

$$(2\pi i)\operatorname{res}_\omega\varphi\cdot\delta,$$

где δ — это «микрофункция Дирака», которую надо себе представлять как преобразование Бореля от 1:

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \delta(\zeta)\, d\zeta.$$

Резюмируем: мы рассмотрели 3 вида «функций», составляющих по Экалю «3 *модели восстановимой функции*»:

1) *формальная модель*, т. е. мы рассматриваем формальные ряды

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \text{ (отметьте присутствие члена } a_0),$$

преобразования Бореля $a_0\delta + \varphi(\xi)$ которых появляются во второй модели;

2) *сверточная модель*, в которой рассматриваются такие функции $a_0\delta + \varphi(\xi)$, что φ — росток в нуле неограничено продолжаемой голоморфной функции (ср. отступление ниже), такой, что единственные ее особенности — это логарифмические точки ветвления, на которые могут накладываться простые полюсы;

3) *секториальная модель*; ее элементы — это наборы определенных в секторах плоскости z функций — преобразований Лапласа (3) функций типа 2.

Отметим, что *в принципе формальная модель содержит всю информацию о функции*, но на практике работать приходится со сверточной моделью. Каждая из трех моделей образует алгебру, обозначаемую $\mathbb{A}_1$, в которой законом умножения служит умножение для случая формальной и секториальной модели и свертка для модели 2).

N. B. Можно также определить бóльшие алгебры, чем $\mathbb{A}_1$, разрешив полюсы порядка >1 или даже рассматривая микрофункции с ветвлениями в начале координат.

1.2. Сторонние дифференцирования

С каждым числом $\omega \in \mathbb{C}^*$ (т. е. комплексной плоскости переменной ζ [1])) Экаль связал отображение Δ_ω из $\mathbb{A}_1$ в себя, которое оказывается дифференцированием этой алгебры. Это отображение соответствует, грубо говоря, «взятию сингулярной части» в сверточной модели (т. е. переходу от φ к φ_ω в уравнении (5)). Однако необходимо принять предосторожности при уточнении пути аналитического продолжения, выбранного в (5) для определения φ_ω. Говоря точнее:

[1]) С выкинутым нулем. — *Прим. перев.*

1) если соединяющий 0 с ω отрезок *прямой* не содержит отличных от ω сингулярностей φ, то $\Delta_\omega\varphi$ — это сингулярная часть продолженной вдоль этого отрезка функции ω;

2) если же этот отрезок содержит иные сингулярности, то обойдем их всеми возможными способами (т. е. справа или слева, но не поворачивая назад) и определим $\Delta_\omega\varphi$ как взвешенную сумму сингулярных частей в ω различных определений φ с весами $p!q!/(p+q+1)!$, где p (и соответственно q) — число обходов сингулярных точек справа (соответственно слева).

Сторонние дифференцирования Δ_ω a priori не удовлетворяют никаким соотношениям: порожденная ими алгебра свободна (с образующими $(\Delta_\omega)_{\omega\in\mathbb{C}^*}$).

Основная идея *стороннего дифференциального исчисления* — пытаться реконструировать восстановимую функцию по соотношениям на ее сторонние производные (*уравнениям восстановления*). В качестве ингредиентов для этого полезны *восстановимые мономы*, т. е. специальные восстановимые функции, удовлетворяющие простым уравнениям восстановления.

Отступление об аналитическом продолжении

Определение. Будем говорить, что росток аналитической функции *неограниченно продолжаем* (Экаль в этом случае говорит: «продолжаем всюду без разрезов»), если при его аналитическом продолжении на все $\mathbb{C}$ встречаются только изолированные препятствия, т. е.

если аналитическое продолжение вдоль пути λ встречает препятствие в конце ω пути λ, то возможно продолжение вдоль путей, обходящих ω, на всю универсальную накрывающую некоторого проколотого диска с центром в ω [1]).

В дальнейшем важную роль будут играть примеры неограниченно продолжаемых функций.

Пример 1. Гиперэллиптическая функция $p(q) = \sqrt{W(q)}$, где $W \in \mathbb{C}[q]$.

Пример 2. Первообразная $z(q) = \int_0^q p(q')\, dq'$ предыдущей функции.

Пример 3. Обратная функция $q(z)$ к функции из предыдущего примера (в предположении, что 0 не является корнем W).

Как и $p(q)$, функция $z(q)$ ветвится в корнях $q_1, \ldots, q_\nu$ полинома W, которые мы будем предполагать простыми. Множе-

[1]) Это определение несколько более ограничительно, чем определение Экаля.

ство Ω_0 предельных значений $z(q)$ в точках ветвления можно породить с помощью ν его элементов

$$\omega_j = \int_0^{q_j} p(q')\,dq' \text{ (пути интегрирования произвольны,}$$

например отрезки),

перенося их на *решетку периодов*

$$\Omega = \sum_{i,j} \mathbb{Z}\omega_{ij}, \quad \omega_{ij} = 2(\omega_j - \omega_i).$$

Отметим, что Ω (а поэтому и Ω_0) в общем случае *плотно* в $\mathbb{C}$, что не мешает функции $q(z)$ быть неограниченно продолжаемой с точками ветвления в Ω_0 и периодичной (в смысле, который нужно еще уточнить) с решеткой периодов Ω!

2. ТОЧНЫЙ ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД

2.1. Аппроксимации физиков

Рассмотрим одномерное стационарное уравнение Шредингера

$$(1) \qquad -\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dq^2} + (V(q) - E)\,\psi(q) = 0$$

(q — пространственная координата, $V(q)$ — потенциальная функция, E — энергия и $\hbar$ — постоянная Планка).

В той мере, в какой импульс $p(q) = \sqrt{E - V(q)}$ меняется «медленно» при изменении q, т. е. операторы d/dq и $p(q)$ «почти» коммутируют, уравнение (1) «приближенно» разлагается в два уравнения первого порядка

$$(1)' \qquad \frac{d}{dq}\psi_\pm \simeq \pm i\hbar^{-1}\int_0^q p(q')\,dq',$$

решения

$$\psi_\pm \simeq \exp\left(\pm i\hbar - 1\int_0^q p(q')\,dq'\right)$$

которых осциллируют там, где $E > V(q)$, причем осцилляции становятся все более быстрыми при уменьшении постоянной $\hbar$ (именно длина волны этих осцилляций определяет «медленность изменения» $p(q)$).

Полуклассическая аппроксимация или аппроксимация ВКБ (Вентцель, Крамер, Бриллюен) состоит в подстановке

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi_\pm^{BKW} = \varphi_\pm \exp\left(\pm i\hbar^{-1}\displaystyle\int_0^q p(q')\,dq'\right), \\ \text{где } \varphi_\pm = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n^\pm(q)\,\hbar^n, \end{cases}$$

в уравнение (1). При этом мы получаем рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка («уравнений переноса») с сингулярностями в «*точках поворота*», т. е. в точках ветвления функции p (или нулях функции $V(q) - E$).

При этом необходимо справиться с двумя трудностями:

1) при общем q формальные ряды $\varphi_\pm$ не сходятся;

2) каким образом «производить согласование» в точках поворота?

Отметим, что в комплексной окрестности точки поворота складывается причудливая ситуация: если V — аналитическая функция, то любое решение $\psi(q)$ уравнения Шредингера аналитично всюду; в то же время аппроксимация (2) — это произведение двух членов, каждый из которых ветвится в точке поворота!

2.2. Формальные приготовления

Будем теперь рассматривать переменные как комплексные и примем следующие обозначения:

пусть $W = V - E$ — полином степени ν с простыми корнями $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$, отличными от 0. Положим

$$(3) \qquad z(q) = \int_0^q W(q')^{1/2}\,dq' \quad \left(= i\int p\,dq\right),$$

и $x = 2/\hbar$, так что

$$(4) \qquad \psi_\pm^{BKW} = \varphi_\pm e^{\pm x z(q)/2}$$

($\varphi_\pm$ — формальный ряд по x^{-1}, коэффициенты которого — аналитические функции q, ветвящиеся в точках поворота).

Уравнения переноса можно переписать формально как

$$(5) \qquad \partial_q \varphi_\pm = \rho_\pm(q, x)\,\varphi_\pm,$$

где $\rho_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^+(q)\,x^{-n}$ — формальный ряд по x^{-1} с аналитическими по q (на двулистном накрытии $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{q_0, \ldots, q_\nu\}$) коэффициентами, в то время как ρ_- — это другое определение той же функции (полученное из ρ_+ аналитическим продолжением коэффициентов).

Эти уравнения интегрируются глобально на универсальной накрывающей $\dot{\mathbb{C}}$, причем можно показать, что на любом открытом односвязном подмножестве $\dot{\mathbb{C}}$ «с одним концом» существует единственное формальное решение φ_+ (соответственно φ_-) уравнения (5), удовлетворяющее условию на асимптотику:

$$\lim_{q\to\infty} \varphi_\pm/(ip)^{-1/2} = 1 \tag{6}$$

(как формальный ряд по x^{-1}, т. е. все коэффициенты должны стремиться к нулю, кроме первого, который должен стремиться к 1).

Для изучения произвола при получении решения этим способом удобно рассечь плоскость ν разрезами, соединяющими точки поворота с бесконечностью. При этом получается открытое односвязное множество «с ν концами», на котором определены ν функций φ_+ (и соответственно ν функций φ_-), по одной для каждого выбора конца, участвующего в асимптотике (6). Отношение двух таких функций, отвечающих смежным концам, — это «функция Вороса»

$$V_j(x) = \exp \int_{C_j} \rho_+(q,\ x)\, dq \in \mathbb{C}[[x^{-1}]],$$

где C_j — неограниченный путь, идущий вдоль двух берегов разреза, который разделяет рассматриваемые концы.

2.3. Квантовое восстановление

2.3.0. **Теорема.** *Функции Вороса* $V_1(x), \ldots, V_\nu(x)$, *а также функции* $\varphi_\pm$, *рассматриваемые как функции от* x *при фиксированном* q — *это восстановимые функции от* x (*в формальной или секториальной модели*).

2.3.1. *Уравнения восстановления для* $\varphi_\pm$. Зафиксируем $q = q_0$ и $z_0 = z(q_0)$.

Единственные ненулевые сторонние производные $\varphi(q_0, \cdot)$ соответствуют описанным ниже значениям сопряженной к x переменной ξ. Проведем из точки q_0 путь λ_0 так, что $z(q)$ пробегает отрезок прямой, когда q пробегает λ_0. При некоторых значениях начального направления путь λ_0 заканчивается в точке поворота q_i. Теперь преобразование Бореля от φ_+ (и от φ_-) имеет особенность в $-\xi(\lambda_0)$ (соответственно $\xi(\lambda_0)$), где

$$\xi(\lambda_0) = \int_{\lambda_0} W^{1/2} = \omega - z_0, \quad \omega \in \Omega_0.$$

Более того, $\Delta_{z_0-\omega}\varphi_+$ — это функция «типа φ_-», полученная из φ_+ аналитическим продолжением (по переменной q!), вдоль пути $\tilde\lambda_0$ (см. рисунок)

(аналогично для $\Delta_{-z_0+\omega}\varphi_-$).

Вывод. Для каждого определения φ_+, φ_- имеются уравнения восстановления вида

$$\begin{cases} \Delta_{z_0-\omega}\varphi_+ = P^+_\omega(x)\,\varphi_-, \\ \Delta_{-z_0+\omega}\varphi_- = P^-_\omega(x)\,\varphi_+, \end{cases} \tag{8}$$

где коэффициенты восстановления $P^\pm_\omega(x)$ — *рациональные функции от* $V_1(x), \ldots, V_\nu(x)$.

2.3.2. *Уравнения восстановления для* $V_j(x)$. Если W близок к полиному $q^\nu - 1$, то V_j можно естественно пронумеровать индексом $j \in \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ (так как q_j близки к корням из единицы порядка ν). Единственные ненулевые сторонние производные — это

$$\begin{cases} \Delta_{n\omega_{ij}} V_i = +\dfrac{1}{n} V_i \left[-\dfrac{V_{i+1}V_{i+2}\cdots V_{j-1}}{V_{j+1}V_{j+2}\cdots V_{i-1}} \right]^n \\ \Delta_{n\omega_{ij}} V_j = -\dfrac{1}{n} V_j \left[-\dfrac{V_{i+1}V_{i+2}\cdots V_{j-1}}{V_{j+1}V_{j+2}\cdots V_{j-1}} \right]^n \end{cases} \tag{9}$$

($i \neq j$, $\omega_{ij} = 2(\omega_j - \omega_i)$), обозначения те же, что в отступлении).

Множество рациональных функций от $V_1, \ldots, V_\nu$ является стабильным относительно действия сторонних производных и образует алгебру восстановления, *алгебру Вороса*.

2.4. Комментарии

Если рассматривать $\varphi_\pm(q, x)$ в секториальной модели, то это — настоящие функции, голоморфные в секторах плоскости x, *поворачивающихся при изменении* q. Обратно, если зафиксировать $\operatorname{Arg} x$, то мы будем иметь дело с набором функций φ_+, φ_-, которые голоморфны в ячейках плоскости q, разделенных «линиями Стокса». Аналитическое продолжение этих функций из одной ячейки в другую — это линейные комбинации с коэффициентами в алгебре Вороса функций φ_+, φ_- в новой ячейке. Значит, уравнения восстановления позволяют нам по комбинации чисто формальных объектов разд. 2.2 построить настоящие глобальные решения уравнения Шредингера. То, что эти истинные решения не ветвятся в точках поворота, — это к тому же и ключевой аргумент для доказательства результата разд. 2.3.1. (Ср. [4, § 6b]). Точно так же уравнения восстановления § 2.3.2 следуют из топологических аргументов Вороса ([3, § 3]), всегда по модулю теоремы 2.3.0, которая у Вороса была гипотезой. Экаль обосновал эту теорему, построив точно функции $\varphi_{\pm}$ как (сходящиеся) бесконечные суммы специальных функций, на определения которых его направили свойства восстановления. На самом деле структура восстановимости значительно более богата, чем то, что я смог описать здесь. Она дает начало многочисленным формулам для реконструкции $\varphi_{\pm}$. Первоначально, до изучения «квантового восстановления», Экаль изучал «восстановление по уравнению», или восстановление по переменной дифференциального уравнения (у него речь шла о переменной z, которой он отдавал предпочтение по сравнению с q).

ЛИТЕРАТУРА

1. Écalle J. Cinq applications des fonctions résurgentes. Prépublication mathématique, Université de Paris-Sud 84 T62 (1984).
2. Écalle J. Les fonctions résurgentes. Vol. I: Prépublication mathématique. Université der Paris-Sud 81-05; Nol. II: Prépublication mathématique, Université de Paris-Sud 81-06. Vol. III: en cours de publication.
3. Malgrange B. Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques. Sém. Bourbaki 1981—82, exp. no. 582, Astérisque, vol. 92-93, 1982, 59—73.
4. Voros A. The return of the quartic oscillator (the complex WKB method), Ann. Inst. H. Poincaré, 29, no. 3, 1983.
5. Voros A. Problème spectral de Sturm — Liouville: le cas de l'oscillateur quartique, Sém. Bourbaki 1982—83, exp. no. 602, Astérisque, 105—106 (1983), 95—104.
6. Voros A. Schrödinger equation from $O(h)$ to $o(\hbar^{\infty})$. Symposium «Path integrals from meV to MeV, ZIF Bielefield. 1985.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА И КОММЕНТАРИИ

1*. Candelpergher B. Trois exposés sur la résurgence PUPÉ (Publications Pédagogiques), № 7, Avril 1989, Preprint.

2*. Malgrange B. Introduction aux travaux de J. Écalle, L'Enseignement mathématique, t. 31, 1985.

Кроме того, недавно Экалю с помощью теории восстановимых функций удалось доказать, что полиномиальное векторное поле на вещественной плоскости имеет лишь конечное число предельных циклов. Тем самым решена проблема Дюлака. Независимое доказательство, основанное на геометрической теории нормальных форм резонансных векторных полей и отображений, развитой параллельно С. М. Ворониным и Мартине—Рамисом, получено недавно Ю. С. Ильяшенко. Оба решения проблемы Дюлака находятся в стадии публикации.