А. М. Поляков

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И СТРУНЫ

Перевод с английского
В. Г. Книжника
под редакцией
А. А. Белавина и М. Ю. Лашкевича

Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика»

Издательский дом
«Удмуртский университет»

1999

УДК 530.1.43+539.12

Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 312 с. — ISBN 5-7029-????-?

Автор книги — выдающийся физик-теоретик, специалист по квантовой теории поля. Книга написана на основе его научного дневника и представляет субъективный взгляд на важнейшие проблемы теоретической и математической физики — конфайнмент кварков, инстантоны, магнитные монополи, струны, критические явления. Во всех этих областях автор внес значительный и оригинальный вклад. Эти разнообразные вопросы объединены общей целью — понять поведение квантовополевых систем в области сильной связи, когда теория возмущений неприменима. В книге ясно и увлекательно изложены тонкие и сложные современные методы квантовой теории поля, и она отлично дополняет традиционные учебники по теории поля и физике элементарных частиц.

Для физиков и математиков различных специальностей, аспирантов и студентов старших курсов университетов. Может быть использована как пособие по специальным курсам: непертурбативные методы квантовой теории поля, критические явления и т. п.

ISBN 5-7029-????-?

Научное издание

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала «Регулярная и хаотическая динамика».
http://www.uni.udm.ru/rcd

Содержание

Предисловие редактора перевода

Эта книга должна была выйти в переводе на русский язык почти десять лет назад. Публикации помешала неожиданная смерть ее переводчика Вадима Книжника в возрасте 25 лет.

Удивительно, что Дима выполнил перевод этой книги, одновременно интенсивно занимаясь научной работой. Выдающиеся результаты, полученные им, свидетельствуют о его удивительном таланте. Они навсегда вошли в современную квантовую теорию поля и теорию струн.

Я надеюсь, что несмотря на задержку с выходом русского перевода эта книга будет полезна как для специалистов в квантовой теории поля, так и для молодых людей, вступающих в эту область физики. А светлый образ самого Вадима Книжника будет вдохновлять нас своей преданностью Науке.

Ноябрь 1995
Александр Белавин

Предисловие

В течение многих лет я вел заметки по различным вопросам физики, что-то вроде научного дневника. Иногда они содержат новые результаты, но чаще — вывод какого-нибудь известного факта, но сделанный способом, который казался мне приятным. Эти заметки были полезны, когда я хотел вспомнить какой-нибудь сюжет. Ведь лучше всего советоваться с самим собой.

Эта книга возникла из этих записок, или, лучше сказать, из той их части, которая посвящена теории поля. Я решил издать ее, поскольку, как мне кажется, есть люди, которые найдут ее полезной.

Часто я здесь обсуждаю вопросы, которые еще не поняты до конца. Я делаю это в надежде, что подход, который я предлагаю, хотя и несовершенен, все же будет стимулировать более глубокое проникновение в предмет.

В этой книге я не даю много ссылок (кроме тех случаев, когда я привожу самые последние результаты). Причина состоит в том, что, хотя изучать историю физики и оценивать заслуги очень интересно, я еще к этому не готов.

Читатель может найти множество ссылок в многочисленных обзорах, например, *K. Wilson and J. Kogut*, Physics Reports, **12**, 75–200 (1974); *J. Kogut*, Reviews of Modern Physics, **55**, 775–836 (1983); *А. З. Паташинский, В. Л. Покровский*, Флуктуационная теория фазовых переходов, М., Наука (1975) и Superstrings (J. Schwarz ed.), World Scientific Pub. (1985).

Я также привожу ниже (в произвольном порядке) некоторые из моих любимых статей, которые оказали глубокое влияние на эту книгу. Выбор, по определению, субъективен и не полон.

А. М. Поляков

1. *А. Паташинский, В. Покровский*, ЖЭТФ **46**, 994 (1964).
2. *В. Грибов, А. Мигдал*, ЖЭТФ **55**, 1498 (1968).
3. *В. Вакс, А. Ларкин*, ЖЭТФ **49**, 975 (1965).
4. *В. Березинский*, ЖЭТФ **61**, 1144 (1971).
5. *K. Wilson*, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
6. *M. Gell-Mann and F. Low*, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).
7. *Л. Ландау, А. Абрикосов, И. Халатников*, ДАН **95**, 497 (1954).

8. *L. Faddeev and V. Popov*, Phys. Lett. B **25**, 30 (1967).
9. *T. Skyrme*, Proc. Roy. Soc. A **260**, 127 (1961).
10. *J. Schwinger*, Phys. Rev. **94**, 1362 (1954).
11. *M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77**, 43 (1975).
12. *R. Jackiw and K. Rebbi*, Phys. Rev. D **14**, 517 (1971).
13. *J. Kogut and L. Susskind*, Phys. Rev. D **11**, 395 (1975).
14. *G. 't Hooft*, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
15. *G. 't Hooft*, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).
16. *L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe*, Phys. Lett. B **65**, 471 (1976).
17. *S. Deser and B. Zumino*, Phys. Lett. B **65**, 369 (1976).
18. *C. Marshall and P. Ramond*, Nucl. Phys. B **85**, 375 (1975).
19. *M. Green and J. Schwarz*, Nucl. Phys. B **255**, 93 (1985).
20. *A. Migdal*, Nucl. Phys. B **180**, 71 (1981).
21. *D. Gross and F. Wilczek*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
22. *H. Politzer*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
23. *A. Замолодчиков*, Письма ЖЭТФ **43**, 565 (1986).
24. *K. Wilson*, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969).
25. *D. Amati and M. Testa*, Phys. Lett. B **48**, 227 (1974).

Глава 1
Статистическая механика и квантовая теория поля

1.1. Квантовые частицы

У нас нет лучшего средства для описания элементарных частиц, чем квантовая теория поля. Квантовое поле — это ансамбль бесконечного числа взаимодействующих гармонических осцилляторов. Возбуждения этих осцилляторов отождествляются с частицами. Особая роль гармонических осцилляторов связана с аддитивностью их спектра. Если E_1 и E_2 — энергетические уровни, то $E_1 + E_2$ — тоже энергетический уровень. В точности таких свойств мы ожидаем от элементарных частиц. Поэтому мы пытаемся отождествить гамильтонианы частиц с гамильтонианами связанных осцилляторов (обычный пример из физики твердого тела: возбуждения кристаллической решетки могут быть интерпретированы как частицы — фононы). Все это очень в духе XIX столетия, когда люди пытались строить механические модели всех явлений. Я не вижу в этом ничего плохого, поскольку любая нетривиальная идея в определенном смысле верна. Мусор прошлого часто оказывается сокровищем настоящего (и наоборот). По этой причине мы будем смело прибегать к различным аналогиям при обсуждении наших основных проблем.

Очень важная аналогия, которой мы будем часто пользоваться, имеется между квантовой механикой D-мерных систем и классической статистической механикой в $D+1$ измерении. Продемонстрируем это на простейшем примере $D = 1$ квантовой механики одной частицы. В соответствии с принципом Фейнмана амплитуда перехода F из точки x в точку x' дается суммой по всем возможным траекториям, соединяющим точки x и x'. Каждая траектория берется с весом $\exp\Big(\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\Big)$, где $S[x(t)]$ — классическое действие. Поэтому

$$F(x, x', T) = \int_{\substack{x(0)=x,\\ x(T)=x'}} \mathcal{D}x(t)\, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int\limits_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - v(x(t)) \right] dt \right\}. \qquad (1.1)$$

Здесь F — амплитуда, T — время перехода, $v(x)$ — внешний потенциал. Континуальный интеграл определен следующим образом. Разобьем интервал $[0, T]$ на N маленьких интервалов $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{N-1}, T]$. Вместо (1.1) рассмотрим выражение

$$F = \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_j - t_{j-1})}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(T - t_{N-1})}\right)^{1/2} \times \\ \times \exp \frac{i}{\hbar}\left\{\sum_{j=1}^{N} \frac{m(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})} - \sum_{j=1}^{N}(t_j - t_{j-1})v(x_{j-1})\right\} \tag{1.2}$$

(здесь $x_0 = x$, $t_0 = 0$, $x_N = x'$, $t_N = T$). Можно показать, что при $t_{j+1} - t_j \sim T/N \to 0$ выражение (1.2) имеет конечный предел. Этот предел и есть амплитуда перехода. Хотя я не буду доказывать это утверждение (сошлюсь вместо этого на книгу Фейнмана и Хибса[1]), я коротко поясню происхождение формул (1.1) и (1.2). В соответствии со стандартной квантовой механикой амплитуда перехода определяется как[2]

$$F(x, x', T) = \langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}HT}|x\rangle, \tag{1.3}$$

где H — гамильтониан. Можно переписать (1.3) следующим образом:

$$F(x, x', T) = \langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(T-t_{N-1})}e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_{N-1}-t_{N-2})}\dots e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_1}|x\rangle = \\ = \int \langle x'|e^{\frac{i}{\hbar}H(T-t_{N-1})}|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|e^{\frac{i}{\hbar}H(t_{N-1}-t_{N-2})}|x_{N-2}\rangle \times \dots \times \\ \times\langle x_1|e^{\frac{i}{\hbar}Ht_1}|x\rangle\, dx_{N-1}\dots dx_1. \tag{1.4}$$

Нетрудно проверить, что когда все интервалы $t_{j+1} - t_j \to 0$, имеет место асимптотическое выражение

$$\langle x_{j+1}|e^{\frac{i}{\hbar}H(t_{j+1}-t_j)}|x_j\rangle \underset{t_{j+1}-t_j\to 0}{\longrightarrow} \left(2\pi i\frac{\hbar}{m}(t_{j+1} - t_j)\right)^{-1/2} \times \\ \times \exp \frac{i}{\hbar}\left\{\frac{m}{2}\frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{t_{j+1} - t_j} - v(x_j)(t_{j+1} - t_j)\right\}. \tag{1.5}$$

---

[1] Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., «Мир», 1968.

[2] Мы положили $\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x)$.

После подстановки (1.5) в (1.4) получается (1.2). Отметим, что в отсутствие потенциала v формула (1.5) точна при любом значении $t_{j+1} - t_j$ и описывает распространение свободной частицы.

Чтобы увидеть аналогию с классической статистикой, надо рассмотреть распространение частицы в мнимом времени T. Точнее, рассмотрим выражение

$$Z(x,\, x',\, T) = \langle x'| e^{\frac{-HT}{\hbar}} |x\rangle = F(x,\, x',\, -iT). \tag{1.6}$$

Можно снова повторить процедуру разбиения временного интервала, с той единственной разницей, что t_j в (1.4) теперь приобретают множитель $-i$. Таким образом, получаем

$$Z(x,\, x',\, T) = \int_{\substack{x(0)=x, \\ x(T)=x'}} \mathcal{D}x(t) \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int\limits_0^T \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + v(x(t)) \right) dt \right\}, \tag{1.7}$$

что следует понимать в том же смысле, что и (1.1). Мнемоническое правило для перехода от (1.1) к (1.7) очень простое: рассмотрим выражение

$$i \int\limits_0^{iT} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - v(x(t)) \right) dt \tag{1.8}$$

и сделаем замену $t = -i\tau$. Тогда получим

$$(1.8) = -\int\limits_0^T \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + v(x(t)) \right\} d\tau. \tag{1.9}$$

Вывод формулы (1.9) показывает, что мы располагаем даже большей свободой при вычислении континуального интеграла. Можно выбрать точки разбиения $\{t_j\}$ так, чтобы они лежали на произвольном контуре в комплексной плоскости, и время может быть не только мнимым, оно может течь вдоль любого комплексного пути (такого, конечно, чтобы было выполнено условие сходимости для (1.2), $\operatorname{Im} \Delta t < 0$). Эта свобода полезна при решении некоторых задач. Однако сейчас нас интересует другая сторона дела. Формула (1.9) имеет важную физическую интерпретацию. Давайте рассмотрим упругую струну длины T, обладающую собственным натяжением. Пусть концы струны расположены в точках x и x'. Предположим, что струна помещена во внешний потенциал $v(x)$. Потенциальная энергия такой струны равна

$$\mathcal{E}_{\mathrm{pot}}[x(t)] = \int\limits_0^T \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + v(x(\tau)) \right\} d\tau. \tag{1.10}$$

Отметим, что теперь τ не время, а длина упругой струны. По принципу Больцмана классическая статистическая сумма струны пропорциональна

$$Z \sim \int \mathcal{D}x(t)\, e^{-\beta \mathcal{E}_{\mathrm{pot}}[x(t)]} \tag{1.11}$$

(β — обратная температура; мы опустили вклад кинетической энергии, потому что в классической статистике он отщепляется в виде множителя, не зависящего от x и x'). Сравнение выражений (1.11) и (1.9) приводит к первой аналогии — аналогии между классической статистикой и квантовой механикой: *Амплитуда перехода за время $(-iT)$ для классической частицы совпадает с классической статистической суммой для струны длины T, вычисленной при $\beta = 1/\hbar$.*

Вторая аналогия следует из того, что квантовая статистическая сумма частицы равна $Z_{\mathrm{qu}} = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$ и, следовательно,

$$Z_{\mathrm{qu}} = \int dx\, F(x,\, x,\, -i\beta\hbar). \tag{1.12}$$

Поэтому второе правило гласит, что *в квантовом случае обратная температура играет роль мнимого времени.*

Наш вывод этих аналогий был чисто техническим. Я уверен, что для них имеются глубокие причины, связанные со свойствами пространства-времени. Хотя настоящее объяснение отсутствует, я позднее, при обсуждении гравитации, приведу некоторые соображения на эту тему. Пока наши цели более скромные — мы собираемся использовать эти аналогии при решении конкретных задач. Хотя мы выводили все для случая одной частицы, очевидно, что обе наши аналогии верны для любого числа степеней свободы.

1.2. Глобальные и локальные симметрии. Предварительное описание

Имеющиеся в природе элементарные частицы очень похожи по своим свойствам на возбуждения некоторой сложно устроенной среды (эфира). Мы не знаем детальной структуры эфира, но мы выяснили многое об эффективных лагранжианах для их низкоэнергетических возбуждений. В аналогичной ситуации мы бы оказались, если бы ничего не знали о молекулярной структуре жидкости, но имели бы уравнение Навье–Стокса и могли предсказать множество замечательных явлений. Конечно, есть много различных молекулярных структур, но все они приводят к одной и той же низкоэнергетической картине. Для целей теории можно брать любую удобную модель, если только она обладает нужными свойствами при низких энергиях.

В этом разделе мы обсудим наиболее фундаментальные принципы симметрии в физике частиц в рамках таких специально подобранных моделей. Возможно, самым важным открытием современной физики частиц является калибровочный принцип. В соответствии с этим принципом все взаимодействия в природе возникают из лагранжианов, инвариантных относительно локальных преобразований симметрии. Замечательным образом это требование определяет низкоэнергетическую структуру лагранжиана.

Первым (и самым сложным) примером этого явления была общая теория относительности, в которой из-за гравитационного поля разрешались различные лоренцевы повороты в различных точках. Вторым (и самым простым) примером была квантовая электродинамика, с абелевой калибровочной группой (которая отвечает произволу в фазе волновой функции электрона). Наконец, есть поля Янга–Миллса, которые считаются ответственными за сильные и слабые взаимодействия. Изучение динамики калибровочных полей — самая важная задача современной физики.

Пользуясь аналогиями, описанными в предыдущем разделе, мы сначала исследуем некоторые классические системы, а затем переведем результаты на язык теории частиц.

1.3. Дискретные глобальные симметрии

Мы начнем со случая глобальной (не калибровочной) симметрии. Простейший пример дает хорошо известная модель Изинга. Ее статистическая сумма имеет вид:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma_x\}} e^{-\beta\mathcal{E}[\sigma_x]}, \\ \mathcal{E}[\sigma_x] &= -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}} \sigma_x\sigma_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ обозначает узел кубической решетки, $\boldsymbol{\delta}$ — единичный вектор, соединяющий этот узел с одним из его ближайших соседей, а переменная σ_x принимает значения ±1. Ясно, что эта система инвариантна относительно группы $\mathbf{Z}_2: \sigma_x \to -\sigma_x$. Если размерность x-пространства превышает 1, у системы (1.13) имеется две фазы. В высокотемпературной (маленькие β) фазе $\mathbf{Z}_2$-симметрия не нарушена и дальний порядок отсутствует. Я имею в виду следующее. Рассмотрим большую, но конечную систему и зафиксируем значение σ_x на ее границе B:

$$\sigma_x|_{x \in B} = 1. \tag{1.14}$$

Тогда среднее значение $\langle \sigma_x \rangle$ внутри системы будет стремиться к нулю при неограниченном увеличении размеров системы. Чтобы доказать это, вычислим корреляционную функцию в пределе малых β. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \sigma_{\boldsymbol{R}} \rangle &= Z^{-1} \Big(\sum_{\{\sigma_x\}} e^{\beta \sum \sigma_x \sigma_{x+\delta}} \sigma_0 \sigma_{\boldsymbol{R}} \Big) \simeq \\ &\simeq \beta^{|\boldsymbol{R}|} Z^{-1} \Big(\sum_{\{\sigma_x\}} \sigma_0 (\sigma_0 \sigma_\delta) \ldots (\sigma_{\boldsymbol{R}-\delta} \sigma_{\boldsymbol{R}}) \sigma_{\boldsymbol{R}} \Big) = \beta^{|\boldsymbol{R}|} \end{aligned} \tag{1.15}$$

(в этой формуле мы разлагаем экспоненту в ряд по β и оставляем первый ненулевой вклад, который связан с цепочкой произведений $\beta(\sigma_x \sigma_{x+\delta})$ вдоль прямой линии, соединяющей точки 0 и $\boldsymbol{R}$). Таким образом, корреляционная длина, равная $\log^{-1}(1/\beta)$, мала, и, следовательно, граничные условия слабо влияют на состояния внутри системы. Для малых β

$$\langle \sigma_x \rangle \sim e^{-L \log(1/\beta)} \underset{L \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.16}$$

(L — размер системы).

Рассмотрим теперь случай больших β (низкотемпературная фаза). Максимальный вклад в (1.13) на этот раз вносит конфигурация со всеми $\sigma_x = 1$. Вероятность переворота спина по порядку величины равна $e^{-4D\beta}$, так что следует ожидать, что

$$\langle \sigma_x \rangle = 1 - O\left(e^{-4D\beta}\right). \tag{1.17}$$

Здесь D — размерность пространства, а $2D$ равно числу ближайших соседей. Однако выражение (1.17) не вполне справедливо. Для $D = 1$ энтропийные эффекты полностью разрушают упорядочение при всех β. Чтобы увидеть, как это происходит, исследуем одномерную цепочку Изинга. В основном состоянии все спины повернуты вверх. Общая конфигурация может быть задана указанием тех ребер, которые соединяют противоположно ориентированные спины. Если число таких ребер равно n, то энергетический множитель равен $e^{-2\beta n}$, но число конфигураций с таким n составляет $2(N!/n!(N-n)!)$ (N — полное число ребер), и в результате

$$Z = \sum_n 2\frac{N!}{n!(N-n)!}e^{-2\beta n}. \tag{1.18}$$

Видно, что среднее значение n по порядку величины равно $Ne^{-2\beta}$, и, следовательно, средняя корреляционная длина $r_c \sim N/n \sim e^{2\beta}$. Поэтому при любой величине β влияние граничных условий пренебрежимо мало и спонтанная намагниченность $\langle\sigma\rangle$ равна нулю. В двумерном случае простое и важное рассуждение, принадлежащее Пайерлсу, показывает, что дальний порядок выживает при больших β. Суть дела состоит в следующем. Рассмотрим «каплю» перевернутых спинов, погруженную в «море» спинов, которые смотрят вверх. Если граница капли имеет длину L, то энергетический множитель для такой конфигурации равен $e^{-2\beta L}$. В то же время число петель длины L на решетке ведет себя как C^L (C — некоторая константа); ниже мы обсудим это комбинаторное утверждение во всех подробностях. Поэтому, если $\beta > \frac{1}{2}\log C$, то рождение таких чуждых капель сильно подавлено и в системе есть дальний порядок. При $\beta < \frac{1}{2}\log C$, наоборот, выгодно рождение капель, разрушающих дальний порядок. Аргументация в случае $D > 2$ аналогична. Вывод состоит в том, что для систем с $\mathbf{Z}_2$ симметрией при $D \geqslant 2$ имеется фазовый переход между фазами со спонтанно нарушенной (ферромагнитная) и с восстановленной (парамагнитная) симметрией. Сходным образом можно рассмотреть более сложные дискретные группы, например, $\mathbf{Z}_p$. При этом фазовая структура более богата, и мы отложим обсуждение таких систем.

Теперь мы более подробно объясним, какое отношение имеет качественное поведение модели Изинга к квантовой теории поля. Будет доказано, что непрерывный предел квантовой теории поля с лагранжианом

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - v(\varphi), \\ v(\varphi) &= v(-\varphi), \end{aligned} \tag{1.19}$$

описывается непрерывным пределом модели Изинга более или менее независимо от конкретного вида потенциала $v(\varphi)$. Причина этого явления состоит в том, что вблизи фазового перехода второго рода, когда решеточная система выглядит как непрерывная из-за большой корреляционной длины, ее поведение обладает замечательными свойствами универсальности. Как правило, изменение решеточного взаимодействия приводит к изменению температуры перехода, но не меняет корреляционные функции, выраженные через корреляционную длину r_c. Ниже мы объясним эту универсальность с помощью операторной алгебры. Пока же ограничимся более простым рассуждением. Прежде всего, опишем диаграммную технику для вычисления корреляционных функций модели Изинга. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{\sigma_x\}} \exp\Big(\beta \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \sigma_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{x}'}\Big) = \\
&= \exp\Big(\beta \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_{\boldsymbol{x}}\partial\varphi_{\boldsymbol{x}'}}\Big) \sum_{\{\sigma_x\}} \exp\Big(\sum_{\boldsymbol{x}} \varphi_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{x}}\Big)\Big|_{\varphi=0} = \\
&= \exp\Big(\beta \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_{\boldsymbol{x}}\partial\varphi_{\boldsymbol{x}'}}\Big) \exp\Big(\sum_{\boldsymbol{x}} \log(2\operatorname{ch}\varphi_{\boldsymbol{x}})\Big)\Big|_{\varphi=0} \\
&\qquad \Big(\mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} = \sum_{\boldsymbol{\delta}} \delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{\delta}}\Big).
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Мы получили стандартное функциональное представление для фейнмановских диаграмм со свободным пропагатором $\beta\mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}'}$ и вершинами, определяемыми свободным потенциалом $\log(2\operatorname{ch}\varphi)$. Определим дайсоновскую собственно-энергетическую функцию Σ как сумму диаграмм, не допускающих разбиения на части, связанные единственной линией (одночастично-неприводимых диаграмм). Для точного пропагатора G поля φ имеем уравнение Дайсона (в импульсном представлении)

$$\begin{aligned}
G(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{(\beta\mathcal{K}(\boldsymbol{p}))^{-1} - \Sigma(\boldsymbol{p})} = \frac{\beta\mathcal{K}(\boldsymbol{p})}{1 - \beta\mathcal{K}(\boldsymbol{p})\Sigma(\boldsymbol{p})}, \\
\Sigma(\boldsymbol{p}) &= \qquad + \qquad + \qquad + \ldots .
\end{aligned} \tag{1.21}$$

При общих значениях β сингулярности по $\boldsymbol{p}$ в (1.21) имеются при $|\boldsymbol{p}| \sim 1$. Это означает, что корреляционная длина по порядку величины равна шагу решетки. В такой ситуации нет никакой вращательной симметрии и универсальность отсутствует. Однако должна существовать температура фазового перехода β_{c}, определяемая условием

$$1 = \beta_{\mathrm{c}}\mathcal{K}(0)\Sigma(0). \tag{1.22}$$

В этой точке имеется сингулярность при $\boldsymbol{p} = 0$, и корреляционные функции ведут себя степенным образом. Разлагая $\mathcal{K}(\boldsymbol{p})$ по $\boldsymbol{p}$ при $|\beta - \beta_{\mathrm{c}}| \ll \beta_{\mathrm{c}}$, имеем

$$G(\boldsymbol{p},\,\tau) = \frac{z}{\boldsymbol{p}^2 + \tau + \Sigma(\boldsymbol{p},\,\tau) - \Sigma(0,\,0)} \tag{1.23}$$

(здесь $z \sim 1$ — постоянная, которую мы в дальнейшем включаем в определение поля φ; $\tau \sim |\beta - \beta_c|/\beta_c$). Уравнение (1.23) позволяет легко оценить ситуацию в критической точке. Возьмем затравочную функцию Грина $G_0(\boldsymbol{p}) = 1/(p^2 + \tau)$ и вычислим первую диаграмму для Σ:

$$\Sigma^{(1)} = \qquad \sim \int \frac{d^D \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2 + \tau} = A + B\tau^{D/2-1}. \tag{1.24}$$

Мы видим, что при $D > 4$ вклад $\Sigma(1)$ пренебрежимо мал по сравнению с $p^2 + \tau$; при $D = 4$ поправка имеет относительный порядок $\log(1/\tau)$, а при $D < 4$ имеются очень большие степенные поправки. Аналогичная оценка диаграмм более высокого порядка показывает, что при $D > D_{\mathrm{cr}} = 4$ они несущественны. Более того, видно, что наиболее сингулярные вклады связаны со взаимодействиями типа φ^4, и можно надеяться, что вклады старших степеней φ несущественны. Ниже будет показано, что это действительно так. Конкретный вид $\mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'}$ тоже не важен. Мы видели, что достаточно удержать только член $\boldsymbol{p}^2$ в разложении $\mathcal{K}(\boldsymbol{p})$. Все эти рассуждения не являются доказательствами, но они указывают путь в более сложных ситуациях и потому заслуживают упоминания.

Мы пришли к следующему утверждению. Рассмотрим D-мерную модель Изинга с короткодействующим взаимодействием

$$\mathcal{E} = -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \sigma_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{x}'}.$$

Пусть температура β близка к критической $|(\beta - \beta_c)/\beta_c| \ll 1$. Тогда все корреляционные функции имеют тот же вид, что в полевой теории с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \lambda_0 \varphi^4, \tag{1.25}$$

тоже определенной в D-мерном евклидовом пространстве. Важно отметить, что параметр m_0^2 в (1.25) должен быть выбран так, чтобы физическая масса удовлетворяла условию $m^2_{\mathrm{phys}} = \tau \ll \Lambda^2$ (Λ — обрезание по импульсам). Это условие означает, что мы находимся в критической области для теории (1.25). Сама критическая точка отвечает значению $m_0^2 = m^2_{0,\mathrm{cr}}$, при котором $m_{\mathrm{phys}} = 0$. Чтобы определить непрерывный предел теории (или, другими словами, перенормировать ее), надо перейти к пределу $m_0^2 \to m^2_{0,\mathrm{cr}}$ и $\Lambda^2 \to \infty$ таким образом, чтобы m_{phys} оставалась фиксированной. Если это возможно, мы получим теорию, инвариантную относительно вращений, причем она не зависит от того, как мы определим ее на масштабе обрезания.

Понятно также, что теория (1.25) имеет две фазы при $D > 1$, в одной фазе $\langle\varphi\rangle = 0$, а в другой фазе симметрия нарушена и $\langle\varphi\rangle \neq 0$. В случае $D = 1$ мы возвращаемся к самому первому нашему примеру квантовой механики одной частицы в потенциале. Известно, что волновая функция основного состояния должна быть четной, и следовательно $\langle\varphi\rangle = 0$. Это заключение совпадает с результатами нашего анализа модели Изинга. Мы объясним это совпадение в главе, посвященной инстантонам.

Как случилось, что теория с дискретными переменными $\sigma_x = \pm 1$ оказалась эквивалентной теории с непрерывным полем φ? Это можно объяснить таким образом. Изменим шаг решетки, разбив исходную решетку на блоки и зафиксировав величины так называемых блок-спинов (например, можно фиксировать суммы спинов, расположенных в вершинах каждого гиперкуба нашей решетки). Затем просуммируем по всем конфигурациям с такими фиксированными значениями. В результате получится эффективная энергия, зависящая от блок-спинов S, которые теперь уже не удовлетворяют условию $S^2 = 1$. Повторяя многократно это преобразование, мы придем к эффективному действию, зависящему от непрерывного поля φ.

Обычно в физике частиц считают фундаментальными лагранжианы типа (1.25). Мне кажется, что правильными переменными на очень малых расстояниях являются аналоги σ, поскольку именно в них заключена квинтэссенция свойств симметрии. Различие между переменными, однако, не видно на больших расстояниях, а теория на малых масштабах (порядка планковской длины) пока не построена.

Последнее, что нам осталось объяснить про модель Изинга в этой вводной главе, это ее гамильтонова формулировка. Для перехода к ней разобьем D-мерную координату $\boldsymbol{x}$ на $(D-1)$-мерную $\boldsymbol{y}$ и одномерное «время» t: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, t)$. Пусть константа связи во временном направлении намного больше, чем в пространственных (универсальность позволяет прибегнуть к этому приему, не изменяя критического поведения). Имеем

$$Z = \sum_{\{\sigma_{y,t}\}} \exp\Big(\beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \sigma_{\boldsymbol{y},t}\sigma_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta},t}\Big) \exp\Big(\beta_0 \sum_{\boldsymbol{y}} \sigma_{\boldsymbol{y},t}\sigma_{\boldsymbol{y},t+1}\Big). \tag{1.26}$$

Эту сумму можно представить в удобном виде, введя так называемую трансфер-матрицу T. Она определена так:

$$\langle\{\tilde\sigma_{\boldsymbol{y}}\}|T|\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}\rangle = \exp\Big(\beta_0 \sum_{\boldsymbol{y}} \tilde\sigma_{\boldsymbol{y}}\sigma_{\boldsymbol{y}}\Big) \exp\Big(\beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \sigma_{\boldsymbol{y}}\sigma_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}}\Big) \tag{1.27}$$

и имеет размер $2^N \times 2^N$, где N — число точек $\boldsymbol{y}$. Из этого определения сразу следует, что

$$Z = \mathrm{Tr}(T^L), \tag{1.28}$$

где L — длина решетки в t-направлении. Поэтому для решения задачи достаточно диагонализовать матрицу T. Для наших целей можно еще упростить (1.27), используя тождество

$$\begin{aligned} e^{\beta_0 \tilde{\sigma}_y \sigma_y} &= \mathrm{ch}\,\beta_0 + (\tilde{\sigma}_{\boldsymbol{y}}\sigma_{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{sh}\,\beta_0 = \frac{1}{2}e^{\beta_0}(1 + \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{y}}\sigma_{\boldsymbol{y}}) + \frac{1}{2}e^{-\beta_0}(1 - \tilde{\sigma}_{\boldsymbol{y}}\sigma_{\boldsymbol{y}}) = \\ &= \langle\{\tilde{\sigma}_{\boldsymbol{y}}\}|e^{\beta_0} + e^{-\beta_0}\tau^1_{\boldsymbol{y}}|\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}\rangle. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь мы ввели матрицы Паули $\tau^i_{\boldsymbol{y}}$ и состояния $|\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}\rangle$, удовлетворяющие уравнениям $\tau^3_{\boldsymbol{y}}|\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}\rangle = \sigma_{\boldsymbol{y}}|\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}\rangle$. Если положить $\beta_1 \ll 1$, то

$$\exp\Big(\beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \sigma_{\boldsymbol{y}}\sigma_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}}\Big) \approx \langle\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}|1 + \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \tau^3_{\boldsymbol{y}}\tau^3_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}}|\{\sigma_{\boldsymbol{y}}\}\rangle. \tag{1.30}$$

Из этих двух соотношений получаем

$$\begin{gathered} T = e^{N\beta_0}(1 + \hat{H}), \\ \hat{H} = e^{-2\beta_0}\sum_{\boldsymbol{y}} \tau^1_{\boldsymbol{y}} + \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \tau^3_{\boldsymbol{y}}\tau^3_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}}. \end{gathered} \tag{1.31}$$

Критическая точка исходной модели отвечает значениям параметров, при которых исчезает щель в спектре $\hat{H}$[1].

1.4. Непрерывные абелевы глобальные симметрии

Следующей в порядке возрастания сложности будет система с глобальной O(2)-симметрией. Вместо переменных $\sigma = \pm 1$ надо поместить в каждую вершину решетки двумерный единичный вектор $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Энергия равна

$$\mathcal{E} = -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}'} = -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'}\cos(\alpha_{\boldsymbol{x}} - \alpha_{\boldsymbol{x}'}), \quad -\pi < \alpha_{\boldsymbol{x}} \leqslant \pi. \tag{1.32}$$

[1] Это условие подразумевает, что $e^{-2\beta_0} \sim \beta_1 \ll 1$. Поэтому достаточно брать $\hat{H}$ в линейном по τ^1_y приближении.

Статистическая сумма определяется как

$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\boldsymbol{x}} d\alpha_{\boldsymbol{x}}\, e^{-\beta\mathcal{E}[\alpha_{\boldsymbol{x}}]}. \tag{1.33}$$

Можно использовать тот же прием, что и в случае модели Изинга, и перейти от (1.33) к теории непрерывного комплексного поля $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Для этого напишем

$$\begin{aligned} Z = {} & \exp\Big(\beta \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} \frac{\partial^2}{\partial\phi^a_{\boldsymbol{x}}\partial\phi^a_{\boldsymbol{x}'}}\Big)\Big|_{\phi^a_{\boldsymbol{x}}=0} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\boldsymbol{x}} d\alpha_{\boldsymbol{x}}\, \exp\big(\phi^1_{\boldsymbol{x}} \cos\alpha_{\boldsymbol{x}} + \\ & + \phi^2_{\boldsymbol{x}} \sin\alpha_{\boldsymbol{x}}\big) = \exp\Big(\beta \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} K_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'}\, 2\Big[\frac{\partial^2}{\partial\phi^*_{\boldsymbol{x}}\partial\phi_{\boldsymbol{x}'}} + \frac{\partial^2}{\partial\phi_{\boldsymbol{x}}\partial\phi^*_{\boldsymbol{x}'}}\Big]\Big) \times \\ & \times \exp\Big(\sum_{\boldsymbol{x}} \log 2\pi I_0\left(i\sqrt{\phi^*_{\boldsymbol{x}}\phi_{\boldsymbol{x}}}\right)\Big)\Big|_{\phi_{\boldsymbol{x}}=0} \end{aligned} \tag{1.34}$$

(I_0 — функция Бесселя). Повторив рассуждения из предыдущего раздела, можно убедиться, что теория (1.33) попадает в один класс универсальности с теорией, описываемой лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi + m_0^2\phi^*\phi + \frac{1}{2}\lambda_0(\phi^*\phi)^2. \tag{1.35}$$

И в этом случае при $D = 1$ нет фазового перехода, а при $D \geqslant 2$ имеются две различные фазы. Существенным отличием от модели Изинга является наличие бесщелевых возбуждений при всех $\beta > \beta_c$, что гарантируется теоремой Голдстоуна. Физический смысл этих возбуждений очень прост. Пусть симметрия нарушена и $\langle\phi\rangle \neq 0$ (мы увидим, что это происходит при $D \geqslant 3$), тогда состояния с различной ориентацией, $\langle\tilde{\phi}\rangle = e^{i\alpha}\langle\phi\rangle$, должны иметь одинаковую энергию. Если образовать состояние с медленно меняющейся фазой $\alpha(x)$, то его энергия будет стремиться к энергии вакуума при уменьшении волнового вектора до нуля. Поэтому в спектре не должно быть щели. Чтобы показать это более формально введем сохраняющийся ток

$$\mathcal{J}_\mu = \frac{1}{i}\left[\phi^*\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi^*\right)\phi\right], \tag{1.36}$$

для которого выполняется тождество Уорда

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle\mathcal{J}_\mu(x)\phi(y)\rangle = \mathrm{i}\delta(x-y)\langle\phi(y)\rangle. \tag{1.37}$$

В импульсном представлении оно имеет вид

$$q_\mu \langle \mathcal{J}_\mu(q)\phi(-q)\rangle = \langle \phi(0)\rangle. \qquad (1.38)$$

Переходя к пределу $q \to 0$, заключаем, что среднее $\langle \mathcal{J}_\mu(q)\phi(-q)\rangle$ должно быть сингулярно в этом пределе. Особенность имеет вид

$$\langle \mathcal{J}_\mu(q)\phi(-q)\rangle \underset{q\to 0}{=} \langle \phi(0)\rangle q_\mu/q^2 + \cdots . \qquad (1.39)$$

При $D = 2$ ситуация более хитрая. Ясно, что в этом случае пропагатор поля $\boldsymbol{n}$ в модели (1.33) не может иметь голдстоуновского полюса. В самом деле, так как

$$1 = \langle \boldsymbol{n}^2(0)\rangle = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \langle \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}(-\boldsymbol{q})\rangle, \qquad (1.40)$$

такой полюс в правой стороне равенства привел бы к противоречию в инфракрасной области. Ответ состоит в том, что сингулярность смягчается. В этом случае нет также наивного параметра порядка и настоящего нарушения симметрии: $\langle \boldsymbol{n}\rangle = 0$. Тем не менее, фазовый переход при некотором β_c происходит и наблюдаемые свойства двух фаз сильно отличаются. В дальнейшем мы подробно обсудим эту теорию. Мы столкнулись здесь со свойством, характерным для всех непрерывных симметрий. В таких системах имеются две критические размерности — верхняя ($D = 4$), в которой флуктуации в точке фазового перехода становятся несущественными, и нижняя ($D = 2$), в которой голдстоуновские бозоны начинают сильно взаимодействовать друг с другом.

1.5. Неабелевы глобальные симметрии

Имеется несколько неабелевых обобщений предыдущих моделей. Наиболее прямое состоит в том, чтобы рассмотреть то же выражение (1.32) для энергии, но считать единичные векторы $\boldsymbol{n}_x$ N-мерными. В этом случае группой симметрии будет $O(N)$. Наибольшее качественное различие между абелевым и неабелевым случаями имеется при $D = 2$. Из-за сильного взаимодействия голдстоуновских бозонов они приобретают энергетическую щель при всех значениях β, и в неабелевой системе фазовый переход вообще отсутствует. На предварительном этапе обсуждения можно объяснить эту качественную разницу так. В непрерывном пределе лагранжиан (1.32) для $N = 3$ имеет вид

$$\mathcal{L} \sim (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 = (\partial_\mu \theta)^2 + \sin^2\theta (\partial_\mu \phi)^2 \qquad (1.41)$$

(здесь θ, ϕ — полярный и азимутальный углы). Из (1.41) следует, что амплитуда рассеяния голдстоуновских бозонов с характерными импульсами k пропорциональна k^2: $F \sim k^2$. Первая радиационная поправка к этой амплитуде дается диаграммой

$$\begin{aligned} &F^{(1)} = \qquad\qquad \sim F^2 \frac{1}{k^4} k^D, \\ &\frac{F^{(1)}}{F} \sim k^{D-2} \quad \text{при} \quad D \neq 2, \\ &\frac{F^{(1)}}{F} \sim \log \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad D = 2. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Последняя оценка — следствие логарифмической расходимости безразмерных интегралов. Это показывает, что взаимодействие при $D = 2$ оказывается сильным в инфракрасной области (в абелевом случае это не так, там $F \sim k^4$).

Чтобы увидеть последствия этого факта, потребуется более сложный анализ. Мы посвятим ему отдельную главу.

При $D > 2$ в системе имеется фазовый переход и спонтанное нарушение симметрии.

Другое важное неабелево обобщение состоит в том, чтобы приписать каждому ребру решетки элемент группы. Рассмотрим матрицу $g \in G$, где G — компактная группа Ли. Энергия определяется формулой

$$\mathcal{E} = - \sum_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{\beta}} \operatorname{Tr}(g^{-1}_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}} g_{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{\beta}}). \tag{1.43}$$

Статистическая сумма равна

$$Z = \int \prod_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}} d\mu(g_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}})\, e^{-\beta \mathcal{E}} \tag{1.44}$$

($d\mu(g)$ — мера Хаара на группе).

Энергия $\mathcal{E}$ инвариантна по отношению к $G \times G$ преобразованиям, описываемым формулой

$$g_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}} \to u g_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}} v; \qquad u, v \in G. \tag{1.45}$$

Качественные свойства этой теории такие же, как и у $O(N)$ модели.

Существует множество других неабелевых моделей, в которых поля принадлежат не самой группе, а фактор-пространству G/H. Некоторые интересные свойства этих теорий мы обсудим позднее.

1.6. Дискретные калибровочные симметрии

Начнем с дискретной калибровочной группы. Основными переменными будут $\sigma = \pm 1$. Но на этот раз они сопоставлены не вершинам, а ребрам решетки. Если обозначить ребро парой векторов $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$, в которой $\boldsymbol{x}$ — начальная вершина ребра, а $\boldsymbol{\alpha}$ — его направление, то выражение для энергии имеет вид

$$\mathcal{E} = -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \sigma_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \sigma_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}} \tag{1.46}$$

(через $\boldsymbol{\alpha}$ обозначен единичный вектор в направлении $\boldsymbol{\alpha}$). Правило, по которому образовано выражение (1.46), достаточно очевидно. У нас есть «1-формы» или «векторные потенциалы» $\sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}$, сопоставляемые ребрам. Затем берем четыре ребра, образующих «плакет», и перемножаем соответствующие потенциалы. В результате получается «2-форма» или «напряженность поля», которая сопоставляется данному плакету. В (1.46) записана сумма по всем плакетам. Самым замечательным свойством этой конструкции является калибровочная инвариантность построенных 2-форм. Если сделать преобразование

$$\sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \to \eta_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \eta_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.47}$$

(с $\eta_{\boldsymbol{x}} = \pm 1$), то напряженность поля не изменится:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha\beta}} = \sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \sigma_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \sigma_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}} \to f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha\beta}}.$$

Поэтому действие обладает симметрией $(\mathbf{Z}_2)^N$, где N — число вершин решетки. Поэтому, если в случае глобальной $\mathbf{Z}_2$ симметрии энергия $\mathcal{E}$ имела в точности два вырожденных минимума (когда все $\sigma_x = +1$ или -1), то в калибровочном случае вырождение огромно: всякая конфигурация, являющаяся «чистой калибровкой»

$$\sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} = \eta_{\boldsymbol{x}} \eta_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}}, \tag{1.48}$$

при любом выборе $\{\eta_{\boldsymbol{x}}\}$ оказывается основным состоянием с минимальной энергией.

Эти специальные свойства означают, прежде всего, что в подобных системах не может быть параметра порядка, $\langle \sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \rangle = 0$, и, более того, только калибровочно-инвариантные величины могут быть отличны от нуля. Это следует из того факта, что, фиксируя значения $\sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}$ на границе нашей системы, мы не можем испортить калибровочную инвариантность внутри нее. Все это не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на фазовую структуру калибровочных систем.

Различные фазы легко определяются по разному поведению калибровочно-инвариантных корреляционных функций. Ситуация здесь напоминает ту, с которой мы столкнулись в двумерной модели с глобальной $O(2)$-симметрией, где фазовый переход второго рода происходил без явного нарушения симметрии.

Физические свойства $\mathbf{Z}_2$-калибровочной системы таковы: при $D = 2$ эта модель точно решается и эквивалентна набору невзаимодействующих друг с другом $D = 1$ моделей Изинга (это следует из того, что преобразованиями (1.47) можно добиться, чтобы все $\sigma_{\boldsymbol{x},1} = 1$), и потому не имеет фазового перехода. При $D = 3$ мы покажем, что эта теория эквивалентна трехмерной модели Изинга (с помощью дуальности Крамерса–Ваннье). Эта модель представляет очень большой интерес, поскольку она описывает большинство $D = 3$ фазовых переходов в природе. Мы посвятим ее изучению специальную главу. Наконец, при $D \geqslant 4$ численный анализ $\mathbf{Z}_2$-моделей показывает, что у них должен быть фазовый переход первого рода. Это означает, что корреляционная длина никогда не становится бесконечной и теория не имеет непрерывного предела.

1.7. $O(2)$-калибровочные системы

В этом случае система задается сопоставлением единичных векторов (которые можно записать в комплексном виде) каждому ребру решетки: $\phi_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} = e^{iA_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}}(-\pi < A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \leqslant \pi)$. Выражение для энергии имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{2}(\phi_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}\phi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\phi^*_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}\phi^*_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}} + \text{c.c.}) = \\ &= \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cos(A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} + A_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} - A_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} - A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}}).\end{aligned} \tag{1.49}$$

Энергия (1.49) инвариантна относительно преобразований

$$\phi_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \to e^{i\varphi_{\boldsymbol{x}}}\phi_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}e^{-i\varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}}} \tag{1.50}$$

или

$$A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \to A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} + \varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}}$$

(с произвольными $\{\varphi_{\boldsymbol{x}}\}$). Формальный непрерывный предел (1.49) совпадает со знакомым выражением

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \text{const} + \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}\, F^2_{\alpha\beta}, \\ F_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.\end{aligned} \tag{1.51}$$

Должны ли мы заключить из этого, что непрерывным пределом нашей модели является свободное поле Максвелла? Чтобы понять, что происходит на самом деле, сравним эту ситуацию с описанной в случае (1.32). В том случае энергия после формального перехода к непрерывному пределу приобретала вид

$$\mathcal{E} = \mathrm{const} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \alpha)^2. \tag{1.52}$$

Она описывала безмассовое скалярное поле — голдстоуновское поле, связанное с нарушением симметрии. В том абелевом случае возмущающие взаимодействия (описываемые опущенными членами $\sim (\partial_\mu \alpha)^4$) были, как мы видели, несущественны. Но в главе, посвященной инстантонам, мы покажем, что из-за непертурбативных эффектов, связанных с вихрями, существует фазовый переход, после которого поле α приобретает массу. Поэтому следует заключить, что при $\beta > \beta_c$ система действительно описывается безмассовым свободным голдстоуновским полем; в критической области $|\beta - \beta_c| \ll \beta_c$ возникает сложно взаимодействующая непрерывная теория с безмассовыми и массивными частицами, и при $\beta < \beta_c$ безмассовые частицы пропадают. Все эти эффекты непертурбативные. Отметим еще одно интересное явление при $D = 2$: строго говоря, здесь нет спонтанного нарушения симметрии, и поле из (1.35) обладает свойством

$$\langle \phi \rangle = 0. \tag{1.53}$$

Тем не менее, безмассовые голдстоуновские моды, описываемые фазой $\alpha(x)$, имеются и исчезают в точке фазового перехода. Один из путей, позволяющих понять это, основан на представлении

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\alpha(x)}. \tag{1.54}$$

Можно показать, что

$$\langle \rho(x) \rangle \underset{V \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \beta < \beta_c; \\ \mathrm{const}, & \beta > \beta_c \end{cases} \tag{1.55}$$

(V — объем системы). Все это имеет место и в случае (1.49), (1.51). Если $D = 4$, то при больших β получается теория свободных фотонов. Видно, что в некотором смысле фотоны являются голдстоуновскими бозонами, связанными с калибровочной инвариантностью, хотя эта инвариантность, строго говоря, не нарушается. Если уменьшать β, то при некотором β_c из-за инстантонных эффектов произойдет фазовый переход. При $\beta < \beta_c$ в теории будут только массивные возбуждения. При $D = 3$ ситуация еще более интересная. Будет показано, что в этом случае непертурбативные эффекты истребляют фотоны при всех β и имеется только одна массивная фаза. Таким образом, формальный непрерывный предел (1.51) не имеет никакого отношения к делу. Это только один из множества примеров, когда из-за квантовых поправок эффективный лагранжиан в корне отличается от классического.

Остается сказать, что при $D = 2$ калибровочная модель тривиальна, а при $D > 4$ в ней, видимо, имеется фазовый переход первого рода.

1.8. Неабелевы калибровочные теории

В этом случае мы сопоставляем каждому ребру матрицу из некоторой компактной группы Ли G: $B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \in G$. Энергия равна

$$\mathcal{E} = -\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} B_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} B^{-1}_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} B^{-1}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}}) + \text{c.c.}\right]. \tag{1.56}$$

Она инвариантна по отношению к преобразованиям

$$B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \to h^{-1}_{\boldsymbol{x}} B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} h_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}}. \tag{1.57}$$

Для определения наивного непрерывного предела выберем $B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}$ близкими к единичным

$$B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \simeq I + A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \tag{1.58}$$

с малыми и медленно изменяющимися $A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}$. Тогда

$$\mathcal{E} = \text{const} - \frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}\, F^2_{\alpha\beta}\, d\boldsymbol{x}, \tag{1.59}$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]. \tag{1.60}$$

Это выражение известно как действие Янга–Миллса. Так же как и для глобальных симметрий при $D = 2$ в калибровочном случае при $D = 4$ возмущающее взаимодействие существенно. Это следует из оценок

$$\begin{gathered} F \sim \qquad \sim 1, \quad F^{(1)} \sim \qquad \sim k^{D-4}, \\ F^{(1)}/F \sim \log(1/k) \quad \text{при} \quad D = 4 \end{gathered} \tag{1.61}$$

(здесь F — амплитуда рассеяния квантов A_α с характерным импульсом k). Поэтому даже при больших β истинное ультрафиолетовое поведение не имеет никакого отношения к наивному непрерывному пределу. Мы приведем аргументы, показывающие, что фактически эта теория имеет энергетическую щель и довольно своеобразный спектр при больших β. Исследование этого предела является центральной задачей теории сильных взаимодействий. Это связано с тем, что теория (1.56) достигает непрерывного предела только при $\beta \to \infty$, и имеются различные указания, на то, что этот предел в случае $G = SU(3)$ описывает реальный мир сильных взаимодействий. Большая часть наших усилий в последующих главах будет посвящена этой задаче.

Здесь нам остается сказать, что при $D = 3$ теория имеет аналогичные свойства: ни при каких β нет фазового перехода и при $\beta \to \infty$ имеется массивная фаза. При $D > 4$ имеет место фазовый переход первого рода.

Перейдем теперь к более систематическому изучению перечисленных выше теорий и их структуры.

Глава 2
Асимптотическая свобода и ренормализационная группа

2.1. Главные киральные поля[1]

В этом разделе мы изучим предел больших β для $D = 2$ главного кирального поля, которое описывается лагранжианом

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu g^{-1}\partial_\mu g)\\ (1/e_0^2 = \beta \gg 1, \quad g \in G).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Как обсуждалось в главе 1, инфракрасное взаимодействие безмассовых частиц, описываемое (2.1), оказывается логарифмически сильным. Теперь наша цель — прояснить структуру этого логарифмического взаимодействия.

Рассмотрим эффективный лагранжиан, возникающий из (2.1) в однопетлевом приближении. Чтобы найти его, представим квантовое поле $g(x)$ в виде

$$g(x) = h(x)g_{\mathrm{cl}}(x), \tag{2.2}$$

где g_{cl} — какое-нибудь классическое решение уравнений движения, следующих из (2.1),

$$\begin{gathered}\partial_\mu R_\mu^{\mathrm{cl}} = 0,\\ R_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1}.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Наша задача — проинтегрировать по полям $h(x)$ с тем, чтобы получить эффективное действие, зависящее от $g_{\mathrm{cl}}(x)$. Это более или менее стандартный подход в теории поля, но он нуждается в некоторых пояснениях. На первый взгляд, из-за инвариантности меры интегрирования, $\mathcal{D}h(x) = \mathcal{D}(h(x)g_{\mathrm{cl}}(x))$, результат интегрирования по $h(x)$ вообще не должен зависеть от $g_{\mathrm{cl}}(x)$. Не вполне ясно также, какие типы классических решений разрешается рассматривать. На оба вопроса можно

[1] Главное киральное поле — это такое поле, которое определяет главное расслоение над базовым пространством.

ответить, если рассмотреть систему конечного размера и фиксировать значение $g(x)$ на ее границе Г:

$$g(x)|_\Gamma = g(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Мы исследуем функционал

$$\Psi[g(\xi)] = \int_{g(x)|_\Gamma = g(\xi)} \mathcal{D}g(x)\, e^{-\frac{1}{\hbar}S[g(x)]}, \tag{2.5}$$

где S — действие. Этот функционал — ничто иное как аналог шредингеровской волновой функции. Классический предел $\hbar \to 0$ отвечает минимуму действия S с граничными условиями Дирихле (2.4). Интегрирование по $h(x)$ в разложении (2.2) отвечает учету квантовых флуктуаций. Из сказанного ясно, что необходимо фиксировать граничные значения $h(x)$

$$h(x)|_\Gamma = I. \tag{2.6}$$

Итак, мы вычисляем интеграл по $h(x)$ и получаем эффективное действие, зависящее от $g_{\rm cl}(x)$. Следует понимать, однако, что $g_{\rm cl}(x)$ не является независимой переменной: классические решения находятся в соответствии с граничными условиями $g(\xi)$ (ξ — $(D-1)$-мерная переменная). Таким образом, мы фактически вычисляем функционал (2.5), который, с одной стороны, как уже говорилось, аналогичен шредингеровской волновой функции, с другой стороны, является аналогом амплитуд на массовой поверхности для теории в пространстве-времени Минковского (они также зависят от $(D-1)$-мерных полей).

Вся эта информация о граничных условиях и Ψ-функционалах может оставаться в подсознании, пока мы интересуемся бесконечными системами. В большинстве случаев не следует беспокоиться и можно просто выражать $g_{\rm cl}(x)$ через $g(x)$.

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$\begin{aligned} L_\mu &\equiv g^{-1}\partial_\mu g = L_\mu^{\rm cl} + g_{\rm cl}^{-1}(h^{-1}\partial_\mu h)g_{\rm cl}; \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2e_0^2}\,{\rm Tr}\,L_\mu^2 = -\frac{1}{2e_0^2}\,{\rm Tr}(L_\mu^{\rm cl})^2 + \frac{1}{2e_0^2}\,{\rm Tr}(\partial_\mu h^{-1}\partial_\mu h) + \\ &\quad + \frac{1}{e_0^2}\,{\rm Tr}\left(R_\mu^{\rm cl}(h^{-1}\partial_\mu h)\right), \quad R_\mu^{\rm cl} = (\partial_\mu g_{\rm cl})g_{\rm cl}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Поскольку мы интересуемся только однопетлевыми поправками к классическому действию, достаточно рассмотреть малые флуктуации матрицы h. Представим

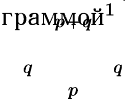
$$h = e^\phi \simeq 1 + \phi + \frac{1}{2}\phi^2 \tag{2.8}$$

(ϕ принадлежит алгебре Ли группы G). Подстановка (2.8) в (2.7) дает

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{cl}} - \frac{1}{2e_0^2}\,\text{Tr}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2e_0^2}\,\text{Tr}\left(R_\mu^{\text{cl}}[\phi,\, \partial_\mu \phi]\right) + O(\phi^3) \tag{2.9}$$

(мы опустили член $R_\mu^{\text{cl}} \partial_\mu \phi$, поскольку в силу уравнений движения $\partial_\mu R_\mu^{\text{cl}} = 0$).

Квадратичный по R_μ член в эффективном действии дается фейнмановской диаграммой[1]



$$-S_{\text{eff}} = \quad = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} (R_\mu^{\text{cl}}(q))_A (R_\nu^{\text{cl}}(-q))_B \times$$
$$\times \frac{1}{2} f^{ACD} f^{BCD} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{(2p+q)_\mu (2p+q)_\nu}{8p^2 (p+q)^2}. \tag{2.10}$$

Если выделить ультрафиолетово-расходящийся вклад из (2.10), эффективное действие приобретает вид

$$-S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int d^2 x \, (R_\mu^{\text{cl}}(x))^A (R_\nu^{\text{cl}}(x))^A \times$$
$$\times \frac{1}{2} C_v(G) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} + \text{конечный вклад} =$$
$$= \left(\frac{C_v(G)}{4\pi} \log \Lambda \right) \cdot \frac{1}{2} \int \text{Tr}(\partial_\mu g_{\text{cl}}^{-1} \partial_\mu g_{\text{cl}})\, d^2 x + \text{конечный вклад} \tag{2.11}$$

(Λ — обрезание в интеграле по импульсам).

Понятно, что если выразить все через перенормированную константу связи,

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e_0^2} - \frac{C_v(G)}{4\pi} \log \Lambda, \tag{2.12}$$

то эффективное действие будет конечно в заданном порядке. Результат проведенного вычисления допускает две интерпретации. Одну, более наивную, мы уже обсуждали: вычислялось эффективное действие, и

[1] Мы обозначим через t^A генераторы фундаментального представления алгебры Ли группы G, $[t^A, t^B] = f^{ABC} t^C$; $\text{Tr}\, t^A t^B = -\frac{1}{2}\delta^{AB}$; $\phi = \phi^A t^A$; $R_\mu = R_\mu^A t^A$. f^{ABC} — структурные константы этой алгебры. Отметим, что $f^{ABC} f^{BCD} = C_v(G) \delta^{AD}$.

ультрафиолетовая расходимость в нем могла поглощаться переопределением константы связи. Другая интерпретация состоит в следующем. Предположим, что имеется теория с обрезанием Λ (которое по порядку величины равно обратному шагу решетки). Если мы интегрируем по полям $h(x)$ с волновыми векторами в интервале $\tilde{\Lambda} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda$, то мы получаем эффективное действие, которое в низкоэнергетическом пределе снова имеет вид (2.1), но с перенормированным значением $\tilde{e}_0^2 e_0^2(\tilde{\Lambda})$ константы связи $e_0^2 = e_0^2(\Lambda)$:

$$e_0^2(\tilde{\Lambda}) = e_0^2(\Lambda) + \frac{e_0^4(\Lambda)}{4\pi} C_v(G) \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}}. \tag{2.13}$$

Эта формула следует непосредственно из (2.11), если область интегрирования по $\boldsymbol{p}$ ограничена условием $\tilde{\Lambda} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda$. Мы заключаем, что теория с обрезанием Λ и голым зарядом e_0^2 должна быть эквивалентна (для малых импульсов $p \ll \Lambda$) теории с обрезанием $\tilde{\Lambda}$ и специально подобранным новым голым зарядом $\tilde{e}_0^2$. Это утверждение называется перенормируемостью. Формула (2.13), как ясно из ее вывода, верна при условии, что

$$e_0^2 \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}} \ll 1; \quad e_0^2 \ll 1. \tag{2.14}$$

Ничто не мешает повторению этой процедуры и переходу от $\tilde{\Lambda}$ к $\tilde{\tilde{\Lambda}} < \tilde{\Lambda}$ и т. д. Совокупность таких преобразований параметров обрезания одновременно с константами связи e_0^2 называется ренормализационной группой. Самое важное следствие перенормируемости состоит в том, что она контролирует зависимость различных физических величин от импульсов. Рассмотрим для примера поведение эффективного заряда $e^2(p)$ для флуктуаций с импульсом p. Эту величину можно определить по-разному. Одна из возможностей состоит в том, чтобы связать ее с четырехточечной функцией со всеми импульсами, равными по модулю p. Имеется множество других возможностей, и мы прокомментируем этот произвол позднее. Поскольку в нашей теории нет никаких размерных параметров, кроме Λ, у нас должно быть

$$e^2(p) = e^2(\log(\Lambda/p), e_0^2). \tag{2.15}$$

Выразим $e^2(p)$ через $e^2(\mu)$, где μ — некоторое фиксированное значение импульса. Обращая (2.15), найдем

$$e_0^2 = e_0^2(\log(\Lambda/\mu), e^2(\mu)). \tag{2.16}$$

Подстановка (2.16) в (2.15) дает

$$e^2(p) = e^2(\log(p/\mu), e^2(\mu), \log(\Lambda/\mu)). \tag{2.17}$$

Перенормируемость означает прежде всего то, что (2.17) не зависит от последнего аргумента. Это объясняется тем, что изменение Λ может быть скомпенсировано изменением e_0^2 так, чтобы $e^2(p)$ не изменилось. Следовательно,

$$e^2(p) = e^2(\log(p/\mu), e^2(\mu)). \tag{2.18}$$

Мы видим, что $e^2(p)$, будучи выражено через $e^2(\mu)$, не содержит никаких расходимостей и не зависит от структуры теории на масштабах порядка шага решетки. Но это еще не все. Еще одно ограничение на (2.18) вытекает из того, что точка μ совершенно произвольна. Поэтому точно так же, как и в случае с Λ, сдвиги μ должны компенсироваться изменением $e^2(\mu)$. Это приводит к функциональному уравнению на $e^2(p)$, которое можно легко разрешить. Именно, справедливо соотношение

$$e^2(p) = f(\log(p/\mu) + g(e^2(\mu))), \tag{2.19}$$

где

$$f(g(x)) = x. \tag{2.20}$$

Функциональный вид (2.19) есть явная запись указанного свойства: сдвиг $\log(p/\mu)$ компенсируется подходящим изменением $e^2(\mu)$. Формула (2.20) следует из того, что $e^2(p)\big|_{p=\mu} = e^2(\mu)$. Соотношение (2.19) оказывается очень сильным ограничением на зависимость эффективного заряда от импульса. Оно не выполняется ни в каком фиксированном порядке теории возмущений и позволяет получать непертурбативные выражения.

Из (2.19) следует, что в теории без размерных параметров имеет место так называемая размерная трансмутация:

$$e^2(p) = f(\log(p/\lambda)), \quad \lambda = \mu e^{-g(e^2(\mu))}. \tag{2.21}$$

Все величины зависят от универсальной корреляционной длины λ^{-1}, которую следует считать постоянной, когда шаг решетки Λ^{-1} стремится к нулю. Никаких других произвольных параметров в теории нет. (Последнее утверждение не всегда справедливо: есть теории с несколькими эффективными зарядами, вроде безмассовой скалярной КЭД, где физические величины зависят от отношений этих зарядов.) Чтобы увидеть, как (2.19) улучшает теорию возмущений, перепишем это соотношение в дифференциальной форме:

$$\begin{gathered}\frac{de^2(p)}{d\log(p/\mu)} = \beta(e^2(p)),\\ \beta(x) = f'(g(x)).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Это уравнение Гелл-Манна–Лоу. Его решение можно разложить в ряд по степеням $\log p/\mu$:

$$e^2(p) \simeq e^2(\mu) + \beta(e^2(\mu)) \log p/\mu + O((\log p/\mu)^2). \tag{2.23}$$

С другой стороны, из (2.13) следует, что

$$e^2(p) \simeq e^2(\mu) - \frac{C_v(G)}{4\pi} e^4(\mu) \log \frac{p}{\mu}. \tag{2.24}$$

Сравнивая эти два результата, найдем

$$\beta(e^2) = -\frac{C_v(G)}{4\pi} e^4 + O(e^6).$$

Наконец, решая уравнение (2.22), получим

$$e^2(p) = \frac{e^2(\mu)}{1 + \dfrac{C_v(G)}{8\pi} e^2(\mu) \log \dfrac{p^2}{\mu^2}}. \tag{2.25}$$

Легко проверить, что в отличие от (2.24) выражение (2.25) согласуется с (2.19) (причем $f(x) = 4\pi/C_v(G)x$). Другая полезная запись зависимости $e^2(p)$

$$e^2(p) = \frac{e_0^2}{1 - \dfrac{C_v(G)}{8\pi} e_0^2 \log \dfrac{\Lambda^2}{p^2}} \tag{2.26}$$

(Λ — обратный шаг решетки, $p \ll \Lambda$). Какова область применимости (2.25) и (2.26)? Она определяется тем, что мы пренебрегли всеми высшими степенями $e^2(p)$ в выражении для β-функции. Поэтому условие применимости

$$e^2(p) \ll 1. \tag{2.27}$$

Реальное «улучшение» теории возмущений, достигнутое Гелл-Манном и Лоу, состоит в том, что им удалось заменить разложение по степеням голого заряда e_0^2, который не обязан быть малым, разложением по степеням $e^2(p)$, который действительно мал во многих интересных ситуациях.

Например, можно переписать (2.25) приближенно в виде

$$e^2(p) = \frac{8\pi}{C_v(G)} \frac{1}{\log(p^2/\lambda^2)}. \tag{2.28}$$

Ясно, что это правильное асимптотическое разложение для $e^2(p)$ при $p \gg \lambda$. Как мы увидим, в этой области удается вычислить корреляционные функции, поскольку эффекты взаимодействия малы. Эта малость в ультрафиолетовой области носит название асимптотической свободы. При $p \lesssim \lambda$ теория возмущений неприменима, и необходимы качественно иные методы исследования. Мы обсудим их в следующих главах.

Перейдем к вычислению корреляционных функций. Рассмотрим, например,

$$\mathcal{D}(x-y) = \langle \mathrm{Tr}(g^{-1}(x)g(y)) \rangle. \tag{2.29}$$

Применим ту же тактику, что и раньше. Проинтегрируем по быстрым флуктуациям с $\tilde{\Lambda} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda$ и используем ренормгрупповые соображения. Итак, записываем

$$g(x) = e^{\phi(x)} g_0(x) \simeq (1 + \phi(x) + \frac{1}{2}\phi^2(x)) g_0(x) \tag{2.30}$$

и интегрируем по полям ϕ с длинами волн в указанном интервале[1]

$$\mathcal{D}(p) = \mathcal{D}_0(p) \left(1 - \frac{C_2}{\pi} e_0^2 \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}} \right). \tag{2.31}$$

Повторяя те же рассуждения, что и при выводе уравнения Гелл-Манна–Лоу, получим из (2.31) для

$$d(p) = p^2 D(p) \tag{2.32}$$

уравнение

$$\frac{\partial \log d(p)}{\partial \log p/\mu} = \gamma(e^2(p)), \tag{2.33}$$

[1] Здесь мы полагаем $t^A t^A = -C_2 \hat{I}$. Для фундаментального представления группы $G = SU(N)$ имеем $C_2 = (N^2-1)/2N$, $C_v = N$.

где

$$\gamma(e^2) = \frac{C_2}{\pi} e^2 + O(e^4). \tag{2.34}$$

Решая (2.33), найдем окончательно

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(p) &= \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{C_v e^2(\mu)}{8\pi}\log\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{4C_2/C_v} \sim \\ &\sim \frac{1}{p^2}\left(\log\frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{4C_2/C_v} \qquad \text{при} \quad p \gg \lambda.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Естественно, эта формула справедлива лишь при $p \gg \lambda$.

Мы уже говорили, что определение $e^2(p)$ неоднозначно. Этот произвол приводит к неоднозначности β-функции и γ-функции. Однако ответ для корреляционной функции хорошо определен: неоднозначности в определении β и γ сокращают друг друга. Более того, универсальны первые два коэффициента β-функции. В этом можно убедиться, используя определение $e^2(p)$. Возьмем, скажем,

$$\tilde{e}^2(p) = e^2(p) + C_1 e^4(p) + C_2 e^6(p) + \dots \tag{2.36}$$

и

$$\frac{de^2}{d\log p/\mu} = \beta_1 e^4 + \beta_2 e^6 + \dots . \tag{2.37}$$

Тогда, подставляя (2.36) в (2.37), получим:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{e}^2}{d\log p/\mu} &= \frac{de^2}{d\log p/\mu}(1 + 2C_1 e^2 + \dots) = \\ &= (1 + 2C_1 e^2 + \dots)(\beta_1 e^4 + \beta_2 e^6 + \dots) = \\ &= \beta_1 e^4 + (\beta_2 + 2C_1\beta_1)e^6 + \dots = \\ &= \beta_1(\tilde{e}^2 - C_1\tilde{e}^4)^2 + (\beta_2 + 2C_1\beta_1)\tilde{e}^6 + \dots = \\ &= \beta_1\tilde{e}^4 + \beta_2\tilde{e}^6 + \dots .\end{aligned} \tag{2.38}$$

Коэффициент β_3 меняется, но в первых двух петлях β-функция оказывается универсальной. В тех случаях, когда несколько первых коэффициентов β-функции обращаются в нуль, универсален первый неисчезающий коэффициент.

Таким образом, мы приходим к выводу, что ренормализационная группа Гелл-Манна–Лоу является полезным средством исследования в области малых эффективных зарядов. Чтобы использовать этот метод, надо вычислить коэффициенты при первых степенях $\log p/\mu$ в выражениях для физических величин. Это легко сделать в первом приближении, но при переходе к старшим порядкам трудности возрастают, поскольку оказывается необходимым выделить неглавные вклады $\sim \log p/\mu$ на фоне главных $\sim (\log p/\mu)^n$. В асимптотически свободных теориях ренормализационная группа дает порядок за порядком разложение по обратным степеням $\log p/\mu$. Например, в двухпетлевом приближении решение уравнения (2.22) имеет вид

$$e^2(p) = -\frac{1}{\beta_1 \log(p/\lambda)} \left\{ 1 + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \frac{\log\log(p/\lambda)}{\log(p/\lambda)} + O\left(\frac{1}{(\log(p/\lambda))^2} \right) \right\},$$

$$p \gg \lambda. \tag{2.39}$$

Полезно помнить также выражение для обратной корреляционной длины λ через затравочные параметры Λ, e_0:

$$\lambda = \mathrm{const} \cdot \Lambda (e_0^2)^{\beta_2/\beta_1^2} e^{1/\beta_1 e_0^2}. \tag{2.40}$$

Оно получается из соотношений

$$\begin{gathered} \frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial e_0^2} \frac{\partial e_0^2}{\partial \Lambda} = 0, \\ \lambda = \Lambda \phi(e_0^2) \end{gathered} \tag{2.41}$$

(первое является ренормализационным уравнением, а второе следует из соображений размерности). Уравнение (2.40) указывает правильный переход к непрерывному пределу теории. В асимптотически свободном случае ($\beta_1 < 0$) он дается условиями

$$e_0 \to 0, \quad \Lambda \to \infty, \quad \lambda \to \mathrm{const}. \tag{2.42}$$

2.2. Модель $\boldsymbol{n}$-поля

В этом разделе мы рассмотрим другой важный пример асимптотически свободной системы с глобальной симметрией. Это теория поля N-мерного единичного вектора $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$, с действием

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int d^2x \, (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2. \tag{2.43}$$

Чтобы работать с ренормализационной группой, положим

$$\boldsymbol{n}(x) = (1 - \boldsymbol{\phi}^2)^{1/2}\boldsymbol{n}_0(x) + \sum_{a=1}^{N-1} \varphi_a \boldsymbol{e}_a(x) \tag{2.44}$$

(здесь $\boldsymbol{n}_0(x)$ — медленно меняющийся вектор, а $\{\boldsymbol{e}_a\}$ ортогональны к нему и друг к другу; $\varphi_a(x)$ — «быстрые» флуктуации с $\tilde{\Lambda} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda$). Векторы $(\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{e}_a)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_\mu \boldsymbol{n}_0 &= \sum_a B_\mu^a \boldsymbol{e}_a, \\ \partial_\mu \boldsymbol{e}_a &= \sum_b A_\mu^{ab} \boldsymbol{e}_b - B_\mu^a \boldsymbol{n}_0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Здесь B_μ^a и A_μ^{ab} — некоторые потенциалы, характеризующие поле $\boldsymbol{n}_0$; соотношения (2.45) вытекают из условий $\boldsymbol{n}_0 \boldsymbol{e}_a = 0$ и $\boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b = \delta_{ab}$. Подстановка (2.44) в (2.43) дает

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2e_0^2} \int \big\{ &(\partial_\mu (1 - \boldsymbol{\phi}^2)^{1/2} - B_\mu^a \varphi^a)^2 + \\ &+ (\partial_\mu \varphi^a - A_\mu^{ab} \varphi^b + B_\mu^a (1 - \boldsymbol{\phi}^2)^{1/2})^2 \big\} d^2x. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Оставляя только квадратичные по $\boldsymbol{\phi}$ члены, получаем

$$\begin{aligned} S^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2e_0^2} &\int \left\{ (\partial_\mu \varphi^a - A_\mu^{ab} \varphi^b)^2 + B_\mu^a B_\mu^b (\varphi^a \varphi^b - \boldsymbol{\phi}^2 \delta^{ab}) \right\} d^2x + \\ &+ \frac{1}{2e_0^2} \int (B_\mu^a)^2 \, d^2x. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Логарифмический вклад в перенормировку e_0^2 связан со вторым членом в фигурных скобках в (2.47). Интегрируя по $\boldsymbol{\phi}$ с импульсами $\tilde{\Lambda} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda$, найдем

$$\begin{gathered} \langle \varphi^a \varphi^b - \boldsymbol{\phi}^2 \delta^{ab} \rangle = \delta^{ab} [1 - (N - 1)] \int_{\tilde{\Lambda}}^{\Lambda} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e_0^2}{p^2} = \delta^{ab} (2 - N) \frac{e_0^2}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}}; \\ \frac{1}{\tilde{e}_0^2} = \frac{1}{e_0^2} + \frac{N - 2}{2\pi} \log \frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda}. \end{gathered} \tag{2.48}$$

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, получаем

$$\beta(e^2) = -\frac{N-2}{2\pi}e^4;$$
$$e^2(p) = \frac{e^2(\mu)}{1 + \dfrac{N-2}{4\pi}e^2(\mu)\log\dfrac{p^2}{\mu^2}}. \tag{2.49}$$

Нетрудно найти и выражения для корреляционной функции

$$\mathcal{D}(x-y) = \langle \boldsymbol{n}(x)\boldsymbol{n}(y)\rangle \tag{2.50}$$

и функции $\gamma(e^2)$ в главном порядке

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{n}(x)\boldsymbol{n}(y)\rangle_\Lambda &\simeq \langle \boldsymbol{n}_0(x)\boldsymbol{n}_0(y)\rangle(1 - \langle \boldsymbol{\phi}^2\rangle_{\Lambda,\tilde\Lambda}) = \\ &= \langle \boldsymbol{n}_0(x)\boldsymbol{n}_0(y)\rangle \left(1 - \frac{N-1}{2\pi}e^2(\Lambda)\log\frac{\Lambda}{\tilde\Lambda}\right)\end{aligned} \tag{2.51}$$

и

$$\gamma(e^2) = \frac{N-1}{2\pi}e^2,$$
$$\mathcal{D}(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{N-2}{4\pi}e^2(\mu)\log\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{(N-1)/(N-2)}. \tag{2.52}$$

Отметим, что поля A_μ^{ab} не участвовали в нашем вычислении, поскольку они входят в действие калибровочно-инвариантным образом. В результате они могут возникать в ответе лишь в комбинациях, содержащих $(F_\mu^{ab})^2$ (F_μ^{ab} — янг-миллсовская напряженность поля. $(F_\mu^{ab})^2$ имеет размерность 4 и не может содержать логарифмических расходимостей. Существенная здесь калибровочная инвариантность отражает произвол в выборе полей $\{\boldsymbol{e}_a\}$ (напомним, что только поле $\boldsymbol{n}$ является физическим).

Такого рода вычисления легко обобщаются на случай полей, принадлежащих любому однородному пространству G/H. Пока мы разобрали случай $H = I$ и случай $\boldsymbol{n}$-поля: $\boldsymbol{n} \in S^N = SO(N+1)/SO(n)$, где S^N — единичная сфера.

2.3. Неабелевы калибровочные поля при $D = 4$

В этой теории действие имеет вид

$$S = -\frac{1}{2e_0^2} \int \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}^2 \, d^4x. \tag{2.53}$$

Следуя обычной процедуре, представим

$$A_\mu = \bar{A}_\mu + a_\mu \tag{2.54}$$

и разложим (2.53) до квадратичных по a_μ членов

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{2e_0^2} \int \mathrm{Tr}\, \bar{F}_{\mu\nu}^2 \, d^4x - \\ & -\frac{1}{2e_0^2} \mathrm{Tr} \int d^4x \left\{ (\nabla_\mu a_\nu - \nabla_\nu a_\mu)^2 + 2\bar{F}_{\mu\nu} \cdot [a_\mu, a_\nu] \right\} = \\ = & \bar{S} - \frac{1}{e_0^2} \mathrm{Tr} \int d^4x \left\{ (\nabla_\mu a_\nu)^2 + 2\bar{F}_{\mu\nu} \cdot [a_\mu, a_\nu] - (\nabla_\lambda a_\lambda)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

(Здесь $\nabla_\mu a_\nu = \partial_\mu a_\nu + [A_\mu,\, a_\nu]$.)

Теперь надо проинтегрировать по всем полям a_μ с импульсами $\tilde{\Lambda} < |\boldsymbol{p}| < \Lambda$. Теперь нужно зафиксировать калибровку a_μ, потому что из-за калибровочной инвариантности действия квадратичная форма (2.55) имеет нулевые собственные значения. В самом деле, если взять

$$a_\mu^{(0)} = \nabla_\mu w = \partial_\mu w + [\bar{A}_\mu, w], \tag{2.56}$$

то, согласно (2.55), $S^{(\mathrm{II})} = 0$ для любой функции w. Это просто означает, что мы должны интегрировать по направлениям в функциональном пространстве, ортогональным к $a_\mu^{(0)}$, т. е. тем, для которых

$$\mathrm{Tr} \int a_\mu a_\mu^{(0)} \, d^4x = 0. \tag{2.57}$$

Поскольку w — произвольная функция, a_μ должны удовлетворять условию

$$\nabla_\mu a_\mu = 0. \tag{2.58}$$

Это аналог лоренцевой калибровки в КЭД. Более удобна для наших целей фейнмановская калибровка, отвечающая прямому добавлению члена $(\nabla_\lambda a_\lambda)^2$ к (2.55) (при этом сокращается последнее слагаемое в этом выражении). Хорошо известно, что добавление члена, фиксирующего калибровку, должно сопровождаться введением ду́хового детерминанта, который в случае фейнмановской и лоренцевой калибровок есть просто $\det(\nabla_\mu^2)$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Psi(\bar{A}) = e^{-S_{\mathrm{cl}}(\bar{A})} \int \mathcal{D}a_\mu \, \det(\nabla_\mu^2) \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{e^2}\,\mathrm{Tr}\int \left((\nabla_\mu a_\nu)^2 + 2\bar{F}_{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu]\right)\, d^4x\right\}.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Легко уяснить смысл всех членов в (2.59). Если бы вклад $\bar{F}_{\mu\nu}[a_\mu,\, a_\nu]$ отсутствовал, то имелось бы просто четыре независимых поля a_μ, интегрирование по которым дало бы $[\det^{-1/2}(\nabla_\mu^2)]^4$. После умножения на $\det(\nabla_\mu^2)$ получилось бы $[\det^{-1/2}(\nabla_\mu^2)]^2$. Это означает, что вместо четырех поляризаций поля a_μ имеется две, т. е. роль духового детерминанта сводится к сокращению вклада двух нефизических поляризаций. Другими словами, можно сказать, что имеются два сорта заряженных частиц, движущихся во внешнем магнитном поле $\bar{F}_{\mu\nu}$. Это приводит к диамагнетизму Ландау (взаимодействию магнитного поля с орбитальным движением), мы вычислим этот эффект чуть ниже. Сам по себе он приводит к экранированию эффективного заряда, известному как эффект «нулевого заряда». Последний член в (2.59) описывает прямое взаимодействие внешнего поля $\bar{F}_{\mu\nu}$ со спином глюонов a_μ, приводящее к парамагнетизму Паули. Как мы увидим ниже, этот эффект сильнее диамагнитного, и в результате мы попадаем в ситуацию асимптотической свободы.

С логарифмической точностью два упомянутых эффекта могут рассматриваться независимо. Начнем с первого из них. Во втором порядке по $\bar{F}_{\mu\nu}$ эффективное действие описывается диаграммами

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{diamagnet})} &= \int \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)\bar{A}_\mu^a(q)\bar{A}_\nu^b(-q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \\ \Pi_{\mu\nu}^{ab} &= \qquad\quad + \qquad\quad .\end{aligned} \tag{2.60}$$

Выражение для $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ в (2.60) получается из поляризационного оператора безмассовой скалярной КЭД умножением на изотопический множитель

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) &= 2f^{acd}f^{bcd}\Pi_{\mu\nu}^{(scalar)}(q) = \\ &= 2C_v(G)\delta^{ab}\Pi_{\mu\nu}^{(scalar)}(q).\end{aligned} \tag{2.61}$$

Множитель 2 в (2.61) есть следствие двух физических поляризаций a_μ. Вычислить $\Pi_{\mu\nu}^{(scalar)}$ не составляет труда:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{(scalar)} &= -\frac{1}{4}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(2p+q)_\mu(2p+q)_\nu}{p^2(p+q)^2} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4p^2} = \\ &= \pi(q^2)(q^2\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu).\end{aligned} \tag{2.62}$$

Это равенство следует из сохранения тока, $q^\mu\Pi_{\mu\nu}^{(scalar)}(q) = 0$. Оно обеспечивает сокращение квадратичной расходимости в $\Pi_{\mu\nu}^{(scalar)}$. Вычисляя след (2.62) по $\mu\nu$, достаточно следить только за членами, пропорциональными q^2:

$$\begin{aligned}3q^2\pi(q^2) &= \frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^4}\left(4p^2 - \frac{q^2+4pq+4p^2}{2(1+2pq/p^2+q^2/p^2)}\right) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^4}\left\{-q^2 - \frac{8(pq)^2}{p^2} + 4p^2\frac{q^2}{p^2}\right\} = \frac{q^2}{64\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{\tilde\Lambda^2}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Поэтому с логарифмической точностью диамагнитный вклад в перенормировку константы связи имеет вид:

$$\left(\Delta\frac{1}{e^2}\right)_{\text{diam}} = +\frac{1}{48\pi}C_v(G)\log\frac{\Lambda^2}{\tilde\Lambda^2} \quad (\tilde\Lambda < \Lambda). \tag{2.64}$$

Видно, что этот эффект приводит к уменьшению константы связи при переходе к большим длинам волн. Физическая интерпретация состоит в том, что в пространстве Минковского введенный в вакуум заряд экранируется виртуальными парами частиц и античастиц, точно так же как в диэлектрической среде. В евклидовом пространстве также не составляет труда объяснить знак (2.64). Эффект второго порядка в общем случае должен уменьшать эффективное действие (или свободную энергию, если пользоваться языком статистической механики). Это видно из того, что

$$\begin{aligned}S_{\text{eff}} &= -\log\int \mathrm{e}^{-(S(\varphi)+V(\varphi))}\,\mathcal{D}\varphi, \\ S_{\text{eff}}^{(\text{II})} &= -\frac{1}{2}\langle V^2(\varphi)\rangle = -\frac{1}{2}\frac{\int V^2(\varphi)\mathrm{e}^{-S(\varphi)}\,\mathcal{D}\varphi}{\int \mathrm{e}^{-S(\varphi)}\,\mathcal{D}\varphi}.\end{aligned} \tag{2.65}$$

(В этой формуле φ — любое поле, а $V(\varphi)$ — любое возмущение с $\langle V(\varphi)\rangle = 0$.) Таким образом, знак в (2.64) должен был быть отрицательным. Однако векторное поле входит в действие с дополнительным множителем i (в евклидовом пространстве дополнительный множитель в амплитуде распространения скалярной частицы имеет вид $\exp\{i \oint_C \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}\}$, где C — траектория частицы). Во втором порядке это приводит к появлению лишнего множителя $i^2 = -1$ и изменению знака в (2.65).

Из этого обсуждения ясно, что спиновый член в (2.55) приведет к возникновению вклада с отрицательным знаком в перенормировку заряда. Этот парамагнитный эффект легко вычисляется

$$
\begin{aligned}
S_{\text{eff}}^{(\text{paramagnet})} &= -\frac{1}{2e_0^4}\int \bar{F}^a_{\mu\nu}(q)\bar{F}^b_{\lambda\rho}(-q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\times \\
&\quad\times f^{acd}f^{bef}\langle a^c_\mu a^d_\nu(-q), a^e_\lambda a^f_\rho(q)\rangle \simeq \\
&\simeq \int d^4x\,(\bar{F}^a_{\mu\nu})^2\frac{C_v(G)}{2e_0^4} \quad p \quad \Big|_{q=0} = \\
&= -\frac{C_v(G)}{2e_0^4}\int(\bar{F}^a_{\mu\nu})^2\,d^4x\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{2e_0^4}{p^2(p+q)^2}\bigg|_{q=0} = \\
&= -\frac{C_v(G)}{16\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{\tilde{\Lambda}^2}\int(\bar{F}^a_{\mu\nu})^2\,d^4x.
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Складывая диамагнитный и парамагнитный вклады, получаем

$$
\frac{1}{\tilde{e}^2} = \frac{1}{e^2} - \frac{11}{3}\frac{C_v(G)}{16\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{\tilde{\Lambda}^2}. \tag{2.67}
$$

Теперь можно повторить все рассуждения, касающиеся ренормализационной группы, и убедиться, что неабелевы калибровочные теории асимптотически свободны:

$$
e^2(p) = \frac{48\pi^2}{11C_v(G)}\frac{1}{\log(p^2/\lambda^2)} \to 0; \quad p \gg \lambda. \tag{2.68}
$$

Это известный результат Гросса, Вильчека и Политцера.

Нетрудно найти и различные калибровочно-инвариантные функции Грина на малых расстояниях. Как и прежде, они отличаются от свободных множителями вроде $(\log(p^2/\lambda^2))^\gamma$, где γ зависит от типа функции Грина. Однако описанные выше методы совершенно неадекватны при исследовании инфракрасной области $p^2 \lesssim \lambda^2$, которая представляет наибольший физический интерес. Чтобы решить эту задачу, перейдем к изложению совершенно другого подхода.

Глава 3
Приближение сильной связи

В предыдущей главе мы видели, как простые пертурбативные методы позволяют анализировать поведение асимптотически свободных теорий на малых расстояниях. Причиной успеха была логарифмическая малость взаимодействия флуктуаций с большими импульсами. В области $p \sim \lambda$, однако, это взаимодействие становится порядка единицы (наивно пользуясь формулой (2.68), можно даже говорить о неограниченном росте эффективного взаимодействия). Таким образом, чтобы анализировать инфракрасную структуру теории, нужно развивать какие-то непертурбативные методы. В этой главе мы опишем простейший (и во многих отношениях несовершенный) такой метод — разложение сильной связи. К сожалению, под этим именем фигурирует разложение не по физической константе связи (которая действительно бывает большой), а по затравочной, e_0^2. На первый взгляд, это лишает затею всякого смысла, поскольку мы выяснили ранее, что непрерывный предел решеточной модели достигается, когда

$$e_0^2 \sim \frac{1}{\log \Lambda} \underset{\Lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.1}$$

Тем не менее, разложение при больших e_0^2 представляет интерес, потому что имеются причины полагать, что в большинстве асимптотически свободных систем отсутствует фазовый переход по e_0^2. Если это так, то качественные свойства спектра и корреляционных функций не изменятся при переходе от малых к большим e_0^2. В частности, массы элементарных возбуждений не имеют сингулярностей по e_0^2, и поэтому их разложения по степеням $1/e_0^2$ могут быть продолжены до достаточно малых значений e_0^2. Мы не будем обсуждать эти вычислительные проблемы и сосредоточимся лишь на качественных сторонах картины, возникающей в пределе сильной связи. Хотя основной интерес для нас представляют неабелевы калибровочные системы, мы начнем с более простых случаев, так как всегда полезно рассматривать любую конкретную теорию в контексте более широкого класса моделей.

3.1. Модель Изинга

В этом разделе мы обсудим предел сильной связи (малых β) в модели Изинга. Используя соотношение

$$e^{\beta\sigma\sigma'} = \operatorname{ch}\beta\,(1 + \sigma\sigma' \operatorname{th}\beta), \tag{3.2}$$

получим

$$\begin{aligned} &Z = (\operatorname{ch}\beta)^N \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\boldsymbol{x},\delta} (1 + \zeta\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{x}+\delta}), \\ &\zeta = \operatorname{th}\beta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Разлагая произведение в (3.3), заметим, что вклад дают только члены с четным числом переменных σ в каждой вершине. Каждое ребро может вносить вклад 1 или $\zeta\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{x}+\delta}$. Если во втором случае мы будем проводить линию вдоль соответствующего ребра, то получится следующее диаграммное разложение для Z. Нарисуем всевозможные замкнутые пути на решетке. В каждой вершине может сходиться четное число линий, а каждое ребро может быть пройдено не более одного раза. Правила построения корреляционной функции $\langle\sigma_0\sigma_{\boldsymbol{R}}\rangle$ точно такие же, только в точках 0 и $\boldsymbol{R}$ должно сходиться нечетное число линий. Вклад каждого контура в сумму равен ζ^L, где L — длина контура.

Интерпретация этих правил такова. Поскольку корреляции экспоненциально затухают ($\sim \zeta^{|\boldsymbol{R}|}$ при $\beta \ll 1$), имеются массивные возбуждения с щелью $\sim \log(1/\beta)$. При увеличении β (и уменьшении константы связи) массовая щель уменьшается. В некоторой точке β_c число контуров длины L, по порядку величины равное $\exp(\mathrm{const}\cdot L)$, полностью компенсирует затухание ζ^L. В этой точке происходит конденсация контуров — появляется конечная плотность линий. В корреляционных функциях этот фазовый переход проявляется в том, что $\langle\sigma_0\sigma_{\boldsymbol{R}}\rangle \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{const}$ Это разложение по конфигурациям линий типично для всех систем с глобальными симметриями. Сами линии — не что иное, как мировые линии элементарных возбуждений. Мы продемонстрируем это более явно, воспользовавшись гамильтоновой формулировкой модели Изинга, даваемой (1.31):

$$\hat{H} = u\sum_{\boldsymbol{y}} \tau^1_{\boldsymbol{y}} + v\sum_{\boldsymbol{y},\delta} \tau^3_{\boldsymbol{y}}\tau^3_{\boldsymbol{y}+\delta} \quad (u = e^{-\beta_0},\ v = \beta_1). \tag{3.4}$$

Пределу сильной связи отвечает $u \gg v$. В некотором смысле первый член в (3.4) является кинетической энергией, а второй — потенциальной (поскольку первый член описывает изменение наблюдаемой $\tau^3_{\boldsymbol{y}}$ во времени).

В главном приближении основное состояние описывается волновой функцией

$$\tau^1_{\boldsymbol{y}}|\phi\rangle = -|\phi\rangle,$$
$$|\phi\rangle = \prod_{\boldsymbol{y}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}}; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{y}} + b|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3.5}$$

(Гильбертово пространство в нашей задаче образовано тензорным произведением двумерных пространств для всех вершин $\boldsymbol{y}$. Операторы $\tau^i_{\boldsymbol{y}}$ действуют как матрицы Паули в пространстве, отвечающем $\boldsymbol{y}$, и как единичные операторы — во всех остальных пространствах.) Энергия основного состояния (3.5) равна

$$E_0 = -Nu. \tag{3.6}$$

Первое возбужденное состояние в главном приближении имеет вид

$$|\phi_1\rangle = \prod_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{y}_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}_0} \stackrel{\text{def}}{=} |\boldsymbol{y}_0\rangle. \tag{3.7}$$

Эти состояния (нумеруемые векторами $\boldsymbol{y}_0$) обладают энергией

$$E_1 - E_0 = 2u. \tag{3.8}$$

Таким образом, в главном приближении имеется невырожденное основное состояние и сильно вырожденный первый возбужденный уровень, отделенный от основного состояния энергетической щелью $2u$. Мы убедимся теперь, что в следующем приближении это вырождение снимается.

Обозначим второй член в (3.4) через V. Первое, что необходимо сделать, — это вычислить матричные элементы $\langle\boldsymbol{y}'|V|\boldsymbol{y}\rangle$. Из очевидных соотношений

$$\begin{gathered} \tau^3_{\boldsymbol{y}}|\boldsymbol{y}\rangle = |0\rangle, \\ \tau^3_{\boldsymbol{y}_1}|\boldsymbol{y}_2\rangle = |\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\rangle \quad (\boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{y}_2), \\ \tau^3_{\boldsymbol{y}}|0\rangle = |\boldsymbol{y}\rangle \end{gathered} \tag{3.9}$$

находим

$$\begin{gathered} \langle\boldsymbol{y}'|V|\boldsymbol{y}\rangle = v\sum_{\delta} \delta_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}\pm\delta}, \\ \langle\boldsymbol{y}'|H_0|\boldsymbol{y}\rangle = 2u\delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

В то время как H_0 описывает отдельные независимые спины, член V отвечает перескакиванию возбуждений с одного узла решетки на другой. Диагонализуя H_0+V, видим, что в первом порядке теории возмущений собственные состояния гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{p}\rangle &= \sum_{\boldsymbol{y}} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}}|\boldsymbol{y}\rangle, \\ \mathcal{E}(\boldsymbol{p}) &= E_1(\boldsymbol{p}) - E_0 = 2u + 2v\sum_{\boldsymbol{\delta}}\cos(\boldsymbol{p}\boldsymbol{\delta}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Как и следовало ожидать, мы получили элементарные возбуждения с конечной щелью, величина которой зависит от квазиимпульса $\boldsymbol{p}$. Этот вывод остается справедливым во всех порядках теории возмущений, дающей разложение по степеням v/u. Как уже говорилось, в случае модели Изинга это разложение начнет расходиться при определенном критическом значении v. Это значение отвечает точке фазового перехода, в которой щель

$$E_1(0) - E_0 = 0. \tag{3.12}$$

Вблизи этой точки мы ожидаем (и покажем явно для случая $D = 2$), что

$$m = E_1(0) - E_0 \ll 1$$

и

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{p}) = (m^2 + \boldsymbol{p}^2)^{1/2} \tag{3.13}$$

при $|\boldsymbol{p}| \ll 1$.

За точкой фазового перехода образуется конденсат возбуждений, и разложение сильной связи неприменимо. В этой фазе нужно начинать с обратного предела, рассматривая как возмущение первый член в (3.4).

В нулевом приближении имеется строго упорядоченный вакуум

$$|\phi\rangle = \prod_{\substack{y=(n_1+n_2)\delta_1+(n_1-n_2)\delta_2 \\ (n_i\in\mathbf{Z})}} \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}_1}\right). \tag{3.14}$$

Из изложенного должно быть ясно, что контуры, появившиеся при исследовании евклидовой версии модели, — это просто мировые линии частиц, которые мы исследовали в гамильтоновом подходе. Проследить за соответствием между шредингеровской теорией возмущений для гамильтониана и диаграммным разложением в евклидовом подходе было бы интересным упражнением.

3.2. Непрерывные глобальные симметрии

Начнем с абелева случая. Для перехода к пределу сильной связи полезно использовать разложение, аналогичное (3.2):

$$e^{\beta\cos(\varphi-\varphi')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\beta) e_0^{2 in(\varphi-\varphi')} \tag{3.15}$$

($I_n(\beta) = i^{-n} J_n(i\beta)$, J_n — функция Бесселя). Подставляя (3.15) в выражение для статистической суммы, получаем

$$\begin{aligned} Z = I_0^N(\beta) \sum_{\{n_{x,\delta}\}} \exp\Big\{\sum_{x,\delta} \log \frac{I_{n_{x,\delta}}(\beta)}{I_0(\beta)}\Big\} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x} \frac{d\varphi_x}{2\pi} \exp\Big\{i \sum_{x,\delta} n_{x,\delta}(\varphi_x - \varphi_{x+\delta})\Big\} = \\ = I_0^N(\beta) \sum_{\{n_{x,\delta}:\sum\limits_{\delta}(n_{x,\delta}-n_{x-\delta,\delta})=0\}} \prod_{x,\delta} \frac{I_{n_{x,\delta}}(\beta)}{I_0(\beta)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

В результате приходим к следующим графическим правилам для вычисления (3.16). Снова имеется граф на решетке, причем каждой линии сопоставляется ненулевое целое число n. Поток величины n сохраняется (благодаря условию $\sum_\delta (n_{x,\delta} - n_{x-\delta,\delta}) = 0$). Это означает, например, что когда три линии встречаются в одной вершине, то $n_1 + n_2 + n_3 = 0$. Каждому фрагменту пути мы сопоставляем множитель $I_{n_{x,\delta}}(\beta)/I_0(\beta) < 1$ и берем их произведение вдоль всего графика. Отметим, что в модели Изинга действовали те же правила, только $n_{x,\delta}$ принимали значения 0 и 1, и сохранение имело место по модулю 2. Для вычисления корреляционной функции

$$\left\langle e^{\mathrm{i}m(\varphi(0)-\varphi(\boldsymbol{R}))} \right\rangle = \mathcal{D}_m(\boldsymbol{R}) \tag{3.17}$$

(m — целое число) можно пользоваться теми же правилами, только теперь

$$\sum_\delta (n_{x,\delta} - n_{x-\delta,\delta}) = m(\delta_{x,\boldsymbol{R}} - \delta_{x,0}), \tag{3.18}$$

что означает наличие «источников» n-потока, расположенных в точках 0 и $\boldsymbol{R}$. Ответ для корреляционных функций опять состоит в том, что они экспоненциально убывают при малых β. Следовательно, мы ожидаем, что в этой фазе имеются только массивные возбуждения. Стоит переписать эту теорию в гамильтоновой форме. Для этого введем анизотропию во «временном» направлении:

$$-S = \beta_0 \sum_{\boldsymbol{y}} \cos(\varphi_{\boldsymbol{y},t} - \varphi_{\boldsymbol{y},t+1}) + \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \cos(\varphi_{\boldsymbol{y},t} - \varphi_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta},t}) \tag{3.19}$$

(здесь $\boldsymbol{y}$ принадлежит $(D-1)$-мерной решетке.) В пределе больших β_0 (3.19) можно заменить на

$$-S = \text{const} - \int dt \left\{ \beta_0 \sum_{\boldsymbol{y}} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_{\boldsymbol{y}}}{dt} \right)^2 - \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \cos(\varphi_{\boldsymbol{y},t} - \varphi_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta},t}) \right\}. \tag{3.20}$$

Сравнивая (3.20) с (1.10), мы видим, что получили действие в мнимом времени для системы связанных ротаторов, расположенных в вершинах решетки и описываемых угловыми переменными $\{\varphi_{\boldsymbol{y}}\}$. В вещественном времени их лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{\boldsymbol{y}} \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{d\phi_{\boldsymbol{y}}}{dt} \right)^2 + \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \cos(\varphi_{\boldsymbol{y},t} - \varphi_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta},t}). \tag{3.21}$$

Переходя стандартным способом к гамильтониану, мы найдем

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2\beta_0} \sum_{\boldsymbol{y}} l_{\boldsymbol{y}}^2 - \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} \cos(\varphi_{\boldsymbol{y}} - \varphi_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}}), \\ l_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\boldsymbol{y}}}. \end{gathered} \tag{3.22}$$

(Отметим аналогию этого выражения с (3.4).) Предел сильной связи $\beta_1\beta_0 \ll 1$ отвечает пренебрежимо малой потенциальной энергии в (3.22):

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2\beta_0} \sum_{\boldsymbol{y}} l_{\boldsymbol{y}}^2, \\ \Psi = \exp\Big(i \sum_{\boldsymbol{y}} n_{\boldsymbol{y}} \varphi_{\boldsymbol{y}}\Big), \quad E = \frac{1}{2\beta_0} \sum_{\boldsymbol{y}} n_{\boldsymbol{y}}^2. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Здесь $\{n_{\boldsymbol{y}}\}$ — произвольный набор целых чисел; основному состоянию отвечают все $n_{\boldsymbol{y}} = 0$. Первое возбуждение получается, когда какое-то $n_{\boldsymbol{y}_0} = \pm 1$. Оно отделено от основного состояния массовой щелью. Действительно, в нашем приближении ротаторы не взаимодействуют. Описанное элементарное возбуждение — это просто возбуждение одного ротатора, расположенного в точке $\boldsymbol{y}_0$. Как и в предыдущем примере, учет потенциальной энергии приводит к перескокам между $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}$:

$$\langle \boldsymbol{y}'|V|\boldsymbol{y}\rangle = -\frac{\beta_1}{2}\sum_{\boldsymbol{\delta}} \delta_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{y}\pm\boldsymbol{\delta}}. \tag{3.24}$$

Поэтому, как и в изинговском случае, имеются элементарные возбуждения с энергией, зависящей от квазиимпульса. Щель отлична от нуля в любом конечном порядке по $\beta_1\beta_0$. Однако мы опять ожидаем появления фазового перехода. Остановимся на структуре фазы с большими $\beta_1\beta_0$. В то время как при малых $\beta_1\beta_0$ имелся набор практически не связанных ротаторов, при больших $\beta_1\beta_0$ все эти ротаторы жестко скреплены. Если рассматривать их как нечто подобное твердому телу, спектр возбуждений будет иметь вид

$$E = \frac{L^2}{2I}, \tag{3.25}$$

где $L = \sum\limits_{\boldsymbol{y}} l_{\boldsymbol{y}}$ — полный угловой момент, а I — момент инерции. В жестко связанной фазе I должен быть пропорционален числу ротаторов N: $I \sim N$. Если ротаторы слабо взаимодействуют друг с другом, то $I \sim 1$ (независимое вращение). Фазовый переход по $\beta_1\beta_0$ является переходом между этими двумя режимами. В фазе с малыми $\beta_1\beta_0$ в спектре имеется щель, а в фазе с большими $\beta_1\beta_0$ щель отсутствует (в пределе $N \to \infty$). В следующей главе мы обсудим этот фазовый переход более подробно.

В неабелевом случае режим сильной связи мало отличается от описанного выше. Например, в случае $\boldsymbol{n}$-поля гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2\beta_0}\sum_{\boldsymbol{y}} l_{\boldsymbol{y}}^2 - \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\delta}} (\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\delta}}). \tag{3.26}$$

Здесь $l_{\boldsymbol{y}}$ — стандартный оператор углового момента; собственные значения $l_{\boldsymbol{y}}^2$ равны $l(l+1)$ (с кратностями $2l+1$). Все выводы остаются прежними, только элементарные возбуждения на этот раз оказываются векторами (для них $l = 1$) и, как будет объяснено ниже, фазовый переход при $D = 2$ отсутствует. Последнее очень важно. Это значит, что и в пределе $\beta_1\beta_0 \to \infty$ (или $e_0^2 \to 0$) сохраняется щель в энергетическом спектре. Это может быть интерпретировано как результат сильного взаимодействия голдстоуновских бозонов. На основании разложения сильной связи мы ожидаем, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 \tag{3.27}$$

описывает массивные частицы с изотопическим спином 1. Размерная трансмутация, обсуждавшаяся в главе 2, предсказывает, что все амплитуды рассеяния зависят только от p_j/m (где p_j — импульсы частиц) и не содержат никаких свободных параметров (типа констант связи). Все эти предположения подтверждаются точным решением теории.

Последняя модель с глобальной симметрией, которую мы рассмотрим, — главное киральное поле. Лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = \sum_y \frac{\beta_0}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\dot{g}_y^{-1}\dot{g}_y\right) + \frac{\beta_1}{2}\sum_{y,\delta}\left\{\mathrm{Tr}\left(g_y^{-1}g_{y+\delta}\right) + \text{c.c.}\right\}. \tag{3.28}$$

Он описывает набор симметричных волчков (в случае $g \in SU(2)$). Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_y \frac{1}{2\beta_0}\hat{l}_y^2 - \frac{\beta_1}{2}\sum_{y,\delta}\left\{\mathrm{Tr}\left(g_y^{-1}g_{y+\delta}\right) + \text{c.c.}\right\}. \tag{3.29}$$

Здесь $\hat{l}_y$ — оператор левых поворотов, который в случае группы $SU(2)$ выражается через производные по углам Эйлера (см. любой учебник по квантовой механике). Собственные значения $\hat{l}_y^2$ снова равны $l(l+1)$, но их кратности теперь $(2l+1)^2$ из-за того, что (3.29) имеет группу симметрии $SU(2)\times SU(2)$. Волновые функции элементарных возбуждений преобразуются по фундаментальным представлениям обеих групп. В случае $SU(2)$ эти возбуждения преобразуются как векторы относительно $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$. Этот вывод подтверждается точным решением.

3.3. Калибровочные симметрии

Мы видели, что в режиме сильной связи все системы с глобальными симметриями выглядят практически одинаково. Во всех случаях имеются массивные точечные возбуждения, распространяющиеся по решетке. В неабелевых двумерных теориях эта картина остается правильной даже при малых константах связи.

В случае калибровочных систем предел сильной связи снова не очень чувствителен к виду симметрии. Однако калибровочная инвариантность приводит к качественно новым особенностям, к описанию которых мы переходим.

Рассмотрим сначала разложение статистической суммы в $\mathbf{Z}_2$ случае при малых β. Поскольку каждый член в выражении для энергии (1.46) сопоставляется какому-то плакету, разложение имеет вид суммы по наборам плакетов, таким что по каждому ребру пересекается четное число плакетов. Следовательно, вместо замкнутых путей мы получаем нечто вроде замкнутых поверхностей. Вклад данной поверхности в статистическую сумму равен $(\operatorname{th}\beta)^A$, где A — число плакетов или просто площадь поверхности. Для более сложных калибровочных групп типа $O(2)$ или $SU(n)$ разложение при малых β выглядит точно так же, только плакеты снабжены еще сохраняющимися квантовыми числами, подобно тому, как это было в случае путей при описании систем с глобальными симметриями.

Таким образом, имеется весьма общее правило, согласно которому разложение сильной связи для калибровочных систем мы можем получить из разложения для соответствующей системы с глобальной симметрией, заменяя пути на поверхности. Физический смысл этого правила проясняется при переходе к гамильтонову описанию. Перейдем к гамильтониану в случае $O(2)$-теории (остальные случаи рассматриваются аналогичным образом). Как обычно, для этого надо ввести анизотропию во «временном» направлении в формуле (1.49). Получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{\beta_0}{2} \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} (\dot{A}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} + \phi_{\boldsymbol{y}} - \phi_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\alpha}})^2 + \\ + \beta_1 \sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \left(\cos(A_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} + A_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} - A_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} - A_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\beta}}) - 1\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Здесь $\alpha = 1, \ldots, D-1$; $\boldsymbol{y}$ принадлежит $(D-1)$-мерной решетке, а через $\phi_{\boldsymbol{y}}$ обозначена временная компонента вектор-потенциала $A_{\boldsymbol{y},0}$. Первый член в (3.30) получается разложением косинуса в (1.49) и переходом к непрерывному времени. Чтобы перейти к гамильтониану, введем канонический импульс

$$E_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}} = \beta_0(\dot{A}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} + \phi_{\boldsymbol{y}} - \phi_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\alpha}}). \tag{3.31}$$

Гамильтониан равен

$$H = \sum_{y,\alpha} E_{y,\alpha}\dot{A}_{y,\alpha} - \mathcal{L} =$$
$$= \frac{1}{2\beta_0}\sum_{y,\alpha} E_{y,\alpha}^2 + \beta_1 \sum_{y,\alpha,\beta}\{1 - \cos(A_{y,\alpha} + A_{y+\alpha,\beta} - A_{y+\beta,\alpha} - A_{y,\beta})\} -$$
$$- \sum_{y,\alpha} \phi_y (E_{y,\alpha} - E_{y-\alpha,\alpha}). \tag{3.32}$$

Так как в лагранжиане отсутствуют производные ϕ_y по времени, надо просто минимизировать гамильтониан H по этому полю. Отсюда получается условие

$$\Gamma_y = \sum_{\alpha}(E_{y,\alpha} - E_{y-\alpha,\alpha}) = 0. \tag{3.33}$$

С учетом этого условия гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2\beta_0}\sum_{y,\alpha} E_{y,\alpha}^2 + \beta_1 \sum_{y,\alpha,\beta}(1 - \cos F_{y,\alpha,\beta}). \tag{3.34}$$

Отметим, что операторы Γ_y являются генераторами калибровочных преобразований поля $A_{y,\alpha}$. В самом деле,

$$\delta A_{y,\alpha} = \left[\sum_z i\omega_z \Gamma_z, A_{y,\alpha}\right] = \omega_y - \omega_{y+\alpha}. \tag{3.35}$$

Поэтому

$$[\Gamma_y, H] = 0. \tag{3.36}$$

В квантовой теории следует подставить

$$E_{y,\alpha} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial A_{y,\alpha}}$$

в гамильтониан и решить уравнения

$$\begin{aligned} H\Psi &= \mathcal{E}\Psi, \\ \Gamma_y \Psi &= 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Режим сильной связи отвечает пренебрежимо малому второму, потенциальному члену в (3.34). Общее решение (3.37) в таком приближении имеет вид

$$\Psi = \exp\Big(i\sum_{y,\alpha} n_{y,\alpha} A_{y,\alpha}\Big),$$
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\beta_0}\sum_{y,\alpha} n^2_{y,\alpha}, \tag{3.38}$$

причем целые числа $n_{y,\alpha}$ удовлетворяют условию сохранения

$$\sum_{\alpha}(n_{y,\alpha} - n_{y-\alpha,\alpha}) = 0. \tag{3.39}$$

Вакуумное решение описывается набором $n_{y,\alpha} = 0$. Возбужденные состояния сопоставляются замкнутым путям на решетке с условием сохранения $n_{y,\alpha}$ в каждой вершине. Получился тот же набор путей, что при описании модели с глобальной $O(2)$-симметрией, но на этот раз интерпретация совершенно иная. Теперь каждый путь описывает квантовое состояние. В пределе сильной связи энергия этого состояния дается формулой (3.38) и пропорциональна длине пути. Рассматривая распространение таких петель во времени, мы получим мировые поверхности, встретившиеся нам в евклидовом описании теории. С физической точки зрения петли образованы фарадеевскими силовыми линиями (из (3.38) видно, что $n_{y,\alpha}$ — это собственное значение электрического поля $E_{y,\alpha}$). Условие (3.39) выражает сохранение электрического потока (так и должно быть, поскольку мы рассматриваем теорию без зарядов). Из-за угловой природы векторного потенциала поток квантуется. В нулевом приближении форма петли не меняется со временем. При включении второго члена в (3.34) возникают два различных эффекта. Прежде всего, наша замкнутая линия потока начинает двигаться по решетке. Это совершенно аналогично случаю глобальной симметрии, только там элементарные возбуждения были точечными. Второй эффект менее тривиален. Если возбудить данное состояние косинусным членом из (3.34), форма этого состояния может измениться (например, может родиться новый квадратик, образованный линиями потока). Поэтому настоящее квантовое состояние является суперпозицией замкнутых линий потока, имеющих различные конфигурации. В следующих главах мы будем развивать теорию струн, предназначенную для описания непрерывного предела такой модели. Непрерывный предел существует в том случае, если отсутствует фазовый переход по e.

Поясним связь этой картины с конфайнментом зарядов. Эта связь очень проста. Предположим, что мы вводим в нашу систему два статических противоположных заряда. Тогда должна образоваться линия потока, начинающаяся на одном заряде и кончающаяся на другом. Энергия такого состояния пропорциональна расстоянию между зарядами. Если нет фазового перехода, то эта же картина сохранится для малых констант связи. В следующей главе будет показано, что при $D = 3$ это действительно так, но при $D = 4$ возникает фазовый переход, ведущий к конденсации струн. После конденсации вместо закона конфайнмента оказывается справедливым закон Кулона.

Не представляет трудностей обобщение всего рассуждения на неабелев случай. Основными переменными в этом случае являются матрицы из $SU(N)$, помещенные на ребрах $(D-1)$-мерной решетки, $B_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}$. В абелевом случае имелся оператор электрического поля E с коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}\left[iE_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}, e^{iA_{y',\beta}}\right] = \delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'}\delta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}e^{iA_{y',\beta}},\\ iE_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial A_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}} \quad\Longleftrightarrow\quad i\dot{A}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} = \left(e^{iA_{y,\alpha}}\right)^{\cdot}\, e^{-iA_{y,\alpha}}.\end{gathered} \tag{3.40}$$

Неабелево обобщение (3.40) выглядит следующим образом. Имеются два разных электрических поля, отвечающие левым и правым инвариантным формам, построенным по $B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}$. Точнее,

$$\begin{gathered}L_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} = \dot{B}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}B^{-1}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}, \quad R_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} = B^{-1}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}\dot{B}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}},\\ R_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} = B^{-1}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}L_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}B_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}},\\ \operatorname{Tr}\left(L^2_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}\right) = \operatorname{Tr}\left(R^2_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}\right).\end{gathered} \tag{3.41}$$

Операторы L и R удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}&[L^a_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}, B_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\beta}}] = \delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'}\delta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\lambda^a B_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\beta}},\\ &[R^a_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}, B_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\beta}}] = \delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'}\delta_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}B_{\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\beta}}\lambda^a.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Здесь $\{\lambda^a\}$ — набор генераторов $SU(N)$, а $iL = \lambda^a L^a$; $iR = \lambda^a R^a$.

Если задана какая-то параметризация группы, например, углами Эйлера в случае $SU(2)$, L^a и R^a легко выразить в виде дифференциальных операторов. Однако нам такие явные выражения не понадобятся.

Гамильтониан в неабелевом случае имеет вид (ср. с (3.34)):

$$H = -\frac{1}{2\beta_0}\sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}\operatorname{Tr}L^2_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\beta_1}{2}\sum_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\left\{\operatorname{Tr}\left(B_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}B_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}B^{-1}_{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}B^{-1}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\beta}}\right) + \text{c.c.}\right\}. \tag{3.43}$$

Можно ввести операторы Γ^a_y, которые коммутируют с H и порождают калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned}\Gamma_y = i\lambda^a\Gamma^a_y = \sum_{\alpha}(L_{y,\alpha} - R_{y-\alpha,\alpha}) = \\ = \sum_{\alpha}\left(L_{y,\alpha} - B^{-1}_{y-\alpha,\alpha}L_{y-\alpha,\alpha}B_{y-\alpha,\alpha}\right),\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}[][\Gamma^a_y, H] = 0, \\ [\Gamma^a_y, \Gamma^b_{y'}] = \delta_{y,y'}f^{abc}\Gamma^c_y\end{aligned} \tag{3.45}$$

(f^{abc} — структурные константы группы). Последнее уравнение легко вывести с помощью (3.42) и тождества Якоби. В непрерывном пределе оператор (3.44) превращается в ковариантную производную электрического поля:

$$\begin{aligned}L_{y,\alpha} &\simeq E_{y,\alpha}, \\ B_{y,\alpha} &\simeq I + A_{y,\alpha}, \\ \Gamma_y &\simeq \partial_\alpha E_\alpha + [A_\alpha, E_\alpha].\end{aligned} \tag{3.46}$$

В отсутствие внешних зарядов спектр нашей системы описывается уравнением Шредингера с дополнительными условиями:

$$H\Psi[B] = \mathcal{E}\Psi[B], \quad \Gamma^a_y\Psi[B] = 0. \tag{3.47}$$

Поскольку Γ^a_y является генератором калибровочного преобразования, последнее условие означает, что из всех возможных решений уравнения Шредингера надлежит выбрать калибровочно-инвариантную $\Psi[B]$. В режиме сильной связи мы пренебрегаем последним членом в (3.43) и получаем набор независимых волчков (для группы $SU(2)$, которую мы рассматриваем как пример, обладающий всеми характерными свойствами). Снова простейшее калибровочно-инвариантное возбуждение сопоставляется квадрату, образованному линиями потока:

$$\begin{aligned}\Psi_1[B] \sim \mathrm{Tr}\left(B_{x,\alpha}B_{x+\alpha,\beta}B^{-1}_{x+\beta,\alpha}B^{-1}_{x,\beta}\right), \\ \mathcal{E} = \left.\frac{4l(l+1)}{4\beta_0}\right|_{l=1/2} = \frac{3}{4\beta_0}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Точно так же, как и в абелевом случае, это элементарное возбуждение в старших порядках превратится в суперпозицию различных конфигураций. Единственное физическое отличие от абелева случая возникает, когда мы рассматриваем взаимодействие внешних зарядов. Опишем необходимый для этого формализм. В этой процедуре есть одна хитрость: хотя бесконечно тяжелые заряды являются классическими в том, что касается свойств их орбитального движения, их изотопические спины должны рассматриваться квантовым образом. Поэтому не вполне разумно просто добавлять члены типа $\mathcal{J}_\mu^{\text{ext}} A_\mu$ к лагранжиану для описания таких зарядов. Правильнее описывать заряд квантовым полем χ с изотопическим спином I и лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\chi^+ \left(\frac{\partial}{\partial t} + A_0 \right) \chi - M\chi^+\chi. \tag{3.49}$$

Отсутствие кинетической энергии у χ означает, что положение заряда фиксировано. Переходя к гамильтониану и используя условие $\chi^+\chi = 1$, мы получаем следующее естественное предписание для включения в теорию статических зарядов с изотопическими спинами $I_1, I_2, \ldots, I_N$, расположенных в точках $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$. Рассмотрим решение уравнений

$$\begin{gathered} H\Psi(I_1, m_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; I_N, m_N, \boldsymbol{x}_N) = \mathcal{E}_{I_1,m_1,\boldsymbol{x}_1;\ldots;I_N,m_N,\boldsymbol{x}_N}\Psi(\cdots), \\ \Gamma^a_{\boldsymbol{y}}\Psi(I_1, m_1, \boldsymbol{x}_1; \ldots; I_N, m_N, \boldsymbol{x}_N) = \\ = -\Big[\sum_j \sum_{\{m'_j\}} (\lambda^a_{[I_j]})_{m_j m'_j} \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_j)\Big] \Psi(\{I_j, m_j, \boldsymbol{x}_j\}) \end{gathered} \tag{3.50}$$

(H снова дается выражением (3.43)).

Тогда $\mathcal{E}_{(\ldots)}$ — это просто энергия сектора с N внешними зарядами. Второе условие (3.50) означает, что вместо калибровочно-инвариантной Ψ в вакуумном секторе теперь надо рассматривать Ψ, которая меняется при калибровочных преобразованиях по правилу

$$\begin{gathered} \Psi_{m_1\ldots m_N}[B^\Omega] = \sum_{m'_1\ldots m'_N} \mathcal{D}^{I_1}_{m_1 m'_1}\left(\Omega^{-1}(\boldsymbol{x}_1)\right) \times \cdots \times \\ \times \mathcal{D}^{I_N}_{m_N m'_N}\left(\Omega^{-1}(\boldsymbol{x}_N)\right) \cdot \Psi_{m'_1\ldots m'_N}[B]; \\ B^\Omega_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} = \Omega^{-1}_{\boldsymbol{x}} B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} \Omega_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}}, \end{gathered} \tag{3.51}$$

где $\mathcal{D}^I_{mm'}(\Omega)$ — стандартные матрицы представления группы $SU(2)$. Правила (3.50) и (3.51) имеют вполне наглядный смысл. Они означают, что статический заряд с изотопическим спином I и его проекцией m является источником неабелева электрического потока.

Используя эти правила, мы можем пояснить упомянутую выше специфику неабелева случая. Рассмотрим для начала взаимодействие двух зарядов с изотопическими спинами $1/2$, находящихся на расстоянии R друг от друга. В пределе сильной связи волновая функция имеет вид:

$$\Psi_{(m_1 \boldsymbol{x}_1, m_2 \boldsymbol{x}_2)}[B] \sim \mathcal{D}^{1/2}_{m_1 m_2}\Big(\prod_{L_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}} B_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}}\Big) \tag{3.52}$$

(здесь взято произведение B-матриц вдоль прямой линии $L_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}$, соединяющей заряды). Поскольку волчки, расположенные на этой линии, возбуждены (имеют $l = 1/2$), получаем:

$$\mathcal{E}_{1/2}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \sim |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \tag{3.53}$$

т. е. то же, что и в абелевом случае. Теперь рассмотрим два заряда с $I = 1$. Одна возможная волновая функция описывается той же формулой (3.52), только $\mathcal{D}^{1/2}$ следует сменить на $\mathcal{D}^1$. Однако на этот раз имеется состояние с гораздо более низкой энергией. Чтобы увидеть, как оно образуется, сравним первый вариант, который можно изобразить следующим рисунком:

$\boldsymbol{x}_1, m_1$ $\boldsymbol{x}_2, m_2$

$$\Psi^{(1)} = \tag{3.54}$$

(здесь нарисована линия потока, соединяющая $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$), с другим:

$$\Psi^{(2)} = \qquad = \Psi_{m_1}\Psi_{m_2}, \tag{3.55}$$

где линии потока замыкаются. Явное выражение, скажем, для левого квадратика выглядит так:

$$\begin{gathered} \Psi_m = \mathrm{Tr}(\tau^m B_1 B_2 B_3^+ B_4^+); \\ \tau^{\pm 1} = \tau^1 \pm \mathrm{i}\tau^2;\ \tau^0 = \tau^3 \end{gathered} \tag{3.56}$$

($\tau^{1,2,3}$ — матрицы Паули).

Легко проверить, что под действием калибровочных преобразований функция (3.55) преобразуется в соответствии с (3.51). В то же время энергия этого состояния не зависит от $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$, и потому для достаточно больших расстояний состояние (3.55) выгоднее, чем (3.54), и конфайнмента зарядов с $I = 1$ нет. Отметим, что для $I = 1/2$ вариант (3.55) невозможен, и это является причиной конфайнмента. Нетрудно понять, что, собственно, произошло. Неабелево калибровочное поле описывает глюоны с $I = 1$. При введении источника с $I = 1$ оказывается энергетически выгодным заэкранировать этот источник соседними глюонами (этот процесс изображен на рисунке (3.55)). Если источник имеет $I = {}^1\!/_2$, то в режиме сильной связи подобное экранирование невозможно и происходит конфайнмент цвета. В принципе может существовать другая фаза, в которой даже источник с $I = {}^1\!/_2$ экранируется ($I = 1$)-глюонами. Чтобы это случилось, нужно облако из бесконечного числа глюонов, которые могли бы статистически экранировать заряд. Но такое облако может иметь конечную энергию, только когда образующие его глюоны безмассовые. Следовательно, мы ожидаем, что если имеется энергетическая щель в калибровочной теории, эффективное облако состоит из конечного числа глюонов и полуцелые спины не экранируются. Любопытное следствие этой картины состоит в том, что натяжение струны между источниками, например, спина $I = {}^7\!/_2$ точно такое же, как между источниками спина $I = {}^1\!/_2$, поскольку три единицы I-спина будут экранированы глюонами, и только ${}^1\!/_2$ останется. Это проявление того, что электрический поток сохраняется только по модулю 1.

Вопрос о том, действительно ли имеется массовая щель в непрерывном пределе ($e_0^2 \to 0$), не может быть решен разложением сильной связи, поскольку присутствие щели в любом порядке по $1/e_0^2$ ничего не доказывает. Нужны более тонкие методы. Мы опишем некоторые из них в следующей главе.

Глава 4
Инстантоны в абелевых системах

В предыдущей главе мы поняли, что наличие массовой щели — важнейшее свойство калибровочных и спиновых систем. В этой главе мы обсудим особый механизм образования щели, который особенно важен в абелевых системах, но будет играть определенную роль и в неабелевом случае.

4.1. Инстантоны в квантовой механике и в модели Изинга

Опишем свойства симметрии квантовомеханической системы, заданной действием (в мнимом времени)

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \right\} \tag{4.1}$$

при $\lambda \ll \mu^2$. Эта модель интересна нам только тем, что на ее примере проще всего продемонстрировать одно явление, встречающееся и в более сложных системах. В этой модели в любом конечном порядке теории возмущений симметрия явно нарушена, тогда как на самом деле симметрия восстанавливается. Чтобы убедиться в этом, напишем

$$\varphi = \pm\frac{\mu}{\lambda^{1/2}} + \chi \tag{4.2}$$

и разложим действие вблизи, например, левого минимума:

$$S \approx \int dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \mu^2\chi^2 + O(\lambda^{1/2}/\mu)\chi^3 \right\}. \tag{4.3}$$

При малых λ мы имеем почти гармонические колебания вблизи дна левой ямы. Лево-правая симметрия $\varphi \to -\varphi$ нарушена, и это нарушение сохраняется в любом конечном порядке по λ. В то же время из квантовой механики мы знаем, что основное состояние этой теории описывается четной ψ-функцией и потому невырожденно и симметрично.

Понятно, что восстановление симметрии связано с тем, что частица, помещенная в левую яму, будет с конечной вероятностью туннелировать в правую и обратно. Поэтому, подождав достаточно долго, мы с равной вероятностью обнаружим частицу в любой из двух ям. Есть интересный способ описания туннелирования, и мы его сейчас обсудим. Легко убедиться (сделав замену $\varphi \to \lambda^{-1/2}\varphi$), что при малых λ действие S очень велико — порядка λ^{-1}. Это означает, что континуальный интеграл

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi\, \mathrm{e}^{-S[\varphi]} \tag{4.4}$$

можно вычислить в приближении седловой точки. Существенно, что классические уравнения движения в мнимом времени

$$-\frac{\delta S}{\delta\varphi(t)} = \ddot{\varphi} + \mu^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0, \tag{4.5}$$

имеют наряду с тривиальными минимумами $\varphi = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ нетривиальное решение

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\Big(\frac{\mu(t-t_0)}{\sqrt{2}}\Big) \tag{4.6}$$

(t_0 — произвольная константа). Это решение (будучи локальным минимумом $S[\varphi]$) связывает левую яму при $t = -\infty$ с правой при $t = +\infty$. Подставляя (4.6) в (4.1), найдем величину классического действия

$$S_{\mathrm{cl}} = \frac{2\sqrt{2}\mu^3}{3\lambda}. \tag{4.7}$$

На первый взгляд вклад траектории (4.6) в континуальный интеграл подавлен множителем

$$\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{cl}}} = \mathrm{e}^{-2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda} \tag{4.8}$$

и пренебрежимо мал. Однако это не так. Причина состоит в том, что имеется не единственное классическое решение, а целое непрерывное семейство, параметризованное величиной t_0. Поэтому следует ожидать, что вклад в Z имеет вид

$$Z \sim \mathrm{e}^{-2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda}\int dt_0. \tag{4.9}$$

Это значит, что для сравнительно коротких отрезков времени $t < \mathrm{e}^{2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda}$ вклад нашей траектории действительно несуществен, но на больших временах он становится очень большим. Это находится в полном согласии с интерпретацией нашего решения как процесса туннелирования. Упомянутое характерное время совпадает со временем туннелирования и, следовательно, временем восстановления симметрии.

Перейдем теперь к количественному анализу.

Разложим наше поле вблизи классического решения $\varphi_{\mathrm{cl}}(t-t_0)$:

$$\varphi(t) = \varphi_{\mathrm{cl}}(t-t_0) + \sum_{n\neq 0} C_n \psi_n(t-t_0). \tag{4.10}$$

Введенные в (4.10) функции ψ_n — нормальные моды осцилляций вблизи φ_{cl}. Их следует искать, решая уравнение

$$\int dt_1 \, \frac{\delta^2 S_{\mathrm{cl}}}{\delta\varphi(t)\delta\varphi(t_1)}\Big|_{\varphi=\varphi_{\mathrm{cl}}(t)} \psi_n(t_1) = \omega_n^2 \psi_n(t) \tag{4.11}$$

или

$$\ddot{\psi}_n + \mu^2\psi_n - 3\lambda\varphi_{\mathrm{cl}}^2\psi_n = -\omega_n^2\psi_n.$$

В полный набор функций ψ_n входит функция $\psi_0 \sim \dot{\varphi}_{\mathrm{cl}}$, для которой $\omega_0^2 = 0$. Этот факт, связанный с трансляционной инвариантностью, легко проверить непосредственно, дифференцируя уравнение (4.5) по t. В разложении (4.10) мы опустили вклад ψ_0 в сумму, введя вместо этого параметр t_0. Дело в том, что флуктуации C_n с $n \neq 0$ малы из-за быстрого роста действия S, но это действие не зависит от t_0, и соответствующую степень свободы следует рассмотреть отдельно. Для этого перейдем от интегрирования по полям $\varphi(t)$ к интегрированию по C_n и t_0. Соответствующий якобиан проще всего извлечь из нормы в функциональном пространстве

$$\begin{aligned} ||\delta\varphi||^2 = &\int dt\,(\delta\varphi(t))^2 \approx (\delta t_0)^2 \int dt\, \dot{\varphi}_{\mathrm{cl}}^2 + \\ &+ \sum_{n\neq 0} (\delta C_n)^2 + O\big((\delta t_0)^3\big). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi(t) &= A \prod_{n\neq 0} dC_n\, dt_0, \\ A &= \left(\int dt\, \dot{\varphi}_{\mathrm{cl}}^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Теперь можно вычислить вклад одного кинка в корреляционную функцию:

$$\langle\varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle \approx \frac{\mu^2/\lambda + Be^{-S_{\rm cl}}\displaystyle\int dt_0\,\varphi_{\rm cl}(t_1-t_0)\varphi_{\rm cl}(t_2-t_0)}{1+Be^{-S_{\rm cl}}\displaystyle\int dt_0} \approx$$

$$\approx \frac{\mu^2}{\lambda} + Be^{-S_{\rm cl}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_0\,(\varphi_{\rm cl}(t_1-t_0)\varphi_{\rm cl}(t_2-t_0) - \mu^2/\lambda), \tag{4.14}$$

$$B = A\frac{\displaystyle\int\prod d\xi_n\,e^{-\sum\omega_n^2\xi_n^2}}{\displaystyle\int\prod d\xi_n\,e^{-\sum\omega_{n,0}^2\xi_n^2}}$$

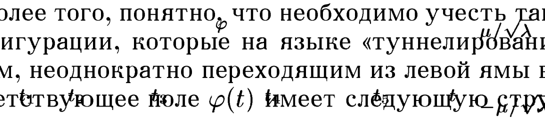
($\omega_{n,0}$ — собственные частоты флуктуаций около тривиального минимума $\varphi_{\rm cl}^2 = \mu^2/\lambda$). Подставляя (4.6) в (4.14), получим:

$$\langle\varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = \frac{\mu^2}{\lambda}\left(1 - Ce^{-S_{\rm cl}}|t_1-t_2|\right),$$

$$C = -B\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\operatorname{th}\frac{\mu x}{\sqrt{2}}|t_1-t_2|\ \operatorname{th}\frac{\mu(x-1)}{\sqrt{2}}|t_1-t_2| - 1\right) \approx \tag{4.15}$$

$$\approx 2B \quad \text{при} \quad |t_1-t_2| \gg \mu^{-1}.$$

Как и ожидалось, на больших временах кинковое решение (4.6) дает большой вклад. Более того, понятно, что необходимо учесть также многокинковые конфигурации, которые на языке «туннелирования» отвечают траекториям, неоднократно переходящим из левой ямы в правую и обратно. Соответствующее поле $\varphi(t)$ имеет следующую структуру:



Точного классического решения такого типа, вообще говоря, не существует, потому что кинк и антикинк стремятся аннигилировать. Нетрудно оценить силу притяжения между ними: поскольку хвосты кинков экспоненциально мало отличаются от $\pm\mu/\sqrt{\lambda}$,

$$\varphi_{\rm cl} \simeq \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + O\left(e^{-2\mu(t)/\sqrt{2}}\right)\right), \qquad |t| \gg 1, \tag{4.16}$$

простая суперпозиция кинка и антикинка будет иметь действие

$$S^{(k,\bar{k})} = S^{(k)} + S^{(\bar{k})} + O\left(e^{-2\mu|t_{12}|/\sqrt{2}}\right) = \\ = 2S^{(k)} + O\left(e^{-2\mu|t_{12}|/\sqrt{2}}\right), \tag{4.17}$$

где t_{12} — расстояние между кинком и антикинком. Этот результат показывает, что взаимодействие между кинками экспоненциально слабо. Поскольку для малых λ средняя временная дистанция между этими объектами составляет по порядку величины $C^{-1}e^{2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda} \gg \mu^{-1}$, этим взаимодействием можно пренебречь. Другое упрощение, возникающее по той же причине, связано с возможностью пренебречь шириной кинка. Полную конфигурацию можно аппроксимировать функцией

$$\varphi_{\mathrm{cl}}^{(N)}(t) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \prod_{j=1}^{N} \mathrm{sgn}(\tau - \tau_j), \tag{4.18}$$

$$S_{\mathrm{cl}}^{N} = N\frac{2\sqrt{2}\mu^3}{3\lambda}, \\ \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_N. \tag{4.19}$$

Полная корреляционная функция выглядит так:

$$\langle \varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = \frac{\mu^2}{\lambda}\sum_{N=0}^{\infty}(-C)^N e^{-S_{\mathrm{cl}}^{(N)}} \int d\tau_1 \ldots d\tau_N = \frac{\mu^2}{\lambda}e^{-\Delta|t_1-t_2|}, \\ \min(t_1,t_2) < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_N < \max(t_1,t_2), \quad \Delta = Ce^{-2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda}. \tag{4.20}$$

Мы обнаружили, что траектории туннелирования (их еще называют инстантонами) устраняют вырождение основного состояния, имеющееся на пертурбативном уровне. Симметрия $\varphi \to -\varphi$ восстанавливается, и возникает конечная, хотя и большая, корреляционная длина $r_{\mathrm{c}} \sim \Delta^{-1}$. Как обсуждалось в главе 1, в пределе большой корреляционной длины квантовая теория (4.1) должна быть эквивалентной $D = 1$ модели Изинга. Эта эквивалентность совершенно очевидна из нашего рассуждения: в тот момент, когда мы заменили поле φ ступенчатыми функциями (4.18), мы фактически перешли к перечислению конфигураций модели Изинга, вроде изображенной на рисунке:

,

и перечисление кинков в (4.20) равнозначно перечислению точек переворота спинов в (1.18).

4.2. Инстантоны в модели с глобальной $O(2)$-симметрией

Эта модель описывается статистической суммой

$$Z = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\varphi_{\boldsymbol{x}}}{2\pi} \exp\Big(\beta \sum_{\boldsymbol{x},\delta} (\cos(\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta}) - 1)\Big). \tag{4.21}$$

Мы рассмотрим ее свойства в пределе больших β (слабой связи). Естественно разложить косинус в (4.21) и написать

$$S = \frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{x},\delta} (\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta})^2 \approx \frac{\beta}{2} \int d^2x \, (\nabla\varphi)^2. \tag{4.22}$$

Однако это разложение не совсем правильно. Оно требует, чтобы $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ было очень близко к соседнему $\varphi_{\boldsymbol{x}+\delta}$. Это физически разумно, поскольку при больших β соседние спины должны быть почти параллельны. Но параллельность спинов не обязательно означает, что $\varphi_{\boldsymbol{x}} \simeq \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta}$. С равным успехом можно положить

$$\begin{aligned} \varphi_{\boldsymbol{x}} &\simeq \pi - \epsilon, \\ \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta} &\simeq -\pi - \varepsilon, \end{aligned} \qquad \varepsilon \ll 1. \tag{4.23}$$

Конфигурация (4.23), для которой $\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta} = 2\varepsilon - 2\pi$, должна быть столь же важна, как и конфигурация с $\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta} = 2\varepsilon$, но в разложении (4.22), в котором потеряна периодичность косинуса, конфигурация (4.23) оказалась сильно подавлена. Мы должны найти выход из этой нефизической ситуации. Есть несколько способов. Самый элегантный состоит в том, чтобы рассмотреть непрерывный предел (4.22), но с условием, что φ разрешено быть многозначной функцией и иметь скачки на 2π в некоторых точках ветвления. Мы еще вернемся к этому подходу, но сначала полезно поработать с теорией на решетке и увидеть, откуда берется это многозначное поле.

Наша цель состоит в том, чтобы сохранить гармоническое приближение для поля φ, но при этом не потерять конфигураций типа (4.23). Этого можно добиться, заменив (4.21) на

$$Z = \sum_{\{n_{\boldsymbol{x},\delta}\}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\varphi_{\boldsymbol{x}}}{2\pi} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{x},\delta} (\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta} + 2\pi n_{\boldsymbol{x},\delta})^2\Big), \tag{4.24}$$

где n — произвольные целые числа. Формально мы заменили функцию $\exp(\beta(\cos\varphi - 1))$ на

$$\theta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(\varphi - 2\pi n)^2\right). \tag{4.25}$$

В пределе больших β, когда единственное важное свойство действия — его периодичность, а ангармонические члены $\sim \varphi^4$ несущественны в соответствии со сказанным в главе 1, замена (4.21) на (4.24) вполне законна. Оперируя с периодическим выражением в (4.24), мы правильно учитываем формально разрывные конфигурации (4.23).

Статистическую сумму (4.24) можно преобразовать к физически более осмысленному виду. Для этого возьмем случай $D = 2$ и перейдем от набора $\{n_{\boldsymbol{x},\delta}\}$ к целым числам $\{q_{\boldsymbol{x}_*}\}$ ($\boldsymbol{x}_*$ — центры плакетов), определенным по правилу

$$q_{\boldsymbol{x}_*} = n_{\boldsymbol{x},\delta_1} + n_{\boldsymbol{x}+\delta_1,\delta_2} - n_{\boldsymbol{x}+\delta_2,\delta_1} - n_{\boldsymbol{x},\delta_2} = \sum_{\Box} n_{\boldsymbol{x},\delta}. \tag{4.26}$$

Иными словами, $q_{\boldsymbol{x}_*}$ — «напряженность поля», создаваемого «векторным потенциалом» $n_{\boldsymbol{x},\delta}$. Любой набор $n_{\boldsymbol{x},\delta}$ может быть представлен в виде

$$n_{\boldsymbol{x},\delta} = m_{\boldsymbol{x}} - m_{\boldsymbol{x}+\delta} + \alpha_{\boldsymbol{x}} - \alpha_{\boldsymbol{x}+\delta} + \varepsilon_{\delta\gamma}(\phi_{\boldsymbol{x}_*} - \phi_{\boldsymbol{x}_*-\gamma}), \tag{4.27}$$

где $\varepsilon_{\delta\gamma}$ — стандартный антисимметричный тензор, $m_{\boldsymbol{x}}$ — целые числа, $0 \leqslant \alpha_{\boldsymbol{x}} < 1$, а $\phi_{\boldsymbol{x}_*}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta_{\boldsymbol{x}_*\boldsymbol{x}'_*}\phi_{\boldsymbol{x}'_*} \equiv \sum_{\gamma}(2\phi_{\boldsymbol{x}_*} - \phi_{\boldsymbol{x}_*-\gamma} - \phi_{\boldsymbol{x}_*+\gamma}) = q_{\boldsymbol{x}_*}. \tag{4.28}$$

Разложение (4.27) расщепляет $n_{\boldsymbol{x},\delta}$ на продольную и поперечную части. Решеточное уравнение Лапласа (4.28) получается подстановкой (4.27) в «напряженность поля» (4.26), в которую дает вклад только ϕ. Взяв решеточную дивергенцию $n_{\boldsymbol{x},\delta}$, можно написать уравнение, определяющее $m_{\boldsymbol{x}}$ и $\alpha_{\boldsymbol{x}}$ по $\{n_{\boldsymbol{x},\delta}\}$.

Суммирование по $n_{\boldsymbol{x},\delta}$ можно заменить суммированием по $\{m_{\boldsymbol{x}}\}$ и $\{q_{\boldsymbol{x}_*}\}$. Подставляя (4.27) в (4.24) и заменяя переменные

$$\varphi_{\boldsymbol{x}} \to \varphi_{\boldsymbol{x}} - 2\pi(m_{\boldsymbol{x}} + \alpha_{\boldsymbol{x}}), \tag{4.29}$$

получаем[1]

$$
\begin{aligned}
Z = \sum_{\{q_{\boldsymbol{x}_*}\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\varphi_{\boldsymbol{x}}}{2\pi} \exp\Big(-\frac{\beta}{2}\Big(\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}} (\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta}})^2 + \\
+ 2\pi^2 \sum_{\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{\delta}} (\phi_{\boldsymbol{x}_*} - \phi_{\boldsymbol{x}_*+\boldsymbol{\delta}})^2\Big)\Big) = \\
= Z_{\text{Gauss}} \sum_{\{q_{\boldsymbol{x}_*}\}} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{x}_*.\boldsymbol{x}'_*} \Delta^{-1}_{\boldsymbol{x}_*\boldsymbol{x}'_*} q_{\boldsymbol{x}_*} q_{\boldsymbol{x}'_*}\, 2\pi^2\Big), \\
Z_{\text{Gauss}} = \prod_{\boldsymbol{x}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_{\boldsymbol{x}}}{2\pi} \exp\Big(-\frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}} (\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta}})^2\Big).
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

При выводе (4.30) мы воспользовались тем, что замена (4.29)

$$
\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \longrightarrow \int\limits_{-\pi+2\pi(m+\alpha)}^{\pi+2\pi(m+\alpha)} d\varphi
$$

с последующим суммированием по m эквивалентна замене

$$
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{2\pi}.
$$

Формула (4.30) имеет интересную физическую интерпретацию. Она показывает, что для учета периодичности действия в пределе больших β надо ввести в систему набор вихрей, взаимодействующих друг с другом по двумерному закону Кулона (обратный лапласиан в (4.30)). Обсудим соответствие между распределением переменных $\{q_{\boldsymbol{x}_*}\}$ и конфигурацией углов $\{\varphi_{\boldsymbol{x}}\}$. Возьмем всего один вихрь, расположенный при $\boldsymbol{x} = 0$, $q_0 = 1$. Возьмем большую замкнутую петлю L на решетке, окружающую точку $\boldsymbol{x} = 0$, и рассмотрим $B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}} = \varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta}}$ на этой петле. Из определения ясно, что

$$
\oint_L B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}} = 0 \tag{4.31}
$$

[1] Рассуждения, ведущие к (4.30), впервые появились полностью в кандидатской диссертации В. Г. Березинского.

(через $\oint_L$ обозначена сумма $B_{\boldsymbol{x},\delta}$ вдоль петли; в непрерывном пределе она превращается в обычный контурный интеграл). Как мы отмечали в начале этого раздела, $|B_{\boldsymbol{x},\delta}| \ll 1 \pmod{2\pi}$ при больших β . Введенный нами набор целых чисел $\{n_{\boldsymbol{x},\delta}\}$ определен так, что

$$-\pi \leqslant A_{\boldsymbol{x},\delta} = \varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\delta} + 2\pi n_{\boldsymbol{x},\delta} < \pi,$$

и для больших β имеем $|A_{\boldsymbol{x},\delta}| \ll 1$. Величина $A_{\boldsymbol{x},\delta}$, однозначно определяемая конфигурацией $\{\varphi_{\boldsymbol{x}}\}$, имеет ненулевую циркуляцию, равную вихревому числу

$$q_0 = \frac{1}{2\pi} \oint_L A_{\boldsymbol{x},\delta}. \tag{4.32}$$

Простой пример набора $\{n_{\boldsymbol{x},\delta}\}$, приводящего к единичному вихрю, можно построить с помощью рисунка

(4.33)

Все ребра, не пересекающиеся с пунктирной линией, имеют $n_{\boldsymbol{x},\delta} = 0$. Пересекающиеся с ней ребра имеют $n_{\boldsymbol{x},\delta} = 1$. Эта картинка описывает конфигурацию углов $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ со скачком на 2π на пунктирной линии, удовлетворяющую условию (4.32). Точная форма этой линии не существенна, поскольку ее изменение равносильно калибровочному преобразованию набора $\{n_{\boldsymbol{x},\delta}\}$. В непрерывном пределе эта пунктирная линия превращается в разрез на комплексной плоскости с точкой ветвления в точке расположения вихря.

В пределе больших β в двух измерениях из-за дальнодействующего характера двумерной кулоновской силы вихри образуют нейтральные диполи, и система (4.30) оказывается диэлектриком. Такие диполи очень слабо сказываются на поведении корреляционных функций и несущественны при больших β. При некотором критическом значении β диполи диссоциируют, и получается плазма вихрей. Мы не будем здесь обсуждать это явление. Вместо этого мы объясним, как получить (4.30) непосредственно из непрерывной теории, что концептуально важно. Оказывается, что (4.30) — это в точности инстантонное приближение для (4.21).

Как уже говорилось, действие в непрерывном пределе имеет вид

$$S = \frac{\beta}{2} \int (\partial_\mu \varphi)^2 d^2 x. \tag{4.34}$$

Классический минимум этого действия дается решением уравнения

$$\partial^2 \varphi(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.35}$$

Если $\varphi(\boldsymbol{x}) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, уравнение (4.35) имеет только нулевые непрерывные решения. Предположим теперь, что мы ввели набор вихрей, расположив их в точках $\{\boldsymbol{x}_a\}$, силы вихрей равны $\{q_a\}$. Это означает, что мы интегрируем по многозначным полям φ, меняющимся на $2\pi q_a$ при обходе вокруг точки $\boldsymbol{x}_a$. В этом секторе имеется нетривиальное классическое решение уравнения (4.35):

$$\varphi = \sum_{a=1}^{N} q_a \operatorname{Im} \log(z - z_a),$$
$$z = x_1 + ix_2. \tag{4.36}$$

На формулу (4.36) можно смотреть как на непрерывный предел классического решения, доставляющего минимум действия

$$S = \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}} u(\varphi_{\boldsymbol{x}} - \varphi_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta}}) \tag{4.37}$$

с любой периодической $u(\varphi)$,

$$u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi),$$
$$u(\varphi) \approx \frac{\beta}{2}\varphi^2, \quad \varphi \ll 1. \tag{4.38}$$

Вдали от сингулярности решение универсально и описывается формулой (4.36). Структура вблизи $\boldsymbol{x}_a$ («кор» вихря) зависит от конкретного вида u, но, к счастью, оказывается несущественной.

Подставляя (4.36) в (4.34), получаем:

$$S_{\mathrm{cl}} = \frac{\beta}{2}\Big\{\sum_{a\neq b} q_a q_b\, 2\pi \log \frac{R}{|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b|} + \mathrm{const} \sum_a q_a^2\Big\} \tag{4.39}$$

(R — размер системы; второй член описывает собственную энергию вихря). Замечая, что $(^1\!/_2\pi)\log(R/|\boldsymbol{x}|)$ — это как раз обратный лапласиан или двумерная кулоновская энергия, мы видим, что учет инстантонов в (4.22) приводит к непрерывному аналогу формулы (4.30). Мы видим также, что странные преобразования, нужные для вывода (4.30), служат простой цели — они учитывают вихри.

Однако в этом случае из-за «конфайнмента» вихрей они не приводят ни к каким качественным эффектам (при больших β). В следующем разделе мы рассмотрим ситуацию, в которой такие эффекты имеют место.

Упомянем еще, что происходит при $D = 3$. В этом случае вместо точечных сингулярностей имеются сингулярные линии. Поле φ претерпевает скачок на 2π при обходе вокруг вихревой линии. Вихревые линии несут энергию и непосредственно наблюдаются в ^{4}He.

В завершение этого раздела мы дадим непрерывное описание $O(2)$-системы. Она определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 + v(|\phi|^2), \tag{4.40}$$

причем, как объяснялось в главе 1, без потери общности можно считать, что

$$v(|\phi|^2) = \frac{\mu_0^4}{\lambda} - \mu_0^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}|\phi|^4. \tag{4.41}$$

Соотношение между этой теорией и моделью (4.21) такое же, как между квантовомеханической задачей с двумя ямами и $D = 1$ моделью Изинга. Их свойства на больших масштабах совпадают. Легче всего увидеть это, введя новые переменные:

$$\begin{gathered} \phi(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})e^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}, \\ S = \int \{(\partial_\mu u)^2 + v(u^2) + u^2(\partial_\mu \theta)^2\}\, d\boldsymbol{x}. \end{gathered} \tag{4.42}$$

Для малых значений λ имеем

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\lambda}}\left(1 + O\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_0}\right)\right), \tag{4.43}$$

и видно, что флуктуации модуля $u(\boldsymbol{x})$ малы и быстро затухают с расстоянием (они имеют массу μ_0). В то же время поле $\theta(\boldsymbol{x})$ остается безмассовым, и только оно вносит вклад на больших расстояниях. Полезно увидеть, как возникают вихревые вклады непосредственно из (4.40). Как и раньше, вихрь появляется как нетривиальный классический минимум действия (4.40). В двух измерениях уравнения выглядят так:

$$\partial^2\phi - \mu_0^2\phi + \lambda|\phi|^2\phi = 0 \tag{4.44}$$

или

$$\partial^2\phi_a - \mu_0^2\phi_a + \frac{\lambda}{2}\Big(\sum_1^2 \phi_b^2\Big)\phi_a = 0,$$

где $\phi_{1,2}$ — компоненты $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$.

Это уравнение обладает $O(2) \times O(2)$-инвариантностью: одна компонента $O(2)$ отвечает поворотам в пространстве $\boldsymbol{x}$, а другая — в пространстве ϕ. Будем искать решение, нарушающее эту $O(2) \times O(2)$-симметрию, но сохраняющее одну $O(2)$-инвариантность по отношению к одновременным поворотам пространств $\boldsymbol{x}$ и ϕ. Наиболее общий анзатц с таким свойством имеет вид

$$\begin{gathered} \phi_a = u(r)\frac{x_a}{r} \quad \text{или} \quad \phi = u(r)e^{i\varphi}, \\ r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(x_2/x_1). \end{gathered} \tag{4.45}$$

Из соображений симметрии он должен быть совместен с (4.44), и это подтверждается прямой подстановкой. Мы получаем уравнение на u:

$$u'' - \mu_0^2 u - \frac{2}{r^2}u + \lambda u^3 = 0. \tag{4.46}$$

Имеется решение уравнения (4.46), удовлетворяющее условиям

$$u(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad u(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0/\sqrt{\lambda}. \tag{4.47}$$

Причина существования и устойчивости такого решения состоит в следующем. Подстановка (4.45) в (4.42) дает

$$S = \int_0^\infty 2\pi r\, dr \left\{ \left(\frac{du}{dr}\right)^2 + v(u^2) + u^2/r^2 \right\}. \tag{4.48}$$

Чтобы избежать квадратичной расходимости действия на бесконечности, нужно положить $v\bigl(u^2(\infty)\bigr) = 0$, т. е. $u^2(\infty) = \mu_0^2/\lambda$. Далее, из-за последнего члена в действии желательно иметь $u(0) = 0$. Интерполяция между нулем и μ_0^2/λ не должна быть слишком резкой из-за первого члена в действии, но не может быть и слишком медленной из-за второго. Поэтому надо ожидать, что имеется единственная функция $u(r)$, отвечающая минимуму S. Можно строго показать, что дело обстоит именно так, но мы удовольствуемся этим эвристическим обсуждением.

Надо еще рассмотреть вопрос об устойчивости по отношению к вариациям фазы θ. Из (4.42) ясно, что, если бы удалось непрерывно деформировать $\theta(\boldsymbol{x})$ от $\theta(\boldsymbol{x}) = \varphi$ к $\theta(\boldsymbol{x}) = 0$, то действие (4.42) уменьшилось бы. Однако такая деформация невозможна. Из условия однозначности ϕ следует, что $\theta(\varphi)$ должна удовлетворять условию

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi q \tag{4.49}$$

с целым q. Решение (4.45) отвечает $q = 1$, и его нельзя непрерывно деформировать с сохранением однозначности ϕ к решению с $q = 0$.

Это гарантирует фазовую устойчивость решения (4.45). Отметим, что сходные топологические аргументы могли бы быть использованы для доказательства устойчивости кинка, обсуждавшегося в предыдущем разделе; можно убедиться также, что в случае комплексного поля кинковое решение неустойчиво, поскольку тогда кинк может быть деформирован в ничто непрерывным вращением фазы.

Действие для одиночного вихря логарифмически расходится на больших расстояниях из-за последнего члена в (4.48). Однако, если взять нейтральную суперпозицию вихрей и антивихрей, полное действие будет конечным, и в пределе, когда все относительные расстояния намного превышают μ_0^{-1}, оно совпадает с (4.39), где β следует заменить на $2\mu_0^2/\lambda$.

Наш вывод состоит в том, что в инфракрасном пределе имеется три эквивалентных описания $O(2)$-системы с помощью функционалов действия (4.21), (4.24) и (4.42).

Замечание 1. *Аналогия между $D = 1$ моделью Изинга и двухъямной квантовой механикой была впервые отмечена Ваксом и Ларкиным. Теория вихрей в плоском $O(2)$-магнетике и эффективное описание с помощью θ-функций было предложено В. Л. Березинским в его диссертации (1970) и переоткрыто Костерлицем и Таулессом.*

Замечание 2. *$O(2)$-модель возникает при решении нескольких физических задач. Прежде всего, по самому определению она описывает магнитные системы с $O(2)$-симметриями. Во-вторых, из-за того, что действие (4.40) является вторично квантованным гамильтонианом взаимодействующего бозе-газа, модель описывает двумерные пленки ^{4}He при ненулевой температуре (статистические свойства на больших расстояниях). Она также полезна для исследования двумерных кристаллов. Это происходит по следующей причине. Если обозначить через $u_\alpha(\boldsymbol{x})$ смещение атома, расположенного в точке $\boldsymbol{x}$ кристалла, то в инфракрасном пределе имеем (в соответствии с теорией упругости):*

$$E = \int \left\{ \frac{\mu}{4}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)^2 + \frac{\lambda}{2}(\partial_\lambda u_\lambda)^2 \right\} d^2x \tag{4.50}$$

(λ, μ — так называемые постоянные Ламé). Чтобы найти статическую сумму, надо вычислить интеграл

$$Z = \int \mathcal{D}u_\alpha(\boldsymbol{x})\, e^{-\beta E[u]}. \tag{4.51}$$

Это был бы простой гауссов интеграл, если бы поля были однозначными. Однако, подобно тому, как фазы $\{\varphi_{\boldsymbol{x}}\}$ были определены по модулю 2π, смещения $u_\alpha(\boldsymbol{x})$ определены по модулю решеточных векторов b_α, поскольку на решетке энергия должна быть периодической функцией смещений. Поэтому необходимо учесть скачки $u_\alpha(\boldsymbol{x})$. Если имеется ветвление в точке $\boldsymbol{x}_0$, а петля L окружает эту точку, то

$$\oint_L \partial_\beta u_\alpha(\boldsymbol{x})\, dx^\beta = b_\alpha. \tag{4.52}$$

Про такое поле $u_\alpha(\boldsymbol{x})$ говорят, что оно описывает дислокацию, расположенную в точке $\boldsymbol{x}_0$. Мы видим, что свойства дислокаций практически совпадают со свойствами вихрей. В частности, при некотором значении β происходит конденсация дислокаций, что может быть интерпретировано как плавление.

4.3. Компактная КЭД ($O(2)$-калибровочная модель)

В этом разделе мы исследуем абелевы калибровочные теории. Они нетривиальны, несмотря на то, что наивно в непрерывном пределе действие превращается в

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \int d^D\boldsymbol{x}\, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \tag{4.53}$$

и описывает свободные фотоны. Вся нетривиальность, как и в предыдущих разделах, связана с определенными угловыми свойствами векторного потенциала, которые заставляют учитывать аналоги вихрей и дислокаций в континуальном интеграле.

Прежде чем заняться этим, объясним, почему векторный потенциал следует считать угловой переменной.

A priori на решетке можно определить две разные модели. Первая модель совпадает с (1.49) и описывается действием

$$\begin{gathered} S = \frac{1}{2e_0^2} \sum_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} (1 - \cos F_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}), \\ F_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} = A_{\boldsymbol{x},\alpha} + A_{\boldsymbol{x}+\alpha,\beta} - A_{\boldsymbol{x}+\beta,\alpha} - A_{\boldsymbol{x},\beta}, \\ -\pi \leqslant A_{\boldsymbol{x},\alpha} < \pi. \end{gathered} \tag{4.54}$$

Вторая модель имеет вид

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \sum_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} F^2_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}; \quad -\infty < A_{\boldsymbol{x},\alpha} < +\infty. \tag{4.55}$$

В наивном непрерывном пределе оба действия превращаются в (4.53), но модели обладают разными физическими свойствами. Аналогично обстоит дело в квантовой механике с действием

$$S = \frac{1}{2} \int \dot{x}^2 \, dt. \tag{4.56}$$

Это действие может описывать свободную частицу на прямой или свободную частицу на окружности. В первом случае спектр непрерывный, а во втором — дискретный. Различие возникает из-за того, что в первом случае мы интегрируем по непрерывным $x(t)$, а во втором разрешены скачки на 2π.

Исходя из физических оснований нужно решить, какая из версий КЭД реализуется в природе. Основная причина, заставляющая нас верить в периодический (компактный) вариант КЭД, — это эмпирический факт квантования заряда. Известно, что отношение любых двух электрических зарядов — рациональное число. Покажем, что это необходимое следствие компактности КЭД, тогда как в некомпактном варианте это было бы необъяснимым чудом.

Качественные аргументы состоят в том, что, как мы видели в главе 3, электрический поток (являющийся аналогом углового момента) квантуется. Поскольку заряженные частицы служат источниками электрического потока, который, по теореме Гаусса, равен их зарядам, то разрешенные значения зарядов тоже квантованы.

Более явно, рассмотрим два заряженных поля, $\psi_{\boldsymbol{x}}$ с единичным зарядом и $\chi_{\boldsymbol{x}}$ с зарядом e. Лагранжиан этих полей имеет вид

$$\mathcal{L}' = \sum_{\boldsymbol{x},\delta} \left(\psi^\dagger_{\boldsymbol{x}+\delta} e^{iA_{\boldsymbol{x},\delta}} \psi_{\boldsymbol{x}} + \chi^\dagger_{\boldsymbol{x}+\delta} e^{ieA_{\boldsymbol{x},\delta}} \chi_{\boldsymbol{x}} \right) + \text{c. c.} \tag{4.57}$$

Форма (4.57) диктуется калибровочной инвариантностью

$$\begin{gathered} A_{\boldsymbol{x},\delta} \to A_{\boldsymbol{x},\delta} + \alpha_{\boldsymbol{x}+\delta} - \alpha_{\boldsymbol{x}}, \\ \psi_{\boldsymbol{x}} \to e^{i\alpha_{\boldsymbol{x}}} \psi_{\boldsymbol{x}}, \quad \chi_{\boldsymbol{x}} \to e^{ie\alpha_{\chi}} \psi_{\boldsymbol{x}}. \end{gathered} \tag{4.58}$$

Из (4.57) видно, что $\mathcal{L}'$ хорошо определен в нашем фазовом пространстве лишь при условии, что e целое: это необходимо для периодичности по $A_{\boldsymbol{x},\delta}$. Отметим также, что задание периода свободного действия (4.54) определяет естественную единицу заряда.

В некомпактной КЭД поток может принимать непрерывный ряд значений, и нет никаких причин для квантования заряда. Еще одно важное замечание о компактности состоит в том, что два указанных выше варианта существуют лишь в абелевом случае. Для любой неабелевой группы компактность или некомпактность связана со свойствами ее алгебры Ли. Например, для калибровочной группы $SU(2)$ вообще нельзя сформулировать некомпактную версию. Поэтому, когда КЭД возникает как подгруппа какой-то неабелевой калибровочной теории, она обязательно является компактной версией КЭД.

После этих объяснений займемся теорией компактной КЭД, начиная с $D = 3$. Следуя той же стратегии, что и в предыдущем разделе, рассмотрим статистическую сумму

$$Z = \sum_{\{n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}\}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\boldsymbol{x},\alpha} dA_{\boldsymbol{x},\alpha} \, \exp\Big\{ -\frac{1}{4e_0^2} \sum_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} (F_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} - 2\pi n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta})^2 \Big\}, \qquad (4.59)$$

в которой учтена периодичность действия. Для данного набора $\{n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}\}$ введем числа $q_{\boldsymbol{z}}$ ($\boldsymbol{z}$ относятся к центрам кубов решетки), определенные как потоки n через поверхности кубов $\sigma_{\boldsymbol{z}}$,

$$\oint_{\sigma_z} n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} = q_{\boldsymbol{z}}. \qquad (4.60)$$

(В левой части (4.60) подразумевается сумма $n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}$, отвечающих ориентированным плакетам, образующим куб с центром в $\boldsymbol{z}$. Непрерывным аналогом был бы интеграл поля $n_{\alpha\beta}$ по замкнутой поверхности.) Разлагая $n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}$ в сумму

$$\begin{aligned} n_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} &= m_{\boldsymbol{x},\alpha} + m_{\boldsymbol{x}+\alpha,\beta} - m_{\boldsymbol{x}+\beta,\alpha} - m_{\boldsymbol{x},\beta} + \\ &\quad + \lambda_{\boldsymbol{x},\alpha} + \lambda_{\boldsymbol{x}+\alpha,\beta} - \lambda_{\boldsymbol{x}+\beta,\alpha} - \lambda_{\boldsymbol{x},\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\phi_{\boldsymbol{z}} - \phi_{\boldsymbol{z}-\gamma}), \end{aligned} \qquad (4.61)$$

получим из (4.60)

$$\Delta_{zz'}\phi_{z'} = q_{z'} \qquad (4.62)$$

($\Delta_{zz'}$ — решеточный оператор Лапласа). Подстановка (4.61) и (4.62) в (4.59) дает

$$\begin{aligned} Z &= Z_{\text{Gauss}} \sum_{\{q_z\}} \exp\Big(-\frac{1}{4e_0^2} \sum_{z,z'} q_z \Delta^{-1}_{zz'} q_{z'} \, 8\pi^2 \Big), \\ Z_{\text{Gauss}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\boldsymbol{x},\alpha} dA_{\boldsymbol{x},\alpha} \, \exp\Big(-\frac{1}{4e_0^2} \sum_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} F^2_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} \Big). \end{aligned} \qquad (4.63)$$

Таким образом, мы получили ту же кулоновскую систему, что и в (4.30), но в трех измерениях. Как мы увидим ниже, это приводит к совсем другой физике. Прежде чем обсуждать эту физику, объясним смысл «зарядов», появившихся в (4.63). Их можно связать с инстантонными решениями для действия (4.54). В инфракрасном пределе классические уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}.\end{gathered} \tag{4.64}$$

У них нет никаких несингулярных решений, кроме $\boldsymbol{H} = 0$. Однако, как обычно, из-за того, что (4.64) получилось из периодического действия, можно разрешить $\boldsymbol{H}$ иметь δ-функциональные особенности силы $2\pi q$. Легко найти решение такого типа (оно аналогично (4.36)):

$$H_\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{2}\frac{x_\mu}{|\boldsymbol{x}|^3} - 2\pi q\delta_{\mu 3}\delta(x_1)\delta(x_2)\theta(x_3) \tag{4.65}$$

(θ — ступенчатая функция).

Это решение описывает магнитный заряд, помещенный в начало координат. Его магнитный поток, выражаемый первым слагаемым, компенсируется уходящим потоком вдоль третьей оси. В двух измерениях аналогом (4.65) было бы

$$A_\mu = \partial_\mu\varphi = q\varepsilon_{\mu\nu}(x_\nu/x^2) - 2\pi q\,\theta(x_2)\delta(x_1), \tag{4.66}$$

где второй член возникает из-за разрыва фазы. Из-за периодичности действия вторые слагаемые в (4.66) и (4.65) не дают вклада в физические величины. Поэтому общая инстантонная кофигурация в нашем случае является набором магнитных зарядов с кулоновским взаимодействием между ними и ее действие равно

$$S_{\text{INST}} = \frac{1}{4e_0^2}\sum_{a\neq b}\frac{q_a q_b\cdot 2\pi}{|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b|} + \frac{\text{const}}{e_0^2}\sum_a q_a^2. \tag{4.67}$$

Этот результат совпадает с (4.63), когда заряды удалены друг от друга. Покажем теперь, что разупорядочивающее влияние инстантонов приводит к конечной корреляционной длине (фотон становится массивным). Используем следующее функциональное представление для инстантонного вклада в Z:

$$
\begin{aligned}
& Z = Z_{\text{Gauss}} \cdot Z_{\text{INST}}, \\
Z_{\text{INST}} = & \sum_{N,\{q_a\}} \frac{\xi^N}{N!} \int \prod_{j=1}^{N} d\boldsymbol{x}_j \, \exp\Big(-\frac{\pi}{2e_0^2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b|}\Big) = \\
= & \int \mathcal{D}\chi(\boldsymbol{x}) \, \exp\left\{ -\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2 \int (\nabla\chi)^2 \right\} \times \\
& \times \sum_N \sum_{\{q_a\}}{}' \frac{\xi^N}{N!} \int d\boldsymbol{x}_1 \ldots d\boldsymbol{x}_N \, \exp\Big(i \sum_a q_a \chi(\boldsymbol{x}_a) \, d\boldsymbol{x}\Big) \approx \\
\approx & \int \mathcal{D}\chi(\boldsymbol{x}_a) \, \exp\left\{ -\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2 \int \left((\nabla\chi)^2 - M^2 \cos\chi\right) \, d\boldsymbol{x} \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Здесь

$$
\xi = e^{-\text{const}/e_0^2}, \qquad M^2 = \left(\frac{2\pi}{e_0}\right) \xi.
$$

В формуле (4.68) использовано общее свойство гауссовых интегралов

$$
\begin{aligned}
& \int \prod_i dx_i \, \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j + i \sum b_i x_i\Big) = \\
& \qquad = (\det A)^{-1/2} \exp\Big(-\sum_{i,j} A_{ij}^{-1} b_i b_j\Big).
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

Мы также ограничились значениями $q_a = \pm 1$. Последнее приближение будет оправдано, когда мы проверим, что при малых e^2 монополи находятся далеко друг от друга (подобно кинкам в разделе 4.1), и поэтому монополи с $|q| > 1$ стремятся диссоциировать на монополи с $|q| = 1$. Учет вкладов с $|q| > 1$ привел бы к возникновению членов $\sim \cos(q\chi)$ в (4.68). Континуальный интеграл (4.68) дает нам диаграммное разложение для плазмы монополей. Однако эффективная нелинейность в (4.68) экспоненциально мала, так как коэффициент g при χ^4 в (4.68) по порядку величины равен

$$
g \sim \left(\frac{M}{e_0}\right)^2 \sim e^{-\text{const}/e_0^2} \ll 1. \tag{4.70}
$$

Этот результат можно было предвидеть, так как он отвечает условию применимости дебаевского приближения или приближения среднего поля. Чтобы оно было справедливым, нужно, чтобы в дебаевском объеме

$M^{-3} \sim \exp(-3\text{const}/e_0^2)$ было много частиц, что позволило бы пренебречь флуктуациями суммы их индивидуальных полей. Но по формуле Больцмана плотность частиц равна

$$n \sim e^{-\text{const}/e_0^2}, \tag{4.71}$$

и критерий применимости приближения среднего поля гласит:

$$nM^{-3} \sim e^{\text{const}/e_0^2} \gg 1, \tag{4.72}$$

что совпадает с (4.70).

Вычислим теперь некоторые корреляционные функции. Будем интересоваться лишь калибровочно-инвариантными величинами. На промежуточном этапе удобно иметь выражение для производящего функционала зарядовой плотности плазмы. Повторяя вывод (4.68), найдем

$$\left\langle \exp\left(i\int \rho(\boldsymbol{x})\eta(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right)\right\rangle = \frac{Z[\eta(\boldsymbol{x})]}{Z[0]}, \tag{4.73}$$

где

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_a q_a \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a),\\ Z[\eta] = \int \mathcal{D}\chi\, \exp\Big\{-\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2 \int \left[(\nabla(\chi-\eta))^2 - M^2\cos\chi\right]\,d\boldsymbol{x}\Big\}.\end{gathered} \tag{4.74}$$

Проще всего в нашем случае вычислить корреляционные функции оператора

$$H_\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}. \tag{4.75}$$

На больших расстояниях это просто напряженность электромагнитного поля.

В квазиклассическом приближении $H_\mu(\boldsymbol{x})$ связано с зарядовой плотностью так:

$$\begin{aligned} H_\mu(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\int d^3y\,\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})_\mu}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\rho(\boldsymbol{y}),\\ H_\mu(\boldsymbol{k}) &= \frac{2\pi i k_\mu}{k^2}\rho(\boldsymbol{k}).\end{aligned} \tag{4.76}$$

Используя формулу (4.74), получаем

$$\begin{gathered}\langle\rho(\boldsymbol{k})\rho(-\boldsymbol{k})\rangle=\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2k^2-k^4\langle\chi(\boldsymbol{k})\chi(-\boldsymbol{k})\rangle\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^4,\\ \left(\frac{2\pi i}{e_0}\right)^N\langle\rho(\boldsymbol{k}_1)\dots\rho(\boldsymbol{k}_N)\rangle=\left(\prod_{j=1}^N k_j^2\right)\langle\chi(\boldsymbol{k}_1)\dots\chi(\boldsymbol{k}_N)\rangle.\end{gathered}\tag{4.77}$$

Теперь корреляционная функция поля H равна

$$\langle H_\mu(\boldsymbol{k})H_\nu(-\boldsymbol{k})\rangle=\langle H_\mu(\boldsymbol{k})H_\nu(-\boldsymbol{k})\rangle^{(0)}+(2\pi)^2\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}\langle\rho(\boldsymbol{k})\rho(-\boldsymbol{k})\rangle.\tag{4.78}$$

Первый член в (4.78) — свободная (т. е. в отсутствие монополей) функция Грина поля H. Она имеет вид

$$\langle H_\mu(\boldsymbol{k})H_\nu(-\boldsymbol{k})\rangle^{(0)}=e_0^2\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right).\tag{4.79}$$

Сингулярность при $\boldsymbol{k}=0$ означает, что фотон в этом приближении имеет нулевую массу. Используя (4.77) и предыдущее замечание о слабости связи поля χ, получаем

$$\langle\rho(\boldsymbol{k})\rho(-\boldsymbol{k})\rangle=\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2\left(k^2-\frac{k^4}{M^2+k^2}\right)=\left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2\frac{M^2k^2}{M^2+k^2}.\tag{4.80}$$

Из формул (4.78)–(4.80) находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{e_0^2}\langle H_\mu(\boldsymbol{k})H_\nu(-\boldsymbol{k})\rangle&=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}+\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\frac{M^2}{M^2+k^2}\\&=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{M^2+k^2}.\end{aligned}\tag{4.81}$$

Это значит, что в теории нет безмассовых частиц, а есть массивная скалярная частица с маленькой массой M. Аналогично получаем:

$$\begin{gathered}\langle H_{\mu_1}(\boldsymbol{k}_1)\dots H_{\mu_N}(\boldsymbol{k}_N)\rangle_{\text{conn}}=e_0^N k_{1\mu_1}\dots k_{N\mu_N}\prod_j\frac{1}{k_j^2+M^2}\\ \Bigl(\sum_j\boldsymbol{k}_j=0\Bigr).\end{gathered}\tag{4.82}$$

Качественно этот результат можно объяснить так. В нашей системе имеется конечная плотность псевдочастиц, взаимодействующих на больших расстояниях, и их случайные поля портят корреляционные свойства. Из разложения сильной связи мы знаем, что обратная корреляционная длина отлична от нуля и при $e_0^2 \gg 1$. Разумно предположить поэтому, что в данной системе нет фазового перехода, и режим конфайнмента сохраняется в пределе слабой связи. В следующей главе мы покажем, что это действительно так. Здесь же обсудим другие следствия наших результатов.

Прежде всего заметим, что коль скоро мы показали разупорядоченность (наличие массовой щели) для $O(2)$-системы при $D = 3$, это должно быть справедливым и для неабелевых систем. В самом деле, возьмем случай $SU(2)$ и ограничим $B_{\boldsymbol{x},\alpha}$ так, чтобы они лежали в $O(2) \subset SU(2)$. Следует ожидать, что такое ограничение только увеличивает упорядоченность системы, и что если даже при таком ограничении система разупорядочена, то при снятии ограничения беспорядок лишь возрастет, и массовая щель только увеличится. Нет никаких сомнений в справедливости этого утверждения, но строгое доказательство пока отсутствует.

При переходе к $D = 4$ описанная выше картина изменяется. Трехмерные кубы, помещенные в четырехмерное пространство, имеют четыре различные ориентации (по аналогии с тремя различными ориентациями квадратов в трехмерном пространстве). Следовательно, мы ожидаем, что числа q из (4.60) при $D = 4$ будут иметь значок α, указывающий направление: $q = q_{\boldsymbol{x},\alpha}$. Чтобы убедиться в этом, напишем разложение, аналогичное (4.61), для чисел $N_{\boldsymbol{x},\alpha\beta}$ в случае $D = 4$

$$N_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} = \partial_\alpha m_\beta - \partial_\beta m_\alpha + \partial_\alpha \lambda_\beta - \partial_\beta \lambda_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\gamma \phi_\delta. \tag{4.83}$$

Здесь мы обозначили решеточные производные через ∂_α, например,

$$\partial_\alpha m_\beta = m_{\boldsymbol{x},\beta} - m_{\boldsymbol{x}-\alpha,\beta}. \tag{4.84}$$

Взяв интеграл по поверхности куба ориентации γ, получаем вместо (4.62)

$$-\partial^2 \phi_\gamma + \partial_\gamma \partial_\delta \phi_\delta = q_\gamma. \tag{4.85}$$

Мы используем непрерывные обозначения, и надеемся, что после всех проведенных рассуждений они не введут в заблуждение. Формулы с явными решеточными обозначениями при $D = 4$ были бы очень громоздкими.

Из (4.85) видно, что q_γ подчиняются связи

$$\partial_\gamma q_\gamma = \sum_\gamma (q_{\boldsymbol{x},\gamma} - q_{\boldsymbol{x}-\gamma,\gamma)} = 0. \tag{4.86}$$

Инстантонный вклад в статистическую сумму имеет вид

$$Z_{\mathrm{INST}}^{D=4} = \sum_{\{q_{\boldsymbol{x},\gamma}:\partial_\gamma q_\gamma=0\}} \exp\Big(-\frac{1}{4e_0^2}\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} 2(2\pi)^2 q_{\boldsymbol{x},\gamma}\Delta^{-1}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} q_{\boldsymbol{x}',\gamma}\Big). \tag{4.87}$$

Объясним теперь смысл этих результатов, которые можно было предвидеть без явных вычислений. Инстантон при $D = 3$ описывался монопольным решением (4.65). Предположим, что мы добавили еще одно измерение («время»). Тогда это решение, которое было точечным при $D = 3$, при $D = 4$ становится линией (мировой линией точечного объекта). На решетке можно выбрать эту линию сколь угодно искривленной. Тогда для каждой формы линии будет получаться свое классическое решение, локально минимизирующее действие (4.54). Поскольку магнитный поток сохраняется, эти линии должны быть замкнутыми или бесконечными. Вклад в статистическую сумму выглядит как сумма по всевозможным линиям магнитного потока с кулоновским притяжением между ними. Количественное описание этой картины дается формулами (4.83), (4.86), (4.87).

Легко убедиться, что при больших e_0^{-2} эти линии потока оказывают пренебрежимо малое влияние на систему в инфракрасном пределе. Причина состоит в том, что линия длины L имеет действие $\sim L$, и ее вклад в (4.87) имеет порядок

$$Z_L^{(1)} \sim e^{-cL/e_0^2}(c')^L. \tag{4.88}$$

(Здесь $(c')^L$ — число петель длины L). Мы приходим к выводу, что для достаточно больших e_0^{-2} магнитные петли короткие, и разупорядочения системы не происходит; в этом случае она состоит из свободных безмассовых фотонов. Однако имеется критическое значение e_{c}^2, при котором происходит конденсация магнитных линий. Следует думать, что при $e_0^2 > e_{\mathrm{c}}^2$ мы попадаем в фазу сильной связи с конфайнментом зарядов, тогда как при $e_0^2 < e_{\mathrm{c}}^2$ мы живем в фотонной фазе.

Описанная выше картина может быть понята еще одним способом. Магнитные монополи, которые были инстантонами при $D = 3$, становятся частицами при $D = 4$, являясь минимумами потенциальной энергии для гамильтониана (3.34). Это будет подробно обсуждаться в главе 6. Сейчас достаточно понять, что всякое не зависящее от времени классическое решение конечной энергии (солитон) в пределе слабой связи описывает стабильную частицу. При переходе к $D = 4$ то, что было действием при $D = 3$, становится энергией.

Замкнутые петли, которые мы рассматривали выше, являются мировыми линиями пар монополь–антимонополь. Мы видим, что при некотором значении заряда вакуум наполняется конденсатом монополей.

Такая среда связывает электрические заряды, что можно увидеть из следующей физической аналогии. Возьмем сверхпроводник, в основном состоянии которого имеется конденсат электрически заряженных полей (куперовских пар). Известно, что внешнее магнитное поле может проникать внутрь сверхпроводника только за счет образования нитей, несущих квантованный магнитный поток. Если вообразить два магнитных заряда, помещенных в сверхпроводник, то из уравнений Гинзбурга–Ландау будет следовать, что их магнитные потоки заключены внутри такой нити, натянутой между ними. Энергия взаимодействия будет пропорциональна расстоянию между зарядами. Если поменять местами в этом описании слова «электрический» и «магнитный», то получится, что два электрических заряда в среде, заполненной конденсатом монополей, связаны, т. е. имеется конфайнмент.

Может ли существовать абелева теория с конфайнментом даже при $D = 4$ при всех значениях заряда? Мы видим, что этот вопрос эквивалентен нахождению системы с точечными инстантонами, имеющими конечное действие. Нетрудно привести пример такой системы. Рассмотрим «калибровочное поле третьего ранга», именно, рассмотрим в качестве первичных переменных не векторные потенциалы $A_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}$, а тензоры $F_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha\beta}}$, сопоставляемые плакетам. Образуем напряженности полей, отвечающие кубам

$$\phi_{\boldsymbol{\alpha}} = \varepsilon_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta}} \partial_{\boldsymbol{\beta}} F_{\boldsymbol{\gamma\delta}}, \tag{4.89}$$

и рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{e_0^2} \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}} (1 - \cos \phi_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}}). \tag{4.90}$$

Буквальное повторение приведенных выше рассуждений приведет к следующему выражению для инстантонной части статистической суммы:

$$Z_{\mathrm{INST}}^{D=4} = \sum_{\{q_x\}} \exp\Big(-\frac{1}{2e_0^2}\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'} q_{\boldsymbol{x}}\Delta^{-1}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}q_{\boldsymbol{x}'}(2\pi)^2\Big). \tag{4.91}$$

В этом случае имеется $D = 4$ плазма точечных инстантонов. Из-за дебаевского экранирования возникает массовая щель.

Следуя традиции предыдущих разделов, поясним, как обсуждавшиеся системы выглядят в непрерывной формулировке. Как уже говорилось, компактная КЭД может быть получена из неабелевой калибровочной теории. Для примера рассмотрим $SU(2)$ теорию, содержащую три калибровочных бозона, и нарушим $SU(2)$ так, чтобы два из этих бозонов стали массивными. Это так называемая модель Джорджи–Глэшоу объединения слабых и электромагнитных взаимодействий. Во всех более сложных моделях объединения возникает та же схема, что и здесь. Действие равно

$$S = \int d\boldsymbol{x}\left\{\frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu_0^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}(\varphi^2)^2 + \frac{1}{4e^2}(\boldsymbol{F}_{\mu\nu})^2\right\}, \tag{4.92}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — триплет изотопических векторных полей, $\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu + \boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu$ — напряженность поля Янга–Миллса, $\nabla_\mu\varphi = \partial_\mu + \boldsymbol{A}_\mu \times \varphi$. Если рассмотреть разложение полей вблизи абсолютного минимума потенциальной энергии, $\varphi_{1,2} = 0$, $\varphi_3 = \mu_0/\sqrt{\lambda}$, получится такой состав частиц: тяжелые заряженные $W^\pm$ бозоны

$$W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2)/\sqrt{2} \tag{4.93}$$

с массами $m_W^2 = e^2\mu_0^2/\lambda$, скалярное поле $\sigma = \varphi_3 - \mu_0/\sqrt{\lambda}$ с массой $m_\sigma^2 = 2\mu_0^2$ и электромагнитное поле A_μ^3, которое остается безмассовым. В инфракрасном пределе эта теория описывает свободные фотоны. Все тяжелые поля могут рассматриваться в этом пределе как регуляторы для этой фотонной теории, заменяющие решеточную регуляризацию. То, что таким способом получается компактная версия теории фотонов, проявляется в существовании нетривиальных инстантонов для действия (4.92). Они имеют вид (для $D = 3$)

$$A_\mu^a = a(r)\varepsilon_{\mu ab}\frac{X_b}{r},$$

$$\varphi^a = u(r)\frac{x_a}{r},$$

с

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = \mu_0/\sqrt{\lambda},$$

$$a(0) = 0, \quad a(r) \sim -1/r, \quad r \to \infty.$$

Анализ, который будет приведен в главе 6, показывает, что это решение имеет конечное действие и описывает магнитный заряд. Сейчас достаточно заметить, что $A^a_\mu \sim 1/r$ и $F^a_{\mu\nu} \sim 1/r^2$ при $r \to \infty$, и потому взаимодействие двух подобных объектов $\int F^2_{\mu\nu} d^3x \sim r^3/r^4 \sim 1/r$ имеет вид кулоновского потенциала. Таким образом, весь наш анализ компактной электродинамики в трех измерениях прекрасно работает для модели Джорджи–Глэшоу. В частности, в режиме слабой связи в этой модели происходит конфайнмент электрических зарядов линейным потенциалом при $D = 3$, а при $D = 4$ остается обычный закон Кулона для электрических сил.

Было бы очень интересно построить непрерывную формулировку компактной теории с тензорами третьего ранга. К сожалению, она неизвестна, главным образом из-за того, что в этом случае трудно найти непрерывное неабелево обобщение теории.

Глава 5
Конфайнмент кварков, сверхтекучесть, упругость. Критерии и аналогии

В предыдущей главе мы, в основном, интересовались влиянием инстантонов на массовую щель. Здесь мы приведем более прямые критерии конфайнмента, вычислив электрическую силу между зарядами и диэлектрическую проницаемость вакуума. Мы обсудим также аналогии с некоторыми явлениями в физике твердого тела.

Начнем с общего выражения для статического потенциала, применимого и в абелевом и в неабелевом случае. Основная идея состоит в следующем. В главе 3 мы видели, что собственные состояния гамильтониана могут быть разделены на секторы, содержащие статические заряды в точках $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ с цветовыми спинами (в качестве примера рассматриваем группу $SU(2)$) $I_1, \ldots, I_N$. Мы покажем теперь, как выразить статистическую сумму

$$Z(I_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, I_N, \boldsymbol{x}_N) = \sum_n e^{-\beta E_n(I_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, I_N, \boldsymbol{x}_N)} \tag{5.1}$$

через континуальный интеграл. Здесь $E_n(I_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, I_N, \boldsymbol{x}_N)$ — энергетические уровни в соответствующем секторе, а β — обратная физическая температура (а не обратная константа связи). Нам кажется удобным начать с ненулевой температуры и по физическим и по техническим причинам. Статический потенциал (зависящий от β) определяется как разность свободных энергий в данном секторе и в вакуумном секторе

$$e^{-\beta V(I_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, I_N, \boldsymbol{x}_N; \beta)} = \frac{Z(I_1, \boldsymbol{x}_1, \ldots, I_N, \boldsymbol{x}_N)}{Z_0}. \tag{5.2}$$

Нашей первой целью будет выразить эту величину через континуальный интеграл по калибровочным полям. Вывод основан на следующей квантовомеханической формуле:

$$\begin{aligned} Z(\tilde{x}, x, \beta) &\equiv \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n(\tilde{x}) \psi_n^*(x) = \\ &= \int_{\substack{x(0)=x \\ x(\beta)=\tilde{x}}} \mathcal{D}x(t) \exp\left\{ -\int_0^\beta d\tau\, (\dot{x}^2 + v(x)) \right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Обобщение ее на калибровочную систему выглядит так:[1]

$$Z(\{\tilde{A}_\mu\}|\{A_\mu\}) \equiv \sum_n e^{-\beta E_n} \Psi_n(\{\tilde{A}_\mu(\boldsymbol{x})\})\Psi_n^*(\{A_\mu(\boldsymbol{x})\}) =$$

$$= \int_{\substack{A_\mu(\boldsymbol{x},0)=A_\mu(\boldsymbol{x}) \\ A_\mu(\boldsymbol{x},\beta)=\tilde{A}_\mu(\boldsymbol{x})}} \mathcal{D}A_\mu(\boldsymbol{x},\tau)\, \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int \mathrm{Tr}(\dot{A}_\mu^2 + F_{\mu\nu}^2)\, d^3x\right\}. \tag{5.4}$$

Здесь точками обозначены производные по времени, индексы относятся к пространственным направлениям, $F_{\mu\nu}$ — магнитная часть напряженности Янга–Миллса, и в сумму включены все состояния системы. Вычислим сначала статистическую сумму, отвечающую вакуумному сектору. Чтобы выделить его вклад из (5.4), используем следующее замечание. В соответствии с (3.37)

$$\Psi_n(A^\Omega) = \Psi_n(A) \quad (A_\mu^\Omega = \Omega^{-1}A_\mu\Omega + \Omega^{-1}\partial_\mu\Omega)$$

для вакуумного сектора и

$$\Psi_n(A^\Omega) = \prod_j \mathcal{D}^{I_j}\,(\Omega(\boldsymbol{x}_j))\,\Psi_n(A) \tag{5.5}$$

для сектора со статическими зарядами в точках $\{\boldsymbol{x}_j\}$ (здесь $\mathcal{D}$ — матрица представления для группы $SU(2)$). Функции $\mathcal{D}$ обладают следующим свойством:

$$\int d\Omega\, \mathcal{D}^I(\Omega) = 0 \quad \text{для} \quad I \neq 0 \tag{5.6}$$

(интеграл берется по групповой мере для $SU(2)$). Используя (5.5) и (5.6), заключаем, что

$$\begin{aligned} Z_0 = \sum_{\substack{n\in\text{вакуумному}\\ \text{сектору}}} e^{-\beta E_n} &= \int \mathcal{D}\Omega(\boldsymbol{x}) \int \mathcal{D}A_\mu(\boldsymbol{x})\, Z(\{A_\mu^\Omega\}|\{A_\mu\}) = \\ &= \int \mathcal{D}\Omega(\boldsymbol{x}) \int_{A_\mu(\boldsymbol{x},\,\beta)=A_\mu^\Omega(\boldsymbol{x},0)} \mathcal{D}A_\mu(\boldsymbol{x},\,\tau)\, \times \\ &\qquad \times \exp\left\{-\,\mathrm{Tr}\int_0^\beta \int (\dot{A}_\mu^2 + F_{\mu m}^2)\, d\boldsymbol{x}\, d\tau\right\} \equiv \\ &\equiv \int \mathcal{D}\Omega(\boldsymbol{x})\, Z[\Omega(\boldsymbol{x})]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

[1] Выбрана калибровка $A_0(x) = 0$.

Мы видим, что для выделения калибровочно-инвариантных состояний (вакуумного сектора) надо интегрировать по калибровочным полям, подкрученным на калибровочное преобразование Ω. Полное Z определяется интегралом по строго периодическим A_μ .

Чтобы выделить вклад сектора с определенным числом статических зарядов, нужно рассмотреть интеграл

$$Z(I_1, \boldsymbol{x}_1, \dots, I_N, \boldsymbol{x}_N) = \int \mathcal{D}\Omega(\boldsymbol{x})\, \chi_{I_1}(\Omega(\boldsymbol{x}_1)) \dots \chi_{I_N}(\Omega(\boldsymbol{x}_N)) Z[\Omega(\boldsymbol{x})], \tag{5.8}$$

где $\chi_I(\Omega)$ — характер представления спина I,

$$\chi_I(\Omega) = \sum_{m=-I}^{+I} \mathcal{D}^I_{mm}(\Omega). \tag{5.9}$$

Эту формулу легко проверить с помощью закона преобразования (3.51) и стандартных условий ортонормальности для матрицы представления $\mathcal{D}^I$. Для любой другой группы G формула остается такой же, только I надо заменить на набор чисел, определяющий представление.

Окончательно получаем

$$e^{-\beta V(I_1, \boldsymbol{x}_1, \dots, I_N, \boldsymbol{x}_N; \beta)} = \langle \chi_{I_1}(\Omega(\boldsymbol{x}_1)) \dots \chi_{I_N}(\Omega(\boldsymbol{x}_N)) \rangle, \tag{5.10}$$

причем усреднение производится с помощью «подкрученной» статистической суммы $Z[\Omega]$ в качестве веса. Из этого представления вытекает, что одиночный статический заряд I будет иметь бесконечную энергию, если

$$\langle \chi_I(\Omega(\boldsymbol{x})) \rangle = 0. \tag{5.11}$$

Линейный потенциал между двумя зарядами соответствует

$$\langle \chi_I(\Omega(\boldsymbol{x}_1)) \chi_I(\Omega(\boldsymbol{x}_2)) \rangle \underset{x_{12}\to\infty}{\longrightarrow} e^{-c|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}. \tag{5.12}$$

Покажем теперь, что в калибровочных системах есть симметрия, которая, если она не нарушена, ведет к условию (5.11) для полуцелых I, и, следовательно, к конфайнменту зарядов. Это симметрия описывается центром калибровочной группы. В случае $SU(2)$ центр состоит из элемента $-\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ — единичная матрица), а в случае $SU(N)$ — из элементов $e^{2\pi i n/N}\boldsymbol{I}$. Умножение на центральный элемент порождает в случае $SU(2)$ отражение $\Omega \to -\Omega$, а в случае $SU(N)$ — преобразования

$$\Omega \to e^{2\pi \mathrm{i}/N}\Omega. \tag{5.13}$$

Из определения $Z[\Omega]$,

$$\begin{gathered} Z[\Omega] = \int \mathcal{D}A_\mu(\boldsymbol{x},\,\tau)\exp(-S(A_\mu)), \\ A_\mu(\boldsymbol{x},\,\beta) = \Omega^{-1}A_\mu(\boldsymbol{x},\,0)\Omega + \Omega^{-1}\partial_\mu\Omega, \end{gathered} \tag{5.14}$$

видно, что $Z[\Omega]$ действительно инвариантно относительно описанных преобразований. В то же время (для $SU(2)$)

$$\begin{aligned} \chi_I(-\Omega) &= \chi_I(\Omega), && I \text{ – целое}, \\ \chi_I(-\Omega) &= -\chi_I(\Omega), && I \text{ – полуцелое}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Мы приходим к выводу, что при ненарушенной симметрии формула (5.11) справедлива для полуцелых I, и нет никаких причин для выполнения этого же соотношения при целых I. Мы уже встречались с такой ситуацией в главе 3 и объяснили ее экранированием целых спинов I глюонами с $I = 1$.

Полуцелые спины не могут быть экранированы, если симметрия $\Omega \to -\Omega$ не нарушена. Но в фазе с нарушенной симметрией они тоже экранируются, и $\langle\chi_I\rangle \neq 0$. Вопрос о том, какая фаза реализуется в теории, — это вопрос конкретной динамики.

Ниже мы увидим, как этот вопрос решается в случаях, разбиравшихся в предыдущих главах. Но прежде приведем другой критерий конфайнмента, который иногда бывает удобнее. Он применим, однако, только при нулевой температуре.

Рассмотрим замкнутую петлю C и свяжем с нею фазовый множитель

$$\Psi(C) = \mathrm{P}\exp\oint_C A_\mu\,dx^\mu. \tag{5.16}$$

Здесь $\mathrm{P}\exp$ обозначает упорядоченную экспоненту

$$\mathrm{P}\exp\oint_C A_\mu\,dx^\mu = \lim_{\Delta x_j\to 0}\prod_j (1 + A_\mu(x_j)\Delta x_j^\mu) \tag{5.17}$$

(напомним, что A_μ — матрица, лежащая в алгебре Ли нашей группы, и сомножители в (5.17) не коммутируют друг с другом). Свойства калибровочных систем могут быть охарактеризованы поведением корреляционной функции

$$W_I(C) = \langle 0|\chi_I(\Psi(C))|0\rangle. \tag{5.18}$$

Покажем, что в случае, когда

$$W_I(C) \to \exp(-\mathrm{const}\mathcal{A}_{\min}(C)) \tag{5.19}$$

($\mathcal{A}_{\min}(C)$ — минимальная площадь поверхности, натянутой на C) для достаточно больших петель, статический потенциал между зарядами линеен. Для доказательства рассмотрим прямоугольник в плоскости x^3, t и выберем калибровку $A_0 = 0$. Тогда имеем

$$W_I(C_{RT}) = \langle 0|\chi_I \left(\mathrm{P}\exp\int\limits_R^0 A_3(x^3,T)\,dx^3 \cdot \mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3(x^3,0)\,dx^3\right)|0\rangle =$$

$$= \langle 0|\mathcal{D}^I_{mm'}\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_R^0 A_3(x^3,T)\,dx^3\right)\mathcal{D}^I_{m'm}\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3(x^3,0)\,dx^3\right)|0\rangle =$$

$$= \langle 0|\mathcal{D}^I_{mm'}\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_R^0 A_3(x^3,0)\,dx^3\right)e^{-\hat{\mathcal{H}}T} \times$$

$$\times\, \mathcal{D}^I_{m'm}\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3(x^3,0)\,dx^3\right)|0\rangle = \sum_{n,m,m'} \left|\left(f^I_{m'm}\right)_{n,0}\right|^2 e^{-E_nT},$$

где

$$\left(f^I_{m'm}\right)_{n,0} = \langle n|\mathcal{D}^I_{m'm}\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3(x^3,0)\,dx^3\right)|0\rangle. \tag{5.20}$$

Был использован стандартный прием суммирования по полному набору состояний; через $\hat{\mathcal{H}}$ обозначен гамильтониан системы. Критическую роль в этом вычислении играет то, что вакуум $|0\rangle$ принадлежит калибровочно-инвариантному сектору, а состояния $|n\rangle$ — сектору с двумя статическими зарядами, несущими цветовые спины I. Это происходит из-за того, что P-экспонента в (5.20) не калибровочно-инвариантна, а преобразуется как

$$\mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3^\Omega\,dx^3 = \Omega^{-1}(0)\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3\,dx^3\right)\Omega(R). \tag{5.21}$$

Поэтому состояния

$$|\Psi\rangle = \mathcal{D}^I_{m'm}\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^R A_3\,dx^3\right)|0\rangle$$

преобразуются по правилу, которое согласно (3.51) отвечает сектору с двумя зарядами.

Переходя в (5.20) к пределу $T \to \infty$, находим

$$W_I(C_{RT}) \underset{T\to\infty}{\to} e^{-E_0^{(I)}(R)T}, \tag{5.22}$$

где $E_0^{(I)}(R)$ — минимальная энергия в двухзарядном секторе. Отсюда видно, что «закон площадей» (5.19) отвечает

$$E_0^{(I)}(R) \sim R. \tag{5.23}$$

На основе всего изложенного мы ожидаем, что закон площадей будет справедлив в фазе конфайнмента для полуцелых I, тогда как для целых I закон убывания $W_I(C)$ будет гораздо медленнее. Интуитивно этот критерий можно понять так. Возьмем заряд I и пронесем его вдоль замкнутой петли C в пространстве-времени. Амплитуда, отвечающая такому процессу, равна $W_I(C)$. С другой стороны, эту петлю можно интерпретировать как образование пары кварк-антикварк, распространение ее в течение длительного времени T и аннигиляцию пары. Зависимость этой амплитуды от T должна определяться множителем $\exp\{-iE(R)(-iT)\} = \exp(-E(R)T)$, где $E(R)$ — энергия взаимодействия пары, а $(-iT)$ — время ее существования. Отсюда мы снова получаем (5.22).

Проверим теперь, имеет ли место конфайнмент в моделях, которые мы описали в предыдущей главе, и вычислим силу, связывающую заряды. Мы покажем, что инстантонные вклады в фазовый множитель в случае $O(2)$-калибровочной теории при $D = 3$ приводят к закону площадей.

Это очень простое вычисление, так как

$$F(C) = \left\langle \exp\left(i\oint_{\partial S} A^3_\mu\,dx^\mu\right)\right\rangle \approx \left\langle \exp\left(i\int_S H_\mu\,dS^\mu\right)\right\rangle, \tag{5.24}$$

и мы знаем из (4.76), что этот коррелятор равен

$$F(C) = \left\langle \exp\left(i\int \eta(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right)\right\rangle, \tag{5.25}$$

где

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int_S d\mathbf{S}_y\,\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}.$$

Поскольку поле $\eta(\boldsymbol{x})$ достаточно сильное, нельзя пренебречь нелинейностями в (4.74). Поэтому правильнее записать $F(C)$ в виде

$$F(C) = \exp\left\{-\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \int \left[(\nabla(\chi_{\mathrm{cl}}-\eta))^2 - M^2\cos\chi_{\mathrm{cl}}\right] d^3\boldsymbol{x}\right\}, \qquad (5.26)$$

где χ_{cl} определяется из нелинейного уравнения Дебая

$$2\nabla^2(\chi_{\mathrm{cl}}-\eta) = M^2\sin\chi_{\mathrm{cl}}. \qquad (5.27)$$

Флуктуационные поправки к этой формуле экспоненциально малы.

Предположим, что контур C расположен в плоскости xy. Тогда уравнение (5.27) принимает вид

$$\nabla^2\chi_{\mathrm{cl}} = 2\pi\delta^1(z)\theta_S(x,y) + \frac{1}{2}M^2\sin\chi_{\mathrm{cl}},$$
$$\theta_S(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x,y\in S; \\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \qquad (5.28)$$

Вдали от контура уравнение (5.28) становится, в сущности, одномерным (χ_{cl} зависит только от z), и у него есть решение

$$\chi_{\mathrm{cl}}(z) = \begin{cases} 4\,\mathrm{arctg}(e^{-Mz}), & z>0; \\ -4\,\mathrm{arctg}(e^{Mz}), & z<0.\end{cases} \qquad (5.29)$$

Подставляя (5.29) в (5.26), получаем

$$F(C) = e^{-\gamma S}, \quad E(R) = \gamma R,$$
$$\gamma = \left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2 M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\,((\chi''_{\mathrm{cl}}-\eta'')(x-y) + M^2\cos\chi_{\mathrm{cl}}(y)). \qquad (5.30)$$

Этот результат (5.30) показывает, что между двумя фиксированными зарядами натянута электрическая струна с плотностью энергии γ.

Сделаем теперь несколько замечаний. Во-первых, полезно понять полученные результаты с помощью специальной диаграммной техники. А именно, можно написать

$$\langle H_\mu(\boldsymbol{x})H_\nu(\boldsymbol{y})\rangle = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \ldots . \tag{5.31}$$

Здесь коррелятор свободных полей H обозначен сплошной линией, псевдочастицы — светлыми кружками, а кулоновское взаимодействие псевдочастиц — пунктирными линиями. Можно нарисовать более сложные диаграммы, содержащие сплошные и пунктирные линии, но все их вклады малы для малых импульсов и зарядов.

Из (5.31) и (4.78) видна критическая разница между вкладами псевдочастиц и инстантонов в корреляционные функции. Инстантонные вклады поперечные, а псевдочастичные — продольные, поскольку величина $\partial_\mu H_\mu$ измеряет плотность топологического заряда. Существование двух этих вкладов делает возможным сокращение сингулярностей при нулевом импульсе.

Мы показали, что потенциал между двумя зарядами растет линейно. Понятно,что в нашей теории должен существовать бесконечный набор резонансов, и хочется найти их спектр прямо из корреляционных функций операторов высших спинов. К сожалению, в нашем приближении эти корреляционные функции содержат только пороги, связанные со скалярными частицами, и резонансы появляются лишь в старших порядках, так что проблема резонансов остается нерешенной даже в этой модели.

Интересное свойство наших формул состоит в том, что они описывают конфайнмент полуцелых зарядов, для которых справедливо условие квантования Дирака

$$e_0 \cdot g = 2\pi$$

(здесь g — минимальный заряд магнитного монополя). Если удвоить заряд пробных частиц, то, как легко проверить, вклад монополей в $\exp\{i \int H_\mu \, dS^\mu\}$ становится пренебрежимо мал, и удержания таких зарядов не происходит. С точки зрения модели Джорджи–Глэшоу, описанной в главе 4, это очень естественно, поскольку целые заряды могут экранироваться $W^\pm$ бозонами, что невозможно для полуцелых зарядов. Однако в случае решеточной $O(2)$-модели это заключение довольно неожиданно. Таким образом, мы доказали ожидавшийся ранее конфайнмент полуцелых зарядов в калибровочных $O(2)$-теориях при $D = 3$. При $D = 4$ это уже не так для $e_0^2 \ll 1$, поскольку короткие инстантонные петли дают малый вклад в фазовые множители. Это легко проверить с помощью аналогичных вычислений.

Опишем теперь еще один подход к конфайнменту, который представляет определенный интерес из-за аналогий с физикой твердого тела. Именно, покажем, что в фазе конфайнмента диэлектрическая постоянная¿диэлектрическая проницаемость вакуума равна нулю. Чтобы ввести эту величину для абелевых систем, рассмотрим антисимметричное внешнее поле $f_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$, взаимодействующее с нашей системой следующим образом:

$$\exp(-W[f_{\mu\nu}]) = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{-S[F_{\mu\nu}+f_{\mu\nu}]} \tag{5.32}$$

(здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; мы пользуемся непрерывными обозначениями, хотя имеем в виду решеточную полевую модель). Из этого определения ясно, что $W[f]$ инвариантно по отношению к калибровочным преобразованиям «третьего ранга»

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu} + \partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu, \tag{5.33}$$

так как в (5.32) их можно скомпенсировать сдвигом $A_\mu \to A_\mu + \lambda_\mu$. Поэтому W должно зависеть от тензоров $f_{\mu\nu}$ только через

$$\phi_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} + \partial_\lambda f_{\mu\nu}. \tag{5.34}$$

На первый взгляд, отсюда следует, что постоянное внешнее поле $f_{\mu\nu}$ не оказывает влияния на систему. Это действительно так, если мы находимся в фазе с конечной корреляционной длиной. Однако в присутствии безмассовых фотонов для постоянного $f_{\mu\nu}$ имеем (пренебрегая для начала инстантонными эффектами)

$$\begin{gathered} e^{-W[f]} = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(-\frac{1}{e_0^2}\int F_{\mu\nu}^2\, d\boldsymbol{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{e_0^2}\int f_{\mu\nu}^2\, d\boldsymbol{x}\right) \\ W[f] - W[0] = \frac{1}{e_0^2}\int f_{\mu\nu}^2\, d\boldsymbol{x} \end{gathered} \tag{5.35}$$

(так как $\int F_{\mu\nu} f_{\mu\nu}\, d\boldsymbol{x} = f_{\mu\nu}\int F_{\mu\nu}\, d\boldsymbol{x} = 0$). Учитывая слабые (при $D = 4$) инстантонные эффекты, получим

$$W[f] - W[0] = \frac{\kappa(e_0^2)}{e_0^2}\int f_{\mu\nu}^2\, d\boldsymbol{x}, \tag{5.36}$$

где κ — некоторая постоянная, которую естественно интерпретировать как диэлектрическую постоянную вакуума. Очевидное противоречие между (5.34) и (5.36) легко разрешается, если заметить, что из-за безмассовости фотона в эффективном действии могут появляться члены типа $\int \phi_{\mu\nu\lambda}\partial^{-2}\phi_{\mu\nu\lambda}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}'$ (где ∂^{-2} — обратный лапласиан). Такие члены не обращаются в нуль при постоянном $f_{\mu\nu}$ и приводят к результату (5.36). Заметим, что постоянное поле $f_{\mu\nu}$ можно устранить преобразованием

$$A_\mu \to A_\mu + f_{\mu\nu}x^\nu, \tag{5.37}$$

которое изменяет граничное условие, которое до преобразования имело вид $A_\mu|_{\mathrm{inf}} = 0$. Если в системе имеются длинномасштабные корреляции, такое изменение граничных условий сказывается на статистической сумме, которая приобретает зависимость от $f_{\mu\nu}$. Как мы знаем, при $e_0^2 > e_{0\,\mathrm{cr}}^2$ в $D = 4$ появляется массовая щель, что отвечает фазе конфайнмента. Из приведенных аргументов следует, что в этой точке диэлектрическая постоянная κ обращается в нуль и остается нулевой во всей области конфайнмента:

$$\kappa(e_0^2) = 0 \qquad \text{для} \qquad e_0^2 > e_{0\,\mathrm{cr}}^2. \tag{5.38}$$

В случае $D = 3$ проницаемость κ равна нулю при любых значениях константы связи. Из этого мы заключаем, что отклик на однородное внешнее антисимметричное поле, описываемый диэлектрической постоянной, может служить критерием конфайнмента:

$$\kappa = \begin{cases} \mathrm{const} & \text{в кулоновской фазе;} \\ 0 & \text{в фазе конфайнмента.} \end{cases} \tag{5.39}$$

Имеется интересная аналогия между κ в калибровочной системе и определенными величинами в системах с глобальными симметриями. Рассмотрим отклик системы с глобальной $O(2)$-симметрией на внешнее векторное поле v_μ:

$$e^{-W[v_\mu]} = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S[\partial_\mu\varphi + v_\mu]}. \tag{5.40}$$

$W[v_\mu]$ тоже калибровочно-инвариантно,

$$W[v_\mu + \partial_\mu\lambda] = W[v_\mu]. \tag{5.41}$$

Если пренебречь вихрями, то для постоянного v_μ имеем

$$W = \frac{\beta}{2}\rho_S(\beta)\int \boldsymbol{v}^2\, d\boldsymbol{x} \tag{5.42}$$

с какой-то функцией $\rho_S(\beta)$. Постоянное поле v_μ может быть устранено преобразованием

$$\varphi \to \varphi + v_\mu x^\mu, \tag{5.43}$$

но тогда изменятся граничные условия. Формула (5.42) не противоречит калибровочной инвариантности, поскольку из-за наличия в системе безмассовых возбуждений $v_\mu(\boldsymbol{x})$ появляется в комбинациях типа

$$W \sim \int v_\mu \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2}\right) v_\mu \, d\boldsymbol{x}. \tag{5.44}$$

После фазового перехода, когда в системе появляется корреляционная длина, должно быть

$$\rho_S(\beta) = 0 \quad \text{для} \quad \beta < \beta_{\text{cr}}. \tag{5.45}$$

Аналогия между ρ_S и κ очевидна. Интересно, что в случае, когда наша $O(2)$-система применяется для описания ^{4}He, функция $\rho_S(\beta)$ интерпретируется как сверхтекучая плотность. Поэтому нормальная фаза ^{4}He соответствует фазе конфайнмента в калибровочной системе, а сверхтекучая фаза — кулоновской фазе. Покажем теперь, что ρ_S действительно имеет смысл сверхтекучей плотности. Для этого рассмотрим вторично-квантованный гамильтониан, описывающий бозе-жидкость:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \left(\frac{1}{2m}|\partial_\alpha \Psi|^2 + \int \Psi^+(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Psi^+(\boldsymbol{y})\Psi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\right) d\boldsymbol{x}. \tag{5.46}$$

Здесь u — короткодействующее межатомное взаимодействие. Предположим, что стенки сосуда, в котором находится жидкость, движутся со скоростью $\boldsymbol{v}$. Вопрос состоит в том, будет ли жидкость двигаться с той же скоростью (из-за трения о стенки), или же останется в покое (в случае сверхтекучести). Перейдем к системе координат, в которой стенки покоятся. Это достигается преобразованием Галилея

$$\Psi(\boldsymbol{x}) \to e^{-im\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}}\Psi(\boldsymbol{x}), \tag{5.47}$$

после которого

$$\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle \to \left\langle \int \frac{1}{2m}|(\partial_\alpha - imv_\alpha)\Psi|^2\, d\boldsymbol{x} + \cdots \right\rangle = \langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle - \boldsymbol{v}\boldsymbol{P}_0 + Nm\boldsymbol{v}^2/2. \tag{5.48}$$

Здесь

$$\boldsymbol{P}_0 = \int \Psi^+ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\Psi\, d\boldsymbol{x}$$

— полный импульс. Видно, что если до преобразования жидкость покоилась ($\boldsymbol{P}_0 = 0, \langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle = E_0$), то после преобразования (5.47) следует ожидать появления в гамильтониане члена v^2. Если жидкость до преобразования двигалась, то $\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle = E_0 + Nm\boldsymbol{v}^2/2$, $\boldsymbol{P}_0 = Nm\boldsymbol{v}$, и подстановка (5.47) дает $\langle\hat{\mathcal{H}}_0\rangle = E_0$. Если вспомнить теперь, что единственной существенной в инфракрасной области величиной в ^{4}He является фаза $\varphi(\boldsymbol{x})$ функции $\Psi(\boldsymbol{x})$, мы придем к заключению, что сверхтекучесть проявляется в отклике системы на преобразование фазы

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \to \varphi(\boldsymbol{x}) - m\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}. \tag{5.49}$$

Нормальная жидкость нечувствительна к такому преобразованию, тогда как сверхтекучая дает отклик. Мы видели, что такой отклик возможен исключительно из-за полюсных членов в (5.44).

Мы показали, что диэлектрическая постоянная в калибровочной системе является точным аналогом сверхтекучей плотности ρ_S. Эта аналогия может быть распространена и дальше, чтобы охватить кристаллические системы, которые, как мы видели, описываются теми же типами действий, зависящих от $u_\alpha(\boldsymbol{x})$. В этом случае потребуется изучить отклик системы на симметричные бесследовые поля,

$$u_\alpha(\boldsymbol{x}) \to u_\alpha(\boldsymbol{x}) + h_{\alpha\beta}x^\beta. \tag{5.50}$$

Снова неисчезающий отклик на постоянное поле $h_{\alpha\beta}$ (которое имеет смысл внешнего гравитационного поля, так же как v_μ могло рассматриваться как внешнее электромагнитное поле) может возникать в фазе с дальними корреляциями и описывается формулой

$$W = \frac{\mu}{2}h_{\alpha\beta}^2. \tag{5.51}$$

После плавления $\mu = 0$. Нетривиальные константы κ, ρ_S, μ и т. п. можно, следуя В. Л. Березинскому, называть поперечными коэффициентами жесткости. Их можно формально определить как вычеты в безмассовых полюсах соответствующих поляризационных операторов, и потому они существуют только в фазах с нарушенной симметрией. Эти величины важны потому, что (как уже говорилось в главе 1) в случае калибровочных систем и двумерных систем с глобальной симметрией параметры порядка равны нулю, и полюсы в функциях Грина отсутствуют. Однако полюсы имеются в соответствующих поляризационных операторах и именно эти полюсы и вычеты в них определяют физику системы.

В неабелевом случае с глобальной симметрией легко определить прямой аналог сверхтекучей плотности. Если взять, например, случай $\boldsymbol{n}$-поля, то можно изучить его отклик на включение следующего внешнего триплетного векторного поля:

$$e^{-W[\boldsymbol{v}_\mu]} = \int \mathcal{D}\boldsymbol{n}(x) \exp\left\{-\frac{\beta}{2}\int (\partial_\mu \boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_\mu \times \boldsymbol{n})^2 \, d\boldsymbol{x}\right\}. \tag{5.52}$$

Снова мы видим, что $W[\boldsymbol{v}]$ должно быть инвариантным по отношению к неабелевым калибровочным преобразованиям и зависеть от инвариантных комбинаций

$$\begin{aligned} W[\boldsymbol{v}_\mu] &= \tilde{W}[\boldsymbol{f}_{\mu\nu}], \\ \boldsymbol{f}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \boldsymbol{v}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{v}_\mu + \boldsymbol{v}_\mu \times \boldsymbol{v}_\nu. \end{aligned} \tag{5.53}$$

«Сверхтекучая плотность» может быть определена как вычет

$$\tilde{W} \approx \frac{\beta}{2}\rho_S \int \boldsymbol{f}_{\mu\nu} \frac{1}{\partial^2} \boldsymbol{f}_{\mu\nu} \, dx. \tag{5.54}$$

В неабелевых калибровочных теориях появляются трудности. Здесь необходимо вводить калибровочное поле третьего ранга, $\boldsymbol{f}_{\mu\nu}$, взаимодействующее с полем Янга–Миллса калибровочно-инвариантным образом. Я не знаю, как это можно сделать в непрерывной теории, хотя на решетке есть некоторые возможности. Мы по-прежнему можем ввести чисто статическую диэлектрическую постоянную, интегрируя по полям A_μ с граничными условиями

$$A^a_\mu \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} f^a_{\mu\nu} x^\nu \tag{5.55}$$

и определяя κ как коэффициент перед $(f^a_{\mu\nu})^2$ в эффективном действии. Обращение такого κ в нуль должно служить сигналом о конфайнменте кварков.

Завершая этот раздел, подчеркнем, что введенные выше диэлектрические постоянные¡диэлектрическая проницаемость вакуума не имеют прямого отношения к статическим потенциалам. Дело в том, что они определяют отклик на *бесконечно слабые поля*, а статические заряды, будучи квантованными, по необходимости конечны.

Глава 6
Топология калибровочных полей и близкие вопросы

Мы уже видели в предыдущих главах, что в абелевых системах проблема конфайнмента зарядов решается инстантонами.

В неабелевых теориях тоже имеются инстантонные решения. Однако из-за больших пертурбативных флуктуаций, обсуждавшихся в главе 2, трудно утверждать, играют ли они решающую роль в образовании массовой щели и режима конфайнмента. В таких теориях имеется что-то вроде инстантонной жидкости, с которой трудно работать. Вполне возможно, что благодаря каким-то скрытым симметриям, имеющимся в этих системах, инстантоны могут доставлять удобное семейство переменных для точного описания системы, но это пока что открытый вопрос.

Тем не менее, поскольку инстантоны несут нетривиальную топологию (они описывают конфигурации полей, которые не могут быть «распутаны»), некоторые проявления инстантонов не смешиваются с пертурбативными флуктуациями.

В этой главе мы проанализируем топологические свойства неабелевых инстантонов и солитонов и обсудим ряд связанных с ними характерных явлений.

6.1. Инстантоны для $D = 2$, $N = 3$ $\boldsymbol{n}$-полей

Давайте найдем минимум классического действия $\boldsymbol{n}$-поля в случае $N = 3$. Чтобы это действие было конечным, наложим граничные условия

$$\boldsymbol{n}(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{n}_0. \tag{6.1}$$

Так как бесконечность может рассматриваться как одна точка, наше x-пространство топологически является сферой. Каждая конфигурация $\boldsymbol{n}(x)$ определяет отображение такой x-сферы на сферу $\boldsymbol{n}^2 = 1$, которое в случае $N = 3$ есть отображение $S^2 \to S^2$. Известно, что такие отображения классифицируются целыми q, которые определяют, сколько раз вторая сфера накрывается первой. Простейший пример такого q-отображения дается формулами

$$\tilde{\vartheta} = \theta, \quad \tilde{\varphi} = q\varphi \pmod{2\pi}. \tag{6.2}$$

Здесь (ϑ, φ) и $(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$ — полярный и азимутальный углы для первой и второй сфер. В этой формуле q должно быть целым, так как в противном случае это отображение было бы разрывным. В общем случае число накрытий (или топологический заряд) дается формулой

$$q = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \, \frac{\partial(\tilde{\vartheta}, \, \tilde{\varphi})}{\partial(\vartheta, \, \varphi)} \tag{6.3}$$

$(\partial(\tilde{\vartheta}, \, \tilde{\varphi})/\partial(\vartheta, \, \varphi) = (\partial\tilde{\vartheta}/\partial\vartheta)(\partial\tilde{\varphi}/\partial\varphi) - (\partial\tilde{\vartheta}/\partial\varphi)(\partial\tilde{\varphi}/\partial\vartheta)$ — якобиан рассматриваемого отображения). (6.3) можно легко переписать в более инвариантном виде. Для отображения $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$ имеем

$$q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \, \boldsymbol{n}[\partial_\mu \boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}]\varepsilon^{\mu\nu}. \tag{6.4}$$

Здесь $\epsilon^{\mu\nu}$ — стандартный антисимметричный тензор. Эта формула проверяется прямой подстановкой $\boldsymbol{n} = (\cos\tilde{\vartheta}, \, \sin\tilde{\vartheta}\cos\tilde{\varphi}, \, \sin\tilde{\vartheta}\sin\tilde{\varphi})$ в (6.4), после чего получаем (6.3). Теперь мы хотим найти минимум классического действия в секторе с данным q. Эта задача упрощается с помощью следующего трюка. Рассмотрим тождество

$$\begin{gathered} \frac{1}{4} \int (\partial_\mu \boldsymbol{n} + \varepsilon_{\mu\nu}[\boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}])^2 \, d^2x = \\ = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 \, d^2x - \frac{1}{2} \int \varepsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{n}[\partial_\mu \boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}] \, d^2x. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Из (6.5) заключаем, что

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 \, d^2x = \frac{4\pi q}{e_0^2} + \frac{1}{4e_0^2} \int (\partial_\mu \boldsymbol{n} + \varepsilon_{\mu\nu}[\boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}])^2 \, d^2x. \tag{6.6}$$

Как следует из (6.6), чтобы найти абсолютный минимум для полей $\boldsymbol{n}$ с топологическим зарядом q, не обязательно решать классические уравнения движения, которые суть дифференциальные уравнения второго порядка. Вместо этого можно рассмотреть уравнение первого порядка, которое оказывается в каком-то смысле «квадратным корнем» классических уравнений движения. Мы имеем так называемое уравнение дуальности

$$\partial_\mu \boldsymbol{n} = -\varepsilon_{\mu\nu}[\boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}]. \tag{6.7}$$

Если уравнение (6.7) удовлетворяется, действие имеет благодаря (6.6) абсолютный минимум, равный $4\pi q/e_0^2$.

Уравнение (6.7) легко решить. Введем комплексное поле w с помощью стереографической проекции

$$\begin{gathered} n_1 + in_2 = 2w/(1+|w|^2), \\ n_3 = (1-|w|^2)/(1+|w|^2), \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Подстановка (6.8) в (6.7) преобразует это уравнение в

$$\partial_{\bar z} w \equiv (\partial_1 + i\partial_2)w = 0. \tag{6.9}$$

Следовательно, (6.7) дает в точности уравнение Коши–Римана для функции w. Эта функция должна быть не только аналитической, но также и мероморфной, иначе поле $\boldsymbol{n}$ имело бы ветвления. Следовательно, самое общее решение имеет вид

$$w(z) = \prod_{j=1}^{q} \frac{z-a_j}{z-b_j}, \tag{6.10}$$

где w нормировано условием $w(\infty) = 1$, отвечающим $\boldsymbol{n}(\infty)$, направленному по оси x^1. Целое число q в (6.10) есть в точности топологическое число. Это можно увидеть без вычислений, так как из (6.10) следует, что обратная функция $z = z(w)$ q-значна. Отсюда следует, что w-сфера q-кратно накрывается z-сферой. Конечно, нетрудно подставить (6.10) в (6.4) и вычислить q явно.

Замечательное свойство инстантонов (6.10) состоит в том, что они не взаимодействуют классически. Имеются, однако, антиинстантоны

$$w = \prod_{j=1}^{q} \frac{\bar z-a_j}{\bar z-b_j}, \tag{6.11}$$

несущие отрицательный топологический заряд. Инстантон-антиинстантонная конфигурация не является точным решением классического уравнения (так же, как это было для кинков и антикинков в главе 4), и имеет место взаимодействие диполь-дипольного типа. В самом деле, инстантоны (6.10) имеют естественную структуру диполей с полюсами в точках a_j и b_j.

Если мы перейдем от этой приятной и ясной математики к континуальному интегралу, мы столкнемся с одной трудностью. Действительно, в то время как в нулевом порядке теории возмущений одноинстантонный вклад пропорционален $e^{-S_{\text{cl}}} = e^{-4\pi/e_0^2}$, ясно, что квантовые флуктуации должны перенормировать константу связи e_0^2. Окончательный вклад может быть найден без явных вычислений с помощью следующего рассуждения. Как видно из (6.10), эффективный размер инстантона с параметрами a и b равен $|a-b|$. Естественно ожидать, что e_0^2 в полученном выше выражении следует заменить на

$$e^2(|a-b|) \simeq 2\pi/\log(\lambda|a-b|)^{-1}, \tag{6.12}$$

что следует из (2.49) для $N = 3$. Инстантонный вклад $Z^{(1)}$ должен содержать интегрирование по параметрам a и b. Мера интегрирования должна быть инвариантна относительно трансляций и растяжений (так как при умножении всех a_j и b_j на общий множитель классическое решение переходит в классическое решение).

Итак мы ожидаем, что

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &\sim \int \frac{d^2a\, d^2b}{|a-b|^4} \exp(-4\pi/e^2(|a-b|)) = \\ &= \lambda^2 \int \frac{d^2a\, d^2b}{|a-b|^2} \simeq \lambda^2 V \int \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned} \tag{6.13}$$

(V — объем системы, $\rho = |a-b|$). Мы видим, что этот интеграл расходится при больших значениях $|a-b|$, но как отмечалось в главе 2, для $|a-b| \geqslant \lambda^{-1}$ формула (6.12) неприменима, так как величина $e^2(|a-b|)$ уже не мала. По этой же причине мы не можем доверять (6.13) в этой области, так как квазиклассическое приближение, используемое при выводе (6.13), применимо только при малых значениях константы связи.

Тем не менее, имеет смысл поинтересоваться, что происходит при учете многоинстантонного решения. Для этого нужно рассмотреть малые флуктуации вблизи такого решения. После взятия гауссова интеграла, мы получим детерминант соответствующей квадратичной формы, зависящей от $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Логарифм этого детерминанта может рассматриваться как энергия взаимодействия инстантонов, возникающая в результате квантовых флуктуаций. Наконец, мы должны проинтегрировать по параметрам $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Эта программа может быть выполнена явно, так как ядро упоминавшейся выше квадратичной формы сильно упрощается в случае самодуального фонового поля. Чтобы увидеть это, напомним, что квадратичная часть действия описывается формулой (2.47). В случае группы $O(3)$ удобно ввести комплексные обозначения

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \qquad A_\mu = A_\mu^{12}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{II}} &= \frac{1}{2e_0^2}\int \{|(\partial_\mu + iA_\mu)\varphi|^2 - \frac{1}{2}(\varphi^+\varphi)B_\mu^a B_\mu^a\}\, d^2x = \\ &= \frac{1}{2e_0^2}\int \{|(\partial_\mu + iA_\mu)\varphi|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(\varphi^+\varphi)\}\, d^2x, \end{aligned} \tag{6.14}$$

где мы воспользовались уравнением самодуальности (6.7) в виде

$$B_\mu^a = \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\mu\nu}B_\nu^b$$

и следствием соотношений (2.45)

$$F_{\mu\nu} = i(B_\mu^* B_\nu - B_\mu B_\nu^*). \tag{6.15}$$

Ядро квадратичной формы (6.14) совпадает с квадратом оператора Дирака

$$\begin{gathered} (\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu))^2 = (\partial_\mu + iA_\mu)^2 + \frac{1}{2}\gamma_5\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \\ \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Хорошо известно (и будет обсуждаться в главе 8), что детерминант оператора (6.16) легко вычислить. Он равен

$$\log\det(\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu))^2 = \frac{1}{4\pi}\int \left(F_{\mu\nu}\frac{1}{\partial^2}F_{\mu\nu}\right) d^2x. \tag{6.17}$$

Чтобы вычислить многоинстантонные вклады, нужно еще проделать большую работу. Нужно ввести коллективные координаты и вычислить интеграл (6.17). Я не знаю никакого простого способа сделать это (хотя он, я уверен, существует). Поэтому, отсылая читателя за дальнейшими деталями к оригинальным статьям, я приведу окончательный результат:

$$Z^{(q)} = \frac{\lambda^{2q}}{(q!)^2} \int d^2 a_1 \ldots d^2 a_q \, d^2 b_1 \ldots d^2 b_q \times \\ \times \prod_{i<j} |a_i - a_j|^2 \prod_{i<j} |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2}. \tag{6.18}$$

Или после суммирования по q

$$Z_{\text{INST}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2q}}{(q!)^2} \int \prod_j d^2 a_j \, d^2 b_j \times \\ \times \exp\Big\{ \sum_{i<j} (\log|a_i - a_j|^2 + \log|b_i - b_j|^2) - \sum_{i,j} \log|a_i - b_j|^2 \Big\}. \tag{6.19}$$

Это совершенно неожиданный результат. Мы видим, что каждый инстантон ведет себя так, как если бы он состоял из пары противоположных кулоновских зарядов, помещенных в a_j и b_j. Так как двумерная кулоновская энергия дается формулой $(1/4\pi)\log|a-b|^2$, выражение (6.19) совпадает со статистической суммой плазмы с обратной температурой $\beta = 4\pi$. Как обсуждалось в главе 4, такая плазма имеет две различные фазы. При больших β заряды образуют диполи, система нейтральна и имеет большую корреляционную длину (массовая щель отсутствует). При некотором критическом значении β (которое известно и равно 8π) происходит диссоциация диполей и при $\beta < \beta_{\text{cr}} = 8\pi$ имеет место фаза плазмы с дебаевским экранированием, и, следовательно, появляется массовая щель. Мы заключаем, что благодаря квантовым эффектам инстантоны «расплавляются» и рождают массовую щель.

Прежде чем обсуждать законность сделанного приближения, дадим очень полезное представление для (6.19). Оно основано на так называемых формулах бозонизации. Рассмотрим свободное безмассовое дираковское поле $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ для $\mathcal{D} = 2$ и введем два оператора $\sigma_+ = \psi_L^+ \psi_R$ и $\sigma_- = \psi_R^+ \psi_L$. Можно показать, что

$$\langle \sigma_+(a_1) \ldots \sigma_+(a_N) \sigma_-(b_1) \ldots \sigma_-(b_N) \rangle = \\ = \prod_{i<j} |a_i - a_j|^2 |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2} \delta_{N,M}. \tag{6.20}$$

Из этой формулы следует:

$$Z_{\mathrm{INST}} = \int \mathcal{D}\psi(x)\,\mathcal{D}\bar{\psi}(x)\exp\left\{-\int (\bar{\psi}\,i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \lambda\bar{\psi}\psi)\,d^2x\right\} \tag{6.21}$$

(где $\bar{\psi}\psi = \sigma_+ + \sigma_-$ дает массовый член). Мы видим, что в этом представлении разложение вблизи инстантонных решений становится разложением по массе. Из (6.21) очевидно следует

$$\log Z_{\mathrm{INST}} = V\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Tr}\log(\gamma^{\mu}p_{\mu} + \lambda). \tag{6.22}$$

Разложение по λ приводит к все более и более сингулярным членам, содержащим $\int d^2p/p^n$, но сумма (6.22) хорошо определена.

Из приведенных выше вычислений мы можем вывести важные следствия, но насколько эти результаты надежны? Есть два источника ошибок. Прежде всего, мы должны включить антиинстантоны и принять во внимание их (классическое) взаимодействие с инстантонами. Это взаимодействие диполь-дипольного типа. Можно предположить, что нужно ввести два типа массивных фермионов ψ_1 и ψ_2, описывающих инстантоны и антиинстантоны, и рассмотреть некоторый вид взаимодействия для ψ_1 и ψ_2. Этот подход[1] приводит к некоторой вполне интегрируемой модели, содержащей только что описанные фермионы. Здесь возникает проблема: инстантон-антиинстантонная конфигурация может быть корректно определена только для достаточно удаленных объектов, потому что в противном случае их трудно отличить от других флуктуаций с нулевым топологическим зарядом. Эта неоднозначность тесно связана с другим источником ошибок — однопетлевым приближением для квантовых флуктуаций. Для каждого отдельного q-инстантонного вклада имеется опасность того, что квантовые флуктуации инфракрасно расходятся, и эффективный заряд e^2 становится чрезмерно большим. Понятно, однако, что после суммирования по q эти расходимости обрезаются на масштабах порядка дебаевской длины λ^{-1}. На таких масштабах $e^2 \sim 1$ и высшие поправки вряд ли меняют результат. Это оставляет надежду, что, по крайней мере на качественном уровне, эта система правильно описывается в рассмотренном выше приближении. Более того, в интегрируемых системах часто случается, что однопетлевое приближение оказывается точным решением. Поэтому оптимистический взгляд состоит в следующем. Необходимо ввести инстантоны, описывающиеся массивным дираковским полем ψ_1, и антиинстантоны, описывающиеся полем ψ_2. Затем нужно

[1] Предложенный Бухвостовым и Липатовым (1980).

найти некоторую экстраполяцию инстантон-антиинстантонного взаимодействия на малые расстояния. Можно надеяться, что такая экстраполяция существует, и что получающаяся в результате система описывает $\boldsymbol{n}$-поле не только в однопетлевом приближении, но и точно. Является ли эта картина правильной, можно, в принципе, проверить с помощью точных решений, но это до сих пор не сделано.

Итак, в настоящее время неизвестно, можно ли переформулировать точные свойства $\boldsymbol{n}$-полей в терминах инстантонов, но такая возможность, видимо, остается.

Подобная и даже более трудная проблема имеется в случае неабелевых калибровочных теорий. Она будет обсуждаться в следующем разделе. А пока мы кратко обсудим, какого типа инстантонная структура имеется в других версиях киральных моделей. Прежде всего, $\boldsymbol{n}$-поля с группой $O(N)$, $N \geqslant 4$ имеют тривиальную топологию. В самом деле, любое отображение $S^2 \to S^{N-1}$ для $N \geqslant 4$ стягиваемо. Почему это происходит, легко понять, если рассмотреть случай отображения $S^1 \to S^2$, то есть когда окружность отображается на сферу, скажем, на ее экватор. Очевидно, что сдвигая эту окружность к северному полюсу, можно стянуть ее в точку. Аналогично, любое отображение $S^2 \to S^{N-1}$ может быть деформировано в тривиальное. Несколько более сложное рассуждение показывает, что отображение S^2 на любую неабелеву группу Ли G, описываемое главным киральным полем $g(x)$, тоже стягиваемо. В этих теориях нет устойчивых инстантонов. Киральные теории, которые обладают инстантонными решениями, описываются фактор-пространствами G/H, где H содержит $U(1)$ в качестве прямого сомножителя. Объясним, как это происходит. Поля в указанных теориях могут быть представлены в виде

$$\varphi_a(x) = g_{ab}(x)\varphi_b^{(0)}, \quad x \in S^2, \tag{6.23}$$

где $g_{ab} \in G$ и $\varphi_b^{(0)}$ — постоянное поле, инвариантное относительно H:

$$h_{ab}\varphi_b^{(0)} = \varphi_a^{(0)} \quad \text{для} \quad h \in H. \tag{6.24}$$

Матрица g_{ab} в (6.23) не обязана быть непрерывной по x. Рассмотрим множество матриц $g^{(N)}(x)$, определенных на северной полусфере, и $g^{(S)}(x)$, определенных на южной полусфере. Предположим, что на экваторе имеет место соотношение:

$$g^{(N)}(x) = g^{(S)}(x) \cdot h(x), \quad x \in \text{экватору} = S^1, \quad h \in H. \tag{6.25}$$

Из (6.23) и (6.24) видно, что несмотря на разрывность $g(x)$, поле $\varphi_a(x)$ непрерывно и определяет отображение $S^2 \to G/H$. Из (6.25) заключаем, что эти отображения можно классифицировать как отображения экватора в H: $S^1 \to H$. Если $H = U(1)$, это будут как раз отображения $S^1 \to S^1$, характеризуемое числом намотки одной окружности на другую. Если $H = U(1) \times$ (нечто), то можно отобразить S^1 на первый множитель в H. Доказанное утверждение записывается математически так:

$$\pi_2(G/H) \simeq \pi_1(H), \quad \text{если} \quad \pi_2(G) = 0 \tag{6.26}$$

(где $\pi_k(M)$ — k-ая гомотопическая группа, элементы которой составляют классы нетривиальных отображений $S^k \to M$).

Наиболее известным примером киральной теории с инстантонами является так называемая $\mathbf{CP}^{N-1}$-модель, в которой поле принадлежит комплексному проективному пространству:

$$\phi \in \mathbf{CP}^{N-1} = \frac{SU(N)}{SU(N-1) \times U(1)} \tag{6.27}$$

(при $N = 2$ это в точности $O(3)$ $\boldsymbol{n}$-поле). У этой модели интересная динамика. Мы обсудим ее в главе 8.

6.2. Инстантоны в неабелевых калибровочных теориях

Неабелевы калибровочные теории с группой симметрии G обладают топологически нетривиальными полями. Это можно увидеть следующим образом. Чтобы действие Янга–Миллса было конечно, нужно потребовать

$$F_{\mu\nu}(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} o(1/x^2). \tag{6.28}$$

Из этого условия заключаем:

$$A_\mu(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) + o(1/x), \tag{6.29}$$

где $g(x) \in G$.

Если ограничить наше четырехмерное евклидово пространство большой трехмерной сферой S^3, то в силу (6.29) получим отображение $g(x)$: $S^3 \to G$. Легко видеть, что все такие отображения классифицируются целыми числами для произвольной простой группы G. Докажем это для $G = SU(2)$. Любая матрица g в этом случае может быть записана в виде

$$g = n_4 + i\boldsymbol{n}\boldsymbol{\tau}, \tag{6.30}$$

$$n_4^2 + \boldsymbol{n}^2 = 1 \Leftrightarrow g^+ g = I \tag{6.31}$$

(здесь $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули). Следовательно, элементы группы $SU(2)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками сферы S^3, определенной уравнением (6.31). Отображение сферы S^3, ограничивающей x-пространство, на $SU(2)$, есть, следовательно, отображение $S^3 \to S^3$. В этом случае имеют силу те же рассуждения, что и для отображения $S^2 \to S^2$ в разделе 6.1. Есть целое число q, равное числу накрытий, даваемое интегралом от якобиана. Аналог формулы (6.4) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{12\pi^2}\int d^3x\,\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}(n^a\partial_\mu n^b\partial_\nu n^c\partial_\lambda n^d) = \\ &= \frac{1}{24\pi^2}\int d^3x\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\operatorname{Tr}(L_\mu L_\nu L_\lambda) \end{aligned} \tag{6.32}$$

с

$$L_\mu(x) = g^{-1}\partial_\mu g(x).$$

Легко проверить, что комбинация из $\boldsymbol{n}$ в первом равенстве дает в точности элемент площади на S^3 и, следовательно, подынтегральное выражение в (6.32) представляет собой якобиан преобразования из x-пространства (образующего S^3) в $\boldsymbol{n}$-пространство. Второе равенство проверяется прямым вычислением или из того, что подынтегральное выражение в этой формуле представляет собой единственное выражение размерности 3, инвариантное относительно $G \times G$:

$$g(x) \to ug(x)v^{-1}. \tag{6.33}$$

Следовательно, оно должно быть пропорциональным элементу группового объема.

Мы получили следующую классификацию A_μ. Возьмем асимптотику данного поля A_μ при $x \to \infty$ и определим $g(x)$ из (6.29). Затем вычислим q по (6.32). Калибровочные поля с различными q нельзя непрерывно деформировать одно в другое.

Есть более удобное, чем (6.32), выражение для q. Оно имеет вид

$$q = \frac{1}{32\pi^2}\int \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho})\,d^4x = \frac{1}{8\pi^2}\int_x \operatorname{Tr} F\wedge F. \tag{6.34}$$

Во втором равенстве мы использовали удобное обозначение, употребляемое в математике. Для каждого кососимметрического тензора $T^{\mu_1\cdots\mu_p}$ ранга p можно определить p-форму:

$$T_p = \frac{1}{p!}T^{\mu_1\ldots\mu_p}\,dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p},$$

где внешнее произведение $\wedge$ — кососимметрическая билинейная операция,

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (\text{т. е. } dx_i \wedge dx_i = 0).$$

В общем случае

$$T_p \wedge T_q = (-1)^{pq} T_q \wedge T_p.$$

Элемент объема n-мерного пространства тоже можно представить n-формой:

$$dV = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \frac{1}{n!} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}\, dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}.$$

Ниже мы будем пользоваться операторной один-формой

$$d = dx^\mu \, \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

которая преобразует p-формы в $(p+1)$-формы:

$$dT_p = \frac{1}{p!} (\partial_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_p})\, dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

Из этого определения следует важное свойство $d^2 T_p = 0$, справедливое для произвольной формы T_p. Главное удобство таких обозначений состоит в возможности избавиться от тензорных индексов, что много экономнее. Операция d называется внешним дифференциалом.

Докажем теперь, что (6.34) эквивалентно (6.32). Для этого покажем сначала, что подынтегральное выражение в (6.34) есть полная дивергенция. Рассмотрим вариацию подынтегрального выражения по полю. Имеем

$$\begin{gathered} \rho(x) = \mathrm{Tr}(F \wedge F), \\ \delta\rho(x) = 2\,\mathrm{Tr}(F \wedge \delta F), \\ F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \partial x^\mu \wedge \partial x^\nu, \\ \delta F = \partial \delta A + A \wedge \delta A + \delta A \wedge A = \nabla \delta A \end{gathered} \tag{6.35}$$

(F — 2-форма). В педагогических целях перепишем (6.35) также в обыкновенных обозначениях:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho})\, \partial^4 x, \\ \delta\rho(x) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F_{\lambda\rho})\, \partial^4 x, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \\ \delta F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta A_\nu + [A_\mu, \delta A_\nu] - (\mu \leftrightarrow \nu) = \nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Из этих тождеств получаем

$$
\begin{aligned}
\delta\rho(x) &= 2\,\mathrm{Tr}\,F\wedge(\partial\delta A + A\wedge\delta A + \delta A\wedge A) = \\
&= 2\,\mathrm{Tr}\,F\wedge\partial\delta A + 2\,\mathrm{Tr}(F\wedge A - A\wedge F)\wedge\delta A = \\
&= 2\,\mathrm{Tr}\,F\wedge\partial\delta A + 2\,\mathrm{Tr}\,\partial F\wedge\delta A = 2\partial(\mathrm{Tr}\,F\wedge\delta A) = \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\delta A_\rho)\,\partial^4 x,
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

где мы воспользовались тождеством Бьянки

$$
\begin{aligned}
[\nabla,\, F] &= \partial F + A\wedge F - F\wedge A = \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\nu F_{\lambda\rho} + [A_\nu, F_{\lambda\rho}])\,\partial x^\nu\wedge\partial x^\lambda\wedge\partial x^\rho = 0.
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

Итак, имеем

$$
\begin{aligned}
\delta\rho(x) &= (\partial_\mu\delta\mathcal{K}^\mu(x))\,\partial^4 x, \\
\delta\mathcal{K}^\mu(x) &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}(F_{\nu\lambda}\delta A_\rho).
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

Теперь мы хотим получить выражение для самого тока $\mathcal{K}_\mu$. Введем для этого параметр $\tau : 0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и рассмотрим семейство калибровочных полей $A_\mu(x,\tau) = \tau A_\mu(x)$. Согласно (6.39), имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{K}^\mu(x,\tau)}{\partial\tau} &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\nu\lambda}(x,\tau)\frac{\partial A_\rho}{\partial\tau}\right) = \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\left\{(\tau(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \tau^2[A_\nu, A_\lambda])A_\rho\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

Интегрируя (6.40) по τ, получим

$$
\mathcal{K}^\mu(x) = \mathcal{K}^\mu(x,1) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\left(\left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu + \frac{2}{3}[A_\nu, A_\lambda]\right)A_\rho\right),
\tag{6.41}
$$

$$
\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(F\;{}^*F) = \partial_\mu\mathcal{K}^\mu(x)
\qquad
\left({}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho}\right).
\tag{6.42}
$$

Конечно, после того как ответ (6.41)–(6.42) уже известен, его можно проверить прямым вычислением.

Подстановка (6.42) в (6.34) дает

$$
q = \frac{1}{8\pi^2}\oint_{S^3}\mathcal{K}_\mu\,\partial\sigma^\mu,
\tag{6.43}
$$

где интегрирование проводится по большой сфере S^3. На больших расстояниях $F_{\mu\nu} = 0$, и (6.41) можно заменить на

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\mu}(x) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}\left(\left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu + \frac{4}{3}A_\nu A_\lambda\right)A_\rho\right) \approx \\ &\underset{x\to\infty}{\approx} -\frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}(A_\nu A_\lambda A_\rho) \approx \\ &\approx -\frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{Tr}(L_\nu L_\lambda L_\rho).\end{aligned} \tag{6.44}$$

Это доказывает эквивалентность (6.32) и (6.34).

Теперь нам нужно найти инстантонное решение с $q = 1$. Как и в случае $\boldsymbol{n}$-поля мы можем не решать сами уравнения Янга–Миллса, а рассмотреть «корень квадратный» из них. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{4e_0^2}\int \mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2\,\partial^4 x = \\ &= \frac{1}{8e_0^2}\int \mathrm{Tr}\left((F_{\mu\nu} - {}^*F_{\mu\nu})^2\right)\,\partial^4 x + \frac{1}{4e_0^2}\int \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu})\,\partial^4 x = \\ &= \frac{8\pi^2 q}{e_0^2} + \frac{1}{8e_0^2}\int \mathrm{Tr}\left((F_{\mu\nu} - {}^*F_{\mu\nu})^2\right)\,\partial^4 x.\end{aligned} \tag{6.45}$$

Мы видим, что решение уравнения «дуальности»

$$F_{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu} \tag{6.46}$$

с фиксированным q доставляет минимум действия. В самом деле, нетрудно проверить, что если выполняются уравнения (6.46), выполняются и уравнения Янга–Миллса

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{6.47}$$

(обратное не верно). В самом деле, продифференцируем (6.46):

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_\mu\,{}^*F_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{6.48}$$

Последнее равенство является следствием тождества Бьянки

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \\ \text{если}\quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta].\end{gathered} \tag{6.49}$$

Заметим, что для постоянных A_α оно редуцируется к тождеству Якоби:

$$[A_\alpha,[A_\beta,A_\gamma]]+[A_\beta,[A_\gamma,A_\alpha]]+[A_\gamma,[A_\alpha,A_\beta]]=0. \tag{6.50}$$

Мы видим, что уравнение «дуальности» (6.46) является в определенном смысле четырехмерным аналогом уравнений Коши–Римана (6.9). Наличие многоинстантонных решений — самое удивительное свойство этих уравнений. Опишем вначале решение с $q=1$. Вид этого решения можно найти с помощью следующего трюка.

Рассмотрим вместо калибровочной группы $SU(2)$ группу $SU(2)\times\times SU(2)\simeq O(4)$. Тогда группой симметрии уравнений (6.46) будет группа $O(4)\times O(4)$, где первый множитель отвечает за пространственные вращения, а второй — за изотопические. Будем искать решение, нарушающее $O(4)\times O(4)$, но сохраняющее одну $O(4)$, порожденную одновременными вращениями в изотопическом пространстве и x-пространстве. Затем мы вернемся к $SU(2)$.

Генераторы $O(4)$ описываются кососимметричными матрицами $I^{\alpha\beta}=-I^{\beta\alpha}$, порождающими вращения в плоскостях (α,β). Следовательно, калибровочные поля для группы $O(4)$ тоже несут индексы α, β:

$$A_\mu=\big(A_\mu^{\alpha\beta}(x)\big). \tag{6.51}$$

Наиболее общий $O(4)$-симметричный анзатц дается формулой

$$A_\mu^{\alpha\beta}(x)=a(r^2)(x_\alpha\delta_{\mu\beta}-x_\beta\delta_{\mu\alpha}),\quad r^2=x_\mu x^\mu. \tag{6.52}$$

Из соображений симметрии он должен быть совместен с уравнениями Янга–Миллса и дуальности. Шесть полей $A_\mu^{\alpha\beta}$ можно разбить на два набора по три поля A_μ^a и B_μ^a в каждом. Каждый набор отвечает группе $SU(2)$. Это разбиение имеет вид

$$\begin{aligned}A_\mu^a&=\frac12\left(A_\mu^{a0}+\frac12\varepsilon^{abc}A_\mu^{bc}\right)\equiv\frac14\eta_{a\alpha\beta}A_\mu^{\alpha\beta},\\ B_\mu^a&=\frac12\left(A_\mu^{0a}+\frac12\varepsilon^{abc}A_\mu^{bc}\right)\equiv\frac14\eta_{\alpha\beta a}A_\mu^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{6.53}$$

(здесь $\eta_{abc}=\varepsilon_{abc}$, $\eta_{ab0}=\delta_{ab}$ и т. д.). Смысл этого разложения состоит в том, что коммутационные соотношения

$$[I^{\alpha\beta},I^{\gamma\delta}]=\delta^{\alpha\gamma}I^{\beta\delta}+\delta^{\beta\delta}I^{\alpha\gamma}-\delta^{\alpha\delta}I^{\beta\gamma}-\delta^{\beta\gamma}I^{\alpha\delta} \tag{6.54}$$

записываются в виде

$$[X_a^{\pm}, X_b^{\pm}] = \varepsilon_{abc} X_c^{\pm}, \quad [X_a^{+}, X_b^{-}] = 0,$$

где

$$X_a^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abc} I_{bc} \pm I_{a0}\right).$$

Из (6.52) и (6.53) мы заключаем, что анзатц

$$A_\mu^a = -\frac{1}{2}\eta_{a\mu\nu} x_\nu a(r^2) \tag{6.55}$$

совместен с уравнениями дуальности. Подстановка (6.55) в (6.46) дает после простых вычислений

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= \frac{2\eta_{a\mu\nu}(x_\nu - a_\nu)}{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + \rho^2}, \\ F_{\mu\nu}^a(x) &= -\frac{4\eta_{a\mu\nu}\rho^2}{((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + \rho^2)^2} \end{aligned} \tag{6.56}$$

с произвольным масштабным параметром ρ и координатами инстантона a_μ.

На этот неабелев инстантон можно смотреть как на магнитный диполь размера ρ. Если мы теперь рассмотрим одноинстантонный вклад в статистическую сумму Z, мы обнаружим, как и в случае $\boldsymbol{n}$-поля, что подынтегральное выражение распадается на несколько множителей. Прежде всего, у нас есть множитель $e^{-S_{\text{cl}}} = e^{-8\pi^2/e_0^2}$, который мы заменим с учетом однопетлевой поправки на $e^{-8\pi^2/e^2(\rho)}$, где (для $SU(N)$)

$$e^2(\rho) = \frac{3}{11N} \cdot \frac{8\pi^2}{-\log(\lambda\rho)} \tag{6.57}$$

— эффективная константа связи на масштабе ρ. Этот вклад нужно проинтегрировать по ρ и a. Мера должна быть как масштабно-, так и трансляционно-инвариантна. Единственная комбинация с этими свойствами имеет вид $\partial^4 R\, \partial\rho\, \rho^{-5}$. Отсюда находим

$$Z_{\text{INST}}^{(1)} \sim V \int \frac{\partial\rho}{\rho^5} e^{-8\pi^2/e^2(\rho)} = V \int \frac{\partial\rho}{\rho^5} \rho^{11N/3} \tag{6.58}$$

(V — 4-объем).

Так же как в случае n-поля, инстантонный вклад имеет инфракрасную расходимость. Отсюда следует, что в многоинстантонной картине индивидуальные инстантоны стремятся расти и перекрываться. Поэтому наивная аппроксимация разреженного газа не применима, и мы должны ожидать чего-то вроде диссоциации диполеподобных инстантонов на элементарные компоненты, как это получается в случае n-поля. Однако пока еще не проведено даже однопетлевого вычисления в многоинстантонном поле и не открыто ничего вроде кулоновской плазмы из предыдущей главы. Это частично связано с отсутствием явной параметризации многоинстантонных решений. Я полагаю, что уже на однопетлевом уровне нас ожидает много интересных сюрпризов.

Есть интересное феноменологическое описание инстантонной жидкости, которое описывает ряд качественных свойств адронов. Этот подход не будет обсуждаться в этой книге[1].

Итак, мы заключаем, что на нынешнем уровне понимания инстантонной динамики мы не можем получить никаких точных динамических характеристик в неабелевой теории поля. В случае n-полей ситуация несколько лучше, так как мы в состоянии на качественном уровне продемонстрировать наличие массовой щели в этой теории. Даже в этом случае хотелось бы иметь более глубокое понимание ситуации. Есть основания верить, что в ближайшем будущем в этом вопросе будет достигнут значительный прогресс. В случае калибровочных полей остается только слабая надежда на удачу.

В то же время существование полей с топологическим зарядом оказывает глубокое качественное воздействие на динамическую структуру теории. Некоторые явления мы опишем в следующем разделе.

6.3. Качественные эффекты инстантонов

Наиболее драматическое проявление топологических эффектов имеет место, когда мы принимаем во внимание взаимодействие безмассовых дираковских фермионов с инстантонами. В этом разделе будет показано, что инстантоны приводят к нарушению некоторых очевидных законов сохранения. Качественно этот эффект можно описать так. Исследуем изоспинорное дираковское поле ψ во внешнем неабелевом калибровочном поле A_μ. Оно описывается действием

$$S_\psi = \int \partial^4 x\, \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu))\psi. \tag{6.59}$$

[1] См. Дашен, Каллан и Гросс (1979).

На классическом уровне это действие сохраняет аксиальный ток

$$\partial_\mu(i\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 0. \tag{6.60}$$

Однако, если мы рассматриваем аксиальный ток, возникающий в вакууме во внешнем поле A_μ, уравнение (6.60) оказывается неверным в силу так называемой квантовой аномалии. Покажем, как это получается. Производящая функция фермионов во внешнем поле имеет вид

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\,\exp\left(-\int \bar\psi\, i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\psi\, d^4x\right). \tag{6.61}$$

Индуцированный аксиальный ток записывается как

$$\begin{aligned} J_{\mu5}(x,A) &= Z^{-1}[A]\int\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\,\exp\left(-\int \bar\psi\, i\gamma^\mu(\partial_\mu+A_\mu)\psi\,\partial^4x\right) i\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi = \\ &= \qquad + \qquad + \qquad + \ldots \\ &= -i\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_5 G(x,x;A), \end{aligned} \tag{6.62}$$

где $G(x,x';A)$ — функция Грина оператора Дирака в поле A_μ. Выражение (6.62) расходится из-за сингулярности функции Грина в совпадающих точках. Необходимо, следовательно, ввести обрезание и отделить расходящиеся члены в $J_{\mu5}$.

Чтобы выполнить эту программу, выразим $G(x,x';A)$ через собственные функции $\psi_n(x)$ оператора Дирака:

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x). \tag{6.63}$$

Согласно стандартным формулам, функция Грина записывается как

$$G(x,\, x') = \sum_n \frac{\psi_n(x)\bar\psi_n(x')}{E_n}. \tag{6.64}$$

Чтобы регуляризовать (6.64), подставим в сумму по собственным значениям множители $e^{-\varepsilon E_n^2}$, где ε порядка Λ^{-2}, Λ — импульс обрезания. Мотивировка этой процедуры такова. Расходимостей при больших импульсах или при больших n в (6.64) не возникает в теории на решетке. Низколежащие E_n в непрерывной и решеточной теориях совпадают, в то время как высоколежащие E_n в решеточной теории вообще отсутствуют, так как имеется лишь конечное число степеней свободы на единицу объема. Если мы ожидаем, что ультрафиолетовая область производит только локальный эффект, исключаемый перенормировкой, мы можем имитировать решетку путем естественного обрезания — сглаживающего множителя $e^{-\varepsilon E_n^2}$. Мы пишем здесь E_n^2, так как E_n в (6.62) может быть как положительным, так и отрицательным.

После этих пояснений вычислим величину

$$J_{\mu 5}(x;A) = \sum_n \frac{i\bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n}{E_n} e^{-\varepsilon E_n^2}, \tag{6.65}$$

которая и есть регуляризованный аксиальный ток. Имеем:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_{\mu 5} &= \sum_n \frac{i\partial_\mu(\bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n)}{E_n} e^{-\varepsilon E_n^2} = \\ &= -2\sum_n \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n e^{-\varepsilon E_n^2} = 2\,\mathrm{Tr}\langle x|\gamma_5 e^{-\varepsilon \mathcal{D}}|x\rangle, \end{aligned} \tag{6.66}$$

$$\left(\mathcal{D} \equiv (i\gamma_\mu \nabla_\mu)^2\right).$$

Здесь мы воспользовались тождеством, следующим прямо из (6.63),

$$i\partial_\mu(\bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n) = -2E_n(\bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n).$$

Последнее выражение в (6.66) легко вычисляется при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$\mathcal{D} = (i\gamma_\mu \nabla_\mu)^2 = -(\partial_\mu + A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}; \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \tag{6.67}$$

Наиболее сингулярный член в $e^{-\varepsilon\mathcal{D}}$ происходит из ∂_μ^2 в (6.67). Если пренебречь всеми полями, то

$$\langle x|e^{-\varepsilon\mathcal{D}}|x\rangle = \int \frac{\partial^4 p}{(2\pi)^4} e^{-\varepsilon p^2} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2}. \tag{6.68}$$

Разложения по A_μ и $F_{\mu\nu}$ дадут менее сингулярные члены. Эти члены важны, так как при $A_\mu = 0$

$$\mathrm{Tr}\langle x|\gamma_5 e^{-\varepsilon\mathcal{D}}|x\rangle = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2}\,\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0. \tag{6.69}$$

Раскладывать $(\partial_\mu + A_\mu)^2$ по A_μ бесполезно, так как множитель $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$ будет оставаться во всех членах. Разложение до первой степени $\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

тоже не помогает в силу $\mathrm{Tr}\,\gamma_5\sigma_{\mu\nu} = 0$. Первый ненулевой вклад возникает во втором порядке по F:

$$\mathrm{Tr}_x\,\gamma_5 e^{-\varepsilon\mathcal{D}} \approx \langle x|e^{\varepsilon\partial_\mu^2}|x\rangle \frac{\varepsilon^2}{8}\,\mathrm{Tr}(\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho})\cdot\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}). \tag{6.70}$$

Если заметить, что

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho}) = 4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho},$$

и сравнить (6.70) с (6.66), получится

$$\partial_\mu J_{\mu 5}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_n \partial_\mu \frac{i\bar\psi_n\gamma_\mu\gamma_5\psi_n}{E_n} e^{-\varepsilon E_n^2} = \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}). \tag{6.71}$$

Это «аномальное» соотношение и другие подобные ему имеют удивительно много следствий. Прежде чем переходить к ним, повторим еще раз, как возникает (6.71).

Мы исходим из лагранжиана, который сохраняет аксиальный ток или, другими словами, сохраняет отдельно число левых и правых фермионов $\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)\psi$. Так как эта теория расходится, мы рассматриваем ее регуляризованную версию и устремляем параметр обрезания к бесконечности. Затем находим конечный вклад (который не зависит от способа обрезания) в дивергенцию аксиального тока (6.71). Это значит, что при регуляризации теории мы вынуждены нарушить закон сохранения аксиального тока и что в пределе $\Lambda\to\infty$ конечная часть этого нарушения остается. Приведем пример такого явления. Возьмем нерелятивистский одномерный ферми-газ в основном состоянии. Это состояние образуется частицами с импульсами $-p_F < p < p_F$, где p_F — импульс Ферми. В спектре этой системы нет массовой щели (если нет сверхтекучести). Возбуждения, имеющие сколь угодно малую энергию, отвечают частицам и дыркам с импульсами, лежащими вблизи $\pm p_F$. Энергия возбуждения пары частица–дырка дается формулой

$$E = \frac{(p_F+K_1)^2}{2} - \frac{(p_F-K_2)^2}{2} \approx p_F(K_1-K_2), \tag{6.72}$$

где p_F+K_1 — импульс частицы, а p_F-K_2 — импульс дырки. Следовательно, все низколежащие возбуждения описываются двумя полями — полем $\psi_R(k)$, отвечающим частицам с $p\simeq p_F+k$ (их античастицами являются дырки с $p = p_F - k$) и полем $\psi_L(k)$ отвечающим частицам с $p\simeq -p_F-k$. Эти поля имеют линейный спектр (в соответствии с (6.72)) и удовлетворяют безмассовым уравнениям Дирака

$$\begin{aligned} (\omega - k)\psi_L &= 0, \\ (\omega + k)\psi_R &= 0. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Вроде бы аксиальный ток сохраняется. Однако $\psi_L(k)$ и $\psi_R(k)$ не совсем независимы: они смешиваются при $k \sim p_F$. Следовательно, учет области вблизи радиуса обрезания (в данном случае радиус обрезания совпадает с импульсом Ферми) приводит к несохранению числа левых и правых частиц по отдельности. Приводит ли это к конечному эффекту после исключения обрезания, это отдельный вопрос. Это зависит от того, компенсируется ли малость амплитуд, описывающих частицы с импульсами $p \sim p_F$, большим числом частиц в море Дирака.

Наше вычисление, приводящее к (6.71), показывает, что в случае $\mathcal{D} = 4$ такая компенсация происходит. Хотя вычисления были выполнены для специальной регуляризации теории, можно показать, что окончательный результат (6.71) конечен и не зависит от способа регуляризации. В размерности больше единицы релятивистские фермионы обязательно обладают спином $\boldsymbol{\sigma}$. В этом случае $\omega = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{K}$. Бесспиновые фермионы не могут быть релятивистскими по теореме о связи спина и статистики.

В правой части (6.71) мы узнаем плотность топологического заряда. Как было показано в разделе 6.2, она может быть записана в виде дивергенции от некоторого тока $\mathcal{K}^\mu(x)$. Следовательно, можно было бы думать, что эта аномалия (6.71) не нарушает сохранение аксиального заряда, а только переопределяет аксиальный ток: $J_{\mu 5} \to J_{\mu 5} - 4\pi^2 \mathcal{K}_\mu$. Однако это не так. Если мы рассмотрим поле A_μ с топологическим зарядом q и проинтегрируем уравнение (6.71) по 4-мерному объему, мы получим

$$\Delta Q_5 = \int \partial_\mu J_{\mu 5}\, \partial^4 x = 2q. \tag{6.74}$$

Здесь

$$Q_5 = \int J_{05}\, d^3x = N_L - N_R,$$

и через ΔQ_5 обозначено общее изменение Q_5 за бесконечное время под воздействием A_μ. Уравнение (6.74) показывает, что оно равно удвоенному топологическому заряду A_μ.

Этот удивительный результат означает, что происходит «принудительное» производство фермионов и антифермионов в топологически нетривиальных полях и что число левых и правых частиц N_L и N_R с необходимостью изменяется.

Наш вывод использовал евклидов формализм, но понять это явление нетрудно и в пространстве Минковского. Напомним интерпретацию инстантонов в пространстве Минковского. Как мы уже видели в главе 4, инстантоны описывают туннельный переход между двумя состояниями, разделенными барьером (напомним пример двухъямного потенциала). В формулировке вещественного времени имеется много различных траекторий, соединяющих эти два состояния. Однако, так как классическое действие не имеет соответствующего экстремума (в классике этот переход запрещен), интерференция между траекториями сильно деструктивна и амплитуда экспоненциально мала. Инстантон является классическим решением в мнимом времени, которое объясняет малость этих амплитуд, как было описано в главе 4.

После этого напоминания объясним, какие состояния связывают инстантоны в неабелевых калибровочных теориях. Удобно перейти в калибровку $A_0 = 0$ в инстантонном решении. Тогда ненулевые компоненты $A_n(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
&A_n(x,\,t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0,\\
&A_n(x,\,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} g^{-1}(\boldsymbol{x})\partial_n g(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
\tag{6.75}
$$

Здесь $g(\boldsymbol{x})$ — матрица, удовлетворяющая условию $g(\infty) = I$. Следовательно, она отображает трехмерное $\boldsymbol{x}$-пространство, которое может рассматриваться как S^3 (в силу последнего условия) на группу G. Это в точности то же топологически нетривиальное отображение, что и в разделе 6.2, но записанное в калибровке $A_0 = 0$.

Теперь янг-миллсовские инстантоны можно интерпретировать следующим образом. Конфигурационное пространство калибровочной теории состоит из всех возможных полей $\{A_n(\boldsymbol{x})\}$. Рассмотрим некоторый переход в вещественном времени от нулевого A_n при $t = -\infty$ к $g^{-1}\partial_n g$ с топологически нетривиальным $g(\boldsymbol{x})$ при $t = +\infty$. В силу топологической нетривиальности поля $g(\boldsymbol{x})$ при таком переходе с необходимостью возникают области ненулевой напряженности (в противном случае поле $g(\boldsymbol{x},\,t)$ в $A_n(\boldsymbol{x},\,t) = g^{-1}(\boldsymbol{x},\,t)\partial_n g(\boldsymbol{x},\,t)$ давало бы непрерывную деформацию $g(\boldsymbol{x})$ в I).

Интерпретация (6.74) в пространстве Минковского состоит в том, что ненулевая напряженность поля приводит к принудительному рождению пар. Слово «принудительное» здесь означает, что амплитуда перехода без рождения пар тождественно равна нулю.

Интересно проследить как это происходит в явных выражениях для амплитуд.

Амплитуда перехода вакуум–вакуум, которая, как мы объяснили, должна зануляться, дается интегралом (см. (6.61))

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \exp\left\{-\int \bar{\psi}\, i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\psi\, \partial^4 x\right\} \\ = \det(i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu)). \tag{6.76}$$

(В силу того, что ψ — антикоммутирующая переменная, мы получили первую, а не минус первую степень детерминанта, или, другими словами, фермионные петли появляются с отрицательным знаком).

Амплитуда (6.76) равна нулю, так как оператор Дирака, как будет показано ниже, имеет нулевые собственные значения в топологически нетривиальных полях. Поэтому детерминант, будучи произведением собственных значений, равен нулю.

Доказательство того, что оператор Дирака имеет нулевые собственные значения, основывается на теореме Атьи–Зингера об индексе. Мы дадим вывод этой теоремы в специальном случае, достаточном для наших целей. Заметим, что в силу (6.71)

$$\int \partial^4 x\, \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_n \bar{\psi}_n(x)\gamma_5\psi_n(x) e^{-\varepsilon E_n^2} = -q. \tag{6.77}$$

Теорема об индексе следует из (6.77) и наблюдения, что все ненулевые моды дают нулевой вклад в (6.77). Это происходит из-за того, что ненулевые собственные значения появляются парами, симметричными относительно отражения $E_n \to -E_n$, $\psi_n \to \gamma_5\psi_n$. (Проверьте это с помощью уравнения (6.63).) Величина $\bar{\psi}_n\gamma_5\psi_n$ меняет знак при таком отражении. Это доказывает сокращение.

Что касается нулевых мод, то они могут быть асимметричны. Это и в самом деле так. Так как уравнение

$$\gamma_\mu\nabla_\mu\psi^{(0)} = 0 \tag{6.78}$$

γ_5-инвариантно, функции $\psi^{(0)}$ можно выбрать чисто левыми и чисто правыми:

$$\gamma_5\psi^{(0)}_{L,R} = \pm\psi^{(0)}_{L,R}. \tag{6.79}$$

Если мы обозначим через $n_{R,L}$ числа соответствующих нулевых мод, мы получим замечательную теорему

$$n_R - n_L = q. \tag{6.80}$$

Это показывает, что при $q \neq 0$ и в самом деле имеются нулевые моды, и, следовательно, амплитуда перехода вакуум–вакуум равна нулю. Более того, нетрудно вычислить ненулевые матричные элементы, для которых выполнено правило отбора (6.74). Рассмотрим вместо Z функции Грина

$$G(x_i,\, y_i) = Z^{-1} \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{-S_\psi} (\psi(x_1) \ldots \psi(x_N) \bar{\psi}(y_1) \ldots \bar{\psi}(y_N)). \quad (6.81)$$

Очевидно, это выражение плохо определено в поле инстантонов, так как $Z = 0$. Обычно функция Грина представляет собой амплитуду перехода, деленную на амплитуду, отвечающую переходу вакуум–вакуум. В поле инстантона это невозможно и нужно рассматривать абсолютное значение амплитуды рождения частицы:

$$\begin{aligned} Z \cdot G(x_i,\, y_i) &= F(x_i,\, y_i) = \\ &= \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{-S_\psi} (\psi(x_1) \ldots \psi(x_N) \bar{\psi}(y_1) \ldots \bar{\psi}(y_N)). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Так как действие квадратично, эта амплитуда может быть вычислена разложением по нормальным модам

$$\psi(x) = \sum_\alpha C_{0\alpha} \psi_{0\alpha}(x) + \sum_{n \neq 0} C_n \psi_n(x). \quad (6.83)$$

Здесь $\{\psi_{0\alpha}\}$ — нулевые моды оператора Дирака, а второй член представляет собой вклад ненулевых мод. В основе вычисления интеграла (6.82) лежит правило Березина

$$\int dC = 0 \quad \text{и} \quad \int C\, dC = 1 \quad (6.84)$$

для антикоммутирующих переменных. Так как

$$\mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_\alpha dC_{0\alpha}\, d\bar{C}_{0\alpha} \prod_{n \neq 0} dC_n\, d\bar{C}_n \quad (6.85)$$

и

$$S(\psi,\, \bar{\psi}) = \sum_{n \neq 0} E_n \bar{C}_n C_n, \quad (6.86)$$

нужно тщательно собрать в подынтегральном выражении (6.82) члены, содержащие произведение всех $C_{0\alpha} \bar{C}_{0\alpha}$. Все остальные члены в силу (6.84) дадут нуль. Так как каждый левый фермион $\psi_{0\alpha}$ порождает правый $\bar{\psi}_{0\alpha}$, амплитуда будет ненулевой, только когда выполняется правило отбора (6.74). В этом случае амплитуда пропорциональна произведению соответствующих нулевых мод собственных функций $\psi_{0\alpha}(x)$.

Выше мы рассматривали $A_\mu(x)$ как внешнее поле. Вполне очевидно, однако, что если взять континуальный интеграл по всем полям A_μ, в том числе топологически нетривиальным, аксиальный ток не будет сохраняться (дивергенция будет пропорциональна $e^{-8\pi^2/e_0^2}$). Этот эффект приводит к важным физическим следствиям в теории сильных и слабых взаимодействий, кратко описанным ниже. Здесь отметим другое следствие правила отбора. Именно, это правило означает, что безмассовые кварки стремятся подавить инстантонный вклад, так как $Z(A) = 0$ в поле инстантонов. Однако инстантон-антиинстантонные конфигурации дают ненулевой вклад, если общий топологический заряд равен нулю. Следовательно, эффективное действие $U(R_{12})$, где R_{12} — расстояние между инстантоном и антиинстантоном, обладает свойством

$$U(R_{12}) \underset{R_{12}\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{6.87}$$

Мы видим, что обмен парой безмассовых фермионов приводит к дальнодействующим силам между инстантонами и антиинстантонами. Это может вести к одному из следующих сценариев. Первый состоит в том, что в силу (6.87) в присутствии безмассовых фермионов происходит подавление больших флуктуаций, система теряет свойство конфайнмента, и мы остаемся с безмассовыми калибровочными полями, взаимодействующими с фермионами. На основании некоторых аналогий и модельных рассмотрений такая ситуация кажется мне крайне неправдоподобной. Однако я не располагаю никакими строгими утверждениями, позволяющими отвергнуть такую возможность.

Имеется другая возможность, реализующаяся, по моему мнению, в этой теории. Из-за сильного взаимодействия между фермионами, киральная симметрия спонтанно нарушается и фермионы становятся массивными. Дальнодействующая сила между инстантонами и антиинстантонами отсутствует, будучи экранированной фермионным массовым членом в эффективном лагранжиане. Единственным результатом аномального несохранения киральности будет ненулевая масса соответствующего голдстоуновского бозона.

Есть также третий, маловероятный сценарий, а именно, конфайнмент инстантонов имеет место, но большие флуктуации другого типа, не подавляемые фермионами, разупорядочивают систему.

К сожалению, пока мы не в состоянии сделать окончательный выбор между этими возможностями.

Обсудим еще одно качественное явление, связанное с инстантонами. Плотность лагранжиана для полей Янга–Миллса обычно берется в виде $(1/4e_0^2)\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}^2)$. Стандартное объяснение такого выбора состоит в том, что это единственное инвариантное выражение размерности 4. Любой высший инвариантный член типа $\mathrm{Tr}(\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2$ несуществен в инфракрасной области и может быть опущен. Другое инвариантное выражение $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu})$ опускается из-за того, что оно является полной производной и не влияет на уравнения движения. Но, как мы уже знаем, инстантоны оживляют эту полную производную. Следовательно наиболее общий вид лагранжиана в размерности 4 имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e_0^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2 + \frac{i\theta}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} \tag{6.88}$$

для теории Янга–Миллса, и, аналогично, для модели $\boldsymbol{n}$-поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{i\theta}{8\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n}[\partial_\mu \boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}]. \tag{6.89}$$

В обоих случаях θ — новая константа связи. Из-за наличия инстантонов в теории, физические амплитуды перехода будут зависеть от θ. Например, амплитуда перехода вакуум–вакуум равна

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{i\theta q} Z_q, \tag{6.90}$$

где через Z_q обозначен континуальный интеграл по полям с фиксированным значением q.

Дополнительные члены в указанных выше лагранжианах чисто мнимые в евклидовом пространстве по следующим причинам. Мы должны иметь вещественное действие в пространстве Минковского. При замене $t \to -it$ необходимо сделать замену $A_n \to A_n$ и $A_0 \to iA_0$, так как A_0 преобразуется как $\partial/\partial t$. Следовательно электрическое и магнитное поля меняются по правилу

$$\begin{aligned} E_n &\to iE_n,\\ H_n &\to H_n. \end{aligned} \tag{6.91}$$

Два члена в (6.88) меняются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2 &= E^2 - H^2 \to -(H^2 + E^2),\\ \mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}\, {}^*F_{\mu\nu} &= -2\boldsymbol{HE} \to -2i\boldsymbol{HE}. \end{aligned} \tag{6.92}$$

Поэтому при переходе от евклидова действия (6.88) к вещественному действию в пространстве Минковского во втором члене появится мнимая единица.

Топологический «θ-член» в действии порождает одну трудность, когда мы пытаемся применить эту теорию к описанию сильных взаимодействий. Если θ-член действительно вносит вклад в физические амплитуды, полная теория не инвариантна относительно обращения времени (так как $\boldsymbol{HE}$ является T-нечетным). Отсюда следует, что по каким-то причинам константа связи равна нулю или очень мала.

Конечно, отношение к этой проблеме отчасти зависит от личной философии. Можно принять точку зрения, что в области обрезания, то есть на планковской длине имеется сохраняющий T-инвариантность калибровочный лагранжиан. Тогда $\theta = 0$ с самого начала, и проблемы с сильным нарушением T-инвариантности нет. Интересно, однако, рассмотреть другую точку зрения, согласно которой на планковском масштабе нет никаких специальных симметрий, и они возникают в низкоэнергетической области только по динамическим причинам, конкретно, из-за того, что только перенормируемые взаимодействия играют существенную роль на больших расстояниях. Если мы принимаем эту точку зрения, мы должны включать в лагранжиан все возможные члены размерности не больше четырех с коэффициентами, имеющими естественный порядок величины. В этом случае мы будем иметь проблему сильного T-нарушения. Попытка разрешить эту проблему приводит к интересному предположению. Можно показать, что если в системе присутствуют безмассовые фермионы с нарушенной киральной симметрией, то из-за инстантонных эффектов голдстоуновские безмассовые частицы приобретают массу (в силу приближенного сохранения $J_{\mu 5}$), и, одновременно, θ-член можно убрать, переопределяя голдстоуновское поле.

Упомянем кратко другие интересные инстантонные эффекты в теории с θ-членом. Оказывается, они приводят к возникновению у магнитного монополя малого электрического заряда $\sim \theta$, а оператор электрического заряда отличается от генератора калибровочной группы на малую константу.

Возможно, что теория имеет богатую фазовую структуру как функция θ. В случае $\boldsymbol{n}$-полей периодическая зависимость от θ, видимо, имеет важные следствия, объясняющие квантовый эффект Холла в металлах.

Подчеркнем, что обсуждавшуюся выше зависимость физических величин от θ нельзя принимать безусловно. Вполне возможно, что из-за динамических эффектов вклады с $q \neq 0$ в пределе бесконечного объема отсутствуют. Пример такого явления наблюдается в случае плазмы, где в термодинамическом пределе вносят вклад только состояния с нулевым полным зарядом (из-за огромной Кулоновской энергии других состояний). Однако эта возможность в неабелевой калибровочной теории кажется маловероятной.

Другое предупреждение относится к предполагаемой периодичности по θ. Может случиться, что из-за диссоциации инстантонов, состояния с нецелым топологическим зарядом дадут конечный вклад в статистическую сумму. Эти конфигурации, конечно, имеют бесконечное действие, но это может компенсироваться энтропией. В результате формальное разложение (6.90) будет неверным, и периодической зависимости от θ не будет.

Все это чисто динамические вопросы и их решение требует каких-то новых концепций. В следующих главах мы обсудим, что сделано в этом направлении.

Глава 7
Аналогии между калибровочными и киральными полями. Динамика петель

В предыдущих главах мы отмечали определенное сходство между киральными и калибровочными полями. Мы видели, что обе теории, одна при $D = 2$ и другая при $D = 4$, обладают свойством асимптотической свободы. Их разложения сильной связи тоже похожи, причем частицеподобным возбуждениям в случае киральных полей отвечают замкнутые силовые линии в случае калибровочных полей. Напомним также сходство инстантонных структур для $\boldsymbol{n}$-полей и полей Янга–Миллса.

В этой главе мы изучим причины этой аналогии. Грубо говоря, оказывается, что малые отрезки силовых линий в калибровочном случае двигаются так, как если бы они были точечными возбуждениями киральных полей. С другой стороны, сами калибровочные поля могут рассматриваться как киральные поля, определенные на пространстве всех петель.

Эти идеи недостаточно хорошо разработаны, но они дают возможность навести мосты между калибровочными теориями, киральными полями и теорией струн (обсуждаемой в главе 9). Они также могут помочь в изучении скрытых симметрий в многомерных системах. Трудно отделаться от ощущения, что в пространстве петель таится множество удивительных секретов. Это пространство и является основным объектом изучения в этой главе.

7.1. Неабелев фазовый множитель

В главе 5 мы уже имели дело с полем

$$\Psi(C) = \mathrm{P}\,\exp \oint_C A_\mu\, dx^\mu = \mathrm{P}\,\exp\left(\int\limits_0^{2\pi} ds\, A_\mu(x(s))\frac{dx^\mu(s)}{ds}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x_j \to 0} \prod_j \left(1 + A_\mu(x_j)\Delta x_j^\mu\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} ds_1 \int\limits_0^{s_1} ds_2 \int\limits_0^{s_2} ds_3 \ldots \int\limits_0^{s_{n-1}} ds_n \times \\
&\times \frac{dx^\mu(s_n)}{ds_n} A_\mu(x(s_n)) \ldots \frac{dx^\mu(s_1)}{ds_1} A_\mu(x(s_1))
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

(здесь P — оператор упорядочения Дайсона, C — петля, параметризованная как $x_\mu = x_\mu(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$; A_μ — матрицы, принадлежащие алгебре Ли калибровочной группы). Для абелевых A_μ подынтегральное выражение можно симметризовать, сведя все к n-кратному интегралу от 0 до 2π. В этом случае Ψ будет обычной экспонентой. В неабелевом случае упорядочение очень важно.

Самое важное свойство величины (7.1) — это простое поведение по отношению к калибровочному преобразованию A_μ. Имеем

$$
\begin{aligned}
&A_\mu(x) \to \Omega^{-1}(x) A_\mu(x) \Omega(x) + \Omega^{-1}(x) \partial_\mu \Omega(x), \\
&\Psi(C) \to \Omega^{-1}(x(0)) \Psi(C) \Omega(x(2\pi)),
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

где $x(0) = x(2\pi)$ — начало петли). Для открытого пути C_{xy}, соединяющего точки x и y, закон преобразования имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\Psi(C_{xy}) = \mathrm{P} \exp \int_{C_{xy}} A_\mu \, dx^\mu, \\
&\Psi(C_{xy}) \to \Omega^{-1}(x) \Psi(C_{xy}) \Omega(y).
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Решеточная версия Ψ дается формулой:

$$
\Psi(C_{xy}) = \prod_{(C_{xy})} B_{z,\alpha}, \tag{7.4}
$$

где $\prod_{(C_{xy})}$ — упорядоченное произведение матриц $B_{z,\alpha}$ на ребрах, образующих контур C_{xy}.

Формулы (7.2) и (7.3) проще всего проверить в решеточной версии (7.4), так как относительно калибровочного преобразования

$$
B_{z,\alpha} \to \Omega_z^{-1} B_{z,\alpha} \Omega_{z+\alpha} \tag{7.5}
$$

множители Ω в (7.4) взаимно сокращаются, за исключением концов пути. Фазовые множители $\Psi(C_{xy})$ можно рассматривать как матрицы «параллельного переноса» различных величин. Это означает вот что.

Пусть у нас есть поле $\varphi(y)$ в точке y, преобразующееся по фундаментальному представлению калибровочной группы

$$\varphi(y) \to \Omega^{-1}(y)\varphi(y). \tag{7.6}$$

В отсутствие калибровочных полей величину $\varphi(y)$ невозможно сравнить с величиной $\varphi(x)$, имеющей другой закон преобразования (с матрицей $\Omega^{-1}(x)$). Однако, если есть калибровочное поле, мы можем сделать «параллельный перенос» $\varphi(y)$ в точку x, определив перенесенное поле так:

$$\text{“}\varphi(x)\text{”} = \Psi(C_{xy})\varphi(y). \tag{7.7}$$

Теперь поле “$\varphi(x)$” имеет тот же закон преобразования, что и $\varphi(x)$, и мы можем рассмотреть ковариантное изменение поля φ при перемещении из точки x в точку y вдоль пути C_{xy}:

$$\delta^{\text{cov}}_{C_{xy}}\varphi = \varphi(x) - \text{“}\varphi(x)\text{”} = \varphi(x) - \Psi(C_{xy})\varphi(y). \tag{7.8}$$

Для бесконечно малого пути C_{xy} это изменение не зависит от формы пути:

$$\delta^{\text{cov}}\varphi = \varphi(x) - [1 + A_\mu(x)(y_\mu - x_\mu)]\varphi(y) \approx (\partial_\mu + A_\mu)\varphi(x)\cdot(x_\mu - y_\mu), \tag{7.9}$$

и определяет ковариантную производную.

Роль калибровочного поля на этом геометрическом языке состоит в возможности сравнивать поля в различных точках. По этой причине математики называют калибровочное поле «связностью». Напряженность калибровочного поля $F_{\mu\nu}$ может быть определена как изменение поля φ при переносе вдоль маленькой замкнутой петли:

$$\varphi(x) - \text{“}\varphi(x)\text{”} \approx \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\varphi(x) \tag{7.10}$$

($\sigma^{\mu\nu}$ — площадь петли), где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Математическое название для $F_{\mu\nu}$ — «кривизна».

Мы видим, что фазовый множитель $\Psi(C)$ оказывается важным дифференциально-геометрическим объектом. С другой стороны, он имеет ясный физический смысл. Рассмотрим квантовую частицу, движущуюся во внешнем калибровочном поле A_μ. Для $A_\mu = 0$ амплитуда перехода от x к y дается интегралом по траекториям, соединяющим x и y. Каждая траектория входит в амплитуду с весом e^{iS_0} (S_0 — классическое действие свободной частицы на данной траектории). Нетрудно показать, что при включении A_μ эта амплитуда имеет вид интеграла от $e^{iS_0}\Psi(C_{xy})$ по всем траекториям C_{xy}. Если частица движется вдоль классической траектории в пространстве-времени (но имеет квантованный цвет), $\Psi(C_{xy})$ определяет амплитуду перехода в цветовом пространстве. Об этом уже говорилось в главе 5.

Фазовый множитель важен как с математической, так и с физической точек зрения, и потому было бы естественно попытаться сформулировать калибровочную теорию так, чтобы фундаментальными объектами были фазовые множители.

Для начала выведем классические уравнения движения. В решеточной версии с действием

$$S = \frac{1}{e_0^2}\,\mathrm{Tr}\sum_{\boldsymbol{x},\,\alpha,\beta}\left(B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}B_{\boldsymbol{x}+\alpha,\beta}B^{-1}_{\boldsymbol{x}+\beta,\alpha}B^{-1}_{\boldsymbol{x},\beta}\right) \tag{7.11}$$

классические уравнения движения можно получить, записывая вариацию в виде

$$\begin{gathered} \delta B_{\boldsymbol{x},\,\alpha} = \omega_{\boldsymbol{x},\,\alpha}B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}, \\ \delta B^{-1}_{\boldsymbol{x},\,\alpha} = -B^{-1}_{\boldsymbol{x},\,\alpha}\delta B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}B^{-1}_{\boldsymbol{x},\,\alpha} = -B^{-1}_{\boldsymbol{x},\,\alpha}\omega_{\boldsymbol{x},\,\alpha} \end{gathered} \tag{7.12}$$

(здесь $\omega_{\boldsymbol{x},\,\alpha}$ — произвольный элемент алгебры Ли группы G, в то время как $B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}$ принадлежит самой группе G). Классические уравнения движения

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_{\boldsymbol{x},\,\alpha}} = 0 \tag{7.13}$$

можно записать явно с помощью одного полезного графического представления. Рассмотрим сперва вариацию первого множителя $B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}$ в (7.11). Имеем

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}S &\sim \mathrm{Tr}\sum_{\boldsymbol{x},\,\alpha,\,\beta}\left(\omega_{\boldsymbol{x},\,\alpha}B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}B_{\boldsymbol{x}+\alpha,\,\beta}B^{-1}_{\boldsymbol{x}+\beta,\,\alpha}B^{-1}_{\boldsymbol{x},\,\beta}\right) = \\ &= \sum_{\boldsymbol{x},\,\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\left(\omega_{\boldsymbol{x},\,\alpha}\quad \overset{\beta}{\boldsymbol{x}\;\alpha}\quad\right), \end{aligned} \tag{7.14}$$

где мы нарисовали плакет $(x,\,\alpha,\,\beta)$, начинающийся в точке $\boldsymbol{x}$, каждое ребро которого отвечает матрице $B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}$. Произведение начинается с ребра $(x,\,\alpha)$ и продолжается против часовой стрелки.

Во втором члене

$$\delta^{(2)}S \sim \mathrm{Tr}\sum_{\boldsymbol{x},\,\alpha,\,\beta}\left(B_{\boldsymbol{x},\,\alpha}\omega_{\boldsymbol{x}+\alpha,\,\beta}B_{\boldsymbol{x}+\alpha,\,\beta}B^{-1}_{\boldsymbol{x}+\beta,\,\alpha}B^{-1}_{\boldsymbol{x},\,\beta}\right) \tag{7.15}$$

сделаем замены $\boldsymbol{x}+\alpha \to \boldsymbol{x}$, $\alpha \rightleftarrows \beta$ и используем циклическую инвариантность следа, чтобы поместить ω на первое место. Сделаем подобные преобразования в других членах. Вспоминая, что для группы $SU(N)$ ω — произвольная антиэрмитова матрица, получаем графические уравнения

$$\beta \qquad \boldsymbol{x}\ -\alpha$$

$$\sum_\beta \left\{ \quad \boldsymbol{x}\ \ \alpha \qquad - \qquad -\beta \qquad - \text{h.c.}\right\} = 0 \tag{7.16}$$

(h.c. обозначает эрмитово сопряженные члены). Эти уравнения можно переписать в виде

$$\sum_\beta \left\{ \qquad - \qquad - \text{h.c.}\right\} = 0 \tag{7.17}$$

или в аналитических обозначениях

$$\begin{gathered}\sum_\beta \left\{ \left(F_{\boldsymbol{x},\alpha,\beta} - B^{-1}_{\boldsymbol{x}-\beta,\beta} F_{\boldsymbol{x}-\beta,\alpha\beta} B_{\boldsymbol{x}-\beta,\beta} \right) - \text{h.c.} \right\} = 0, \\ F_{\boldsymbol{x},\alpha\beta} = B_{\boldsymbol{x},\alpha} B_{\boldsymbol{x}+\alpha,\beta} B^{-1}_{\boldsymbol{x}+\beta,\alpha} B^{-1}_{\boldsymbol{x},\beta}.\end{gathered} \tag{7.18}$$

Форма (7.18) удобна при переходе к непрерывному пределу: положив $B_{\boldsymbol{x},\alpha} \simeq 1 + A_\alpha$ с медленно меняющимся потенциалом A_α, мы получим

$$\partial_\beta F_{\alpha\beta} + [A_\beta,\ F_{\alpha\beta}] = 0. \tag{7.19}$$

Перепишем уравнения на $B_{\boldsymbol{x},\alpha}$ в уравнения на фазовый множитель $\Psi(C_{xy})$. Для этого введем «ток»

$$\mathcal{F}_\alpha(s, C) = \Psi(C + \Pi_{s\alpha})\Psi^{-1}(C), \tag{7.20}$$

где через $C+\Pi_{s\alpha}$ обозначен контур, получающийся из C заменой ребра s сегментом, имеющим вид буквы П в направлении α. Предполагается, что α ортогонально направлению ребра s. Графически

$$\mathcal{F}_\alpha(s,\, C) = \quad \boldsymbol{x} \qquad = \quad \boldsymbol{x} \qquad .$$

Из рисунка видно, что $\mathcal{F}$ есть не что иное, как напряженность, перенесенная вдоль C в начальную точку петли x. Теперь легко убедиться, что уравнения (7.17) переписываются в виде

$$\sum_\alpha \left(\mathcal{F}_\alpha(s, C) - \mathcal{F}_\alpha(s, C - \Pi_{s\alpha})\right) - \text{h.c.} = 0. \tag{7.21}$$

Прежде чем обсуждать смысл этих соотношений, выведем их непрерывный аналог. Его вид можно извлечь из предыдущих формул. Именно, поле $\Psi(C) = \Psi[x(s)]$ есть функционал, зависящий от формы контура, но не от его параметризации. Следовательно,

$$\Psi[x(s)] = \Psi[x(\alpha(s))] \tag{7.22}$$

и

$$\frac{dx_\mu(s)}{ds}\frac{\delta\Psi}{\delta x_\mu(s)} = 0. \tag{7.23}$$

Соотношение (7.23) следует из (7.22), если положить $\alpha(s) = s + \varepsilon(s)$ с бесконечно малым $\varepsilon(s)$. По определению, вариационная производная любого функционала f удовлетворяет соотношению:

$$\delta f = \int ds\, \delta x_\mu(s) \left(\frac{\delta f}{\delta x_\mu(s)}\right). \tag{7.24}$$

Вычислим $\delta\Psi/\delta x_\mu$ из определения (7.1). Воспользуемся для этого следующими общими соотношениями для произвольной матрицы $M(\tau)$:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{P}\exp\int\limits_0^t M\,d\tau = \left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^t M\,d\tau\right)M(t);$$

$$\delta\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^{2\pi} M(\tau)\,d\tau\right) = \int\limits_0^{2\pi} dt\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^t M(\tau_1)\,d\tau_1\right)\delta M(t)\times$$

$$\times\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_t^{2\pi} M(\tau_2)\,d\tau_2\right) = \int\limits_0^{2\pi} dt\,\mathrm{P}\left(\delta M(t)\,\exp\int\limits_0^{2\pi} M(\tau)\,d\tau\right),$$

$$\delta^2\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^{2\pi} M(\tau)\,d\tau\right) = \iint\limits_0^{2\pi} dt_1\,dt_2\,\mathrm{P}\left(\delta M(t_1)\,\delta M(t_2)\,\exp\int\limits_0^{2\pi} M(\tau)\,d\tau\right).$$

С помощью этих формул получаем

$$\delta\Psi(C) = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{P}\left(F_{\mu\nu}(x(s))\exp\int\limits_0^{2\pi} A_\mu\,dx^\mu\right)\dot{x}_\nu\,\delta x_\mu(s)\,ds, \tag{7.25}$$

где $F_{\mu\nu}$ — янг-миллсовская напряженность. Мы видим, что непрерывный аналог величины (7.20) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\mu(s,C) &= \frac{\delta\Psi(C)}{\delta x_\mu(s)}\Psi^{-1}(C)\\ &= \dot{x}_\nu\left(\mathrm{P}\exp\int\limits_0^s A_\mu\dot{x}_\mu\,dt\,F_{\mu\nu}(x(s))\,\mathrm{P}\exp\Bigl(-\int\limits_0^s A_\mu\dot{x}_\mu\,dt\Bigr)\right).\end{aligned} \tag{7.26}$$

По определению, $\mathcal{F}_\mu(s,\,C)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered}\dot{x}_\mu\mathcal{F}_\mu(s,\,C)=0,\\ \frac{\delta\mathcal{F}_\mu(s,\,C)}{\delta x_\nu(s')}-\frac{\delta\mathcal{F}_\nu(s,\,C)}{\delta x_\mu(s')}+[\mathcal{F}_\mu(s,\,C),\mathcal{F}_\nu(s',\,C)]=0.\end{gathered} \tag{7.27}$$

Второе уравнение означает, что калибровочное поле, имеющее ненулевую напряженность в обычном пространстве, в пространстве петель имеет уже нулевую кривизну и оказывается, таким образом, киральным полем. Возьмем функциональную производную от (7.26):

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{F}(s,\,C)}{\delta x_\mu(s)} &= \delta(0)\mathrm{P}\exp\int\limits_0^s A_\mu\dot{x}_\mu\,dt\times\\ &\times\left(\partial_\mu F_{\mu\nu}+[A_\mu,F_{\mu\nu}]\right)(s)\mathrm{P}\exp\Bigl(-\int\limits_0^s A_\mu\dot{x}_\mu\,dt\Bigr)\dot{x}_\nu(s).\end{aligned} \tag{7.28}$$

Отсюда заключаем, что уравнения Янга–Миллса записываются через фазовые множители в виде

$$\frac{\delta}{\delta x_\mu(s)}\left(\frac{\delta\Psi}{\delta x_\mu(s)}\Psi^{-1}\right)=0. \tag{7.29}$$

Добавим, что (7.29) оказывается непрерывной версией решеточных уравнений (7.18) и (7.21). Эти формулы проявляют замечательное сходство с уравнениями движения киральных полей. Действительно, решеточное действие

$$S=-\frac{1}{e_0^2}\sum_{\boldsymbol{x},\,\delta}\mathrm{Tr}\left(g_{\boldsymbol{x}}^{-1}g_{\boldsymbol{x}+\delta}\right) \tag{7.30}$$

ведет к уравнениям движения (при вариации $\delta g_{\boldsymbol{x}} = \omega_{\boldsymbol{x}} g_{\boldsymbol{x}}$)

$$\begin{gathered}\sum_{\delta} \left(A_{\boldsymbol{x},\,\delta} - A_{\boldsymbol{x}-\delta,\,\delta}\right) - \text{h.c.} = 0, \\ A_{\boldsymbol{x},\,\delta} = g_{\boldsymbol{x}+\delta} g_{\boldsymbol{x}}^{-1}\end{gathered} \tag{7.31}$$

или в непрерывном случае

$$\begin{gathered}A_\mu = (\partial_\mu g) g^{-1}, \\ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0, \\ \partial_\mu A_\mu = 0.\end{gathered} \tag{7.32}$$

Остается сравнить эти уравнения с (7.27) и (7.29).

Хотя мы и вывели эту аналогию для классических уравнений движения, она сохраняется и на квантовом уровне. В квантовой теории классические уравнения движения превращаются в уравнения на корреляционные функции. Стандартный способ получения таких уравнений основан на неизменности континуального интеграла при инфинитезимальной замене переменных интегрирования (в виде (7.12) в нашем случае). Таким способом легко получается цепочка уравнений Швингера в петлевом пространстве. Это мы проделаем в следующем разделе. А пока подытожим то, что мы узнали о связи калибровочных и киральных полей. Мы уже выяснили, что калибровочные поля являются киральными полями, определенными на пространстве петель. К сожалению, до сих пор не удалось извлечь какой-либо практической динамической информации из этого факта. Это главным образом связано с трудностями, возникающими при рассмотрении уравнений в пространстве петель или, что более или менее то же самое, при рассмотрении струнной динамики. Мы обсудим эти проблемы в главе 9. Я надеюсь на существенное продвижение в этой области в ближайшем будущем.

С другой стороны, у обсуждаемых теорий есть несколько более важных с точки зрения приложений сходных черт. Асимптотическая свобода, инстантоны, а также поведение при больших N (см. главу 8) и «киральная» форма уравнений движения (см. главу 6) делают киральные теории прекрасной теоретической лабораторией для изучения калибровочных полей.

В следующем разделе мы опишем то немногое, что известно на сегодняшний день о динамике петель. Тем не менее, это будет важно для разложений в пределе больших N, рассматриваемых в главе 8.

Есть несколько очевидных, но так и не решенных вопросов, касающихся обсуждаемой теории. К примеру, следует ли из сходства уравнений (7.31) и (7.21) какое-либо сходство разложений сильной связи для этих теорий? В частности, кажется вероятным, что рассеяние маленьких фрагментов струны (которые, как мы видели в главе 3, играют роль элементарных возбуждений в калибровочном случае) в точности такое же, как и рассеяние точечноподобных возбуждений киральных полей. Это можно было бы проверить в рамках разложения сильной связи, однако это пока не сделано. Другая задача состоит в том, чтобы вывести асимптотическую свободу непосредственно в пространстве петель, подобно тому, как это было сделано для киральных полей в главе 2.

Есть и другой круг вопросов. Мы выводили петлевое представление, исходя из локальных калибровочных полей. Однако возможна и другая точка зрения (кажущаяся мне даже более естественной). Предположим, что первичными величинами являются поля в пространстве петель. Тогда мы можем рассматривать калибровочные поля как нечто похожее на голдстоуновские поля на пространстве петель, эффективно описываемые киральными уравнениями движения (7.29). С этой точки зрения есть много новых возможностей. К примеру, вместо полей, принадлежащих калибровочной группе, можно рассматривать поля, принадлежащие различным факторпространствам. Они представляются интересными объектами, хотя я не знаю ни их локального представления, ни их роли (если таковая вообще имеется) в Природе.

7.2. Квантовая теория петель

Оказывается более удобным использовать уравнения, несколько отличные от (7.29). Мы воспользуемся тем, что относительно преобразований (7.2) только величина $\phi(C) = \operatorname{Tr}\Psi(C)$ калибровочно-инвариантна. Следовательно, в квантовой теории имеют смысл только средние вида

$$W(C) = \langle\phi(C)\rangle, \quad W(C,\tilde{C}) = \langle\phi(C)\phi(\tilde{C})\rangle \tag{7.33}$$

и т. д. Пользуясь формулами (7.24), (7.25), получаем

$$\frac{\delta^2 W(C)}{\delta x_\mu(s)\delta x_\mu(s')} =$$
$$= \left\langle \operatorname{Tr} \mathrm{P} \left(F_{\mu\nu}(x(s)) F_{\mu\lambda}(x(s')) \exp \int A_\mu \, dx^\mu \right) \right\rangle \dot{x}_\nu(s) \dot{x}_\lambda(s') +$$
$$+ \delta(s-s') \dot{x}_\nu(s) \left\langle \operatorname{Tr} \mathrm{P} \left(\nabla_\mu F_{\mu\nu}(x(s)) \exp \int A_\mu \, dx^\mu \right) \right\rangle . \tag{7.34}$$

Введем теперь локальную производную

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \, \frac{\delta^2}{\delta x_\mu(s+t/2)\, \delta x_\mu(s-t/2)}, \tag{7.35}$$

которая отбирает δ-образные члены во второй функциональной производной. Если квантовая теория регуляризована, первый член в (7.34) не имеет особенностей при $s \to s'$. Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{\partial^2 W(C)}{\partial x^2(s)} = \left\langle \operatorname{Tr} \mathrm{P} \left(\nabla_\mu F_{\mu\nu}(x(s)) \exp \int A_\mu \dot{x}_\mu \, dt \right) \dot{x}_\nu(s) \right\rangle . \tag{7.36}$$

Для классических полей правая часть (7.36) должна равняться нулю. В квантовом случае она конечна и может быть вычислена. Чтобы найти ее, рассмотрим (неинвариантный) континуальный интеграл

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, \exp\left(\frac{1}{2e_0^2} \int \operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^2 \, d^4x \right) \left(\mathrm{P} \exp \int\limits_0^{2\pi} A_\mu \, dx^\mu \right) \tag{7.37}$$

и сделаем замену переменных $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$. При такой замене возникает два слагаемых, которые должны взаимно сократится. Первое слагаемое отвечает вариации действия и пропорционально $\nabla_\mu F_{\mu\nu}$, а второе — вариации фазового множителя. Требование их взаимного сокращения приводит к равенствам

$$\left\langle -\frac{1}{e_0^2} \nabla_\mu F^a_{\mu\nu}(z) \Psi(x,\, x) \right\rangle = \oint_C dy_\nu \, \delta(z-y) \langle \Psi(x,\, y) \lambda^a \Psi(y,\, x) \rangle,$$
$$\left\langle -\frac{1}{e_0^2} \operatorname{Tr}(\nabla_\mu F_{\mu\nu}(z) \Psi(x,x)) \right\rangle = \oint_C dy_\nu \, \delta(z-y) \langle \operatorname{Tr} \lambda^a \Psi(x,\, y) \lambda^a \Psi(y,\, x) \rangle. \tag{7.38}$$

Здесь индекс a нумерует генераторы λ^a нашей алгебры Ли, а $\Psi(x,\,y)$ — фазовый множитель для части контура C, соединяющей точки x и y $(x, y \in C)$. Для группы $SU(N)$ равенства (7.38) можно упростить с помощью тождества

$$\sum_a \lambda^a_{\alpha\beta}\lambda^a_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{N}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}. \tag{7.39}$$

Имеем

$$\left\langle -\frac{1}{e_0^2}\,\mathrm{Tr}(\nabla_\mu F_{\mu\nu}(z)\Psi(x,x))\right\rangle =$$
$$= \oint dy_\nu\,\delta(z-y)\left\{\langle \mathrm{Tr}\,\Psi(x,\,y)\,\mathrm{Tr}\,\Psi(y,\,x)\rangle - \frac{1}{N}\langle \mathrm{Tr}\,\Psi(x,\,y)\Psi(y,\,x)\rangle\right\}. \tag{7.40}$$

Подставляя (7.40) в (7.36) (и рассматривая C как начинающийся в точке y), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 W(C)}{\partial x^2(s)} = -e_0^2 \oint \delta(x(s)-y)\left\{W(\overline{C},\overline{\overline{C}}) - \frac{1}{N}W(C)\right\}\dot{x}_\mu(s)\,dy_\mu, \tag{7.41}$$

которое является первым уравнением в цепочке Швингера.

Это уравнение требует некоторых пояснений. Прежде всего, C, $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$ определяются так. Петля C_{xx} начинается и оканчивается в точке $x = x(0)$ Если эта петля не имеет самопересечений в точке $x(s)$, правая часть уравнения (7.41) будет равна нулю из-за δ -функции. Если есть самопересечение в точке y, эта точка делит петлю на два замкнутых контура $\overline{C}$ и $\overline{\overline{C}}$:

$x(s)$ y $x(0)$

$$\overline{C} \qquad \overline{\overline{C}}\ . \tag{7.42}$$

Очень важный момент, о котором нельзя забывать, состоит в том, что уравнение (7.41) было выведено в неперенормированной, но регуляризованной версии теории. Поэтому δ-функция в (7.41) должна быть как-то сглажена и ε, входящее в (7.35), должно быть выбрано много меньшим длины, на которой произведено сглаживание. Само уравнение отвечает некоторому конкретному обрезанию калибровочной теории. Оно может быть неверно для другого обрезания. Все это крайне неприятно, и было бы гораздо лучше иметь уравнения для конечной, перенормированной $W(C)$. К сожалению, такое уравнение неизвестно, и мы не можем исключить регуляризацию из нашей конструкции.

Тем не менее, уравнение (7.41) содержательно. Оно воспроизводит теорию возмущений и в пределе больших N представляет собой замкнутое уравнение, суммирующее все планарные фейнмановские диаграммы (см. следующую главу). Здесь мы покажем, как из уравнения (7.41) получить первый порядок теории возмущений.

Для этого будем искать $W(C)$ в виде

$$\begin{aligned} W(C) = 1 + \oint\oint_{s_1<s_2} \Gamma_{\mu\nu}(x_1,\, x_2)\, dx_1^\mu\, dx_2^\nu + \\ + \oint\oint\oint_{s_1<s_2<s_3} \Gamma_{\mu\nu\lambda}(x_1,\, x_2,\, x_3)\, dx_1^\mu\, dx_2^\nu\, dx_3^\lambda + \cdots . \end{aligned} \tag{7.43}$$

Этот анзатц справедлив для любой величины $W(C)$, которую можно представить в виде среднего от фазового множителя (7.1). Можно показать, что этот анзатц, будучи аналогом разложения Тэйлора в пространстве петель, справедлив более или менее для любого функционала $W(C)$. Для $W(C)$ из (7.33) имеем

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\ldots}(x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots) = \langle \operatorname{Tr} A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)A_\lambda(x_3)\ldots\rangle. \tag{7.44}$$

Чтобы увидеть, как возникает теория возмущений, найдем $\dfrac{\partial^2 W_2(C)}{\partial x^2(s)}$, где W_2 — второй член в (7.43). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_2}{\delta x_\mu(s)} &= \int ds_1\, ds_2\, \dot x_\rho(s_2)\{\dot x_\lambda(s_1)\partial_{1,\mu}\Gamma_{\lambda\rho}(x_1(s_1),\, x_2(s_2))\,\delta(s-s_1) + \\ &\quad + \delta_{\lambda\mu}\dot\delta(s_1-s)\Gamma_{\lambda\rho}(x(s_1),\, x(s_2))\} = \\ &= \dot x_\lambda(s)\int ds_2\, \dot x_\rho(s_2)\{\partial_{1,\mu}\Gamma_{\lambda\rho}(x_1(s),\, x_2(s_2)) - \\ &\quad - \partial_{1,\lambda}\Gamma_{\mu\rho}(x_1(s),\, x(s_2))\}. \end{aligned} \tag{7.45}$$

Затем нужно взять производную $\delta/\delta x_\mu(s')$ и отобрать члены, содержащие $\delta(s-s')$. Это дает

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W_2}{\delta x_\mu(s)\delta x_\mu(s')} = \int \left(\partial_1^2\Gamma_{\lambda\rho} - \partial_{1,\lambda}\partial_{1,\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}\right)\delta(s-s')\dot x_\lambda(s)\dot x_\rho(s_2)\, ds_2 + \\ + \text{ члены, не содержащие } \delta(s-s'). \end{aligned} \tag{7.46}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2(s)} = \int \left\{\partial_1^2\Gamma_{\lambda\rho}(x(s),\, x(t)) - \partial_{1,\lambda}\partial_{1,\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}(x(s),\, x(t))\right\}\dot x_\lambda(s)\dot x_\rho(t)\, dt. \tag{7.47}$$

Нужно подставить этот результат в левую часть (7.41), заменяя $W(C)$ в правой части единицей. Это дает уравнение на $\Gamma_{\mu\nu}$ и новую функцию $\phi_\lambda(x, x')$:

$$\partial_1^2\Gamma_{\lambda\rho}(x, x') - \partial_{1,\lambda}\partial_{1,\sigma}\Gamma_{\sigma\rho}(x, x') = -e_0^2\delta_{\lambda\rho}\delta(x - x') + \frac{\partial}{\partial x'_\rho}\phi_\lambda(x, x'). \tag{7.48}$$

Функцию ϕ можно добавить, так как

$$\oint dx'_\rho \frac{\partial}{\partial x'_\rho}\phi_\lambda = 0.$$

Без члена с ϕ уравнение (7.48) было бы неразрешимо. Решение уравнения (7.48) имеет вид

$$\Gamma_{\lambda\rho}(x, x') = \frac{e_0^2}{4\pi^2}\frac{\delta_{\lambda\rho}}{(x - x')^2} + \frac{\partial h_\rho(x, x')}{\partial x_\lambda}, \tag{7.49}$$

где h_ρ — произвольная функция. Несмотря на этот произвол функционал W_2 однозначен и имеет вид

$$W_2(C) = \frac{e_0^2}{8\pi^2}\oint \frac{dx_\mu\, dx'_\mu}{|x - x'|^2} = \qquad C. \tag{7.50}$$

Формула (7.50) дает первый нетривиальный вклад по теории возмущений в $W(C)$. Чтобы получить высшие поправки, нужно подставить этот вклад в правую часть (7.41). После сложных комбинаторных вычислений (которые можно найти у А. А. Мигдала), можно в каждом порядке найти стандартные фейнмановские диаграммы, дающие вклады в $W(C)$. Следует отметить, что в этом подходе нет необходимости с самого начала фиксировать калибровку, так как (7.41) является уравнением на калибровочно-инвариантные величины. Духовые диаграммы в высших порядках появляются автоматически в процессе рекурсии (А. А. Мигдал (1977)).

Итак, мы заключаем, что, несмотря на некоторые сомнительные манипуляции при выводе (7.41), (например, выделение из производной $\delta^2/\delta x_\mu(s)\delta x_\mu(s')$ части, содержащей только $\delta(s-s')$, которую мы обозначили через $\partial^2/\partial x^2(s)$), информация не была потеряна. Отсюда следует, что в рамках разложения (7.43) знания $\partial^2 W/\partial x^2(s)$ достаточно для восстановления $W(C)$. Вновь необходимо предостеречь читателя, что это верно только в неперенормированной, но регуляризованной формулировке теории, в которой коэффициенты в (7.43) не имеют особенностей в совпадающих точках. Перенормированные величины, вообще говоря, конечные, имеют особенности в совпадающих точках, что делает наше определение $\partial^2/\partial x^2(s)$ неприменимым. Я думаю, что должны существовать какие-то перенормированные уравнения, но они до сих пор не найдены.

Какова же польза от петлевых уравнений типа (7.41)? Их основная цель состоит в том, что они доставляют нам описание калибровочных полей в естественных терминах элементарных возбуждений. Мы уже видели в главе 3, что в фазе конфайнмента эти возбуждения являются замкнутыми струнами. В общем случае эти струны взаимодействуют между собой. В некоторых случаях, в частности, в пределе больших N, они должны, как будет видно в главе 8, становиться свободными.

Петлевое уравнение (7.41) предназначено для того, чтобы из возможных свободных струнных теорий выбрать ту, которая описывает калибровочные поля. Этот вопрос еще не решен окончательно, хотя в этом направлении и сделаны важные шаги.

Наш следующий шаг будет состоять в том, что мы рассмотрим приближение больших N и докажем, что в этом пределе частицы в киральных теориях и струны в калибровочных теориях становятся свободными.

Глава 8
Разложение при больших N

Единственным свободным параметром и в киральных, и в калибровочных теориях оказывается число N, так как константа связи исчезает в непрерывном пределе вследствие размерной трансмутации (напомним, что разложение сильной связи относилось к решеточной теории, и ни в каком конечном порядке оно не дает непрерывной теории). Поэтому очень соблазнительно попытаться построить разложение по $1/N$. Мы построим $1/N$-разложение в этой главе. С помощью такого приближения мы, как и прежде, будем стремиться совершенствовать наши качественные представления о динамике полей.

8.1. $O(N)$-симметричная σ-модель

Это самый простой случай. Рассмотрим континуальный интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\boldsymbol{n}(x) \Big(\prod_x \delta(\boldsymbol{n}(x)^2 - 1)\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2g_0^2}\int (\partial_\mu \boldsymbol{n})^2\, d^2x\Big) \\ &= \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \mathcal{D}\lambda(x) \int \mathcal{D}\boldsymbol{n}(x)\, \exp\bigg(-\frac{1}{2g_0^2}\int \Big((\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \lambda(\boldsymbol{n}^2 - 1)\Big)\, d^2x\bigg). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Здесь функциональную δ-функцию мы заменили ее интегральным представлением с множителем Лагранжа $\lambda(x)$:

$$\begin{aligned} \prod_x \delta(\boldsymbol{n}(x)^2 - 1) &= \prod_x \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} d\lambda(x)\, \exp\big\{\lambda(x)(\boldsymbol{n}(x)^2 - 1)\big\} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda(x)\, \exp\Big\{\int \lambda(x)(\boldsymbol{n}(x)^2 - 1)\, d^2x\Big\}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Функции $\lambda(x)$ в (8.2) и в (8.1) отличаются несущественным множителем $1/2g_0^2$. Поле $\lambda(x)$ мы назвали «множителем Лагранжа», потому что в классическом пределе, когда мы ищем минимум $O(N)$-действия со связью $\boldsymbol{n}^2 = 1$, это поле действительно играет роль множителя Лагранжа.

Представление (8.1) удобно тем, что в нем интеграл по $\boldsymbol{n}$ становится гауссовым и его можно взять стандартным способом. Имеем

$$Z = \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \mathcal{D}\lambda(x) \, \exp\left\{ \frac{1}{2g_0^2} \int \lambda(x) \, d^2x - \frac{N}{2} \log\det || -\partial^2 + \lambda(x) || \right\}, \tag{8.3}$$

где N — число компонент поля $\boldsymbol{n}$. Появление множителя N в (8.3) объясняется тем, что каждая компонента входит в (8.1) независимо. Второе слагаемое в (8.3) имеет следующее диаграммное представление:

$$\log\det || -\partial^2 + \lambda(x) || = \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \cdots , \tag{8.4}$$

где волнистые линии отвечают внешнему полю $\lambda(x)$, а пропагаторы одной компоненты $\boldsymbol{n}$-поля, изображенные непрерывными линиями, равны $1/p^2$. Это — формальное разложение, так как при $D = 2$ оно расходится и в инфракрасной, и в ультрафиолетовой областях. Ультрафиолетовую расходимость приходится обрезать руками (точнее, с помощью решетки), а об инфракрасной расходимости теория позаботится сама.

Так как N входит в показатель экспоненты в (8.3), можно ожидать, что при больших N применим метод перевала (приближение седловой точки). Это и в самом деле так. Чтобы показать это, прежде всего найдем минимум действия в (8.3). Получаем, варьируя по λ:

$$\frac{1}{2g_0^2} = \frac{N}{2} \frac{\delta}{\delta\lambda(x)} \log\det || -\partial^2 + \lambda(x) || = \frac{N}{2} G(x, x; \lambda). \tag{8.5}$$

Здесь мы ввели функцию Грина

$$G(x,\, x';\, \lambda) = \langle x' | (-\partial^2 + \lambda)^{-1} | x \rangle.$$

Последнее равенство следует из соотношения

$$\delta \log\det A = \delta \operatorname{Tr} \log A = \operatorname{Tr} A^{-1} \delta A. \tag{8.6}$$

Его можно также проверить с помощью (8.4). Смысл уравнения (8.5) станет прозрачнее, если мы заметим, что, согласно (8.1),

$$\begin{gathered}\langle n_i(x)n_j(y)\rangle = Z^{-1}\int \mathcal{D}\lambda \int \mathcal{D}\boldsymbol{n}\, \exp\Big(-\frac{1}{2g_0^2}\int ((\partial\boldsymbol{n})^2 + \lambda(\boldsymbol{n}^2-1))\, d^2x\Big)\times \\ \times\, n_i(x)n_j(y) = g_0^2\delta_{ij}\frac{\int \mathcal{D}\lambda\, e^W G(x,\, y;\, \lambda)}{\int \mathcal{D}\lambda\, e^W}, \\ W = \frac{1}{2g_0^2}\int \lambda(x)\, d^2x - \frac{N}{2}\,\mathrm{Tr}_x \log(-\partial^2 + \lambda). \end{gathered} \tag{8.7}$$

Если мы рассмотрим интеграл по λ в приближении седловой точки, мы получим

$$\langle n_i(x)n_j(y)\rangle = g_0^2\delta_{ij}G(x,\, y;\, \lambda_*(z)), \tag{8.8}$$

где λ_* — значение λ, отвечающее седловой точке. Отсюда мы видим, что (8.5) есть не что иное, как условие $\langle \boldsymbol{n}^2\rangle = 1$.

Решим теперь уравнение (8.5). Мы можем предположить, что решение однородно в x-пространстве, и проверить это предположение, перейдя к импульсному представлению в (8.5):

$$\begin{gathered} G(x,\, x';\, \lambda) = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+\lambda}, \\ 1 = Ng_0^2 G(x,\, x;\, \lambda) = Ng_0^2\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{1}{p^2+\lambda}. \end{gathered} \tag{8.9}$$

Как и следовало ожидать, это соотношение отражает качественную разницу между случаями $D = 2$ и $D > 2$. При $D = 2$ имеем

$$\begin{gathered} 1 = \frac{Ng_0^2}{4\pi}\log\frac{\Lambda^2}{\lambda}, \\ \lambda = \Lambda^2 \exp\Big(-\frac{4\pi}{Ng_0^2}\Big), \end{gathered} \tag{8.10}$$

где Λ — обрезание по импульсу, а $\sqrt{\lambda}$ оказывается физической массой или обратной корреляционной длиной, как видно из (8.9) и (8.8). Эта формула согласуется с (2.49), с той только разницей, что $N-2$ в «точной» формуле (2.49) заменяется на N в (8.10). Таким образом, мы видим, что при всех значениях g_0^2 система находится в одной и той же фазе с конечной корреляционной длиной. Нетрудно повторить этот вывод в решеточной версии теории и увидеть явно, как разложение сильной связи сшивается без фазового перехода с режимом слабой связи, давая (8.10).

Ситуация при $D > 2$ иная. Имеется критическое значение $g^2_{0,\mathrm{cr}}$, определяемое соотношением

$$1 = Ng^2_{0,\mathrm{cr}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D p^2} \sim Ng^2_{0,\mathrm{cr}} \frac{\Lambda^{D-2}}{D-2}. \tag{8.11}$$

Если $g_0^2 > g^2_{0,\mathrm{cr}}$, уравнение (8.9) имеет решение с $\lambda > 0$ и мы находимся в фазе сильной связи. Теория имеет непрерывный предел при $g_0^2 \to g^2_{0,\mathrm{cr}} + 0$, в чем легко убедиться, переписав соотношение (8.9) с помощью (8.11) в виде

$$\begin{aligned} 1 &= Ng_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D p^2} - Ng_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+\lambda} \right) \\ &= \frac{g_0^2}{g^2_{0,\mathrm{cr}}} - Ng_0^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\lambda}{p^2(p^2+\lambda)}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

При $2 < D < 4$ интеграл в (8.12) сходится и пропорционален $\lambda^{D/2-1}$. Поэтому

$$m^2 \equiv \lambda = \mathrm{const} \cdot \Lambda^2 \left(\frac{g_0^2 - g^2_{0,\mathrm{cr}}}{g^2_{0,\mathrm{cr}}} \right)^{2/(D-2)}. \tag{8.13}$$

Непрерывный предел соответствует $g_0^2 \to g^2_{0,\mathrm{cr}}$ и $\Lambda \to \infty$ при фиксированном $m^2 = \lambda$. Мы видим также, что, в то время как значение $g^2_{0,\mathrm{cr}}$ зависит от обрезания и совсем не универсально, «критический индекс» $2/(D-2)$ в (8.13) не зависит от динамики на малых масштабах. Как мы объясняли в главе 1, это очень распространенная ситуация.

Если $g_0^2 < g^2_{0,\mathrm{cr}}$, в уравнении (8.9) что-то не так: оно больше не имеет решений. Это означает, что мы лишились седловой точки. Чтобы разобраться, что происходит в этом случае, надо вспомнить, что мы начали с интеграла по λ. Если рассмотреть разложение Фурье

$$\lambda(x) = \sum_q \lambda_q e^{\mathrm{i}qx}, \tag{8.14}$$

то

$$\mathcal{D}\lambda(x) = \left(\prod_{q \neq 0} d\lambda_q \right) \cdot d\lambda_0. \tag{8.15}$$

В пределе больших N все интегрирования с $q \neq 0$ несущественны (мы докажем это чуть ниже) и интеграл по λ имеет вид

$$Z = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} d\lambda_0 \, \exp\left\{ V\left(\frac{\lambda_0}{2g_0^2} - \frac{N}{2} \int_{|p|<\Lambda} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \log(p^2 + \lambda_0) \right) \right\}, \tag{8.16}$$

что получается подстановкой $\lambda(x) = \lambda_0 = \mathrm{const}$ в (8.3); здесь V — объем системы. При $g_0^2 > g_{0,\mathrm{cr}}^2$ в комплексной плоскости переменной λ_0 имеется разрез, отвечающий логарифму в (8.16) и идущий от $-\infty$ до нуля, а так же седловая точка. При $g_0^2 < g_{0,\mathrm{cr}}^2$ эта седловая точка исчезает под разрезом. Чтобы получить основной вклад в интеграл при $g_0^2 > g_{0,\mathrm{cr}}^2$, надо взять контур, проходящий через седловую точку. Тогда подынтегральное выражение сосредоточено возле этой седловой точки. Такую ситуацию мы проанализировали выше.

При $g_0^2 < g_{0,\mathrm{cr}}^2$ контур можно так продеформировать, чтобы он обходил вокруг разреза. В пределе бесконечного объема основной вклад дает начало разреза $\lambda_0 = 0$. Чтобы оценить область наиболее важных значений λ_0, заметим, что сингулярная часть интеграла (8.16) имеет вид

$$\int d^D p \, \log(p^2 + \lambda) = \mathrm{const}\, \lambda_0^{D/2} + \text{регулярные члены}. \tag{8.17}$$

Отсюда мы заключаем, что существенные значения λ_0 определяются соотношением

$$\begin{gathered} NV\lambda_0^{D/2} \sim 1, \\ \lambda_0 \sim (NV)^{-2/D} \underset{V\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{gathered} \tag{8.18}$$

Мы приходим к выводу, что при $g_0^2 < g_{0,\mathrm{cr}}^2$ величина λ_0 должна равняться нулю в пределе бесконечного объема и что в нашей системе имеются безмассовые частицы. Это означает, что при переходе к $g_0^2 < g_{0,\mathrm{cr}}^2$ происходит нарушение симметрии, а эти безмассовые частицы суть голдстоуновские бозоны. Отложим прямую проверку этого факта, а пока рассмотрим поправки к наивному приближению седловой точки.

Важно учесть, что в фазе с *ненарушенной* $O(N)$-симметрией (это единственная фаза при $D \leqslant 2$) поле $\lambda(x)$ имеет ненулевое вакуумное среднее. В главном порядке оно дается выражением (8.10). Последовательные приближения будут изменять это значение на величину $\sim 1/N$. Чтобы развить общий формализм, следует, вместо того, чтобы с самого начала фиксировать $\langle\lambda(x)\rangle = \lambda$, считать $\lambda(x)$ произвольным и проинтегрировать по $\{\lambda_{q\neq 0}\}$. Мы получим эффективное действие, зависящее от постоянной λ_0. Наконец, надо будет взять минимум по λ_0, или, что то же самое, наложить условие $\langle \boldsymbol{n}^2(x)\rangle = 1$.

Попробуем реализовать эту программу. Действие для $\{\lambda_{q\neq 0}\}$ дается выражением:

$$\lambda(x) = \mu^2 + i\alpha(x), \qquad \alpha_{q=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} W(\lambda) = &-\frac{N}{2}\operatorname{Tr}\log[-\partial^2 + \mu^2 + i\alpha(x)] = \\ &= \frac{N}{2}W_0[\mu^2] - \frac{N}{2}\Big\{\frac{1}{2}\int \Pi(q)\alpha_q\alpha_{-q}\frac{d^2q}{(2\pi)^2} - \\ &\quad - \frac{1}{3}\int \Gamma_{q_1q_2q_3}\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\delta(q_1+q_2+q_3)\frac{d^2q_1\,d^2q_2\,d^2q_3}{(2\pi)^4} + \cdots\Big\} = \\ &= \frac{N}{2}W_0[\mu^2] - \frac{1}{2}\int \Pi(q)\beta_q\beta_{-q}\frac{d^2q}{(2\pi)^2} + \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(\frac{N}{2}\right)^{-1/2}\int \Gamma_{q_1q_2q_3}\beta_{q_1}\beta_{q_2}\beta_{q_3}\delta(q_1+q_2+q_3)\frac{d^2q_i}{(2\pi)^4} + \cdots . \end{aligned} \tag{8.19}$$

Здесь

$$\beta = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}\alpha,$$

$$\Pi(q) = \qquad = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{(k^2+\mu^2)((q-k)^2+\mu^2)}, \tag{8.20}$$

q_2 q_1 q_3

$$\Gamma_{q_1q_2q_3} = \qquad \text{и т. д.}$$

Мы видим, что эффективная нелинейность в (8.19) содержит множитель $N^{-1/2}$ и что теория возмущений для поля β имеет хороший малый параметр $1/\sqrt{N}$. Значение μ^2 должно быть фиксировано в самом конце вычисления. Например, с точностью до $1/\sqrt{N}$ эффективное действие для μ имеет вид

$$V^{-1}W[\mu^2] = \frac{1}{2}NV^{-1}W_0 + V^{-1}W_1 + \frac{1}{\sqrt{N}}V^{-1}W_2 + \dots =$$
$$= \left\{ \frac{\mu^2}{2g_0^2} - \frac{N}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \log(p^2 + \mu^2) \right\} - \tag{8.21}$$
$$- \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \log \Pi(q^2) + O(N^{-1/2}).$$

Второй член в (8.21) происходит от флуктуаций множителя Лагранжа.

В этом месте мы сталкиваемся с одной трудностью. Из (8.19), (8.20) видно, что пропагатор поля β равен

$$\mathcal{D}(q^2) = \frac{1}{\Pi(q^2)} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2\pi q^2}{\log(q^2/\mu^2)}. \tag{8.22}$$

Такой рост пропагатора порождает степенные расходимости в диаграммах Фейнмана, что, очевидно, физически бессмысленно. Давайте исследуем происхождение этой трудности и объясним, как ее избежать. Прежде всего, мы видим, что эти расходимости остаются и в случае $D = 1$, который отвечает квантовой механике $\boldsymbol{n}$-поля. Квантовая механика — конечная теория, и, значит, мы сделали что-то неправильно.

Чтобы выяснить, в каком месте возникает трудность, рассмотрим вместо теории с $\boldsymbol{n}^2 = 1$ теорию с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{g}{4}(\boldsymbol{n}^2 - 1)^2, \tag{8.23}$$

которая в пределе $g = \infty$ переходит в теорию $\boldsymbol{n}$-поля. Можно ввести поле λ, заменив лагранжиан (8.23) на

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{n}^2 - 1) - \frac{\lambda^2}{2g}. \tag{8.24}$$

Мы получим такое же, как и раньше, разложение по большим N, за исключением того, что $\mathcal{D}(q^2)$ следует заменить на

$$\tilde{\mathcal{D}}(q^2) = \frac{1}{\Pi(q^2) + (2/Ng)}. \tag{8.25}$$

Так как $\Pi(q^2) \sim \log(q^2/\mu^2)/q^2$, этот пропагатор не растет при $q^2 \to \infty$, и у нас не будет степенных расходимостей. В частности, квантовая механика будет, как и полагается, конечной.

Чтобы понять происхождение степенных расходимостей, обратимся к случаю квантовой механики ($D = 1$). Потенциал

$$V = \frac{g}{4}(\boldsymbol{n}^2 - 1)^2 \tag{8.26}$$

при $g \to \infty$ удерживает нашу частицу на поверхности сферы. Вследствие принципа неопределенности, однако, такая локализация приводит к большой кинетической энергии. Поэтому уровни энергии частицы сдвигаются на бесконечность, то есть мы получаем энергию нулевых колебаний порядка $\sqrt{g}$ и того же порядка радиальные возбуждения. Но над этой бесконечной вакуумной энергией мы имеем конечные угловые возбуждения, занумерованные угловым моментом. В пределе $g \to \infty$ из энергии вакуума мы должны вычесть константу, после чего теория станет конечной.

Возвращаясь к нашей исходной задаче, мы ожидаем, что степенные расходимости, возникающие из-за (8.22), исчезнут, если мы перенормируем массу элементарных возбуждений. Удобная процедура состоит в следующем. Введем величину

$$m^2 = G^{-1}(p = 0) \tag{8.27}$$

и рассмотрим собственно-энергетическую часть

$$\Sigma(p) = \overset{(\boldsymbol{n})}{} \quad \overset{(\boldsymbol{n})}{} + \overset{(\boldsymbol{n})}{} \quad \overset{(\boldsymbol{n})}{} + \cdots . \tag{8.28}$$

Функция Грина определяется соотношением

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + \Sigma(p^2) - \Sigma(0)}. \tag{8.29}$$

В то время как $\Sigma(p^2)$ содержит степенные расходимости, легко видеть, что в $\Sigma(p^2) - \Sigma(0)$ их нет. Для примера оценим первое слагаемое в (8.28) (при $p \gg m$):

$$\Sigma(p) - \Sigma(0) = \frac{2}{N} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 \Pi(k^2)} \left(\frac{1}{(p-k)^2} - \frac{1}{k^2} \right) \approx$$
$$\approx \frac{2}{N} \int\limits_{p<|k|<\Lambda} \frac{k^2\, d^2k}{2\pi \log(k^2/m^2)} \left(\frac{4(pk)^2}{k^6} - \frac{p^2}{k^4} \right) + \text{ конечные члены } =$$
$$= \frac{p^2}{N} \log \frac{\log(\Lambda/m^2)}{-\log(m^2/p^2)} + \text{конечная часть.} \tag{8.30}$$

Мы получили странную дважды логарифмическую расходимость. Чтобы ее интерпретировать, вспомним, что корреляционная функция $\langle \boldsymbol{n}(0)\boldsymbol{n}(R)\rangle$ не обязана быть конечной после одной только перенормировки заряда, так как, согласно главе 2, мы должны перенормировать и само $\boldsymbol{n}$-поле. В главе 2 мы получили такое выражение для корреляционной функции:

$$\langle \boldsymbol{n}(0)\boldsymbol{n}(R)\rangle = \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a}\right)^{(N-1)/(N-2)}, \tag{8.31}$$

тогда как в главном порядке по $1/N$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{n}(0)\boldsymbol{n}(R)\rangle &= N g_0^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(pR)}}{p^2+m^2} = \\ &\underset{mR\ll 1}{=} \frac{N g_0^2}{2\pi} \log \frac{1}{mR}. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Сравним эти выражения. Так как

$$ma = \exp\left(-\frac{2\pi}{N g_0^2}\right), \tag{8.33}$$

имеем

$$\frac{N g_0^2}{2\pi} \log \frac{1}{mR} = 1 - \frac{N}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a}. \tag{8.34}$$

Мы видим, что ведущее приближение (8.32) согласуется с (8.31) благодаря тому, что «аномальная размерность» $(N-1)/(N-2) \longrightarrow 1$

при $N \to \infty$. Если разложить (8.31) по $1/N$, то в следующем порядке мы получим

$$\langle \boldsymbol{n}(0)\boldsymbol{n}(R)\rangle = \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a}\right)\left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a}\right)^{1/(N-2)} \simeq$$
$$\simeq \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{N} \log \frac{\log(1/mR)}{\log(1/ma)} + \cdots\right). \tag{8.35}$$

Уравнение (8.35) показывает, как двойные логарифмы возникают в $1/N$-разложении «точной» формулы (8.31). Мы видим, что это те самые двойные логарифмы, которые возникали в (8.30).

Все сказанное означает, что после перенормировки массы (8.29) (которая, в сущности, есть перенормировка заряда) и перенормировки поля $\boldsymbol{n}$ все члены $1/N$-разложения будут конечны. Это можно доказать с помощью стандартных методов теории поля.

Могло показаться странным, что нам понадобилось перенормировать поле $\boldsymbol{n}$, масштаб которого определен соотношением $\boldsymbol{n}^2 = 1$. Как мы видим из (8.31) и (8.32), это происходит потому, что коррелятор $\langle \boldsymbol{n}(0)\boldsymbol{n}(R)\rangle$ должен удовлетворять этой связи только при $R \lesssim a$ (где a — параметр решетки), а конечный изотропный коррелятор существует только при $R \gg a$. Поэтому связь нельзя использовать непосредственно в непрерывном пределе. Как видно из (8.32), коррелятор исходного поля $\boldsymbol{n}$ содержит в этом пределе зависящий от обрезания множитель

$$\frac{Ng_0^2}{2\pi} \sim \frac{1}{\log(1/ma)}.$$

То же самое можно сказать и по-другому, заметив, что после интегрирования по высокочастотным модам нашего поля мы получаем эффективное действие для блок-спинов, нормированных иначе, чем исходные переменные.

Подводя итог, отметим, что после подходящих перенормировок $1/N$-разложение хорошо определено. Его главное достоинство состоит в том, что оно явно описывает непрерывную теорию в правильной фазе. В принципе, возможен фазовый переход при уменьшении N, но в случае $\boldsymbol{n}$-поля этого не происходит. В пределе большого N при $D = 2$ теория $\boldsymbol{n}$-поля оказывается теорией свободных безмассовых частиц. Амплитуды рассеяния, которые можно легко вычислить (см. следующую главу), будут порядка $1/N$.

Эта простая картина, к сожалению, неверна в случае главного кирального поля или калибровочной теории при $D = 4$. Первые указания на возможные затруднения дает формула (2.35) для корреляционных функций кирального поля. В пределе $N \to \infty$ это выражение имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(R) &= \left(1 - \frac{Ne_0^2}{4\pi}\log\frac{R}{a}\right)^{2(N^2-1)/N^2+1} \simeq \\ &\simeq \left(1 - \frac{Ne_0^2}{4\pi}\log\frac{R}{a}\right)^3 \sim \log^3\frac{1}{mR}, \quad mR \ll 1,\end{aligned} \tag{8.36}$$

тогда как функция Грина свободного поля должна вести себя как $\log(1/mR)$. Мы видим, что в отличие от $\boldsymbol{n}$-поля, поле $g(x)$ не становится свободным в пределе большого N. В следующем разделе мы попытаемся понять, почему.

8.2. Главное киральное поле для $SU(N)$

Начнем с попытки использовать тот же трюк с множителем Лагранжа. В случае $SU(N)$-кирального поля наши переменные — комплексные матрицы $g_{ab}(x)$. Статистическую сумму можно представить в виде

$$\begin{aligned}Z &= \int \prod_{a,b} \mathcal{D}g_{ab}\mathcal{D}g^*_{ab} \prod_{a,b}\delta\Big(\sum_c g_{ac}g^*_{bc} - \delta_{ab}\Big) \times \\ &\times \exp\Big\{-\frac{1}{e_0^2}\sum_{a,b}\int \partial_\mu g_{ab}\partial_\mu g^*_{ab}\, d^2x\Big\} = \\ &= \prod_{a<b}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{D}\lambda_{ab}\mathcal{D}\lambda^*_{ab} \exp\Big(\frac{1}{e_0^2}\int\sum_a \lambda_{aa}\, d^2x\Big)\int \mathcal{D}g_{ab}\mathcal{D}g^*_{ab} \times \\ &\times \exp\Big\{-\frac{1}{e_0^2}\sum_{a,b}\int |\partial_\mu g_{ab}|^2\, d^2x - \frac{1}{e_0^2}\int \lambda_{ab}g_{ac}g^*_{bc}\, d^2x\Big\}.\end{aligned} \tag{8.37}$$

Мы ввели здесь множитель Лагранжа, который в этом случае является эрмитовой матрицей (т. к. матрица $g^\dagger g$ — эрмитова). Он обеспечивает интегрирование в (8.37) только по унитарным матрицам. Таким образом, модель (8.37) описывает, строго говоря, группу $U(N)$, а не $SU(N)$. Легко видеть, однако, что в произведении $U(N) = U(1) \times SU(N)$ поле, отвечающее множителю $U(1)$, не взаимодействует с другими полями и его можно игнорировать.

Как и раньше, гауссов интеграл в (8.37) можно представить в виде функционального детерминанта. Имеем

$$
\begin{aligned}
Z &= \int \prod_{a\leqslant b} \mathcal{D}^2\lambda_{ab} \exp\Big\{ \frac{1}{e_0^2} \sum_a \lambda_{aa} - N \log\det(-\partial^2\delta_{ab} + \lambda_{ab})\Big\} \equiv \\
&\equiv \int \prod_{a\leqslant b} \mathcal{D}^2\lambda_{ab}\, e^{W(\lambda)}
\end{aligned}
\tag{8.38}
$$

(множитель N возникает здесь из суммирования по c в (8.37)).

Теперь представляется вполне естественным следовать той же стратегии, что и в случае $\boldsymbol{n}$-поля. Однако здесь она приводит к трудностям. Покажем это и обсудим возможности выйти из положения (в настоящее время единственный способ обойти эти трудности заключается в разложении точного решения модели по $1/N$ — путь, не допускающий обобщений).

Естественно ожидать, что λ_{ab} приобретает конечное вакуумное среднее

$$\langle \lambda_{ab}\rangle = \mu^2\delta_{ab}. \tag{8.39}$$

Поэтому мы рассмотрим разложение

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{ab} = \mu^2\delta_{ab} + \frac{i}{\sqrt{N}} v_{ab}, \qquad \sum_a \int v_{aa}\, d^2x = 0,\\
\frac{W}{V} &= \frac{1}{e_0^2}\sum_a \lambda_{aa} - N\,\mathrm{Tr}\log(-\partial^2\delta_{ab} + \lambda_{ab}) = \\
&= N\mu^2/e_0^2 - N\,\mathrm{Tr}\log[(-\partial^2 + \mu^2)\delta_{ab} + iN^{-1/2}v_{ab}] = \\
&= N\Big(\frac{\mu^2}{e_0^2} - N\,\mathrm{Tr}\log(-\partial^2 + \mu^2)\Big) - \frac{1}{2}\sum_q \Pi_{ab|cd}(q) v_{ab}(q) v_{cd}(-q) + \\
&\quad + \frac{N^{-1/2}}{3} \sum_{k_1+k_2+k_3=0} \Gamma_{ab|cd|ef} v_{ab}(k_1) v_{cd}(k_2) v_{ef}(k_3) + \cdots .
\end{aligned}
\tag{8.40}
$$

Значение μ^2 следует находить из условия минимума эффективного действия или же из условия унитарности

$$\langle \mathrm{Tr}(g^\dagger g)\rangle = N.$$

До сих пор мы просто повторяли рассуждения раздела 8.1. Теперь мы подходим к решающему отличию от случая $\boldsymbol{n}$-поля. Именно, несмотря на множители $N^{-1/2}$ перед старшими степенями по v, нелинейность в (8.40) оказывается крайне важной, потому что эти малые множители компенсируются суммированием по изотопическим индексам в диаграммах Фейнмана. Докажем это и одновременно выделим соответствующий класс диаграмм. Согласно (8.40), имеем

$$\begin{aligned}\Pi_{ab|cd}(q) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{(k^2+\mu^2)((k+q)^2+\mu^2)} \times \\ \times \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}) \equiv \pi(q^2)\frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}).\end{aligned} \tag{8.41}$$

Это следует из матричного равенства

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}\log((-\partial^2+\mu^2)I+v) = \\ &= \operatorname{Tr}\log(-\partial^2+\mu^2) + \operatorname{Tr}\log\Bigl(1+\frac{1}{\mu^2-\partial^2}v\Bigr) = \\ &= \ldots - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\Bigl(v\frac{1}{\mu^2-\partial^2}v\frac{1}{\mu^2-\partial^2}\Bigr)+\ldots,\end{aligned} \tag{8.42}$$

где Tr означает след как по координатным, так и по изотопическим индексам.

Пропагатор поля v дается выражением

$$\langle v_{ab}(q)v_{cd}(-q)\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})\frac{1}{\pi(q^2)}. \tag{8.43}$$

Изотопическую структуру (8.43) удобно представить графически:

$$\langle v_{ab}v_{cd}\rangle = \begin{matrix} b & & d \\ a & & c \end{matrix} + \begin{matrix} b & & d \\ a & & c \end{matrix}, \tag{8.44}$$

где каждая линия отвечает δ-символу. Рассмотрим теперь нелинейные поправки к этому пропагатору, происходящие из кубических членов в (8.40). Структура функции Γ, получаемая из (8.42), такова:

$$\Gamma_{ab|cd|ef} = N^{-1/2}\Bigl(\begin{matrix} b & c & \\ a & & e \\ & f & \end{matrix} + \text{перестановки}\Bigr) \tag{8.45}$$

(здесь каждая простая линия — это обычный пропагатор $\delta_{ab}/(k^2+\mu^2)$). Поэтому первая поправка к $\langle v_{ab}v_{cd}\rangle$ содержит член вида

$$\langle v_{ab}v_{cd}\rangle^{(1)} = N^{-1}\times \begin{matrix} b & e & c \\ a & & d \end{matrix}. \tag{8.46}$$

Мы видим, что вследствие суммирования по e диаграмма в (8.46) приобретает множитель N, который сокращает множитель N^{-1}, стоящий перед ней.

Легко проверить, что такое сокращение имеет место в любой планарной диаграмме (т. е. в диаграмме, не содержащей пересекающихся линий). Рассмотрим, например, диаграмму

$$= \qquad . \tag{8.47}$$

Она содержит четыре тройных и одну четверную вершину. Согласно (8.42), эта диаграмма входит с множителем $(N^{-1/2})^4 N^{-1} = N^{-3}$. В то же время в (8.47) есть три окна, и каждое несет свободный (немой) изотопический индекс, что дает множитель N^3. Таким образом, диаграмма не содержит малого при $N \to \infty$ множителя.

Непланарные диаграммы малы. Например,

$$\sim \frac{1}{N^2}. \tag{8.48}$$

Это легко проверить, воспользовавшись, как раньше, представлением в двойных линиях.

Мы пришли к заключению, что для аккуратного построения предела больших N в теории главных киральных полей необходимо просуммировать все планарные диаграммы для множителя Лагранжа.

Почему, несмотря на большую величину действия W в (8.40), приближение седловой точки оказывается несправедливым? Причина состоит в следующем. Величина действия W имеет порядок N^2. (Одно N стоит перед следом Tr, а второе N возникает потому, что сам след порядка N). С другой стороны, число переменных λ_{ab} также $\sim N^2$. Поэтому поправки к эффективному действию за счет флуктуаций λ_{ab} будут $\sim N^2$, то есть того же порядка, что и главный член. В случае $\boldsymbol{n}$-поля эффективное действие было $\sim N$, но число переменных равнялось единице. Это объясняет, почему мы имеем хорошее приближение седловой точки для $\boldsymbol{n}$-поля и ничего подобного для киральных полей. Вместе с приведенным выше обсуждением планарных диаграмм это объясняет также, почему пропагатор (8.36) имеет дополнительный множитель $\log^2(1/mR)$ при $mR \ll 1$. Можно думать, что такой вклад дают экспоненты от членов вида $\log\log(1/mR)$, которые, согласно (8.30), присутствуют в планарных диаграммах.

Хотя пропагаторы и не являются свободными и в них дает вклад бесконечно много диаграмм, тем не менее в пределе $N \to \infty$ теория описывает свободные частицы. Чтобы в этом убедиться, оценим амплитуду рассеяния F:

$$F \sim \qquad + \qquad + \cdots \sim \frac{1}{N}. \tag{8.49}$$

Это важное наблюдение. Оно означает, что в пределе больших N поле $g(x)$ является сложной, но почти локальной функцией некоторых свободных полей и что в действительности мы имеем дело с замаскированной свободной теорией. Если бы мы смогли описать эту функцию явно, теория возмущений по $1/N$, возможно, имела бы практический смысл.

Эта задача пока не решена, хотя существует точное решение $SU(N)$-кирального поля. Пока мы в состоянии сделать лишь несколько шагов в правильном, как кажется, направлении. Поскольку выяснилось, что трудность заключается в большом числе переменных интегрирования, воспользуемся разложением

$$\begin{gathered} \lambda = \omega \Lambda \omega^{-1}, \quad \omega^{+} = \omega^{-1}, \\ \Lambda_{ab} = \Lambda_a \delta_{ab}. \end{gathered} \tag{8.50}$$

Подстановка разложения (8.50) в (8.38) дает после некоторого калибровочного преобразования выражение

$$\begin{gathered} \frac{W}{V} = \frac{1}{e} \sum_{a=1}^{N} \Lambda_a - N \operatorname{Tr} \log[-(\partial_\mu \delta_{ab} + A_\mu^{ab})^2 + \Lambda_a \delta_{ab}], \\ A_\mu^{ab} = (\omega^{-1} \partial_\mu \omega)^{ab}. \end{gathered} \tag{8.51}$$

Мы должны заменить интеграл по λ_{ab} интегралом по Λ_a, ω:

$$\prod_{a,b} \mathcal{D}\lambda_{ab} = \prod_{a} \mathcal{D}\Lambda_a \prod_{a,b,\mu} \mathcal{D}A_\mu^{ab} \prod_{a,b,\mu,\nu} \delta(F_{\mu\nu}^{ab}) \tag{8.52}$$

($F_{\mu\nu}^{ab}$ — напряженность поля Янга–Миллса).

Предположим теперь, что нам как-то удалось проинтегрировать по A_μ^{ab} (именно в этом и заключается реальная трудность). Тогда мы получаем эффективное действие, зависящее от Λ_a. Теперь действие имеет величину порядка N^2, а число переменных — порядка N. Следовательно, достаточно найти минимум по полям Λ_a, а об их флуктуациях можно не беспокоиться.

Интегрирование по A_μ^{ab} совсем не тривиально, и мы не знаем, как его выполнить. В этом отношении полезно заметить, что при равных $\Lambda_a = \Lambda$ действие W калибровочно-инвариантно и зависит только от $F_{\mu\nu}$, а так как $F_{\mu\nu} = 0$, оно вообще не зависит от A_μ. Таким образом, если мы предположим, что в вакууме имеется не зависящий от a конденсат $\{\Lambda_a\}$, мы можем сделать вывод, что мы действительно имеем дело со свободной теорией поля. В то же время функции Грина для $g(x)$ зависят от A_μ и нетривиальны. Итак, мы пришли с помощью качественных рассуждений к ожидаемой картине. Количественная проверка этих догадок пока не сделана. Однако нет сомнений, что загадка предела больших N для киральных полей будет скоро разгадана.

8.3. σ-Модель на $\mathbf{CP}^{N-1}$

Не имея возможности продолжать далее обсуждение главных киральных полей, в этом разделе мы рассмотрим другую интересную модель, а именно поле, принадлежащее факторпространству $\mathbf{CP}^{N-1} = SU(N)/SU(N-1) \times U(1)$. Оно похоже на $\boldsymbol{n}$-поле в том отношении, что в этом случае имеется простое разложение при больших N без суммирования по планарным диаграммам. С другой стороны, эта модель оказывается топологически нетривиальной и содержит инстантоны. Это позволяет количественно проанализировать эффекты, связанные с топологическим зарядом. Другой примечательной особенностью этой модели является, как мы увидим, динамическая генерация калибровочных полей.

Комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^{N-1}$ получается, по определению, из N-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^N$ отождествлением точек $(z_1, \ldots, z_N)$ и $(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_N)$ для всех комплексных $\lambda \neq 0$. Выбирая λ подходящим образом, многообразие $\mathbf{CP}^{N-1}$ можно параметризовать точками единичной сферы

$$|\boldsymbol{z}|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2 = 1 \tag{8.53}$$

с отождествлением

$$\boldsymbol{z} \sim e^{i\gamma}\boldsymbol{z}. \tag{8.54}$$

Комплексная размерность получившегося пространства равна $N - 1$.

Лагранжиан поля $\boldsymbol{z}(x)$ должен быть инвариантен относительно калибровочной группы

$$\boldsymbol{z}(x) \to e^{i\gamma(x)}\boldsymbol{z}(x). \tag{8.55}$$

Только в этом случае он будет описывать поле, принадлежащее $\mathbf{CP}^{N-1}$, а не N-мерной комплексной сфере (8.53) (что было бы то же самое, что $2N$-мерное $\boldsymbol{n}$-поле). Такой лагранжиан можно записать в виде

$$S = \frac{1}{e}\int d^2x\, |(\partial_\mu - iA_\mu)\boldsymbol{z}|^2, \tag{8.56}$$

где A_μ — новое независимое поле, которое преобразуется по правилу

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \gamma. \tag{8.57}$$

Совершенно очевидно, что лагранжиан (8.56) инвариантен относительно одновременных преобразований (8.55) и (8.57). Кроме того, так как (8.56) не содержит кинетического члена для поля A_μ, последнее может быть удалено (по крайней мере на классике) минимизацией S. Имеем

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \frac{\delta}{\delta A_\mu}\left(|\partial_\mu \boldsymbol{z}|^2 + i(\boldsymbol{z}^*\partial_\mu \boldsymbol{z} - (\partial_\mu \boldsymbol{z}^*)\boldsymbol{z})A_\mu + A_\mu^2\right) = 0. \tag{8.58}$$

Из (8.58) находим

$$A_\mu = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{z}^*\partial_\mu \boldsymbol{z} - (\partial_\mu \boldsymbol{z}^*)\boldsymbol{z}). \tag{8.59}$$

Можно подставить это значение A_μ обратно в (8.56) и получить нелинейный лагранжиан, зависящий только от поля $\boldsymbol{z}$. В случае $N = 2$ эти лагранжианы описывают $O(3)$-симметричное $\boldsymbol{n}$-поле, так как пространство $\mathbf{CP}^1$ эквивалентно двумерной сфере. Увидеть это проще всего с помощью соотношения

$$\boldsymbol{n} = (z^+\sigma z), \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{8.60}$$

(σ — матрицы Паули).

Если $z^+z = 1$, то вектор $\boldsymbol{n}$ удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{n}^2 = 1. \tag{8.61}$$

Эти формулы задают интересную с точки зрения топологии проекцию сферы S^3 в z-пространстве на сферу S^2, определяемую вектором $\boldsymbol{n}$. В математике это называется расслоением Хопфа. Для нас интересно сейчас то, что лагранжиан (8.56) со связью (8.59) может быть записан как лагранжиан $\boldsymbol{n}$-поля, где $\boldsymbol{n}$ дается проекцией Хопфа (8.60). Это можно проверить с помощью прямого вычисления или заметив, что $(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2$, выраженное через $\boldsymbol{z}$, дает нелинейный лагранжиан, содержащий только две производные и инвариантный относительно калибровочных преобразований (8.55) (так как $\boldsymbol{n}$ вообще не меняется при этих преобразованиях). Существует единственное выражение с такими свойствами и, следовательно,

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 = |(\partial_\mu - iA_\mu)\boldsymbol{z}|^2, \\ \boldsymbol{n} = z^+\sigma z, \quad A_\mu = -\frac{i}{2}[z^+\partial_\mu z - (\partial_\mu z^+)z].\end{gathered} \tag{8.62}$$

Другое полезное соотношение касается плотности топологического заряда. Имеем

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}[\partial_\mu \boldsymbol{n} \times \partial_\nu \boldsymbol{n}] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{8.63}$$

что опять-таки можно ожидать из подсчета производных, тензорных свойств и калибровочной инвариантности (а потом проверить прямым вычислением).

Еще раз подчеркнем, что возможность ввести локальное, калибровочно-инвариантное поле $\boldsymbol{n}$ имеется только в случае $\mathbf{CP}^1$. Для $\mathbf{CP}^{N-1}$ с $N > 2$ это невозможно, и нам приходится работать с «заряженными» полями $\boldsymbol{z}$. Теперь мы исследуем предел больших N, обнаруживающий некоторые интересные явления.

Запишем статистическую сумму в виде

$$\begin{aligned} Z = &\int \mathcal{D}^2\boldsymbol{z}\,\mathcal{D}A_\mu\,\delta(\boldsymbol{z}^*\boldsymbol{z}-1)\exp\Big(-\frac{1}{e_0^2}\int |(\partial_\mu - iA_\mu)\boldsymbol{z}|^2 d^2x\Big) = \\ &= \int \mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}^2\boldsymbol{z}\,\mathcal{D}A_\mu \exp\Big\{\frac{1}{e_0^2}\int \lambda\, d^2x - \frac{1}{e_0^2}\int \big(|(\partial_\mu - iA_\mu)\boldsymbol{z}|^2 + \lambda|\boldsymbol{z}|^2\big)\, d^2x\Big\} = \\ &= \int \mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}A_\mu \exp\Big\{\frac{1}{e_0^2}\int \lambda\, d^2x - N\log\det[-(\partial_\mu - iA_\mu)^2 + \lambda]\Big\}. \end{aligned} \tag{8.64}$$

В этом случае приближение седловой точки в пределе больших N прекрасно работает. В вакууме

$$\begin{gathered}\langle\lambda\rangle = m^2, \quad \langle A_\mu\rangle = 0, \\ 1 = Ne_0^2\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2(p^2+m^2)}.\end{gathered} \tag{8.65}$$

Здесь возникает новое явление. Поле A_μ первоначально не имело кинетической энергии, и его можно было удалить из лагранжиана. Если, однако, мы рассматриваем поправки по $1/N$, то используя разложение детерминанта в (8.64) вблизи седловой точки (8.65), мы получаем в квадратичном приближении

$$W_2 = \frac{N}{2}\sum_q \left(\Pi(q)v(q)v(-q) + \Pi_{\mu\nu}(q)A_\mu(q)A_\nu(-q)\right), \tag{8.66}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(q) = &\qquad = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{(k^2+m^2)((k+q)^2+m^2)}, \\ \Pi_{\mu\nu}(q) = &\qquad + \qquad = \\ = &\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(2k+q)_\mu(2k+q)_\nu}{(k^2+m^2)((k+q)^2+m^2)} - 2\delta_{\mu\nu}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2+m^2}. \end{aligned} \tag{8.67}$$

Как можно было ожидать из калибровочной инвариантности, $\Pi_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered} q_\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0, \\ \Pi_{\mu\nu}(q) \underset{q\to 0}{\approx} \frac{\text{const}}{m^2}(q^2\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu). \end{gathered} \tag{8.68}$$

Подставляя это в (8.66), мы обнаруживаем, что для больших длин волн эффективное действие содержит член вида

$$W_2 \sim \frac{N}{m^2}\int d^2x\, F_{\mu\nu}^2 + \dots . \tag{8.69}$$

Это показывает, что вследствие квантовых эффектов в системе возникает настоящее электромагнитное поле, которого не было в исходном лагранжиане. Поле z имеет заряд, пропорциональный m^2/N. Так как кулоновская энергия при $D = 2$ инфракрасно бесконечна, можно ожидать, что для квантов поля z будет иметь место конфайнмент с образованием нейтральных пар типа $z_i^* z_j$. Можно исследовать спектр с помощью уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом, но мы не будем на этом останавливаться. Мы лучше изучим топологические эффекты в пределе больших N. Рассмотрим прежде всего усредненные флуктуации топологического заряда:

$$\begin{aligned} V^{-1}\langle q^2\rangle &\sim V^{-1}\left\langle\left(\int \varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^2x\right)^2\right\rangle = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\rho}k_\mu k_\lambda\langle A_\nu A_\rho\rangle|_{k\to 0} \sim \frac{m^2}{N}. \end{aligned} \tag{8.70}$$

Как говорилось выше, для решения $U(1)$-проблемы в КХД необходимо вычислить именно такое среднее. Кроме того, (8.70) означает, что энергия основного состояния зависит от θ в случае лагранжиана $S_\theta = S + i\theta q$. Именно, имеем

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial \theta^2} = \langle q^2 \rangle \neq 0. \tag{8.71}$$

Это означает, что в модели имеется сильное нарушение CP-инвариантности, вызванное θ-членом. Чтобы это показать, заметим, что θ-член присутствует в фейнмановских диаграммах для перехода фотон–вакуум с амплитудой $\theta \varepsilon_{\mu\nu} k_\nu \,|_{k \to 0}$. Так как пропагатор фотона имеет полюс при $k^2 = 0$, этот процесс дает вклад в вакуумную энергию, что и демонстрирует соотношение (8.70). Если рассмотреть функцию Грина для нейтральных объектов, первая θ-поправка будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(p_1, p_2) &= \qquad\qquad\qquad \Big|_{k\to 0} \\ &= \theta \Gamma_\mu(p_1, p_2; k) \cdot \frac{1}{k^2} \varepsilon_{\mu n} k_\nu |_{k \to 0}. \end{aligned} \tag{8.72}$$

Волнистые линии здесь отвечают каким-нибудь нейтральным операторам, вроде $z_i^* z_j$. Вершина излучения фотона $\Gamma_\mu(p_1, p_2; k)$ должна удовлетворять соотношению

$$k_\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2; k) = 0. \tag{8.73}$$

Из (8.72) мы видим, что поправка будет отлична от нуля, только если $\Gamma_\mu(p_1, p_2; k)$ содержит члены, по крайней мере линейные по k. Их нетрудно построить:

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2; k) \sim (\varepsilon_{\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}) \varepsilon_{\mu\nu} k_\nu = p_{1\mu}(p_2 k) - p_{2\mu}(p_1 k). \tag{8.74}$$

Если подставить это в (8.72), получится

$$\Gamma^{(1)}(p_1, p_2) \sim \theta (\varepsilon_{\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}) \frac{1}{k^2} \varepsilon_{\mu\lambda} k_\lambda \varepsilon_{\mu\nu} k_\nu = \theta \varepsilon_{\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}. \tag{8.75}$$

Наличие в двухточечной функции членов, содержащих $\varepsilon_{\mu\nu}$, указывает на нарушение CP-инвариантности. Как обсуждалось выше, аналогичное явление в КХД создает некоторые нерешенные проблемы.

В заключение обсудим, до какой степени описанные выше топологические эффекты могут быть приписаны инстантонам. Наивная оценка инстантонного вклада в Z дает вклад порядка e^{-N}. Так получается потому, что действие инстантона для $\mathbf{CP}^{N-1}$-модели конечно и не зависит от N. В то же время константа связи e_0^2 ведет себя как $1/N$.

Мы получаем, следовательно, экспоненциально малый вклад. Эти наивные аргументы, однако, неверны. Однопетлевое вычисление детерминанта около многоинстантонной конфигурации сводит статистическую сумму $\mathbf{CP}^{N-1}$-модели к статистической сумме некоторой обобщенной плазмы так же, как и в случае $\mathbf{CP}^1$ (см. главу 6). Корреляционная длина, которая устанавливается в этой плазме, такова, что энтропия, идущая от флуктуаций, компенсирует малость классического вклада. Грубо говоря, происходит следующее. Одноинстантонный вклад в статистическую сумму имеет вид

$$V^{-1}\log Z^{(1)} \sim \int \frac{d\rho}{\rho^3}\exp\left(-\frac{2\pi N}{2\pi}\log(\mu\rho)^{-1}\right) = \int \frac{d\rho}{\rho^3}(\mu\rho)^N. \qquad (8.76)$$

Эта формула точна только при $\mu\rho \ll 1$, показывая, таким образом, описанное выше экспоненциальное подавление. Если, однако, мы рассматриваем плазму, а не приближение идеального газа, то инфракрасная расходимость в (8.76) обрезается при $\rho \sim \mu^{-1}$. Однако в этой точке, когда инстантоны диссоциируют (точно так же, как и в случае $O(3)$, рассмотренном в главе 6), однопетлевое приближение неприменимо, и мы сталкиваемся с проблемой сильной связи. Подсчитывая степени N, легко показать, что многопетлевые поправки к (8.76) привели бы к замене

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3}(\mu\rho)^N \to \int \frac{d\rho}{\rho^3}(f(\mu\rho))^N$$

с некоторой неизвестной функцией f, которую можно вычислить петля за петлей для малых $\mu\rho$. Использование приближения $f(x) \simeq x$ при $x \sim 1$ оправдано только качественно.

Итак, окончательный вывод состоит в следующем. При всех N мы имеем топологически нетривиальные флуктуации полей. $1/N$-приближение дает их эффективное описание. Может существовать и другое, дополнительное описание, в котором они представляются системой расплавленных инстантонов. К сожалению, строгие количественные методы для второго описания в настоящее время неизвестны. Однопетлевое (квазиклассическое) приближение представляется качественно осмысленным. Но до тех пор, пока не развиты количественные методы, вопрос о возможности описания топологических возбуждений в терминах инстантонов остается чисто лингвистическим вопросом.

8.4. Неабелева калибровочная теория

Этот случай представляет наибольший интерес. Его свойства в пределе $N \to \infty$ до некоторой степени напоминают свойства главных киральных полей. Удобно рассматривать не случай $SU(N)$, а случай $U(N) = SU(N) \times U(1)$. Здесь опять $U(1)$-часть тривиально отщепляется. Поле описывается антиэрмитовыми матрицами:

$$\begin{gathered}
(A_\mu)^j_i = -(A^*_\mu)^i_j; \quad i, j = 1, \dots, N, \\
(F_{\mu\nu})^j_i = \partial_\mu A^j_{\nu i} - \partial_\nu A^j_{\mu i} - A^k_{\mu i} A^j_{\nu k} + A^k_{\nu i} A^j_{\mu k}, \\
S = -\frac{N}{4e_0^2} \int \operatorname{Tr} F^2_{\mu\nu}\, d^4x = -\frac{N}{4e_0^2} \int (F_{\mu\nu})^j_i (F_{\mu\nu})^i_j\, d^4x.
\end{gathered} \tag{8.77}$$

Мы изменили здесь нормировку затравочной константы связи (по сравнению с предыдущими главами) так, чтобы действие имело естественный масштаб N^2 (один из множителей N идет от следа). Такая нормировка естественна, так как лагранжиан (8.77) описывает взаимодействие N^2 глюонов. Их вакуумные флуктуации дают энергию или эффективное действие порядка N^2, то есть того же масштаба, что и классическое действие (8.77). Другую проверку дает формула (2.68), выражающая асимптотическую свободу. Для переопределенной константы связи она не зависит от N.

Как и раньше, несмотря на большой множитель перед действием, наивное приближение седловой точки не работает, потому что имеется большое число полей, и нужно просуммировать все планарные диаграммы. Чтобы в этом убедиться, надо воспользоваться представлением двойных линий, как в разделе 8.2:

$$\begin{gathered}
\langle (A_\mu)^j_k (A_\nu)^l_k \rangle = \delta^l_i \delta^j_k \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \equiv \begin{matrix} i & l \\ j & k \end{matrix} = \begin{matrix} i & l \\ j & k \end{matrix}, \\
= \quad , \dots
\end{gathered} \tag{8.78}$$

В определенном смысле калибровочное поле представлено «кварком» с индексом i и «антикварком» с индексом j. Каждая «кварковая» линия в (8.78) отвечает δ-символу. Здесь слово «кварк» есть, конечно, способ выразить то, что присоединенное представление может быть представлено в виде произведения двух сопряженных фундаментальных представлений. Мы не вводили кварки как физические частицы.

В этих обозначениях логарифм статистической суммы изображается планарными фейнмановскими диаграммами:

$$\begin{aligned}
\log Z &= \quad + \quad + \quad + \dots = \\
&= N^2 f(e_0^2).
\end{aligned} \tag{8.79}$$

Проверим это. Первая диаграмма содержит суммирование $\delta_i^i \delta_k^k = N^2$. Вторая диаграмма имеет три замкнутых пути и, следовательно, содержит множитель N^3, но она пропорциональна также константе связи, которая в наших обозначениях дает множитель e_0^2/N. Таким же образом проверяется, что любая планарная диаграмма имеет такой же порядок величины, а любая непланарная диаграмма подавлена множителем $1/N$. Этот факт имеет важную топологическую интерпретацию. Возьмем первую диаграмму в (8.79) и представим себе, что она изображает два диска, лежащих один над другим. Ориентация каждого диска определяется соответствующей стрелкой на его границе. Склеим теперь «кварковую» и «антикварковую» линии. В результате топологически мы получим сферу. Любая планарная диаграмма обладает этим свойством: после склеивания всех разрезов получается сфера. Далее, согласно (8.77) каждая вершина диаграммы несет множитель N, каждый пропагатор (или ребро, место склейки нашей поверхности) дает N^{-1}, и каждая свободная грань содержит замкнутую петлю, которая дает N. Общий вклад, следовательно, равен

$$N^{V-E+F} \equiv N^{\chi}, \tag{8.80}$$

где V, E и F — числа вершин, ребер и граней, а χ — эйлерова характеристика. Для сферы $\chi = 2$, что подтверждает (8.79). Еще интересней, что каждый непланарный глюон отвечает ручке, присоединенной к сфере. Например:

$$= \qquad \sim N^{\chi} = N^0. \tag{8.81}$$

Здесь мы использовали то, что сфера с одной ручкой — это топологически тор, и для него $\chi = 0$. Тривиально, конечно, проверить (8.81) непосредственно и доказать, что все диаграммы с одним непланарным глюоном имеют величину порядка N^0. Это было бы в точности доказательством топологической инвариантности эйлеровой характеристики.

Ниже мы увидим, что это представление планарных диаграмм как поверхностей с краями является чем-то большим, нежели только удобным трюком. Именно эти поверхности можно интерпретировать как мировые поверхности цветоэлектрических струн. Но прежде, чем погрузиться в эту трудную динамическую проблему, давайте еще немного продолжим кинематический подсчет степеней, который в этой задаче дает на удивление много.

Предположим, что чисто глюонная теория обладает свойством конфайнмента. Это означает, что ее спектр состоит только из цветовых синглетов. Из этого предположения следует, что в пределе $N = \infty$ все амплитуды теории имеют только полюсы в импульсном пространстве, а все разрезы содержат дополнительный множитель $1/N$. Кроме того, число этих полюсов бесконечно. Важный физический вывод заключается в том, что сумма планарных диаграмм в предположении конфайнмента описывает бесконечное число стабильных частиц растущих масс. Следующие поправки по $1/N$ превратили бы эти частицы в узкие резонансы.

Чтобы доказать эти утверждения, рассмотрим корреляционные функции каких-нибудь синглетных операторов, скажем,

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}^2(x)). \tag{8.82}$$

С помощью представления двойных линий мы можем найти старшую степень N в корреляторах:

$$\begin{aligned} \langle\varepsilon\varepsilon\rangle &= N^{-2} \qquad\qquad \sim N^{-2}N^2 \sim N^0, \\ \langle\varepsilon\varepsilon\varepsilon\rangle &= N^{-3} \qquad\qquad \sim N^{-3}N^2 \sim N^{-1} \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{8.83}$$

Предположим теперь, что в корреляционной функции $\langle\varepsilon\varepsilon\rangle$ имеется полюс. Он описывает некоторое одночастичное состояние $|r\rangle$. Согласно первому из уравнений (8.83), имеем

$$\begin{aligned} \langle\varepsilon\varepsilon\rangle &= \quad {}^{r} \quad + \cdots \sim N^0, \\ \langle 0|\varepsilon|r\rangle &\sim N^0. \end{aligned} \tag{8.84}$$

В тоже время второе из уравнений (8.83) дает

$$\langle\varepsilon\varepsilon\varepsilon\rangle = \qquad + \qquad + \cdots \sim N^{-1}. \tag{8.85}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad {}^{r_2}{}^{r_1} \\ \langle 0|\varepsilon|r_1 r_2\rangle &= {}^{r_1} \qquad {}^{r_2} \sim N^{-1}, \\ & \qquad\qquad {}^{r_3} \\ g &= \qquad\qquad \sim N^{-1}. \end{aligned} \tag{8.86}$$

Эти оценки показывают, что корреляционные функции при $N = \infty$ не имеют порогов и что ширина резонансных состояний имеет порядок $g^2 \sim N$. Такой же масштаб и у амплитуд двухчастичного рассеяния.

Совершенно ясно, что число частиц в теории должно быть бесконечным и что их массы должны возрастать. Это следует из представления

$$\langle\varepsilon(p)\varepsilon(-p)\rangle = \sum_r \frac{g_r^2}{p^2 + m_r^2}. \tag{8.87}$$

Если рассмотреть предел $p^2 \to \infty$, то при конечном числе резонансов мы получили бы из (8.87) поведение $\sim p^{-2}$. Но, как мы знаем, в случае асимптотической свободы правильный ответ содержит степени логарифма $\log^{-1}(p/m)$. Это совместно с (8.87) только при бесконечном числе полюсов.

Это совершенно естественный с точки зрения струнных представлений результат. Действительно, как мы видели в главе 3, в фазе конфайнмента элементарные возбуждения образуются из замкнутых струн электрического потока. Такие замкнутые струны имеют бесконечно много колебательных мод (мы изучим их в главе 9), каждая из которых отвечает частице и создает полюс в (8.87). Легко дать грубую оценку числа таких состояний с данной массой. Для струны длины L число ее конфигураций растет как e^{cL} (c — некоторая константа). Масса каждой конфигурации пропорциональна L. Следовательно, число $N(M)$ частиц массы M порядка

$$N(M) \sim e^{cM}. \tag{8.88}$$

В главе 9 мы обсудим это подробнее.

Другое важное свойство предела больших N относится к фазовому множителю $\phi(C)$. Покажем, что поле

$$\phi(C) = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{P}\exp\oint_C A_\mu\,dx^\mu\right) \tag{8.89}$$

обладает следующим свойством факторизации:[1]

$$\langle\phi(C_1)\phi(C_2)\rangle \underset{N\to\infty}{\simeq} \langle\phi(C_1)\rangle\langle\phi(C_2)\rangle. \tag{8.90}$$

Это опять-таки можно немедленно увидеть из представления «двойных линий». Имеем

$$\langle\phi(C)\rangle = 1 + \frac{1}{N}\quad C \qquad + \dots = 1 + \frac{1}{N}\qquad\qquad + \dots \sim N^0, \tag{8.91}$$

$$\begin{aligned} &\langle\phi(C_1)\phi(C_2)\rangle - \langle\phi(C_1)\rangle\langle\phi(C_2)\rangle = \\ &= \frac{1}{N^2}\quad C_1 \qquad C_2 \quad + \dots = \frac{1}{N^2}\quad C_1 \qquad C_2 \quad + \dots \sim N^{-1}. \end{aligned} \tag{8.92}$$

Из уравнения (8.90) следует, что поле $\phi(C)$ можно рассматривать как классическое поле в пространстве петель, так как его флуктуациями $\langle(\phi(C) - \langle\phi(C)\rangle)^2\rangle$ можно пренебречь. Это, однако, не означает, что поле A_μ само становится классическим в пределе больших N.

[1] Это свойство было открыто А. А. Мигдалом (1977).

Классическое поле $W(C) = \langle\phi(C)\rangle$ удовлетворяет некоторому замкнутому нелинейному уравнению в пространстве петель, которое следует из (7.41). Имеем

$$\frac{\partial^2 W(C)}{\partial x^2(s)} = -e \oint \delta(x(s) - y)\dot{x}_\mu(s)\, dy_\mu\, W(\overline{C})W(\overline{\overline{C}}). \tag{8.93}$$

Используя рассуждения главы 7, можно показать, что пертурбативное решение (8.93) дает, как это и должно быть, все планарные диаграммы в неперенормированном виде. Однако настоящее назначение этого уравнения состоит в том, что оно могло бы помочь выбрать из всех возможных теорий струн ту, которая описывает предел больших N калибровочной теории. Этот важнейший вопрос, к сожалению, пока не решен. Главная трудность заключается в неадекватности нашего понимания теории струн. Это будет обсуждаться в главе 10. Другая проблема связана со следующим неприятным свойством уравнения (8.93). Это уравнение справедливо только при некоторой определенной регуляризации калибровочной теории и теории струн. Поэтому может случиться, что «правильная» струнная теория не будет удовлетворять (8.93), потому что она была регуляризована по-другому. Это затрудняет попытки решить (8.93) с помощью струнного анзатца. Быть может, было бы легче непосредственно сравнить ультрафиолетовое поведение в случае теории струн и в случае асимптотически свободных глюонов. Описанная ситуация с петлевым уравнением напоминает ситуацию с уравнениями Шредингера для теории поля. Хотя эти функциональные уравнения, в принципе, справедливы в регуляризованной теории, и с некоторым трудом их можно перенормировать, их практическое использование было до сих пор весьма ограниченным. Более удобным оказывается изучать их решения в виде континуальных интегралов. В следующей главе мы опишем подобный подход к теории струн.

Глава 9
Квантовые струны и случайные поверхности

В предыдущих главах мы видели, что, в то время как киральные поля в пределе большого N описывают свободные частицы, калибровочные теории описывают невзаимодействующие струны (или описываются ими). Понятие «свободной струны» совсем не тривиально, и до сих пор мы пользовались этим термином довольно небрежно. Цель этой главы — сформулировать теорию струн. К сожалению, построение этой теории еще не завершено. Поэтому ниже мы дадим обзор имеющихся результатов и наметим возможные направления общего развития.

Мы начнем с очень простого специального случая бесконечно коротких струн или, что то же самое, точечных частиц. После этой разминки мы перейдем к нашей главной цели — общей теории струн.

9.1. Предварительные математические сведения: суммирование по случайным путям

Положение точечной частицы описывается 4-вектором x_μ. Задача состоит в вычислении амплитуды $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ перехода частицы из точки $\boldsymbol{x}$ в точку $\boldsymbol{x}'$. Как обычно, эта амплитуда дается суммой по всем возможным траекториям, соединяющим точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$. В евклидовом пространстве она равна

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{(P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'})} \exp\left(-\frac{S[P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}]}{\hbar}\right). \tag{9.1}$$

Здесь $P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}$ обозначает путь, соединяющий $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$, и $S[P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}]$ — классическое действие для данного пути. В качестве S выбирается простейшая инвариантная характеристика пути — его длина. Таким образом, мы имеем следующее выражение для действия:

$$S[P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}] = m_0 L(P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}), \tag{9.2}$$

где m_0 — некоторый параметр (связанный с массой частицы), а L — длина пути $P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}$.

Теперь наша цель состоит в том, чтобы правильно определить сумму в (9.1) и вычислить ее. Если бы у нас была решетка в $\boldsymbol{x}$-пространстве, это было бы легко сделать, так как на решетке имеется лишь конечное число путей $P_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}$ заданной длины. Таким образом, один из приемлемых путей решения задачи состоит в том, чтобы, начав с решетки, вычислить сумму (9.1) и устремить затем шаг решетки $a \to 0$, одновременно подбирая $m_0(a)$ так, чтобы сделать амплитуду $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ конечной. Поскольку задача о случайном блуждании на решетке решается точно, это приведет к желаемому ответу. Единственный недостаток этого способа состоит в том, что его нельзя обобщить на случай поверхностей. Поэтому мы не будем применять этот стандартный прием и постараемся развить непрерывную теорию *ab initio*.

В непрерывной теории действие принимает вид

$$S = m_0 \int\limits_0^1 d\tau \left[\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{9.3}$$

где мы параметризовали путь функцией $x_\mu(\tau)$, причем $x_\mu(0) = x_\mu$, $x_\mu(1) = x'_\mu$. Это действие инвариантно относительно «калибровочных преобразований», или «диффеоморфизмов», или «репараметризаций», даваемых заменами

$$x_\mu(\tau) \to x_\mu(f(\tau)) \tag{9.4}$$

с функцией $f(\tau)$, удовлетворяющей условиям

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \frac{df(\tau)}{d\tau} > 0. \tag{9.5}$$

Здесь мы встречаемся с двумя трудностями. Во-первых, нам нужно вычислить интеграл с действием (9.3), содержащим квадратный корень. Во-вторых, мера интегрирования должна быть определена так, чтобы учитывать $x_\mu(\tau)$ по модулю репараметризаций (9.4), (очевидно, что функции $x_\mu(\tau)$ и $x_\mu(f(\tau))$ описывают один и тот же путь). Сейчас мы покажем, как преодолеть эти трудности, которые в некоторой степени компенсируют друг друга.

Мы хотим вычислить интеграл

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \int \left(\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)}\right) \exp\left(-m_0 \int\limits_0^1 (\dot{\boldsymbol{x}}^2(\tau))^{1/2}\, d\tau\right), \tag{9.6}$$

где через $\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$ мы обозначили меру интегрирования по фактор-пространству, полученному из пространства всех функций $x_\mu(\tau)$ отождествлением тех функций, которые связаны репараметризациями. Иными словами, $\mathcal{D}f(\tau)$ можно понимать как объем калибровочной группы. Запишем (9.6) в виде

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \int \frac{\mathcal{D}h(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} \exp\left(-m_0 \int_0^1 (h(\tau))^{1/2}\, d\tau\right) \times \\ \times \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\, \delta(\dot{\boldsymbol{x}}^2(\tau) - h(\tau)), \end{aligned} \tag{9.7}$$

где мы ввели «метрический тензор» $h(\tau)$ на пути и вставили функциональную δ-функцию под интеграл. Мы начнем с вычисления второго интеграла в (9.7) и для определения δ-функции введем множитель Лагранжа:

$$\begin{gathered} \mathcal{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', h(\tau)) \equiv \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\, \delta(\dot{\boldsymbol{x}}^2(\tau) - h(\tau)) = \\ = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{D}\lambda(\tau) \exp\left(\int_0^1 \lambda(\tau)h(\tau)\, d\tau\right) \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau) \exp\left(-\int_0^1 \lambda(\tau)\dot{\boldsymbol{x}}^2(\tau)\, d\tau\right). \end{gathered} \tag{9.8}$$

Действие в (9.8) инвариантно при репараметризациях, если принять следующие законы преобразования $\boldsymbol{x}$, h и λ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\tau) &\to \boldsymbol{x}(f(\tau)), \\ h(\tau) &\to \left(\frac{df}{d\tau}\right)^2 h(f(\tau)), \\ \lambda(\tau) &\to \left(\frac{df}{d\tau}\right)^{-1} \lambda(f(\tau)). \end{aligned} \tag{9.9}$$

Меры интегрирования и обрезание должны быть определены так, чтобы сохранить (9.9). В частности, заведомо неправильно будет разделить интервал $0 < \tau < 1$ на равные маленькие куски, так как такая структура нарушает калибровочную инвариантность. Вместо этого размеры кусков следует определить соотношением

$$h(\tau_j)(\Delta\tau_j)^2 = \varepsilon^2, \tag{9.10}$$

так как $h(\tau)$ — метрический тензор.

Удобно ввести вместо «тензора» $\lambda(\tau)$ «скалярный» множитель Лагранжа $\alpha(\tau)$:

$$\begin{aligned}&\lambda(\tau) \equiv \alpha(\tau)h(\tau)^{-1/2},\\&\alpha(\tau) \to \alpha(f(\tau)).\end{aligned} \tag{9.11}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}',h(\tau)) = &\int \mathcal{D}\alpha(\tau)\,\exp\int\limits_0^1 \alpha(\tau)(h(\tau))^{1/2}\,d\tau\times\\&\times\int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\,\exp\left\{-\int\limits_0^1 \alpha(\tau)\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2(\tau)}{(h(\tau))^{1/2}}\,d\tau\right\}.\end{aligned} \tag{9.12}$$

Сейчас мы покажем, что в непрерывном пределе функцию $\alpha(\tau)$ в (9.12) можно заменить на константу $\langle\alpha\rangle$ аналогично тому, как это было в главе 8 с σ-моделью в пределе большого N. Удобно сделать еще одну (последнюю) замену переменных в (9.12), введя вместо τ собственное время t:

$$t = \int\limits_0^\tau (h(\tau_1))^{1/2}\,d\tau_1; \quad T = t(1), \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}',T) = &\int \mathcal{D}\alpha(t)\,\exp\int\limits_0^T \alpha(t)\,dt\times\\&\times\int_{\substack{\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}}} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\,\exp\left(-\int\limits_0^T \alpha(t)\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)\,dt\right).\end{aligned} \tag{9.14}$$

Согласно (9.10) континуальный интеграл в (9.14) определяется обычным способом с помощью деления интервала $[0,T]$ на равные части

$$\Delta t_j = \varepsilon. \tag{9.15}$$

С помощью регуляризации (9.15) нетрудно вычислить гауссов интеграл в (9.14). Сделаем это, хотя, как мы объясним позже, конечный ответ можно было бы предвидеть и без такого вычисления. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{x(T)=x'\\ x(0)=x}} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\,\exp\left[-\int\limits_0^T \alpha(t)\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)\,dt\right] \simeq \\
&\simeq \int \prod_{t=0}^{T/\varepsilon} d\boldsymbol{x}_t\,\exp\left[-\sum_{t=0}^{T/\varepsilon}\alpha_t\frac{(\boldsymbol{x}_{t+1}-\boldsymbol{x}_t)^2}{\varepsilon}\right] = \\
&= \int \prod_{t=0}^{T/\varepsilon} d\boldsymbol{V}_t\delta\Big(\sum_{t=0}^{T/\varepsilon}\boldsymbol{V}_t+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\Big)\exp\left[-\sum_{t=0}^{T/\varepsilon}\frac{\alpha_t\boldsymbol{V}_t^2}{\varepsilon}\right] = \\
&= \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^D}\,\exp(i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'))\prod_t\int d\boldsymbol{V}_t\,\exp\left(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{V}_t-\frac{\alpha_t\boldsymbol{V}_t^2}{\varepsilon}\right) = \\
&= \mathrm{const}\Big(\prod_{t=0}^{T/\varepsilon}\alpha_t^{-D/2}\Big)\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})^2}{\varepsilon\sum_t\alpha_t^{-1}}\right]\Big(\sum_t\varepsilon\alpha_t^{-1}\Big)^{-D/2}.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Теперь нам нужно вычислить сложный на вид интеграл

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}',\,T)\sim\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Big(\prod_{t=0}^{T/\varepsilon}d\alpha_t\,\alpha_t^{-D/2}e^{\varepsilon\alpha_t}\Big)\Phi\Big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';\,\varepsilon\sum_t\alpha_t^{-1}\Big), \tag{9.17}$$

где

$$\Phi(\boldsymbol{R},\,\alpha)=\alpha^{-D/2}\exp(-\boldsymbol{R}^2/\alpha).$$

Основная идея, позволяющая вычислить (9.17) в пределе $\varepsilon\to 0$, основана на «законе больших чисел». Именно, интересный кусок Φ в интеграле зависит только от $\sum\limits_t\alpha_t^{-1}$. Каждое α_t флуктуирует вблизи среднего значения $\langle\alpha\rangle$ с величиной флуктуаций ~ 1, причем среднее определяется как

$$
\begin{gathered}
\overline{f(\alpha)} = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\alpha\, \alpha^{-D/2} e^{\varepsilon\alpha} f(\alpha) \left[\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\alpha\, \alpha^{-D/2} e^{\varepsilon\alpha} \right]^{-1}, \\
\varepsilon^2 \overline{(\Delta\alpha)^2} = \varepsilon \left(\overline{\alpha^2} - (\overline{\alpha})^2 \right) \sim 1, \\
\overline{\left(\Delta \frac{1}{\varepsilon\alpha} \right)^2} \sim 1, \\
\left(\overline{\sum_t \left(\Delta \frac{1}{\varepsilon\alpha_t} \right)^2} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{T}{\varepsilon} \right)^{1/2} \ll \overline{\sum_t \frac{1}{\varepsilon\alpha_t}} \sim \frac{T}{\varepsilon}.
\end{gathered}
\tag{9.18}
$$

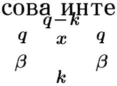
В результате в пределе $\varepsilon \to 0$ формула (9.17) дает

$$
\mathcal{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', T) = \mathrm{const}\, T^{-D/2} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})^2}{T} \langle\alpha\rangle + T\langle\alpha\rangle \right). \tag{9.19}
$$

В процессе вывода становится ясно, что, прибегая к тупой дискретизации (9.16), мы действуем не лучшим образом. Внимательно посмотрев на (9.14), можно обнаружить, что флуктуации $\alpha(t)$ являются короткодействующими. В самом деле, если мы представим

$$
\alpha(t) = \langle\alpha\rangle + \beta(t), \tag{9.20}
$$

то билинейный по β член W_{II} в эффективном действии, полученный после гауссова интегрирования по x, имеет вид

$W_{\mathrm{II}} =$ 

$$
\begin{gathered}
= \int \frac{dq}{2\pi} \beta(q)\beta(-q) \int \frac{dk}{2\pi} \frac{[k(q-k)]^2}{k^2(q-k)^2\langle\alpha\rangle^2} \simeq \\
\simeq \varepsilon \sum_q \beta(q)\beta(-q),
\end{gathered}
\tag{9.21}
$$

где вершина βxx-взаимодействия определяется членом $\int \beta(t)\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)\, dt$ в лагранжиане. Это вычисление показывает, что поле β не приобретает кинетической энергии и, следовательно, имеет корреляцию при $t \sim \varepsilon$. Иными словами, это означает, что во всех выражениях, содержащих «большое число» переменных α_t, подобных $\int \alpha(t)\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)\, dt$ (при условии гладкости $\boldsymbol{x}(t)$), множитель $\alpha(t)$ можно смело заменять на среднее значение $\langle\alpha\rangle$. Это важный урок.

Таким образом, мы решили первую часть задачи, и получили ответ

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}',\,h(\tau)) = \int_{\substack{\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{x}'}} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\,\delta(\dot{\boldsymbol{x}}^2(\tau) - h(\tau)) =$$

$$= \mathrm{const}\, T^{-D/2} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{T}\langle\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle T\right), \qquad (9.22)$$

$$\langle\alpha\rangle \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad T = \int\limits_0^1 d\tau\,(h(\tau))^{1/2}.$$

Теперь нужно завершить интегрирование в (9.7). Прежде всего заметим, что (9.22) зависит от $h(\tau)$ только через T. Это, конечно, не случайность, поскольку T — единственный инвариант в одномерной римановой геометрии (такие величины, как скалярная кривизна и т. п. в этом случае равны нулю). Естественно ожидать, что интегрирование по $\mathcal{D}h(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$ в (9.7) превратится в точности в интегрирование по dT. Это и в самом деле так, однако для будущих обобщений полезно вывести это подробно.

9.2. Меры в пространствах метрик и диффеоморфизмов

Чтобы определить инвариантную меру интегрирования по h, мы должны начать с определения метрики в пространстве метрик, и затем использовать «метрический тензор» в этом функциональном пространстве для того, чтобы найти элемент объема. Единственное локальное выражение для «расстояния» $||\delta h||$ между метриками $h(\tau)$ и $h(\tau)+\delta h(\tau)$ имеет вид

$$||\delta h||^2 = \int\limits_0^1 d\tau\,(\delta h(\tau))^2 h^{-3/2}(\tau). \qquad (9.23)$$

Совершенно очевидно, что (9.23) инвариантно по отношению к репараметризациям.

Заметим теперь, что любую метрику $h(\tau)$ можно сделать не зависящей от τ с помощью соответствующим образом выбранного калибровочного преобразования $f(\tau)$. Согласно (9.9), это означает, что h можно представить в виде

$$h(\tau) = T^2\left(\frac{df}{d\tau}\right)^2 \qquad (9.24)$$

при некоторых T и f. Наша стратегия будет состоять в том, чтобы перейти от интегрирования по $\mathcal{D}h(\tau)$ к интегрированию по T и f. Согласно общим правилам,

$$\mathcal{D}h(\tau) = dT\,\mathcal{D}f(\tau) \times (\text{якобиан}). \tag{9.25}$$

Если мы сумеем найти якобиан, наша задача будет решена, так как вместо $\mathcal{D}h(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$ мы получим хорошо определенный интеграл по dT. Простейший способ вычислить меру в (9.25) состоит в том, чтобы подставить разложение (9.24) в (9.23) и выразить «расстояние» в новых координатах.

Вычисление существенно упрощается, если пользоваться общей геометрической формулой (полезной для будущих обобщений), которую мы сейчас выведем в общем случае n измерений. Предположим, что у нас есть два метрических тензора $g_{ab}(\xi)$ и $h_{ab}(\xi)$, где ξ — координаты на некотором n-мерном римановом многообразии. Пусть эти метрики связаны преобразованием координат (или диффеоморфизмом) $\xi \to f(\xi)$:

$$g = h^{(f)}, \tag{9.26a}$$

или, в явном виде,

$$g_{ab}(\xi) = \frac{\partial f^c(\xi)}{\partial \xi^a}\frac{\partial f^d(\xi)}{\partial \xi^b} h_{cd}(f(\xi)). \tag{9.26b}$$

Мы хотим доказать следующее соотношение, связывающее малые вариации g, h и f,

$$\begin{aligned}\delta g_{ab} &= [\delta h_{ab} + \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a]^{(f)} = \\ &= \frac{\partial f^c}{\partial \xi^a}\frac{\partial f^d}{\partial \xi^b}(\delta h_{cd} + \nabla_c \omega_d + \nabla_d \omega_c)(f(\xi)),\end{aligned} \tag{9.27}$$

где

$$\omega^a(\xi) = \delta f^a(f^{-1}(\xi)). \tag{9.28}$$

Здесь под ∇_a подразумевается стандартная ковариантная производная, вычисленная в метрике h, а символ f^{-1} означает обратную функцию. Формулу (9.27) можно проверить прямым вычислением, но легче понять ее без этого с помощью следующего рассуждения, основанного на групповом свойстве диффеоморфизмов. Мы можем рассмотреть преобразование $f+\delta f$ как результат последовательного применения преобразования f и инфинитезимального преобразования $1+\omega$. Следовательно, достаточно найти вариацию метрики при бесконечно малом преобразовании $1+\omega$, которая дается выражением в квадратных скобках в (9.27).

Заметим также, что аналогичные формулы для калибровочных полей имеют вид

$$\begin{gathered} A_\mu = f^{-1} B_\mu f + f^{-1} \partial_\mu f, \\ \delta A_\mu = f^{-1} [\delta B_\mu + \nabla_\mu \omega] f, \\ \omega = \delta f\, f^{-1}; \quad \nabla_\mu \omega = \partial_\mu \omega + [B_\mu, \omega] \end{gathered} \tag{9.29}$$

(здесь $f(x)$ обозначает калибровочное преобразование и принимает значения в соответствующей группе).

Применим теперь эти общие геометрические формулы к нашему специальному случаю. Подстановка (9.24) в (9.23) дает

$$\begin{aligned} ||\delta h||^2 &= \int d\tau\, h^{-3/2}(\tau) \left(\frac{df}{d\tau}\right)^4 [T\delta T + \dot\omega]^2 = \\ &= \int_0^1 d\tau \left(\frac{df}{d\tau}\right)^{-3} \left(\frac{df}{d\tau}\right)^4 T^{-3} (T\delta T + \dot\omega[f])^2 = \\ &= \frac{(\delta T)^2}{T} + T^{-3} \int_0^1 df\, \dot\omega^2(f). \end{aligned} \tag{9.30}$$

Здесь $\dot\omega(f) = d\omega/df$, и использовано соотношение $\omega(1) = \omega(0) = 0$, вытекающее из граничных условий $f(1) = 1$, $f(0) = 0$.

На следующем шаге определим меру и метрику в пространстве диффеоморфизмов. Так же, как и в случае обычных групп, существует единственная метрика, инвариантная по отношению к левому и правому умножению. Она дается следующей формулой

$$\begin{gathered} ||\delta f||^2 = \int h^{1/2} h_{ab}(\xi) \omega^a(\xi) \omega^b(\xi)\, d^n\xi, \\ \omega^a(\xi) = \delta f^a(f^{-1}(\xi)). \end{gathered} \tag{9.31}$$

Эта формула — следствие двух условий инвариантности. Рассмотрим сперва «правое умножение», а именно замену

$$\begin{gathered} f \to f \circ \alpha, \\ f(\xi) \to f(\alpha(\xi)). \end{gathered} \tag{9.32}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered} f^{-1}(\xi) \to \alpha^{-1}(f^{-1}(\xi)), \\ \delta f(\xi) \to \delta f(\alpha(\xi)), \\ \omega(\xi) \to \delta f(\alpha(\alpha^{-1}(f^{-1}(\xi))) = \omega(\xi). \end{gathered} \tag{9.33}$$

Таким образом, уже сама форма $\omega(\xi)$ инвариантна при «правом умножении» на диффеоморфизм. Если мы рассмотрим теперь «левое умножение», мы получим

$$\begin{aligned}
f &\to \beta \circ f, \\
f^a(\xi) &\to \beta^a(f(\xi)), \\
\delta f^a(\xi) &\to \frac{\partial \beta^a(f)}{\partial f^b} \delta f^b(\xi), \\
\delta f^a(f^{-1}(\xi)) &\to \frac{\partial \beta^a(\beta^{-1})}{\partial (\beta^{-1})^b} \delta f^b(f^{-1}(\beta^{-1}(\xi))), \\
\omega^a(\xi) &\to \frac{\partial \beta^a(\beta^{-1})}{\partial (\beta^{-1})^b} \omega^b(\beta^{-1}(\xi)).
\end{aligned} \tag{9.34}$$

В итоге ω^a при умножении слева преобразуется как обычный (контравариантный) вектор. Если одновременно преобразовывать метрику h_{ab}, то расстояние (9.31) не изменится. Формула (9.31) есть, очевидно, единственное локальное выражение с этими двумя свойствами инвариантности. Оно обобщает хорошо известные двусторонне-инвариантные метрики Киллинга на конечномерных группах. В конечномерном случае, если f — элемент группы, метрика Киллинга дается выражением

$$||\delta f||^2 = \mathrm{Tr}(\omega^2), \quad \omega = \delta f \cdot f^{-1}, \tag{9.35}$$

которое инвариантно при заменах

$$f \to \beta \cdot f \cdot \alpha; \quad \omega \to \beta \cdot \omega \cdot \beta^{-1}, \tag{9.36}$$

где точки означают обычное умножение матриц.

Диффеоморфизмы, образуя бесконечномерную группу, ведут себя аналогично конечномерным группам. Единственная существенная особенность состоит в том, что, как видно из (9.31), нам пришлось использовать метрику h_{ab} исходного многообразия, чтобы определить аналог следа в (9.35).

Разумеется, наши манипуляции с метриками в функциональных пространствах имеют смысл только после того как произведена инвариантная регуляризация и перенормировка. Это будет сделано во всех последующих приложениях.

Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что

$$||\delta f||^2 = T^{-3} \int_0^1 \dot{\omega}^2(f)\, df, \quad \omega = \delta f. \tag{9.37}$$

После замены $t = T \cdot f$, $\omega \to T\varepsilon$ наши формулы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -\delta h\|^2 &= \frac{(\delta T)^2}{T} + \int_0^T dt\, \dot{\varepsilon}^2(t), \\ -\delta f\|^2 &= \int_0^T dt\, \varepsilon^2(t). \end{aligned} \tag{9.38}$$

Из (9.38) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}h(\tau) &= \frac{dT}{\sqrt{T}} \det{}^{1/2} \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) \mathcal{D}f(\tau), \\ \frac{\mathcal{D}h(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} &= \frac{dT}{\sqrt{T}} \det 2^{1/2} \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right), \end{aligned} \tag{9.39}$$

и, следовательно, мы нашли желаемый якобиан. Теперь пора регуляризовать детерминант в (9.39) и вычислить его. Расходимость в (9.39) отражает формальный характер наших манипуляций с бесконечномерными мерами. Однако мы знаем, что ультрафиолетовые расходимости, согласно (9.15), следует обрезать, расщепляя интервал на малые части равной длины, так как наш метрический тензор на интервале $[0, T]$ равен 1. Есть много других более удобных регуляризаций, в сущности, эквивалентных описанной. Мы воспользуемся следующим выражением:

$$\log \det_R \left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) = -\int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \sum_n e^{-\tau\lambda_n}, \tag{9.40}$$

где $\lambda_n = \pi^2 n^2 T^{-2}$ — собственные значения оператора $-d^2/dt^2$. Вклад (9.40) от тех n, при которых $\lambda_n \ll \varepsilon^{-2}$, равен $\log(1/\lambda_n\varepsilon^2)$, в то время как гармоники с $\pi n T^{-1} \gg \varepsilon^{-1}$ дают пренебрежимо малый вклад. Но $\pi n/T$ — это волновой вектор, соответствующий собственной функции

$$\psi_n \sim \sin(\pi n t/T) \tag{9.41}$$

оператора $-d^2/dt^2$. В итоге определение (9.40) правильно учитывает моды, медленно меняющиеся на интервалах $\sim \varepsilon$, и обрезает высшие моды. Следовательно, ε играет роль шага решетки. Немного позже мы увидим, что после перенормировки мы можем устремить ε к нулю и конкретная форма обрезания несущественна.

Для практических вычислений представим сумму в (9.40) в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2\tau/T^2) &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-\pi^2n^2\tau/T^2)-\frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dn\,\exp(-\pi^2n^2\tau/T^2)-\frac{1}{2}+O(\exp(-c/\tau)) = \\ &= \frac{T}{2\sqrt{\pi\tau}}-\frac{1}{2}+O(\exp(-c/\tau)),\end{aligned} \tag{9.42}$$

где экспоненциальная малость поправки следует из формулы суммирования Пуассона. Далее,

$$\begin{aligned}&-\log\det_R\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) = \int\limits_{\varepsilon^2}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2\tau/T^2) = \\ &= \int\limits_{(\varepsilon/T)^2}^{\infty}\frac{dx}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2x) = \\ &= \int\limits_{(\varepsilon/T)^2}^{1}\frac{dx}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2x)+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2x) = \\ &= \int\limits_{(\varepsilon/T)^2}^{1}\frac{dx}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}-\frac{1}{2}\right)+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2x)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\right)+ \\ &\quad+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi^2n^2x).\end{aligned} \tag{9.43}$$

Два последних члена в последней формуле не зависят от T. Поэтому

$$-\log\det\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{T}{\varepsilon\sqrt{\pi}}-\log\frac{T}{\varepsilon}. \tag{9.44}$$

Подставляя это выражение в (9.39), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{D}h(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} &= \text{const}\cdot\exp(-T/2\varepsilon\sqrt{\pi})\,\frac{dT}{\sqrt{T}}\cdot T^{1/2} = \\ &= \text{const}\cdot\exp(-T/2\varepsilon\sqrt{\pi})\,dT.\end{aligned}\tag{9.45}$$

Все расходимости содержатся в постоянном множителе и в члене $\exp(-T/2\varepsilon\sqrt{\pi})$.

Теперь мы готовы к вычислению (9.6). Собирая (9.45), (9.22) и (9.7), находим

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}') &= \text{const}\int\limits_0^\infty dT\,\exp\left\{-\left(m_0-\frac{\text{const}}{\varepsilon}\right)T\right\}\times \\ &\qquad\times T^{-D/2}\exp(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2/\varepsilon T) = \\ &= \text{const}\int\limits_0^\infty dT\,\exp(-\mu\varepsilon T)T^{-D/2}\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{\varepsilon T}\right) = \\ &= \text{const}\int\frac{d^D\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+\mu}\exp(i\boldsymbol{p}(x-x')), \\ \mu &= \varepsilon^{-1}(m_0-m_{0,\text{cr}})\equiv\varepsilon^{-1}\left(m_0-\frac{\text{const}}{\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{9.46}$$

Все наши выкладки имеют смысл, если характерные значения T в интеграле (9.46) много больше обрезания (или «параметра решетки») ε. Следовательно, интеграл (9.6) имеет непрерывный предел только тогда, когда значение m_0 выбрано близким к критическому, или, иными словами, мы должны брать предел $\varepsilon\to 0$ для обрезания одновременно с пределом $m_0(\varepsilon)\to m_{0,\text{cr}}$. В этом случае члены вида $e^{T/\varepsilon}$ будут скомпенсированы, и мы получим непрерывную теорию. Этот результат легко понять и с точки зрения решеточной регуляризации. На решетке имеем

$$G(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}') = \sum_{L=0}^\infty N_L(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}')e^{-m_0L},\tag{9.47}$$

где $N_L(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}')$ — число путей длины L, соединяющих точки x и x'. Мы знаем, $N_L(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{x}')\sim c^L$ что при больших L, где c зависит от вида решетки. Видно, что при $m_0>\log c$ в (9.47) существенны пути с длиной порядка параметра решетки, и непрерывного предела нет. Но по мере приближения m_0 к критическому значению $m_{0,\text{cr}}=\log c$, типичные значения $L \sim (m_0 - m_{0,\text{cr}})^{-1}$ становятся много больше единицы, теория становится непрерывной и перестает зависеть от решетки. Наше описание в точности соответствует этому пределу.

Из (9.46) видно, что корреляционная длина или физическая масса имеют нетривиальный критический индекс

$$\tau_{\text{corr}}^{-1} \sim m_{\text{phys}} = \sqrt{\mu} \sim (m_0 - m_{0,\text{cr}})^{1/2}. \tag{9.48}$$

Процедура перенормировки в этом случае состоит в том, чтобы выразить все величины через физическую массу и выделить несущественный постоянный множитель в (9.46). После этого мы получаем конечную амплитуду в пределе $\varepsilon \to 0$.

Для будущих обобщений полезно распространить развитый выше формализм на замкнутые пути.

9.3. Замкнутые пути

В этом случае имеются некоторые технические отличия при интегрировании по метрикам. Начнем с интегрирования по $\boldsymbol{x}(\tau)$, предварительно заменив множитель Лагранжа его средним значением, которое мы положим равным $1/2$. Мы всегда можем достичь этой нормировки изменением масштаба. Имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{K}[h(\tau)] = \int_{\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}(\tau)} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\, \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \dot{\boldsymbol{x}}^2\, d\tau\right), \\ T = \int_0^1 h^{1/2}(\tau)\, d\tau.\end{gathered} \tag{9.49}$$

Прежде всего мы должны устранить тривиальную расходимость в (9.49), связанную с тем, что интеграл обладает трансляционной инвариантностью $x_\mu \to x_\mu + c_\mu$, и поэтому следует зафиксировать некоторую точку нашей петли. Это удобнее всего сделать, умножая меру в (9.49) на «единицу»:

$$\int d\boldsymbol{c} \left(\frac{1}{T}\int_0^T \delta(\boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{c})\, d\tau\right) = 1, \tag{9.50}$$

и опуская $\int d\boldsymbol{c} = V$. После этого (выбрав $\boldsymbol{c} = 0$) получаем

$$\mathcal{K}[h(\tau)] = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau) \left(\frac{1}{T}\int_0^T \delta(\boldsymbol{x}(\tau))\, d\tau\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \dot{\boldsymbol{x}}^2\, d\tau\right). \tag{9.51}$$

В этой формуле δ-функция позволяет исключить опасную нулевую моду оператора $-d^2/dt^2$. Если разложить

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \Big(\boldsymbol{a}_0 + \sum_{n\neq 0} \boldsymbol{a}_n \exp(2\pi i n\tau/T)\Big)\frac{1}{\sqrt{T}}, \tag{9.52}$$

то

$$\int_0^T \dot{\boldsymbol{x}}^2\, d\tau = \sum_{n\neq 0} \lambda_n \boldsymbol{a}_n^2, \quad \lambda_n = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2},$$

$$\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau) = d\boldsymbol{a}_0 \prod_{n\neq 0} d\boldsymbol{a}_n.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[h(\tau)] &= \int d^D \boldsymbol{a}_0\, \frac{1}{T}\int_0^T \delta\left(\frac{\boldsymbol{a}_0}{\sqrt{T}} + \ldots\right) d\tau \int \prod_{n\neq 0} d\boldsymbol{a}_n \exp\Big(-\sum_{n\neq 0}\lambda_n \boldsymbol{a}_n^2\Big) = \\ &= T^{D/2}\left[\det{}'\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)\right]^{-D/2},\end{aligned} \tag{9.53}$$

где $\det' \mathcal{D}$ определяется как произведение собственных значений оператора $\mathcal{D}$. Используя представление предыдущего раздела, получаем

$$\begin{aligned} -\log\det{}'\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) &= \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s}\sum_{n\neq 0}\exp(-4\pi^2 n^2 s/T^2) = \\ &= \int_{\varepsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\Big(\sum_n \exp(-4\pi^2n^2 s/T^2) - 1\Big) = \int_{(\varepsilon/T)^2}^{\infty}\frac{dx}{x}\Big(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 x) - 1\Big) = \\ &= \int_{(\varepsilon/T)^2}^{1}\frac{dx}{x}\Big(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 x) - 1\Big) + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x}\Big(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 x) - 1\Big) = \\ &= \int_{(\varepsilon/T)^2}^{1}\frac{dx}{x}\Big\{\frac{1}{2\sqrt{\pi x}} - 1 + O(\exp(-c/x))\Big\} + \text{const} = \frac{T}{\varepsilon\sqrt{\pi}} - 2\log\frac{T}{\varepsilon} + \text{const}\end{aligned} \tag{9.54}$$

Это дает следующий результат:

$$\mathcal{K}[h(\tau)] = T^{D/2}T^{-D}\exp(cT/\varepsilon) = T^{-D/2}\exp(cT/\varepsilon). \tag{9.55}$$

Теперь мы должны найти меру $\mathcal{D}h(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$. Здесь опять нужно аккуратно учесть нулевые моды. Поскольку на этот раз параметризуемое пространство представляет собой окружность, оно допускает изометрию — преобразование координат, не меняющее метрики. Это обычные сдвиги $\tau \to \tau + a$, и их следует исключить из калибровочной группы. Это можно сделать так же, как и в случае интегрирования по x_μ, умножая меру на «единицу»:

$$\int_0^T da \int_0^T \frac{d\tau}{T}\delta(f(\tau) - a) = 1. \tag{9.56}$$

В результате мера интегрирования по dT оказывается такой же, как и для незамкнутых путей, и мы получаем для числа замкнутых путей длины T:

$$dN(T) = \frac{dT}{T}T^{-D/2}\exp(-cT/\varepsilon). \tag{9.57}$$

Разумеется, этот результат можно было бы предвидеть из (9.46). Если положить $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ в (9.46), получится мера $T^{-D/2}\exp(cT/\varepsilon)$. Дополнительный множитель $1/T$ в (9.57) возникает потому, что мы должны считать пути, различающиеся начальными точками, за один путь. Поскольку на пути длины T имеется T различных возможностей для выбора начальной точки, меру надо разделить на T.

Различные физические величины можно выразить через амплитуду того, что путь проходит через заданный набор точек $\{\boldsymbol{x}_i\}$. Эта амплитуда дается вакуумным ожиданием следующего вида:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) &= \left\langle \prod_j \int_0^T d\tau_j\, \delta(\boldsymbol{x}(\tau_j) - \boldsymbol{x}_j) \right\rangle = \\ &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\, \exp\left(-\frac{1}{2}\int \dot{\boldsymbol{x}}^2\, d\tau\right) \prod_j \int_0^T d\tau_j\, \delta(\boldsymbol{x}(\tau_j) - \boldsymbol{x}_j). \end{aligned} \tag{9.58}$$

Для вычисления этих интегралов удобно перейти в импульсное представление:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N) &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\tau)\, \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \dot{\boldsymbol{x}}^2\, d\tau\right) \times \\ &\times \int_0^T \prod_j d\tau_j \exp\left(i\sum_j \boldsymbol{q}_j \boldsymbol{x}(\tau_j)\right). \end{aligned} \tag{9.59}$$

Интеграл по $\boldsymbol{x}$ в (9.59) гауссов. Чтобы его взять, нужно, согласно общим правилам, сперва решить классическое уравнение

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_{\text{cl}} = -i \sum_j \boldsymbol{q}_j \delta(\tau - \tau_j), \tag{9.60}$$

а затем вычислить классическое действие. Имеем

$$\boldsymbol{x}_{\text{cl}} = i \sum_j \boldsymbol{q}_j \mathcal{D}(\tau|\tau_j), \tag{9.61}$$

где $\mathcal{D}(\tau|\tau')$ — функция Грина оператора $-d^2/dt^2$. Подстановка (9.61) в классическое действие дает

$$S_{\text{cl}} = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{x}}_{\text{cl}}^2 \, d\tau - i \sum_j \boldsymbol{q}_j \boldsymbol{x}_{\text{cl}}(\tau_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_j \mathcal{D}(\tau_i|\tau_j). \tag{9.62}$$

Функция Грина на окружности содержит вклад нулевой моды

$$\mathcal{D}(\tau|\tau') = \sum_{n \neq 0} \frac{\exp i\sqrt{\lambda_n}(\tau - \tau')}{T\lambda_n} + C \tag{9.63}$$

(здесь $\lambda_n = 4\pi^2 n^2/T^2$, а C — произвольная константа, описывающая вклад нулевой моды). Однако, если полный импульс сохраняется ($\sum\limits_j \boldsymbol{q}_j = 0$), этот произвол исчезает из (9.62):

$$C \sum_{i,j} \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_j = C\Big(\sum_j \boldsymbol{q}_j\Big)^2 = 0. \tag{9.64}$$

Необходимость сохранения импульса можно также увидеть из (9.60), интегрируя его по τ. Периодичность $\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{cl}}$ требует $\sum\limits_j \boldsymbol{q}_j = 0$.

Мы получили следующее выражение для амплитуды:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N) = \int_0^\infty \frac{dT}{T} T^{-D/2} e^{-m^2T/2} \times \\ \times \int_0^T \prod_j d\tau_j \exp\Big\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_j \mathcal{D}(\tau_i|\tau_j)\Big\}. \end{aligned} \tag{9.65}$$

Чтобы прояснить его смысл, рассмотрим случай двухточечной функции с $\boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_2 \equiv \boldsymbol{q}$. Прежде всего вычислим функцию $\mathcal{D}$:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(\tau|\tau') = \sum_{n\neq 0} \frac{\exp(i\sqrt{\lambda_n}(\tau-\tau'))}{T\lambda_n}, \quad \lambda_n = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}, \\ -\partial_\tau^2 \mathcal{D}(\tau|\tau') = \delta(\tau-\tau') - \frac{1}{T}\end{gathered} \tag{9.66}$$

(появление второго члена в правой части следует из условия $n \neq 0$ в определении функции $\mathcal{D}$). Поскольку функция $\mathcal{D}$ на окружности зависит только от $s = |\tau - \tau'|$, уравнение (9.66) легко решить:

$$\mathcal{D}(\tau|\tau') = -\frac{s(T-s)}{2T} + \text{const} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant s \leqslant T. \tag{9.67}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{q}) &= \int_0^\infty \frac{dT}{T}\, T^{-D/2} e^{-m^2T/2} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau'\, e^{-q^2 s(T-s)/2T} = \\ &= \int_0^\infty dT\, T^{-D/2} e^{-m^2T/2} \int_0^T ds\, e^{-q^2 s(T-s)/2T} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^\infty dT\, T^{1-D/2} e^{-m^2T/2} e^{-q^2 x(1-x)T/2} \sim \\ &\sim \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 + q^2 x(1-x)]^{2-D/2}} \end{aligned} \tag{9.68}$$

(здесь мы ввели новую переменную $x = s/T = |\tau_1 - \tau_2|/T$). Любопытно, что амплитуду (9.67) можно интерпретировать в терминах обычных диаграмм Фейнмана, например

$q-k$

$q \quad k \quad q$

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{q}) = \qquad &= \int \frac{d^D\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}^2 + m^2)((\boldsymbol{q}-k)^2 + m^2)} = \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^D\boldsymbol{k}}{(x\boldsymbol{k}^2 + (1-x)(\boldsymbol{q}-k)^2 + m^2)^2} \sim \\ &\sim \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 + x(1-x)q^2)^{2-D/2}}, \end{aligned} \tag{9.69}$$

где мы использовали стандартное представление

$$\frac{1}{AB} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(Ax + B(1-x))^2}.$$

Вывод, приведенный выше, служит проверкой того, что все нормировки, меры и т. п. в континуальных интегралах были определены правильно, поскольку в конечном итоге мы получили стандартный ответ (9.69) для амплитуды. Таким же способом можно показать, что $F(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N)$, определенная в (9.59), сводится к стандартной диаграмме

$$F(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N) = \qquad . \tag{9.70}$$

В этом разделе мы развили несколько необычный формализм, использующий интегралы по путям, но в конце концов оказалось, что все ответы гораздо легче описать обычными диаграммами Фейнмана. Однако имеются серьезные причины для того, чтобы работать непосредственно с геометрическими интегралами. Дело в том, что, когда мы переходим от путей к поверхностям (или объектам большей размерности), геометрические континуальные интегралы остаются единственным инструментом. В следующих разделах мы покажем, как он работает в случае теории струн.

9.4. Общая теория случайных гиперповерхностей

В предыдущих разделах мы обсуждали одномерные кривые, случайным образом вложенные в D-мерное евклидово пространство. Эта задача эквивалентна задаче броуновского движения и (после аналитического продолжения в пространство Минковского) квантовой теории свободной релятивистской частицы. Вряд ли в этом направлении можно было получить какие-либо новые результаты, так как все это за много лет было полностью исследовано классической математикой и квантовой физикой. Однако мы развили подход, который можно сразу обобщить на случай n-мерных гиперповерхностей, вложенных в D-мерное пространство.

Эта проблема представляет большой интерес как для физики, так и для математики. В то же время случай $n > 1$ несравненно труднее случая $n = 1$. Для $n = 2$ имеются некоторые достижения, которые мы обсудим в следующих разделах. Здесь же мы разовьем общий формализм для произвольного n до той степени, до которой это возможно в настоящий момент.

Рассмотрим вложение гиперповерхности с координатами ξ^a, $a = 1, \ldots, n$ в D-мерное пространство, заданное функциями

$$x_\mu(\xi^1, \ldots, \xi^n) \equiv x_\mu(\xi), \quad \mu = 1, \ldots, D. \tag{9.71}$$

Действие должно зависеть от $x_\mu(\xi)$ так, чтобы быть инвариантным при заменах координат

$$\xi \to f(\xi),$$

или в явном виде

$$\xi^a \to \tilde{\xi}^a = f^a(\xi^1, \ldots, \xi^n), \quad a = 1, \ldots, n, \tag{9.72}$$

где функции f^a должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial(f^1, \ldots, f^n)}{\partial(\xi^1, \ldots, \xi^n)} \equiv \det \left\| \frac{\partial f^a}{\partial \xi^b} \right\| > 0. \tag{9.73}$$

Это требование вытекает из того, что $\boldsymbol{x}(\xi)$ и $\boldsymbol{x}(f(\xi))$ представляют одну и ту же гиперповерхность, по-разному параметризованную.

Если мы ищем непрерывную теорию поверхностей, следует начать с выражений для действия, содержащих минимальное число производных. Если теория с таким действием перенормируема, все члены с высшими производными несущественны. Иногда для того, чтобы достичь перенормируемости, приходится включать высшие члены. Эти вопросы мы обсудим позже.

Ковариантным выражением с минимальным числом производных оказывается гиперобъем A нашей гиперповерхности. Поэтому простейшее действие имеет вид

$$\begin{aligned} S[\boldsymbol{x}(\xi)] &= m_0^n \int d^n\xi \, (h(\xi))^{1/2}, \\ h(\xi) &\equiv \det \|h_{ab}(\xi)\|, \\ h_{ab}(\xi) &= \partial_a x^\mu \, \partial_b x_\mu. \end{aligned} \tag{9.74}$$

В принципе, можно добавить к нему некоторые члены с высшими производными вида

$$\begin{aligned} S_1 &= c_1 \int d^n\xi \, R(h) h^{1/2}, \\ S_2 &= c_2 \int d^n\xi \, (\Delta(h)\boldsymbol{x})^2 h^{1/2} \end{aligned} \tag{9.75}$$

и т. д.

(здесь $R(h)$ — скалярная кривизна, вычисленная по метрике h_{ab}, а $\Delta(h)$ — соответствующий оператор Лапласа). В каждом случае для того, чтобы определить, существенны эти члены или нет, требуется специальный анализ. Разумно, однако, начать с простейшего действия (9.74), отложив на потом вопрос о том, производит перенормировка дополнительные члены или нет.

Амплитуду того, что поверхность имеет заданную границу, можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{c}(s)) &= \int \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp\left(-m_0^n \int (\det \|\partial_a \boldsymbol{x}\,\partial_b \boldsymbol{x}\|)^{1/2}\, d^n\xi\right) = \\
&= \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp\left(-m_0^n \int h^{1/2}\, d^n\xi\right) \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \delta(\partial_a \boldsymbol{x}\,\partial_b \boldsymbol{x} - h_{ab}).
\end{aligned}
\tag{9.76}
$$

Здесь граница поверхности $\boldsymbol{x}(\xi)$ — $(n-1)$-мерная гиперповерхность, параметризованная функциями $c_\mu(s_1, \ldots, s_{n-1})$. Чтобы аккуратно сформулировать граничные условия для интеграла (9.76), нужно постулировать, что топология ξ-пространства совпадает с топологией поверхности, которую мы рассматриваем. Это необходимое условие того, чтобы мы могли считать $x_\mu(\xi)$ гладкими функциями. Если граница ξ-пространства определяется уравнениями

$$\xi^a = \xi^a(s_1, \ldots, s_{n-1}), \tag{9.77}$$

то граничные условия в интеграле (9.76) имеют вид

$$\boldsymbol{x}(\xi(s)) = \boldsymbol{c}(s). \tag{9.78}$$

$\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)/\mathcal{D}f(\xi)$ обозначает, как и в случае путей, меру на пространстве, полученном факторизацией пространства всех функций $\boldsymbol{x}(\xi)$ по группе диффеоморфизмов $\xi \to f(\xi)$. Другими словами, это инвариантная мера на пространстве калибровочных орбит, причем калибровочные преобразования в этом случае порождены заменами

$$\xi \to \tilde{\xi} = f(\xi). \tag{9.79}$$

Чтобы интеграл (9.76) был репараметризационно-инвариантным, мы должны ограничить возможные $f(\xi)$ не только условиями (9.73), но и тем условием, что граничные точки остаются неподвижными:

$$f(\xi(s)) = \xi(s). \tag{9.80}$$

Тогда результат интегрирования $G[\boldsymbol{c}(s)]$ будет инвариантен по отношению к репараметризациям границы

$$G[\boldsymbol{c}(x)] = G[\boldsymbol{c}(\alpha(s))], \tag{9.81}$$

где

$$\{\alpha^i(s^1, \ldots, s^{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n-1\}$$

— диффеоморфизм.

Действуя так же, как и раньше, начнем с вычисления величины

$$\mathcal{K}[\boldsymbol{c}(s), h(\xi)] = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \delta(\partial_a \boldsymbol{x} \partial_b \boldsymbol{x} - h_{ab}(\xi)), \tag{9.82}$$

равной числу вложений поверхности с заданной внутренней метрикой.

Использование представления множителя Лагранжа дает

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\boldsymbol{c}, h] = \int\limits_{A-i\infty}^{A+i\infty} \mathcal{D}\lambda^{ab} \exp\left(\int h^{1/2} \lambda^{ab} h_{ab}\, d^n\xi\right) \times \\ \times \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi) \exp\left(-\int h^{1/2} \lambda^{ab} \partial_a \boldsymbol{x} \partial_b \boldsymbol{x}\, d^n\xi\right). \end{aligned} \tag{9.83}$$

Нормы в функциональном пространстве, определяющие элемент объема в этом интеграле, даются выражениями

$$\begin{aligned} \|\delta \boldsymbol{x}(\xi)\|^2 &= \int h^{1/2} (\delta \boldsymbol{x}(\xi))^2\, d^n\xi, \\ \|\delta\lambda^{ab}\|^2 &= \int h^{1/2} (h_{aa'} h_{bb'} + c h_{ab} h_{a'b'})\, \delta\lambda^{ab} \delta\lambda^{a'b'}\, d^n\xi, \end{aligned} \tag{9.84}$$

где $c \geqslant -1/2$ — константа. При выводе этих формул мы, кроме локальности и общей ковариантности, использовали требование инвариантности расстояний в функциональном пространстве при сдвигах

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\xi) &\to \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{a}(\xi), \\ \lambda^{ab}(\xi) &\to \lambda^{ab}(\xi) + c^{ab}(\xi), \end{aligned} \tag{9.85}$$

где $\boldsymbol{a}(\xi)$ и $c^{ab}(\xi)$ произвольны. Инвариантность меры относительно (9.85) обеспечивает возможность использования уравнений движения для $\boldsymbol{x}$ и λ, которые выводятся путем подстановки (9.85) в действие.

Оказывается удобным разложить

$$\lambda^{ab}(\xi) = \alpha(\xi)h^{ab} + f^{ab}(\xi) \tag{9.86}$$

с

$$h_{ab}(\xi)f^{ab}(\xi) = 0.$$

Интеграл (9.83) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[\boldsymbol{c}, h] = &\int \mathcal{D}\alpha(\xi)\, \exp\left(n\int \alpha(\xi)h^{1/2}\, d^n\xi\right) \times \\ &\times \int \mathcal{D}f^{ab}(\xi)\,\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \exp\left(-\int h^{1/2}(\alpha h^{ab}\,\partial_a\boldsymbol{x}\,\partial_b\boldsymbol{x} + f^{ab}\,\partial_a\boldsymbol{x}\,\partial_b\boldsymbol{x})\, d^n\xi\right).\end{aligned} \tag{9.87}$$

Чтобы продолжить вычисления, следует предположить (и позже проверить), что корреляционные длины полей $\alpha(\xi)$ и $f^{ab}(\xi)$ малы по сравнению с размером рассматриваемой области. Если это так, то, как мы уже видели в случае путей, эти величины можно заменить их средними значениями. С учетом общей ковариантности имеем

$$\begin{aligned}\langle\alpha(\xi)\rangle &= \bar{\alpha} + c_1 R(\xi) + \dots\,, \\ \langle f^{ab}(\xi)\rangle &= 0,\end{aligned} \tag{9.88}$$

где $\bar{\alpha}$ — неизвестная постоянная порядка Λ^n, а $R(\xi)$ — скалярная кривизна, вычисленная по метрике $h_{ab}(\xi)$. Уравнение (9.88) отражает то обстоятельство, что $\alpha(\xi)$ — скаляр, а f^{ab} — симметричный бесследовый тензор.

Нас будут интересовать метрики h_{ab}, медленно меняющиеся на масштабе обрезания, или, другими словами, с $R(\xi) \ll \Lambda^2$, и мы можем пренебречь вторым членом в (9.88).

После этого мы получаем для $\mathcal{K}[\boldsymbol{c}, h]$ выражение

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[\boldsymbol{c}, h] = \exp&\left(n\bar{\alpha}\int h^{1/2}\, d^n\xi\right) \times \\ &\times \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \exp\left(-\bar{\alpha}\int h^{1/2} h^{ab}\,\partial_a\boldsymbol{x}\,\partial_b\boldsymbol{x}\, d^n\xi\right).\end{aligned}$$

Прежде чем двигаться дальше, следует проверить справедливость наших предположений о «замораживании» множителей Лагранжа. Начнем с флуктуаций α. Разлагая

$$\alpha(\xi) = \bar{\alpha}(1 + i\beta(\xi)), \tag{9.89}$$

нетрудно найти квадратичный член в индуцированном действии для поля β. Выбирая для простоты оценки $h_{ab} = \delta_{ab}$, находим

$$S_{\mathrm{II}}(\beta) = \frac{1}{2}\int \beta(q)\beta(-q)B(q^2)\frac{d^n q}{(2\pi)^n}, \tag{9.90}$$

$k+q$

где

$$B(q^2) = - \quad {}^{k} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\frac{[k(k+q)]^2}{k^2(k+q)^2}. \tag{9.91}$$

Здесь мы учли, что взаимодействие полей β и x описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = i\bar{\alpha}^2 \int \beta(\xi)(\partial_a \boldsymbol{x})^2\, d^n\xi. \tag{9.92}$$

Непосредственная оценка (9.91) дает

$$B(q^2) = c\Lambda^n(1 + O(q^2/\Lambda^2)). \tag{9.93}$$

Если константа c в (9.93) не обращается в нуль, корреляционная длина поля β, определяющаяся положением сингулярности в q-пространстве, имеет порядок Λ^{-1}. Следовательно, в общем случае $c \neq 0$ флуктуациями поля β можно пренебречь, так как

$$\frac{\left(\overline{(\Delta\alpha)^2}\right)^{1/2}}{\alpha} \sim \left(\overline{\beta^2}\right)^{1/2} \sim (\Lambda^n A)^{-1/2} \ll 1, \tag{9.94}$$

где A — объем нашей гиперповерхности. В присутствии нетривиальной метрики h_{ab} наше вычисление означает, что в индуцированном действии имеется член

$$S_{\mathrm{II}}(\beta) = \frac{c}{2}\Lambda^n \int \beta^2(\xi)h^{1/2}(\xi)\, d^n\xi, \tag{9.95a}$$

подавляющий флуктуации поля β. Обращаясь к случаю f-флуктуаций, мы с помощью аналогичных рассуждений находим наиболее сингулярный член в эффективном действии

$$S_{\mathrm{II}}[f] = d\cdot\Lambda^n(\bar{\alpha})^{-2}\int h^{1/2}h_{aa'}h_{bb'}f^{ab}f^{a'b'}\, d^n\xi, \tag{9.95b}$$

который при $d \neq 0$ указывает на несущественность флуктуаций f.

Заметим здесь, что вопрос о том, должны ли c и d выбираться в общем положении или какое-либо из них (или оба) следует положить равным нулю, совсем не тривиален. Могут существовать различные непрерывные пределы теории струн, причем простейший получается при отсутствии дополнительных условий на c и d, тогда как остальные требуют тонкой подстройки этих констант. Нужно выяснить, какой из возможных непрерывных пределов обладает нужными свойствами и соответствует калибровочной теории. В настоящее время этот вопрос не решен, и мы в основном будем исследовать случай общего положения, не забывая, однако, о том, что есть и другие возможности.

В случае общего положения мы показали, что флуктуациями множителей Лагранжа можно пренебречь, и (после тривиальных переопределений масштабов) остановились на следующем выражении:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}[\boldsymbol{c}(s),\, h_{ab}(\xi)] = \exp\left(C\int h^{1/2}\, d^n\xi\right) \times \\ \times \int_{\boldsymbol{x}(\xi(s))=\boldsymbol{c}(s)} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \exp\left(-\int h^{1/2} h^{ab}\, \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}\, d^n\xi\right).\end{aligned} \tag{9.96}$$

Функция Грина для контура $\boldsymbol{c}(s)$ получается отсюда интегрированием по метрикам h_{ab}:

$$\begin{aligned}G[\boldsymbol{c}(s)] = \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}}{\mathcal{D}f} \exp\left(-\mu\int h^{1/2}\, d^n\xi\right) \times \\ \times \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \exp\left(-\int h^{1/2} h^{ab}\, \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}\, d^n\xi\right),\end{aligned} \tag{9.97}$$

где μ — критический параметр.

Поскольку выражения вида (9.97) образуют основу нашего последующего обсуждения, полезно вывести их другим способом. Рассмотрим интеграл

$$\int \mathcal{D}h_{ab}\, \exp\left(-\mu\int h^{1/2}\, d^n\xi - \int h^{1/2} h^{ab} g_{ab}\, d^n\xi\right), \tag{9.98}$$

где $g_{ab}(\xi)$ — симметричный тензор. Предполагается, что интеграл в (9.98) регуляризован ковариантно. Это означает, что его можно вычислить следующим образом. Найдем сперва точку перевала действия (9.98):

$$\delta\left(\mu\int h^{1/2}\,d^n\xi+\int h^{1/2}h^{ab}g_{ab}\,d^n\xi\right)=\frac{1}{2}\int h^{1/2}h^{ab}(\mu\,\delta h_{ab})\,d^n\xi+\\+\frac{1}{2}\int h^{1/2}(h^{cd}g_{cd}h^{ab}\delta h_{ab}+g_{cd}\delta h^{cd})\,d^n\xi=0. \tag{9.99}$$

Это уравнение определяет положение точки перевала и величину действия

$$h_{ab}\sim g_{ab},\quad S\sim\int g^{1/2}\,d^n\xi. \tag{9.100}$$

Если рассмотреть малые флуктуации в окрестности точки перевала, можно заметить, что они не могут распространяться, поскольку в (9.98) отсутствуют производные. Точнее, это означает, что их корреляционная длина пропорциональна обратному импульсу обрезания. Следовательно, главная поправка от этих полей к эффективному действию должна быть локальной и, вследствие общей ковариантности, должна иметь вид (9.100). Это еще одна демонстрация нашего общего правила, что поля с малым радиусом корреляции можно заменять их средними значениями. В нашем случае ковариантность диктует значения (9.100) этих средних.

Таким образом, интегрируя (9.98) по h, мы вновь получаем действие (9.74) при условии $g_{ab}=\partial_a\boldsymbol{x}\,\partial_b\boldsymbol{x}$. Это доказывает эквивалентность (9.97) и (9.76). Опять, как и в нашем первом выводе (9.97), мы предположили, что находимся в случае общего положения, т. е. все расходящиеся константы не равны нулю. Является ли этот непрерывный предел тем, что нас интересует, нужно изучать отдельно в каждом случае. В следующих разделах мы покажем, как вычислить (9.97) в случае $n=2$ и какая физика описывается этим выражением.

9.5. Двумерные поверхности. Геометрическое введение

При $n=2$ можно продвинуться существенно дальше в анализе формулы (9.97), явно вычислив континуальные интегралы.

Чтобы это сделать, мы сперва приведем необходимые геометрические свойства рассматриваемых функционалов.

Начнем с функционала

$$W=\int h^{1/2}h^{ab}\,\partial_a\boldsymbol{x}\,\partial_b\boldsymbol{x}\,d^2\xi, \tag{9.101}$$

где функция $\boldsymbol{x}(\xi)$ удовлетворяет граничному условию

$$\boldsymbol{x}(\xi(s)) = \boldsymbol{c}(s). \tag{9.102}$$

Как мы видели в предыдущем разделе, вариация по отношению к h_{ab} дает

$$\delta W = \int h^{1/2} T_{ab}(\xi) \delta h^{ab}(\xi)\, d^2\xi, \tag{9.103}$$

где T_{ab} можно считать тензором энергии-импульса поля $\boldsymbol{x}$:

$$T_{ab} = \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd}\, \partial_c \boldsymbol{x}\, \partial_d \boldsymbol{x}. \tag{9.104}$$

Метрика h_{ab}^{extr}, доставляющая минимум W, удовлетворяет условию

$$T_{ab} = 0, \tag{9.105}$$

откуда

$$h_{ab}^{\text{extr}} = c(\xi)\, \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}, \tag{9.106}$$

где функция $c(\xi)$ не определяется соотношениями (9.105). Подставляя это в (9.101), получаем

$$W\Big|_{h_{ab}=h_{ab}^{\text{extr}}} = \int (\det \|\partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}\|)^{1/2}\, d^2\xi. \tag{9.107}$$

Мы заключаем, что проблема отыскания поверхности минимальной площади, даваемой (9.107), может быть сведена к двум уравнениям:

$$\begin{gathered} \partial_a (h^{1/2} h^{ab} \partial_b \boldsymbol{x}) = 0, \\ T_{ab} = \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x} - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c \boldsymbol{x}\, \partial_d \boldsymbol{x} = 0. \end{gathered} \tag{9.108}$$

Следующий важный геометрический факт, которым мы будем активно пользоваться ниже, состоит в возможности выбрать конформную калибровку, в которой метрический тензор h_{ab} принимает вид

$$h_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab}. \tag{9.109}$$

Эта исключительно удобная калибровка имеет некоторые топологические ограничения. Сейчас мы обсудим вывод выражения (9.109) и этих ограничений.

Первый наивный аргумент в пользу (9.109) состоит в следующем. Возможность выбрать калибровку (9.109) означает, что любая метрика h_{ab} может быть представлена в виде

$$h_{ab}(\xi) = (e^{\varphi(\xi)}\delta_{ab})^f = e^{\varphi(f(\xi))}\frac{\partial f^c}{\partial \xi^a}\frac{\partial f^c}{\partial \xi^b}, \tag{9.110}$$

где $\{f^a(\xi)\}$ определяет необходимое преобразование координат. Таким образом, правая часть (9.110) зависит от 3 произвольных функций $f^1(\xi)$, $f^2(\xi)$, $\varphi(\xi)$. Но $h_{ab}(\xi)$ тоже имеет 3 независимых компоненты. Следовательно, числа независимых функций совпадают. Однако этого не достаточно. Мы должны показать, что преобразование (9.110) несингулярно, т. е. якобиан перехода к переменным (φ, f^a) не равен нулю. Для этого следует рассмотреть малую вариацию (9.110)

$$\delta h_{ab} = [\delta\varphi(\xi)h_{ab} + \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a]^f, \tag{9.111}$$

где $\omega^a = \delta f^a(f^{-1}(\xi))$, и мы воспользовались уравнением (9.27). Несингулярная природа преобразования (9.110) будет доказана, если для любого δh_{ab} мы сможем найти $\delta\varphi$ и ω^a, удовлетворяющие (9.111). Другими словами, необходимо, чтобы уравнение

$$\delta\varphi(\xi)h_{ab} + \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a = \delta h_{ab}^{f^{-1}} \equiv \gamma_{ab} \tag{9.112}$$

или

$$(L\omega)_{ab} \equiv \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - h_{ab}\nabla^c\omega_c = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\gamma^c{}_c \tag{9.113}$$

всегда имело решение. Уравнение (9.113) получено из (9.112) вычитанием следа. Вопрос о том, всегда ли имеется конформная калибровка, сводится теперь к вопросу о возможности решить уравнение (9.113), которое мы символически перепишем в виде

$$L\omega = \gamma. \tag{9.114}$$

Здесь через L обозначен дифференциальный оператор, определенный в (9.113), который переводит векторные поля в бесследовые симметричные тензорные поля ранга 2 (заметим, что числа независимых компонент совпадают). Существует сопряженный оператор L^+, который действует в противоположном направлении — превращает тензорные поля в векторные. Легко доказать, что уравнение (9.114) разрешимо тогда и только тогда, когда сопряженный оператор не имеет нулевых мод. В самом деле, умножим (9.114) на произвольное тензорное поле f:

$$(L^+f,\,\omega) \equiv (f,\,L\omega) = (f,\,\gamma), \tag{9.115}$$

где

$$(L^+f)_b = -\nabla^a f_{ab}; \quad f^a{}_a = 0 \tag{9.116}$$

и скалярные произведения определяются ковариантным способом. Мы видим, что если f — нулевая мода, т. е.

$$L^+f = 0, \tag{9.117}$$

то для таких γ, что $(f,\gamma) \neq 0$, уравнение (9.114) неразрешимо. Если же нулевые моды отсутствуют, то из

$$L^+L\omega = L^+\gamma \tag{9.118}$$

следует

$$L\omega = \gamma, \tag{9.119}$$

так как в противном случае $L\omega - \gamma$ будет нулевой модой оператора L^+.

Оператор L^+L — самосопряженный, и (9.118) имеет решение

$$\omega = \frac{1}{L^+L}L^+\gamma \tag{9.120}$$

при условии, что у L тоже нет нулевых мод. Если же L имеет нулевые моды, решение уравнения (9.118) существует, но не единственно. Именно, в этом случае функцию Грина $(L^+L)^{-1}$ следует определить как сумму по ненулевым модам

$$\begin{gathered}\langle\xi'|\frac{1}{L^+L}|\xi\rangle = \sum_{n\neq 0}\frac{\omega_n(\xi')\omega_n(\xi)}{E_n},\\ L^+L\omega_n = E_n\omega_n,\end{gathered} \tag{9.121}$$

и общее решение (9.119) имеет вид

$$\omega = \frac{1}{L^+L}(L^+\gamma) + \sum_\alpha c_\alpha\omega_{\alpha,0}, \tag{9.122}$$

где набор $\{\omega_{\alpha,0}\}$ образует базис в пространстве нулевых мод,

$$L\omega_{\alpha,0} = 0, \tag{9.123}$$

а c_α — произвольные константы.

Мы заключаем, что существование нулевых мод у оператора L^+ означает невозможность выбора конформной калибровки, а существование нулевых мод у оператора L — неоднозначность этого выбора.

Число нулевых мод управляется теоремой об индексе, упомянутой в главе 6, и тесно связано с топологией нашего многообразия. Мы покажем это в случае замкнутых многообразий. Доказательство основано на тождестве

$$N_0(L) - N_0(L^+) = \mathrm{Tr}\left(e^{-tL^+L} - e^{-tLL^+}\right) \tag{9.124}$$

(где N_0 обозначает число нулевых мод), которое вытекает из совпадения ненулевых собственных значений операторов L^+L и LL^+. Из уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} L\varphi &= \varepsilon\chi, \\ L^+\chi &= \varepsilon\varphi \end{aligned} \tag{9.125}$$

следует

$$\begin{aligned} L^+L\varphi &= \varepsilon L^+\chi = \varepsilon^2\varphi, \\ LL^+\chi &= \varepsilon L\varphi = \varepsilon^2\chi. \end{aligned} \tag{9.126}$$

Следовательно, ненулевой вклад в (9.124) происходит только от нулевых мод. Правую часть (9.124) можно вычислить в пределе $t \to 0$. В этом пределе она оказывается локальным инвариантным выражением, зависящим от метрики h_{ab}. Если бы метрика была евклидова, было бы

$$(L^+L\omega)_a = -\nabla^b(\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - h_{ab}\nabla^c\omega_c) \underset{(h_{ab}=\delta_{ab})}{=} -\partial^2\omega_a, \tag{9.127}$$

и

$$\langle\xi|e^{-tL^+L}|\xi\rangle = 2\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}e^{-tp^2} = \frac{1}{2\pi t}, \tag{9.128}$$

где коэффициент 2 происходит от интегрирования по компонентам ω. При $t \to 0$ внешнее гравитационное поле не имеет времени повлиять на (9.128). Как видно из этой формулы, характерные интервалы движения «частицы», описываемой волновым уравнением (9.127), имеют порядок $\Delta\xi \sim 1/p \sim \sqrt{t}$, что соответствует обычному закону диффузии. Кривизна $R(\xi)$ дает существенный вклад только в случае

$$R(\xi)(\Delta\xi)^2 \sim tR(\xi) \sim 1. \tag{9.129}$$

Это рассуждение делает правдоподобным предположение, что при $t \to 0$ параметром разложения в $\langle\xi|e^{-tL^+L}|\xi\rangle$ служит произведение $t \cdot R$. Мы ожидаем, что

$$\begin{aligned} \langle\xi|e^{-tL^+L}|\xi\rangle &= \frac{1}{2\pi t}\{1 + a_1 tR(\xi) + O(t^2)\}, \\ \langle\xi|e^{-tLL^+}|\xi\rangle &= \frac{1}{2\pi t}\{1 + a_2 tR(\xi) + O(t^2)\}. \end{aligned} \tag{9.130}$$

Позже мы явно выведем эти формулы и вычислим $a_{1,2}$. Сейчас, подставляя (9.130) в (9.124), получаем

$$N_0(L) - N_0(L^+) = c \cdot \chi, \tag{9.131}$$

где постоянную $c = 2(a_1 - a_2)$ еще предстоит определить, а

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int R\sqrt{h}\, d^2\xi \tag{9.132}$$

— эйлерова характеристика многообразия. Чтобы найти c, достаточно рассмотреть сферу как пример, в котором числа $N_0(L)$ и $N_0(L^+)$ могут быть найдены явно. Пользуясь формулами римановой геометрии, получаем при $h_{ab} = e^{\varphi}\delta_{ab}$

$$\begin{aligned} \nabla_a\omega_b &= \partial_a\omega_b - \Gamma^c_{ab}\omega_c, \\ \Gamma^c_{ab} &= \frac{1}{2}(\partial_a\varphi\,\delta_{bc} + \partial_b\varphi\,\delta_{ac} - \partial_c\varphi\,\delta_{ab}). \end{aligned} \tag{9.133}$$

Подставляя это в уравнение (9.123), приводим его к виду

$$\partial_{\bar z}\varepsilon = 0. \tag{9.134}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega^1 + i\omega^2 = e^{-\varphi}(\omega_1 + i\omega_2), \\ z &= \xi^1 + i\xi^2, \quad \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1} + i\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right). \end{aligned} \tag{9.135}$$

На первый взгляд, уравнение (9.134) имеет континуум решений

$$\varepsilon = \varepsilon(z). \tag{9.136}$$

Однако мы должны рассматривать только нормируемые решения

$$||\omega_a||^2 = \int \sqrt{h}h_{ab}\omega^a\omega^b\, d^2\xi = \int e^{2\varphi}|\varepsilon|^2\, d^2z < \infty. \tag{9.137}$$

Стандартная метрика на сфере в стереографических координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{dz\, d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}; \quad e^{\varphi} \underset{|z|\to\infty}{\sim} |z|^{-4}. \tag{9.138}$$

Поэтому функции (9.136) с конечной нормой имеют вид

$$\varepsilon(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2. \tag{9.139}$$

Таким образом, $N_0(L) = 6$ (так как α, β и γ комплексные). Геометрический смысл этих решений ясен — это те преобразования, которые не меняют конформного вида исходной метрики. Эти преобразования образуют двумерную конформную группу $O(2,1)$.

Что касается L^+, то те же рассуждения приводят к уравнению

$$\begin{gathered} \nabla^a \gamma_{ab} = \gamma^a{}_a = 0 \quad \text{или} \quad \partial_{\bar{z}}\phi = 0, \\ \phi = e^{-\varphi}(\gamma_{11} - \gamma_{22} + 2i\gamma_{12}), \end{gathered} \tag{9.140}$$

причем норма определена как

$$||\gamma||^2 = \int \sqrt{h} h^{aa'} h^{bb'} \gamma_{ab}\gamma_{a'b'}\, d^2\xi = \int e^{-\varphi}|\phi|^2\, d^2 z.$$

Поскольку $e^{-\varphi} \sim_{z\to\infty} |z|^4$, мы заключаем, что оператор L^+ не имеет нормируемых нулевых мод.

Вспоминая, наконец, что сфера имеет эйлерову характеристику $\chi = 2$, получаем

$$N_0(L) - N_0(L^+) = 3\chi. \tag{9.141}$$

На самом деле этот результат можно усилить. Можно показать, что для $\chi < 0$ (сфера с более чем одной ручкой) $N_0(L) = 0$. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} (L^+ L\omega)_a &= -\nabla^b(\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - h_{ab}\nabla^c\omega_c) \\ &= -\nabla^2\omega_a - [\nabla^b, \nabla_a]\omega_b \\ &= -(\nabla^2 + \frac{1}{2}R)\omega_a. \end{aligned} \tag{9.142}$$

Для поверхностей с $\chi < 0$ можно рассмотреть метрику со всюду постоянной кривизной $R < 0$. Для такой метрики имеем

$$(L\omega,\, L\omega) = (\nabla_b\omega_a,\, \nabla_b\omega_a) - \frac{1}{2}R(\omega_a,\, \omega_a) > 0 \tag{9.143}$$

(где скалярные произведения понимаются в том же смысле, что и выше). Из этого неравенства заключаем, что $N_0(L) = 0$. Это означает, что

$$N_0(L^+) = -3\chi = 6g - 6 \quad (\text{для } g \geqslant 2), \tag{9.144}$$

где g — число ручек. Легко проверить непосредственно, что на торе ($g = 1$, $\chi = 0$) $N_0(L) = N_0(L^+) = 2$ в согласии с (9.141).

В итоге мы нашли, что на сфере мы всегда можем ввести конформную калибровку, которая определена по модулю $SL(2, \mathbf{C})$-преобразований (9.139). Это требует дополнительного фиксирования калибровки. В случае многообразий с более сложной топологией имеются топологические препятствия к выбору конформной калибровки. Лучшее, что можно сделать, — это выбрать калибровку в виде

$$h_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} h_{ab}^{(0)}(\xi; \tau_1, \ldots, \tau_{6g-6}), \tag{9.145}$$

где $h_{ab}^{(0)}$ — некоторая метрика (например, можно выбрать метрику постоянной отрицательной кривизны), зависящая от $6g - 6$ параметров. Интегрирование по всем метрикам включает в себя не только интегрирование по $\varphi(\xi)$, но также и $(6g - 6)$-мерный интеграл по параметрам $\{\tau_i\}$. Теория таких интегралов развита еще недостаточно хорошо, и мы лишь поясним здесь качественный смысл этих дополнительных параметров.

Рассмотрим для простоты тор. Он может быть представлен как параллелограмм в ξ-плоскости, у которого противоположные стороны отождествлены. В общем случае эта фигура может быть переведена конформным преобразованием в любую другую, скажем в квадрат, однако отождествление противоположных сторон будет потеряно. Если мы будем пытаться сохранить отождествления, то единственными конформными преобразованиями, переводящими наш параллелограмм в другой будут повороты и растяжения. В итоге каждый параллелограмм, представляющий тор, можно охарактеризовать двумя конформными инвариантами: отношением сторон и углом между ними. Это как раз те добавочные параметры, о которых говорилось выше. Один из них можно интерпретировать как «длину» тора, а другой — как угол, задающий на торе некоторое каноническое направление.

Закончим этот раздел кратким обсуждением того, что происходит в случае поверхностей с границей, выбрав в качестве примера топологию диска. Анализ вновь основывается на уравнении (9.114), но в этом случае следует подумать о граничных условиях. Если мы попытаемся ограничиться преобразованиями $\xi \to f(\xi)$, не меняющими границы, т. е.

$$f(\xi_0(s)) = \xi_0(s) \tag{9.146}$$

(где $\xi = \xi_0(s)$ — уравнение границы), мы получим граничное условие

$$\omega^a(\xi(s)) = 0. \tag{9.147}$$

Однако в случае общего γ уравнение (9.114) не имеет решений, так как оно является дифференциальным уравнением первого порядка. Уравнение (9.118) можно решить с условиями (9.147), поскольку это стандартная задача Дирихле, но его решение (9.120) не будет удовлетворять (9.114). Это означает, что мы не можем достичь конформной калибровки путем преобразований, удовлетворяющих (9.146), и это условие следует ослабить.

Это можно сделать, допустив преобразования, репараметризующие границу

$$f^a(\xi_0(s)) = \xi_0^a(\alpha(s)), \tag{9.148}$$

но оставляющие форму диска неизменной. В терминах ω это означает, что

$$\begin{aligned} &\omega_\perp(\xi_0(s)) \equiv n_a(s)\omega^a(\xi_0(s)) = 0, \\ &\omega_{||}(\xi_0(s)) \equiv t_a(s)\omega^a(\xi_0(s)) \text{ произвольно,} \end{aligned} \tag{9.149}$$

где $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{t}$ — нормальный и касательный векторы к границе.

В этом случае нетрудно решить уравнение (9.114) явно. Согласно (9.135), его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_{\bar z}\varepsilon &= \gamma(z,\, \bar z), \\ \varepsilon_\perp &= \operatorname{Re}(e^{-is}\varepsilon(e^{is})) = 0, \end{aligned} \tag{9.150}$$

где мы параметризовали границу диска так:

$$z_0(s) = e^{is}, \quad 0 \leqslant s < 2\pi.$$

Общее решение уравнения (9.150) имеет вид

$$\varepsilon(z,\, \bar z) = \partial_z \int G(z,\, w)\gamma(w)\, d^2w + f(z), \tag{9.151}$$

где $f(z)$ подбирается так, чтобы удовлетворить граничным условиям, а $G(z, w)$ — функция Грина оператора Лапласа.

Решение этой задачи всегда существует, но однозначно ли оно? Для ответа на этот вопрос рассмотрим однородные уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{\bar z}\varepsilon &= 0, \\ \varepsilon_\perp &= \operatorname{Re}(e^{-is}\varepsilon(e^{is})) = 0. \end{aligned} \tag{9.152}$$

Легко проверить, что они имеют три линейно независимых решения

$$\varepsilon^{(1)} = iz, \quad \varepsilon^{(2)} = 1 - z^2, \quad \varepsilon^{(3)} = \mathrm{i}(1 + z^2), \tag{9.153}$$

которые можно добавить к (9.151). Эти решения суть инфинитезимальные конформные преобразования группы $SL(2, \mathbf{R})$, отображающей единичный диск на себя. Общее преобразование этой группы имеет вид

$$z \to \tilde{z} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \tag{9.154}$$

где α — вещественная фаза, а a — комплексное число.

Отметим, что после того как решение (9.150) найдено, $\omega_{\|}(\xi_0(s))$ определено однозначно (с точностью до $SL(2,\, \mathbf{R})$-преобразований).

Итак, в случае единичного диска мы делаем следующий вывод. Конформная калибровка достижима, но следует включить в рассмотрение диффеоморфизмы, репараметризующие границу. Эта репараметризация с точностью до $SL(2,\, \mathbf{R})$-преобразования определяется исходной метрикой $h_{ab}(\xi)$. Поскольку в исходной формулировке континуального интеграла (9.76) мы факторизовали по диффеоморфизмам, тождественным на границе, следует ожидать, что интегрирование сведется к

$$\frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} = \mathcal{D}\varphi(\xi)\, \mathcal{D}\alpha(s) \times (\text{якобиан}). \tag{9.155}$$

Этот якобиан мы вычислим позже, а сейчас важно понять, что интегрирование по всем метрикам должно включать не только интегрирование по φ, но и интегрирование по всем возможным репараметризациям $\alpha(s)$. В определенном смысле $\{\alpha(s)\}$ заменяет конечный набор параметров $\{\tau_i\}$ в случае замкнутых поверхностей сложной топологии.

9.6. Вычисление континуальных интегралов

Целью этого раздела является вычисление интеграла

$$\begin{aligned} G[\boldsymbol{c}(s)] = \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp\left(-\mu \int h^{1/2}\, d^2\xi\right) \times \\ \times \int_{\boldsymbol{x}(\xi(s)) = \boldsymbol{c}(s)} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\, \exp\left(-\int h^{1/2} h^{ab}\, \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}\, d^2\xi\right), \end{aligned} \tag{9.156}$$

к которому мы свели проблему случайных поверхностей.

Начнем с интегрирования по x. Легко понять, почему его можно выполнить. Если подставить в (9.156) $h_{ab} = e^{\varphi}\delta_{ab}$, зависимость от φ исчезнет, что указывает на конформную инвариантность действия. Но так как мы имеем дело с квантовой теорией, имеется конформная аномалия, приводящая к тому, что интеграл зависит от φ. Эта аномалия связана с регуляризацией (9.156) на малых расстояниях, которая необходима, чтобы избежать расходимостей, и нарушает конформную инвариантность. Это важный момент, и мы получим эту аномалию несколькими разными способами. Рассмотрим сперва случай слабого гравитационного поля

$$h_{ab} = \delta_{ab} + h^{(1)}_{ab}. \tag{9.157}$$

В случае бесконечной системы индуцированное действие в квадратичном приближении дается выражением

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{II}} &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\, h^{(1)}_{ab}(q)\, h^{(1)}_{cd}(-q)\, \Pi_{ab|cd}(q), \\ \Pi_{ab,\,cd}(q) &= \quad k+q \quad k \quad = \frac{D}{8}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{t_{ab}(k,q)\,t_{cd}(k,q)}{k^2(k+q)^2}, \\ t_{ab}(k,q) &= k_a(k+q)_b + k_b(k+q)_a - \delta_{ab}k(k+q) \end{aligned} \tag{9.158}$$

(вершина t_{ab} легко читается по (9.104)).

Интеграл в (9.158) расходится и его нужно регуляризовать. Это означает, что интеграл сам по себе определяет только ту часть $\Pi(q)$, которая имеет сингулярности по q или, другими словами, распространяется в ξ-пространстве, тогда как регуляризация добавляет к этому выражению произвольный (*a priori*) полином по q или локальное выражение в ξ-пространстве. Условие, однозначно фиксирующее эту локальную часть — это условие калибровочной инвариантности эффективного действия.

Для практических вычислений удобно ввести комплексные обозначения

$$\begin{aligned} k_\pm &= k_1 \pm ik_2 = |k|e^{\pm i\alpha}, \\ k^2 &= k_+k_- \end{aligned} \tag{9.159}$$

и рассмотреть сначала компоненту

$$\begin{aligned} \Pi_{++,++} &= \frac{D}{2}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_+^2(q_+ + k_+)^2}{k^2(q+k)^2} = \\ &= \frac{D}{2}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_+(q_+ + k_+)}{k_-(q_- + k_-)} = DC(q^2)q_+^4 \end{aligned} \tag{9.160}$$

с неизвестной пока функцией $C(q^2)$; мы воспользовались $O(2)$-инвариантностью интеграла и тем, что $1/k_-$ преобразуется так же как k_+. Можно попытаться разбить интеграл (9.160) на (+)- и (−)-множители, поскольку $2\pi i\, d^2k = dk_+dk_-$. Это почти возможно, но требует большой осторожности. Забавно, что для этого следует перейти в пространство Минковского. Пропагаторы и импульсы заменяются по правилам

$$\begin{aligned} &k_\pm \to k_0 \pm k_1, \\ &\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}, \\ &\frac{1}{k_-} \to \frac{k_+}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{k_- + i\varepsilon\,\mathrm{sign}\, k_+}, \end{aligned} \tag{9.161}$$

так что наш интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{++,++} = &\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_+\, k_+(q_+ + k_+)\frac{D}{16 i\pi^2}\times \\ &\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_-}{(k_- + i\varepsilon\,\mathrm{sign}\, k_+)(q_- + k_- + i\varepsilon\,\mathrm{sign}(q_+ + k_+))}. \end{aligned} \tag{9.162}$$

Если мы возьмем $q_+ < 0$, сингулярности в k_--пространстве будут лежать по разные стороны вещественной оси только при $0 < k_+ < -q_+$. В других случаях интеграл по dk_- обратится в нуль. Имеем

$$\Pi_{++,++} = -\frac{D}{8}\frac{1}{q_-}\int\limits_0^{-q_+} dk_+\, k_+(q_+ + k_+) = \frac{D}{48\pi}\frac{q_+^3}{q_-}. \tag{9.163}$$

Это и есть искомый ответ.

Конечность интеграла (9.160) позволяет использовать и другой трюк для его вычисления:

$$(9.160) = \frac{D}{2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_+(q_+ + k_+)}{k_-(q_- + k_-)}e^{-\varepsilon k^2}\bigg|_{\varepsilon\to 0} =$$

$$= \frac{D}{2q_-}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-\varepsilon k^2}k_+(k_+ + q_+)\left(\frac{1}{k_-} - \frac{1}{k_- + q_-}\right)\bigg|_{\varepsilon\to 0} =$$

$$= -\frac{D}{2q_-}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-\varepsilon(k-q)^2}\frac{(k-q)_+k_+}{k_-}\bigg|_{\varepsilon\to 0} =$$

$$= -\frac{D}{2q_-}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-\varepsilon k^2}e^{\varepsilon k_- q_+}\frac{k_+^2 - k_+q_+}{k_-}\bigg|_{\varepsilon\to 0} =$$

$$= -\frac{D}{2q_-}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-\varepsilon k^2}\left(\frac{1}{6}\varepsilon^3q_+^3k^4 - \frac{1}{2}q_+^3\varepsilon^2k^2\right)\bigg|_{\varepsilon\to 0} =$$

$$= \frac{Dq_+^3}{16\pi q_-}\int\limits_0^\infty dt\, e^{-t}(t - t^2/3) = \frac{Dq_+^3}{48\pi q_-}.$$

Очевидно, отсюда также следует

$$\Pi_{--,--} = \frac{D}{48\pi}\frac{q_-^3}{q_+}. \tag{9.164}$$

Рассмотрим теперь оставшуюся компоненту

$$\begin{aligned}\Pi_{++,--} &= \frac{D}{2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_+(q+k)_+k_-(q+k)_-}{k^2(q+k)^2} = \\ &= \frac{D}{2}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2} = \frac{D}{24\pi}A,\end{aligned} \tag{9.165}$$

где A — квадратично расходящаяся константа, которую мы сейчас зафиксируем. Итак, индуцированное действие имеет вид

$$\begin{aligned}S_{\text{II}} = &-\frac{D}{48\pi}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\Big\{\frac{1}{2}\frac{q_+^3}{q_-}h_{--}(q)h_{--}(-q) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{q_-^3}{q_+}h_{++}(q)h_{++}(-q) + Aq^2h_{++}(q)h_{--}(-q) + \\ &+ Bq^2h_{+-}(q)h_{+-}(-q) + C[h_{+-}q_-^2h_{++} + q_+^2h_{+-}h_{--}]\Big\},\end{aligned} \tag{9.166}$$

где мы добавили другие возможные локальные контрчлены с некоторыми коэффициентами B и C. Постоянные A, B и C могут быть определены из условия общей ковариантности индуцированного действия. Закон преобразования для h_{ab}

$$h_{ab} \to h_{ab} + \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a \tag{9.167}$$

в линейном приближении принимает вид

$$\begin{aligned} &h_{++} \to h_{++} + 2q_+\omega_+(q), \\ &h_{--} \to h_{--} + 2q_-\omega_-(q), \\ &h_{+-} \to h_{+-} + q_+\omega_-(q) + q_-\omega_+(q). \end{aligned} \tag{9.168}$$

Важное обстоятельство состоит в том, что, хотя нелокальная часть действия (9.166) калибровочно не инвариантна, ее калибровочная вариация оказывается локальной и, следовательно, может быть компенсирована калибровочным преобразованием локальной части. У нас есть единственное калибровочно-инвариантное выражение

$$S_{\mathrm{II}} = -\frac{D}{48\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\, R(q) \frac{1}{2q^2} R(-q), \tag{9.169}$$

где в множителе

$$\begin{aligned} R(q) &= \frac{1}{4}(q_+^2 h_{--} + q_-^2 h_{++} - 2q^2 h_{+-}) = \\ &= (q_\alpha q_\beta - q^2 \delta_{\alpha\beta}) h^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{9.170}$$

нетрудно узнать линеаризованную скалярную кривизну, построенную по метрике h_{ab}.

В конформной калибровке

$$h_{++} = h_{--} = 0, \quad h_{+-} \approx 2\varphi, \tag{9.171}$$

и

$$S_{\mathrm{II}} = -\frac{D}{96\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} q^2 \varphi(q)\varphi(-q). \tag{9.172}$$

Зависимость от φ, которая изначально отсутствовала в действии, появилась здесь за счет следующего механизма. Индуцированное действие содержало не зависящие от φ нелокальные члены, которые не были калибровочно-инвариантны. Это заставило нас добавить некоторую комбинацию локальных членов, восстанавливающих калибровочную инвариантность. Эти члены зависели от φ. Очевидно, что в высших порядках нелокальная часть индуцированного действия тоже не будет зависеть от φ. Отсюда следует важный вывод: в конформной калибровке индуцированное действие локально. Это может рассматриваться как проявление того, что исходное действие конформно-инвариантно и конформная аномалия возникает лишь вследствие обрезания на малых расстояниях, влияние которого должно быть локальным.

Локальность действия вместе со свойствами инвариантности позволяет определить его точную форму. Для этого заметим, что конформно-евклидова метрика

$$ds^2 = e^{\varphi(z,\bar{z})}\, dz\, d\bar{z} \tag{9.173}$$

сохраняет свой вид при аналитических заменах координат

$$\begin{gathered} z \to w(z), \\ \bar{z} \to \bar{w}(\bar{z}), \\ ds^2 = e^{\varphi(z,\bar{z})}\, dz\, d\bar{z} = e^{\varphi(z(w),\overline{z(w)})} \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 dw\, d\bar{w}. \end{gathered} \tag{9.174}$$

Таким образом, в конформной калибровке индуцированное действие должно быть локальным функционалом φ, инвариантным при преобразованиях

$$\varphi(z,\, \bar{z}) \to \tilde{\varphi}(z,\, \bar{z}) = \varphi(w(z),\, \overline{w(z)}) + \log\left|\frac{dw}{dz}\right|^2, \tag{9.175}$$

где $w(z)$ — произвольная аналитическая функция. Инвариантность имеет место только с точностью до граничных членов, поскольку форма области неизбежно меняется при аналитических отображениях w. Мы отложим обсуждение граничных эффектов. Что же касается «объемной» части действия, то единственное выражение, совместное с вышеперечисленными требованиями, имеет вид

$$S[\varphi] = A \int d^2 z\, (2\, \partial_z \varphi\, \partial_{\bar{z}} \varphi + \mu^2 e^{\varphi}), \tag{9.176}$$

где A — некоторая постоянная. Мы будем называть S действием Лиувилля.

Инвариантность (9.176) по отношению к (9.175) очевидна, поскольку

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \log\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = 0.$$

Любое другое инвариантное выражение будет иметь большее число производных и несущественно в непрерывном пределе.

Сравнивая (9.176) с приближенным выражением (9.172), получаем

$$A = -\frac{D}{48\pi}. \tag{9.177}$$

Теперь нам остается вычислить якобиан в (9.155), и проблема распределения случайных поверхностей по внутренним геометриям будет решена. Простейший способ найти якобиан состоит в том, чтобы в выражение для нормы в пространстве метрик

$$||\delta h||^2 = \int h^{1/2}(h^{aa'}h^{bb'} + ch^{ab}h^{a'b'})\delta h_{ab}\delta h_{a'b'}\, d^2\xi \tag{9.178}$$

подставить

$$h^{ab} = e^{-\varphi}\delta^{ab}, \quad h^{1/2} = e^{\varphi},$$
$$\delta h_{ab} = (\delta\varphi + \nabla^c\varepsilon_c)h_{ab} + (L\varepsilon)_{ab}$$

(где L было определено в (9.113)). Получаем

$$||\delta h||^2 = \int e^{\varphi}(\delta\varphi + \nabla^a\varepsilon_a)^2(2 + 4c)\, d^2\xi + (L\varepsilon, L\varepsilon). \tag{9.179}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \mathcal{D}h &= \mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\varepsilon\ \det{}^{1/2}(L^+L), \\ (L^+L\omega)_a &= \nabla^b(\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - h_{ab}\nabla^c\omega_c). \end{aligned} \tag{9.180}$$

Теперь мы произведем вычисление $\det(L^+L)$ способом, аналогичным тому, который мы применили для обычного лапласиана. Именно, рассмотрим опять случай слабого гравитационного поля. Формальная квадратичная форма, ядром которой является оператор L^+L, может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= \int h^{1/2}h^{aa'}h^{bb'}\phi_{ab}\phi_{a'b'}\, d^2\xi, \\ \phi_{ab} &= \frac{1}{2}(\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - h_{ab}\nabla^c\omega_c). \end{aligned} \tag{9.181}$$

Теперь мы вычислим поляризационный оператор $\Pi_{--,--}$ как в (9.164). Для этого h_{ab} достаточно выбрать в виде

$$||h_{ab}|| = \begin{pmatrix} h_{++} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.182}$$

с малым h_{++}. Как мы видели в случае скаляров, общий детерминант можно восстановить из предела малого поля h. Стандартные формулы для ковариантных производных дают

$$\begin{aligned}
\phi_{++} &\approx \nabla_+\omega_+ - \frac{1}{4}(\nabla_+\omega_- + \nabla_-\omega_+)h_{++} \approx \\
&\approx \partial_+\omega_+ + \frac{1}{4}(\partial_- h_{++})\omega_+ - \frac{1}{4}(\partial_+ h_{++})\omega_- - \frac{1}{4}h_{++}(\partial_+\omega_- + \partial_-\omega_+), \\
\phi_{--} &\approx \partial_-\omega_-.
\end{aligned} \tag{9.183}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
W = \int &[(\partial_+\omega_+)(\partial_-\omega_-) + \frac{1}{4}(\partial_- h_{++})(\omega_+\partial_-\omega_-) - \\
&- \frac{1}{4}(\partial_+ h_{++})(\omega_-\partial_-\omega_-) - \frac{1}{4}h_{++}(\partial_+\omega_-)(\partial_-\omega_-) - \\
&- \frac{1}{4}h_{++}(\partial_-\omega_+)(\partial_-\omega_-)]\, d^2\xi.
\end{aligned} \tag{9.184}$$

Третий и четвертый члены не дают вклада, так как только пропагатор $\langle\omega_+\omega_-\rangle$ отличен от нуля, и мы имеем

$$\begin{aligned}
\det{}^{-1/2}(L^+L) = \int \mathcal{D}\omega_\pm \exp\Big\{-\int d^2\xi\, &[\partial_+\omega_+\partial_-\omega_- + \\
&+ \frac{1}{4}(\partial_- h_{++})\omega_+\partial_-\omega_- - \frac{1}{4}h_{++}(\partial_-\omega_+)\partial_-\omega_-]\Big\}.
\end{aligned} \tag{9.185}$$

Отсюда легко получить квадратичный член в эффективном действии для h_{++}:

$$\begin{aligned}
S_{\rm II} &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} h_{++}(q)h_{++}(-q)\Pi^{\rm gh}_{--,--}(q); \\
\Pi^{\rm gh}_{--,--}(q) &= \quad k \quad + \partial_- \quad k \quad + \partial_- \quad k \quad \partial_- = \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(\frac{k_-^2(k+q)_-^2}{k^2(k+q)^2} + 2q_-\frac{k_-^2(k+q)_-}{k^2(k+q)^2} - q_-^2\frac{k_-(k+q)_-}{k^2(k+q)^2}\right).
\end{aligned} \tag{9.186}$$

Вычисление, аналогичное (9.160–9.163), дает результат

$$\Pi^{\rm gh}_{--,--}(q) = \frac{q_-^3}{q_+}\left(\frac{1}{24\pi} + \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\right) = \frac{26}{48\pi}\frac{q_-^3}{q_+}. \tag{9.187}$$

Подставляя его в (9.186) и сравнивая с (9.164), мы заключаем, что роль D играет теперь число 26, и в калибровке (9.180) имеем

$$\det{}^{1/2}(L^+L) = \exp\left\{-\frac{26}{48\pi}\int d^2z\,(2\,\partial_z\varphi\,\partial_{\bar z}\varphi + \tilde\mu^2 e^\varphi)\right\}. \tag{9.188}$$

Собирая (9.176), (9.177), (9.180) и (9.188), мы получаем окончательное выражение для распределения поверхностей по внутренним метрикам в (9.156)

$$Z^{\text{closed surf.}} = \int \mathcal{D}\varphi\,\exp\left\{-\frac{26-D}{48\pi}\int d^2\xi\left(\frac{1}{2}(\partial_a\varphi)^2 + \mu_0^2 e^\varphi\right)\right\}. \tag{9.189}$$

9.7. Амплитуды рассеяния

В случае путей мы продемонстрировали, как вычислять функции Грина, т. е. амплитуды того, что путь пройдет через заданный набор точек. Ответ, как и должно было быть, давался диаграммами Фейнмана. Что же мы получим в случае поверхностей, после того как мы узнали, как вычислять континуальный интеграл?

Рассмотрим поверхность, проходящую через данные точки $\{\boldsymbol{x}_i\}$. Соответствующая амплитуда дается выражением

$$G(\boldsymbol{x}_1,\,\ldots\,,\,\boldsymbol{x}_N) = \left\langle\prod_i\int h^{1/2}(\xi_i)\delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}(\xi_i))\,d^2\xi_i\right\rangle, \tag{9.190}$$

где среднее берется по случайным поверхностям с помощью меры, введенной в предыдущих разделах. Переходя к импульсному представлению, запишем (9.190) в виде

$$G(\boldsymbol{p}_1,\,\ldots\,,\,\boldsymbol{p}_N) = \left\langle\prod_i\int h^{1/2}(\xi_i)e^{i\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{x}(\xi_i)}\,d^2\xi_i\right\rangle. \tag{9.191}$$

Эта формула замечательна тем, что интеграл по $\boldsymbol{x}$ останется гауссовым и его легко взять. Именно, нам нужно вычислить величину

$$G(\boldsymbol{p}_1,\,\ldots\,,\,\boldsymbol{p}_N) = \int\frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)}\exp\left(-\lambda_0\int h^{1/2}\,d^2\xi\right)\int\prod_j d^2\xi_j\,h^{1/2}(\xi_j)\times$$
$$\times\int\mathcal{D}\boldsymbol{x}(\xi)\,\exp\left\{-\frac{1}{16\pi}\int d^2\xi h^{1/2}h^{ab}\partial_a\boldsymbol{x}\,\partial_b\boldsymbol{x} + i\sum_{j=1}^N\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{x}(\xi_j)\right\} \tag{9.192}$$

(коэффициент $1/16\pi$ отвечает удобной нормировке поля $\boldsymbol{x}$). Переходя к конформной калибровке и представляя $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{cl}} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}_{\text{cl}}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} -\frac{1}{8\pi}\partial^2 \boldsymbol{x}_{\text{cl}} = i\sum_j \boldsymbol{p}_j \delta(\xi - \xi_j), \\ \boldsymbol{x}_{\text{cl}} = i\sum_j \mathcal{D}(\xi|\xi_j)\boldsymbol{p}_j = -i\sum_j \boldsymbol{p}_j \log|\xi - \xi_j|^2 \end{gathered} \tag{9.193}$$

(здесь $\mathcal{D}(\xi|\xi')$ — функция Грина оператора Лапласа), получим

$$\begin{gathered} G(\boldsymbol{p}_1, \, \ldots \, , \, \boldsymbol{p}_N) = \int \mathcal{D}\varphi(\xi) \, \exp\left[-\frac{1}{\gamma}\int ((\partial\varphi)^2 + 2\mu_0^2 e^{\varphi}) \, d^2\xi\right] \times \\ \times \int \prod_j d^2\xi_j \, \exp(\varphi(\xi_j) - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}_j^2 \mathcal{D}(\xi_j|\xi_j)) \times \exp\Big\{\sum_{i<j} 2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j \log|\xi_i - \xi_j|\Big\}. \end{gathered} \tag{9.194}$$

Величина $\mathcal{D}(\xi|\xi)$ сингулярна, и ее смысл мы объясним немного позже. Перед этим перепишем (9.194) в виде

$$G(\boldsymbol{p}_1, \ldots , \boldsymbol{p}_N) = \int \prod_j d^2\xi_j \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j} F(\boldsymbol{p}_1^2, \ldots , \boldsymbol{p}_N^2; \xi_1, \ldots , \xi_N), \tag{9.195}$$

где F дается интегралом Лиувилля по полю φ. Мы ожидаем, что F имеет полюсы по $\boldsymbol{p}_j^2$, отвечающие физическому спектру состояний струны. Амплитуды рассеяния на массовой поверхности будут даваться вычетами в этих полюсах. Обозначив

$$\phi(\xi_1, \ldots , \xi_N) = \operatorname*{res}_{\boldsymbol{p}_j^2 = -m^2} F(\boldsymbol{p}_1^2, \ldots , \boldsymbol{p}_N^2; \xi_1, \ldots , \xi_N) \tag{9.196}$$

(где m^2 — положение предполагаемого полюса, а пространственно-временная сигнатура выбрана так, что $p^2 = p_i^2 - p_0^2 = -m^2$), получаем следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{p}_1, \ldots , \boldsymbol{p}_N) = \int \prod_j d^2\xi_j \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j} \phi(\xi_1, \ldots , \xi_N). \tag{9.197}$$

Даже не зная ϕ, из этой формулы можно извлечь информацию, так как ϕ зависит от меньшего числа переменных, чем $\mathcal{A}$. Но каков смысл ϕ? Ясно, что это некоторая корреляционная функция в квантовой теории поля Лиувилля (поля φ), и, таким образом, в принципе, мы свели проблему вычисления D-мерных амплитуд рассеяния к двумерной теории. Чтобы понять, какого рода корреляторы нам нужны, вернемся назад к (9.195) и постараемся раскрыть смысл $\mathcal{D}(\xi|\xi)$ в нем. Ясно, что в этом выражении мы должны сделать обрезание, причем так, чтобы не нарушить общую ковариантность. Удобно выбрать

$$\mathcal{D}(\xi|\xi) = \sum_n \frac{\psi_n^2(\xi)}{\lambda_n} e^{-\varepsilon\lambda_n}, \tag{9.198}$$

где $\psi_n(\xi)$ и λ_n — собственные функции и соответствующие собственные значения лапласиана. Это та же регуляризация, которую мы использовали выше для определения детерминантов (т. е. регуляризация с помощью швингеровского обрезания собственного времени); она эквивалентна регуляризации Паули–Вилларса. Есть простой и наивный способ вычислить (9.198). Заметим, что

$$\mathcal{D}(\xi|\xi) = -\log(\Delta\xi)^2_{\min}, \tag{9.199}$$

где $(\Delta\xi)^2_{\min}$ — обрезание в ξ-пространстве. Однако величина этого обрезания зависит от ξ, поскольку нужно зафиксировать минимальный инвариантный интервал $(\Delta s)^2_{\min}$. Имеем

$$\begin{aligned} &(\Delta s)^2_{\min} = e^{\varphi(\xi)}(\Delta\xi)^2_{\min} = \varepsilon, \\ &(\Delta\xi)^2_{\min} = \varepsilon e^{-\varphi(\xi)}, \end{aligned} \tag{9.200}$$

и, подставляя это в (9.199), находим

$$\mathcal{D}(\xi|\xi) = \log\frac{1}{\varepsilon} + \varphi(\xi). \tag{9.201}$$

Эта формула выглядит подозрительно, поскольку левая часть должна вести себя как скаляр при конформных преобразованиях

$$\begin{aligned} &\xi \to f(\xi), \\ &\mathcal{D}(\xi|\xi) \to \mathcal{D}(f(\xi)|f(\xi)). \end{aligned} \tag{9.202}$$

Однако

$$\varphi(\xi) \to \varphi(f(\xi)) + \log\left|\frac{df}{d\xi}\right|^2, \tag{9.203}$$

и (9.202) не выполняется. Мы можем даже усилить расхождение, заметив, что в несовпадающих точках функция Грина

$$\mathcal{D}(\xi_1|\xi_2) = -\log|\xi_1 - \xi_2|^2 \tag{9.204}$$

тоже не является скаляром, так как она меняется, например, при растяжениях $\xi \to \lambda\xi$. Происхождение этой неприятности кроется в том, что оператор Лапласа на любом компактном многообразии имеет нулевую моду — постоянную функцию. Эта нулевая мода, проявляющаяся в трансляционной инвариантности $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ действия в (9.192), должна быть аккуратно выделена из функции Грина. Функция Грина без нулевой моды $\mathcal{D}'(\xi_1|\xi_2)$ хорошо определена и не возрастает логарифмически подобно (9.204). Легко показать, что

$$\mathcal{D}'(\xi_1|\xi_2) = \mathcal{D}(\xi_1|\xi_2) + F(\xi_1) + F(\xi_2), \tag{9.205}$$

где $F(\xi)$ определяется из условий сокращения логарифмического роста на бесконечности и постоянства лапласиана. Нетрудно выписать явные формулы для $F(\xi)$, но этого не требуется. Действительно,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j \mathcal{D}'(\xi_i|\xi_j) &= \sum_{i,j} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j \mathcal{D}(\xi_i|\xi_j) + \sum_{i,j} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j (F(\xi_i) + F(\xi_j)) = \\ &= \sum_{i,j} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j \mathcal{D}(\xi_i|\xi_j) + 2\sum_i \boldsymbol{p}_i F(\xi_i) \cdot \sum_j \boldsymbol{p}_j = \sum_{i,j} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j \mathcal{D}(\xi_i|\xi_j),\end{aligned} \tag{9.206}$$

где мы использовали сохранение импульса. По построению $\mathcal{D}'$ имеет правильные трансформационные свойства, но в предыдущих формулах $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}'$ можно не заменять.

В итоге мы получили следующее выражение для функции ϕ в (9.197):

$$\begin{gathered}\phi(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \langle \psi_\Delta(\xi_1) \ldots \psi_\Delta(\xi_N) \rangle, \\ \psi_\Delta = e^{\Delta\varphi(\xi)}, \quad \Delta = 1 + m^2/2.\end{gathered} \tag{9.207}$$

Среднее в этой формуле вычисляется по полю φ с действием Лиувилля (9.189). Значение Δ определяется из того условия, что функция $F(\boldsymbol{p}_1^2, \ldots, \boldsymbol{p}_N^2; \xi_1, \ldots, \xi_N)$ в (9.196) имеет полюс при $\boldsymbol{p}_j^2 = -m^2$. Эту корреляционную функцию можно также представить как статистическую сумму выколотой сферы, на которой поле Лиувилля $\varphi(z)$ имеет параболические особенности

$$e^{\varphi(z)} \to \frac{1}{|\xi - \xi_i|^2 \log^2 |\xi - \xi_i|}.$$

Следующий естественный вопрос, к которому мы переходим, касается свойств корреляционных функций (9.207) и их связи со свойствами струнных амплитуд рассеяния (9.197).

9.8. Амплитуды рассеяния и операторное разложение

Результаты предыдущего раздела можно суммировать следующим образом. Амплитуда дается выражением

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) \sim \int \prod_{j=1}^{N} d^2\xi_j \langle V_{\boldsymbol{p}_1}(\xi_1) \ldots V_{\boldsymbol{p}_N}(\xi_N) \rangle, \tag{9.208a}$$

$$V_{\boldsymbol{p}}(\xi) = \psi_\Delta(\xi) {:}\exp(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\xi)){:}. \tag{9.208b}$$

Здесь мы ввели новое обозначение $:\exp(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\xi)):$. Его смысл состоит в том, что при вычислении средних от произведений различных экспонент свободного бозонного поля $\boldsymbol{x}(\xi)$ с помощью теоремы Вика не следует спаривать поля $\boldsymbol{x}$ внутри символа $:\quad:$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle {:}e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}(\xi_1)}{:} \ldots {:}e^{i\boldsymbol{p}_N\boldsymbol{x}(\xi_N)}{:} \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \exp\Big(2{\sum_{i<j}}' \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j \log|\xi_i - \xi_j|\Big) \\ &= \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j}, \end{aligned} \tag{9.209}$$

и мы воспроизводим (9.197). (Полезное замечание: для вычисления таких средних удобно рассмотреть малые $\boldsymbol{p}_i$ и записать

$$\begin{aligned} \Big\langle \prod_j {:}e^{i\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{x}(\xi_j)}{:} \Big\rangle &\approx \Big\langle \prod_j (1 + i\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{x}(\xi_j)) \Big\rangle = \\ &= 1 - \sum_{i<j} p_{i\mu}p_{j\nu}\langle x_\mu(\xi_i)x_\nu(\xi_j)\rangle + O(p_i^4) \approx \\ &\approx \exp\Big(-\sum_{i<j} p_{i\mu}p_{j\nu}\langle x_\mu(\xi_i)x_\nu(\xi_j)\rangle\Big), \end{aligned} \tag{9.210}$$

поскольку мы заранее знаем, что результат имеет гауссов вид относительно $\boldsymbol{p}_i$.)

Корреляционные функции (9.209) обладают замечательным свойством. Они ковариантны при проективных преобразованиях из группы $SL(2, \mathbf{C})$. Введем комплексные переменные $z = \xi^1 + i\xi^2$ и $\bar{z} = \xi^1 - i\xi^2$ и посмотрим, что произойдет с произведением (9.209), если заменить

$$z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w(z); \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1. \tag{9.211}$$

Имеем

$$z_1 - z_2 \to \frac{z_1 - z_2}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)},$$

откуда

$$\begin{gathered}\prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2p_ip_j} = \prod_{i<j} ((z_i - z_j)(\bar{z}_i - \bar{z}_j))^{p_ip_j} \to \\ \to \prod_{i<j} \left(\frac{1}{|\gamma z_i + \delta|^2 |\gamma z_j + \delta|^2} \right)^{p_ip_j} \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2p_ip_j}.\end{gathered} \tag{9.212}$$

Первый множитель имеет структуру, которая нам уже встречалась в (9.206), и мы перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned}\prod_{i<j} \left(\left| \frac{dw}{dz}(z_i) \right| \left| \frac{dw}{dz}(z_j) \right| \right)^{p_ip_j} &= \exp\Big(2 \sum_{i<j} p_ip_j \log \left| \frac{dw}{dz}(z_i) \right| \Big) = \\ &= \prod_j \left| \frac{dw}{dz}(z_j) \right|^{-p_j^2}\end{aligned} \tag{9.213}$$

(где мы использовали сохранение импульса $\sum_j p_j = 0$). Этот результат можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим оператор

$$U_p(z, \bar{z}) = :e^{ipx(z,\bar{z})}:. \tag{9.214}$$

Мы доказали, что его корреляционные функции инвариантны при преобразованиях

$$U_p(z, \bar{z}) \to \left(\frac{dw}{dz} \right)^{p^2/2} \left(\overline{\frac{dw}{dz}} \right)^{p^2/2} U_p(w(z), \overline{w(z)}), \tag{9.215}$$

где

$$w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1.$$

В такой ситуации мы будем говорить, что оператор имеет аномальную размерность p^2, и что мы имеем дело с конформной квантовой теорией поля.

Как могло получиться, что, начав с поля x размерности нуль, мы экспоненциированием получили поле ненулевой размерности? «Избыток» размерности появился вследствие того, что мы исключили ультрафиолетовое обрезание с помощью нормального упорядочения : :. В противном случае мы получили бы коэффициенты, содержащие $\varepsilon^{-\boldsymbol{p}^2}$ (где ε — малое расстояние, на котором происходит обрезание), и корреляционные функции формально были бы безразмерными при условии, что мы меняем масштаб обрезания ε вместе со всеми масштабами. Но такое масштабное преобразование не представляет интереса. Физическое изменение масштаба не меняет обрезания. Вообще говоря, в этой ситуации масштабной инвариантности могло бы и не быть вовсе. Однако во многих важных случаях, подобных рассмотренному выше, она тем не менее имеется, хотя трансформационные свойства полей перенормируются.

Обратимся теперь к первому множителю в (9.208b). По построению он инвариантен при преобразованиях (см. (9.203))

$$\psi_\Delta(z,\bar{z}) \to \left(\frac{dw}{dz}\right)^\Delta \left(\overline{\frac{dw}{dz}}\right)^\Delta \psi_\Delta(w(z),\overline{w(z)}). \tag{9.216}$$

Эта конформная инвариантность, как мы уже отмечали, представляет собой остаток общей ковариантности в нашей калибровке. Аномальная размерность Δ в (9.207) такова, что вершинный оператор (9.208b) имеет размерность $2(\Delta + \boldsymbol{p}^2/2) = 2$. Таким образом, масса основного состояния струны определяется аномальной размерностью поля $\psi_\Delta(z)$, причем последняя полностью определена в рамках теории поля Лиувилля. Подынтегральное выражение в (9.208a) тоже инвариантно при $SL(2,\,\mathbf{C})$-преобразованиях, поэтому, чтобы избежать интегрирования по бесконечному объему $SL(2,\mathbf{C})$, следует выделить этот объем из интеграла. На практике для этого достаточно с помощью $SL(2,\,\mathbf{C})$ поместить три точки ξ_1, ξ_2 и ξ_3, например, в 0, 1 и ∞. По-разному фиксируя $SL(2,\,\mathbf{C})$-калибровку, мы получим различные по виду, но фактически совпадающие амплитуды $\mathcal{A}$. Это совершенно тривиально, подобно фиксированию координат центра масс.

Теперь мы докажем одну крайне важную вещь. Именно, амплитуда $\mathcal{A}$ как функция $s_{i_1\ldots i_k} = (\boldsymbol{p}_{i_1} + \ldots + \boldsymbol{p}_{i_k})^2$ имеет бесконечное число полюсов с факторизованными вычетами. Под этим подразумевается следующее соотношение, которому удовлетворяет набор амплитуд $\mathcal{A}_N(\boldsymbol{p}_1,\,\ldots\,,\,\boldsymbol{p}_N)$:

$$i_1 \quad i_2 \quad i_N \qquad\qquad i_1 \quad i_N$$

$$\begin{aligned} i_k \qquad i_{k+1} &= \sum_r \qquad i_k \qquad i_{k+1} \qquad = \\ &= \sum_r \frac{\mathcal{A}_k^{(r)}(\boldsymbol{p}_{i_1},\,\ldots\,,\,\boldsymbol{p}_{i_k})\mathcal{A}_{N-k}^{(r)}(\boldsymbol{p}_{i_{k+1}},\,\ldots\,,\,\boldsymbol{p}_{i_N})}{(\boldsymbol{p}_{i_1} + \ldots + \boldsymbol{p}_{i_k})^2 + m_r^2}. \end{aligned} \tag{9.217}$$

Здесь через m_r обозначены массы резонансов, среди которых должно присутствовать и основное состояние с квадратом массы $m_0^2 = 2(\Delta - 1)$. $\mathcal{A}_k^{(r)}$ — амплитуды рассеяния k частиц основного состояния и одного резонанса. Таким образом, мы допустили небольшую неточность, говоря о наборе $\{\mathcal{A}_N\}$. В действительности требование факторизации должно быть наложено на более широкий набор амплитуд, содержащих произвольное число возбужденных частиц. Для них мы еще не приводили формулы вроде (9.208), но это будет сделано в процессе доказательства.

Условие факторизации (9.217) представляется необходимым и совершенно очевидным с физической точки зрения. Оно отражает то обстоятельство, что благодаря короткодействию всех сил, отдельные взаимодействия независимы. Оно также очевидно и с геометрической точки зрения. Резонанс представляется тонкой трубкой, заметаемой в пространстве-времени распространяющейся замкнутой струной в соответствующем состоянии. Амплитуда получается из поверхностей, имеющих топологию сферы с выколотыми точками. В кинематической области, соответствующей (9.217), существенные конфигурации этой сферы имеют вид:

,

представляя слияние двух (или более) замкнутых струн в одну и последующий распад. Это и есть полюсная диаграмма (9.217). Диаграммы с несвязными разрезами, имеющими вид нескольких замкнутых струн, соответствуют более сложным топологиям: сферам с ручками. Однако с алгебраической точки зрения факторизация представляет собой столь сложное условие, что ее доказательство должно либо быть очень простым, либо отсутствовать вовсе. К счастью, осуществляется первая возможность. Мы сейчас покажем, что условие факторизации эквивалентно операторному разложению в двумерной теории поля, и что имеется соответствие между двумерными операторами и резонансами.

Операторное разложение является фундаментальным свойством, присущим любой разумной теории поля. Оно утверждает, что два локальных оператора, помещенные достаточно близко друг к другу, могут рассматриваться как линейная комбинация локальных операторов. «Достаточно близко» означает, что мы рассматриваем некоторую многоточечную корреляционную функцию, включающую наряду с прочими и нашу пару операторов, расстояние между которыми много меньше всех остальных расстояний. Грубо говоря, если смотреть с большого расстояния, наши две точки сливаются в одну. Формально, если теория поля обладает набором локальных операторов $\{O_n(\xi)\}$, то выполняется следующее соотношение

$$O_n(\xi)O_m(0) \underset{\xi\to 0}{=} \sum_l C^l_{nm}(\xi)O_l(0), \tag{9.218}$$

которое следует понимать как соотношение между корреляционными функциями, скажем,

$$\langle O_n(\xi)O_m(0)O_1(\xi_1)\ldots O_N(\xi_N)\rangle \underset{\xi\to 0}{=} \sum_l C^l_{nm}(\xi)\langle O_l(0)O_1(\xi_1)\ldots O_N(\xi_N)\rangle. \tag{9.219}$$

Мы также предположим, что можно найти полный набор операторов $\{O_n\}$, так что любое квантовое состояние порождается действием на вакуум их линейной комбинации. Это означает, что соотношение (9.218) становится точным, если мы учтем все операторы полного набора. Что же можно сказать о «структурных функциях» $C^l_{nm}(\xi)$? Предположим, что мы имеем дело с конформной теорией поля, инвариантной относительно $SL(2, \mathbf{C})$-преобразований. Тогда любой оператор O_n характеризуется своей аномальной размерностью Δ_n. Это означает, что корреляционные функции не меняются при заменах

$$O_n(\xi) \to \lambda^{\Delta_n} O_n(\lambda\xi). \tag{9.220}$$

Чтобы с этим согласовывалось (9.218), нужно потребовать

$$C^l_{nm}(\lambda\xi) = \lambda^{\Delta_l-\Delta_n-\Delta_m} C^l_{nm}(\xi). \tag{9.221}$$

Для скалярных операторов это просто означает, что

$$C^l_{nm}(\xi) \sim |\xi|^{\Delta_l-\Delta_n-\Delta_m}, \tag{9.222}$$

в то время как в общем случае появляются некоторые тензорные структуры. Все это уже напоминает свойство факторизации, но чтобы установить точное соответствие, нужно сделать еще несколько шагов. Прежде всего, давайте проделаем все явно для операторов

$$U_{\boldsymbol{p}}(\xi) = :e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\xi)}:.$$

Имеем

$$:e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}(\xi)}:\ :e^{i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}(0)}: \underset{\xi\to 0}{\approx} |\xi|^{(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2-\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2} :e^{i(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{x}(0)}: + \\ + \text{менее сингулярные члены}. \tag{9.223}$$

Здесь мы использовали то, что размерность $U_{\boldsymbol{p}}(\xi)$ равна $\boldsymbol{p}^2$. Формула (9.223) следует из того, что экспоненциальные операторы несут сохраняющийся импульс $\boldsymbol{p}$. Это легко проверить с помощью выражения для корреляционной функции (9.209), сливая точки ξ_1 и ξ_2 и сравнивая с корреляционной функцией, содержащей $U_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}(\xi_2)$. Это хорошее упражнение для первого знакомства с операторными разложениями. Обратимся теперь к амплитуде рассеяния и рассмотрим сперва случай $D = 26$, когда поле Лиувилля отсутствует. Основное утверждение состоит в том, что особенности амплитуды $\mathcal{A}$ как функции $\boldsymbol{p}_j$ происходят от интегрирования по тем областям ξ-пространства, в которых некоторые точки, скажем ξ_1 и ξ_2, сливаются. В этом случае возникает полюсная особенность. В самом деле,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_N(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) &= \int \prod_j d^2\xi_j \, \langle U_{\boldsymbol{p}_1}(\xi_1) \ldots U_{\boldsymbol{p}_N}(\xi_N) \rangle = \\
&= \int d^2\eta \int d^2\xi_2 \ldots d^2\xi_N \, \langle U_{\boldsymbol{p}_1}(\xi_2 + \eta) U_{\boldsymbol{p}_2}(\xi_2) \ldots U_{\boldsymbol{p}_N}(\xi_N) \rangle \approx \\
&\approx \int_{\eta \to 0} d^2\eta \, |\eta|^{(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2 - \boldsymbol{p}_1^2 - \boldsymbol{p}_2^2} \times \\
&\quad \times \int d^2\xi_2 \ldots d^2\xi_N \, \langle U_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}(\xi_2) \ldots U_{\boldsymbol{p}_N}(\xi_N) \rangle = \\
&= \left(\frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 - 2} \right) \mathcal{A}_{N-1}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_N) + \\
&\quad + \text{члены, регулярные при } (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 = 2
\end{aligned} \tag{9.224}$$

(имеются также и другие полюсы по $(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2$, и они будут рассмотрены ниже). Мы использовали здесь операторное разложение (9.223) и то, что аномальная размерность $U_{\boldsymbol{p}_j}(\xi)$ должна равняться 2 (чтобы обеспечить проективную инвариантность без поля Лиувилля), что приводит к массе основного состояния $m_0^2 = -\boldsymbol{p}^2 = -2$ (хорошо известный тахион стандартной дуальной модели). Мы видим из (9.224), что два тахиона сливаются в один, и амплитуда этого процесса удовлетворяет условию факторизации. Вывод (9.224) иллюстрирует простой механизм, преобразующий операторное разложение двумерной теории поля (теории поля на мировом листе струны) в D-мерную факторизацию полюсов. Пока мы рассмотрели только простейший пример, чтобы продемонстрировать основную идею, а теперь нужно двигаться дальше.

При $D = 26$ можно изучить остальные полюсы амплитуды. Они будут отвечать высшим операторам в операторном разложении. С помощью точной версии формулы (9.223),

$$:e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}(\xi)}:\,:e^{i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}(0)}: = |\xi|^{(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2-\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2}:e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}(\xi)+i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}(0)}:, \tag{9.225}$$

находим следующие члены разложения:

$$\begin{aligned}U_{\boldsymbol{p}_1}(\xi)U_{\boldsymbol{p}_2}(0) \approx |\xi|^{(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2-\boldsymbol{p}_1^2-\boldsymbol{p}_2^2}\{U_{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}(0) +&\\ + :i\boldsymbol{p}_1\xi^a\,\partial_a\boldsymbol{x}(0)\,e^{i(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{x}(0)}: +&\\ + :\left(\frac{i}{2}p_{1,\mu}\xi^a\xi^b\,\partial_a\,\partial_b x_\mu - \frac{1}{2}p_{1,\mu}p_{1,\nu}\xi^a\xi^b\partial_a x_\mu\partial_b x_\nu\right)e^{i(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{x}(0)}: + \ldots\}.&\end{aligned} \tag{9.226}$$

Подставляя это выражение в (9.224), мы приходим к общему правилу, которое можно сформулировать следующим образом.

Любой оператор, появляющийся в разложении (9.225), имеет вид

$$O_{m_1\mu_1\ldots m_k\mu_k;n_1\nu_1\ldots n_l\nu_l} = :\partial_z^{m_1}x_{\mu_1}\ldots\partial_z^{m_k}x_{\mu_k}\partial_{\bar z}^{n_1}x_{\nu_1}\ldots\partial_{\bar z}^{n_l}x_{\nu_l}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}:. \tag{9.227}$$

Он имеет размерность

$$\Delta = \boldsymbol{p}^2 + \sum_{j=1}^{k} m_j + \sum_{i=1}^{l} n_i.$$

Полюс, отвечающий его вкладу в (9.224), появляется при

$$\Delta = 2, \tag{9.228}$$

или

$$m^2 = -\boldsymbol{p}^2 = \sum_j m_j + \sum_i n_i - 2. \tag{9.229}$$

Удобны следующие обозначения. Введем два набора гармонических осцилляторов $\{a^+_{m,\mu},\ \tilde a^+_{n,\nu}\}$ с обычными коммутационными соотношениями $[a_{n,\mu}, a^+_{m,\nu}] = [\tilde a_{n,\mu},\ \tilde a^+_{m,\nu}] = n\delta_{nm}\delta_{\mu\nu}$; $[a,\ \tilde a] = 0$ и сопоставим оператору (9.227) вектор в фоковском пространстве:

$$\begin{aligned}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} &\leftrightarrow |0,\boldsymbol{p}\rangle,\\ O_{m_1\mu_1\ldots m_k\mu_k;n_1\nu_1\ldots n_l\nu_l} &\leftrightarrow a^+_{m_1\mu_1}\ldots a^+_{m_k\mu_k}\tilde a^+_{n_1\nu_1}\ldots\tilde a^+_{n_l\nu_l}|0,\boldsymbol{p}\rangle.\end{aligned} \tag{9.230}$$

Видно, что с помощью этих обозначений m^2 можно представить как собственное значение оператора

$$m^2 = \sum_m (a^+_{m,\mu}a_{m,\mu} + \tilde a^+_{m,\nu}\tilde a_{m,\nu}) - 2. \tag{9.231}$$

Различные состояния этих осцилляторов, таким образом, можно интерпретировать как колебательные возбуждения струны. Иногда такое представление очень полезно.

Важное обстоятельство заключается в том, что не все операторы (9.227) дают вклад в амплитуду. Вычеты в полюсах, отвечающих некоторым операторам, обращаются в нуль. Например ясно, что операторы, меняющие знак при замене ориентации $z \longleftrightarrow \bar{z}$ (такие, как $(\partial_z x_\mu\, \partial_{\bar{z}} x_\nu - \partial_{\bar{z}} x_\mu\, \partial_z x_\nu) e^{i\boldsymbol{px}}$), не дадут вклада, так как вычет

$$\begin{aligned}\operatorname{res} \mathcal{A}_N(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) \sim \\ \sim \int d^2 z\, d^2 z_3 \ldots d^2 z_N \, \langle O^{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}_{m_1 \mu_1 \ldots ;\, n_1 \nu_1 \ldots}(z, \bar{z}) U_{\boldsymbol{p}_3}(z_3, \bar{z}_3) \ldots U_{\boldsymbol{p}_N}(z_N, \bar{z}_N),\end{aligned} \tag{9.232}$$

обратится в нуль, поскольку все $\{U_{\boldsymbol{p}}\}$ четны по отношению к этому преобразованию.

Кроме того, операторы должны иметь конформный спин нуль, т. е. должны вести себя как скаляры при поворотах $z \to e^{i\alpha} z$ по той же причине. Таким образом, первое возбужденное состояние струны отвечает оператору

$$O_{\mu\nu} = (\partial_z x_\mu\, \partial_{\bar{z}} x_\nu + \partial_z x_\nu\, \partial_{\bar{z}} x_\mu) e^{i\boldsymbol{px}} \tag{9.233}$$

и имеет

$$m^2 = -2 + 1 + 1 = 0.$$

Его спиновый состав мы проанализируем позже.

Есть и другая причина сокращения вычетов. Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} i p_\mu O_{\mu\nu} &= i p_\mu (\partial_z x_\mu\, \partial_{\bar{z}} x_\nu + \partial_z x_\nu\, \partial_{\bar{z}} x_\mu) e^{i\boldsymbol{px}} = \\ &= \partial_z (\partial_{\bar{z}} x_\nu\, e^{i\boldsymbol{px}}) + \partial_{\bar{z}} (\partial_z x_\nu\, e^{i\boldsymbol{px}}), \end{aligned} \tag{9.234}$$

где мы использовали то, что $\partial_z \partial_{\bar{z}} \boldsymbol{x} = 0$, так как $\boldsymbol{x}$ — свободное поле. Этот же факт был неявно использован в (9.227). Так как оператор (9.234) — полная производная, его вклад в вычет (9.232) равен нулю[1], или, другими словами, амплитуда излучения безмассового тензорного состояния (9.233) чисто поперечна. Это очень приятно, так как в противном случае при продолжении нашей теории в пространство Минковского мы неизбежно имели бы состояния с отрицательной нормой — времениподобные гравитоны.

На самом деле сокращений гораздо больше. Чтобы найти их, нужно использовать конформные свойства двумерной теории поля на мировом листе струны.

[1] Поскольку все интегралы являются аналитическими функциями $\boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j$, и в пространстве импульсов $\boldsymbol{p}_j$ всегда имеется область, в которой все граничные члены исчезают.

9.9. Тензор энергии-импульса в конформной квантовой теории поля

Есть замечательный механизм, преобразующий конформные тождества Уорда двумерной теории поля на струне в определенные условия поперечности, обобщающий механизм отщепления состояний (9.234). Этот механизм будет важен при всех D, а не только при $D = 26$, и по этой причине мы исследуем его детально.

Начнем с вывода тождеств Уорда в случае, когда имеется только свободное поле $\boldsymbol{x}$ ($D = 26$). Тензор энергии-импульса такого поля дается выражением

$$T_{\alpha\beta}(\xi) = \partial_\alpha \boldsymbol{x}\, \partial_\beta \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\partial_\lambda \boldsymbol{x})^2 \tag{9.235}$$

и, в силу уравнений движения, сохраняется

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\alpha} = 0. \tag{9.236}$$

Очень удобно воспользоваться комплексными обозначениями, введя

$$T(z,\bar{z}) = T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} = \partial_z \boldsymbol{x}\, \partial_z \boldsymbol{x}. \tag{9.237}$$

Закон сохранения теперь имеет вид

$$\partial_{\bar{z}} T(z,\bar{z}) = 2\partial_z \boldsymbol{x}\, \partial_z \partial_{\bar{z}} \boldsymbol{x} = 0, \tag{9.238}$$

откуда следует, что T — аналитическая функция z. При выводе (9.238) мы использовали не только (9.236), но и следующее важное свойство тензора (9.235):

$$T_{\alpha\alpha} = 0. \tag{9.239}$$

Это свойство выражает конформную инвариантность теории в любом числе измерений. Действительно, для любой системы тензор энергии-импульса определяет вариацию действия S при заменах переменных

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &\to \xi^\alpha + \varepsilon^\alpha(\xi), \\ S &\to S + \delta S, \\ \delta S &= \int T^{\alpha\beta}(\xi)(\partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha)\, d^n\xi. \end{aligned} \tag{9.240}$$

Следовательно, бесследовость (9.239) означает, что действие не меняется для таких ε_α, что

$$\partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha \sim \delta_{\alpha\beta}, \tag{9.241}$$

или

$$\partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha - \frac{2}{n}\delta_{\alpha\beta}\partial_\lambda \varepsilon_\lambda = 0 \tag{9.242}$$

(n — размерность ξ-пространства).

Для $n = 2$ эти условия совпадают с условиями Коши–Римана, которым удовлетворяет любая аналитическая функция. Таким образом, в этом случае мы имеем бесконечномерную конформную группу. В то же время для $n > 2$ группа конечномерна и состоит из обычных трансляций и поворотов плюс растяжения и инверсии. Мы видим, что формула (9.238) выражает в сжатом виде конформную инвариантность теории. Это не просто сохранение $T_{\alpha\beta}$, поскольку в общем случае в (9.238) имелись бы члены, содержащие ∂_z-производные. Их отсутствие будет важно в дальнейшем.

Покажем теперь, что корреляционные функции, содержащие оператор T, явно определяются тождествами Уорда.

Сперва мы дадим формальный вывод этих тождеств, а затем, чтобы почувствовать, как они возникают, проанализируем специальный случай свободных полей.

Удобно считать переменные z и $\bar{z}$ независимыми и сконцентрировать внимание на изменении z. Предположим, что мы имеем набор операторов $\{O_n\}$, преобразующихся как

$$O_n(z) \to \left(\frac{df}{dz}\right)^{\Delta_n} O_n(f(z)) \tag{9.243a}$$

или

$$\delta_\varepsilon O_n(z) = \varepsilon(z)\partial_z O_n(z) + \Delta_n \varepsilon'(z) O_n(z), \tag{9.243b}$$

где мы перешли к инфинитезимальным преобразованиям $z \to f(z) = z + \varepsilon(z)$. При тех же преобразованиях действие приобретает вариацию (9.240), которую можно переписать в виде

$$\delta_\varepsilon S = \int d^2 z\, T(z)\partial_{\bar{z}}\varepsilon. \tag{9.244}$$

Как это обычно бывает в теории поля, тождество Уорда возникает, когда мы делаем замену переменных в континуальном интеграле и требуем, чтобы значение интеграла не изменилось. Это означает, что

$$\langle \delta_\varepsilon S\, O_{n_1}(z_1)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle = \sum_{j=1}^{k}\langle O_{n_1}(z_1)\ldots \delta_\varepsilon O_{n_j}(z_j)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle, \tag{9.245}$$

где левая часть представляет вариацию множителя e^{-S} в евклидовом континуальном интеграле при преобразовании (9.244), в то время как правая часть порождена вариацией самих операторов O_n.

Требуя выполнения (9.245) для любого ε и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}\langle T(z)O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle &= \\ &= \sum_j\left\{\delta(z-z_j)\frac{\partial}{\partial z_j}+\Delta_{n_j}\partial_z\delta(z-z_j)\right\}\langle O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle\end{aligned}\tag{9.246}$$

(здесь $\delta(z)$ — двумерная δ-функция).

Структура, подобная (9.246), типична для всех тождеств Уорда, встречающихся в теории поля. Необычно лишь то, что уравнение (9.246) можно однозначно проинтегрировать. Для этого воспользуемся простым соотношением

$$\begin{aligned}\partial_z\partial_{\bar z}\log(|z-z'|^2) &= \partial_z\partial_{\bar z}[\log(z-z')+\log(\bar z-\bar z')] \\ &= \partial_{\bar z}\frac{1}{z-z'}+\partial_z\frac{1}{\bar z-\bar z'} = -\pi\delta(z-z').\end{aligned}\tag{9.247}$$

Изменив (начиная с этого момента и до конца главы) нормировку T на π, получаем отсюда

$$\begin{aligned}\langle T(z)O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle &= \\ &= \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\Delta_{n_j}}{(z-z_j)^2}+\frac{1}{z-z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right\}\langle O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle.\end{aligned}\tag{9.248}$$

Причина, по которой корреляционные функции, включающие $T(z)$, вычисляются явно, состоит в том, что вследствие бесследовости $T_{\alpha\beta}$ закон сохранения энергии-импульса содержит только $\partial_{\bar z}$ и не содержит ∂_z. Говоря менее техническим языком, $T(z)$ порождает конформное преобразование, и вследствие инвариантности теории его результат может быть выражен через вариации $\{O_{n_j}\}$. Нам также потребуются тождества Уорда, содержащие несколько $T(z)$. Чтобы найти их, нужно выяснить, как $T(z)$ преобразуется под действием конформной группы. Поскольку $T_{\alpha\beta}$ является симметрическим бесследовым тензором второго ранга относительно $SL(2,\mathbf{C})$, мы ожидаем, что его закон преобразования согласуется с этими свойствами. Так как параметром конформного преобразования служит векторное поле $\varepsilon(z)$ (напомним, что мы используем комплексные обозначения), наиболее общий вид вариации $T(z)$ таков

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z)\partial_z T + 2(\partial_z\varepsilon)T + \frac{c}{12}\partial_z^3\varepsilon \tag{9.249}$$

(поскольку под действием $SL(2, \mathbf{C})$ $T(z)$ преобразуется как $(dz)^{-2}$, а $\varepsilon(z)$ как dz).

Постоянная c, появившаяся в (9.249), является динамической характеристикой теории и играет важную роль. Мы сейчас вычислим ее для свободных полей, но сначала стоит обсудить ее смысл.

Ее появление в (9.249) означает, что под действием конформной группы $T(z)$ не преобразуется как первичное поле с вариацией вида (9.243). Вероятно, настало время сказать, что первичные операторы — не единственные операторы в полном наборе. Действительно, вместе с некоторым первичным $O_n(z)$ нужно рассматривать его производную $A_n \equiv \partial_z O_n$. Ее закон преобразования получается дифференцированием (9.243):

$$\begin{aligned} &\delta_\varepsilon A_n = \varepsilon\,\partial_z A_n + (\Delta_n + 1)(\partial_z\varepsilon)A_n + \Delta_n(\partial_z^2\varepsilon)O_n, \\ &\quad A_n \equiv \partial_z O_n. \end{aligned} \tag{9.250}$$

Ясно, что высшие производные O_n будут содержать высшие производные ε в своих конформных вариациях. Перспективы использования операторной алгебры (9.218) с таким огромным множеством операторов кажутся довольно безнадежными.

Тем не менее, операторная алгебра оказывается обозримой. Мы покажем, что структура теории вполне определяется первичными операторами, а все остальные операторы получаются по простым правилам. Тензор энергии-импульса играет существенную роль в отыскании этих правил, и мы возвращаемся к (9.249).

С помощью (9.244) и (9.245) получаем

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int d^2u\,\partial_{\bar u}\varepsilon(u)\,\langle T(u)T(z)\rangle = \langle\delta_\varepsilon T(z)\rangle = \frac{c}{12}\partial_z^3\varepsilon(z), \\ \partial_{\bar z}\langle T(z)T(u)\rangle = \pi\frac{c}{12}\partial_z^3\delta(z-u), \end{gathered} \tag{9.251}$$

или

$$\langle T(z)T(u)\rangle = -\frac{c}{12}\partial_z^3\left(\frac{1}{z-u}\right) = \frac{c}{2}(z-u)^{-4}. \tag{9.252}$$

Мы видим, что, если бы в (9.249) не было c-члена, двухточечная функция тензора энергии-импульса обращалась в нуль, что несовместно с положительностью нормы в пространстве состояний. В случае свободного поля $\boldsymbol{x}$, когда $T(z) = -\frac{1}{2}(\partial_z \boldsymbol{x})^2$, элементарное вычисление двухточечной функции показывает, что $c = D$, где D — число компонент $\boldsymbol{x}$.

Есть, однако, и другая, геометрическая интерпретация константы c и ее роли в тождествах Уорда. Умножим (9.248) на некоторую мероморфную функцию $\varepsilon(z)$ и проинтегрируем по контуру C, который окружает все точки z_j и внутри которого функция $\varepsilon(z)$ голоморфна. Тогда уравнение (9.248) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle T_\varepsilon O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle &= \delta_\varepsilon \langle O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle, \\ T_\varepsilon &= \oint_C \frac{dz}{2\pi \mathrm{i}} \varepsilon(z)\, T(z), \\ \delta_\varepsilon O_{n_j}(z_j) &= \varepsilon(z_j)\, \partial_{z_j} O_{n_j}(z_j) + \Delta_{n_j} \varepsilon'(z_j) O_{n_j}(z_j), \end{aligned} \tag{9.253}$$

так что T_ε порождает конформные преобразования в пространстве различных корреляционных функций. Рассмотрим коммутатор двух таких преобразований. Какого сорта алгебру нам следует ожидать? С геометрической точки зрения конформные преобразования порождаются операторами

$$\hat{\delta}_\varepsilon = \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z},$$

которые образуют алгебру Ли, поскольку

$$\begin{aligned} [\hat{\delta}_{\varepsilon_1}, \hat{\delta}_{\varepsilon_2}] &= \hat{\delta}_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]}, \\ [\varepsilon_1, \varepsilon_2] &= \varepsilon_1 \varepsilon_2' - \varepsilon_1' \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{9.254}$$

Поэтому можно было бы думать, что если мы рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_2} O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle,$$

где контур C_1 окружает все особые точки функции ε_2 и точки z_j, и вычтем то же выражение с переставленными индексами 1 и 2, то получится корреляционная функция

$$\langle T_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} O_{n_1}(z_1)\dots O_{n_k}(z_k)\rangle.$$

Это не так из-за c-члена. Правильную формулу можно вывести из (9.249). Прежде всего имеем

$$[T_\varepsilon,\, T(z)] = \varepsilon \partial_z T + 2(\partial_z \varepsilon) T + \frac{c}{12} \varepsilon'''(z). \tag{9.255}$$

Смысл коммутатора в (9.255), как объяснялось выше, дается равенством

$$\langle [T_\varepsilon, T(z)] O_{n_1}(z_1) \ldots O_{n_k}(z_k) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \left(\oint_{C_1} \frac{du}{2\pi \mathrm{i}} - \oint_{C_2} \frac{du}{2\pi \mathrm{i}} \right) \varepsilon(u) \langle T(u) T(z) O_{n_1}(z_1) \ldots O_{n_k}(z_k) \rangle, \tag{9.256}$$

где внутренность C_1 содержит точку z, лежащую вне C_2. Кроме того, $\varepsilon(u)$ голоморфна внутри обоих контуров, и все z_j лежат внутри них. Это определение коммутатора в евклидовой теории поля, разумеется, эквивалентно обычному определению в гамильтоновом формализме в пространстве Минковского. В нашей формулировке оно, однако, не зависит от выбора направления оси времени. Если мы проинтегрируем (9.255) с некоторой функцией ε_2 по замкнутому контуру C_2, то получим

$$[T_{\varepsilon_1}, T_{\varepsilon_2}] = T_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} + \frac{c}{24} \oint_C \frac{dz}{2\pi \mathrm{i}} (\varepsilon_1''' \varepsilon_2 - \varepsilon_2''' \varepsilon_1), \tag{9.257}$$

где контур C отделяет точки z_j от особых точек функций ε_1 и ε_2.

Алгебра (9.257), называемая алгеброй Вирасоро, является расширением алгебры (9.254). Легко проверить, что последний член в (9.257) — единственный функционал, совместный с тождеством Якоби.

Мы видим, что благодаря (9.249) корреляционные функции, содержащие любое число T, легко вычисляются. Например,

$$\langle T(z) T(u) O_{n_1}(z_1) \ldots O_{n_k}(z_k) \rangle = \frac{c}{2} (z-u)^{-4} \langle O_{n_1}(z_1) \ldots O_{n_k}(z_k) \rangle + \\ + \left\{ \frac{2}{(z-u)^2} + \frac{1}{z-u} \frac{\partial}{\partial u} + \sum_j \left(\frac{\Delta j}{(z-z_j)^2} + \frac{1}{z-z_j} \right) \right\} \times \\ \times \langle T(u) O_{n_1}(z_1) \ldots O_{n_k}(z_k) \rangle. \tag{9.258}$$

Формулы такого рода всегда можно вывести несколькими способами, так как, например, при выводе тождеств Уорда можно было начать не с $T(z)$, а с $T(u)$. Можно проверить, что условие независимости результата от последовательности вывода оказывается в точности тождеством Якоби для алгебры (9.257). Тождества Уорда (9.258) дают важную информацию об операторной алгебре (9.218). Именно, операторная алгебра должна быть устроена так, чтобы после слияния двух O_n в левой части (9.258) мы получили бы результат, совместный с соответствующим слиянием двух точек в правой части (которая явно зависит от z_j).

Другими словами, операторная алгебра должна быть конформно инвариантной.

Чтобы классифицировать возможные операторы, рассмотрим операторное разложение произведения $T(z)$ и некоторого первичного оператора $\psi(0)$ размерности Δ. Имеем

$$T(z+\zeta)\psi(z) = \frac{\Delta}{\zeta^2}\psi(z) + \frac{1}{\zeta}\partial_z\psi(z) + \psi_2(z) + \zeta\psi_3(z) + \ldots . \tag{9.259}$$

Первые два члена в этой формуле немедленно получаются из сравнения с (9.248), в то время как операторы $\psi_k(z)$ с $k \geqslant 2$ должны определяться из более тщательного анализа того же уравнения. Например, поле $\psi_2(z)$ определяется через свои корреляционные функции с любыми другими полями следующим образом. Запишем (9.248) в виде

$$\begin{aligned} &\langle T(z+\zeta)\psi(z)O_{n_1}(z_1)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle = \\ &\quad = \Big(\frac{\Delta}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial z}\Big)\langle\psi(z)O_{n_1}(z_1)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle + \\ &\quad + \sum_j\left(\frac{\Delta_{n_j}}{(z+\zeta-z_j)^2} + \frac{1}{z+\zeta-z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\times \\ &\quad \times\langle\psi(z)O_{n_1}(z_1)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle. \end{aligned} \tag{9.260}$$

Полагая $\zeta \to 0$ и сравнивая (9.260) и (9.259), получаем

$$\begin{aligned} &\langle\psi_2(z)O_{n_1}(z_1)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle = \\ &= \Big[\sum_j\left(\frac{\Delta_{n_j}}{(z-z_j)^2} + \frac{1}{z-z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\Big]\langle\psi(z)O_{n_1}(z_1)\ldots O_{n_k}(z_k)\rangle. \end{aligned} \tag{9.261}$$

Итак, мы видим, что имеется бесконечное число полей $\psi_k(z)$, ассоциированных с первичным полем $\psi(z)$, с однозначно определенными корреляционными функциями (для $k > 2$ мы раскладываем правую часть до соответствующей степени ζ).

Удобно представить поля $\psi_k(z)$ в виде

$$\begin{aligned} &\psi_k(z) = T_{-k}\psi(z), \\ &T_{-k}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint\frac{d\zeta}{\zeta^{k-1}}T(z+\zeta). \end{aligned} \tag{9.262}$$

Это обозначение подсказывает нам, что ψ_k не составляют множества всех вторичных операторов, появляющихся из одного первичного поля $\psi(z)$. Это следует из того, что имеются другие тождества Уорда вроде (9.258), но содержащие много операторов T. Все конформное семейство $\psi(z,\,\bar z)$ состоит из операторов

$$\psi_{k_1\ldots k_l;\,\bar k_1\ldots\bar k_n} = T_{-k_1}\ldots T_{-k_l}\bar T_{-\bar k_1}\ldots\bar T_{-\bar k_n}\psi(z,\,\bar z) \tag{9.263}$$

(где $\bar T$ комплексно сопряжено T). Все корреляционные функции этих операторов опять-таки выражаются через корреляционные функции оператора $\psi(z)$. Более того, если в разложении произведения двух операторов встречается некоторый оператор ψ, то вместе с ним появляется и все семейство $\psi_{\{k\},\{\bar k\}}$ с коэффициентами, которые можно вычислить из тождеств Уорда. Есть простые алгебраические методы, позволяющие это сделать, но для наших целей они не понадобятся.

В общем случае поле $\psi_{\{k\},\{\bar k\}}$ преобразуется при конформных преобразованиях по сложным неоднородным правилам, включающим вторичные поля на более низких уровнях (вспомним (9.250) и заметим, что $\partial_z O_n = T_{-1}O_n$). Случается, однако, так, что некоторое вторичное поле $\psi_{\{k\},\{\bar k\}}$ оказывается первичным. Это имеет место, если $T_n\psi_{\{k\},\{\bar k\}} = \bar T_n\psi_{\{k\},\{\bar k\}} = 0$ для любого $n > 0$. Эти условия можно проверять, пользуясь алгеброй Вирасоро, записанной в виде

$$[T_n,\,T_m] = (n-m)T_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{9.264}$$

(то же самое и для $\bar T$), что следует из (9.255), (9.262). В таком случае закон преобразования становится однородным и поле $\psi_{\{k\},\{\bar k\}}$ можно исключить из операторной алгебры, не нарушая конформной инвариантности (коэффициенты при таких полях в операторных разложениях становятся неопределенными). В следующем разделе такое вырождение поможет нам уменьшить число состояний.

Приведем простейший пример этого явления. Если мы возьмем оператор $T_{-1}\phi_\Delta$, где ϕ_Δ — первичный оператор размерности Δ, вышеприведенное условие вырождения примет вид

$$\begin{gathered} T_1T_{-1}\phi = 2T_0\phi = 2\Delta\phi = 0,\\ \Delta = 0. \end{gathered} \tag{9.265}$$

Мы говорим, что конформное семейство с $\Delta = 0$ вырождено на первом уровне. Менее тривиальный пример — вырождение на втором уровне. Возьмем оператор

$$\chi = (aT_{-2} + bT_{-1}^2)\phi \tag{9.266}$$

и наложим условия вырождения

$$T_1\chi = T_2\chi = 0. \tag{9.267}$$

Условий (9.267) всегда достаточно, так как, согласно коммутационным соотношениям алгебры Вирасоро (9.264), любое T_n, $n > 0$, может быть получено комбинацией T_1 и T_2. Применяя первое из этих условий и используя тождества

$$\begin{aligned}
&[T_1, T_{-2}] = 3T_{-1},\\
&[T_1, T_{-1}^2] = 2(T_0 T_{-1} + T_{-1} T_0) = 2T_{-1}(2T_0 + 1),
\end{aligned}$$

получаем

$$T_1 \chi = (3a + 2(2\Delta + 1)b) T_{-1} \phi = 0. \tag{9.268}$$

Иными словами, вырожденный оператор должен иметь вид

$$\chi = \left(T_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta + 1)} T_{-1}^2 \right) \phi. \tag{9.269}$$

Оператор такого вида, удовлетворяющий (9.268) для любого Δ, есть не что иное, как проективно-инвариантный оператор, который можно построить из любого первичного поля. Нетривиальным условием, обеспечивающим ковариантность относительно бесконечномерной конформной группы, оказывается второе уравнение (9.267). Применяя его к (9.266) и используя соотношения

$$\begin{aligned}
[T_2, T_{-2}] &= 4T_0 + c/2,\\
[T_2, T_{-1}^2] &= [T_2, T_{-1}]T_{-1} + T_{-1}[T_2, T_{-1}] =\\
&= 3(T_1 T_{-1} + T_{-1} T_1) = 6T_0 + 6T_{-1} T_1,
\end{aligned}$$

мы получаем (вместе с (9.268))

$$\begin{aligned}
3a + 2(2\Delta + 1)b &= 0,\\
(4\Delta + c/2)\, a + 6\Delta b &= 0.
\end{aligned} \tag{9.270}$$

Условие вырождения имеет вид

$$\begin{gathered}
\begin{vmatrix} 3 & 2(2\Delta + 1) \\ 4\Delta + c/2 & 6\Delta \end{vmatrix} = 0,\\
8\Delta^2 + (c - 5)\Delta + c/2 = 0, \\
\Delta = \frac{5 - c \pm \sqrt{(c - 25)(c - 1)}}{16}.
\end{gathered} \tag{9.271}$$

Это показывает, что при фиксированном значении центрального заряда c операторное семейство вырождено на втором уровне тогда и только тогда, когда размерность Δ исходного оператора дается формулой (9.271). Возникает естественный вопрос: каковы условия вырождения на уровне N? Простой ответ на этот вопрос дает так называемая формула Каца. Именно, имеется набор размерностей Δ_{nm}, которые характеризуются двумя целыми числами n и m и приводят к вырождению на уровне $N = nm$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{nm} &= \frac{c-1}{24} + \frac{1}{8}(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2, \\ \alpha_\pm &= \left(\frac{1-c}{12}\right)^{1/2} \pm \left(\frac{25-c}{12}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9.272}$$

В случаях $n = 1$, $m = 2$ и $n = 2$, $m = 1$ формула (9.272) дает (9.271).

Вырожденные конформные семейства очень важны. Дело в том, что их операторный состав в некотором смысле минимален, так как много операторов можно положить равными нулю. В теории струн, как мы увидим ниже, это ведет к отщеплению нежелательных ду́ховых состояний, а в статистической физике фазовых переходов все известные системы выбирают «минимальные» теории или их комбинации.

Вооруженные этими результатами, мы готовы к обсуждению свойства «безду́ховости» критических струн. Под «бездуховостью» мы подразумеваем положительность нормы струнных состояний. На самом деле при $D \leqslant 26$ это гарантировано нашей конструкцией теории поля Лиувилля. Тем не менее, явная проверка для $D = 26$ весьма поучительна.

9.10. Физические состояния теории струн в критической размерности

В разделе 9.9 мы представили набор операторов, составленных из свободного поля $\boldsymbol{x}(z, \bar{z})$, которые соответствуют частицам — состояниям струны. Мы также показали явным вычислением, что некоторые из этих частиц отщепляются. Теперь мы проделаем общий анализа спектра. Первым (и самым важным) результатом будет отщепление всех вторичных операторов. Иными словами, частицы соответствуют не всевозможным операторам, а всевозможным конформным семействам.

Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим следующее тождество Уорда:

$$\begin{aligned}
&\int d^2z_1 \dots d^2z_N \, \langle T(z) U_{\boldsymbol{p}_1}(z_1) \dots U_{\boldsymbol{p}_N}(z_N) \rangle = \\
&\quad = \int \prod_j d^2 z_j \left[\sum_j \left(\frac{\boldsymbol{p}_j^2/2}{(z - z_j)^2} + \frac{1}{z - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right] \langle U_{\boldsymbol{p}_1}(z_1) \dots U_{\boldsymbol{p}_N}(z_N) \rangle = \\
&\quad = \int \prod_j d^2 z_j \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{1}{z - z_j} \langle U_{\boldsymbol{p}_1}(z_1) \dots U_{\boldsymbol{p}_N}(z_N) \rangle \right) = 0
\end{aligned} \tag{9.273}$$

(где мы использовали условие $\boldsymbol{p}_j^2 = 2$, необходимое для конформной симметрии амплитуд). Из этого тождества следует, что операторы, появляющиеся в произведении $T(z)U_{\boldsymbol{p}}(z')$, отщепляются от амплитуды. Иными словами, вторичные операторы вида $T_{-n}U_{\boldsymbol{p}}(z)$ не соответствуют физическим частицам. То же рассуждение применимо для $T_{-n_1} \dots T_{-n_k} U_{\boldsymbol{p}}$. Если вспомнить аналогию с осцилляторами (9.230), можно сказать, что, грубо говоря, из D цепочек осцилляторов $\{a^+_{n,\mu}\}$ $D-1$ соответствуют физическим состояниям, а одна цепочка отщепляется. Если нам повезет, это может означать отщепление состояний с отрицательной нормой, порождаемых $\{a^+_{n,0}\}$. По крайней мере, число необходимых отщеплений то же самое.

Чтобы увидеть, что же происходит на самом деле, следует проанализировать несколько примеров. Для простоты мы будем работать с теорией «открытых струн», которая получится, если мы забудем о зависимости от $\bar{z}$ и будем рассматривать только операторы, зависящие от z. Теория замкнутых струн получается простым «удвоением» набора операторов за счет полей, зависящих от $\bar{z}$, так как $\boldsymbol{x}(z, \bar{z}) = \boldsymbol{x}_L(z) + \boldsymbol{x}_R(\bar{z})$. Примеры такого удвоения будут приведены ниже.

Посмотрим на векторную («фотонную») вершину

$$U_{\boldsymbol{p},\zeta} = :i\zeta^\mu \partial_z x_\mu \, e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}: \leftrightarrow \zeta^\mu a^+_{1,\mu} |0, \boldsymbol{p}\rangle \tag{9.274}$$

(где ζ_μ — вектор поляризации «фотона»). Потребуем, чтобы $U_{\boldsymbol{p},\zeta}$ был первичным оператором:

$$T_n U_{\boldsymbol{p},\zeta} = 0, \quad n > 0. \tag{9.275}$$

Чтобы проверить это условие, воспользуемся разложением

$$\begin{aligned}
T(z)U_{\boldsymbol{p},\zeta}(0) &= :-\frac{1}{2}(\partial_z \boldsymbol{x})^2(z): \, :i\zeta^\mu \partial_z x_\mu e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(0)}: \underset{z\to 0}{=} \\
&\underset{z\to 0}{=} z^{-3} \zeta^\mu p_\mu :e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}: + \text{ менее сингулярные члены.}
\end{aligned} \tag{9.276}$$

Вспоминая определение T_n, находим

$$\begin{aligned} T_1 U_{\boldsymbol{p},\zeta} &= \zeta^\mu p_\mu U_{\boldsymbol{p}}, \\ T_n U_{\boldsymbol{p},\zeta} &= 0, \quad n > 1. \end{aligned} \tag{9.277}$$

Мы видим, что условием первичности $U_{\boldsymbol{p},\zeta}$ является соотношение

$$p^\mu \zeta_\mu = 0. \tag{9.278}$$

Эквивалентный способ вывести (9.278) основан на осцилляторном представлении

$$\begin{aligned} ix_\mu(z) &= q_\mu + p_\mu \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{a_{n,\mu}}{n} z^{-n} + \frac{a_{n,\mu}^+}{n} z^n \Big), \\ T(z) &= -{:}\tfrac{1}{2}(\partial_z \boldsymbol{x})^2{:} = \sum_n T_n z^{-n-2}, \\ T_n &= p^\mu a_{n,\mu} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,\mu}^+ a_{n+m,\mu} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_{k,\mu} a_{n-k,\mu}, \quad n > 0, \\ T_{-n} &= T_n^+, \\ T_0 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,\mu}^+ a_{m,\mu}. \end{aligned} \tag{9.279}$$

Действуя оператором T_1 на состояния $\zeta^\mu a_{1,\mu}^+ |0, \boldsymbol{p}\rangle$, получаем (9.278). Это полезная иллюстрация полной эквивалентности формализма операторных разложений и формализма гармонических осцилляторов.

Возвращаясь к (9.278), заметим, что оператор $U_{\boldsymbol{p},\zeta}$ имеет размерность 1, только если $\boldsymbol{p}^2 = 0$. В этом случае число рассеивающихся состояний будет не $D-1$, как следует из (9.278), а $D-2$. Чтобы показать это, заметим, что среди физических операторов $i\zeta^\mu \partial_z x_\mu \exp(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(z))$ с $p^\mu \zeta_\mu = 0$ имеется один одновременно физический и вторичный. Мы уже видели, что семейство, порожденное ${:}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}{:}$ с $\boldsymbol{p}^2 = 0$, вырождено, и оператор

$$T_{-1}{:}e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}{:} = {:}ip^\mu \partial_z x_\mu \, e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}{:} \tag{9.280}$$

является физическим при $\boldsymbol{p}^2 = 0$ согласно (9.265). Это же видно из того, что $\zeta_\mu = p_\mu$ удовлетворяет условию

$$p^\mu \zeta_\mu = \boldsymbol{p}^2 = 0. \tag{9.281}$$

Это стандартная черта фотона: его поляризация на массовой поверхности может быть изменена калибровочным преобразованием

$$\zeta_\mu \to \zeta_\mu + \lambda p_\mu. \tag{9.282}$$

С помощью этого преобразования можно добиться $\zeta_0 = 0$, и тогда

$$p^\mu \zeta_\mu = p^i \zeta_i = 0. \tag{9.283}$$

Итак, мы находим, что фотон может иметь $D - 2$ возможные поляризации. В нашем формализме это происходит по двум причинам. Во-первых, имеется условие того, что вершинный оператор правильно преобразуется под действием конформной группы: $T_n U_{\boldsymbol{p},\zeta} = 0$, $n > 0$. Это условие оставляет $D-1$ допустимое состояние. Во-вторых, одно из этих состояний оказалось вторичным оператором, порожденным $U_{\boldsymbol{p}} = {:}e^{i\boldsymbol{px}}{:}$ с $\boldsymbol{p}^2 = 0$. Как было показано в начале этого раздела, все вторичные операторы отщепляются. Так мы получили $D - 2$.

Замечательно, что аналогичный механизм работает и на высших уровнях. Рассмотрим второй уровень. Наиболее общая вершина имеет вид

$$\begin{gathered} U_{\boldsymbol{p}}(S,\, \zeta) = {:}(S_{\mu\nu}\, i\partial_z x^\mu\, i\partial_z x^\nu + \zeta_\mu\, i\partial_z^2 x^\mu) e^{i\boldsymbol{px}}{:} \\ \leftrightarrow (S_{\mu\nu} a^+_{1,\mu} a^+_{1,\nu} + \zeta_\mu a^+_{2,\mu})|0, \boldsymbol{p}\rangle, \\ \boldsymbol{p}^2 = -2. \end{gathered} \tag{9.284}$$

Посмотрим, какого вида $S_{\mu\nu}$ и ζ_μ остаются после применения условий конформной ковариантности

$$T_n U_{\boldsymbol{p}}(S,\, \zeta) = 0, \quad n > 0. \tag{9.285}$$

Проще работать в осцилляторном представлении. Применяя (9.279), находим

$$\begin{aligned} T_1(S_{\mu\nu} a^+_{1,\mu} a^+_{1,\nu} + \zeta_\mu a^+_{2,\mu})|0, \boldsymbol{p}\rangle &= 2(p_\mu S_{\mu\nu} + \zeta_\nu) a^+_{1,\nu}|0, \boldsymbol{p}\rangle = 0, \\ T_2(S_{\mu\nu} a^+_{1,\mu} a^+_{1,\nu} + \zeta_\mu a^+_{2,\mu})|0, \boldsymbol{p}\rangle &= (2p_\mu \zeta_\mu + S_{\lambda\lambda})|0, \boldsymbol{p}\rangle = 0. \end{aligned} \tag{9.286}$$

Таким образом, условия на физические поляризации имеют вид

$$\begin{gathered} p_\mu \zeta_\mu + \frac{1}{2} S_{\lambda\lambda} = 0, \\ p_\mu S_{\mu\nu} + \zeta_\nu = 0, \quad \boldsymbol{p}^2 = -2. \end{gathered} \tag{9.287}$$

Среди этих физических состояний некоторые опять оказываются вторичными. Это значит, что имеется калибровочная инвариантность второго уровня в (9.287). Чтобы найти ее, применим формулы (9.269) и (9.271) в случае $\Delta = -1$ (тогда вторичный оператор будет иметь $\Delta = 1$). Заключаем, что состояния

$$|a\rangle = (T_{-2} + \frac{3}{2}T_{-1}^2)|0, \boldsymbol{p}\rangle, \quad \boldsymbol{p}^2 = -2, \tag{9.288}$$

и

$$|b\rangle = T_{-1}\lambda_\mu a_{1,\mu}^+|0, \boldsymbol{p}\rangle, \quad p_\mu\lambda_\mu = 0,$$

являются физическими при $c = D = 26$. Состояние $|b\rangle$ отвечает калибровочному преобразованию

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &\to S_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(p_\alpha\lambda_\beta + p_\beta\lambda_\alpha), \\ \zeta_\alpha &\to \zeta_\alpha + \lambda_\alpha. \end{aligned} \tag{9.289}$$

Легко видеть, что условия (9.287) не меняются при (9.289), если $\boldsymbol{p}^2 = -2$. Эта калибровочная инвариантность работает для всех D. Вторая, связанная с состоянием $|a\rangle$, имеется только при $D = 26$. После некоторых вычислений находим

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &\to S_{\alpha\beta} + \varepsilon(\delta_{\alpha\beta} + 3p_\alpha p_\beta), \\ \zeta_\alpha &\to \zeta_\alpha + 5\varepsilon p_\alpha. \end{aligned} \tag{9.290}$$

В обоих случаях калибровочные преобразования порождают состояния нулевой нормы, так же, как это было в случае фотонов (напомним, что состояние $p_\mu a_{1,\mu}^+|0, \boldsymbol{p}\rangle$ с $\boldsymbol{p}^2 = 0$ имеет нулевую норму). Причина зануления нормы проста. Если некоторое состояние $|f\rangle$ является одновременно физическим,

$$T_n|f\rangle = 0, \quad \forall n > 0,$$

и вторичным,

$$|f\rangle = T_{-m}|g\rangle; \quad T_n(T_{-m}|g\rangle) = 0,$$

то

$$\langle f|f\rangle = \langle g|T_m T_{-m}|g\rangle = 0. \tag{9.291}$$

Смысл этого результата состоит в том, что на каждом уровне имеется определенное калибровочное преобразование, которое не меняет физики, но порождает состояния нулевой нормы. Ясно также, что такая инвариантность влечет за собой существенное сокращение физического спектра. Подсчитаем теперь число оставшихся состояний. Рассмотрим состояния с $\boldsymbol{p}^2 = -m^2 = 2(1-n)$. В осцилляторном представлении они имеют вид

$$\begin{gathered} |f_n\rangle = (\zeta_\mu a^+_{n,\mu} + S_{\mu\nu} a^+_{n-1,\mu} a^+_{1,\nu} + \ldots)|0,\boldsymbol{p}\rangle, \\ \boldsymbol{p}^2/2 = 1-n. \end{gathered} \tag{9.292}$$

Полное число таких состояний выражается через число способов разбить n в сумму положительных целых чисел. В самом деле, если бы не было пространственно-временных индексов μ, общее состояние имело бы вид

$$\begin{gathered} |f\rangle = a^+_{l_1} \ldots a^+_{l_k}|0,p\rangle, \\ l_1 + \ldots + l_k = n, \quad l_j > 0. \end{gathered} \tag{9.293}$$

Число таких состояний равно

$$N(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}. \tag{9.294}$$

Чтобы вывести это, представим (9.293) как

$$\begin{gathered} |f\rangle = \ldots (a^+_k)^{p_k} \ldots (a^+_1)^{p_1}|0,\, p\rangle, \\ \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = n. \end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{\{p_k\}} \delta_{n,\sum k p_k} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \sum_{\{p_k\}} \prod_k x^{k p_k} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_k \Big(\sum_{p_k} x^{k p_k} \Big) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_k \frac{1}{1-x^k}. \end{aligned}$$

Ясно, что в случае D измерений число состояний $N_D(n)$ на уровне n дается производящей функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_D(n) x^n = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \right)^D. \tag{9.295}$$

Однако не все состояния (9.292) физические. Мы должны наложить условие $T_n|f\rangle = 0$. Это приводит к уравнениям на ζ_μ, $S_{\mu\nu}$ и т. д., аналогичным (9.287). Число таких состояний будет порождаться функцией

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\right)^{D-1} = \sum_{n=0}^{\infty} N_D^{\text{phys}}(n)x^n, \qquad N_D^{\text{phys}}(n) = N_{D-1}(n), \tag{9.296}$$

так как T_n-условия удаляют эффективно по одной компоненте у каждого осциллятора. Но это еще не все, так как среди физических состояний некоторые имеют нулевую норму. Предположим сперва, что $D \neq 26$. Единственный набор состояний нулевой нормы производится оператором T_{-1}:

$$|f\rangle = T_{-1}(\lambda_\mu a^+_{n-1,\mu} + \chi_{\mu\nu}a^+_{n-2,\mu}a^+_{1,\nu} + \ldots)|0, \boldsymbol{p}\rangle, \quad \boldsymbol{p}^2/2 = 1-n. \tag{9.297}$$

Это состояние физическое, когда T_{-1} действует на физическое состояние нулевой размерности. Следовательно, число $\nu_D(n)$ физических состояний с ненулевой нормой равно

$$\begin{gathered}\nu_D(n) = N_{D-1}(n) - N_{D-1}(n-1),\\ \nu(x) \equiv \sum_n \nu_D(n)x^n = (1-x)\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\right)^{D-1}.\end{gathered} \tag{9.298}$$

В критической размерности $D = 26$ нулевую норму имеет гораздо больше состояний. Мы уже наблюдали это на втором уровне. В общем случае нужно воспользоваться формулой Каца. Выясним сперва, когда конформное семейство при $c = D = 26$ имеет на некотором уровне физический вторичный оператор размерности 1. С помощью (9.272) получаем

$$\begin{aligned}\Delta_{nm} + nm &= \frac{25}{24} + \frac{1}{8}(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2 =\\ &= \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(3n-2m)^2 = 1.\end{aligned} \tag{9.299}$$

Мы видим, что вырождение (или состояние нулевой нормы) возможно при

$$3n = 2m \pm 1 \tag{9.300}$$

на уровне

$$N = nm = \frac{1}{2}n(3n \pm 1). \tag{9.301}$$

Найденное ранее состояние с $N = 2$ имеет $n = 1$, $m = 2$. Ясно, что теперь вместо (9.298) мы имеем

$$\nu(x) = (1 - x - x^2 - \dots)\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}\right)^{25}. \tag{9.302}$$

Однако мы не должны просто вычитать все уровни, даваемые (9.301). Это приведет к избыточному учету по следующей причине. Среди состояний с нулевой нормой на втором уровне, которые, как мы уже говорили, имеют вид

$$|f\rangle = (T_{-2} + \frac{3}{2}T_{-1}^2)|\Delta = -1\rangle, \tag{9.303}$$

имеются такие, для которых само состояние $|\Delta = -1\rangle$ вторично. Эти случаи опять можно найти с помощью формулы Каца

$$\begin{gathered} \Delta_{nm} + nm = \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(3n - 2m)^2 = -1, \\ 3n - 2m = \pm 7, \end{gathered} \tag{9.304}$$

которая выполняется, скажем, на третьем уровне при $n = 3$, $m = 1$. Таким образом, некоторые из состояний (9.303) имеют вид

$$|f\rangle = (T_{-2} + \frac{3}{2}T_{-1}^2)(T_{-3} + \dots)|\Delta = -4\rangle. \tag{9.305}$$

Это можно рассматривать, как вырожденное состояние на уровне 5. Таким образом, это состояние не следует учитывать, когда мы подходим к уровню 5, полагая $n = 2$ в (9.301). Другим состоянием, которое не следует учитывать, является

$$\begin{gathered} |f\rangle = T_{-1}|\Delta = 0\rangle, \\ |\Delta = 0\rangle = \{T_{-4} + \dots\}|\Delta = -4\rangle, \end{gathered} \tag{9.306}$$

так как, согласно формуле Каца,

$$\Delta_{1,4} + 4 = \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(3 - 8)^2 = 0.$$

Формула Каца предсказывает только одно вторичное состояние на уровне 5, а мы уже насчитали два. Вывод состоит в том, что эти два состояния на самом деле являются одним и тем же состоянием, которое мы учли дважды. Поэтому, чтобы исправить ситуацию, следует вместо (9.302) написать

$$\nu(x) = (1 - x - x^2 + x^5 + \ldots)\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\right)^{25}. \tag{9.307}$$

Последовательно пользуясь формулой Каца, нетрудно проделать такую же комбинаторику для каждого уровня. Результат этого подсчета таков:

$$\begin{gathered}\nu(x) = \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{n(3n+1)/2} + x^{n(3n-1)/2}\right)\right\}\times\\ \times\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\right)^{25} = \left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\right)^{24},\end{gathered} \tag{9.308}$$

где для первого множителя мы использовали тождество Гаусса. Это в высшей степени замечательный результат. Он показывает, что из 25 цепочек осцилляторов одна образует состояния нулевой нормы и отщепляется. Отсюда вытекает, что все оставшиеся осцилляторы имеют положительные нормы и в нашей теории нет духов. Причина, грубо говоря, состоит в том, что все компоненты с отрицательной нормой участвуют в формировании состояний с нулевой нормой. В самом деле, любое состояние $|z\rangle$ с нулевой нормой можно представить как сумму

$$|z\rangle = |n\rangle + |p\rangle, \tag{9.309}$$

где

$$\langle n|n\rangle = -1, \quad \langle p|p\rangle = 1.$$

Любое физическое состояние $|f\rangle$ обладает свойством

$$\langle f|z\rangle = 0, \tag{9.310}$$

откуда (с точностью до нормировки)

$$\begin{gathered}|f\rangle = |n\rangle + |\tilde{p}\rangle,\\ \langle\tilde{p}|p\rangle = 1.\end{gathered} \tag{9.311}$$

Но поскольку $|p\rangle$ и $|\tilde{p}\rangle$ лежат в гильбертовом пространстве состояний с положительной нормой, неравенство Коши влечет

$$\langle\tilde{p}|\tilde{p}\rangle > \langle\tilde{p}|p\rangle = 1.$$

Следовательно,

$$\langle f|f\rangle = \langle \tilde{p}|\tilde{p}\rangle + \langle n|n\rangle > 0. \tag{9.312}$$

Когда имеется много состояний с отрицательной нормой, для выполнения теоремы об отсутствии духов достаточно, чтобы их число на каждом уровне было равно числу состояний с нулевой нормой, что в свою очередь имеет место согласно (9.308).

Мы пришли к заключению, что при $D = 26$ имеется 24 цепочки осцилляторов с положительными нормами. Этот результат можно было ожидать, так как в этом случае поле Лиувилля отщепляется и единственными физическими полями являются координаты $x_\mu(\xi)$ струны. Они описывают $D = 26$ цепочек осцилляторов, но, благодаря общим преобразованиям координат $\xi \to f(\xi)$, включающим две произвольные функции, две цепочки оказываются нефизическими. Именно это мы и увидели путем явного вычисления. При $D > 26$ поле Лиувилля будет иметь неправильный знак кинетической энергии, что имеет две интерпретации. Первая состоит в том, что становятся существенными большие градиенты поля φ и поверхность теряет непрерывный предел. Вторая, более формальная интерпретация состоит в том, что неправильный знак пропагатора поля φ приводит к состояниям с отрицательной нормой. Это подтверждается изучением норм физических состояний при $D > 26$: одна цепочка осцилляторов превращается в духи.

Основной результат нашего анализа состоит в том, что при $D = 26$ простая амплитуда Кобы–Нильсена имеет единственный недостаток — тахион. В следующих разделах мы покажем, как этот недостаток исправляется в случае фермионных струн при $D = 10$. После этого мы вернемся к некритическим струнам и обсудим различные интересные возможности, которые в этом случае возникают.

Дополнение к 9.10

Здесь мы кратко опишем комбинаторику, необходимую при выводе (9.308). Наша задача состоит в том, чтобы вычесть вклад состояний нулевой нормы из функции распределения N^{ph} физических состояний

$$N^{\mathrm{ph}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} N^{\mathrm{ph}}(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-25}.$$

Здесь $N^{\mathrm{ph}}(n)$ — число физических состояний (первичных полей) на уровне n, и мы полагаем $D = c = 26$. Физическое состояние имеет нулевую норму в двух случаях. Первый случай:

$$N = nm, \quad \Delta_{n,m} + nm = \Delta_{n,-m} = 1, \tag{$*$}$$

где $\Delta_{n,m} = (25 - (2n+3m)^2)/24$, что следует из (9.272) для $c = 26$. Из $(*)$ мы получаем $(2n-3m)^2 = 1$ или

$$N \in \Lambda_\mu^{(-)} \equiv \left\{ \frac{1}{2}m(3m+1), \quad m \in 2\mathbf{Z}+1 \right\}.$$

Второй случай:

$$N = nm + kl, \quad \Delta_{n,m} + nm = \Delta_{k,l}, \quad \Delta_{k,l} + kl = 1. \qquad (**)$$

Из второго равенства следует

$$\Delta_{n,-m} = \Delta_{k,l} \quad \text{или} \quad k = n+3q,\ l = -m-2q,\ q \in \mathbf{Z}.$$

Третье соотношение дает $(2k-3l)^2 = (2n+3m+12q)^2 = 1$, и мы находим

$$N = nm + kl = -3qm - 2qn - 6q^2 = -6q^2 + q(12q \pm 1) = q(6q \pm 1)$$

или

$$N \in \Lambda^{(+)} \equiv \left\{ \frac{1}{2}p(3p+1), \quad p \in 2\mathbf{Z} \setminus 0 \right\}.$$

9.11. Ферми-частицы

Есть красивое обобщение бозонной струны — струна Неве–Шварца–Рамона (NSR), которая представляет собой струнный аналог дираковских частиц. В этом разделе мы опишем интеграл по путям для дираковских частиц, а потом обобщим его на случай струн.

Есть много различных подходов к описанию фермионов. Мы воспользуемся одним из них, который состоит в том, чтобы заменить обычный путь $x_\mu = x_\mu(t)$ на «суперпуть». Именно, рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} \hat{x}_\mu = \hat{x}_\mu(t,\theta) = x_\mu(t) + \theta\psi_\mu(t), \\ \theta^2 = 0. \end{gathered} \tag{9.313}$$

Суперпространство (t, θ) обладает симметрией

$$\begin{aligned} &\delta_\varepsilon t = -\varepsilon\theta, \\ &\delta_\varepsilon \theta = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon\theta + \theta\varepsilon = 0. \end{aligned} \tag{9.314}$$

Коммутатор двух таких преобразований дает обычный сдвиг по t:

$$\begin{aligned} [\delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2}]t &= -\delta_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1\theta) + \delta_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2\theta) = \\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_1 = -2\varepsilon_1\varepsilon_2, \\ [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_1}]\theta &= 0. \end{aligned} \tag{9.315}$$

Генератор такого преобразования Q можно определить как

$$\varepsilon Q = \delta_\varepsilon \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta_\varepsilon t \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad Q^2 = -\frac{\partial}{\partial t}.$$

Ковариантная производная $\mathcal{D}$ определяется из условия антикоммутации с Q:

$$\begin{gathered} \{\mathcal{D}, Q\} \equiv \mathcal{D}Q + Q\mathcal{D} = 0, \\ \mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{D}^2 = \frac{\partial}{\partial t}. \end{gathered} \tag{9.316}$$

Суперковариантное действие имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int dt\, d\theta\, \mathcal{D}^2 \hat{x}_\mu \mathcal{D} \hat{x}^\mu = \int dt \,\left(\tfrac{1}{2} \dot{x}_\mu^2 - \tfrac{1}{2} \psi_\mu \dot{\psi}_\mu \right). \tag{9.317}$$

Скоро мы увидим, что поля $\psi_\mu(t)$ играют роль γ-матриц в обычном подходе. Действие (9.317) инвариантно относительно преобразований суперсимметрии

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= \varepsilon \psi_\mu, \\ \delta \psi_\mu &= \varepsilon \dot{x}_\mu. \end{aligned} \tag{9.318}$$

Эти преобразования глобальные, тогда как правильное действие должно быть инвариантно относительно общих суперкоординатных преобразований. Этого можно достичь введением «реперного» поля $e(t) = \sqrt{h(t)}$ и его суперпартнера — поля «гравитино» $\chi(t)$. В то время как источником поля $e(t)$ является тензор энергии-импульса, в нашем случае равный $-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}_\mu^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}\dot{\boldsymbol{\psi}}$, источником поля $\chi(t)$ служит суперток. Из (9.318) ясно, что суперсимметрия связана с сохраняющимся током

$$s(t) = \psi_\mu \dot{x}_\mu; \quad \dot{s} = 0. \tag{9.319}$$

Поэтому можно ожидать, что ковариантное действие будет иметь вид

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2}(e^{-1} \dot{x}_\mu^2 - \psi_\mu \dot{\psi}_\mu) + \frac{1}{2e} \chi \psi_\mu \dot{x}_\mu \right\} dt. \tag{9.320}$$

Это и в самом деле так. Легко проверить, что (9.320) не меняется при преобразовании

$$\begin{aligned} \delta x_\mu(t) &= \alpha(t) \psi_\mu(t), \\ \delta \psi_\mu(t) &= \alpha(t) \left(\frac{\dot{x}_\mu(t)}{e(t)} + \frac{1}{2e(t)} \chi(t) \psi_\mu(t) \right), \\ \delta e(t) &= \alpha(t) \chi(t), \\ \delta \chi(t) &= -2\dot{\alpha}(t). \end{aligned} \tag{9.321}$$

Теперь мы почти готовы выписать полный аналог бозонного интеграла по путям. Имеется, однако, небольшая проблема. Именно, «космологический» член $\int e(t)\,dt$, который мы добавляли в бозонном случае, не инвариантен при преобразованиях (9.321). Более того, никакое локальное выражение, составленное из χ и e, не будет инвариантным. Инвариантная «супердлина» имеет вид

$$L = \int_0^1 e(\tau)\,d\tau - \frac{1}{8}\int_0^1 d\tau_1\,d\tau_2\ \mathrm{sign}(\tau_1-\tau_2)\,\chi(\tau_1)\chi(\tau_2). \tag{9.322a}$$

Нелокальность в (9.322a) можно устранить ценой введения дополнительного поля ψ_5. Полагаем

$$L = \int_0^1 e(\tau)\,d\tau - \int \psi_5\dot{\psi}_5\,d\tau + \int \psi_5\chi\,d\tau, \tag{9.322b}$$

$$\delta\psi_5(t) = -\alpha(t). \tag{9.321a}$$

Интегрирование по ψ_5 в континуальном интеграле возвращает нас к (9.322a).

Теперь континуальный интеграл для суперсимметричных путей имеет вид

$$\begin{aligned} Z = &\int \mathcal{D}x_\mu\,\mathcal{D}\psi_\mu\,\mathcal{D}\chi\,\mathcal{D}e\,\mathcal{D}\psi_5\ \exp\Big\{-\int_0^1\Big[\frac{\dot{x}^2}{e} - \psi_\mu\dot{\psi}_\mu - \psi_5\dot{\psi}_5 + \\ &+ \frac{1}{e}(\chi\psi_\mu\dot{x}_\mu - me\psi_5) + m^2 e\Big]\,d\tau\Big\}. \end{aligned} \tag{9.323}$$

Для свободной частицы, которую мы рассматриваем, этот интеграл легко вычисляется в калибровке

$$\dot{e} = 0, \quad e = T, \quad \dot{\chi} = 0, \quad \chi = \theta \tag{9.324}$$

(по T и θ нужно еще будет интегрировать, так как калибровочной свободы недостаточно для их исключения). Для открытого пути от $(x_\mu,\,\psi_\mu)$ до $(x'_\mu,\,\psi_\mu)$ (величина ψ_μ не должна меняться, поскольку ψ_μ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка по t в отличие от x_μ) имеем в импульсном представлении (заменяя $(1/T)\dot{x}_\mu \to ip_\mu$)

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{p}) &= \int_0^\infty dT\,e^{-m^2T}\int d\theta\,e^{\theta(ip_\mu\psi_\mu - m\psi_5)}e^{-p^2T} = \\ &= \frac{1}{p^2+m^2}(ip_\mu\psi_\mu + m\psi_5). \end{aligned} \tag{9.325}$$

Если заменить ψ_μ на γ_μ и ψ_5 на γ_5, получится пропагатор дираковской частицы.

Формулу вроде (9.65) для замкнутых петель тоже можно написать. Мы не будем ее здесь выводить, приведем лишь ответ

$$F(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N) = \int\limits_0^\infty dT\, T^{-D/2} e^{-m^2 T} \int\limits_{0=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_N<T} d\tau_2\, d\theta_2 \ldots d\tau_N\, d\theta_N \times$$
$$\times \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_j \mathcal{D}(\hat{s}_{ij})\Big];$$
$$\mathcal{D}(s) = \frac{s(T-s)}{T}, \tag{9.65a}$$

где $\hat{s}_{ij}$ — суперинвариантное расстояние

$$\hat{s}_{ij} = |\tau_i - \tau_j| - \theta_i\theta_j \operatorname{sign}(\tau_i - \tau_j). \tag{9.326}$$

Легко проверить, что, во-первых, $\hat{s}_{ij}$ инвариантно относительно (9.314), и, во-вторых, вычисление по (9.65*a*) эквивалентно взятию следа от произведения матриц Дирака. Таким образом, (9.65*a*) дает пригодное для фермионов суперсимметричное расширение параметризации Фейнмана–Швингера. Заметим также, что (9.65*a*) в точности совпадает со средним от произведения вершинных операторов

$$V_{\boldsymbol{p}}(\tau, \theta) = e^{i\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\theta)} = e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{\psi})} = [1 + i\theta(\boldsymbol{p}\boldsymbol{\psi})]e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}. \tag{9.327}$$

Прежде чем переходить к струнам, полезно обсудить еще несколько моментов.

Прежде всего, геометрические свойства фермионного пути сильно отличаются от бозонного. Например, в то время как для бозонов размер R и длина L пути связаны законом диффузии $R^2 \sim L$, что отвечает броуновскому движению, в ферми-случае $R^2 \sim L^2$. Чтобы это показать, вспомним наши игры с множителем Лагранжа. Обсуждая (9.12), мы показали, что $\lambda(t)$ в действии бозона $\int \lambda(t)(\dot{x}^2/e - e)\, dt$ можно заменить некоторой постоянной, так как $\lambda(t)$ имеет постоянное вакуумное ожидание. Грубый аргумент в пользу этого был основан на том, что эффективное действие для λ содержит член

$$W[\lambda(t)] = \frac{1}{a}\int\limits_0^1 e(t)\, dt\, \log\lambda(t) - \int\limits_0^1 \lambda(t)e(t)\, dt, \tag{9.328}$$

где a — решеточное обрезание. Наличие первого члена приводит к $\langle\lambda\rangle \sim 1/a$. Для суперсимметричного действия ситуация отличается. Первый член в (9.328), отвечающий энергии нулевых колебаний поля $\boldsymbol{x}$, сокращается вкладом полей $\boldsymbol{\psi}$. В результате расходящийся вклад в $W[\lambda]$ отсутствует. Можно показать, что коэффициент $1/a$ в первом члене эффективно заменяется на $1/L$. Поэтому для фермионных путей имеем

$$\overline{R^2} \sim \frac{1}{\langle\lambda\rangle} L \sim L^2. \tag{9.329}$$

Это соотношение ответственно за другое критическое поведение фермионных частиц.

Действие (9.320) можно также представить в другой интересной форме. Именно, проинтегрируем по полю χ, используя (9.322a) для вычисления его пропагатора

$$\langle\chi(\tau)\chi(\tau')\rangle = \frac{\partial}{\partial\tau}\delta(\tau-\tau'). \tag{9.330}$$

Получаем вместо (9.323)

$$Z = \int \mathcal{D}\boldsymbol{\psi}\,\mathcal{D}\boldsymbol{x}\,\exp\left[-\int\limits_0^T (\dot{x}_\mu^2 - \psi_\mu\dot{\psi}_\mu)\,dt + \frac{1}{4}\int\limits_0^T (\psi_\mu\dot{x}_\mu)^{\cdot}\,\psi_\nu\dot{x}_\nu\,dt\right]. \tag{9.331}$$

Последний множитель имеет замечательную интерпретацию. Если заменить ψ_μ на γ_μ (в чем на самом деле и состоит роль интегрирования по ψ), этот множитель ϕ можно преобразовать к виду

$$\phi[C] = \mathrm{P}\exp\frac{1}{8}\int\limits_0^T \omega_{\mu\nu}[x(\tau)][\gamma_\mu,\,\gamma_\nu]\,d\tau, \tag{9.332}$$

где C — контур, параметризуемый $x(\tau)$, а $\omega_{\mu\nu}[x(\tau)]$ — угловая скорость касательного вектора к траектории:

$$\omega_{\mu\nu}[x(\tau)] = \frac{1}{2}(\dot{x}_\mu\ddot{x}_\nu - \ddot{x}_\mu\dot{x}_\nu), \quad (\dot{x}^2 = 1). \tag{9.333}$$

Это дает нам новое понимание интеграла по путям для фермионов. В частности, в двух измерениях множитель (9.332) сводится к $(-1)^\nu$, где $2\pi\nu$ — полный угол поворота касательного вектора, для замкнутых путей равный, как известно, алгебраическому числу самопересечений.

Из-за этого осциллирующего множителя сложные траектории подавляются, что и приводит к закону (9.329).

Для полного понимания фермионов, обсудим другое представление, соединяющее бозе- и ферми-частицы вместе. Именно, можно построить континуальный интеграл, суперсимметричный не только во «внутреннем» пространстве (θ, t), но и во «внешнем» пространстве x_μ. D-мерная суперсимметрия описывается следующими преобразованиями: если определить суперпространство как пространство с координатами x_μ и φ^A, где φ — D-мерный спинор, то

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\varphi, \\ \delta\varphi &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{9.334}$$

Теперь мы можем определить пропагатор в суперпространстве как амплитуду $\langle\tilde{x}\tilde{\varphi}|x\varphi\rangle$. Он описывает распространение суперполя $\phi(x, \varphi)$, содержащего как ферми-, так и бозе-поля. Наша цель — построить действие, инвариантное относительно (9.334). Это нетрудно. Рассмотрим выражение

$$S = \int_0^T dt\,\frac{1}{2}(\dot{x}_\mu - \bar{\varphi}\gamma_\mu\dot{\varphi})^2. \tag{9.335a}$$

Инвариантность относительно (9.334) очевидна, так что мы постулируем, что континуальный интеграл по x и φ дает нужный пропагатор. Что менее очевидно, так это связь нового представления с предыдущими, скажем (9.331). Детально эта связь никогда не прослеживалась. Здесь я дам лишь общую идею. Начнем с (9.332). Легко видеть, что справедлива формула

$$\lim_{a\to 0} \mathrm{P}\exp\left(\frac{1}{a}\int_C \gamma_\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)\,d\tau\right) e^{-L/a} = \phi[C]. \tag{9.335b}$$

Ее можно проверить из определения упорядоченного произведения. Теперь упорядоченное произведение можно заменить (по модулю расходящегося множителя) континуальным интегралом

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\exp\left\{\frac{1}{a}\int \gamma_\mu(\tau)\dot{x}_\mu(\tau)\,d\tau\right\} &= \int \mathcal{D}\chi\,\exp\left[\int\left(\dot{\chi}\chi + \frac{1}{a}\chi\gamma_\mu\chi\,\dot{x}_\mu\right)\,d\tau\right] = \\ &= \int \mathcal{D}\chi\,\exp\left[\int(\chi\gamma_\mu\chi\,\dot{x}_\mu + a\dot{\chi}\chi)\,d\tau\right]. \end{aligned} \tag{9.336}$$

Если мы введем поле φ соотношением $\chi = \sqrt{d/d\tau}\varphi$, мы обнаружим, что спинорный множитель (9.335b) можно рассматривать в пределе $a \to 0$ как амплитуду распространения D-мерного фермиона, путешествующего по пути:

$$\phi[C] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(\int \varphi\gamma_\mu\dot{\varphi}\dot{x}_\mu\, d\tau\right). \tag{9.337}$$

Это почти что (9.335a). Четырехфермионный член заведомо необходим для правильной регуляризации. Но как суперсимметричное выражение (9.335a), описывающее вместе бозоны и фермионы, получается из чисто фермионного интеграла по путям? Ответ на этот вопрос прост. Мы уже говорили, что интеграл (9.337) описывает вторично квантованную дираковскую частицу, живущую на пути. Чтобы воспроизвести фермионный ответ, мы неявно предположили в (9.336), что число заполнения для этой частицы равно 1. Если мы снимем это условие и проинтегрируем по всем возможным полям φ, то к этому сектору прибавится сектор с числом заполнения нуль. В этом секторе фермион отсутствует, и мы получаем бозон.

В нашем выводе есть очевидные пробелы, но я полагаю, что их можно заполнить без ущерба для намеченных выше общих идей. Это могло бы быть темой интересного исследования.

9.12. Фермионные струны

Теперь мы опишем струнный аналог дираковской частицы. Так же как в случае частиц у нас были распределенные по траектории поля ψ_μ, которые в конечном счете играли роль матриц Дирака, в случае струн следует рассмотреть поле $\psi_\mu(\xi)$ на мировом листе, которое должно быть суперсимметричным партнером поля $x_\mu(\xi)$. Как и прежде, удобно начать с суперпространства, которое теперь должно иметь два фермионных направления. Если описывать ξ-пространство комплексными координатами z и $\bar{z}$, то каждая из них будет иметь ферми-партнера θ и $\bar{\theta}$. Преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \delta z &= -\varepsilon\theta, & \delta\bar{z} &= -\bar{\varepsilon}\bar{\theta}, \\ \delta\theta &= \varepsilon, & \delta\bar{\theta} &= \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{9.338}$$

Мы видим, что это прямое произведение одномерных супергрупп. Соответствующие ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}. \tag{9.339}$$

Поле $x_\mu(\xi)$ следует заменить на суперполе $\hat{x}_\mu(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta})$, имеющее разложение

$$\hat{x}_\mu(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) = x_\mu(\xi) + \theta\psi_\mu + \bar{\theta}\bar{\psi}_\mu + \theta\bar{\theta}f_\mu. \tag{9.340}$$

Мы видим, что здесь есть два типа ферми-полей: ψ_μ и $\bar{\psi}_\mu$ (в евклидовом пространстве $\bar{\psi}_\mu = \psi^*_\mu$, тогда как в пространстве Минковского это два вещественных независимых поля, так же как координаты z и $\bar{z}$ превращаются в M-пространстве в $\xi^0 \pm \xi^1$). Эти два поля образуют спинор в двумерном пространстве и вектор во внешнем пространстве. Есть также новый двумерный скаляр f_μ. Из этого материала нетрудно собрать суперсимметричное действие

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int \bar{\mathcal{D}}\hat{x}_\mu \mathcal{D}\hat{x}_\mu \, d\theta\, d\bar{\theta}\, d^2\xi = \\ &= \frac{1}{2}\int \left((\partial x_\mu)^2 - \psi_\mu\partial_{\bar{z}}\psi_\mu - \bar{\psi}_\mu\partial_z\bar{\psi}_\mu + f_\mu^2\right) d^2\xi. \end{aligned} \tag{9.341}$$

У этого действия имеются следующие сохраняющиеся величины, связанные с суперсимметрией:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} + \theta T &= -\frac{1}{2}\mathcal{D}\hat{x}\,\mathcal{D}^2\hat{x}, \\ T &= -\frac{1}{2}(\partial_z x_\mu)^2 + \frac{1}{2}\psi_\mu\partial_z\psi_\mu, \\ \bar{T} &= -\frac{1}{2}(\partial_{\bar{z}} x_\mu)^2 + \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_\mu, \\ \mathcal{J} &= -\frac{1}{2}\psi_\mu\partial_z x_\mu, \\ \bar{\mathcal{J}} &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\partial_{\bar{z}} x_\mu, \\ \partial_{\bar{z}}T &= \partial_z\bar{T} = \partial_{\bar{z}}\mathcal{J} = \partial_z\bar{\mathcal{J}} = 0. \end{aligned} \tag{9.342}$$

Это тензор энергии-импульса $T \equiv T_{++}$ конформного спина 2 и суперток $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_+^L$ спина $3/2$ (так как фермион $\psi \equiv \psi_L$ имеет спин $1/2$). Напомним, что под «конформным спином» мы подразумеваем закон преобразования при поворотах $z \to e^{i\alpha}z$. Если некоторая величина умножается на $e^{-is\alpha}$, мы говорим, что она имеет конформный спин s. Чтобы достичь локальной суперсимметрии, следует, очевидно, добавить в (9.341) два калибровочных поля, одно — спина 2, связанное с T ($\bar{T}$), которое мы назовем «гравитоном», и второе — спина $3/2$, связанное с $\mathcal{J}$ ($\bar{\mathcal{J}}$), которое мы назовем «гравитино».

Действие, обладающее локальной суперсимметрией, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2}\int d^2\xi\, g^{1/2}[g^{ab}\partial_a \boldsymbol{x}\,\partial_b \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\psi} e^{ai}(\xi)\sigma^i\partial_a\boldsymbol{\psi} +{}\\
+ (\chi_a\sigma^b\sigma^a\boldsymbol{\psi})(\partial_b\boldsymbol{x} - \frac{1}{4}(\chi_b\boldsymbol{\psi}))].
\end{aligned}
\tag{9.343}
$$

Хотелось бы уметь выводить (9.343) непосредственно из суперпространственного формализма, но, к сожалению, это довольно сложно. Гораздо легче проверить, что (9.343) обладает желаемой ковариантностью. В этой формуле σ^i — обычные матрицы Паули, $e^{ai}(\xi)$ — реперное поле, связанное с g_{ab} соотношением $g_{ab}(\xi) = e^i_a(\xi)e^i_b(\xi)$, χ_a — поле гравитино с векторным индексом a и опущенным спинорным индексом. В пределе слабого гравитонного и гравитинного полей действие (9.343) переходит в (9.341) плюс члены (гравитон)$\times T(\bar{T})$ и (гравитино)$\times\mathcal{J}(\bar{\mathcal{J}})$. Последний член в (9.343) представляет собой поправку к супертоку от поля χ. Мы использовали обычные (нековариантные) производные, действующие на поле ψ_μ во втором члене, так как для майорановских спиноров спиновая связность дает нулевой вклад.

Симметрия действия (9.343), кроме обычной общей ковариантности, включает преобразования

$$
\begin{aligned}
\delta x_\mu(\xi) &= \varepsilon(\xi)\psi_\mu(\xi),\\
\delta\psi_\mu(\xi) &= \sigma^a[\partial_a x_\mu(\xi) - \frac{1}{2}(\chi_a\psi_\mu)]\varepsilon(\xi),\\
\delta\chi_a &= 2\nabla_a\varepsilon(\xi),\\
\delta g_{ab} &= \varepsilon(\sigma_a\chi_b + \sigma_b\chi_a),
\end{aligned}
\tag{9.344}
$$

где $\varepsilon(\xi)$ — майорановский спинор.

Как и в случае бозонов, теория сильно упрощается в конформной калибровке. Эта калибровка дается соотношениями

$$
\begin{aligned}
g_{ab}(\xi) &= e^{\varphi(\xi)}\delta_{ab},\\
\chi_a(\xi) &= \sigma_a\chi(\xi).
\end{aligned}
\tag{9.345}
$$

Давайте обсудим, можно ли достичь конформной калибровки с помощью общей суперковариантности. Прежде всего сосчитаем число независимых функций в калибровке (9.345). Это даст нам грубую ориентацию в ситуации. Мы имеем 3 компоненты g_{ab} и два спинора χ_a или, другими словами, 3 бозонные и 4 фермионные функции. Мы заменяем их одной бозонной функцией φ и двумя фермионными функциями χ.

Это возможно, поскольку имеется две дополнительные бозонные функции, описывающие общее преобразование координат и две фермионные функции, входящие в (9.344). Так или иначе, число независимых функций совпадает.

Теперь следует произвести более подробный анализ, подобный тому, который мы проделали в бозонном случае.

Чтобы решить вопрос о достижимости калибровки (9.345), рассмотрим произвольную вариацию χ_a и выясним, можно ли ее представить комбинацией вариации поля χ и суперковариантного преобразования. Имеем

$$\delta\chi_a = \sigma_a \delta\chi + 2\nabla_a \varepsilon = \sigma_a(\delta\chi + \sigma^b \nabla_b \varepsilon) + 2(\nabla_a \varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_a \sigma^b \nabla_b \varepsilon). \quad (9.346)$$

Последнее слагаемое представляет собой «бесследовую» часть $2\nabla_a\varepsilon$ в том смысле, что, будучи умножено на σ^a, оно обращается в нуль. Все это вполне аналогично бозонному случаю (9.113). Допустимость калибровки зависит от разрешимости уравнения

$$(L_F \varepsilon) \equiv \nabla_a \varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_a \sigma^b \nabla_b \varepsilon = \varphi_a, \quad (9.347)$$

где φ_a — произвольное поле спина $3/2$, такое, что $\sigma^a \varphi_a = 0$. К этому уравнению нужно добавить бозонную часть — уравнение (9.113):

$$(L_B \omega) \equiv \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a - g_{ab} \nabla^c \omega_c = h_{ab} \quad (9.348)$$

с произвольным бесследовым h_{ab}. Как мы сейчас покажем, духовые детерминанты как раз и являются детерминантами операторов L_B и L_F. В чисто бозонном случае мы уже вывели этот результат (вспомним множитель $\det L_B^+ L_B$ в континуальном интеграле). Почти очевидно, что в фермионном случае нужно добавить $\det^{-1}(L_F^+ L_F)$. Здесь мы выведем этот результат другим (по сравнению с бозонным случаем) методом, который тоже полезно знать.

Возьмем суперметрику (g_{ab}, χ_a) в суперконформной калибровке

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \rho \delta_{ab}, \\ \chi_{a,\alpha} &= (\sigma_a \chi)_\alpha \end{aligned} \quad (9.349)$$

(α — спинорный индекс) и рассмотрим равенство Фаддеева–Попова

$$1 = e^{-W(g,\chi_a)} \int \mathcal{D}\omega\, \mathcal{D}\varepsilon\, \delta(g - L_B \omega) \delta(\chi_a - L_F \varepsilon), \quad (9.350)$$

служащее определением W. Подставляя его в континуальный интеграл для статистической суммы, получаем

$$Z = \int \mathcal{D}\rho\, \mathcal{D}\chi\, \mathcal{D}\psi_\mu\, \mathcal{D}x_\mu\, e^{-W(\rho,\chi)} e^{-S(\rho,\chi,\psi_\mu,x_\mu)}, \tag{9.351}$$

где мы опустили интегрирование по суперконформной группе $\mathcal{D}\omega\,\mathcal{D}\varepsilon$. Теперь удобно ввести духовые поля явно с помощью представления

$$\begin{aligned} e^{-W(g,\chi_a)} &= \det L_B \det^{-1} L_F = \\ &= \int (\mathcal{D}\omega\,\mathcal{D}h)^{(-)} (\mathcal{D}\varepsilon\,\mathcal{D}f)^{(+)} \exp\{-(h,\, L_B\omega) - (f,\, L_F\varepsilon)\}. \end{aligned} \tag{9.352}$$

Здесь знаки $(-)$ и $(+)$ означают, что мы интегрируем по полям с неправильной статистикой: ω и h — фермионы, в то время как f и ε — бозоны.

Теперь мы хотим выразить наши детерминанты через поля χ и ρ из (9.349). В бозонном случае мы уже сделали это. Тем не менее, удобно повторить все вновь, используя несколько другой метод, чтобы увидеть тесную связь между бозонами и фермионами.

Прежде всего перепишем операторы (9.348) и (9.347) в конформной калибровке. Для (9.348) стандартные формулы римановой геометрии

$$\begin{aligned} \nabla_a\omega_b &= \partial_a\omega_b - \Gamma^c_{ab}\omega_c, \\ \Gamma^c_{ab} &= \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_a\varphi\,\delta_{bc} + \partial_b\varphi\,\delta_{ac} - \partial_c\varphi\,\delta_{ab}) \quad (\varphi = \log\rho) \end{aligned} \tag{9.353}$$

дают

$$\begin{aligned} \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - g_{ab}\nabla^c\omega_c &= \partial_a\omega_b + \partial_b\omega_a - \delta_{ab}\partial_c\omega_c - \\ &\quad - (\partial_a\varphi\,\omega_b + \partial_b\varphi\,\omega_a) + \delta_{ab}\partial_c\varphi\,\omega_c = \\ &= e^{\varphi}(\partial_a\tilde\omega_b + \partial_b\tilde\omega_a - \delta_{ab}\partial_c\tilde\omega_c), \\ \tilde\omega_a &= e^{-\varphi}\omega_a. \end{aligned} \tag{9.354}$$

Для действия сопряженного оператора имеем

$$(L_B^+ h) = \nabla^a h_{ab} = g^{ac}(\partial_c h_{ab} - \Gamma^e_{ca}h_{eb} - \Gamma^e_{cb}h_{ae}) = e^{-\varphi}(\partial_a h_{ab}). \tag{9.355}$$

Ситуация с фермионами аналогична. Согласно общим правилам,

$$\nabla_a\varepsilon = \partial_a\varepsilon + \frac{1}{4}\Omega_a^{[bc]}[\sigma_b, \sigma_c]\varepsilon, \tag{9.356}$$

где спиновая связность $\Omega_a^{[bc]}$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \partial_a e_b^c + \Omega_a^{[cd]} e_b^d &= \Gamma_{ab}^f e_f^c, \\ g_{ab} &= e_a^c e_b^c. \end{aligned} \tag{9.357}$$

В конформной калибровке

$$e_a^b = \rho^{1/2} \delta_{ab},$$

и мы находим

$$\Omega_a^{[bc]} = -\frac{1}{4}(\partial_b \varphi\, \delta_{ac} - \partial_c \varphi\, \delta_{ab}). \tag{9.358}$$

Отсюда

$$\nabla_a \varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_a \sigma^b \nabla_b \varepsilon = e^{\varphi/2}[\partial_a(e^{-\varphi/2}\varepsilon) - \sigma_a \sigma^b \partial_b (e^{-\varphi/2}\varepsilon)].$$

Для сопряженного поля f_a спина $^3\!/_2$ имеем

$$\nabla_a f_b = \partial_a f_b - \Gamma_{ab}^c f_c + \frac{1}{4}\Omega_a^{[pq]}[\sigma^p, \sigma^q] f_b. \tag{9.359}$$

В конформной калибровке находим

$$\nabla^a f_a = \rho^{-1} \partial_a f_a. \tag{9.360}$$

Нет необходимости так часто пользоваться общими формулами. Ответы (9.354), (9.355), (9.359) и (9.360) мы могли бы предвидеть с помощью следующего рассуждения. Ковариантные производные в конформной калибровке можно определить так. Пусть у нас есть поле $A(\xi^+, \xi^-)$ ($\xi^\pm = \xi^1 \pm i\xi^2$), преобразующееся при аналитических заменах координат

$$\xi^+ \to f^+(\xi^+), \quad \xi^- \to f^-(\xi^-)$$

по закону

$$A(\xi^+, \xi^-) = \left(\frac{df^+}{d\xi^+}\right)^{\Delta} \left(\frac{df^-}{d\xi^-}\right)^{\bar{\Delta}} \tilde{A}(f^+, f^-), \tag{9.361}$$

то есть имеющее конформный вес $(\Delta, \bar{\Delta})$. Метрика $\rho(\xi^+, \xi^-)$ преобразуется при этих заменах так:

$$\rho(\xi^+, \xi^-) \to \frac{df^+}{d\xi^+}\frac{\partial f^-}{d\xi^-}\tilde{\rho}(f^+, f^-).$$

Попробуем определить ковариантные производные величины A. Это легко сделать:

$$\nabla_+ A = (\partial_+ - \Delta(\partial_+\varphi))A = \rho^{\Delta}\partial_+(\rho^{-\Delta}A). \tag{9.362}$$

Тривиально проверить, что если поле A преобразуется по закону (9.361) с некоторым весом $(\Delta, \bar{\Delta})$, то $\nabla_+ A$ преобразуется по тому же закону с весом $(\Delta + 1, \bar{\Delta})$. Теперь становятся яснее результаты предыдущих вычислений. Действительно, поле ω_a является ковекторным полем (ω_+, ω_-) с весами компонент $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Отсюда

$$\nabla_+\omega_+ = \rho\partial_+(\rho^{-1}\omega_+), \tag{9.363}$$

что дает (9.354). Поле h_{++} имеет вес (2,0), поэтому

$$\nabla^a h_{a+} = \rho^{-1}\partial_- h_{++} \quad \text{(сравните с (9.355))}.$$

Спинорные поля $\varepsilon_\pm$ имеют веса $(^1\!/_2, 0)$ и $(0, {}^1\!/_2)$, тогда как поля f_+^L и f_-^R — $(^3\!/_2, 0)$ и $(0, {}^3\!/_2)$. Это дает (9.359) и (9.360). Заметим также, что бесследовость h_{ab} означает, что $h_{+-} = 0$ и имеются только две компоненты h_{++} и h_{--}, а условие $\sigma^a f_a = 0$ означает, что у нас есть лишь компоненты f_+^L и f_-^R спин-вектора f_a^α, которые отвечают спину $^3\!/_2$, компоненты же спина $^1\!/_2$ отсутствуют. Следует помнить, что все наши вычисления ковариантных производных выполнены на фоне ненулевой метрики ρ, но в нулевом поле гравитино χ. В окончательных формулах мы сможем восстановить зависимость от χ с помощью суперсимметрии. На самом деле, не так уж трудно работать и в случае $\chi \neq 0$. Все, что нужно сделать — это обобщить формулы (9.361) и (9.362) на суперпространство.

Собирая все вместе, мы видим, что духовый вклад в континуальный интеграл определяется детерминантами, возникающими из задач на собственные значения

$$\begin{gathered}\rho\partial_+(\rho^{-1}\omega_+) = iEh_{++},\\ \partial^+ h_{++} \equiv g^{+-}\partial_- h_{++} = \rho^{-1}\partial_- h_{++} = iE\omega_+\end{gathered} \tag{9.364}$$

для бозонов и

$$\begin{gathered}\rho^{1/2}\partial_+(\rho^{-1/2}\varepsilon_+) = iEf_+,\\ \partial^+ f_+ = \rho^{-1}\partial_- f_+ = iE\varepsilon_+\end{gathered} \tag{9.365}$$

для фермионов. Применяя ∂_- к первому уравнению в каждой паре, получаем

$$\begin{aligned} -\rho^{-2}\partial_-(\rho\partial_+\bar{u}) &= E^2\bar{u}, \\ -\rho^{-3/2}\partial_-(\rho^{1/2}\partial_+\bar{v}) &= E^2\bar{v}, \\ \bar{u}_{(0,-1)} \equiv \rho^{-1}\omega_+, \quad & \bar{v}_{(0,-1/2)} \equiv \rho^{-1/2}\varepsilon_+. \end{aligned} \tag{9.366}$$

В общем случае оператор, действующий на поле конформного веса $(0, j)$, имеет вид

$$\mathcal{L}_j = \rho^{j-1}\partial_-(\rho^{-j}\partial_+). \tag{9.367}$$

Для $j = 0$ это — скалярный лапласиан, для $j = -1/2$ и -1 — только что полученные духовые операторы. Нам понадобится еще случай $j = 1/2$, отвечающий дираковским фермионам. В самом деле, дираковские фермионы преобразуются как

$$\psi_\pm \sim (d\xi^\pm)^{-1/2} \sim \left\{ \begin{matrix} (1/2, 0) \\ (0, 1/2) \end{matrix} \right\}, \tag{9.368}$$

и, следовательно, дираковская задача на собственные значения имеет вид

$$\begin{aligned} \rho^{-1/2}\partial_-\psi_+ &= iE\psi_-, \\ \rho^{-1/2}\partial_+\psi_- &= iE\psi_+. \end{aligned} \tag{9.369}$$

Разумеется, это же уравнение можно было бы получить и длинным путем, начав со стандартного уравнения Дирака со спиновой связностью

$$\sigma^a\nabla_a\psi = iE\psi. \tag{9.370}$$

Мы уже описали этот путь выше для случая духов и не будем повторять его.

Теперь нужно вычислить детерминанты. Все они должны быть локальными функционалами ρ, поскольку при наивных манипуляциях зависимость от ρ выпадает из всех выражений. Действительно, действие для поля u в (9.366) и (9.367), которое ведет к правильной задаче на собственные значения, имеет вид

$$\begin{aligned} S_j &= \int \rho^{-j}\partial_+\bar{u}\,\partial_-u\,d^2\xi, \\ N_j &= \int \rho^{1-j}\bar{u}u\,d^2\xi, \end{aligned} \tag{9.371}$$

где N_j — норма в u-пространстве. Если попробовать использовать теорию возмущений, полагая $\rho = 1 + \varphi$, то получится

$$W = \quad q \quad k \quad q \quad k+q \quad \sim$$

$$\sim j^2 \varphi(q)\varphi(-q) \int \frac{d^2k\, k_+(k+q)_- k_-(k+q)_+}{k^2(k+q)^2} = \tag{9.372}$$

$$= j^2 \varphi(q)\varphi(-q) \int d^2k.$$

Это выражение плохо определено. Это значит, что мы не смогли вычислить эффективное действие и продемонстрировали только то, что оно не имеет мнимой части в q-пространстве, будучи локальным функционалом поля φ. То же справедливо во всех порядках по φ.

Есть несколько способов решить эту проблему. Один из них состоит в том, чтобы во всех петлях пользоваться регуляризацией Паули–Вилларса. Это достигается добавлением к действию S_j действия $\tilde{S}_j$ полей-регуляторов $\tilde{u}$:

$$\tilde{S}_j = \int (\rho^{-j} \partial_+ \bar{\tilde{u}} \partial_- \tilde{u} + M^2 \rho^{1-j} \bar{\tilde{u}} \tilde{u})\, d^2\xi, \tag{9.373}$$

причем петли полей $\tilde{u}$ входят с отрицательными знаками и сокращают расходимости u-петель. Построение действия $\tilde{S}_j$ обеспечивает конформную симметрию регуляризованной теории. Зависимость от φ легко выделить из петель поля $\tilde{u}$, и тогда общие соображения конформной инвариантности приведут нас к действию Лиувилля с фиксированной константой взаимодействия (это единственное конформно-инвариантное выражение требуемой размерности).

Однако мы выберем другой подход к проблеме, который кажется более содержательным. Давайте обобщим выражение (9.352) для духового действия. Бозонная часть действия в отсутствие внешнего поля имеет вид

$$S_{\rm gh}^{(B)} = \int (h_{++} \partial_- \omega^+ + h_{--} \partial_+ \omega^-)\, d^2\xi; \quad \omega^{\pm} = \rho^{-1} \omega_{\mp}. \tag{9.374}$$

Здесь поля ω и h имеют конформные веса

$$\omega^+ \sim (-1, 0), \qquad \omega^- \sim (0, -1),$$
$$h_{++} \sim (2, 0), \qquad h_{--} \sim (0, 2).$$

В общем случае можно рассмотреть действие

$$S_j = \int (b^+ \partial_- a_+ + b^- \partial_+ a_-)\, d^2\xi \tag{9.375}$$

с весами

$$
\begin{aligned}
a_+ &\sim (j,0), & a_- &\sim (0,j), \\
b^+ &\sim (1-j,0), & b^- &\sim (0,1-j).
\end{aligned}
\tag{9.376}
$$

Наша тактика состоит в том, чтобы ввести в (9.375) внешнее гравитационное поле, но не в конформной калибровке, где эффективное действие расходится, а в калибровке, в которой имеется только одна компонента метрики, скажем, g_{++}. Как мы видели, это приводит к конечному выражению, содержащему g_{++}, которое можно обобщить до ковариантного.

Прежде всего, нужно найти выражение для ковариантной производной в этой калибровке. Метрика имеет вид

$$
ds^2 = d\xi^+ d\xi^- + g_{++}(d\xi^+)^2 = d\xi^+(d\xi^- + g_{++}d\xi^+). \tag{9.377}
$$

Легко найти взаимодействие поля g_{++} с полями a и b, или, иными словами, тензор энергии-импульса (a,b)-системы. Идея состоит в том, чтобы найти изменение действия при заменах координат

$$
\begin{aligned}
\xi^+ &\to \xi^+, \\
\xi^- &\to f^-(\xi^+,\xi^-).
\end{aligned}
\tag{9.378}
$$

При этих заменах поля преобразуются как

$$
\begin{aligned}
a_-(\xi^+,\xi^-) &\to \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-}\right)^j a_-(\xi^+, f^-(\xi^+,\xi^-)), \\
b^-(\xi^+,\xi^-) &\to \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-}\right)^{1-j} b^-(\xi^+, f^-(\xi^+,\xi^-)).
\end{aligned}
\tag{9.379}
$$

Действие (или, лучше сказать, его «минус»-часть) преобразуется в

$$\begin{aligned}\tilde{S} = \int d\xi^+ df^- \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-}\right)^{-1} \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-}\right)^{1-j} b(\xi^+, f^-) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \xi^+} \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-}\right)^{j} a(\xi^+, f^-(\xi^+, \xi^-)) = \\ = \int d\xi^+ df^-\, b(\xi^+, f^-) \frac{\partial}{\partial \xi^+} a(\xi^+, f^-) + \\ + \int d\xi^+ df^-\, (ba) j \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^+} \log \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-}\right) + \\ + \int d\xi^+ df^- \left(b \frac{\partial}{\partial f^-} a\right) \partial_+ f^-.\end{aligned} \tag{9.380}$$

Теперь положим

$$f^- = \xi^- + \varepsilon_+(\xi^+, \xi^-) \tag{9.381}$$

с бесконечно малым ε_+. Получаем

$$\tilde{S} - S = \int (b\partial_- a - j\partial_-(ba))\partial_+ \varepsilon_+.$$

Отсюда можно извлечь компоненту тензора энергии-импульса, связанную с g_{++},

$$T_{--} = b\partial_- a - j\partial_-(ba) = (1-j) b\partial_- a + j a\partial_- b. \tag{9.382}$$

Теперь мы можем вычислить отклик второго порядка на поле g_{++}. Он описывается диаграммой

$q+k$

b a

a b

k

$$= \Pi_{--,--}(q),$$

$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \int \Pi_{--,--}(q) g_{++}(q) g_{++}(-q) \,\frac{d^2 q}{(2\pi)^2},$$

$$\begin{aligned}\Pi_{--,--}(q) = -\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{[j(k+q)_- + (1-j)k_-][jk_- + (1-j)(k+q)_-]}{(k_+ + i\varepsilon \operatorname{sign} k_-)(k_+ + q_+ + i\varepsilon \operatorname{sign}(k+q)_-)} = \\ = -\frac{1 + 6j(j-1)}{24\pi} \frac{q_-^3}{q_+}\end{aligned} \tag{9.383}$$

(мы здесь использовали корреляторы

$$\langle a_-^{(j)}(q) b_-^{(1-j)}(-q) \rangle = (q_+ + i\varepsilon \operatorname{sign} q_-)^{-1}).$$

Аргументы, тождественные использованным в разделе 9.6, приводят к следующему результату для детерминантов:

$$\begin{gathered}\log\det \| -\rho^{j-1}\partial_-(\rho^{-j}\partial_+) \| = \\ = -\frac{1+6j(j-1)}{24\pi}\int \left(\frac{1}{2}(\partial_a\varphi^2 + \mu^2 e^{\varphi}\right) d^2\xi, \\ \rho = e^{\varphi}.\end{gathered} \tag{9.384}$$

Этот результат равнозначен вычислению центрального заряда алгебры Вирасоро тензора энергии-импульса (9.382), который равен в точности

$$c_j = \pm(1+6j(j-1))\cdot 2, \tag{9.385}$$

где знаки $\pm$ относятся к коммутирующим или антикоммутирующим полям (напомним, что фермионные петли берутся со знаком минус). Действительно, центральный заряд — это просто вакуумное среднее двух тензоров энергии-импульса $\langle T_{++}T_{++}\rangle$, которое мы и вычисляли.

До физического ответа остается еще один шаг. Мы вычислили все детерминанты при условии $\chi = 0$. Теперь мы должны восстановить зависимость от χ в $\det \mathcal{L}_j$. Это можно сделать без каких-либо дополнительных вычислений, поскольку существует только одно суперсимметричное расширение действия Лиувилля (9.384). Чтобы найти его, рассмотрим суперполе

$$\phi = \varphi + \theta_+\chi_+ + \theta_-\chi_- + \theta_+\theta_- f \tag{9.386}$$

и явно суперсимметричное действие

$$\begin{gathered} S = \int \left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_+\phi\,\mathcal{D}_-\phi + 2i\mu e^{\phi/2}\right) d\theta_- d\theta_+ d^2\xi, \\ \mathcal{D}_\pm = \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} + \theta^\pm\frac{\partial}{\partial\xi^\pm}. \end{gathered} \tag{9.387}$$

Простое вычисление дает

$$\begin{aligned} e^{\phi/2} &= e^{\varphi/2} e^{(\theta_+\chi_+ + \theta_-\chi_- + \theta_+\theta_- f)/2} = \\ &= e^{\varphi/2}\Big(1 + \frac{1}{2}\theta_+\chi_+ + \frac{1}{2}\theta_-\chi_- + \frac{1}{2}\theta_+\theta_-(f - \frac{1}{2}\chi_+\chi_-)\Big), \\ \int d^2\theta\, d^2\xi\, e^{\phi/2} &= \int d^2\xi\, \frac{1}{2} e^{\varphi/2}(f - \frac{1}{2}\chi_+\chi_-), \\ \int \frac{1}{2}\mathcal{D}_+\phi\,\mathcal{D}_-\phi\, d^2\theta\, d^2\xi &= \int \Big(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}\chi_+\partial_-\chi_+ - \frac{1}{2}\chi_-\partial_+\chi_- + \frac{1}{2}f^2\Big) d^2\xi. \end{aligned} \tag{9.388}$$

Складывая оба члена и исключая поле f (находя минимум действия по отношению к нему) получаем

$$S = \int \left\{\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}\chi\partial\!\!\!/\chi + \frac{1}{2}\mu e^{\varphi/2}\bar{\chi}\chi + \mu^2 e^{\varphi}\right\} d^2\xi. \tag{9.389}$$

Это действие должно заменить действие Лиувилля при ненулевом χ. Его можно было бы получить и явно, связывая гравитино с супертоками и вычисляя суперконформные аномалии. Но, как мы видим, этого не требуется, так как суперконформное расширение бозонной части действия единственно.

Теперь мы готовы выписать эффективное действие суперструны. Для этого найдем значение константы связи в действии супер-Лиувилля, или, что то же самое, центральный заряд c. Имеем

$$\begin{aligned} &(j=0)\quad c^{(x)} = D, \qquad &&(j=-1)\quad c_{\text{gh}}^{(x)} = -26, \\ &(j=\tfrac{1}{2})\quad c^{(\psi)} = D/2, \qquad &&(j=-\tfrac{1}{2})\quad c_{\text{gh}}^{(\psi)} = 11, \\ &c_{\text{tot}} = \frac{3}{2}D - 15 = \frac{3}{2}(D-10) \end{aligned} \tag{9.390}$$

(здесь значения c для $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{x}$ равны половине приведенных в (9.385), так как (9.385) написано для комплексных полей). Итак, наш окончательный ответ для эффективного действия фермионной струны, полученного интегрированием по полям $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\psi}$, дается формулой

$$S = \frac{10-D}{32\pi}\int \Big(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}\chi\partial\!\!\!/\chi + \frac{1}{2}\mu e^{\varphi/2}\bar{\chi}\chi + \mu^2 e^{\varphi}\Big) d^2\xi. \tag{9.391}$$

Как и в бозонном случае, это действие описывает продольные колебания струны. В критической размерности $D_{\text{cr}} = 10$ они отсутствуют.

До сих пор мы имели дело с поверхностями сферической топологии без внешних линий. Как и в бозонном случае, чтобы получить амплитуды рассеяния, нужно сделать проколы в сфере, а чтобы найти поправки к древесным амплитудам, нужно просуммировать по топологиям. Мы займемся первой задачей, которая в фермионном случае имеет некоторые особенности.

9.13. Вершинные операторы

В случае бозонной струны мы прокалывали ее мировой лист, вставляя множители

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x}) &= \int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(\xi)) g^{1/2}\, d^2\xi, \\ V(\boldsymbol{p}) &= \int d^2\xi\, V_{\boldsymbol{p}}(\xi), \\ V_{\boldsymbol{p}}(\xi) &= e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\xi)} (g(\xi))^{1/2} \end{aligned} \tag{9.392}$$

под континуальный интеграл. Теперь наша задача — найти суперсимметричное обобщение этих формул.

Начнем со свойств поля $\hat{\boldsymbol{x}}$. Функция Грина суперсимметричного лапласиана $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ равна

$$\langle \hat{x}_\mu(\xi_1, \theta_1) \hat{x}_\nu(\xi_2, \theta_2) \rangle = -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \log(z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2). \tag{9.393}$$

Эту формулу легко проверить покомпонентно. Она эквивалентна равенствам

$$\begin{aligned} \langle x_\mu(\xi_1) x_\nu(\xi_2) \rangle &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \log |z_1 - z_2|^2, \\ \langle \psi_{\mu L}(\xi_1) \psi_{\nu L}(\xi_2) \rangle &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \frac{1}{z_1 - z_2}, \\ \langle \psi_{\mu R}(\xi_1) \psi_{\nu R}(\xi_2) \rangle &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \frac{1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}, \\ \langle f_\mu(\xi_1) f_\nu(\xi_2) \rangle &= \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{9.394}$$

Легко понять, почему именно комбинация $\hat{z}_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2$ появилась в (9.393): она инвариантна относительно суперпреобразований,

$$\delta\hat{z}_{12} = \delta z_1 - \delta z_2 - \delta\theta_1\theta_2 + \delta\theta_2\theta_1 = 0$$
$$(\delta z_1 = -\varepsilon\theta_1,\ \delta z_2 = -\varepsilon\theta_2,\ \delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \varepsilon).$$

Найдем теперь выражение для суперсимметричного вершинного оператора, начав с простейшего случая критической размерности $D = 10$. В этом случае, согласно предыдущему разделу, мы ожидаем, что теория конформно-инвариантна, т. е. поля φ и χ на массовой поверхности не участвуют в амплитудах. Естественным кандидатом на роль $V(\boldsymbol{p})$ является

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{p}) &= \int d^2\xi\, d^2\theta :e^{i\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}(\xi,\theta)}: = \\ &= \int d^2\xi \int d^2\theta :e^{i\boldsymbol{px}}\{1 - i\boldsymbol{p\psi}_L\theta - i\boldsymbol{p\psi}_R\bar{\theta} - \\ &\quad - \bar{\theta}\theta[(\boldsymbol{p\psi}_L)(\boldsymbol{p\psi}_R) - i\boldsymbol{pf}]\}:. \end{aligned} \tag{9.395}$$

Полагая $\boldsymbol{f} = 0$ и интегрируя по θ, получаем

$$V(\boldsymbol{p}) = \int d^2\xi :(p_\mu\psi_{\mu L})(p_\nu\psi_{\nu R})e^{i\boldsymbol{px}(\xi)}:. \tag{9.396}$$

Как мы уже отмечали, размерность $:e^{i\boldsymbol{px}}:$ равна $\boldsymbol{p}^2$. Поскольку свободные фермионы $\psi_{\mu L}$ и $\psi_{\mu R}$ имеют размерности $1/2$, мы получаем следующее условие массовой поверхности:

$$\Delta = \boldsymbol{p}^2 + 1 = 2, \quad \boldsymbol{p}^2 = 1, \tag{9.397}$$

Таким образом, вершина (9.396) все еще описывает тахион, но «лучший» по сравнению с бозонным (имевшим $\boldsymbol{p}^2 = 2$). В случае открытых струн нужно оставить только левую часть всех полей и координат, и мы получаем

$$V_{\text{open}}(\boldsymbol{p}) = \int dz :p_\mu\psi_\mu(z)e^{i\boldsymbol{px}(z)}:, \quad \boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{2}. \tag{9.398}$$

Мы можем быть уверены, что «старый» бозонный тахион не родится при столкновениях новых, поскольку выражение $:e^{i\boldsymbol{px}}:$ не суперсимметрично. Тем не менее, полезно проверить это явно. Рассмотрим операторное разложение

$$:p_\mu\psi_\mu(z)e^{i\boldsymbol{px}(z)}:\ :k_\nu\psi_\nu(0)e^{i\boldsymbol{kx}(0)}: = (\boldsymbol{pk})z^{2\boldsymbol{pk}-1}:e^{i(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(0)}: + \ldots. \tag{9.399}$$

На первый взгляд кажется, что бозонный тахион появился, так как в правой части (9.399) присутствует его вершинный оператор $:e^{i\boldsymbol{px}}:$. Однако его появление иллюзорно. Действительно, слияние двух тахионов фермионных струн (9.398) с $\boldsymbol{p}^2 = 1/2$ производит бозонный тахион с $\boldsymbol{p}^2 = 1$ согласно (9.399), если $\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{k}^2 = {}^1\!/_2$ и $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2 = 1$. Это влечет за собой $\boldsymbol{pk} = 0$, и вычет в тахионном полюсе во всех амплитудах обращается в нуль. Таким образом, настоящее основное состояние открытой фермионной струны имеет $\boldsymbol{p}^2 = {}^1\!/_2$.

Даже этот тахион можно последовательно исключить. Будем различать вершинные операторы по их четности при $\psi_\mu \to -\psi_\mu$ (для простоты мы говорим об открытых струнах). Тахионное состояние (9.398) нечетно. Слияние двух тахионов дает только четные состояния. Чтобы найти их, мы должны исследовать следующие члены в (9.399). Простейшим будет суперсимметричное обобщение оператора $:i\partial_z x_\mu e^{i\boldsymbol{px}}:$ теории бозонных струн, описывающего безмассовое векторное состояние открытой струны. Это обобщение легко построить с помощью суперполей. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu(\boldsymbol{p}) &= \int dz\, d\theta :i\mathcal{D}\hat{x}_\mu\, e^{i\boldsymbol{px}}: \\
&= \int dz\, d\theta :i(\psi_\mu + \theta\, \partial_z x_\mu) e^{i\boldsymbol{px}} (1 - i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\psi}\theta): \qquad (9.400)\\
&= \int dz :(i\partial_z x_\mu + p_\nu \psi_\mu \psi_\nu) e^{i\boldsymbol{px}}:.
\end{aligned}$$

Этот вершинный оператор тоже описывает безмассовое векторное состояние, поскольку размерность интеграла дается формулой

$$\Delta = \boldsymbol{p}^2 + 1 = 1;\ \boldsymbol{p}^2 = 0. \qquad (9.401)$$

По построению наша вершина суперсимметрична и четна относительно отражения $\psi_\mu \to -\psi_\mu$. При слиянии двух таких частиц тахион (9.398) не может появиться, так как он нечетный, а «бозонный» тахион $:e^{i\boldsymbol{px}}:$ не может родиться, так как он не суперсимметричен. Точнее, в операторном разложении произведения двух вершин (9.400) оператор $:e^{i\boldsymbol{px}}:$ действительно появляется, но на массовой поверхности коэффициент перед ним обращается в нуль, так же как это случилось в (9.399).

Мы приходим к заключению, что открытая фермионная струна, будучи ограничена четным относительно ψ-отражения сектором, не имеет тахионов при $D = 10$ и ее основное состояние отвечает векторной частице нулевой массы.

В случае замкнутых струн вершинный оператор дается прямым произведением двух Γ_μ из (9.400), причем одно зависит от z, а другое — от $\bar{z}$. Он описывает безмассовую тензорную частицу, которую мы обсудим немного позже.

Безмассовые векторные или тензорные частицы могут взаимодействовать без рождения духов (и мы знаем, что духи отсутствуют при $D \leqslant 10$ из (9.391) или из прямого подсчета числа состояний, аналогичного проделанному в бозонном случае) только в том случае, когда их действие калибровочно-инвариантно, т. е. это действие Янга–Миллса для векторов и Эйнштейна для тензоров. Мы отложим явное вычисление этого эффективного действия и укажем здесь только на одно проявление калибровочной структуры. В операторном произведении

$$\Gamma_\mu(\boldsymbol{p}, z)\Gamma_\nu(\boldsymbol{k}, 0) \sim z^{2\boldsymbol{pk}-1} t_{\mu\nu\lambda}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})\Gamma_\lambda(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}, 0), \tag{9.402}$$

как показывает явное вычисление, величина $t_{\mu\nu\lambda}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$ совпадает с кубической янг-миллсовской вершиной. Это важное наблюдение, так как мы уже знаем, что структурные константы в операторных разложениях совпадают с вычетами в полюсах амплитуд рассеяния. Немного позже мы опишем эффективный метод их вычисления.

До сих пор, хотя мы и говорили о фермионной струне, у нас не было пространственно-временных фермионов. Очевидно, что все частицы, полученные из вершинных операторов (9.400) — бозоны.

Очень важно, что кроме них спектр теории содержит фермионы, возникающие как солитонные возбуждения струны. На языке континуальных интегралов солитоны возникают при специальных граничных условиях на поля. В нашем случае аномальные граничные условия имеют следующий смысл. Мировой лист представляет собой сферу с выколотыми точками, которые отвечают внешним частицам. На такой проколотой сфере можно выбрать различные спинорные структуры для полей ψ_μ, то есть можно рассматривать двузначные поля, меняющие знак при обходе вокруг выколотой точки.

Чтобы понять, почему нетривиальные спинорные структуры связаны с пространственно-временными фермионами, нужно сделать шаг назад и вернуться к случаю частицы. Напомним, что мы описывали спиноры антикоммутирующими полями ψ_μ с действием

$$S = \int \psi_\mu \dot{\psi}_\mu \, d\tau. \tag{9.403}$$

Почему это действие описывает пространственно-временной спинор, в то время как переменные ψ_μ — векторные? Для ответа на этот вопрос перейдем к гамильтонову формализму. Предполагая, что размерность пространства-времени четная, можно считать одну половину ψ_μ координатами, а другую — сопряженными импульсами. Введем комплексные поля

$$\phi_a = \psi_a + i\psi_{a+D/2}, \quad a = 1, \ldots, D/2.$$

Действие принимает вид

$$S = \int \phi_a^+ \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_a \, dt, \tag{9.404}$$

описывающий $D/2$ гармонических осцилляторов. Гамильтониан в этом случае равен нулю, а пространство состояний состоит из «вакуума» $|0\rangle$,

$$\phi_a |0\rangle = 0, \tag{9.405}$$

и «возбужденных» состояний

$$|f\rangle = \phi_{a_1}^+ \dots \phi_{a_n}^+ |0\rangle. \tag{9.406}$$

Поскольку наши операторы антикоммутируют

$$[\phi_a, \phi_b^+]_+ = \delta_{ab}, \quad [\phi_a, \phi_b]_+ = [\phi_a^+, \phi_b^+]_+ = 0, \tag{9.407}$$

число независимых состояний вида (9.406) равно $2^{D/2}$ (каждое a может быть занято или свободно). Все эти состояния обладают нулевой энергией и описывают одну частицу с $2^{D/2}$ поляризациями. Это в точности совпадает с размерностью спинорного представления группы $O(D)$, и мы фактически описали процедуру его явного построения. Конечно, для завершения этого построения следует выразить генераторы $O(D)$ через операторы ϕ_a и показать, что представление невырождено. Это нетрудно, но мы остановимся здесь, так как наша задача состояла только в том, чтобы увидеть связь между ψ_μ и спинорами.

Возвращаясь к струнам, посмотрим на ψ_μ-часть действия струны на цилиндре:

$$\begin{aligned} S = \int \Big(\psi_{\mu,L} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \psi_{\mu,L} + \\ + \psi_{\mu,R} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \psi_{\mu,R} \Big) d\tau \, d\sigma. \end{aligned} \tag{9.408}$$

Две спинорные структуры отвечают периодическим или антипериодическим ψ_μ при обходе вокруг цилиндра. В периодическом случае (который называется сектором Рамона) ψ_μ имеет постоянную по σ компоненту, так что действие (9.408) сводится (для киральной компоненты $\psi_{\mu,L}$ или $\psi_{\mu,R}$) к (9.403). Мы видим, что при интегрировании по полям ψ_μ с периодическими граничными условиями основное состояние струны описывается пространственно-временным спинором. В антипериодическом случае (сектор Неве–Шварца) мы все еще можем использовать базис (9.406), но теперь нет постоянной по σ компоненты, гамильтониан не равен нулю (из-за члена $i\psi\,\partial_\sigma\psi$), и эти состояния невырождены. Можно проверить, что основное состояние в этом случае описывается пространственно-временным бозоном.

Перейдем теперь к нашей проколотой сфере и операторной алгебре. Этот переход достигается конформным преобразованием, превращающим цилиндр в кольцо. Тогда предел бесконечно длинного цилиндра будет соответствовать пределу, когда внутренняя окружность кольца сжимается в точку, в то время как радиус внешней окружности стремится к бесконечности. То есть мы получили сферу с двумя удаленными точками. Выясним теперь, что происходит с различными спинорными структурами при этом преобразовании.

Для этого заметим, что конформное отображение, о котором мы говорим, это в точности

$$\begin{aligned} w &= \log z = \tau + i\sigma, \\ \psi_{\mu,L}(z) &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^{1/2} \psi_{\mu,L}(w(z)), \\ \psi_{\mu,R}(\bar z) &= \left(\overline{\frac{dw}{dz}}\right)^{1/2} \psi_{\mu,R}(w(z)) \end{aligned} \tag{9.409}$$

(здесь z принадлежит проколотой сфере, а w — цилиндру; напомним, что конформный спин ψ_μ равен $1/2$).

Квадратный корень в (9.409) очень важен. Он означает, что поле ψ_μ, периодическое на цилиндре (сектор Рамона), становится антипериодическим при переходе в z-плоскость. Обратно, поля ψ_μ, антипериодические на цилиндре (сектор Неве–Шварца), переходят в поля, однозначные на z плоскости.

Итак, мы получаем следующее правило. Когда мы интегрируем по полям, однозначным в z-плоскости, мы получаем бозонные состояния струны, которые образуют сектор Неве–Шварца. Допуская поля ψ_μ, меняющие знак при обходе выколотой точки, мы получаем пространственно-временной фермион.

Есть ли эффективная техника вычисления континуальных интегралов с нетривиальными спинорными структурами? В случае обсуждаемых нами точечных особенностей такая техника использует так называемые спиновые операторы.

Мы знаем, что основное состояние в секторе Рамона является пространственно-временным спинором, и можно ожидать, что ему соответствует оператор $S_a(z,\bar z)$, где $a = 1, \ldots, D/2$ — спинорный индекс. Операторное произведение S_a и ψ_μ должно иметь вид

$$\psi_\mu(z)S_a(0) = (2z)^{-1/2}(\gamma_\mu)_{ab}S_b(0) + \ldots, \tag{9.410}$$

где множитель $z^{-1/2}$ дает нетривиальную спинорную структуру при $z = 0$, индуцированную $S_a(0)$, а коэффициенты $(\gamma_\mu)_{ab}$ — просто D-мерные матрицы Дирака. Фермионное состояние $|a\rangle$ струны (a — спинорный индекс) дается

$$|a\rangle = S_a(0)|0\rangle. \tag{9.411}$$

Эти спиновые операторы имеют наглядный физический смысл. Вспомним, что свободные майорановские фермионы в двух измерениях эквивалентны двумерной модели Изинга в том смысле, что их статистические суммы совпадают. NSR-струну можно представлять себе как обычную бозонную струну, каждый кусочек которой несет D-мерный спиновый оператор. Теперь преобразование Йордана–Вигнера превращает эту систему в обычные майорановские фермионы на мировом листе. С другой стороны, поскольку каждый участок струны несет спин $1/2$, есть два сектора по четности полного числа спинов. Это и есть секторы Неве–Шварца и Рамона.

Спиновый оператор, переводящий эти секторы друг в друга, может быть выражен с помощью преобразования Йордана–Вигнера через фермионные поля ψ_μ. Это представление, включающее экспоненты от билинейных по ψ_μ форм, довольно громоздко, и, к счастью, нам не потребуется. Мы покажем, как вычислить корреляции S_a непосредственно.

Рассмотрим сперва одно фермионное поле ψ и вычислим корреляционную функцию

$$\mathcal{K} = \langle \psi(z_1)\psi(z_2)S(x)S(y)\rangle \tag{9.412}$$

(это в точности модель Изинга).

Оказывается, что аналитических свойств $\mathcal{K}$ достаточно для ее вычисления. Из (9.410) мы знаем, что $\mathcal{K}$ — аналитическая функция z_1 и z_2 с корневыми точками ветвления $z_{1,2} = x, y$. Кроме того, вследствие соотношения

$$\psi(z_1)\psi(z_2) \simeq z_{12}^{-1} I + \dots, \tag{9.413}$$

функция $\mathcal{K}$ должна иметь простой полюс при $z_1 = z_2$. Следовательно, можно написать

$$\mathcal{K} = \frac{P(z_1, z_2, x, y)}{(z_1 - z_2)\{(z_1 - x)(z_1 - y)(z_2 - x)(z_2 - y)\}^{1/2}}, \tag{9.414}$$

где P — полином по z_1 и z_2. Этот полином должен быть устроен так, чтобы вычет $\mathcal{K}$ в полюсе $z_1 = z_2$ не зависел от z_1 (из-за единичного оператора в (9.413)). Следовательно,

$$P(z_1, z_1, x, y) = Q(x, y)(z_1 - x)(z_1 - y). \tag{9.415}$$

Далее, вследствие

$$S(x)S(y) \simeq |x-y|^{-4\Delta} I + \dots \tag{9.416}$$

мы имеем требование

$$P(z_1,\, z_2,\, x,\, y) \underset{x\to y}{=} (z_1 - x)(z_2 - x)|x-y|^{-4\Delta}.$$

Следовательно, единственное допустимое выражение для корреляционной функции имеет вид

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\frac{(z_1-x)(z_2-y)+(z_1-y)(z_2-x)}{(z_1-z_2)\{(z_1-x)(z_1-y)(z_2-x)(z_2-y)\}^{1/2}}\frac{1}{|x-y|^{4\Delta}}. \tag{9.417}$$

Теперь мы готовы найти Δ. Идея вычисления следующая. Сначала воспользуемся операторным разложением

$$\psi(z_1)\psi(z_2) \underset{z_{12}\to 0}{\simeq} z_{12}^{-1} I + f z_{12} T(z_2) + \dots\,, \tag{9.418}$$

где постоянная f может быть выражена через размерность поля ψ (равную $1/2$). Для этого можно подставить (9.418) в

$$\begin{aligned} \langle\psi(z)\psi(0)\psi(u)\psi(v)\rangle &= \frac{1}{z}\frac{1}{u-v} + \frac{1}{z-u}\frac{1}{v} - \frac{1}{z-v}\frac{1}{u} \underset{z\to 0}{\approx} \\ &\underset{z\to 0}{\approx} \frac{1}{z}\frac{1}{u-v} + z\frac{u-v}{(uv)^2} + O(z^2). \end{aligned} \tag{9.419}$$

Первый член представляет собой вклад единичного оператора, тогда как второй — вклад тензора энергии-импульса. Конформное тождество Уорда фиксирует нормировку T:

$$\langle T(0)\psi(u)\psi(v)\rangle = \frac{1}{2}\frac{u-v}{u^2v^2}\frac{1}{2}. \tag{9.420}$$

Мы видим, что в (9.418) $f = 2$. Конечно, этот ответ можно было бы получить сразу, так как для свободных фермионов, с которыми мы имеем дело,

$$T(z) = -\frac{1}{2}\psi\partial_z\psi \tag{9.421}$$

и весь наш предыдущий вывод есть не что иное, как проверка этой формулы. Однако область применимости метода операторных разложений очень широка и не ограничивается случаями свободных полей.

Второй шаг в вычислении Δ состоит в том, чтобы подставить (9.418) в $\langle\psi\psi SS\rangle$. Разлагая (9.417) по z_{12}, получаем

$$\mathcal{K} \underset{z_{12}\to 0}{=} \frac{1}{z_{12}}\frac{1}{|x-y|^{4\Delta}} + + \frac{z_{12}}{8}\frac{(x-y)^2}{(z_2-x)^2(z_2-y)^2}\frac{1}{|x-y|^{4\Delta}}. \tag{9.422}$$

Первый член снова происходит от единичного оператора, тогда как второй представляет собой вклад тензора энергии-импульса. Сопоставляя (9.418) и (9.422), получаем

$$\langle T(z)S(x)S(y)\rangle = \frac{1}{16}\frac{(x-y)^2}{(z-x)^2(z-y)^2}\frac{1}{|x-y|^{2\Delta}}. \tag{9.423}$$

Это совместно с конформным тождеством Уорда (которое, в частности, говорит, что вычет в полюсе второго порядка при $z \to x$ равен Δ), только если $\Delta = {}^1\!/_{16}$. Мы видим, что конформная алгебра действительно определяет размерность спинового оператора, так же как и его корреляционные функции.

Для коррелятора (9.412) имеется важное представление. Возьмем его предел при $y \to \infty$, $x \to 0$, которого можно достичь проективным преобразованием. Мы получим

$$\langle S(\infty)|\psi(z_1)\psi(z_2)|S(0)\rangle = \frac{1}{2}\frac{z_1+z_2}{(z_1z_2)^{1/2}}\frac{1}{z_1-z_2}. \tag{9.424}$$

Эта формула имеет интересную интерпретацию. Именно, поскольку мы вставили спины в 0 и ∞, поле $\psi(z)$ стало двузначным в z-плоскости с разрезом от 0 до ∞. Можно ожидать, что имеется следующее разложение по модам:

$$\psi(z) = \frac{1}{z^{1/2}}\left(\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n z^{-n} + b_n^+ z^n)\right), \tag{9.425}$$

и из соответствующих антикоммутаторов полей ψ вытекают соотношения

$$\begin{gathered}\{\psi_0,\psi_0\} = 2\psi_0^2 = 1,\\ \{b_n, b_m^+\} = \delta_{nm}.\end{gathered} \tag{9.426}$$

Вычислив теперь коррелятор

$$\langle\psi(z_1)\psi(z_2)\rangle = \frac{1}{(z_1z_2)^{1/2}}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}\frac{z_1+z_2}{(z_1z_2)^{1/2}}\frac{1}{z_1-z_2}, \tag{9.427}$$

мы видим, что он в точности совпадает с тем, что мы получили из (9.412). Когда спиновые операторы и разрез отсутствуют, разложение по модам будет иметь вид

$$\psi(z) = \frac{1}{z^{1/2}}\left\{\sum_{n=1/2}^{\infty}(b_n z^{-n} + b_n^+ z^n)\right\} \tag{9.428}$$

и

$$\langle\psi(z_1)\psi(z_2)\rangle = \frac{1}{(z_1 z_2)^{1/2}}\sum_{n=1/2}^{\infty}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n = \frac{1}{z_1 - z_2},$$

как и должно быть.

Мы видим, что роль спиновых операторов состоит в том, чтобы сдвинуть полуцелые моды в (9.428) на $1/2$ и превратить их в целые в (9.425). Более того, размерность спинового оператора $\Delta = 1/16$ имеет естественную интерпретацию, как изменение энергии нулевых колебаний в присутствии спина. Действительно, справедливо соотношение

$$\Delta = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1/2}^{\infty} n\right) = \frac{1}{16}, \tag{9.429}$$

где мы использовали следующую формулу для регуляризованных сумм

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}(n-j) - \sum_{n=0}^{\infty} n = -\frac{1}{2}j(j+1),\\ \sum_n \omega_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_n \omega_n e^{-\varepsilon\omega_n}.\end{gathered} \tag{9.430}$$

В случае D измерений единственное отличие, которое нам встретится, состоит в том, что размерность спина будет

$$\Delta = D/16, \tag{9.431}$$

так как *все* ψ_μ меняют энергию своих нулевых колебаний, и, кроме того, вместо (9.425) мы будем иметь

$$\psi_\mu = z^{-1/2}\left\{\frac{\gamma_\mu}{\sqrt{2}} + \gamma_{D+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n z^{-n} + b_n^+ z^n\right)\right\}, \tag{9.432}$$

где γ_μ и γ_{D+1} — обычные матрицы Дирака.

Используя эти формулы, легко вычислить корреляционные функции, включающие два спиновых оператора. Разумеется, метод разложения по модам неприменим, когда число спинов больше двух. В этом случае нужно использовать методы, основанные на операторной алгебре. С их помощью нетрудно построить коррелятор любого числа спинов.

Подведем итоги. Мы начали с суперсимметричного (на мировом листе) действия, содержащего поля x_μ и ψ_μ. Грубо говоря, мы имели γ-матрицы (ψ_μ), распределенные по мировому листу. Было показано, что кроме обычного, бозонного сектора, у такой струны имеется другой, «солитонный» сектор, задаваемый антипериодическими граничными условиями на ψ_μ при обходе вокруг выколотых точек. В результате каждая такая точка, в которой концентрируется «солитон», описывается спиновым оператором, который является пространственно-временным спинором. Отсюда вытекает, что эта струна имеет спинорные возбуждения помимо обычных бозонных.

В принципе, можно описывать эту струну не полями ψ_μ, а спиновыми полями S_a на мировом листе. В случае частиц это соответствует переходу от действия (9.317) к (9.335). К несчастью, S_a не являются свободными полями, поскольку имеют аномальную размерность $D/16$, и пригодная на практике формулировка до сих пор не найдена. Однако я уверен, что она существует. Для $D = 10$ ситуация несколько проще, так как в калибровке светового конуса эффективная размерность спинового оператора становится равной $(D-2)/16 = {}^1\!/_2$. В этом случае спиновые поля, как и ожидается, становятся свободными и фермионная струна может быть описана нековариантным действием Грина–Шварца.

В ковариантном формализме мы должны построить вершинный оператор излучения пространственно-временного фермиона. Он должен быть чем-то вроде

$$V_{p,a} \sim S_a(\xi) e^{ipx(\xi)}, \tag{9.433}$$

где a — спинорный индекс. Однако (9.433) сам по себе не годится, так как не имеет требуемой размерности 1. Причина состоит в том, что, так как S_a изменили граничные условия на поля ψ, необходимо изменить граничные условия для гравитино и полей духов, входящих в континуальный интеграл. Есть формальные конструкции, доводящие эту задачу до конца, но последовательный вывод из первых принципов до сих пор отсутствует. Тем не менее, мы можем, если захотим, вычислить амплитуды, содержащие два фермиона. Для этого мы используем вершину излучения бозона

$$V_{p\mu} = :(i\partial_z x_\mu + p_\nu \psi_\mu \psi_\nu) e^{ipx}:$$

и будем считать, что ψ_μ имеет разложение по модам как в (9.432). Это означает, что в 0 и ∞ находятся спиновые операторы, и мы изучаем рассеяние (произвольного числа) бозонов одним фермионом. Для нескольких фермионов необходимо либо использовать алгебраическую конструкцию фермионной вершины, о которой говорилось выше, либо переходить в калибровку светового конуса. Возможно, ситуация скоро исправится.

Таким образом, в критической размерности $D = 10$ фермионная струна обладает следующими свойствами. Ее основное состояние является безмассовым и суперсимметричным в пространственно-временном смысле, поскольку числа состояний в секторах Рамона и Неве–Шварца совпадают.

Последнее утверждение нуждается в пояснении, так как для его выполнения требуется сделать некоторые проекции в обоих секторах. Мы уже упоминали о них по ходу дела, а теперь обсудим их смысл.

Пока мы работали в бозонном секторе без спиновых операторов, мы рассматривали только вершины с четным числом ψ_μ, или, другими словами, мы проектировали на сектор, четный относительно $\psi_\mu \to -\psi_\mu$. Это, очевидно, самосогласованная проекция, исключающая тахион с вершиной $:p_\mu \psi_\mu e^{ipx}:$. Каково ее действительное происхождение?

Обсудим сперва, как выполнить эту проекцию на языке континуальных интегралов. Если интересоваться статистической суммой

$$Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta H_{\mathrm{NS}}} = Z^F \cdot Z^B = \int \mathcal{D}\psi \, \exp\left(-\psi \partial\!\!\!/ \psi \, d\sigma \, d\tau\right) \cdot Z^B \tag{9.434}$$

(где H_{NS} — гамильтониан Неве–Шварца), то интеграл в (9.434) должен быть определен на торе с периодом по времени β и пространственным периодом 2π. Обычные граничные условия будут антипериодическими в обоих направлениях; мы уже объяснили, что пространственная антипериодичность подразумевает рассмотрение NS-возбуждений, тогда как временная отвечает статистической сумме фермионов. Мы можем записать символически

$$Z^F = \qquad \overset{-}{} \qquad . \tag{9.435}$$

Рассмотрим теперь проекцию. Легко проверить, что периодические по времени граничные условия равнозначны взятию следа $\operatorname{Tr}(-1)^F \exp(-\beta H)$, где F — оператор числа фермионов. Следовательно, проекция на четные F отвечает сумме

$$Z = \qquad \overset{+}{} + \qquad \overset{-}{} \qquad . \tag{9.436}$$

Добавляя рамоновский сектор, мы приходим к простому правилу. Чтобы описать модель NSR с проекцией, нужно просуммировать по всем возможным спиновым структурам. Это дает суперсимметричную теорию струн. По-видимому, для поверхностей высшего рода рецепт должен быть тот же.

У нас нет хорошего вывода этого рецепта. Однако ему можно дать некоторое объяснение. Покажем, что только при этом предписании систему можно рассматривать на основе спиновых операторов. Для этого рассмотрим модель Изинга на поверхности высшего рода. Мы знаем, что обычно (на сфере) эту модель можно заменить свободными фермионами. Так ли это на поверхностях высших родов? При фермионизации изинговских спинов существенную роль играет дуальность Крамерса–Ваннье (см. следующую главу). Фермионные пути, по существу, являются границами капель, содержащих перевернутые спины. Однако, если поверхность гомологически нетривиальна, существуют замкнутые пути, которые ничего не ограничивают. Мы должны обеспечить, чтобы фермионные траектории, соответствующие этим путям, не давали вклада. Суммирование по всем спиновым структурам как раз и есть тот способ, которым этого можно добиться, поскольку тогда вдоль каждого гомологически нетривиального пути вклады от противоположных спиновых структур взаимно сокращаются.

Мы заключаем, что глобальное существование спиновых операторов требует суммирования по спиновым структурам. Пространственно-временную суперсимметрию тоже должно быть возможно объяснить на этом языке, однако до сих пор не ясно, как это сделать.

Глава 10
Попытка синтеза

Как использовать теорию струн? Какова ее связь с физическими проблемами, описанными в других главах? Окончательного ответа на эти вопросы нет. В этой главе я объясню, почему я верю, что струнные теории важны и, возможно, дают нам ключ к решению самых фундаментальных проблем.

В центре нашего внимания будет три группы вопросов. Мы начнем с проекта великого объединения на основе струн, затем опишем трехмерную модель Изинга и закончим четырехмерной хромодинамикой.

10.1. Длинноволновые колебания струн в критической размерности

В предыдущей главе мы видели, что спектр струнных теорий в критической размерности содержит безмассовые частицы спина 2 (и их суперпартнеры для суперструн). Поскольку единственным самосогласованным взаимодействием таких частиц является гравитация, эти теории должны содержать в себе теорию гравитации. Таким образом, эти теории с необходимостью дают в низкоэнергетическом пределе эйнштейновскую теорию. С другой стороны, при высоких энергиях эти теории будут иметь хорошее регулярное поведение, так как струны — протяженные объекты.

Основное предположение струнных теорий великого объединения состоит в том, что весь наш низкоэнергетический мир, включая супергравитоны, калибровочные поля и поля материи, возникает из безмассовых возбуждений струны. Все массивные моды струн предполагаются очень тяжелыми (порядка планковской массы) и, вследствие этого, практически ненаблюдаемыми.

Объясним теперь, как можно использовать эту идею.

Прежде всего, когда и почему в теории струн возникают безмассовые возбуждения? Чтобы найти частичный ответ на этот вопрос, напомним, что обычная струна описывается действием

$$S = \int g^{1/2} g^{ab} \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}\, d^2\xi, \qquad (10.1)$$

которое получается из действия Намбу

$$S = \int (\det(\partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}))^{1/2}\, d^2\xi = \\ = \int \{g^{1/2} + \lambda^{ab}(\partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x} - g_{ab})\}\, d^2\xi \tag{10.2}$$

в предположении конденсации множителя Лагранжа λ^{ab}:

$$\langle \lambda^{ab} \rangle = \mathrm{const}\, g^{1/2} g^{ab}. \tag{10.3}$$

Следовательно, в фазе, описываемой (10.3), тензор g_{ab} в (10.1) нужно интерпретировать как индуцированную метрику $\partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x}$. Рассмотрим масштабное преобразование пространства-времени: $\boldsymbol{x} \to \lambda \boldsymbol{x}$. Оно эквивалентно вейлевскому преобразованию на мировом листе

$$g_{ab}(\xi) \to \lambda^2 g_{ab}(\xi). \tag{10.4}$$

В предыдущей главе мы показали, что если размерность D критическая ($D = 26$ в бозонном случае и $D = 10$ в фермионном), то лиувиллевская мода отщепляется, и теория становится вейлевски-инвариантной. Масштабная инвариантность в пространстве-времени требует безмассового дилатона в спектре струнной теории. Дилатон действительно присутствует в спектре критической струны. Вероятно, сходным образом можно объяснить и гравитон. После того как мы нашли все безмассовые моды, мы должны научиться вычислять их эффективное действие в низкоэнергетическом приближении. В принципе, поскольку мы знаем правила вычисления S-матрицы через средние от вершинных операторов, мы можем непосредственно перейти к низкоэнергетическому пределу в соответствующих формулах. Это прямой, но весьма громоздкий и мало что проясняющий путь. Есть интересная альтернатива, которую мы сейчас опишем. Рассмотрим теорию струн на искривленном пространственно-временном фоне:

$$S = \frac{1}{2} \int \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}(\xi)) g^{1/2} g^{ab}(\xi)\, \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu\, d^2\xi, \tag{10.5}$$

где $\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$ — некоторый фиксированный метрический тензор в D-мерном пространстве. Мы хотим показать, что условие конформной инвариантности для действия (10.5) дает уравнения для $\gamma_{\mu\nu}$ (и некоторых других полей), в точности совпадающие с теми, которые получаются из S-матрицы. Таким образом, проблема низкоэнергетического предела сводится к вычислению β-функции для действия (10.5), рассматриваемого как действие нелинейной σ-модели. Предположим сперва, что мировой лист плоский, $g_{ab} = \delta_{ab}$. Тогда действие

$$S = \frac{1}{2} \int \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}(\xi)) \delta^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \, d^2\xi \tag{10.6}$$

перенормируемо в следующем смысле. Предположим, что мы интегрируем по быстрым составляющим поля $\boldsymbol{x}$ с волновыми векторами между Λ и $\tilde{\Lambda}$. Как мы сейчас покажем, результат вновь будет действием вида (10.6), но с перенормированным метрическим тензором $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$. Таким образом, $\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$ играет ту же роль, что и константы связи в обычных теориях. В частности, нелинейные σ-модели, рассмотренные в начале книги, соответствуют специальному случаю, когда метрика $\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$ имеет постоянную кривизну (это условие воспроизводится при перенормировке). Константы связи, которые мы вводили раньше, суть ни что иное, как значения этой кривизны. Вычисление начинается, как обычно, с разложения поля на быструю часть $\boldsymbol{y}$ и медленную $\boldsymbol{x}_0$:

$$\boldsymbol{x}(\xi) = \boldsymbol{x}_0(\xi) + \boldsymbol{y}(\xi). \tag{10.7}$$

Подставляя (10.7) в (10.6), получаем

$$S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x}_0) + S_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}),$$

где $S_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})$ квадратично по $\boldsymbol{y}$. Линейные члены отсутствуют, так как они записываются в виде

$$S_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) = \int \boldsymbol{y} \frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{x}_0} \, d^2\xi, \tag{10.9}$$

где $\delta S / \delta \boldsymbol{x}_0$ содержит волновые векторы $\leqslant \tilde{\Lambda}$, в то время как волновые векторы $\boldsymbol{y}$ лежат в области между Λ и $\tilde{\Lambda}$. Следовательно, с нашей точностью интеграл (10.9) равен нулю. Что касается S_{II}, то оно имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{II}} = \int \Big\{ & \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_0(\xi)) \, \partial y^\mu \partial y^\nu + \\ & + \partial_\alpha \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_0) \, \partial_a x_0^\mu \, y^\alpha \partial_a y^\nu + \\ & + \frac{1}{4} \partial_\alpha \partial_\beta \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_0) \, \partial_a x_0^\mu \partial_a x_0^\nu \, y^\alpha y^\beta \Big\} \, d^2\xi. \end{aligned} \tag{10.10}$$

В принципе, нетрудно вычислить логарифмические поправки непосредственно из (10.10). Однако, поскольку ожидаемый ответ должен быть ковариантным в $\boldsymbol{x}$-пространстве, имеет смысл привести (10.10) к явно ковариантному виду. Опять-таки, можно действовать методом «грубой силы», однако полезнее предварительно несколько изменить обозначения. Заметим сперва, что мы можем ввести свертку

$$(\boldsymbol{A}, B) = \int d^2\xi\, \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}(\xi)) A^\mu(\boldsymbol{x}(\xi)) B^\nu(\boldsymbol{x}(\xi)). \tag{10.11}$$

Ее вариация при $\boldsymbol{x}(\xi) \to \boldsymbol{x}(\xi) + \boldsymbol{y}(\xi)$ дается выражением

$$\delta(\boldsymbol{A}, B) = (\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{A}, B) + (\boldsymbol{A}, \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{B}), \tag{10.12}$$

где мы ввели ковариантную производную в направлении $\boldsymbol{y}$:

$$(\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{A})^\mu = y^\lambda \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} A^\rho \right) + \partial_a y^\lambda \frac{\partial A^\mu}{\partial\, \partial_a x^\lambda} + \dots . \tag{10.13}$$

Используя эти обозначения, вычислим сперва первую вариацию S_{I} действия S:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &= (\boldsymbol{v}_a, \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{v}_a), \\ v_a^\mu &= \partial_a x^\mu. \end{aligned} \tag{10.14}$$

В силу симметричности $\Gamma^\mu_{\lambda\rho}$ (или отсутствия кручения) имеем

$$(\nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{v}_a)^\mu = (\nabla_a \boldsymbol{y})^\mu = \partial_a y^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \partial_a x^\lambda\, y^\rho. \tag{10.15}$$

Варьируя еще раз, находим

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{II}} &= \delta(\boldsymbol{v}_a, \nabla_a \boldsymbol{y}) = \\ &= (\nabla_a \boldsymbol{y}, \nabla_a \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{v}_a, \nabla_{\boldsymbol{y}} \nabla_a \boldsymbol{y}) = \\ &= (\nabla_a \boldsymbol{y}, \nabla_a \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{v}_a, [\nabla_{\boldsymbol{y}}, \nabla_a] \boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

где мы положили равным нулю $\nabla_a \boldsymbol{v}_a$ в силу классических уравнений движения. Коммутатор двух ковариантных производных есть по определению тензор кривизны R:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}_a, [\nabla_{\boldsymbol{y}}, \nabla_a] \boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{v}_a, R(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_a) \boldsymbol{y}) = \\ &= \int R_{[\alpha\lambda],[\beta\sigma]} y^\alpha \partial_a x^\lambda\, y^\beta \partial_a x^\sigma\, d^2\xi. \end{aligned} \tag{10.16}$$

Возвращаясь к обычным обозначениям, находим

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{II}} = \int \frac{1}{2} (\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_0(\xi)) \nabla_a y^\mu \nabla_b y^\nu &+ \\ + R_{\alpha\mu\beta\nu}(\boldsymbol{x}_0(\xi)) y^\alpha y^\beta \partial_a x_0^\mu \partial_b x_0^\nu) g^{ab} g^{1/2}\, d^2\xi&, \\ \nabla_a y^\mu = \partial_a y^\mu + (\omega_a)^\mu_\nu y^\nu&, \\ (\omega_a)^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \partial_a x_0^\lambda& \end{aligned} \tag{10.17}$$

(мы вновь ввели опущенный метрический тензор на мировом листе).

Заметим, что если $\gamma_{\mu\nu}$ описывает сферу, (10.17) в точности совпадает с действием $\boldsymbol{n}$-поля (2.46).

Теперь не представляет труда вычислить зависимость однопетлевой статистической суммы от обрезания. Прежде всего, логарифмическая поправка к эффективному действию возникает от второго члена в (10.17):

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(1)} &= \int \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\nu}(\boldsymbol{x}_0(\xi))\partial_a x_0^{\mu} \partial_b x_0^{\nu} g^{1/2} g^{ab} \langle y^{\alpha} y^{\beta}\rangle \, d^2\xi = \\ &= \int \frac{1}{2} R_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}_0(\xi))\partial_a x_0^{\mu} \partial_b x_0^{\nu} \, g^{1/2} g^{ab} \, d^2\xi \int_{\tilde{\Lambda}}^{\Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 k^2}. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Это значит, что $\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$ перенормируется:

$$\delta\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}} \cdot R_{\mu\nu}[\gamma]. \tag{10.19}$$

Если бы мировой лист был плоским, других однопетлевых поправок не было бы. Контрчлены, зависящие от ω_a, не возникали бы, поскольку они могут появиться только в комбинации

$$\phi_{ab}^2 = (\partial_a \omega_b - \partial_b \omega_a + [\omega_a, \omega_b])^2,$$

которая имеет размерность 4.

Однако в случае искривленного мирового листа, как заметили Фрадкин и Цейтлин, имеется другой тип контрчленов, которые следует учесть. Ясно, что имеется объект размерности 2, построенный из поля g_{ab} — кривизна мирового листа $R(\xi)$. Таким образом, мы можем ожидать появления контрчленов, которые не зависят от производных $\boldsymbol{x}$ и имеют вид

$$\tilde{S} = \int \phi(\boldsymbol{x}(\xi)) R(\xi) g^{1/2} \, d^2\xi. \tag{10.20}$$

Этот вид логарифмической расходимости появляется уже в плоском пространстве $\gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, поскольку детерминант оператора Лапласа содержит член

$$\operatorname{Tr}\log\Delta \sim \log\Delta \int R g^{1/2} \, d^2\xi. \tag{10.21}$$

При включении $\gamma_{\mu\nu}$ коэффициент в (10.21) модифицируется. Поправки появляются на двухпетлевом уровне и для их вычисления нужно найти следующие члены разложения действия (10.17).

Чтобы представить себе, что при этом получится, взглянем на один из членов четвертого порядка:

$$S_{\mathrm{IV}} \sim \int g^{1/2} g^{ab} R_{\alpha\mu\beta\nu}(\boldsymbol{x}_0(\xi)) y^\alpha y^\beta \partial_a y^\mu \partial_b y^\nu \, d^2\xi. \tag{10.22}$$

Усредняя его по $\boldsymbol{y}$ и используя формулы

$$\begin{gathered}\langle y^\alpha y^\beta \rangle = \gamma^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_0(\xi)) \left(\frac{1}{2\pi} \log \Lambda + \text{конечная часть} \right), \\ \langle \partial_a y^\alpha \partial_a y^\beta \rangle = \gamma^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_0(\xi)) [k_1 \Lambda^2 + k_2 e^{-\varphi} \partial^2 \varphi(\xi)] \\ (g_{ab} = e^\varphi \delta_{ab}),\end{gathered} \tag{10.23}$$

мы получаем логарифмически расходящийся член в эффективном действии

$$W \sim \log \Lambda \int R(\boldsymbol{x}_0(\xi)) (g(\xi))^{1/2} \, d^2\xi. \tag{10.24}$$

Квадратичная расходимость перенормирует космологическую постояннуюбезмассовый сектор.

В результате этих вычислений мы получаем уравнение ренормгруппы для поля ϕ. Мы обязаны добавить это уравнение к (10.19), поскольку, как мы показали, член (10.20) необходим для перенормируемости модели. В низшем порядке имеем (при $D = 26$)

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}} (R_{\mu\nu}[\gamma] + c \nabla_\mu \nabla_\nu \phi), \\ \delta\phi &= (c_1 R(\boldsymbol{x}) + c_2 (\nabla_\alpha \phi(\boldsymbol{x}))^2 + c_3 \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x})) \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}}.\end{aligned} \tag{10.25}$$

Члены, зависящие от ϕ, имеют простое происхождение: разлагая (10.20) по $\boldsymbol{y}$, получаем

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{II}} = &\int \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi(\boldsymbol{x}_0(\xi))) R(\xi) y^\alpha y^\beta g^{1/2} \, d^2\xi + \\ &+ \int (\nabla_\alpha \phi(\boldsymbol{x}_0(\xi))) R(\xi) y^\alpha(\xi) g^{1/2} \, d^2\xi.\end{aligned} \tag{10.26}$$

Используя (10.23) и учитывая второе слагаемое во втором порядке, мы получаем структуру (10.25).

Все коэффициенты легко вычисляются, после чего уравнения ренормгруппы принимают вид

$$\begin{aligned} \dot\gamma_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial\log\Lambda} = -\frac{1}{2\pi}R_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi, \\ \dot\phi &= (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4\pi}\nabla^2\phi - \frac{1}{16\pi^2}R(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{10.27}$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot\gamma_{\mu\nu} &= 8\pi e^{8\pi\phi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma^{\mu\nu}}, \\ \dot\phi &= \frac{1}{8\pi}e^{8\pi\phi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}, \\ \Gamma &= \int e^{-8\pi\phi}\left[\frac{1}{4\pi}\nabla^2\phi - (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{16\pi^2}R(\gamma)\right]\gamma^{1/2}\, d^{26}\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Замечательный факт, который мы сейчас хотим обсудить, состоит в том, что эффективное действие Γ в точности совпадает с действием безмассовых частиц, которое получается в низкоэнергетическом пределе из S-матрицы струны. Более того, если перейти к высшим членам в β-функциях, то они будут соответствовать следующим членам низкоэнергетического разложения.

Чтобы прояснить эту удивительную связь между свойствами мирового листа струны и пространства-времени, в которое он вложен, рассмотрим эту проблему несколько иначе.

Пусть у нас есть струна, на мировом листе которой «живет» некоторая конформная теория поля. Предположим также, что в наборе всех операторов этой конформной теории имеются операторы $u_n(\xi)$ размерности 2. Если после добавления вкладов координат струны, ду́хов и других конформных полей теория имеет нулевой полный центральный заряд, то вершинные операторы вида

$$V_{\boldsymbol{p}}^{(n)} = u_n(\xi)e^{\mathrm{i}\boldsymbol{px}(\xi)} \tag{10.29}$$

описывают безмассовые скалярные частицы. Мы намерены продемонстрировать, что эффективное действие этих частиц связано с β-функциями.

Рассмотрим возмущенный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \sum_n \lambda_n u_n(\xi). \tag{10.30}$$

Предполагается, что операторы u_n удовлетворяют операторным разложениям

$$u_n(\xi)u_m(0) = \frac{\delta_{nm}}{|\xi|^4}I + \frac{1}{|\xi|^2}f_{nml}u_l(0) + \text{менее сингулярные члены,} \tag{10.31}$$

где f_{nml} — симметричные структурные константы операторной алгебры, которые определяют нормировку трехточечных функций

$$\langle u_n(\xi_1)u_m(\xi_2)u_l(\xi_3)\rangle = \frac{f_{nml}}{|\xi_1-\xi_2|^2|\xi_2-\xi_3|^2|\xi_3-\xi_1|^2}. \tag{10.32}$$

Изучим теперь ряд теорий возмущений для статистической суммы

$$Z = \left\langle \exp\int\sum_n \lambda_n u_n(\xi)\, d^2\xi \right\rangle. \tag{10.33}$$

Разлагая это выражение по λ, мы получим различные произведения операторов u_n, проинтегрированные по ξ-пространству. Эти интегралы расходятся из-за сингулярностей в разложении (10.31). Следовательно, нужно ввести обрезание. Ренормгруппа указывает нам, как должны меняться λ_n при заданном изменении обрезания, так чтобы величина Z оставалась прежней. Чтобы найти уравнения ренормгруппы, прежде всего следует выбросить все квадратичные расходимости, происходящие из первого члена в (10.31). Формальное оправдание этого шага заключается в том, что эти расходимости отсутствуют при использовании схемы размерной регуляризации. Истинная же причина состоит в том, что эти расходимости целиком связаны с малыми расстояниями и, меняя Z, не дают вклада ни в какую связную функцию Грина. В отличие от них, логарифмические расходимости, происходящие из второго члена в (10.31), физически существенны, и мы их сейчас проанализируем. Рассмотрим N-ый член в разложении Z:

$$Z^{(N)} = \int d^2\xi_1 \dots d^2\xi_N \, \langle u_{n_1}(\xi_1)\dots u_{n_N}(\xi_N)\rangle \lambda_{n_1}\dots\lambda_{n_N}. \tag{10.34}$$

В пределе, скажем, $\xi_1 \to \xi_2$ этот интеграл расходится. Используя (10.31), находим

$$\begin{aligned} Z^{(N)} \sim\ & f_{n_1 n_2 m}\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}\dots\lambda_{n_N}\, 2\pi \log\frac{1}{a} \times \\ & \times \int d^2\xi_2 \dots d^2\xi_N \, \langle u_m(\xi_2)u_{n_3}(\xi_3)\dots u_{n_N}(\xi_N)\rangle + \\ & + \text{конечные члены,} \end{aligned} \tag{10.35}$$

где $a \sim \Lambda^{-1}$ — ультрафиолетовое обрезание. Из (10.35) мы выводим, что изменение a ($a \to \tilde{a}$) может быть компенсировано изменением λ_n:

$$\lambda_n \to \tilde{\lambda}_n = \lambda_n + f_{nml}\lambda_m\lambda_l \cdot 2\pi \log \frac{\tilde{a}}{a}. \tag{10.36}$$

Другими словами, мы вычислили (приближенно), как λ_n должны зависеть от a, чтобы Z от a не зависело. Ответ можно переписать в виде уравнения Гелл-Манна–Лоу:

$$\frac{d\lambda_n}{d(2\pi \log(1/a))} = \beta_n(\lambda) = -f_{nml}\lambda_m\lambda_l + O(\lambda^3). \tag{10.37}$$

Из этой формулы видно, что β-функция выражается через структурные константы операторной алгебры. В высших порядках по λ нам понадобятся структурные константы операторных произведений, содержащих несколько операторов u_n.

Теперь вернемся к теории струн. Амплитуды рассеяния в критической размерности строятся из простых вершинных операторов. Если некоторые струнные резонансы описываются оператором $V_{\boldsymbol{p}}(\xi)$, где $\boldsymbol{p}$ — импульс, то на массовой поверхности этот оператор имеет размерность 2, и амплитуда рассеяния дается интегралом

$$A(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_N) = \int d^2\xi_1 \dots d^2\xi_N \, \langle V_{\boldsymbol{p}_1}(\xi_1) \dots V_{\boldsymbol{p}_N}(\xi_N) \rangle. \tag{10.38}$$

Это выражение выглядит почти так же, как (10.34). Основное отличие состоит в том, что сингулярности на малых расстояниях, управляемые операторным разложением, проявляются в виде полюсов, а не логарифмических расходимостей. Вычеты в этих полюсах являются в точности теми же структурными константами, которые определяют β -функции. Рассмотрим эффективное действие $\Gamma(\phi_1, \dots, \phi_n)$ этих безмассовых частиц, где ϕ_k — соответствующие им поля в пространстве-времени. Предположим, что поля $\{\phi_k\}$ не зависят от координат, так что частицы несут нулевой импульс. Разложение Γ по полям ϕ начинается с кубического члена (поскольку квадратичные массовые члены равны нулю):

$$\begin{aligned} -\Gamma(\{\phi\}) &\simeq \phi_n\phi_m\phi_l \langle V_0^{(n)}(0) V_0^{(m)}(1) V_0^{(l)}(\infty)\rangle + \dots = \\ &= f_{nml}\phi_n\phi_m\phi_l + \mathrm{O}(\phi^4). \end{aligned} \tag{10.39}$$

При выводе этой формулы мы вспомнили, что в интегралах Кобы–Нильсена три интеграла всегда поглощаются при выделении объема группы $SL(2, \mathbf{C})$. Таким образом, в трехточечных амплитудах интегрирование вовсе отсутствует. Из (10.39) мы видим, что в этом порядке β-функция связана с эффективным действием[1]

$$\beta_n(\phi) = \frac{\partial\Gamma}{\partial\phi_n},$$

и, следовательно, условие экстремальности $\partial\Gamma/\partial\phi_n = 0$ совпадает с условием конформной инвариантности $\beta_n(\phi) = 0$.

Что происходит в следующем порядке? Эффективное действие имеет вид

$$-\Gamma(\{\phi\}) = f_{nml}\phi_n\phi_m\phi_l + \\ + \phi_n\phi_m\phi_l\phi_k \left\{ \text{f.p.} \int d^2\xi \, \langle u_n(0)u_m(1)u_l(\infty)u_k(\xi)\rangle \right\} + O(\phi^5), \tag{10.40}$$

где символ f.p. обозначает конечную часть логарифмически расходящегося интеграла. Почему ее следует выделять? Дело в том, что четырехточечная функция содержит полюсной член (который приводит к логарифмической расходимости в (10.40)) и контактный член, возникающий за счет обмена массивными состояниями. В эффективном действии полюсной член должен быть, по определению, опущен (и появиться снова при решении уравнений движения). Так мы получаем (10.40) и аналогичные формулы во всех порядках по ϕ .

В четвертом порядке нетрудно проверить, что условие конформной инвариантности $\beta_n = 0$ вновь совпадает с уравнениями движения $\partial\Gamma/\partial\phi_n = 0$. Кажется вполне вероятным, что это справедливо во всех порядках. Действительно, β-функция определяется как коэффициент перед первой степенью логарифма в разложении перенормированных ϕ_n . Как видно из предыдущего обсуждения, перенормировка в N-ом порядке получается путем замены N операторов $u(\xi)$ в (10.34) одним с помощью операторной алгебры

$$u_{n_1}(\xi_1)\dots u_{n_N}(0) \underset{\xi_k\to 0}{\approx} C^m_{n_1\dots n_N}(\xi_1,\dots,\xi_{N-1})u_m(0). \tag{10.41}$$

Перенормировка ϕ^m дается интегралом

$$\delta\phi^m = \int d^2\xi_1\dots d^2\xi_{N-1}C^m_{n_1\dots n_N}(\xi_1,\dots,\xi_{N-1})\phi^{n_1}\dots\phi^{n_N}. \tag{10.42}$$

[1] Дальнейшие соображения возникли при обсуждении с А. Б. Замолодчиковым и используют его результаты.

Он содержит многократные логарифмические расходимости, возникающие вследствие того, что слияние любых двух ξ_a и ξ_b порождает множитель $|\xi_{ab}|^{-2}$. Если вычесть все эти члены, единственная расходимость будет возникать при интегрировании по общему масштабу. Эта расходимость и описывается β-функцией (в размерной регуляризации мы должны исключить из (10.42) полюс первого порядка). Теперь сравним это выражение с $\partial\Gamma/\partial\phi^m$:

$$-\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi^m} = \sum \phi^{n_1}\ldots\phi^{n_N}\ \text{f.p.}\int |R|^4\langle u_m(R)u_{n_1}(1)u_{n_2}(0)\times \\ \times u_{n_3}(\xi_3)\ldots u_{n_N}(\xi_N)\rangle\, d^2\xi_3\ldots d^2\xi_N\Big|_{R\to\infty}. \tag{10.43}$$

В этом интеграле мы можем для начала положить все $|\xi_j| \ll R$. Тогда можно применить операторное разложение (10.41):

$$\int\langle u_m(R)u_{n_1}(0)\ldots u_{n_N}(\xi_N)\rangle\, d^2\xi_3\ldots d^2\xi_N \simeq \\ \simeq \int C^l_{n_1\ldots n_N}(1,0,\xi_3,\ldots,\xi_N)\, d^2\xi_3\ldots d^2\xi_N\langle u_m(R)u_l(0)\rangle_{\text{eff}}. \tag{10.44}$$

Первый множитель в правой части этой формулы в точности равен коэффициенту при первой степени логарифма в (10.42), то есть β-функции. Второй множитель был бы пропорционален δ_{ml}, если бы не вклад от $\xi_j \sim R$ в (10.44). Этот вклад приводит к соотношению

$$\langle u_m(R)u_l(0)\rangle_{\text{eff}} = \frac{1}{|R|^4}\Big\{g_{ml}(\phi) + A_{ml}(\phi)\log\frac{|R|}{a} + \ldots\Big\}. \tag{10.45}$$

Выделяя конечную часть, получаем желаемое соотношение

$$\frac{\partial\Gamma(\phi)}{\partial\phi^m} = g_{ml}(\phi)\beta^l(\phi), \tag{10.46}$$

из которого следует, что уравнения движения эквивалентны условиям конформной инвариантности. Мы не привели здесь законченного доказательства этих формул (поскольку оно никогда не было закончено), но кажется, что его не очень трудно получить, следуя намеченной выше линии рассуждений.

Эти результаты имеют простой и наглядный смысл. Они означают, что если конформная теория поля, которая «живет» на мировом листе, неустойчива относительно возмущений, то соответствующая теория струн неустойчива по отношению к конденсации полей, соответствующих этим возмущениям. Если двумерная теория стремится к некоторой фиксированной точке, определяемой уравнениями $\beta^n(\phi) = 0$, исходная теория струн стремится (после конденсации полей) к новой теории струн со спектром, который определяется размерностями операторов в фиксированной точке. Устойчивость в смысле ренормгруппы оказывается устойчивостью в смысле спектра масс. В частности, массовая матрица, даваемая, согласно (10.46), вторыми производными Г, совпадает с матрицей аномальных размерностей, которая дается, как и должно быть, производными β.

Единственный вопрос, который нам осталось решить — это вопрос о центральном заряде получающейся теории.

Для исследования этой проблемы введем оператор следа тензора энергии-импульса $S(\xi)$ и рассмотрим парную корреляционную функцию в импульсном пространстве $\langle S(k)S(-k)\rangle$. Она определяет отклик системы на слабое внешнее гравитационное поле в конформной калибровке. В чисто конформной теории этот отклик дается действием Лиувилля, тогда как в перенормируемой теории поля мы имеем

$$\langle S(k)S(-k)\rangle = C(\phi^1(k), \dots, \phi^n(k))k^2 \equiv C(k)k^2, \tag{10.47}$$

где мы ввели бегущие (вдоль траектории ренормгруппы) константы связи. С другой стороны, так как изменение обрезания связано с $S(\xi)$ и, благодаря перенормируемости, это изменение можно компенсировать изменением констант связи, имеем известное тождество

$$S(\xi) = \sum_m \frac{\partial \phi^m}{\partial \log \Lambda} u_m = \sum_m 2\pi \beta^m(\phi) u_m. \tag{10.48}$$

Если мы вспомним, что

$$\begin{aligned} \langle u_m(0)u_n(R)\rangle &= \frac{g_{nm}(\phi)}{|R|^4} + \dots, \\ \langle u_m(k)u_n(-k)\rangle &= g_{mn}(\phi)\frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{|k|}{\Lambda}\right)k^2 + \dots, \end{aligned} \tag{10.49}$$

то найдем, что член в $C(k)$, пропорциональный первой степени логарифма, имеет вид

$$C(k^2) \simeq c - g_{mn}(\phi)\beta^m(\phi)\beta^n(\phi)\, 2\pi \log\frac{\Lambda}{|k|}. \tag{10.50}$$

С другой стороны, из (10.47) следует:

$$
\begin{aligned}
C(k^2) &= C(\phi^1(k), \dots, \phi^n(k)) \simeq \\
&\simeq C\left(\phi^1 - 2\pi\beta^1(\phi)\log\frac{\Lambda}{|k|}, \dots\right) \simeq \\
&\simeq C(\phi) - \beta^j\frac{\partial C}{\partial\phi^j}\,2\pi\log\frac{\Lambda}{|k|}.
\end{aligned}
\tag{10.51}
$$

В итоге получаем

$$
\beta^n(\phi)\cdot\left(\frac{\partial C}{\partial\phi^n} - \frac{\partial\Gamma}{\partial\phi^n}\right) = 0.
\tag{10.52}
$$

Из этого уравнения следует, что вдоль траекторий ренормгруппы

$$
C(k^2) = c + \Gamma(\phi^1(k), \dots, \phi^N(k)).
\tag{10.53}
$$

Из этой формулы видно, что если возмущение переводит систему в новую фиксированную точку, то центральный заряд $C(k^2)$ стремится к некоторому новому постоянному значению. Кроме того, поскольку система релаксирует в направлении уменьшения эффективного действия Γ, этот новый центральный заряд будет меньше исходного (теорема Замолодчикова). Ситуация довольно забавная. Предположим, что мы начали с теории струн в критической размерности. Предположим также, что имеются безмассовые моды, которые конденсируются, приводя к новой теории струн. Мы видим, что в общем случае эта новая теория будет иметь некритический центральный заряд. Следовательно, поле Лиувилля, отсутствовавшее в исходной теории, должно каким-то образом появиться. Единственным исключением из этого правила является случай, когда все β-функции тождественно равны нулю.

Кстати, что плохого в том, чтобы формально рассматривать дуальные амплитуды для некритического центрального заряда без лиувиллевской моды? На древесном уровне все будет в порядке (при условии, что C меньше критического значения, так как в противном случае появятся духи). Однако при рассмотрении унитарных поправок к амплитудам, т. е. высших топологий, нам встретятся нефизические особенности в импульсном пространстве.

Таким образом, мы проследили связь между β-функциями и эффективным действием для безмассовых мод струн. Применяя эти выводы к модели с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ и дилатоном $\phi(\boldsymbol{x})$, мы видим, что низкоэнергетическое разложение элементов S-матрицы можно получить разложением β-функций по петлям. Более того, мы видели, что суммарный центральный заряд (материи и духов) дается выражением

$$C_{\text{tot}} = D - 26 + \Gamma(\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})),$$
$$S = \int \Gamma(\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x}))(\det\gamma)^{1/2}\, d^D\boldsymbol{x}$$

(где S — действие, которое порождает S-матрицу) и, согласно предыдущим формулам, поля, минимизирующие S, обладают свойством

$$\Gamma(\gamma_{\mu}^{\text{cl}}(\boldsymbol{x}), \phi^{rmcl}(\boldsymbol{x})) = \text{const} \leqslant 0.$$

Объясним теперь происхождение этих результатов качественно. Мы рассматривали струну во внешних полях и затем минимизировали ее эффективное действие. Эта процедура кажется весьма странной. Ее истинный смысл состоит в следующем. Струна содержит взаимодействующие безмассовые моды. Предположим, что они стремятся образовать ненулевые конденсаты. Тогда случайная мировая поверхность может выглядеть как что-то вроде сферы, из которой растут ветвящиеся полимеры, состоящие из пропагаторов этих безмассовых мод. На самом деле, мы занимались тем, что приписывали каждому такому «растению» некоторую амплитуду и определяли ее самосогласованным образом. Можно сказать, что струна плавает в собственном конденсате. В принципе, имеются поправки к эффективному действию, происходящие из высших топологий мирового листа. Их структура к настоящему моменту не исследована.

10.2. Возможные приложения критических струн

Уникальная особенность критических струн состоит в том, что они описывают гравитоны. Обсудим возможные пути использования этого факта. Прежде всего, теория бозонных струн, которую мы обсуждали в предыдущем разделе, не является полностью самосогласованной, поскольку содержит тахион. Этот недостаток отсутствует в случае фермионных струн, после суммирования по спиновым структурам на мировом листе (означающего, как мы показали в предыдущей главе, что мы включаем в спектр пространственно-временные фермионы). Согласно идее Шерка и Шварца, десятимерные ферми-струны могут описывать наш мир, если мы каким-то образом компактифицируем шесть из десяти измерений.

В этом разделе мы кратко опишем возникающую картину мира.

Начнем с $D = 10$ струны Неве–Шварца–Рамона. Как мы уже знаем, она не содержит тахиона и ее основные состояния безмассовые.

Они содержат гравитон, дилатон, антисимметричное тензорное поле и их суперпартнеры (строящиеся из спиновых операторов). Предположим теперь, что гравитоны конденсируются таким образом, что вакуумное ожидание метрики $\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &\langle \gamma_{mn}(\boldsymbol{x}) \rangle = \delta_{mn}, && m, n = 1, \ldots, 4, \\ &\langle \gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) \rangle = G_{\mu\nu}(x^5, \ldots, x^{10}), && \mu, \nu = 5, \ldots, 10, \end{aligned}$$

где $G_{\mu\nu}$ определяются динамикой. Геометрически эта формула означает, что десятимерное пространство имеет структуру $M^4 \times K^6$, где M^4 — евклидово пространство, а K^6 — некоторое искривленное и, предположительно, компактное многообразие. В настоящий момент мы не знаем, какова была причина этой конденсации, и, в частности, что или кто зафиксировал для нашего пространства значение $D = 4$. Но при условии, что это произошло, мы легко можем вывести условия самосогласованности для $G_{\mu\nu}$. Изменим слегка наши обозначения и заменим x^m, $m = 5, \ldots, 10$, на y^m, $m = 1, \ldots, 6$, считая что теперь $\mu, \nu = 1, \ldots, 4$. Действие струны принимает вид

$$\begin{aligned} S = \int g^{1/2} [& g^{ab} (\partial_a x^\mu \partial_b x^\mu + G_{mn}(\boldsymbol{y}) \partial_a y^m \partial_b y^n) + \\ & + \varepsilon^{ab} B_{mn}(\boldsymbol{y}) \partial_a y^m \partial_b y^n] \, d^2\xi + \text{фермионная часть}. \end{aligned}$$

В этой формуле мы добавили антисимметричное тензорное поле B_{mn}, забытое нами раньше. В принципе, его нужно учитывать при вычислении β-функций. Однако вследствие сохранения четности B-моды можно исключить из теории на древесном уровне, поэтому наши вычисления были правильными. В другом варианте теории струн их можно включить в рассмотрение. Легко понять, что эти две возможности соответствуют выбору: включать в рассмотрение неориентируемые поверхности или нет. В первом случае мы исключаем B-моды, поскольку они взаимодействуют через тензор ε^{ab}, который на неориентируемой поверхности не определен.

Первый вопрос, который следует поставить: при каких условиях это действие, среди прочего, описывает четырехмерную гравитацию? Как мы видели выше, эти условия могут быть получены из требования, что такая теория должна быть конформно-инвариантной с равным нулю центральным зарядом. Прежде всего, это означает, что σ -модель, ассоциированная с y-пространством, должна быть конформно-инвариантной, т. е. обладать нулевой β-функцией. Это дает уравнение на метрику компактного пространства K и поле B на нем. Когда характерный размер K больше струнного параметра M^{-1}, мы можем использовать низкоэнергетическое разложение, которое, по-существу, дает уравнения Эйнштейна для $G_{mn}(\boldsymbol{y})$.

Если настаивать на том, что мы начали с десятимерной струны, то для того, чтобы сохранить центральный заряд неизменным, эффективное действие не должно меняться вдоль траекторий ренормгруппы, или, другими словами, должна существовать последовательность метрик $G_{mn}(\boldsymbol{y})$, связывающих плоское $\boldsymbol{y}$-пространство с пространством K, такая, что на ней β-функция равна нулю. Для доказательства необходимости этого условия достаточно заметить, что, согласно (10.52),

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial(2\pi\log\Lambda)} = -\beta^n(\phi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi^n} = -g_{nm}(\phi)\beta^n\beta^m \leqslant 0.$$

Таким образом, если $\beta^n \neq 0$ вдоль траекторий, но система достигает фиксированной точки, то центральный заряд в этой фиксированной точке будет меньше исходного (теорема Замолодчикова).

Условию конформной инвариантности было бы невозможно удовлетворить без суперсимметрии, поскольку аргументы главы 2 показывают, что в любой компактной бозонной σ-модели в пределе сильной связи корреляционная длина должна быть конечна. При включении суперпартнеров вопрос становится более сложным, и ответ в общем случае не известен. Имеются, однако, соображения в пользу того, что если K — кэлерово риччи-плоское многообразие, то суперсимметричная σ-модель имеет нулевую β-функцию в рамках теории возмущений. Если это так, у нас есть точное решение струнных уравнений в древесном приближении и можно начать строить струнную теорию возмущений. В противном случае нужно либо надеяться на то, что струнные петлевые поправки исправят эффективное действие таким образом, что K случайно будет доставлять его минимум, либо искать какие-нибудь другие решения.

Здесь полезно заметить, что влияние компактифицированных измерений описывается конформной теорией поля на мировом листе, причем такой, что суммарный центральный заряд равен нулю. В принципе, не обязательно настаивать на том, что эта теория поля является σ-моделью шестимерного многообразия. Подойдет любая суперконформная теория, имеющая нужный центральный заряд, устойчивая и не нарушающая суперсимметрию на мировом листе (под устойчивостью мы понимаем отсутствие операторов размерности меньше 2, т. е. устойчивость в смысле ренормгруппы). Считать же все эти дополнительные поля, живущие на мировом листе, дополнительными размерностями или нет — на самом деле вопрос соглашения.

Свойств, которые мы перечислили, достаточно для согласованной четырехмерной теории гравитации с полями материи, включая фермионы. Кроме того, следует потребовать, чтобы в теории были киральные фермионы и поля Янга–Миллса. Один из путей получить поля Янга–Миллса — использовать старую идею Калуцы и Клейна о том, что K обладает дополнительной группой симметрии, описываемой деформациями Киллинга κ^m, сохраняющими метрический тензор Γ_{mn}. Векторы $\kappa^m(\boldsymbol{y})$ удовлетворяют уравнению

$$\nabla_m \kappa_n^{(A)} + \nabla_n \kappa_m^{(A)} = 0,$$

где A нумерует генераторы группы симметрии. В подходе Калуцы–Клейна векторные поля, по существу, являлись смешанными (m, μ) компонентами метрического тензора. В струнном контексте это соответствует вершинному оператору янг-миллсовской частицы

$$\Gamma_{p\mu}^{(A)} = \int d^2\xi\, g^{1/2} g^{ab}\, \partial_a x_\mu\, \partial_b y^m\, \kappa_m^A(\boldsymbol{y}(\xi)) e^{i\boldsymbol{px}(\xi)} + \text{фермионная часть.}$$

Можно показать, что вследствие условий Киллинга эти вершины описывают безмассовые векторы.

При попытке применить этой идеи к реальному миру мы встречаемся с двумя проблемами. Во-первых, минимальная группа симметрий должна быть $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, чтобы включать все известные взаимодействия. Такая группа может действовать только на многообразии достаточно большой размерности. Именно, мы должны иметь одно измерение для $U(1)$, два для $SU(2)$ (которая может действовать на двумерной сфере S^2) и четыре для $SU(3)$ (естественно действующей на $\mathbf{CP}^2$). Прибавляя 4 пространственно-временных измерения, мы получаем, что минимальное число измерений равно 11 (это число получено Виттеном) и превышает критическую размерность фермионной струны.

Возможным выходом из этого противоречия была бы σ-модель, β-функция которой имеет изолированный нуль. Тогда, как мы видели, центральный заряд в устойчивой точке был бы меньше числа y-измерений. Следовательно, можно начать и с $D > 10$ (возможно, выбор $D = 11$ — наилучший) и спуститься оттуда к $D = 4$. Пример изолированных нулей дает σ-модель Весса–Зумино, имеющая ненулевой B_{mn}-фон. Однако в этом случае трудно сохранить $D = 4$ суперсимметрию. Другим примером служат σ-модели с θ-членом при $\theta = \pi$, но они к настоящему моменту изучены плохо.

Другая проблема в подходе Калуцы–Клейна состоит в том, что трудно получить киральные фермионы (наблюдаемые в природе), поскольку, грубо говоря, поле $G_{mn}(\boldsymbol{y})$ имеет положительную зарядовую четность и не различает противоположные киральности. Возможно, здесь снова поможет B_{mn}, но никакого конкретного решения пока не найдено.

Другой подход к вопросу о векторных мезонах и киральных фермионах основан на гетеротическом варианте фермионной струны (разработанном Гроссом, Мартинеком, Харвеем и Ромом), который мы сейчас кратко опишем. Основная идея конструкции состоит в том, чтобы суперсимметрией обладали только левые частицы на мировом листе. Лагранжиан с таким свойством имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{1/2} g^{ab}\, \partial_a x_\mu\, \partial_b x_\mu + \psi_{\mu+} \partial_- \psi_{\mu+} + \chi_- \psi_{\mu+}\, \partial_+ x_\mu + \tilde{\mathcal{L}}_-.$$

Здесь $\psi_{\mu+}$ — левые суперпартнеры x_μ, χ_- — правое гравитино; член $\tilde{\mathcal{L}}_-$ мы обсудим чуть позже. Различие между гетеротическим лагранжианом и лагранжианом NSR состоит в том, что в последнем имеются также поля $\psi_{\mu-}$ и χ_+, так что он CP-симметричен. Основным свойством гетеротического лагранжиана является CP-асимметрия на мировом листе. Его можно формально получить из NSR-струны, положив $\chi_+ = \psi_{\mu-} = 0$.

Теперь, повторяя анализ предыдущей главы, мы найдем, что, вообще говоря, эта теория аномальна. Полагая $g_{ab} \sim \delta_{ab} + h_{ab}$, получаем, что эффективное действие для h_{ab} имеет вид

$$W \sim c_+ \frac{q_+^3}{q_-} h_{--}^2 + c_- \frac{q_-^3}{q_+} h_{++}^2 + \text{возможные локальные члены},$$

где c_+ и c_- — центральные заряды левого и правого секторов теории. В предыдущей главе мы видели, что если $c_+ = c_-$, то локальные члены можно подобрать так, чтобы действие было калибровочно-инвариантным. Но для $c_+ \neq c_-$ это невозможно. Следовательно, если мы хотим сохранить общую ковариантность, мы должны уравнять c_+ и c_-. Для этого вспомним, что у нас есть духи с $c_+^{\text{gh}} = -15$ для суперсимметричного сектора и с $c_-^{\text{gh}} = -26$ для бозонного. Следовательно,

$$\begin{aligned} c_+^{\text{tot}} &= \frac{3}{2} D - 15 + \tilde{c}_+, \\ c_-^{\text{tot}} &= D - 26 + \tilde{c}_-. \end{aligned}$$

Мы заключаем, что $\tilde{\mathcal{L}}_-$ должно описывать теорию поля на мировом листе с левой суперсимметрией и $\tilde{c}_- - \tilde{c}_+ = D/2 + 11$. Критическое значение $\tilde{c}_+$ равно $\tilde{c}_{+\,\text{cr}} = \dfrac{3}{2}(10 - D)$. Простейший вариант $D = 10$, $\tilde{c}_+ = 0$,

$\tilde{c}_- = 16$ получается добавлением на мировой лист 32 правых фермионов. Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{A=1}^{32} \chi_-^A \partial_+ \chi_-^A.$$

Векторные поля естественно описываются векторными вершинами

$$\Gamma_{p\mu}^{[AB]} = (i\partial_+ x_\mu + p_\nu \psi_{\mu+} \psi_{\nu+}) \chi_-^A \chi_-^B \, e^{\mathbf{i}\boldsymbol{px}}.$$

Правые токи $\chi_-^A \chi_-^B$ образуют алгебру токов группы $SO(32)$. В принципе, эту симметрию можно уменьшить, выбирая разные спинорные структуры для разных значений A. В этом случае невозможно будет построить сохраняющиеся заряды, интегрируя токи по струне. Однако свобода выбора сильно ограничена важным условием инвариантности относительно «больших» диффеоморфизмов или, что то же самое, относительно модулярной группы.

Давайте опишем эти большие диффеоморфизмы и покажем, что отсутствие инвариантности относительно них на мировом листе проявляется в виде гравитационной и калибровочной аномалий в пространстве-времени. Обратно, условие модулярной инвариантности эквивалентно условию сокращения этих аномалий.

В случае тора мы видели, что конформной калибровки можно достичь, если представить тор в виде параллелограмма, заданного векторами $\omega_1 = (1, 0)$ и $\omega_2 = (\operatorname{Re}\tau, \operatorname{Im}\tau)$, где τ — комплексный параметр. Интегрирование по всем метрикам сводилось к интегрированию по полю Лиувилля (отсутствующему в критической размерности) и интегралу по $d^2\tau$. Мера интегрирования как функция τ должна быть инвариантна относительно некоторой дискретной группы, которую мы сейчас опишем. Следовательно, чтобы избежать повторений, следует интегрировать только по фундаментальной области в τ -пространстве. Возьмем тор и разрежем его по окружности, превратив его в цилиндр. Затем повернем на угол 2π один край этого цилиндра относительно другого и переклеим обратно, вновь получив тор. Ясно, что этот диффеоморфизм тора не гомотопен тождественному. Например, большая окружность тора обернется один раз вокруг него после такого преобразования.

Если описывать тор параллелограммом (ω_1, ω_2), то две возможные операции даются заменами

$$(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_1, \omega_1 + \omega_2),$$
$$(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_1 + \omega_2, \omega_2).$$

Первое преобразование является просто сдвигом $\tau \to \tau + 1$. Чтобы получить действие второго преобразования, надо предварительно переставить образующие. Это дает: $1/\tau \to 1/\tau + 1$. Эти преобразования порождают модулярную группу. Эта группа состоит из преобразований

$$\tilde{\omega}_i = A_{ik}\omega_k, \quad i, k = 1, 2,$$

где $||A_{ik}||$ — матрица с целыми коэффициентами и $\det ||A_{ik}|| = 1$. Следовательно, мы имеем группу $SL(2, \mathbf{Z})$. Аналогичные рассуждения для произвольной топологии приводят к целочисленной симплектической группе, но она нам здесь не понадобится. Наша цель — показать, что отсутствие модулярной инвариантности на мировом листе должно привести к пространственно-временным аномалиям.

Основная идея состоит в том, чтобы проверить, что шпурионные состояния не распространяются по тору. В безмассовом секторе, как мы видели, шпурионные состояния даются продольными векторами и гравитонами. Следовательно, отсутствие калибровочной и гравитационной аномалий эквивалентно тому, что шпурионы не распространяются. На древесном уровне мы проверили это свойство, показав, что благодаря тождеству Уорда $\langle T(z)\rangle$ на мировом листе равно нулю. В случае тора тождества Уорда хитрее, и в игру вступает модулярная инвариантность. Выведем тождество Уорда в случае тора. Вспомним, что если сделать бесконечно малое преобразование координат $\varepsilon(z, \bar{z})$, действие изменится на величину

$$\delta S = \int T(z)\partial_{\bar{z}}\varepsilon(z, \bar{z})\, d^2 z,$$

в то время как поля преобразуются по правилу

$$\delta\phi = \left(\varepsilon(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \Delta(\partial_z \varepsilon)\right)\phi.$$

Если выбрать ε так, чтобы

$$\partial_{\bar{z}}\varepsilon = \delta^{(2)}(z - w),$$

то мы получим желаемое тождество Уорда. Основная тонкость в случае тора состоит в том, что функция ε не строго периодическая и может менять фундаментальную область. Именно, решение последнего уравнения дается ζ-функцией Вейерштрасса

$$\varepsilon(z) = \zeta(z - w), \quad \zeta(z) = \sum_{\omega \in L}\left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right),$$

где L обозначает решетку, порожденную (ω_1, ω_2), $\omega_i = \omega_i^1 + i\omega_i^2$. Хорошо известно, что

$$\zeta(z + \omega_a) = \zeta(z) + \eta_a, \quad a = 1, 2$$

и что константы η_a удовлетворяют условию

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2/\pi\mathrm{i}.$$

Легко проверить, используя эти соотношения, что наше конформное преобразование вызывает изменение $\tau = \omega_2/\omega_1$. Соответствующее тождество Уорда имеет вид

$$\langle T(z)\phi(z_1)\ldots\phi(z_N)\rangle = \frac{\partial}{\partial\tau}\langle\phi(z_1)\ldots\phi(z_N)\rangle +$$
$$+\sum_k\left(-\Delta\zeta'(z-z') + \zeta(z-z_k)\frac{\partial}{\partial z_k}\right)\langle\phi(z_1)\ldots\phi(z_N)\rangle.$$

Следует подчеркнуть, что в этой формуле средние понимаются без деления на статистическую сумму, которая сама зависит от τ.

Роль модулярной инвариантности теперь очевидна. При проверке отцепления продольных состояний мы должны проинтегрировать тождество Уорда и по z_j и по τ, ограничивая последний интеграл фундаментальной областью группы. Если статистическая сумма не обладает модулярной инвариантностью, то член $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ даст ненулевой вклад, происходящий от границы фундаментальной области. Эта модулярная аномалия на мировом листе проявится в виде гравитационной и калибровочной аномалий в пространстве-времени.

Мы заключаем, что в гетеротических теориях струн необходимо проверять модулярную инвариантность, которая существенно ограничивает возможности. С другой стороны, в обычных замкнутых струнах модулярная инвариантность возникает автоматически, поскольку некиральные детерминанты можно регуляризовать явно ковариантным образом. Такие теории свободны от аномалии, даже когда они содержат киральные фермионы в пространстве-времени.

Подведем итоги. Мы видим, что теперь мы получили согласованное описание квантовой гравитации и супергравитации, и у нас есть возможности для включения киральных фермионов и других частиц в эту схему. Этот подход объясняет загадку поколений — странное повторение, которое началось с мюона. Число поколений теперь определяется числом нулевых мод обобщенных операторов Дирака и фиксируется топологией компактного многообразия. На самом деле в этом подходе трудно получить достаточно малое число поколений.

В настоящий момент мы не можем объяснить, почему происходит компактификация, и, самое главное, почему размерность нашего мира равна 4. До тех пор, пока эти проблемы не будут решены, мы не можем быть совершенно уверены, что находимся на правильном пути. Тем не менее, на это имеется много указаний.

10.3. Трехмерная модель Изинга[1]

Хорошо известно, что большая часть фазовых переходов второго рода, встречающихся в Природе, эквивалентна в смысле критического поведения трехмерной модели Изинга. После замечательного успеха Онзагера в решении двумерной версии этой модели многие пытались найти ее решение в трех измерениях (частные сообщения). Однако такое решение не было найдено, и есть сильное подозрение, что модель не является точно решаемой. На самом деле полного решения и не требуется, поскольку только критическое поведение этой модели представляет универсальный интерес. Имеется в виду, что критическими свойствами модели Изинга (такими, как особенность в поведении теплоемкости) наделены многие статистические системы в Природе. Однако, если мы находимся далеко от точки фазового перехода, мы не можем извлечь никаких уроков для других систем.

В этом разделе мы попытаемся показать, что в непрерывном пределе (то есть в окрестности точки фазового перехода) трехмерная модель Изинга может быть сведена к точно решаемой системе — суперсимметричной струне. Этот результат, в принципе, должен позволить найти критическое поведение, но пока эта проблема еще не решена.

Чтобы объяснить наши идеи, нужно напомнить ситуацию в двумерной модели Изинга, решенной Онзагером. В этой модели имеется два сорта основных переменных. Во-первых, есть спиновые переменные $\sigma_{\boldsymbol{x}}$ (или параметры порядка), принимающие значения ± 1. Во-вторых, есть параметры беспорядка $\mu_{\boldsymbol{x}}$, впервые введенные Кадановым и Чевой, которые определяются как концы «дислокационных» линий. Эти два набора переменных дуальны друг другу так же, как электрический и магнитный заряды. Замечательно, что, хотя уравнения движения для $\sigma_{\boldsymbol{x}}$ и $\mu_{\boldsymbol{x}}$ по отдельности очень сложны, произведение $\psi = \sigma\mu$ удовлетворяет линейному уравнению. Более того, в непрерывном пределе (возле точки фазового перехода) это линейное уравнение сводится к двумерному евклидову уравнению Дирака, вследствие чего переменная ψ описывает фермионное возбуждение. Таким образом, можно сказать, что двумерная модель Изинга эквивалентна системе релятивистских невзаимодействующих ферми-частиц.

Вернемся теперь к трехмерному случаю. Основное отличие здесь связано с природой переменных беспорядка. Дислокационные линии (окружающие области перевернутых спинов) двумерной модели теперь заменяются дислокационными поверхностями. Граница такой поверхности теперь становится аргументом, от которого зависит перемен-

[1]Некоторые результаты этого раздела были получены вместе с Вл. Доценко (1978).

ная μ. Таким образом, вместо переменных $\mu_{\boldsymbol{x}}$ двумерной модели, мы имеем контурную переменную $\mu(C)$ (где C — замкнутая петля). Чтобы получить простые уравнения, нужно образовать произведение $\mu(C)$ и $\prod_i \sigma(\boldsymbol{x}_i)$, где $\boldsymbol{x}_i$ — соседние с контуром C точки. Если нарисовать маленькие нормали к петле C, соединяющие ее с точками $\boldsymbol{x}_i$, то получится струна с псевдоспинами, живущими на ней — объект, который напоминает колючую проволоку. Эти переменные «колючей проволоки» удовлетворяют линейному уравнению в пространстве петель. Смысл этого уравнения состоит в том, что каждый малый участок колючей проволоки распространяется в точности так же, как изинговский фермион двумерной модели, если рассмотреть плоскость, ортогональную к рассматриваемому куску. Подобно тому, как пропагатор ферми-частицы, которую мы опишем в разделе 10.3.1, можно представить суммой по всем возможным путям с некоторой фермионной структурой на них, решение петлевого уравнения оказывается равным сумме по поверхностям с дополнительной фермионной структурой. Это мы опишем в разделе 10.3.2. Последующая стратегия состоит в том, чтобы найти непрерывную модель струны, кусочки которой двигались бы как свободные дираковские фермионы. Естественным кандидатом является струна Неве–Шварца–Рамона.

10.3.1. Уравнение Дирака в двумерной модели Изинга

Двумерная модель Изинга описывается статистической суммой

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{\sigma_{\boldsymbol{x}}\}} e^{-\beta \mathcal{E}[\sigma_{\boldsymbol{x}}]}, \\
\mathcal{E}[\sigma_{\boldsymbol{x}}] &= -\sum_{\boldsymbol{x},\delta} \sigma_{\boldsymbol{x}} \sigma_{\boldsymbol{x}+\delta}.
\end{aligned} \tag{10.54}
$$

Здесь β — обратная температура, точки $\{\boldsymbol{x}\}$ принадлежат двумерной квадратной решетке, $\sigma_{\boldsymbol{x}} = \pm 1$, а $\{\delta\}$ — два единичных образующих вектора решетки. Важная физическая информация содержится в корреляционных функциях

$$
G_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = \langle \sigma(\boldsymbol{x}_1) \ldots \sigma(\boldsymbol{x}_N) \rangle, \tag{10.55}
$$

определяемых очевидным способом. Для $G_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ можно получить цепочку уравнений Швингера–Дайсона. Однако этот подход затемняет точную решаемость модели. Правильный путь состоит во введении так называемых переменных беспорядка. Они определяются следующим образом. Рассмотрим точку $\boldsymbol{x}_*$ дуальной решетки (образованной центрами клеток исходной решетки) и проведем некоторый путь P по дуальной решетке, ведущей из $\boldsymbol{x}_*$ в бесконечность. Изменим знак β на всех ребрах, которые пересек P. Определим возмущенную статистическую сумму $\tilde{Z}(\boldsymbol{x}_*, P)$. Тогда переменная беспорядка $\mu(\boldsymbol{x}_*)$ (определяемая своими функциями Грина) дается выражением

$$\langle \mu(\boldsymbol{x}_*) \rangle = \frac{\tilde{Z}(\boldsymbol{x}_*, P)}{Z}. \tag{10.56}$$

Аналогично определяются

$$\langle \mu(\boldsymbol{x}_{1*}) \mu(\boldsymbol{x}_{2*}) \ldots \mu(\boldsymbol{x}_{N*}) \rangle. \tag{10.57}$$

Теперь простое рассуждение показывает, что (10.57) не зависит от выбора путей, ведущих из бесконечности в $\boldsymbol{x}_{K*}$, а только от самих $\boldsymbol{x}_{K*}$. Действительно, рассмотрим замкнутый путь, окружающий некоторую двумерную область («каплю»), и изменим знаки взаимодействия на всех ребрах, которые он пересекает. Рассмотрим модифицированную статистическую сумму $Z(P)$. Очевидно, что $Z(P) = Z$, поскольку каждой данной конфигурации, дающей вклад в $Z(P)$, соответствует конфигурация такой же энергии, дающая вклад в Z. Последняя получается из первой отражением всех спинов, находящихся внутри капли. Из этого соотношения следует, что два различных пути в (10.56) или (10.57) дают одинаковый результат. Заметим в скобках, что такое простое определение переменной беспорядка справедливо только для решетки с простой топологией (такой, что каждая замкнутая петля ограничивает каплю). В противном случае имеются различные переменные, классифицирующиеся первой группой гомологий.

Для получения линейных уравнений рассмотрим переменную ψ, образованную произведением параметра порядка, $\sigma_{\boldsymbol{x}}$ и соседнего параметра беспорядка. У каждой точки $\boldsymbol{x}$ исходной решетки имеется 4 соседних точки дуальной решетки: $\boldsymbol{x}_*^{(a)} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_a$, где 4 вектора $\boldsymbol{e}_a$ имеют длину $1/\sqrt{2}$ и направлены по диагонали к исходной решетке.

Рассмотрим четырехкомпонентный объект

$$\psi_a(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x}) \mu(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_a), \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{10.58}$$

Предполагается, что хвост, необходимый для определения μ, идет горизонтально от $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_a$ налево до бесконечности. Теперь мы получаем простое тождество

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1(\boldsymbol{x})\rangle &= \left\langle \sigma(\boldsymbol{x}) \prod_{n=0}^{\infty} \exp\{-2\beta(\sigma_{\boldsymbol{x}-n\delta_1}\sigma_{\boldsymbol{x}-n\delta_1+\delta_2})\}\right\rangle = \\
&= \left\langle \sigma(\boldsymbol{x}) \prod_{n=1}^{\infty} \exp\{-2\beta(\sigma_{\boldsymbol{x}-n\delta_1}\sigma_{\boldsymbol{x}-n\delta_1+\delta_2})\} \exp\{-2\beta\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{x}+\delta_2}\}\right\rangle = \\
&= \langle \sigma(\boldsymbol{x})\mu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_2)(\mathrm{ch}(2\beta) - \mathrm{sh}(2\beta)\,(\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{x}+\delta_2}))\rangle = \\
&= \langle\psi_2(\boldsymbol{x})\rangle\,\mathrm{ch}(2\beta) - \langle\psi_3(\boldsymbol{x}+\delta_2)\rangle\,\mathrm{sh}(2\beta).
\end{aligned} \tag{10.59}$$

Все, чем мы воспользовались при выводе этого уравнения — это определение μ (произведение $\prod\limits_{n=0}^{\infty}$ представляет замену β на $-\beta$ на ребрах, пересекающихся с контуром P), тождество $\sigma_{\boldsymbol{x}}^2 = 1$ и, наконец, возможность повернуть хвост $\mu(\boldsymbol{x}_*)$, если он не пересекает спиновую переменную. Продолжая в том же духе, получаем

$$\langle\psi_a(\boldsymbol{x})\rangle = \mathrm{ch}(2\beta)\,\langle\psi_{a+1}(\boldsymbol{x})\rangle - \mathrm{sh}(2\beta)\,\langle\psi_{a+2}(\boldsymbol{x}+\delta_{a+1})\rangle, \tag{10.60}$$

где $a = 1, 2, 3, 4$. Ясно, что $\langle\psi_{a+4}\rangle$ и $\langle\psi_a\rangle$ являются, по-существу, одним и тем же объектом, но они не тождественны. Именно, $\langle\psi_{a+4}\rangle$ получается поворотом стрелки $\boldsymbol{e}^a$ на угол 2π. Однако мы должны помнить про горизонтальный хвост прикрепленный к концу стрелки. При повороте он один раз пересекает точку $\boldsymbol{x}$, в которой находится $\sigma_{\boldsymbol{x}}$. В результате объект ψ меняет знак (вспомним, что мы доказали независимость от формы хвоста чистого μ-коррелятора, однако, если присутствуют σ и хвост пересекает σ, то коррелятор меняет знак). Мы заключаем, что уравнение (10.60) нужно дополнить граничным условием

$$\psi_{a+4}(\boldsymbol{x}) = -\psi_a(\boldsymbol{x}). \tag{10.61}$$

Точка фазового перехода определяется из (10.60) условием существования не зависящего от $\boldsymbol{x}$ решения. Подставляя ψ_a в виде

$$\psi_a \sim e^{\pm i\pi a/4}, \tag{10.62}$$

чтобы обеспечить (10.61), мы получаем из (10.60):

$$\mathrm{sh}(2\beta_{\mathrm{c}}) = 1, \quad \mathrm{ch}(2\beta_{\mathrm{c}}) = \sqrt{2}. \tag{10.63}$$

Другое решение

$$\psi_a \sim e^{\pm 3i\pi a/4} \qquad (10.64),$$

приводит к нефизическому β_c. Два решения (10.62) и (10.64) соответствуют частям волновой функции спина 1/2 и спина 3/2. Вблизи точки (10.63) мода спина 1/2 становится мягкой, а мода спина 3/2 остается жесткой. Уравнение (10.60) инвариантно при повороте на угол $\pi/2$ с одновременным изменением спинового индекса a:

$$\psi_a(\boldsymbol{x}) \to \psi_{a+1}(\Gamma \boldsymbol{x}) \tag{10.65}$$

(Γ — поворот на $\pi/2$). Можно ожидать, таким образом, что в непрерывном пределе, когда распространяется только спин 1/2, мы получим уравнение Дирака. В самом деле, это видно из разложения

$$\begin{aligned} \psi_a(\boldsymbol{x}) = u_+(\boldsymbol{x})e^{i\pi(a+1/2)/4} + u_-(\boldsymbol{x})e^{-i\pi(a+1/2)/4} + \\ + v_+(\boldsymbol{x})e^{3i\pi(a+1/2)/4} + v_-(\boldsymbol{x})e^{-3i\pi(a+1/2)/4}. \end{aligned} \tag{10.66}$$

Подставляя (10.66) в (10.60) и пренебрегая v-членами, получим (используя тождество $u_+(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}\sum_a e^{-\pi i(a+1/2)/4}\psi_a$)

$$\begin{aligned} (\partial_1 + i\partial_2)u_+ &= imu_-, \\ (\partial_1 - i\partial_2)u_- &= imu_+, \\ m &\sim \frac{\beta - \beta_c}{\beta_c}. \end{aligned} \tag{10.67}$$

Уравнение (10.67) — это в точности двумерное уравнение Дирака, причем спинор $u(\boldsymbol{x})$ преобразуется при вращениях по правилу

$$u(\boldsymbol{x}) \to e^{i\varphi/2}u(\Gamma(\varphi)\boldsymbol{x}), \tag{10.68}$$

($\Gamma(\varphi)$ — поворот на угол φ). Эта формула является непрерывным аналогом (10.65). До сих пор мы имели дело со средним от одного поля $\langle\psi_a(\boldsymbol{x})\rangle$. Если же нам нужны более сложные функции Грина

$$F_{a_1\ldots a_l}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l) = \langle\psi_{a_1}(\boldsymbol{x}_1)\ldots\psi_{a_l}(\boldsymbol{x}_l)\rangle, \tag{10.69}$$

то мы найдем, что по каждому аргументу они удовлетворяют одному и тому же уравнению (10.60) с условием (10.61), но в правой части этого уравнения, как обычно, должны стоять контактные члены. В непрерывном пределе эти члены сводятся к стандартным δ -функциям. Продемонстрируем, наконец, как найти критическую особенность в теплоемкости. Средняя плотность энергии равна

$$
\begin{aligned}
\langle E\rangle &= -2\langle\sigma_{\boldsymbol{x}}\sigma_{\boldsymbol{x}+\delta_1}\rangle = -2\langle\psi_1(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x}+\delta_1)\rangle = \\
&= \langle u(\boldsymbol{x})\bar{u}(\boldsymbol{x})\rangle = \operatorname{Tr}\int_{|p|\ll 1}\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{m+i\hat{p}} = \\
&= 2m\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{p^2+m^2}\sim m\log\frac{1}{m},
\end{aligned}
\tag{10.70}
$$

где мы используем стандартный дираковский пропагатор. Для теплоемкости получаем

$$
C\sim-\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}\sim-\log\left|\frac{\beta-\beta_{\mathrm{c}}}{\beta_{\mathrm{c}}}\right|,
$$

что совпадает со знаменитым результатом Онзагера.

10.3.2. Трехмерный случай. Петлевое уравнение

Трехмерная модель Изинга вновь определяется уравнением (10.54) только теперь $\boldsymbol{x}$ принадлежит трехмерной кубической решетке. Переменная порядка $\sigma(\boldsymbol{x})$ определяется так же, как и раньше. Небольшая модификация требуется для переменных μ, поскольку теперь «капли» перевернутых спинов трехмерны и их границы являются двумерными поверхностями. Введем дуальную решетку, узлы которой лежат в центрах кубов исходной. Рассмотрим на ней замкнутую петлю C и проведем произвольную поверхность (на этой решетке), ограниченную этой петлей. Определим возмущенную статистическую сумму $\tilde{Z}(C,S_C)$, изменив знак взаимодействия на всех ребрах исходной решетки, пересекающих S_C.

Тогда $\mu(C)$ определяется как

$$
\langle\mu(C)\rangle=\frac{\tilde{Z}(C,S_C)}{Z}. \tag{10.71}
$$

Это определение является прямым обобщением (10.56). Здесь опять оказывается, что $\langle\mu(C)\rangle$ не зависит от выбора поверхности S_C, поскольку замкнутая поверхность дислокации не меняет Z (можно перевернуть спины в капле, ограниченной S). Следовательно, мы можем образовать петлевые функции Грина вида

$$
\langle\mu(C_1)\ldots\mu(C_N)\rangle. \tag{10.72}
$$

Если $\sigma(\boldsymbol{x})$ тоже присутствует, эти функции определены с точностью до знака, который физически несуществен.

Как и в двумерном случае, мы получим простые уравнения не для $\langle\mu(C)\rangle$ или $\langle\sigma(\boldsymbol{x})\rangle$, а для некоторого смешанного объекта, который будет называться «фермионной струной» или «колючей проволокой». Снабдим середину каждого ребра s контура C вектором $\boldsymbol{e}_{a_s}$ $(a_s = 1, 2, 3, 4)$, лежащим в плоскости, ортогональной ребру (см. рисунок перед (10.58)). Рассмотрим следующий объект:

$$\Psi_{a_1 \ldots a_L}(C_L) = \mu(C_L) \prod_{s=1}^{L} \sigma(\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{e}_{a_s}), \tag{10.73}$$

где L — длина петли, а $\boldsymbol{x}_s$ — середина ребра s. Чтобы получить уравнение, как можно больше похожее на (10.67), полезно заметить, что среднее $\langle\Psi_{a_1 \ldots a_L}(C_L)\rangle$ можно вычислить двумя способами. Первый использует определение среднего согласно (10.54) и определение μ, данное выше. Второй, дуальный способ вычисления состоит в следующем. Мы можем определить дуальную модель Изинга, введя переменные $\mu_{\boldsymbol{x},\alpha} = \pm 1$ на ребрах дуальной решетки и рассматривая статистическую сумму

$$Z = \sum_{\{\mu_{\boldsymbol{x},\alpha}\}} \exp\left(\tilde{\beta} \sum_{P} \mu(\partial P)\right). \tag{10.74}$$

Здесь P обозначает плакет дуальной решетки, а $\mu(\partial P)$ — произведение переменных μ по ребрам вокруг плакета. Дуальная температура $\tilde{\beta}$ дается выражением

$$e^{-2\tilde{\beta}} = \operatorname{th} \beta. \tag{10.75}$$

Дуальность Крамерса–Ваннье обеспечивает равенство статистических сумм (10.74) и (10.54). Средние переменных $\sigma(\boldsymbol{x})$ (которые являются переменными беспорядка по отношению к (10.74)) определяются следующим образом. Присоединим к точке $\boldsymbol{x}$ бесконечный путь и изменим знаки $\tilde{\beta}$ на всех плакетах, которые он пересекает. Тогда

$$\langle\sigma(\boldsymbol{x})\rangle = \frac{\tilde{Z}(\boldsymbol{x}, P_{\boldsymbol{x}})}{Z}. \tag{10.76}$$

После небольшого размышления заключаем, что (10.76), так же как (10.56), не зависит от выбора пути $P_{\boldsymbol{x}}$. В самом деле, рассмотрим короткий замкнутый путь, пересекающий пучок из четырех плакетов, имеющих одно общее ребро. Изменяя знак спина μ на этом ребре мы получаем новую конфигурацию, которая эквивалентна исходной в модели без пути. Таким образом, для этого маленького замкнутого пути модифицированная статистическая сумма совпадает с исходной. Поскольку любой большой путь можно составить из малых, мы заключаем, что замкнутая петля дислокации не меняет статистической суммы.

Теперь мы готовы получить желаемое уравнение для $\Psi_{a_1 \ldots a_L}(C_L)$. Используем тождества

$$\begin{gathered} e^{-2\tilde{\beta}\mu(\partial P)} = \mathrm{ch}(2\tilde{\beta}) - \mathrm{sh}(2\tilde{\beta})\,\mu(\partial P), \\ \mu^2(\partial P) = 1 \end{gathered} \tag{10.77}$$

и вообразим хвост S, присоединенный к $\sigma(\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{e}_{a_s})$, который дает вклад

$$\sigma(\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{e}_{a_s}) \sim \prod_s e^{-2\tilde{\beta}\mu(\partial P)},$$

где произведение берется по всем плакетам, пересекающим хвост. С помощью тождеств (10.77) (аналогичных (10.59)) находим

$$\begin{gathered} \Psi_{a_1 \ldots a_L}(C) = \mathrm{ch}(2\tilde{\beta})\Psi_{a_1,\ldots,a_s+1,a_{s+1},\ldots,a_L}(C) - \\ - \mathrm{sh}(2\tilde{\beta})\Psi_{a_1,\ldots,a_{s-1},a'_s,a_s+2,a'_s+3,a_{s+1},\ldots,a_L}(C + \Pi_{a_s,a_s+1}). \end{gathered} \tag{10.78}$$

Здесь петля $C + \Pi_{a_s,a_s+1}$ получается из исходной петли изъятием ребра s и приделыванием вместо него буквы П, ориентированной в направлении между a_s и $a_s + 1$. Петля $C + \Pi_{a_s,a_s+1}$ имеет длину $L + 2$, и на двух дополнительных ребрах мы поместили индексы a'_s и $a'_s + 3$ так, что этим ребрам соответствует одна σ-переменная в центре плакета П. Поскольку $\sigma^2 = 1$, это не влияет на наши соотношения. Теперь мы наблюдаем замечательную аналогию между уравнениями (10.78) и (10.60). Действительно, (10.78) означает, что если сконцентрировать внимание на некотором ребре s, то оно распространяется в ортогональной ему плоскости точно так же, как фермионное возбуждение двумерной модели Изинга. Это, разумеется, не означает, что трехмерная изинговская струна может рассматриваться как набор невзаимодействующих двумерных изинговских частиц. Различие связано с тем, что в процессе движения струна не может разорваться (вследствие калибровочной инвариантности), и, следовательно, когда какое-либо ребро движется, оно рождает дополнительные участки струны, необходимые для неразрывности. Но эта неразрывность является единственным источником взаимодействия. Такая система будет называться свободной струной.

Суммируем теперь наши заключения. Мы доказали, что двумерная модель Изинга эквивалентна задаче о распространении свободной частицы. Эта частица несет внутренний индекс a или, более геометрически, стрелку e_a , которая в конце концов отождествляется со спином. В процессе распространения частицы спин вращается за счет спин-орбитального взаимодействия, но полный угловой момент сохраняется. Классический вектор e_a на решетке не соответствует никакому определенному значению спина, но, согласно (10.66) и (10.67), только часть волновой функции спина $1/2$ имеет дальние корреляции в критической области. Таким образом, не удивительно, что в результате мы получили уравнение Дирака.

Что касается трехмерного случая, то мы нашли, что модель Изинга описывается распространением замкнутой струны с внутренними степенями свободы, распределенными по ребрам. Эти степени свободы в точности те же, что и в двумерном случае, так что мы можем сказать, что у нас есть спиновая плотность, распределенная вдоль струны. Нашим основным результатом было заключение, что кусочки струны движутся так же, как двумерные изинговские частицы, и имеется только неявное взаимодействие, являющееся следствием неразрывности струны.

Самая сложная проблема — найти непрерывный предел уравнения (10.78). В случае двух измерений эта проблема тривиально решалась с помощью решеточного уравнения (10.60) в пределе $\beta \to \beta_{\text{cr}}$. К сожалению, уравнение (10.78) на решетке абсолютно безнадежно. Лучшее, что можно сделать — это угадать на основе физических соображений, какого рода систему оно описывает в критической области. Мы сделаем это, посмотрев на вещи с другой стороны. Именно, мы обсудим непрерывную модель струны, кусочки которой ведут себя как свободные дираковские частицы, и которая, поэтому, имеет весьма хорошие шансы описывать критическую область уравнения (10.78).

Рассмотрим NSR-струну, волновой функционал которой обращается в нуль при действии супертока и тензора энергии-импульса. Первое условие может быть представлено в виде:

$$\psi_\mu^{(\pm)}(\dot{x}_\mu \pm x'_\mu)|\phi\rangle = 0.$$

Если заменить $\dot{x}_\mu$ на $(1/\mathrm{i})\delta/\delta x_\mu$ и ввести

$$\gamma_\mu^{(1,2)} = \psi_\mu^{(+)} \pm \psi_\mu^{(-)},$$

то получится уравнение

$$\left(\frac{1}{i}\gamma_\mu^{(1)}(s)\frac{\delta\phi}{\delta x_\mu(s)} + \gamma_\mu^{(2)}(s)\frac{dx_\mu}{ds}\right)\phi = 0, \tag{10.79}$$

где
$$\{\gamma_\mu^{(a)}(s), \gamma_\nu^{(b)}(s')\} = 2\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\delta(s-s').$$

Если мы теперь рассмотрим очень короткий фрагмент струны, для которого $|d\boldsymbol{x}/ds|\Delta s = \varepsilon$, то мы сможем заменить $\Delta s(\delta\phi/\delta x_\mu(s))$ на обычную производную:
$$\Delta s\left(\frac{\delta\phi}{\delta x_\mu(s)}\right) \to \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu},$$

а $\gamma_\mu^{(1)}(s)$ на обычную γ -матрицу. Член
$$\gamma_\mu^{(2)}(s)\frac{dx_\mu}{ds}\Delta s$$

антикоммутирует с
$$\gamma_\mu^{(1)}\frac{\delta}{\delta x_\mu(s)},$$

и в пределе «короткой струны» его можно заменить на $M\gamma_5$ с некоторым M. В результате (10.79) превращается в обычное уравнение Дирака:
$$\left(\frac{1}{i}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\gamma_5\right)\phi = 0. \tag{10.80}$$

К тому же выводу можно было бы прийти и с помощью разложения по модам в секторе Рамона, заметив, что в пределе короткой струны существенны только нулевые моды (поскольку остальные собственные значения стремятся к бесконечности). Мы заключаем, что NSR-струна движется кусочно, как набор дираковских частиц, связанных только неразрывностью струны. Это та же картина распространения струны, что и в трехмерной модели Изинга. Таким образом, возможно, эти две струны совпадают. Разумеется, мы не доказали этого. Но интуитивные аргументы, приведенные выше, делают весьма актуальной задачу вычисления критических индексов в NSR-струне и сравнения их с изинговскими. Эта проблема еще не решена. В следующем разделе мы опишем общий подход к ней вместе с предварительной классификацией струн.

10.4. Внешняя геометрия струн

В этом разделе мы обсудим критические индексы струн, предмет, тесно связанный с их внешней геометрией. Эта проблема тоже не решена и мы можем только сформулировать общий подход и описать несколько встречающихся в теории струн ситуаций.

Самый интересный критический индекс определяется так. Начнем с действия Намбу–Гото (или его фермионного расширения)

$$\begin{gathered}\mu_0 A(S) = \mu_0 \int_S g^{1/2}\, d^2\xi, \\ g_{ab} = \partial_a \boldsymbol{x}\, \partial_b \boldsymbol{x},\end{gathered} \tag{10.81}$$

и постараемся выбрать затравочное поверхностное натяжение μ_0 так, чтобы физическое поверхностное натяжение μ, определяющееся соотношением

$$G(C) = \sum_{S_C} \exp\Big(-\mu_0 \int_{S_C} g^{1/2} d^2\xi\Big) \underset{C\to\infty}{\approx} \exp(-\mu A_{\min}(C)), \tag{10.82}$$

было мало (здесь C — контур, а $A_{\min}(C)$ — площадь минимальной поверхности, ограниченной этим контуром). Величина $\mu(\mu_0)$ есть, по определению, физическое поверхностное натяжение. При значениях μ_0, близких к критическому $\mu_{0\,\mathrm{cr}}$, мы ожидаем, что

$$\mu \sim (\mu_0 - \mu_{0\,\mathrm{cr}})^\gamma,$$

где γ — критический индекс, который следует определить. Через него можно выразить много интересных величин.

Чем определяется γ? Ответы различны для бозонных и фермионных струн. Мы рассмотрим бозонный случай. Мы должны, в первую очередь, спросить себя, является ли член Намбу в действии, представляющий собой разновидность космологического члена, единственным существенным в непрерывном пределе. Можно было бы ожидать, что эйнштейновский член может быть так же важен, поскольку постоянная Ньютона безразмерна в двух измерениях. Однако общеизвестно, что в этом случае эйнштейновский член совпадает с эйлеровой характеристикой многообразия, которая предполагается фиксированной. Тем не менее безразмерный член в действии действительно существует. Он строится из внешней кривизны поверхности и определяется следующим образом. Введем вторую фундаментальную форму K^i_{ab} поверхности, даваемую уравнением

$$\begin{gathered}\partial_a\partial_b \boldsymbol{x} = \Gamma^c_{ab}\partial_c \boldsymbol{x} + K^i_{ab}\boldsymbol{n}_i, \\ \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_j = \delta_{ij}; \quad \boldsymbol{n}_i\, \partial_a \boldsymbol{x} = 0, \\ i = 1, \ldots, D-2,\end{gathered} \tag{10.83}$$

где Γ^c_{ab} — обычный символ Кристоффеля, $\boldsymbol{n}_i$ — векторы нормалей. Тогда внутренняя кривизна R связана с K соотношением

$$R = (K^{ia}_a)^2 - K^{ia}_b K^{ib}_a \tag{10.84}$$

и действительно является полной производной. Однако для отдельных членов в этом выражении это не так. Таким образом, мы можем написать следующее обобщение действия Намбу–Гото:

$$A = \mu_0 \int g^{1/2}\, d^2\xi + \frac{1}{\alpha_0} \int K_b^{ia} K_a^{ib} g^{1/2}\, d^2\xi. \tag{10.85}$$

Остается только проверить, что последний член является единственным (с точностью до полных производных) выражением, инвариантным при масштабном преобразовании $\boldsymbol{x} \to \lambda \boldsymbol{x}$. Добавление его в действие — не каприз. Его поведение в инфракрасной области определяет фазовую структуру теории струн. Таким образом, если мы хотим вычислить критическое поведение случайных поверхностей и их физические и геометрические характеристики, абсолютно необходимо включить этот член в действие.

Нашей первой целью будет исследовать существенность внешней кривизны в непрерывном пределе. Заметим, что (10.85) можно переписать по-другому (по модулю полных производных):

$$\begin{aligned} \int K_b^{ia} K_a^{ib} g^{1/2}\, d^2\xi &= \int g^{1/2} g^{ab} \partial_a t_{\mu\nu} \partial_b t_{\mu\nu}\, d^2\xi = \\ &= \int g^{1/2} (\Delta(g)\boldsymbol{x})^2\, d^2\xi = \int g^{1/2} g^{ab} (\nabla_a \boldsymbol{n}_i)(\nabla_b \boldsymbol{n}_i)\, d^2\xi. \end{aligned} \tag{10.86}$$

Здесь

$$\Delta(g)\boldsymbol{x} = -\frac{g^{-1/2}}{g} \partial_a g^{1/2}\, g^{ab} \partial_b \boldsymbol{x},$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{g^{-1/2}}{g} \epsilon^{ab} \partial_a x_\mu \partial_b x_\nu,$$

$$\nabla_a \boldsymbol{n}_i = \partial_a \boldsymbol{n}_i + \mathcal{A}_a^{ik} \boldsymbol{n}_k = -K_a^{ib} \partial_b \boldsymbol{x}.$$

Последняя строчка в (10.86) особенно интересна. Она показывает, что мы имеем дело с σ-моделью на грассманиане, ассоциированной с поверхностью. Параметр порядка лежит в однородном пространстве

$$G_{2,D} = \frac{SO(D)}{SO(2) \times SO(D-2)}. \tag{10.87}$$

Это необычная σ-модель, потому что не каждое поле в $G_{2,D}$ образует касательные плоскости к некоторой поверхности. Должно быть выполнено определенное условие интегрируемости. Тем не менее, аналогия с σ-моделью полезна. Именно, она позволяет рассчитать β-функцию для константы связи α, которая определяет зависимость этой константы от масштаба. Мы не будем приводить это вычисление, а лишь обсудим его результат и его следствия.

Именно, для зависимости $\alpha(p)$ от импульса находим

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{1 - \dfrac{D}{2}\dfrac{\alpha_0}{2\pi}\log\dfrac{\Lambda}{p}}. \tag{10.88}$$

Из этой формулы ясно, что наша σ-модель на грассманиане обладает необычными свойствами. В случае обычной σ-модели коэффициент перед логарифмом был бы равен $D-2$ (вспомним $\boldsymbol{n}$-поле), а не $D/2$. Это различие происходит из условия интегрируемости грассмановых полей — они должны образовывать касательные плоскости к некоторой поверхности. Конечно, поведение (10.88) справедливо только до тех пор, пока $\alpha(p)$ не станет большим. Что тогда произойдет? Есть несколько возможностей. Прежде всего, если β-функция не имеет нулей, то $\alpha(p)$ продолжает возрастать по мере движения в инфракрасную область. Это означает, что член $(1/\alpha)\int K^2 g^{1/2} d^2\xi$ становится несущественным, поскольку $\alpha \to \infty$. Для описания этого же явления на другом языке введем множитель Лагранжа:

$$S = \frac{1}{\alpha}\int K^2 g^{1/2} d^2\xi + \int (\lambda^{ab}(\partial_a \boldsymbol{x}\,\partial_b \boldsymbol{x} - g_{ab}) + \mu_0 g^{1/2})\, d^2\xi.$$

Мы видели в предыдущих главах, что асимптотическая свобода в σ-моделях приводит к конденсации множителя Лагранжа или, что то же самое, к появлению массы у $\boldsymbol{n}$-полей. В нашем случае это означает следующее. Эффективное действие для λ^{ab} имеет минимум, так что

$$\langle\lambda^{ab}\rangle = \bar{\lambda} g^{1/2} g^{ab}, \tag{10.89}$$

где зависимость от g^{ab} фиксируется общей ковариантностью, а $\bar{\lambda}$ — это просто положение логарифмического полюса в (10.88) (так как $\bar{\lambda}$ представляет собой инфракрасное обрезание):

$$\bar{\lambda} \sim \Lambda e^{-4\pi/D\alpha_0}. \tag{10.90}$$

Если нет специальной точной подстройки параметров, то $\alpha_0 \sim 1$ и $\bar{\lambda} \sim \Lambda$, поэтому в непрерывном пределе мы имеем эффективное действие

$$S = \bar{\lambda}\int (g^{1/2} g^{ab}\partial_a \boldsymbol{x}\,\partial_b \boldsymbol{x} + \mu_0 g^{1/2})\, d^2\xi, \tag{10.91}$$

которое мы обсуждали в предыдущих главах.

Мы видим, что в этом случае критический индекс $\gamma = 0$ поскольку изменение μ_0 не оказывает влияния на $\bar{\lambda}$. Попытка сделать поверхностное натяжение малым в этом случае будет обречена на неудачу из-за сильных инфракрасных флуктуаций, описываемых действием (10.91). С геометрической точки зрения множитель Лагранжа $\bar{\lambda}$ играет роль обратной корреляционной длины для нормалей к поверхности. В описанном режиме эта корреляционная длина порядка масштаба обрезания. Поверхность чудовищно сморщена. Возможно, с этим связано существование бозонного тахиона.

Для КХД и модели Изинга сморщенные струны с необращающимся в нуль поверхностным натяжением неприемлемы. Как можно избежать этого нежелательного свойства?

Ясно, что в чисто бозонном случае мы должны найти версию теории с β-функцией, имеющей нуль в некоторой точке α_*. Если мы преуспеем, то затравочная α_0 притянется к α_*, корреляционная длина будет бесконечной (без члена Намбу в действии), и у нас будет конформно-инвариантная теория с аномальными размерностями, одна из которых определяет критический индекс. В этом случае мы избежим образования складок на поверхности.

В четырех измерениях есть хороший кандидат на роль такой теории. В этой размерности существует специфический θ-член, который может быть добавлен к действию. При $\theta = \pi$ есть причины ожидать масштабно-инвариантной теории. Член, о котором мы говорим, — это алгебраическое число самопересечений $\nu(S)$ нашей двумерной поверхности S, вложенной в четырехмерное пространство. Аналитически он дается выражением

$$\nu(S) = \frac{1}{4\pi} \int g^{1/2} g^{ab} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_a t_{\mu\nu} \partial_b t_{\lambda\rho} \, d^2\xi. \tag{10.92}$$

Статистическая сумма имеет вид:

$$Z = \sum_{(S)} e^{-\mu_0 A(S)} (-1)^{\nu(S)}. \tag{10.93}$$

Возможно, эта струна лежит в одном классе универсальности со струной КХД при больших N. Это — задача на будущее.

В случае ферми-струн зависимость от внешней геометрии возникает из фермионных вкладов на мировом листе, которые, возможно, важнее K^2-члена. Если это так, то вычислить критические индексы будет легче. Это тоже задача на будущее.

Предметный указатель

Новые книги

Редакция журнала «Регулярная и Хаотическая Динамика» совместно с издательским домом «Удмуртский университет» и Московским независимым университетом выпускает новые книги по физике и математике. Вашему вниманию представляется широкий выбор книг, от учебной литературы и трудов классиков, ставших библиографической редкостью, до современных научных исследований российских и зарубежных ученых. Издаваемые книги рассчитаны на самый широкий спектр читателей от студентов и аспирантов физико-математических специальностей до преподавателей вузов и научных работников.

Книги уже изданные и планируемые к изданию в начале 1999 года:

Арнольд В.И.
Геометрические методы в теории дифференциальных уравнений

Арнольд В.И.
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Арнольд В.И., Авец А.
Эргодические проблемы классической механики

Блашке В.
Дифференциальная геометрия

Болсинов А.В., Фоменко А.Т.
Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (т. 1, 2)

Ван-дер-Варден Б.Л.
Метод теории групп в квантовой механике

Вейль Г.
Симметрия

Громов М.
Знак и геометрический смысл кривизны

Дирак П.А.М.
Лекции по квантовой механике

Козлов В.В.
Методы качественного анализа в динамике твердого тела

Козлов В.В.
Общая теория вихрей

Лейбниц И.Г.
Избранные труды по механике

Маркеев А.П.
Теоретическая механика

Мах Э.
Механика. Историко-критический очерк ее развития

Мозер Ю.
Избранные труды - 70

Одэн М.
Вращающиеся волчки. Курс интегрируемых систем

Ольшанецкий М.А., Шапиро И.С.
Лекции по топологии для физиков

Уиттекер Э.
Аналитическая динамика

Ферми Э.
Квантовая механика

Ферми Э.
Термодинамика

Харди Г.
Апология математика

Шредингер Э.
Что такое жизнь с точки зрения физики

Шредер М.
Фракталы, хаос, степенные законы

Сборник статей.
Квантовый компьютер и квантовые вычисления

Наши книги Вы можете приобрести в магазинах Москвы или заказать наложенным платежом. По вопросам сотрудничества, издания и приобретения[1] книг обращайтесь по адресу:

Россия, 426034, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1, УдГУ,
Лаборатория динамического хаоса и нелинейности
тел. (3412) 43-04-98   факс: (3412) 25-85-22
e-mail: subscribe@uni.udm.ru
http://www.uni.udm.ru/rcd

[1]Заявки на приобретение книг наложенным платежом просьба присылать по e-mail'у.

Журнал
«Регулярная и Хаотическая Динамика»

Журнал «Регулярная и Хаотическая Динамика» (РХД), выпускается с 1996 года. В нем публикуются результаты анализа регулярного и хаотического поведения детерминированных динамических систем. Поддерживаемый Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, журнал следует традициям русской школы математики и механики.

РХД выходит четыре раза в год. Все выпуски журнала имели большой успех. С 1998 года РХД печатается на английском языке. В РХД совмещаются строгие аналитические вычисления и результаты численных экспериментов. Читатели найдут в нем естественное сочетание строгого математического анализа, теории дифференциальных уравнений и топологии с наглядными геометрическими и механическими интерпретациями, которые обеспечивают более глубокое понимание поведения динамических систем.

РХД приветствует публикации, содержащие новые результаты в следующих областях:

- интегрируемость и неинтегрируемость динамических систем;
- детерминированный хаос;
- фрактальная динамика;
- симметрия, алгебры Ли и гамильтонов формализм;
- теория самоорганизации и синергетика.

Основной круг читателей РХД — это ученые, занимающиеся классической и прикладной математикой, физикой, специализирующиеся по нелинейным системам, классической механике, математической физике, дифференциальным уравнениям и синергетике.

Условия подписки

Стоимость подписки по России и в странах СНГ

Для учреждений	**Для физических лиц**
Один номер журнала: 80 руб.	Один номер журнала: 60 руб.
Годовая подписка: 300 руб.	Годовая подписка: 220 руб.

Для подписки на журнал перечислите указанную сумму на счет:

Р/С № 40702810168170101897 в Октябрьском ОСБ 8265
К/С 30301810768000606817, АКСБ РФ ОАО Удмуртский банк, г. Ижевск
К/С 30101810400000000601 БИК 049401601

и перешлите копию платежного поручения с указанием обратного адреса и заказа в редакцию журнала по вышеуказанному адресу.

Поляков Александр Маркович

Калибровочные поля и струны

Дизайнер С. А. Кузнецов
Компьютерная подготовка И. В. Рылова
А. В. Широбоков
А. В. Антонов
А. А. Кадейшвили
С. В. Крюков
М. Ю. Лашкевич
С. Е. Пархоменко
Корректор Ю. В. Саяпина

Лицензия ЛР №020411 от 16.02.97. Подписано к печати ??
Формат 60 × 84$^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. ??. Уч. изд. л. ??.
Заказ №?? Тираж 1000 экз.
Издательский дом «Удмуртский университет»,
426011, г. Ижевск, ул. Майская, 23.