В. Я. Перминов

Развитие представлений о надёжности математического доказательства

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1986

Рецензенты:

Л. Б. Баженов, доктор философских наук, профессор,
Б. А. Розенфельд, доктор физико-математических наук, профессор,
Г. И. Макаренко, канд. физико-математических наук, профессор

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Московского университета

Книга посвящена рассмотрению философских проблем, связанных с понятием математического доказательства. Может ли быть математическое доказательство абсолютно строгим? Является ли вполне надежной система логических норм, используемых в доказательстве? Может ли быть гарантирована непротиворечивость системы доказательств определенной теории? Несет ли доказательство новую информацию? Автор стремится дать ответ на эти и некоторые другие вопросы, касающиеся природы математического доказательства. Обсуждаются мнения философов и математиков по каждой из указанных проблем.

Для студентов философских и физико-математических специальностей, а также для всех тех, кто интересуется философскими проблемами современной науки.

П $\frac{0302020100-086}{077(02)-86}$ 2—86

Ложь же никоим образом не входит в число, ибо ложь враждебна природе его, истина же родственна числу и связана с ним с самого начала.

Филолай

ВВЕДЕНИЕ

Математика издревле понималась как абсолютно строгая наука, где все положения доказаны совершенно определенно и навсегда. Самые выдающиеся мыслители античности, средних веков и нового времени пытались лишь объяснить непреложность математических истин, но никогда не ставили их под сомнение. В нашем веке, однако, релятивистский критицизм захватил и математику.

В последнее время среди математиков и философов все более распространяется, можно сказать, становится модным скептическое отношение к достоверности и строгости математического доказательства. Традиционное представление о математике как об идеально строгой науке заменяется теперь чем-то совершенно иным, вплоть до того что математика объявляется наукой, сливающейся с гуманитарным знанием по характеру своих понятий и утверждений[1]. Однако если мы попытаемся понять причину этого явления, то встретимся с большими затруднениями. Дело в том, что большинство современных критиков математики как из лагеря философов, так и самих математиков отдают предпочтение некоторому свободному стилю изложения и чрезвычайно неохотно входят в детальный анализ таких понятий, как интуиция, формализация, логическая норма и т. д., необходимых для решения вопроса по существу. Еще меньше внимания уделяется гносеологическим основаниям проблемы, выяснению общих условий строгости рассуждения и критериев его достоверности.

Задача данной книги состоит в том, чтобы дать гносеологический анализ понятия строгости и с этой позиции прояснить смысл современных фаллибилистских веяний в понимании математики.

Вопрос о строгости математики не является чисто академическим, он может быть поставлен в совершенно конкретной методологической форме. Представим себе физика, который, используя некоторую математическую теорию, предсказывает определенное событие. Если это событие не происходит, то он может винить в этом либо физическую модель, либо математическую теорию (логику вывода), либо точность интерпретации — адекватность математической теории отношениям в физической модели. Традиционное понимание математики дает нам здесь совершенно однозначную установку: расхождение между предсказанием и экспериментом может быть следствием несовершенства физической модели либо неадекватности интерпретации, но никоим образом не дефектности дедуктивного рассуждения. При традиционном понимании математики как строгой науки мы не ставим вопроса о надежности математического аппарата самого по себе, его способности переводить истинные суждения в истинные. Современные сомнения в строгости математического доказательства есть, таким образом, сомнения в правильности традиционной методологии применения математики, в надежности ее как одного из средств исследования природы.

Строгость математического доказательства нельзя рассматривать как некоторое простое, целостное и неразложимое качество. Говоря о строгости доказательства, мы имеем в виду ряд относительно независимых друг от друга его свойств, каждое из которых требует особого анализа.

Рассмотрим для примера известное доказательство бесконечности простых чисел, данное Евклидом. Оно проводится методом «от противного» в несколько шагов, каждый из которых не вызывает сомнения в своей законности. Предположим сначала, что в ряду натуральных чисел только конечное число простых чисел, наибольшим из которых является число p. Рассмотрим теперь число $A=2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p+1$, где 2; 3...$p$ — все простые числа от 2 до p. Число A либо простое, либо составное. Предположение, что A простое, очевидно, противоречит допущению, что p — наибольшее простое число. Пусть A составное. Тогда оно, по основ-

ной теореме арифметики, разлагается на простые сомножители. Но так как A не делится ни на одно из простых чисел от 2 до p, то каждый из его простых сомножителей должен быть числом, большим p. Мы опять приходим к противоречию с тем допущением, что p — наибольшее простое число. Так как допущение утверждения «существует наибольшее простое число» во всех случаях ведет нас к противоречию, то это утверждение ложно и, значит, доказано, что в ряду натуральных чисел наибольшего простого числа не существует.

Это доказательство нас убеждает, и мы предполагаем, что оно совершенно строго. Но, предполагая это, мы допускаем несколько гипотез в его компонентах.

В доказательстве мы опираемся прежде всего на некоторые утверждения о натуральном ряде, которые можно назвать аксиомами. Очевидно, в частности, что мы опирались на следующие утверждения:

1. Числа натурального ряда можно перемножать и складывать, получая в результате числа натурального ряда.

2. Каждое натуральное число разлагается на простые сомножители единственным образом с точностью до порядка сомножителей.

Допустим, что посредством самого внимательного анализа доказательства мы находим некоторое число таких аксиом и останавливаемся на этом, считая, что все предпосылки, необходимые для доказательства, уже выявлены, или, другими словами, предполагая, что содержащаяся в них информация достаточна для доказательства теоремы без привлечения какой-либо другой информации, внешней по отношению к нашим аксиомам. Насколько мы можем быть уверены в этом и существуют ли вообще средства убедиться, что данная теорема вытекает только из данного множества аксиом без привлечения дополнительных предпосылок? Многократное повторение доказательства здесь ничего не дает, ибо, как показывает история математики, неявные предпосылки доказательства остаются неявными не в силу пренебрежения к строгости отдельных математиков. Утверждая, что приведенное выше доказательство строго, мы предполагаем прежде всего, что оно выведено из определенного конечного числа утверждений и не использует никакой информации, выходящей за пределы этих утверждений. Строгое доказательство, таким образом, это доказательство из конечного числа явных утверждений и герметичное по отношению к ним, т. е. не использующее никакой информации, кроме той, которая в них содержится. Обосновать строгость математического доказательства — это значит прежде всего обосновать его герметичность по отношению к некоторому данному множеству посылок.

Утверждая, что некоторое математическое доказательство строго, мы предполагаем также, что использованные в нем правила логики в некотором смысле совершенны и не могут нас подвести. В приведенном доказательстве мы использовали две логические схемы, а именно: закон исключенного третьего $(A \vee \bar{A})$ и правило приведения к абсурду $(\bar{A} \to (B \& \bar{B})) \to A)$, означающее, что если из допущения ложности A вытекает противоречие, то A истинно. Более сложные доказательства используют, конечно, более богатый арсенал логических средств, но с принципиальной стороны это несущественно. Утверждая строгость конкретного математического доказательства, мы утверждаем и надежность используемых правил логики. Дискуссия о законе исключенного третьего в XX веке в связи с интуиционистским пониманием математики показала, что это отнюдь не тривиальное допущение. Проблема строгости математического доказательства состоит в этом плане в обосновании надежности логических средств доказательства (логических норм).

Допустим, что мы каким-то образом разрешили как проблему герметичности, так и проблему адекватности логических норм и совершенно убеждены в адекватности посылок заключению в данном конкретном доказательстве или во всем множестве доказательств некоторой теории. Оказывается, что это еще не решает проблему строгости удовлетворительно. Наше доказательство перестанет быть для нас доказательством, если обнаружится, что в той же системе предпосылок можно доказать и противоположное утверждение. По отношению к рассмотренному доказательству мы убеждены, что такого быть не может. Такая ситуация (ситуация противоречия) практически возникает редко, но тем не менее она возможна, и обоснование строгости данного конкретного доказательства предполагает доказательство его однозначности в смысле результата, а точнее, доказательство непротиворечивости всех утверждений, выводимых в данной системе аксиом. Проблема обоснования математической строгости в этом плане сводится к обоснованию непротиворечивости системы математических теорем.

Проблема строгости в математике в первом приближении сводится, таким образом, к следующим трем проблемам:

1. В какой мере возможно обоснование герметичности доказательств?

2. Насколько мы можем доверять правилам логики, используемым в доказательстве?

3. В какой мере можно обосновать однозначность доказательства, т. е. невозможность противоречащего результата в данной системе посылок?

Задача настоящей работы состоит в том, чтобы попытаться в возможно более систематической форме ответить на эти три вопроса.

Для понимания современных рассуждений о пределах математической строгости и пределах ее критики необходимо провести существенные различения. Необходимо прежде всего провести различие между идеалом строгости и нормами строгости, специфичными для каждой эпохи ее развития. Идеал математической строгости изменяется чрезвычайно медленно. Со времени греческой математики и до XIX века он по существу оставался неизменным и состоял в требовании, чтобы теоремы следовали из аксиом без прибавления к ним каких-либо посторонних допущений, т. е. он состоял в требовании герметичности доказательства. Наиболее важное изменение этого идеала произошло в XIX веке и состояло в отказе от реалистической интерпретации аксиом как истинных и очевидных утверждений. Современный математик не связывает идеал строгости с требованием предметной истинности аксиом или с идеей их очевидности. Он вместе с тем включает в этот идеал наряду с герметичностью также и требование непротиворечивости всей системы выводов и адекватности логических норм. Это обогащение идеала идет, однако, не по линии его радикального изменения, а лишь в плане экспликации традиционного понятия. Требование непротиворечивости всей системы выводов данной теории и требование адекватности логических норм неявно всегда включались в представление о строгом выводе, но для математиков вплоть до XX века эти требования представлялись всегда и безусловно выполненными, всегда имеющимися налицо предпосылками мышления, проистекающими из самой его природы. Лишь в последнее время было понятно, что эти условия не выполняются сами собой, что здесь возможна вариабельность, следовательно, и особый источник нестрогости математического рассуждения в целом. Явная формулировка указанных условий сделалась, таким образом, обязательной для адекватного представления идеала строгого вывода. Подобные изменения в общем представлении о строгости, разумеется, возможны и в будущем, но важно отметить, что они происходят чрезвычайно медленно и только в рамках экспликации фундаментальных представлений о сущности математики как науки.

Напротив, признаки, с которыми мы связываем строгость доказательства, в то или другое время изменяются относительно быстро. Признаком строгого доказательства для пифагорийцев раннего периода было доказательство арифметическое. После открытия несоизмеримости величин гарантией строгости стали считать проведение его в геометрических понятиях. Декарт настаивал на правах интуитивной ясности и очевидности и поднял эти критерии математической истины до уровня общего критерия истинности. В XVIII веке был выдвинут ряд отрицательных признаков строгого доказательства: запрет апеллировать к геометрическому чертежу и т. д. Очевидность окончательно потеряла свои права в качестве признака строгости в XIX веке. Никогда не угасающие споры о строгости математики редко затрагивают общий идеал строгости; в этом пункте, на уровне общей интуиции строгости, математики не расходятся друг с другом. Речь идет, как правило, о конкретных требованиях к доказательству, которые предполагаются идеалом строгости. Общий идеал строгости не дает здесь однозначного руководства, и каждая эпоха в развитии математики характеризуется преобладанием своих, только ей свойственных требований к

математическому рассуждению, призванных гарантировать его строгость.

Общие принципы строгости, которые выдвигаются той или иной эпохой, далеко не всегда могут быть реализованы в форме эффективных критериев. Требование избегать геометрических интуиций в доказательстве выдвигалось уже Эйлером, но оно не могло быть критериальным до появления идеи формализованного доказательства в конце XIX века. Естественное с современной точки зрения требование непротиворечивости вводимых определений пока не имеет никакого реального критерия. В общем случае поэтому необходимо различать исторические нормы (требования) строгости от критериев строгости, посредством которых эти нормы проводятся и фиксируются в реальном рассуждении.

Степень развития норм и критериев строгости необходимо отличать от уровня *фактической* строгости математических доказательств в ту или другую эпоху. Мы будем считать математическое доказательство фактически строгим, если оно принимается в качестве доказательства и с точки зрения последующих эпох, т. е. если оно не может быть отвергнуто как ошибочное и невосполнимое с точки зрения какихлибо других, более глубоких критериев строгости. Фактическая строгость математики в широком диапазоне независима от существующих норм и критериев строгости. Несмотря на неразвитость таких критериев, математики всех времен мыслили достаточно строго. В отличие от эмпирического знания в математике мы не наблюдаем систематического процесса фальсификации утверждений, полученных учеными предшествующих эпох. Эта замечательная особенность математического знания является, несомненно, одним из оснований представления о математике как о строгой и непогрешимой науке.

Обсуждая математический метод, мы явно или неявно исходим из определенного образа математики как науки, из некоторых гносеологических предпосылок, которые (по крайней мере в определенном контексте) не подвергаются обсуждению. Одной из таких предпосылок является то или иное решение вопроса о характере математических понятий и об отношении математики к эмпирической науке. Здесь исторически сформировались три основных взгляда, три образа математики, которые можно охарактеризовать как содержательный, или предметный, формалистский (структуралистский) и функциональный, или системный [2]. Хотя эти представления возникли в различные эпохи на основе существенно различного содержания математики, они продолжают сосуществовать и в современной философии математики, определяя различные подходы ко всем ее проблемам.

В соответствии с первым воззрением математика понимается как наука, отражающая некоторые аспекты реальности, как имеющая определенный предмет. По вопросу о том, что именно отражается в математических понятиях, что является предметом математики, в истории философии и математики имели место существенно различные мнения. Для пифагорийцев — это сам космос в его идеальной законченности, для Аристотеля, Бэкона, Ньютона и многих других математиков и философов вплоть до XIX века — это некоторые отношения реальных вещей, взятые в идеализированном виде, для Канта, Шопенгауэра и Брауэра — это непреложности самого сознания (чистая интуиция пространства, процесс мысленного конструирования и т. п.). Реализм в современной философии математики также связывает математические понятия с некоторым содержанием, истолковывая его однако скорее в онтологическом, чем в эмпирическом или теоретическом плане. Для содержательного понимания математики характерно стремление «означить» математические понятия через их соотношение с некоторой независимой от них реальностью (объективной или субъективной), объяснить особенности математики как науки из специфики этой реальности. Математика безусловно истинна для пифагорийцев как отражение идеального космоса. Ньютон, Гегель, Конт, Милль объясняли точность математических истин особой простотой тех сторон природы, которые она отражает. Для Канта и Брауэра достоверность математики проистекает из непосредственной интуитивной данности ее объектов.

Натуралистическое воззрение на математику уже в XVIII веке вошло в неустранимое противоречие с фактическим ее содержанием. Признание неевклидовых и многомерных геометрий, абстрактных алгебр,

разрывных функций и, наконец, актуально бесконечного привело к радикальному изменению взглядов математиков на природу своей науки. Точка зрения, сформировавшаяся к концу XIX века, подчеркивает логическую природу математических понятий и математических теорий. Математическая теория с этой точки зрения не имеет предмета в том смысле, в каком его имеют естественные науки. Математическая теория в своих понятиях может отражать реальность, но она, в отличие от опытных наук, не исследует этой реальности; она направлена на построение логических замкнутых структур, которые и делает своим предметом исследования. Пространство — не предмет геометрии, но лишь ее интуитивная основа, облегчающая построение системы геометрических операций. Математические понятия — не абстракции и даже не идеализации, подобные идеализациям физики, но конструкции, удовлетворяющие определенным преобразованиям и созданные именно для этой цели. В основе образования математических теорий лежит не абстрагирование, не тенденция к адекватности отражения, но осознанная или неосознанная конвенция, нацеленная на то, чтобы сконструировать систему объектов с достаточно богатой системой внутренних (логических) связей.

Математическая теория как логически организованная система объектов и операций должна рассматриваться сама по себе вне какой-либо предметной интерпретации. В этом смысле она не истинна и не ложна, но может приобрести это качество только в процессе такой интерпретации. Формалистская концепция математики, в отличие от содержательной, не накладывает каких-либо ограничений на предмет математики: приемлем любой объект, заданный непротиворечивой системой требований. Строгость и непреложность математического рассуждения проистекают с этой точки зрения не из свойств предмета отражения, но исключительно из логической организации математической теории. Единство математики как науки определяется также не предметом, но только методом.

Развитие математики в XX веке привело к некоторому изменению этой позиции. Оно все более побуждает рассматривать математику с точки зрения ее системной организации и ее функции. Математическая теория не соотносится в обязательном порядке с какой-либо системой эмпирических представлений, но она рассматривается как необходимо связанная с реальностью в качестве прямого или косвенного орудия ее преобразования, как необходимый элемент математики в целом. Если сторонник структуралистской точки зрения определяет математику как совокупность абстрактных структур, то функционалист определяет ее как систему моделей, подчеркивая потенциально прикладной характер математических теорий и основной стимул развития математики как науки. Математика понимается здесь как функционально подчиненная подсистема в системе научного знания в целом. Характер математических понятий, внутренняя структура математики и сама ее история истолковываются теперь на основе некоторых общих гипотез о ее функции в познании. Конвенция, играющая значительную роль в формалистском понимании математики, перестает быть произвольной — на нее накладываются требования актуальной или перспективной целесообразности для функционирования математики в целом. Абстрактная свобода построения объектов также, естественно, ограничивается практической целесообразностью. Функционалистская философия математики делает акцент не на логической структуре математики, но на целостности ее как динамической системы, на особенностях развития математической теории, на обосновании внутренней телеологии этого развития, на связях математики с другими науками. Сама логическая организация математического знания рассматривается здесь как продукт системности математики, взаимосвязи ее частей.

Функциональная (системная) точка зрения на математику будет основной гносеологической предпосылкой нашего исследования математической строгости. Строгость математического рассуждения, несомненно, не самоцель. Она возникает и совершенствуется как некоторое средство, определяющее эффективность математики, и она, следовательно, может быть понята только из основных требований этой эффективности, т. е. из общих задач математики по отношению к науке в целом.

Наряду с понятием строгости мы будем использовать также понятие достоверности (надежности) математического доказательства, характеризующее доказательство с точки зрения предмета рассуждения, фактического положения дел в некоторой внутриматематической или физической реальности. Имеются заведомо нестрогие рассуждения, но достоверные в том смысле, что они приводят к установлению полной истины. С другой стороны, можно представить себе логически законченное (строгое) доказательство, которое по некоторым причинам не воспринимается как достоверное, гарантированное от контрпримеров. Такая ситуация возникает иногда в основаниях математики. Таким образом, строгость и достоверность — разные понятия, хотя и тесно связанные: наше стремление к строгости доказательства проистекает, очевидно, из стремления к его достоверности и надежности как средства предсказания в науке.

Отметим еще то обстоятельство, что математическое доказательство может рассматриваться с нескольких, существенно различных точек зрения. Мы можем изучать его с позиций чистой логики, анализируя его структуру и типы, можем подходить исторически, выясняя обстоятельства зарождения и смены его канонов, рассматривать его в плане возможных эвристических средств, как это делает в своих книгах Д. Пойа, или, наконец, исследовать его психологический механизм. Задача философии не в синтезе этих подходов. Такой синтез, вообще говоря, и невозможен. Гносеологический подход состоит в рассмотрении доказательства с особой точки зрения, а именно с точки зрения его функции, его общих задач в науке.

Глава I

ГЕРМЕТИЧНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Строгое математическое доказательство отличается от всякого другого рассуждения тем, что в нем не используется никаких допущений, которые не зафиксированы в посылках. Это свойство доказательства мы будем называть герметичностью.

Герметичность доказательства не тождественна простой достаточности посылок, ибо при наличии таких посылок доказательство может проводиться не строго, а с обращением к некоторого рода наглядности, аналогиям и т. п.

При анализе герметичности мы будем обращать внимание не на формальную достаточность посылок в теории для того или иного доказательства, но на фактический процесс доказательства в плане наличия или отсутствия в нем посылок, не оговоренных в условиях.

Это простое требование на практике оказывается чрезвычайно трудно выполнимым. История математики показывает, что многие доказательства даже в элементарной математике, считавшиеся совершенно строгими в течение многих веков, при более тщательном анализе оказались негерметичными, неполными с точки зрения фиксации своих посылок. Теоретическая задача состоит в том, чтобы понять вообще принципиальные возможности математического рассуждения быть абсолютно герметичным.

Негерметичное доказательство выглядит для нас убедительным, принимается как строгое по той причине, что оно является интуитивно ясным. Именно интуиция скрывает от нас недостаточность логики, принципиальную нестрогость доказательства. Исследование герметичности, таким образом, требует прежде всего анализа доказательства с точки зрения взаимосвязи в нем интуитивных и логических элементов.

1. Тенденция математических доказательств к герметичности

Слово «доказательство» в самом общем смысле обозначает рассуждение, приводящее к установлению истинности некоторого утверждения. В математике доказательство может быть проведено на двух уровнях: на формальном и содержательном. Под содержательным математическим доказательством понимается рассуждение относительно математических объектов (чисел, фигур, функций, операций и т. п.), которое опирается на очевидные или данные в определении свойства этих объектов и протекает в рамках обычной логики научного рассуждения. На доказательство в этом смысле не налагается никаких требований, кроме того что оно должно быть достаточно убедительным.

Основная часть математики всегда была и является в настоящее время содержательной по характеру своих рассуждений. Математики убеждают себя и других в правильности своих доказательств, исходя из необходимых свойств объекта, очевидных возможностей его преобразования, перестройки и т. п., из бесспорной правильности известных арифметических и алгебраических операций и т. д. При этом они, как правило, не вникают в анализ логической структуры доказательства и не ставят под сомнение норм обычной логики.

Специалисты по математической логике и основаниям математики понимают, однако, под доказательством нечто другое. Они стремятся предельно выявить все компоненты доказательства, уяснить логический характер и истоки каждой из его посылок и, наконец, сделать явной логику доказательства, узаконить каждый его шаг с точки зрения определенного, заранее зафиксированного правила. Другими словами, они заменяют обычное содержательное математическое доказательство неким аналогом, предельно жесткой схемой, которая призвана зафиксировать его логическую структуру в возможном отвлечении от различного рода внелогических представлений, обычно связываемых с объектами в содержательном рассуждении. Такой аналог математического доказательства, построенный с помощью символов и операций математической логики, называется формальным доказательством.

Этот аналог является адекватным в том смысле, что он может быть построен для любого правильного математического доказательства и может рассматриваться, таким образом, в качестве критерия правильности содержательного доказательства. Математическое рассуждение можно считать правильным (строгим, корректным) в том и только в том случае, если для него может быть построен формальный аналог (формальное доказательство).

Говорить о формальном доказательстве имеет смысл только для формализованной теории, поэтому необходимо пояснить смысл этого последнего понятия. Формализованная теория считается заданной, если заданы следующие ее компоненты:

1. Алфавит, т. е. список всех употребляемых в ней знаков (постоянных, переменных, логических знаков, скобок).

2. Правила построения правильных формул, т. е. правила, отделяющие правильные формулы от случайной последовательности знаков.

3. Аксиомы, представляющие собой список формул, принятых в данной теории в качестве истинных.

4. Правила вывода, фиксирующие допустимые способы перехода от одних формул к другим.

Если формализованная теория задана, то формальное доказательство может быть определено как последовательность формул в формализованной теории, каждая из которых является либо аксиомой, либо формулой, выводимой из аксиом посредством допустимых в данной теории правил вывода. Последняя формула в этой цепи будет теоремой.

Из этих общих определений уже видно, что формальное доказательство представляет собой некоторого рода механическую процедуру со знаками и их комбинациями, призванную выявить и предельно канонизировать допустимые ходы реального математического рассуждения. Главной особенностью такого доказательства является полное отвлечение от смысла объектов рассуждения, они даны нам теперь только в виде формул, к которым применимы те или иные правила перестройки, объединения и т. д.

Другой его особенностью, важной с гносеологической точки зрения, является конечность процедуры подтверждения. Если представлено формальное доказательство формулы в формализованном исчислении, то нетрудно видеть, что проверка его правильности сводится к ряду конечных и эффективных процедур. Мы имеем конечное число формул (по определению доказательства), каждая из которых за конечное число шагов проверяется как принадлежащая к множеству правильно построенных формул. Законность появления каждой формулы в доказательстве обосновывается либо указанием на то, что она аксиома, либо демонстрацией конечного числа применений правил вывода к аксиомам, посредством которых она выводится из аксиом.

Из сказанного ясно, что формализованные теории в математике — не особая ветвь математики (такая математика сама по себе вообще не могла бы развиваться), но некий аналог содержательной математики, который строится с той целью, чтобы обосновать полную законность утверждений, полученных на содержательном уровне. Идея построения такого аналога возникла не из чистого стремления математиков к абсолютной строгости, но из весьма реальных методологических трудностей, обнаружившихся в XVIII и XIX веках в обосновании принципиально важных математических результатов. Формализация доказательства представляется, в частности, единственным надежным средством убедиться в герметичности доказательства, т. е. в том факте, что определенное утверждение (теорема) следует из данных и только из данных положений и доказательство его не использует каких-либо неявных допущений, оставшихся вне нашего контроля.

Тенденция к герметичности математического рассуждения, к безусловному выявлению всех его посылок проявляла себя на всех этапах развития математики. Прекрасным примером является здесь геометрия в истории поисков окончательного обоснования всей системы утверждений. Известно, что доказательства геометрии в том виде, как они представлены в «Началах» Евклида, содержат много погрешностей против строгости, в частности, почти все они негерметичны. Как показывает современный анализ, Евклид сформулировал меньше половины аксиом, необходимых для систематического вывода геометрических теорем[1]. Он оставил в стороне аксиомы непрерывности, аксиомы положения, аксиомы конгруэнтности (движения) и ряд других положений, без которых строгое развитие геометрии невозможно. Математики постепенно выявляли эти погрешности, но только в XIX веке в связи с развитием самой идеи аксиоматической строгости геометрия получила удовлетворительное логическое обоснование.

Другим замечательным примером движения к строгости является развитие идей дифференциального исчисления в XVIII веке. Здесь мы в очень яркой форме можем наблюдать весь спектр возможных нарушений строгости в рассуждениях математиков, а с другой стороны, и постоянную борьбу за ее восстановление. Рассмотрим этот пример подробнее.

Современная математика (дифференциальное и интегральное исчисление) появилась в Европе в XVII веке как дальнейшее развитие метода исчерпывания, изобретенного в античной математике, а также в русле анализа геометрических свойств кривых линий, таких, как эллипс, гипербола, парабола, циклоида и т. д. В какой-то мере эти исследования диктовались и практическими потребностями в связи с интересом к задачам механики и астрономии.

В работах математиков XVII века (Кеплер, Кавальери, Ферма, Барроу и др.) были различными частными методами решены многочисленные задачи, которые мы относим сегодня к дифференциальному и интегральному исчислению: нахождение площадей криволинейных фигур, проведение касательной к произвольной кривой, нахождение максимумов и минимумов у широкого класса функций. Лейбниц и Ньютон завершили эти работы созданием алгоритмов, позволяющих единообразным путем решать все эти, на первый взгляд разнородные задачи. Эти алгоритмы, будучи приняты, подверглись, однако, критике за неясность в основных понятиях.

Основным понятием теории Лейбница было понятие дифференциала, или бесконечно малого приращения функции. Пусть мы имеем функцию $y=f(x)$. Если мы увеличим ее аргумент (x) на некоторую величину dx, то получим приращение функции $dy=f(x+dx)-f(x)$. Для Лейбница $dy\neq0$, но, с другой стороны, эта величина столь малая, что, умножив ее на любое конечное число, мы не получим конечной величины, т. е. Лейбниц в основном своем определении проводил чуждую элементарной математике и вообще здравому смыслу идею неархимедовой величины[2]. Эта идея, однако, была необходима Лейбницу для оправдания предлагаемого им способа вычисления дифференциала. Пусть, к примеру, дана функция $y=x^2$. Придавая переменной x приращение dx, получим $y+dy=(x+dx)^2$, откуда $dy=2xdx+dx^2$. Величину dx^2 Лейбниц предлагает отбрасывать как несравненно малую по отношению к величине $2xdx$. В результате $dy=2xdx$. Результат правильный с современной точки зрения, но процедура его получения является, очевидно, противоречивой. Если допустить, что $dx=0$, то и $dy=0$ (из исходного равенства). Но если $dx\neq0$, то, не нарушая строгости, мы не имеем права отбрасывать dx^2. Рассуждения Лейбница о несравненно малых величинах были попыткой как-то оправдать такой способ действия.

Алгоритм Ньютона базировался на другом варианте понятия актуально бесконечно малой, на понятии флюксии (производной — в современной терминологии) и страдал тем же самым противоречием. При отыскании флюксий Ньютон также отбрасывал члены, заведомо не равные нулю, хотя вообще высказывал мнение, что в математике недопустимо пренебрегать никакими количествами, хотя бы и самыми малыми[3].

Хотя абстрактно идеал строгого доказательства сохранялся, практически строгость была утеряна. Дж. Беркли не без сарказма заявлял, имея в виду прежде всего Ньютона: «Тому, кто в состоянии переварить вторую или третью флюксию, второй или третий дифференциал, не следовало бы привередничать в отношении какого-либо положения в вопросах религиозных»[4].

К. Маркс, рассматривая историю развития анализа, писал по поводу исчисления флюксий у Ньютона: «Если в $\dot{y}=\dot{u}z+\dot{z}u+\dot{u}\dot{z}$ (слагаемое) $\dot{u}\dot{z}$ отбрасывается ввиду его бесконечной малости по сравнению с $\dot{u}z$ и $\dot{z}u$, то математическим оправданием этому может служить лишь ссылка на то, что $\dot{u}z+\dot{z}u$ имеет в моих глазах приближенное значение, мыслимое сколь угодно близким к точному. Подобного рода маневр встречается и в обыкновенной алгебре. Но тогда мы оказываемся перед лицом еще большего чуда: благодаря этому методу мы получаем для производной функции [в] x отнюдь не приближенные, а совершенно точные значения...»[5].

Противоречивость основополагающих принципов дифференциального исчисления, несогласие их с представлениями о строгом доказательстве были очевидными для большинства математиков XVIII века. Эйлер, Даламбер и Лагранж говорили о необходимости возвращения к «греческой строгости». Это действительно было актуальным: греческие математики, несмотря на свои недостатки в строгости, не смешивали строгое доказательство с приближенным и не пренебрегали явно реальными величинами в предположении их ничтожной малости. Задача, однако, была сложной и, более того, практически невыполнимой. С современной точки зрения совершенно ясно, что анализ не мог быть обоснован в XVIII веке просто в силу того, что он еще не подготовил тех понятий, в которых это обоснование могло быть реализовано. Оно было невозможно, поскольку не были выработаны строгие определения предела, функции, непрерывности и самого дифференциала (известно, что до середины XVIII века дифференциал смешивался с приращением функции). Оно не было возможным еще и потому, что отсутствовал сам идеал обоснования. Идея аксиоматического метода, перешедшая в новое время от античности, была слишком неопределенной и не могла стать методологическим руководством для математиков XVIII века. Надо было не просто возвратиться к греческой строгости, но существенно превзойти ее, уточнить сам идеал обоснования. Условий для такого методологического шага в XVIII веке, как мы понимаем теперь, еще не было. Требовалось, наконец, уточнить само понятие строгого доказательства. Общий идеал строгости у математиков XVIII века был, разумеется, совершенно правильным и мало отличающимся от современного: доказать строго — это значит вывести с необходимостью из истинных посылок. Но какие посылки можно считать допустимыми в математическом рассуждении и как можно проверить «необходимость» следования — на эти вопросы математики того времени, как показывает анализ, не имели достаточно определенного ответа.

Многие математики стремились обосновать анализ на пути, который нужно охарактеризовать как метафизический, или натурфилософский.

Метафизическое обоснование исчисления бесконечно малых проявлялось в стремлении оправдать чисто математические операции (в первую очередь дифференцирование) ссылкой на некоторые фундаментальные свойства природы. Вообще такая аргументация соответствовала духу XVIII столетия, когда еще крепко было убеждение в том, что философия является наукой наук и что все частные законы о природе должны быть выведены из общих философских принципов. Такая тенденция проявилась и в обосновании анализа на первой стадии его развития.

Важное место в аргументации Лейбница занимает принцип непрерывности, на основе которого он стремится дать некоторое общее оправдание дифференциальному исчислению. В письме к Вариньону Лейбниц пишет: «И мнимые корни имеют свое основание в вещах... Точно так же можно сказать, что бесконечные и бесконечно малые обоснованы тем, что в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности. Об этом свидетельствует не только наш геометрический анализ трансцендентных, но еще и мой закон непрерывности, в силу которого допустимо рассматривать покой как бесконечно малое движение, совпадение — как бесконечно малое расстояние, равенство — как последнее из неравенств и т. д.»[6]. В онтологическом плане, т. е. применительно к реальности, Лейбниц понимает непрерывность как отсутствие скачков, разрывов в процессе. В методологическом же плане этот принцип превращается у Лейбница в некоторый вариант современного принципа соответствия. Лейбниц считает, что законы движения должны непрерывно переходить в законы покоя, законы неравенств — в законы равенств и т. д. По отношению к поведению функций принцип непрерывности формулируется им в следующем виде: «Если переменная на всех промежуточных этапах обладает некоторым свойством, то и ее предел будет обладать тем же свойством»[7]. С точки зрения этого принципа равенство $dy=2x\,dx$ для функции $y=x^2$ объясняется Лейбницем следующим образом: равенство $\frac{dy}{dx}=2x+dx$ справедливо для любого как угодно малого dx, а следовательно, оно будет справедливым и при $dx=0$ как при его предельном значении.

В целом такое обоснование, конечно, не является удовлетворительным, так как оно оставляет в стороне вопрос: что должно означать выражение $\frac{dy}{dx}$ при $dx=0$?

Такого рода тенденция к метафизическому обоснованию присутствует также в работах Л. Эйлера. Эйлер также стремится найти понятиям бесконечно большого и бесконечно малого некоторые реальные прототипы, привлекая с этой целью соображения о бесконечной делимости материи. Однако, чувствуя слабость и противоречивость такой аргументации, он пишет: «Если даже отрицать, что во Вселенной действительно существует бесконечное число, то все же в математических исследованиях часто встречаются вопросы, на которые нельзя ответить, если не допустить бесконечного числа»[8]. Эйлер здесь стоит на пороге того, чтобы понять различие двух сфер: математической и физической, математического и физического существования. Однако сам факт присутствия в специальной математической работе у Эйлера пространных рассуждений о бесконечной делимости материи доказывает, что такого различия со всеми его последствиями для обоснования математики Эйлер не сделал.

На этих примерах мы видим, что математическое мышление XVIII века еще не отделилось полностью от натурфилософии и что перед лицом трудностей логического порядка математики искали спасения в рассуждениях о природе в целом. Лишь во второй половине XVIII века Даламбер и Лагранж наложили вполне определенный запрет на натурфилософию в рамках математики, что, безусловно, было большим шагом вперед в понимании специфики математического знания и автономности математического рассуждения от аргументов внешнего порядка.

Этот процесс, однако, еще не означал, что математики вполне осознали внутреннюю логику своих

доказательств. Математика XVIII века, в особенности это относится к геометрии, тесно связывалась не только с натурфилософскими представлениями о мире, но и с более конкретными — физическими или, точнее, механическими представлениями. Ньютон вводил понятие флюксии как скорость некоторого движения; понятие предела задавалось и иллюстрировалось также кинематически. И это не было данью популярности изложения. Здесь проявлялось определенное видение математики как знания, опирающегося на представления о реальном пространстве и реальных движениях. Согласно Ньютону, математические образы «коренятся в самой природе вещей и ежедневно наблюдаются нами в движении тел»[9]. Но такой подход привязывал математическое рассуждение к очевидностям механического (кинематического) порядка и делал его заведомо негерметичным. Для математиков XVIII века было естественным думать, что каждая непрерывная функция имеет производную, так как всякое движение имеет скорость, и что всякое приближение к пределу монотонно, так как движущееся тело может приближаться к некоторой точке только с одной стороны, и т. п. Известно, что только в конце XVIII века у некоторых математиков возникла мысль о необходимости доказать дифференцируемость непрерывной функции.

Использование механических допущений в анализе было подвергнуто критике Даламбером и Лагранжем. Лагранж справедливо указывал на то, что «...вводить в исчисление, предметом которого являются лишь алгебраические величины, движение — значит вводить идею, ему чуждую, и принуждать рассматривать эти величины как линии, пробегаемые движущимся телом. С другой стороны, следует признать, что мы отнюдь не обладаем четким понятием о том, что такое скорость точки в любое мгновение, в случае, когда скорость переменная»[10]. С точки зрения Лагранжа, дифференциальное исчисление логически независимо от анализа, оно должно быть изложено совершенно автономно, на собственных основаниях и только после этого может применяться для выражения законов механики или какой-либо другой науки. Надо отметить, что эти взгляды Лагранжа были приняты не сразу. Большое число книг и учебников по анализу было написано в соответствии с ньютоновской методологией еще в XIX веке.

Наконец, с осознанием независимости математических рассуждений от метафизики и механических аналогий оставалась еще одна трудность методологического порядка, затруднявшая становление современной идеи строгого математического доказательства. Дело в том, что для большинства математиков XVIII века и даже тех, кто решительно отказывался от механических аналогий в процессе математического рассуждения, была чем-то само собой разумеющейся законность ссылок на геометрические представления, в частности, апелляция к чертежу. Это отчасти объяснялось высоким авторитетом «Начал» Евклида. Геометрические истины считались хорошо обоснованными, и именно геометрия, а не арифметика мыслилась наиболее авторитетной частью математики, некоторым ее фундаментом и, следовательно, соответственной предпосылкой алгебры и анализа. Существование производной и интеграла многими математиками XVIII века обосновывалось исключительно рассмотрением очевидных свойств кривой линии, ее касательной и т. д. Хотя математические рассуждения в этом случае были независимыми от механических представлений, они отнюдь еще не были строгими, они не были герметичными в собственно математической области.

По мере развития анализа, особенно с введением в практику разрывных функций, а также функций комплексного переменного, недостаточность геометрических интуиций становилась все более очевидной. Развернутую критику использования как физических, так и геометрических представлений в процессе доказательства дал в начале XIX века Б. Больцано. Больцано настаивал на том, что даже в случаях высочайшей очевидности (например, в случае утверждения, что между положительным и отрицательным значениями непрерывной функции имеется, по крайней мере, одно ее значение, равное нулю) утверждение еще не является истинным как утверждение математики, если оно не выведено из понятий, непосредственно определяющих эту функцию [11].

В результате критики натурфилософских, механических и геометрических интуиций в начале XIX века

сформировался новый взгляд на сущность математического доказательства. Математическое доказательство с этой новой точки зрения должно быть аналитическим, оно должно исходить только из явно сформулированных допущений и определений математического порядка (выраженных на математическом языке), должно происходить по правилам логики, и оно законно только относительно тех объектов, существование которых доказано в рамках математических допущений. Работы Коши, Лобачевского, Больцано, Гаусса, Остроградского и других математиков первой половины XIX века написаны уже в соответствии с этими новыми требованиями к строгости доказательства. Мы можем сказать, что в начале XIX века математическое доказательство, по крайней мере в теории, приобрело автономность от внешних содержательных допущений, внутреннюю герметичность, которая является основным условием строгости математического доказательства в современном ее понимании.

На практике успех не был полным потому, что, сформулировав более точную идею математического доказательства, математика начала XIX века еще не обладала эффективными средствами контроля доказательства, т. е. эффективными критериями строгости. Можно сказать, что методология математики в то время еще и не созрела до понимания необходимости таких критериев.

В течение XIX века ситуация изменилась решительным образом. Развитие неевклидовых и многомерных геометрий потребовало уточнения процедуры математического доказательства. Эта проблема стала методологически неотложной с появлением теории множеств и с обнаружением противоречий в ее утверждениях. Наиболее существенный шаг в определении строгого математического доказательства сделал Д. Гильберт в своей теории формального доказательства.

С начала 50-х годов XIX века в работах Буля и Шредера началось развитие нового раздела логики — математической логики. Символика математической логики оказалась прежде всего удобным средством для записи математических утверждений во всех областях математики и для символической записи математического вывода в целом. Для Пеано и Гильберта с самого начала было ясно, что если строгое математическое доказательство не использует никаких допущений, кроме тех, которые записаны в аксиомах, то оно может быть представлено последовательностью формул и допустимых операций над ними, и, наоборот, доказательство не может быть признано строгим, если оно не допускает такого представления. Символика математической логики позволила, таким образом, сформулировать четкий критерий строгости (герметичности) математического доказательства, хорошо согласующийся с нашим интуитивным пониманием строгости. Суть этого критерия в том, что доказательство строго, если оно формализуемо. Формализация математики была понята как средство уточнения математических понятий и как критерий строгости (герметичности) математического рассуждения.

Не подлежит сомнению, что формальное представление теории — чрезвычайно высокая гарантия полной герметичности ее доказательств. Если доказательство представлено в виде последовательности формул с точными правилами перехода от одной из них к другой, то такое доказательство в высшей степени независимо от содержательных представлений о предмете рассуждения и не может вызывать каких-либо сомнений в своей герметичности.

Единственное возражение против завершенности формализованного математического доказательства состоит в том, что оно все-таки не полностью свободно от интуитивных допущений. В предисловии к книге Л. Кутюра «Философские принципы математики» Ф. Линде справедливо указывал на то, что каждый шаг логического доказательства требует принятия допущений вида «α есть частное значение функции φ». Из этого он заключал, что логическая «полностью формализованная система» либо должна содержать бесконечное количество аксиом вида «α — частное значение φ», либо должна опираться на некоторый общий интуитивный принцип подведения части под целое, родственный наглядному представлению у Канта [12].

В целом это возражение надо признать верным. Ни одно рассуждение человека не свободно от содержательного контекста, а следовательно, и от некоторых интуитивных допущений. Решение проблемы герметичности связано, таким образом, с выяснением вопроса о том, может ли неизбежная интуитивность доказательства сосуществовать с его полной герметичностью и достоверностью. Ответ на этот вопрос требует более детального анализа интуиции.

2. Интуиция и аподиктическая достоверность

Интуицию мы можем понимать двояко, так сказать, в статическом и динамическом плане. В первом случае интуиция — это некоторое созерцание, ясное видение, связанное с мыслью и делающее эту мысль непреложной. Мы хорошо осознаем, к примеру, что прямая пересекает окружность в двух, а не в трех или четырех точках, и это осознание, несомненно, продиктовано определенным наглядным представлением о возможных положениях окружности и прямой на плоскости. Интуитивная идея в этом смысле есть идея самодостоверная, ясная для сознания, не допускающая альтернативы.

Интуиция во втором (динамическом) смысле лучше всего выражается словом «озарение». Под интуицией в этом случае мы понимаем особый *процесс* перехода от незнания к знанию, не опирающийся на последовательное рациональное рассуждение.

Указанные подходы к пониманию интуиции существенно различны. Интуитивно ясная идея в первом, статическом смысле, предполагается ясной всегда, как бы изначально данной сознанию. Говоря же об интуиции как об озарении, мы подчеркиваем как раз то обстоятельство, что наша идея не является изначально ясной и что эта ясность достигается здесь лишь в течение некоторого времени, в процессе перехода от неясности к ясности. Интуиция в первом смысле связана с содержанием, полностью определена им (начала геометрии ясны для каждого в силу своей простоты и т. п.), в то время как интуитивно ясное во втором смысле определяется специфическими особенностями субъекта: идея, озарившая одного и интуитивно ясная для него, как правило, не является очевидной для других.

Интуиция в динамическом смысле не может быть предметом философского анализа. Исследуя историю науки, философ и историк, разумеется, на каждом шагу фиксируют такого рода интуитивные шаги, «озарения». Они могут также в науковедческих понятиях зафиксировать некоторую логику таких шагов, зависимость их от состояния знаний в данной области, от существовавших традиций мышления и т. д. Но сам механизм интуитивного шага остается при этом полностью прерогативой психологии мышления [13]. Другое дело статическая интуиция. Интуитивное видение этого рода связано, очевидно, с некоторыми особенностями объекта познания; оно интерсубъективно, не зависит от индивидуальной психологии, а следовательно, нуждается не в психологическом, но в социально-деятельностном и гносеологическом анализе.

Можно выделить четыре типа интуитивной ясности, которые существенно различаются по своим истокам и достоверности.

1. **Эмпирическая интуиция.** Простейшим видом интуиции, который встречается в математике, как и во всякой другой науке, является интуиция, основанная на опыте, появляющаяся на основе длительного общения с определенного рода объектами. Пусть мы оцениваем объекты по некоторым признакам A, B, C,..., которые не даны непосредственно (визуально), но выявляются на основе некоторого анализа. Хорошо знакомый эффект длительного опыта состоит в том, что мы начинаем судить об этих искомых признаках уже до детального исследования, так сказать, с первого взгляда, на основе некоторых, как правило, четко не сформулированных вторичных признаков. Механизм такого интуитивного предвосхищения достаточно прост: с признаками A, B, C мы постепенно, в значительной мере подсознательно, связываем некоторые другие признаки: a, b, c,..., которые фиксируются непосредственно и служат с той или другой степенью вероятности основой для предварительного заключения о наличии искомых признаков A, B, C. Так, мы можем с какой-то степенью достоверности судить о характере человека по его внешнему виду и т. п. Интуиция такого рода играет важную роль в математике. Профессиональный математик «чувствует» задачу в плане возможностей ее решения, наиболее вероятных методов и т. д. И дело здесь прежде всего в опыте. В основе такого рода предчувствий наряду с рациональными критериями лежит вся система представлений и образов, сложившихся в процессе решения аналогичных задач.

В логическом плане эмпирическая интуиция представляет собой скрытое заключение по аналогии, и она не обладает большей достоверностью, чем та, которую мы приписываем аналогии вообще. Рассматривая развитие оснований анализа в XVIII веке, мы видели, как постепенно интуиция такого рода дискредитировала себя в отношении достоверности. Современный математик в поисках решения задач, конечно, не меньше интуитивен, чем математик XVIII века, но, в отличие от последнего, он психологически готов к такому исходу дела, что самая убедительная интуиция может оказаться ошибочной.

2. **Праксеологическая интуиция.** Человеческое знание основано на очевидности в том смысле, что каждая сколь угодно сложная теория должна в конечном итоге опираться на некоторого рода простейшие констатации, в которых люди обычно не расходятся друг с другом. Физики могут по-разному интерпретировать некоторый опыт, но они не могут расходиться в описании его структуры и непосредственных результатов типа: «Температура увеличилась», «Стрелка амперметра отклонилась» и т. п. Отсутствие соглашения относительно таких констатаций было бы, очевидно, смертью всякого объективного исследования. Как научное, так и обыденное мышление опирается на способность человека фиксировать и упорядочивать факты в пространстве и времени до теоретического их понимания и независимо от него.

Мысль о том, что все человеческое познание опирается на систему элементарных и, безусловно, достоверных суждений, лежала в основе гносеологии логического позитивизма. Современная философия науки отвергает идею абсолютной разграниченности общих (теоретических) и протокольных (фактологических) суждений на том основании, что протокольные суждения зависят от теоретических, «теоретически нагружены». Эту критику в определенной степени следует признать верной. Языка опыта, совершенно независимого от более абстрактного идеализированного языка, конечно, не существует. Но является необоснованной часто проявляющаяся в этой критике тенденция представить сами факты, само содержание элементарных суждений также чем-то релятивным, зависящим от характера теоретических абстракций. В действительности такой зависимости не существует. Фактологические суждения имеют свою независимую от теории основу достоверности и только по этой причине они могут противостоять теории в качестве «упрямых» фактов. Если в процессе опыта зафиксировано отклонение стрелки, то в каком бы языке мы ни выразили это, мы выражаем один и тот же факт, как нечто инвариантное и автономное от теории, как нечто неизмеримо более достоверное, чем любая теоретическая конструкция.

Действительная ошибка логических позитивистов состояла не в абсолютизации фактологических суждений (любая теория познания, не отказывающаяся от понятия истины, должна признать их особую достоверность), но в том неявном допущении, что каждое такое суждение непосредственно обосновано чувственностью человека как индивида, прирожденной способностью органов чувств отделять одно положение дел от другого. В действительности же выделение и фиксация такого рода фактов социальны по своей природе, сориентированы на практическое освоение мира и опосредованы системой категорий, связанных с деятельностью, таких, как пространство, время, причинность, необходимость и т. д. Только при таком понимании механизма конституирования фактологических суждений мы можем понять их устойчивость и первичность по отношению к теоретическим конструкциям.

Мир чувственности отдельного индивида специфичен и неустойчив, он зависит от состояния его психики и органов чувств. Но различные люди на основе различной индивидуальной чувственности конституируют в высшей степени тождественный предметный мир, мир фактически данного. Результат этого конституирования мы воспринимаем как нечто непосредственно данное, как то, что мы непосредственно «видим». Это непосредственное видение предметного мира, способность человека различать и отождествлять предметы и их простые комбинации мы будем

называть праксеологической интуицией. Праксеологическая интуиция выражается, в частности, в способности непосредственно фиксировать возможность или невозможность определенных предметных комбинаций.

Значительная часть математических утверждений производит впечатление абсолютно достоверных именно благодаря своей связи с праксеологической интуицией, благодаря тому, что содержанием этих суждений являются элементарные констатации, касающиеся числа и порядка некоторых предметов. Система фактологических констатаций, в общем, не является абсолютно точной и достоверной. Утверждение «этот предмет красный» не является однозначным, так как имеется много оттенков красного. Но такая неоднозначность практически исключена в констатациях, касающихся числа и порядка предметов. Утверждение некоторого человека «здесь находится 100 предметов» может оказаться ошибочным (он может ошибиться в счете), но маловероятно, что несколько человек допустят здесь ошибку. Такого рода истины мы будем считать достоверными с точностью до социально-практической констатации или предельно обоснованными. Теоретически ошибка остается здесь допустимой, но практически, по отношению к обществу в целом, она исключена [14].

Когда говорят, что элементарные утверждения арифметики типа $2\times2=4$ даны с достоверностью в опыте, то это в принципе верно. Такого рода финитные арифметические суждения предельно обоснованы независимо от всякой логики; они столько же достоверны, сколь достоверна (надежна) способность общества (не отдельного человека!) различать вещи и фиксировать их порядок в конечном их множестве. Мы не нуждаемся в логическом доказательстве того, что 10 предметов нельзя разделить на равные части, содержащие по 3 предмета, хотя это и может быть доказано. Действительная, изначальная уверенность в истинности подобных утверждений идет не от доказательства, но от того обстоятельства, что эти утверждения являются социально-практическими констатациями, фактами, непосредственно данными праксеологически.

Важно подчеркнуть, что факты математики, обоснованные на уровне социально-практической констатации (праксеологически очевидные), не могут быть отвергнуты логикой. Праксеологическая интуиция абсолютно преобладает над логическим анализом. Арифметическая теория в целом в своем развитии может скорректировать некоторые допущения, может отказаться от некоторых определений как неконструктивных и т. п., но она не может отказаться от элементарных фактов типа $2\times2=4$ по той причине, что они образуют интуитивный центр этой теории, сферу предельно обоснованных истин. Эти истины имеют статус, независимый от теории и от системы ее внутренних доказательств в том смысле, что любая такая система может быть принята как законная только при условии признания ею такого рода элементарных истин.

Сказанное не означает, что математическое утверждение $2\times2=4$ является эмпирическим в том же смысле, как и утверждение о том, что существует 9 планет солнечной системы. Математические утверждения относятся не к опыту непосредственно, но к идеализированной, логически замкнутой модели, вследствие чего они в принципе, в отличие от эмпирических суждений, не могут быть изменены или усовершенствованы опытом. Но остается верным то, что основой для этих идеализаций послужили определенные праксеологические констатации, и именно вследствие этого всякое логическое обоснование математики должно считаться с такими истинами как с непреложными фактами.

3. **Категориальная интуиция**. Наряду с непосредственным видением предметов и их простейших отношений человек обладает видением некоторых универсальных свойств бытия или категорий. Эта идея была развита Кантом в его учении о непосредственном внеэмпирическом созерцании пространства и времени. Э. Гуссерль говорит о ясности родов бытия — эйдосов, к которым он относит не только универсальные категории, но и более частные подразделения вещей, такие, как живое — неживое, покой — движение и т. п. Рассматривая этот вопрос, мы не можем ограничиться критикой указанных систем как априористских. Практика показывает, что здесь мы имеем дело с вполне реальным феноменом, который требует

анализа и адекватного обоснования. Мы должны признать, в частности, верным то положение Канта, что само выделение индивидуальных предметов в сознании возможно лишь на основе категориальных представлений, а именно представлений о пространстве, времени, части, целом и т. д., которые, следовательно, должны быть признаны функционально первичными в процессе конституирования реальности. Мир фактологических истин предполагает наличие категорий или, иначе говоря, праксеологическая интуиция предполагает наличие интуиции категориальной. Видение индивидуальных вещей и видение родов бытия (категорий) оказываются, таким образом, двумя сторонами одного и того же процесса непосредственного, практически ориентированного восприятия мира. Мы должны признать также, что некоторая часть математических утверждений имеет онтологическое основание именно в категориальных представлениях, и прежде всего в представлениях о пространстве. Евклид пропустил аксиомы непрерывности и аксиомы положения, очевидно, потому, что их содержание было для него чем-то самоочевидным. Элементарная геометрия в своих исходных истинах, несомненно, базируется на общечеловеческой интуиции пространства [15].

Категориальная интуиция, как и интуиция праксеологическая, является авторитарной по отношению к логике и не подлежит логической корректировке. Если бы некто строго доказал, что прямая пересекает окружность в трех точках, то сомнению была бы подвергнута не пространственная интуиция, но логика доказательства. Система надлогических истин в математике, таким образом, не ограничивается праксеологическими констатациями, но включает в себя также и систему утверждений, базирующихся на категориальной интуиции (пространства, времени, части и целого).

Отличие категориальной интуиции от праксеологической довольно очевидно. Если праксеологическая очевидность относится к предметам и их комбинациям, то категориальная — к некоторым свойствам бытия вообще (бесконечность, непрерывность и т. п.), которые не сводятся к отношениям в конечном множестве предметов. Это различие в неявной форме было зафиксировано Кантом в его рассуждении об алгебраическом доказательстве. Общая установка Канта на математическое доказательство состояла в том, что «математик может исследовать общее in concreto (в единичном созерцании) и тем не менее с помощью чистого представления a priori, причем всякая ошибка становится очевидной»[16]. Говоря об алгебре, Кант утверждает, однако, нечто другое, а именно он говорит, что математик действует здесь с помощью «символической конструкции», опираясь на правила оперирования с символами[17].

Совершенно ясно, что алгебраическое рассуждение уже не имеет дела с конструированием в чистом созерцании, но имеет дело только с предметами определенного рода, правила действия с которыми являются конечной опорой рассуждения. Хотя Кант здесь также говорит о созерцании, но наглядность символов и их возможных комбинаций, очевидно, не тождественна чистому созерцанию пространства и времени[18]. Не выделив в понятиях, Кант указал здесь в действительности другой источник самоочевидных утверждений в математике, а именно очевидность, основанную на непосредственной фиксации числа и порядка в конечном множестве предметов. Как мы понимаем теперь, самоочевидность этого типа гораздо более важна для понимания интуитивных основ математики, чем наглядность, связанная с пространством и временем.

Исходя из сути категориальной интуиции мы можем понять рациональное зерно так называемого реалистического истолкования математики. Сторонники реализма настаивают на том, что внутренняя необходимость (непреложность) математических истин обусловлена не только логически, их доказанностью в системе, но и онтологически, т. е. прямым соответствием некоторой реальности. Это воззрение будет неприемлемым, если эту реальность понимать буквально, в смысле идей Платона, как некий особый мир, располагающийся над миром наблюдаемых событий и фактов. Но оно становится достаточно ясным и приемлемым, если понять его как выражение того факта, что часть математических понятий, будучи элементами формального математического языка, т. е. имея внутреннее логическое определение, имеет вместе с тем и онтологическое основание, соответствие с содержанием фундаментальных категорий. В таком случае мы должны признать, что фундаментальные математические понятия действительно отражают реальность, но не предметную или концептуальную реальность физики, а фундаментальные роды (классы отношений), которые лежат в основе определения всякой предметности. В своем фундаменте математика смыкается с философией. Можно сказать, что она фиксирует в своих понятиях аспекты категориальных представлений, которые поддаются дедуктивной систематизации. Непреложность математических истин, таким образом, генетически связана с непреложностью (аподиктичностью) основных категориальных подразделений, проистекает из них.

4. **Концептуальная интуиция.** Математические теории, возникая на некоторой интуитивной основе или без нее, обладают способностью продуцировать внутренний интуитивный фон, вторичную интуицию, уже подчиненную сложившейся формальной системе. Каждый математик знает, что в процессе работы в самой малоинтуитивной сфере постепенно вырабатываются некоторые способы чувствования возможного положения дел, система вспомогательных аналогий, метафор и т. п., которая играет ту же роль, что и естественная наглядность в элементарной геометрии. На это явление обратил внимание Г. Рейхенбах в своей книге «Пространство и время». Основная идея Рейхенбаха состоит в том, что нормативная сила представлений проистекает не из опыта, не из непосредственных эмпирических ассоциаций, на базе которых создается теория, но имеет вторичное, логическое происхождение. «Прямая — кратчайшее расстояние между двумя точками в нашем представлении только потому, — писал Рейхенбах, — что сами эти представления выработаны так, чтобы соответствовать всей структуре выводов евклидовой геометрии»[19]. Наглядность, по Рейхенбаху, не предшествует геометрии, но вырабатывается внутри нее в соответствии с ее логической структурой. Естественное перцептивное пространство не содержит параллельных прямых, точных кругов и т. д., но геометрия, возникнув как логическая структура, создает правильную, «очищенную» систему представлений, которая подогнана под логи-

ку математической структуры, хотя и воспринимается нами в качестве естественной и необходимой. Именно такого рода вторичная логическая визуальность была, по мнению Рейхенбаха, абсолютизирована Кантом в его идее чистого созерцания пространства.

В целом концепция Рейхенбаха не является убедительной. Уже то обстоятельство, что греческие математики опускали многие аксиомы, фактически используя их, говорит о том, что они существенно опирались именно на первичную, внелогическую интуицию. Мы имеем основание утверждать, что представление о непрерывности в геометрии отражает первичную, категориальную интуицию, а не является результатом чувственного освоения аксиом геометрии. Но, с другой стороны, несомненно верно, что какая-то часть нашей геометрической наглядности вторична, произведена уже самой логикой геометрии. Концептуальная интуиция, очевидно, неавторитарна. Она, как и эмпирическая, выполняет лишь эвристическую функцию и является всецело подчиненной результатам логического (дискурсивного) рассуждения.

Так как вторичные внутритеоретические представления строятся главным образом на основе пространственных представлений, то в теоретическом мышлении мы можем подозревать слияние аподиктической (категориальной) и ассерторической (теоретической) интуиций. В общем случае поэтому праксеологическая интуиция более надежна, чем интуиция, связанная с пространственными представлениями.

Нужно выделить еще один вид интуитивной достоверности, а именно достоверность норм логики. Безусловная убедительность (аподиктичность) норм логики, в соответствии с которыми мы строим доказательство, отчасти связана с категориальной интуицией части и целого. Анализ, однако, показывает, что логические нормы определены не только категориями как таковыми, но в первую очередь общей целью знания, необходимой тенденцией его к единству. Необходимость логики имеет, таким образом, целевой, или нормативный характер. Придерживаясь традиционной терминологии, можно охарактеризовать логику как структуру, данную в интеллектуальной интуиции, т. е. как структуру, порожденную стремлением разума к единству и системе.

Из сказанного следует, что интуитивное не может абсолютно противопоставляться логическому в плане своей достоверности. Во-первых, потому, что многие интуитивные истины математики не менее достоверны, чем логически выведенные, а во-вторых, потому, что сама логика базируется только на некоторого рода интуициях, фиксирует их содержание. Проблема состоит, таким образом, не в сравнении интуитивного и логического (дискурсивного) в математическом рассуждении по их надежности, но в соподчинении типов интуиции и интуитивной достоверности. Основное деление в этом плане должно состоять в различении аподиктических и ассерторических типов интуиции. Основная характеристика содержания, данного в аподиктической интуиции, состоит в том, что оно не может быть отвергнуто на основе логического анализа.

Современное философское мышление в математике основано, в общем, на отрицании достоверности (надежности) интуитивного компонента доказательства. Предполагается, что интуитивное доказательство в любом случае менее строго, чем дискурсивное, и для установления его полной надежности оно должно быть максимально концептуализировано, сведено к системе явных посылок и правил вывода. С этой точки зрения полная строгость недостижима даже в формализованном доказательстве, ибо оно обязательно сохраняет содержательный контекст, а значит, и источник неконтролируемых интуитивных допущений.

Такая установка, однако, не является адекватной. Главный ее недостаток состоит в том, что она не разделяет типов интуиции и направлена против интуиции вообще как против элемента доказательства, безусловно, снижающего его строгость. На основе проведенного анализа типов интуиции мы можем утверждать, что в действительности только эмпирическая и концептуальная интуиции не совместимы с представлением о строгости математического рассуждения. Доводы, интуитивно ясные в категориальном или праксеологическом смысле, имеют полную достоверность и не могут быть отвергнуты на основе последующего логического анализа. Отсюда, в частности, вытекает, что формализованное доказательство является полностью обоснованным в плане герметичности, несмотря на то что оно сохраняет определенный интуитивный момент в своей внутренней структуре.

Гносеологический смысл формализации доказательства состоит в возможно более полном очищении его от интуитивных компонентов, прежде всего от эмпирической и теоретической интуиций.

Формализованное доказательство состоит из конечного числа правильно построенных формул и правил вывода, которые указывают, какие операции считаются допустимыми по отношению к формулам в данном исчислении. Часть формул принята за аксиомы, и утверждение считается доказанным в данном исчислении, если оно является аксиомой или получается из аксиом посредством их преобразований по правилам вывода. Рассмотрим для примера доказательство утверждения $p \to p$ в исчислении высказываний с аксиомами:

1. $p \to (q \to p)$;
2. $(s \to (p \to q)) \to ((s \to p) \to (s \to q))$;
3. $(\bar{p} \to \bar{q}) \to (q \to p)$

и правилами вывода:

1. Из $A \to B$ и A следует B (модус поненс);
2. Каждый символ в формуле может быть заменен любой формулой на всех местах его вхождения (правило подстановки).

Доказательством утверждения $p \to p$ будет следующая последовательность формул:

1.	$(s \to (p \to q)) \to ((s \to p) \to (s \to q))$	— аксиома 2
2.	$(s \to (r \to q)) \to ((s \to r) \to (s \to q))$	— из формулы 1 по правилу 2
3.	$(s \to (r \to p)) \to ((s \to r) \to (s \to p))$	— из формулы 2 по правилу 2
4.	$(p \to (r \to p)) \to ((p \to r) \to (p \to p))$	— из формулы 3 по правилу 2
5.	$p \to (q \to p) \to ((p \to q) \to (p \to p))$	— из формулы 4 по правилу 2
6.	$p \to (q \to p)$	— аксиома 1
7.	$(p \to q) \to (p \to p)$	— из формул 5 и 6 по правилу 1
8.	$(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$	— из формулы 7 по правилу 2
9.	$p \to p$	— из формул 6 и 8 по правилу 1

Для того чтобы удостовериться в правильности доказательства, нам совершенно не обязательно знать, что означают знаки p, q, r, s или знак «$\to$». Все содержательные ассоциации остаются здесь в стороне. Нам важно лишь убедиться, действительно ли комбинация из двух символов $p \to p$ получается из комбинаций, названных аксиомами в соответствии с допустимыми (зафиксированными в правилах вывода) операциями.

Можем ли мы сказать, что такого рода доказательство гарантировано в плане достаточности посылок и отсутствия неявных допущений. Безусловно, да.

Здесь также возможны ошибки типа просмотра, неверного применения правила и т. п. Такого рода ошибки тождественны ошибкам при пересчете предметов или при сложении достаточно больших чисел. Но индивидуальные ошибки такого рода не могут закрепиться в качестве постоянных. Социально признанное доказательство (просмотренное достаточно большой группой математиков) является гарантированным от ошибок этого класса.

Мы можем далее допустить ошибку в подведении объекта под правило. Линде прав в том, что при каждом применении правила вывода мы опираемся на допущение, что данная формула — из множества тех, к которым данное правило применимо. Но он допускает ошибку, утверждая, что здесь допускается некая категориальная интуиция части и целого. В полностью формализованном доказательстве отождествление формулы со схемой, заключенной в правиле вывода, происходит по чисто структурным соображениям, т. е. на уровне праксеологической достоверности. Так, если формулу $p \to (q \to p)$ мы обозначаем буквой A, то формула 5-я нашего доказательства может быть записана в виде $A \to B$, где $B \rightleftharpoons (p \to q) \to (p \to p)$. Возможность такой записи формулы 5-ой определена, очевидно, тем обстоятельством, что 3-й слева содержащийся в ней знак импликации является главным знаком, что следует из построения формулы (из расстановки скобок) [20]. Но это значит, что формулы 5-я и 6-я вместе образуют необходимое условие для использования правила modus ponens.

На уровне метаязыка, таким образом, нет не только эмпирической, но и категориальной интуиции. Содержательный метаязык в формализованном доказательстве представляет собой в сущности подбор инструкций относительно того, какие преобразования знаковых конфигураций допустимы, а какие нет. Эта система инструкций является предельно однозначной, ибо она относится к конечным преобразованиям с конечными (обозримыми) конфигурациями. Но в таком случае любое доказательство будет абсолютно детерминированным только этими правилами и полностью независимым от предметных интуиций, которые могли присутствовать в голове математика.

Процедура формализованного доказательства гносеологически полностью тождественна процедуре арифметического вычисления. Мы имеем в арифметическом вычислении содержательные представления об операциях с отдельными числами и о процедуре выполнения действий вообще (об алгоритмах действия и их порядке), но ответ определяется только исходными числами и последовательностью операций, и этот ответ в социальном плане совершенно однозначен.

Доказательство, проведенное на формальном уровне и социально подтвержденное, не может быть подвергнуто сомнению. Интенсивно развивающаяся в последние годы область прикладной логики, связанная с машинным доказательством теорем, на практике подтверждает полную однозначность и надежность метаязыковых инструкций (правил вывода), присутствующих в формализованных доказательствах.

Формализованное доказательство, таким образом, очищено от всякого рода содержательных интуиций, оно опирается исключительно на способность человека (сообщества) различать конечное количество знаков и их комбинаций и выполнять преобразования этих комбинаций, зафиксированные в предельно однозначных инструкциях. На этом уровне остается лишь праксеологическая интуиция, заключающаяся в устойчивости предметных различений, а также в способности различать и сравнивать конечные комбинации знаков по их структуре. Индивид, как уже говорилось, не гарантирован от ошибок и на этом уровне, но в плане социально-практическом ошибки здесь исключены. Мы достигаем здесь *предельного уровня* строгости доказательства, такой его обоснованности,

при которой сам вопрос о более глубоком обосновании гносеологически абсурден: никакая достоверность не может быть выше достоверности праксеологической констатации.

3. Достоверность содержательного доказательства

В сфере содержательного математического рассуждения мы не обладаем однозначным критерием герметичности. Значит ли это, что мы не имеем здесь и твердых гарантий достоверности, т. е. гарантий окончательности доказательств, неопровержимости их через контрпример или на основе более тонкого логического анализа? Многие склонны отвечать на этот вопрос утвердительно. Методологическое мышление в современной математике, сформировавшееся под впечатлением краха интуитивно ясных построений в теории множеств, возлагает все надежды на аксиоматизацию и формализацию и скептически относится к надежности обычных содержательных доказательств, оправдывая их существование лишь в педагогических целях. Не только для логиков-специалистов по формализации, но и для самих математиков стало сегодня обычным выражать сомнение в надежности и однозначности обычных (содержательных) рассуждений. Содержательное доказательство чаще всего определяется теперь как система аргументов, достаточная для убеждения коллег, и этим подчеркивается его скорее психологический, чем логический авторитет. В одной из своих популярных статей Дж. Харди назвал обычное доказательство «системой завитушек, призванных психологически воздействовать на слушателя». Можно привести множество аналогичных высказываний других известных математиков, из которых следует, что содержательное доказательство нестрого, ненадежно, психологично и не заслуживает большого доверия [21].

Вместе с тем остается фактом, что, несмотря на столь суровую публичную критику, которой подвергается обычное доказательство, на практике оно продолжает пользоваться тем же доверием, что и раньше. Доказательство, убедительное для одной группы математиков, признается в качестве такового и другой группой, и эта убедительность никогда не ставится под сомнение из-за отсутствия полной формализации соответствующей теории. Инженеры и физики без колебаний используют теоремы, полученные таким «нестрогим» путем, и уверены в полной их надежности. Теоретическая критика доказательства, таким образом, не приводит к каким-то существенным изменениям в практической методологии: одобрение или неодобрение новых математических результатов по-прежнему проводится на содержательном уровне, чем, очевидно, утверждается уверенность в достаточной его надежности.

Это значит, что рассматриваемая ситуация более сложна, чем это кажется с первого взгляда. Теория познания говорит о том, что там, где теория и практика исходят из различных принципов, практический принцип заслуживает большего доверия. Применительно к нашему случаю это означает, что современная логическая и методологическая критика строгости обычного (неформализованного) доказательства не учитывает каких-то существенных его особенностей, обеспечивающих ему доверие на практике.

Некоторые свидетельства обоснованности такого предположения дает нам история математики. Если бы доказательства Фалеса, Гиппократа, Евдокса и Евклида были просто психологически убедительными для их окружения, то от греческой математики сегодня не осталось бы ничего. Факты истории, следовательно, говорят о том, что убедительность математических доказательств, даже если они содержательны, покоится не на простых механизмах психологического убеждения, но на каком-то более твердом основании.

Анализ структуры доказательства позволяет привести другие и более определенные доводы за справедливость этого мнения.

Рассмотрим рассуждение Коши, посредством которого он доказал гипотезу Эйлера о том, что для всех многогранников $V+F-E=2$, где V — число вершин многогранника, F — число граней и E — число его ребер [22].

Пусть гипотеза верна. Вообразим, что многогранник будет полым с поверхностью из резины. Если мы вырежем одну из его граней, то для оставшейся поверхности (поскольку исчезла одна грань, а все ребра

и вершины остались на месте) будет верным соотношение $V+F-E=1$. Растянем эту поверхность на плоской доске. Если растягивание производится без складок, то соотношение остается неизменным, хотя грани изменятся по величине, а ребра могут стать криволинейными. Разобьем каждую грань посредством диагоналей на треугольники. Каждая диагональ представляет собой новое ребро, но она порождает и одну (и только одну) новую грань, так что полная триангуляция поверхности не нарушает последнего соотношения. Будем теперь вынимать из триангулированной сети треугольники один за другим, следя за тем, чтобы вынимаемый треугольник находился на краю поверхности. В зависимости от положения треугольника здесь возможны два случая: либо мы вынимаем два ребра, одну грань и одну вершину, либо — одну грань и одно ребро. Легко видеть, что в обоих случаях наше общее соотношение не изменяется. В конце этой процедуры мы получаем один треугольник, для которого верно $V+F-E=1$. Это значит, что наша первоначальная гипотеза верна, так как при любом другом соотношении для количества вершин, граней и ребер в многограннике мы получили бы для треугольника другое соотношение его вершин, ребер и граней, что противоречило бы факту.

Итак, мы доказали следующее утверждение: если поверхность многогранника без одной грани позволяет растягивание на плоскости без складок и разрывов, то соотношение его вершин (V), граней (F) и ребер (E) выражается равенством $V+F-E=2$.

Проведенное доказательство, очевидно, не является формализованным. Вместе с тем вряд ли кто усомнится в его надежности и окончательности.

Причину этого обстоятельства (психологической убедительности рассуждения) легко понять, если рассмотреть основные шаги доказательства с точки зрения оснований их достоверности.

1. То утверждение, что если из поверхности будет вынута одна грань, то соотношение $V+F-E=2$ превратится в соотношение $V+F-E=1$, следует из законов арифметики конечных чисел. Это значит, что другие ситуации неприемлемы.

2. Допущение о возможности растянуть поверхность многогранника на плоскости без складок и

разрывов входит в условия теоремы и не нуждается в обосновании.

3. Тот факт, что каждая диагональ многоугольника, не пересекающая другие диагонали, а также стороны многоугольника, прибавляет одну и только одну дополнительную грань, является очевидностью того же порядка, что и утверждение, что прямая линия, пересекающая окружность, делит ее на две части. Это положение может быть доказано, но важно отметить, что пространственное представление, заключенное в нем, имеет надлогический (аподиктический) характер, а это значит, что это положение не может быть поколеблено какой-либо логической критикой и, следовательно, предельно достоверно.

4. То обстоятельство, что существуют только два указанных случая при изъятии треугольников, находящихся на периферии многоугольника, достоверно на основании праксеологических соображений. Мы имеем здесь дело с рассмотрением конечного числа комбинаций, и социальная практика в таких случаях дает предельно обоснованное знание. Другие возможности здесь заведомо исключены.

Мы видим, что рассматриваемое доказательство, будучи содержательным, тем не менее не дает поводов для сомнения. Оно движется либо на уровне пространственной интуиции, которая имеет аподиктический характер и не может подлежать пересмотру, либо на уровне праксеологических соображений, т. е. соображений о возможных комбинациях в конечном множестве предметов. Оба этих типа достоверности имеют надлогический характер и, следовательно, обеспечивают предельную надежность доказательства [23].

Но не упустили ли мы чего-нибудь в проведении доказательства? Оказывается, что это сомнение не лишено оснований. Более внимательный анализ рассуждения показывает, что мы опирались здесь на допущение, которое явно не было сформулировано, а именно на предположение о том, что для рассматриваемого типа многогранников всегда существует такой способ изъятия треугольников из триангуляционной сети, который не нарушает ее связности, т. е. не разрывает ее на несколько кусков. В противном случае соотношение $V+F-E=1$ было бы нарушено.

Но будет ли доказательство окончательным (вполне герметичным), если мы устраним эту неточность, доказав соответствующую предпосылку? Хотя все побуждает нас теперь уже твердо заявить об окончательности доказательства, мы должны признать, что твердых гарантий у нас все-таки нет. Но в таком случае мы должны признать, что содержательная математика в принципе не дает гарантии полной достоверности своих результатов, и тем самым поддержать общую идею математического скептицизма.

Однако скептики здесь не правы. Отсутствие критериев полной герметичности доказательства на содержательном уровне не означает отсутствия надежных признаков его достоверности, т. е. критериев его качественного состояния, при котором мы можем определенно утверждать невозможность контрпримеров. Таким критерием является аподиктичность.

Зададим себе вопрос: если доказательство аподиктично во всех своих частях, то может ли оно быть отвергнутым в будущем на основании какого-либо тщательного логического анализа? Проведенный анализ интуиции позволяет нам определенно сказать, что этого не произойдет, ибо аподиктичность имеет надлогический характер.

Здесь и в дальнейшем мы будем исходить из принципа первичности доказательства перед обоснованием. Мы будем предполагать, что:

1) достоверность доказательства устанавливается в самом доказательстве через рассмотрение его шагов, но не через построение полной системы аксиом или некоторой метатеории. Доказательство есть данный, однозначно фиксируемый в аподиктической интуиции факт;

2) достоверное доказательство в принципе герметично: его наличие как такового определяет наличие непротиворечивой системы аксиом, в которой это доказательство может быть санкционировано как предельно герметичное.

Одно из самых устойчивых заблуждений современной философии математики состоит в том, что она рассматривает аксиомы как изначально данные, как некоторые истины, которые определены и существуют где-то до конкретных теорем и к которым эти теоремы либо сводятся, либо не сводятся. Историческое и логическое отношение, однако, обратное. Математическое мышление исходит из некоторой сетки аподиктически достоверных связей (теорем). Эта сетка, если она найдена, является абсолютным завоеванием; она не может быть устранена несогласием с какими-то аксиомами. Приемлемость такой системы содержательных логических переходов не оправдывается априори принятыми аксиомами, но аксиомы подбираются таким образом, чтобы дать ей полную санкцию. Логическое обоснование вторично по отношению к аподиктичности рассуждения. Это значит, что если доказательство аподиктично, то оно потенциально герметично, т. е. оно всегда может быть восполнено до окончательной герметичности. Это значит, что оно совершенно надежно вне зависимости от степени аксиоматизации или формализации соответствующей теории.

Содержательное доказательство, таким образом, отнюдь не ступень к полной достоверности, которая достигается на уровне формализации. Оно имеет полную достоверность и совершенно автономное значение. Оно не может рассматриваться как вероятное потому, что для него не существует формального аналога. Аподиктическое содержательное доказательство принципиально герметично в том смысле, что возможность построения формализованной теории, санкционирующей это доказательство, гарантирована самим фактом его существования: **если на уровне** содержательных рассуждений некоторая связь зафиксирована как аподиктически необходимая, то это одновременно означает и наличие непротиворечивой и формализованной теории, в которой это доказательство реализуется.

Содержательное доказательство в общем случае включает в себя также в фрагменты чисто дискурсивных переходов от формулы к формуле по правилам логики и правилам преобразований, принятых для объектов данной теории. Доказательство в этих фрагментах, разумеется, совершенно строго, если все переходы совершаются по допустимым правилам. Герметичность дискурсивного рассуждения обеспечивается его механическим характером, полной изоляцией от интуитивного контекста. Правильность доказательства здесь, как и в случае полной формализации, зависит только от соображений праксеологического характера, т. е. сводится к правильности различения знаков, их конечных комбинаций и к процедуре подведения конкретных формул под схемы вывода. Доказательство на этом уровне также является предельно обоснованным и гарантированным от возможной ревизии в будущем.

Изложенные соображения показывают, что так называемая психологическая убедительность содержательного доказательства имеет вполне объективные основания. Доказательство принимается как убедительное тогда и только тогда, когда оно аподиктично, т. е. если каждый его шаг либо строго дискурсивен (происходит в соответствии с принятым логическим или теоретическим правилом преобразования), либо опирается на интуитивные представления праксеологического и категориального порядка. Математическое сообщество утверждает некоторое рассуждение как доказательство безотносительно к тому, является оно формализованным или содержательным; объективным критерием является лишь аподиктический характер всех его шагов, их чистота по отношению к индукции и ассерторическим типам интуиции [24].

Таким образом, отсутствие однозначного критерия герметичности доказательства на содержательном уровне не означает отсутствия оснований для нашей веры в его полную достоверность в смысле непреложности его результата.

Математическое доказательство имеет два уровня: уровень интуитивный, на котором фиксируется в конечном итоге сам факт наличия доказательства, и уровень лингвистический, на котором только может быть указана процедура, фиксирующая его полную герметичность. На вопрос о том, является ли математическое доказательство строгим, математики отвечают по-разному, в зависимости от того, на какой из этих уровней они сориентированы в своем понимании математики. Л. Шварц одно время утверждал, что до Гильберта вообще не было строгой математики. Г. Штейнгауз возражал ему, заявляя, что Евклид был математиком ничуть не в меньшей степени, чем Гильберт [25]. Этот спор неразрешим, ибо здесь совершенно разные точки отсчета. Обе стороны в известной степени правы. Реальное математическое рассуждение, даже самое убедительное, не обладает критериями герметичности. Это хорошо иллюстрируется историей аксиомы выбора: только тогда, когда возникла дискуссия о ее законности, математики с удивлением обнаружили, что они собственно всегда опирались на эту аксиому[26]. Но, с другой стороны, отсутствие однозначного критерия герметичности не мешает содержательному математическому мышлению достигать полной непреложности результата, полной его устойчивости перед лицом логической критики.

Можно говорить, что математика имеет внутренний и внелогический критерий истинности. Ю. И. Манин пишет о теории множеств, что она представляет собой особый мир, «который обладает некоторой реальностью и внутренней жизнью, мало зависящей от формализмов, призванных его описывать»[27]. То же самое, очевидно, можно сказать о любой математической теории. Но содержательное развитие математики неизбежно породило бы множество противоречий и неувязок, если бы оно не руководствовалось независимыми от формализации, но вместе с тем совершенно объективными критериями достоверности доказательства.

Это показывает, что интуиция занимает совершенно уникальное место в математике. В любой науке интуиция в некотором смысле первична перед логикой: логика лишь обосновывает и проверяет гипотезы, выдвигаемые на основе интуиции. Говоря о математике, мы, однако, утверждаем нечто другое. Интуиция в математике не просто основание гипотез, но она вместе с тем и окончательный критерий истины. Логика в математике, как это ни странно, обладает меньшими правами, чем в других науках. Она не обладает правом пересмотра признанных доказательств. Сомнения относительно аксиом не уничтожают результатов, и в этом смысле теоремы, санкционированные интуицией, выступают в качестве непреложных фактов для всякого логического обоснования.

Эта ситуация, по-видимому, была уже в определенной степени осознана Декартом, который считал, что достоверность математического доказательства

устанавливается не логикой, а «строгой и внимательной проверкой каждого шага в цепи доводов»[28]. Органическая связь математического мышления с интуицией, отмеченная Декартом и Кантом, в XIX веке была отвергнута философской критикой, поставившей под подозрение всякую интуицию. В настоящее время мы начинаем постепенно осознавать ограниченность этой критики. Она несостоятельна уже потому, что не разделяет видов интуиции. Математика представляет собой интуитивное и вместе с тем предельно достоверное мышление по той простой причине, что это мышление протекает в сфере аподиктической интуиции, которая не имеет ничего общего с концептуальной интуицией или интуицией, основанной на аналогии.

Аподиктическая достоверность в математике объединяет не только всю систему математических утверждений в данное время, но и сами эпохи математического мышления. Убедительность пространственной и праксеологической интуиции, а также норм логики является в высшей степени устойчивой и мало меняется со временем. Доказательство, убедительное для математиков прошлых эпох, является вполне убедительным и для нас, ибо оно стоит на том же фундаменте аподиктически достоверного, что и доказательство современного математика.

Этот факт позволяет понять и то удивительное обстоятельство, что подавляющее большинство математических доказательств, которые когда-либо приняты в качестве таковых, принимаются в качестве корректных и в настоящее время. В «Началах» Евклида нет ни одной теоремы, которую мы могли бы отвергнуть с современной точки зрения, хотя Евклид и не подозревал о современных требованиях к строгости доказательства. Евклидовы доказательства негерметичны, но они совершенно достоверны в том смысле, что восполнимы посредством экспликации представлений, данных в аподиктической интуиции. То же самое можно сказать и о всех позднейших достижениях математической мысли. Математический результат, принимаемый современниками, принимается навсегда. Теорема может быть модифицирована, обобщена, упрощена, переложена на другой язык и переведена в другую систему понятий, восполнена в смысле посылок, но она не отвергается как ложная; связь, зафиксированная в ней, не может быть упразднена каким-то новым результатом, отменена, как основанная на ложных представлениях. В смысле достоверности результата математическому доказательству уже современники придают статус вечности, хотя, конечно, только время дает ему оценку с точки зрения важности. Логический анализ аподиктического доказательства на любом уровне глубины лишь подводит основания под него, но не опровергает и не корректирует его в плане его вывода (результата).

Математика, таким образом, всегда была фактически строгой наукой вне зависимости от идеалов строгости и ее критериев. Если брать строгость в смысле аподиктичности, то она всегда остается на одном и том же уровне: современный математик доказывает теорему Пифагора не с большей достоверностью, чем это делал Евклид или даже сам Пифагор. Историческое возрастание строгости некоторого конкретного доказательства относится исключительно к лингвистическому моменту: к выявлению скрытых посылок и к формализации содержательных переходов. Формализация доказательства повышает его строгость лишь в том смысле, что она сводит все виды аподиктической достоверности только к достоверности праксеологической, т. е. к надежности оперирования с конечным множеством предметов (знаков).

Сказанное не следует понимать так, что математики вообще не ошибаются, а сразу приходят к доказательствам, которые либо закончены, либо требуют лишь некоторого восполнения. Как показывает история, даже самые выдающиеся из них верили в совершенно ошибочные доказательства. Лейбниц «с полной надежностью» доказывал, что сумма ряда $1-1+1-1+\ldots$ равна $1/2$. Эйлер в «Интегральном исчислении» выдвигал в виде теоремы заведомо неверное утверждение, что каждое дифференциальное уравнение, если оно имеет решение, имеет бесконечно много решений, различающихся на постоянную величину. Коши не сомневался в том, что он доказал, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций представляет собой непрерывную функцию, но эта теорема была отвергнута через контрпример. Куммер некоторое время был убежден, что ему удалось дать окончательное доказательство теоремы Ферма. Такие примеры можно приводить сколь угодно долго. Современные математики не составляют здесь исключения [29].

Высочайшая однозначность посылок и аподиктическая интуиция, таким образом, не предохраняют математика от ошибок. В оперировании с рядами в XVIII веке математики опирались на ошибочную аналогию между конечными и бесконечными суммами. В своем доказательстве теоремы Ферма Куммер неявно допускал, что для комплексных чисел остается справедливой однозначность разложения на множители. Эти примеры уже показывают, что к утверждениям аподиктическим в реальном доказательстве постоянно примешиваются некоторые достаточно очевидные, но лишь ассерторические утверждения. Математик поэтому может ошибаться в своих утверждениях, как и всякий другой ученый.

И тем не менее утверждение об особой строгости математики имеет смысл. Каждый ученый может ошибаться. Но это сходство между математикой и опытными науками немедленно исчезает на уровне сообщества ученых и в исторической перспективе. Мы должны признать как исторический факт, что математическое сообщество обладает абсолютной способностью отделять правильные доказательства от ошибочных и устанавливать окончательность доказательства в исторически ограниченный срок.

Опыт показывает, что доказательство средней важности переживает три периода: в течение первых 10—12 лет (инкубационный период) о нем мало кто знает. В течение последующих 5—10 лет начинается интерес к нему, уточняются детали, даются новые доказательства того же результата с других точек зрения. После этого наступает последний и бесконечный период его жизни: время полного признания [30]. Таким образом, если математическая теорема не ошибочна, то срок признания этого факта конечен, и она признается в своей истинности навсегда. Будущее развитие математики не может устранить эту теорему в качестве доказанной или ограничить сферу ее действия.

История математики показывает, что ошибочное доказательство обычно «разоблачается», как правило, при жизни автора. И, напротив, если известное доказательство остается неопровергнутым достаточно долго, то это означает, что оно абсолютно надежно. Мы не имеем примеров того, чтобы математическое доказательство, принятое всеми математиками скажем, на протяжении 50 лет, оказалось затем неверным (невосполнимым). Математики XVIII века дали много ошибочных доказательств, но замечательный факт состоит в том, что ни одно из таких доказательств и не получило общего признания современников. Таким образом, хотя разделение типов интуиции само только интуитивно, история математики показывает, что математическое сообщество действует здесь безошибочно. Социальное одобрение является в математике и абсолютной гносеологической санкцией.

Идея окончательности математического результата входит, как кажется, в некоторое противоречие с теорией познания, которая акцентирует внимание на относительности всех результатов человеческого мышления. Это, однако, ошибочное мнение, проистекающее из неверных гносеологических сопоставлений. Говоря о математике как о науке, чаще всего сравнивают ее с физикой и другими науками о природе; считается возможным употреблять понятие истины как применительно к физическим законам, так и к математическим теоремам. В плане такого сопоставления утверждение окончательности математических истин представляется просто данью давно умершим рационалистическим и априористским взглядам на математику.

Дело, однако, в том, что само это сопоставление эмпирического и математического знания является неверным. Математика — не теория о природе или какой-то ее части, но деятельность по конструированию моделей, которые служат для исследования природы в качестве одного из методов. При конструировании такого рода моделей мы создаем особый, искусственный мир со строго определенными элементами, с конечным числом свойств и допустимых правил взаимодействия. В этом идеализированном мире мы можем устанавливать окончательные связи, поддающиеся проверке с помощью конечных процедур.

Математическое доказательство представляет собой некоторую деятельность по правилам с конечным числом элементов, и в этом плане оно может быть уподоблено задаче на построение комбинации из конечного числа предметов, удовлетворяющей некоторому свойству. В таких задачах окончательные результаты вполне достижимы. Если некто продемонстрировал, что в ситуации на шахматной доске белые начинают и выигрывают в 4 хода и если внимательный просмотр знатоков не обнаружил выхода, то результат является окончательным. Совершенно невероятно, что при тех же правилах игры некто обнаружит в дальнейшем ход, спасающий черного короля. Секрет этой окончательности, очевидно, в конечности элементов и в полной определенности правил игры.

Размышления над подобными примерами позволяют нам понять суть математического доказательства и основания его незыблемости. Эта особенность доказательства проистекает из того простого факта, что оно представляет собой конечную последовательность действий с объектами по строго заданным (однозначным) правилам. Достижимость результата является здесь эффективно проверяемой и сводится к выяснению осуществимости (или неосуществимости) конечных комбинаций, т. е. к тому типу процедур, где социальная практика дает непосредственный и окончательный приговор.

Особую роль в этом приговоре играет аподиктическая интуиция. Современное методологическое мышление в математике формалистично по существу: оно склонно связывать строгость доказательства не с интуицией, но скорее с лингвистическим его компонентом, со степенью его формализации. Такой подход, однако, не раскрывает истоков достоверности математики и не объясняет исторической устойчивости математических теорем. Он в какой-то мере сказывается и на нашем понимании истории математики, в частности, на решении вопроса о том, когда появилось доказательство в математике.

Общепринятое решение состоит в том, что доказательство в математике возникло только в греческий период ее развития, т. е. на рубеже VII—VI веков до нашей эры. Основной и вполне разумный аргумент состоит в том, что до нас не дошло никаких текстуальных свидетельств этих доказательств. Другой, чаще всего явно не высказанный довод, состоит в следующем: несомненно, что древние китайцы и вавилоняне, для того, чтобы утвердиться, к примеру, в истинности теоремы Пифагора, должны были проделать определенные рассуждения, но эти рассуждения были на уровне интуитивных представлений, а следовательно, имели скорее эвристическое, чем доказательное значение.

Это последнее соображение представляется некорректным, ибо оно отождествляет интуитивность с нестрогостью. Рассуждения древних можно представить, по-видимому, как некоторый мысленный эксперимент без записи промежуточных результатов. Но поскольку он опирался на аподиктические представления, то он был совершенно строгим (достоверным), и только этим обстоятельством можно объяснить, что математики того времени смогли прийти к точным и нетривиальным утверждениям. Результаты, с которыми имели дело математики Древнего Египта, Вавилона, Китая и Индии, слишком сложны для того, чтобы считать их продуктом непосредственного видения. Здесь несомненно имело место рассуждение, опирающееся на наглядность, аподиктическую по своему характеру. Такое рассуждение должно быть признано доказательством.

Математическое доказательство, по-видимому, вообще может быть понято как мышление в сфере аподиктически достоверного. В этом плане оно остается достоверным независимо от степени своего лингвистического оформления. Эволюция строгости, с этой точки зрения, — не эволюция достоверности, но лишь эволюция внешних (лингвистических) гарантий этой достоверности. Греки с этой точки зрения не изобрели доказательство в математике, хотя они несомненно вывели его на новую ступень через выявление его механизма и расширение сферы приложения.

4. Эмпирицистская критика доказательства

Мысль о том, что математика возможно не является идеально строгой, как было принято думать, появилась в начале XX века в связи с обнаружением парадоксов в теории множеств. Она была существенно подкреплена крушением программ обоснования математики в 30-х годах. В настоящее время утверждение о том, что математическое доказательство нестрого, как кажется, уже никем не подвергается сомнению.

Надо однако сказать, что это утверждение чаще всего не сопровождается сколько-нибудь ясной аргументацией. Определенным исключением являются рассуждения И. Лакатоса, который попытался обосновать нестрогость математики, исходя из анализа структуры доказательства и основываясь на некоторых фактах истории математики.

Основной и собственно эмпирический аргумент Лакатоса состоит в том, что математическое доказательство никогда не освобождается от содержательного контекста и, следовательно, от неявных допущений. Но наличие неявных допущений в доказательстве может привести к его опровержению посредством контрпримеров. Исторически математические работы становятся все более строгими, но это совершенствование не может быть закончено. «Коши, например,— пишет Лакатос,— даже не заметил, что его прославленное сочинение (1821) предполагало «знакомство» с теорией действительных чисел. Не так поступили Вейерштрасс и его школа; учебники по неформальной математике теперь содержат новую главу по теории действительных чисел, в которой собраны все эти леммы. Но в их «введениях» обычно предполагается знакомство с теорией рациональных чисел. Более строгие учебники еще уменьшают предполагаемое знание. Ландау во введении к своей знаменитой книге (1930) предполагает знакомство только с логическим рассуждением и немецким языком. Иронией судьбы А. Тарский в это же время показал, что опускаемые, таким образом, абсолютно тривиальные леммы могут быть не только неверными, но и несовместимыми, поскольку немецкий язык является семантически замкнутым языком»[31]. Это значит, что всякое доказательство, до какого бы уровня строгости оно не было доведено, покоится на некоторых допущениях, принятых в качестве самоочевидных, а потому оно не может быть абсолютно надежным и строгим.

Неявные положения в доказательстве могут быть двух типов: либо это положения в языке доказательства, т. е. такие положения, которые после их выявления помещаются в число условий теоремы, либо это положения метаязыка, т. е. содержательные допущения о самой процедуре доказательства, о правилах обращения с формулами и т. д. Допущения о действительных числах, на которые опирался Коши, относятся, очевидно, к первому типу неявных допущений. Законы логики, которые используются математиками, являются неявными допущениями второго типа. Сюда же относятся все «тривиальные леммы», связанные с обычным языком, о которых говорит Лакатос. Оба этих типа неявных допущений требуют особого анализа.

Рассматривая доказательство теоремы Эйлера о многогранниках, данное Коши, Лакатос указывает на тот факт, что Коши не уточнил порядок изъятия треугольников из триангуляционной сети, и следовательно, не дал строгого доказательства этой теоремы в полном смысле слова. Он явно исходил из того, что вынимаются только граничные треугольники и только таким образом, что не нарушаются связность триангуляционной сети в целом. Если не оговорить этот момент в условии теоремы, то можно указать такую последовательность изъятия треугольников, которая не будет сохранять соотношения $V+F-E=1$. Первоначальное доказательство Коши, таким образом, опровергается в одном из своих шагов посредством контрпримеров (особого порядка изъятия треугольников, не сохраняющего указанное соотношение). Такие контрпримеры Лакатос называет локальными, поскольку они, отвергая доказательство, не отвергают самой гипотезы. Если мы сформулируем теорему Эйлера в более общем виде, допустим, без определенных требований к характеру поверхности многогранника, то легко найдется и контрпример, отвергающий гипотезу в целом (глобальный контрпример)[32].

Другой исторический пример, который рассматривает Лакатос, это неявная предпосылка равномерной сходимости в доказательстве Коши о сумме сходящегося ряда непрерывных функций. Коши в 1821 г. высказал идею, что эта сумма представляет собой также непрерывную функцию, и дал доказательство этого утверждения, которое было принято как безупречное всеми современными математиками. Однако Фурье, исследуя тригонометрические функции, указал ряд из непрерывных функций, который сходится к разрывной по Коши функции. Усилия Коши и других математиков спасти теорему не дали результата. Не дали результата также и попытки найти ошибку в доказательстве Коши. Возникла, таким образом, совершенно беспрецедентная ситуация: теорема, доказанная по всем стандартам строгости, оказалась недостоверной, имеющей исключение. Только в 1847 г. Зейдель нашел неточность в доказательстве Коши, в результате анализа которой было введено понятие равномерной сходимости[33].

Положение о том, что доказательство в общем случае не гарантировано от неявных допущений в языке, а следовательно, и от опровержения через контрпример, безусловно, верно. Но принципиальный вопрос состоит в том, можем ли мы избавиться окончательно от такого рода неявного знания при должном уровне анализа доказательства, другими словами, существует ли в математике окончательное доказательство? Ответ Лакатоса сводится к тому, что содержательные доказательства безусловно только гипотетичны. Что же касается формализованных доказательств, то сами по себе они могут быть вполне надежными, но являются гипотетичными в том смысле, что могут войти в противоречие с фактами неформальной теории, выступающей в качестве интуитивной основы данной формализованной теории[34]. Характеризуя математику как гипотетическое знание, Лакатос, таким образом, имеет в виду гипотетичность двух видов, причем второй смысл более слабый, чем первый: возможное противоречие доказательства с какой-то интерпретацией, очевидно, не делает его нестрогим в логическом смысле.

Эта позиция не совсем обоснована с точки зрения общих установок Лакатоса, ибо неясно, почему формализованное доказательство может быть внутренне законченным, если оно все-таки связано с содержательным контекстом. П. Марчи устраняет половинчатость в позиции Лакатоса, толкуя ее в духе сквозного релятивизма. «Согласно Лакатосу,— пишет она,— вся математика гипотетична. Никакая из ее истин не устанавливается как окончательная». Это понимается так, что «в любой момент некто может открыть контрпример и опровергнуть даже самую надежную, наиболее обоснованную теорему» [35]. Такая трактовка, если понять ее буквально, не оставляет места для законченности даже в сфере формализованного доказательства.

Столь крайний гипотетизм, безусловно, несостоятелен. Однако и более умеренная точка зрения, согласно которой все содержательные математические доказательства гипотетичны, представляется необоснованной.

В первоначальных формулировках, на стадии становления теоремы, разумеется, не гарантированы от неточности условий, а следовательно, и от контрпримеров. Было бы, однако, ошибочно думать, что устранение этих контрпримеров является бесконечным, никогда не заканчивающимся процессом. По отношению к конкретному доказательству это совершенно неверно. Фактически этот процесс всегда конечен и в историческом плане занимает относительно короткое время. Первоначальное доказательство Коши, конечно, не строго. Но после того, как мы ввели ограничения на характер поверхности многогранника (односвязность) и на процедуру изъятия треугольников и триангуляционной сети, это доказательство становится уже совершенно строгим, гарантированным от любого вида контрпримеров. Топологическая теорема, состоящая в том, что любой граф на односвязной поверхности обладает эйлеровой характеристикой, равной 2, конечно, является абсолютно строгой. То же самое справедливо и в отношении теоремы Коши о непрерывности суммы сходящегося ряда непрерывных функций, если мы заменим требование его сходимости требованием равномерной сходимости.

Математика здесь радикально отличается от эмпирического знания. Эволюция эмпирического утверждения в плане его истинности бесконечна: мы не можем указать ни одного естественнонаучного положения, которое было бы совершенно гарантировано от корректировки в будущем. Напротив, эволюция математического доказательства к его полной завершенности всегда конечна. Конечность шагов доказательства, конечность логических и объектных правил преобразования, которые могут быть использованы в каждом таком шаге, обусловливает то, что математическое сообщество в относительно короткое время либо санкционирует доказательство как законченное, либо отвергает его.

Важно подчеркнуть при этом, что такого рода санкция и полная стабилизация доказательства происходят до его формализации и независимо от нее. История развития содержательной математики не подтверждает факта бесконечного уточнения теорем, которые, очевидно, находились бы в таком случае все время в процессе «распухания» вследствие экспликации скрытых условий. «Освящение» доказательства как окончательного не требует формализации и даже аксиоматизации. Математик просто разлагает доказательство до достоверного слоя, т. е. до тех теорем, которые признаны окончательными, и до интуитивных допущений такого рода, которые не могут быть отвергнуты каким-либо логическим анализом. Теорема, поставленная на такой достоверный слой, признается окончательной, и в действительности в таком случае не остается шансов отвергнуть ее без отказа от данной теории в целом.

Нетрудно видеть также, что неизбежная содержательность на уровне метаязыка также не препятствует полной строгости теорем. Как было выяснено выше, метаязык полностью адекватен как средство доказательства, если он позволяет однозначно описать условие применимости того или иного правила. Практика показывает, что такая однозначность вполне достижима. Это легко объяснить и теоретически. Содержательный метаязык в процессе математического доказательства устанавливает правила оперирования с конечной совокупностью предметов. Такого рода правила предельно однозначны, и доказательство, проведенное в соответствии с ними, столь же однозначно, сколь однозначен результат решения арифметического примера.

Здесь, однако, возникает вопрос о непротиворечивости метаязыка. Лакатос, как мы видели, полагает, что самый тривиальный содержательный метаязык не исключает противоречивых требований, а следовательно, может вносить недостоверность в доказательство. «Гипотеза Гольбаха, что каждое четное число равно сумме двух простых,— пишет он,— может быть доказана завтра, но мы никогда не будем знать, что она истинна. Такая уверенность была бы только в том случае, если бы метаматематика, метаметаматематика и т. д. до бесконечности были бы непротиворечивыми. Но этого мы никогда не будем знать» [36].

Это рассуждение некорректно, ибо оно игнорирует первичность доказательства перед его обоснованием. Достоверность доказательства санкционируется не «сверху», не от метаматематики, но исключительно «снизу», от обосновательного слоя. Если некто даст доказательство гипотезы Гольбаха, и оно будет принято как достоверное, то найдется непротиворечивый метаязык, который его оправдает. На каком-то уровне развития теории неоднозначный метаязык может внести неоднозначность и в само доказательство, но такая ситуация исключена в зрелых теориях.

Идея неявных допущений и контрпримеров Лакатоса относится, таким образом, в лучшем случае, только к короткому периоду становления теоремы, но не имеет отношения к характеристике готового математического знания и к доказательствам в зрелых математических теориях. Отчасти это признает и сам Лакатос. Но в таком случае его намерение «бросить вызов математическому догматизму», состоящему в признании непогрешимости математического знания и окончательности математических истин, теряет всякое основание. По крайней мере, концепция неявных допущений и контрпримеров не выглядит достаточной для такого вызова.

Другой аргумент Лакатоса против строгости доказательства, который можно назвать логическим, исходит из разделения строгости доказательства и строгости анализа доказательства. Лакатос убежден в том, что при повышении строгости анализа доказательства (а она, несомненно, повышается с развитием логических средств), мы каждый раз подвергаем сомнению то, что раньше принималось в качестве несомненного, сужаем обосновательный слой, и, тем самым, низводим на степень нестрогого то, что казалось до этого строгим и окончательным. «При каждой революции строгости,— пишет Лакатос,— анализ

доказательства проникал все глубже в доказательство, вплоть до «обосновательного слоя» (foundational layer), хорошо знакомого основного знания (familiar background knowledge), где верховно правила кристально ясная интуиция, строгость доказательства, а критика изгонялась. Таким образом, различные уровни строгости отличаются только местом, где они проводят линию между строгостью анализа доказательства и строгостью доказательства, т. е. местом, где должен остановиться критицизм и должно начаться подтверждение» [37]. Это значит, что всякая достоверность в математике имеет смысл лишь в плане сегодняшней глубины анализа строгости доказательства и в отношении того обосновательного слоя, который сегодня поставлен вне критики.

С точки зрения общенаучной методологии, этот подход выглядит довольно убедительным. Чем дальше развивается наука, тем основательнее становится научный критицизм, и положение, общепринятое в одно время, может быть отвергнутым или скорректированным в другое. Однако по отношению к математике идея бесконечной ревизии не является правильной. Лакатос совершенно очевидно смешивает здесь разные типы интуиции и разное их отношение к логике. Является, несомненно, правильным то, что всякое интуитивное содержание может быть концептуализировано, выражено явно, всякое интуитивно ясное доказательство, если оно верно, может быть представлено на формальном языке в виде последовательностей знаков (формул), соподчиненных друг с другом в соответствии с канонами логики. Но возможность концептуализации интуитивного совсем не означает возможности корректировки или отбрасывания его содержания. При любом анализе арифметики мы не отбросим элементарных арифметических истин, принятых праксеологически. Логический анализ не может также отвергнуть однозначных соглашений, лежащих в основе математических теорий. В математике существует сфера предельно достоверного, сфера аподиктических истин, которая не может быть исправлена логическим анализом. Сам этот анализ принимается или не принимается в зависимости от согласия его выводов с такого рода фундаментальными интуициями.

Таким образом, в математике мы имеем абсолютный обосновательный слой, систему достоверности, которая не может быть сужена посредством какого-либо более глубокого логического анализа. Поскольку всякое математическое доказательство в конце концов ставится на этот обосновательный слой, оно приобретает характер окончательности и независимости от логических средств анализа доказательства, которые могут появиться в будущем. Логическая формализация теории является адекватной лишь тогда, когда она не искажает содержания теории, т. е. только в том случае, когда она санкционирует в качестве законных все доказательства, принятые в теории на содержательном уровне. Другими словами, несмотря на всю важность логического анализа доказательства, несмотря на все возрастающую глубину и совершенствование такого анализа, он не обладает правами пересмотра содержания теории, санкционирования или отбрасывания уже признанного доказанным. Идея Лакатоса об относительности обосновательного слоя, о зависимости его от глубины (строгости) анализа доказательства не соответствует действительности, она происходит из ошибочного представления об интуитивно данном как неизбежно недостоверном, нуждающемся в логическом анализе и корректировке. Вся совокупность современных теорем арифметики, алгебры, геометрии, анализа и т. п. несомненно сохранит свою силу при любых стандартах строгости, которые могут быть введены в будущем, точнее говоря, всякие такие стандарты будут отклонены, если они не будут соответствовать наличному содержанию математики.

П. Марчи в цитированной выше статье выдвигает положение, что математические теоремы гносеологически равнозначны фактам (базовым утверждениям) эмпирической теории. Эта идея верна в том отношении, что она фиксирует первичность теоремы перед ее теоретическим (аксиоматическим) и метатеоретическим обоснованием. Но полной аналогии, которую стремится установить Марчи, здесь, конечно, **нет.** Фактологические (базовые) утверждения эмпирической теории исторически изменяются не только в своей терминологической оболочке, но и по содержанию, по степени достоверности. Такие утверждения, как «атомный вес воды равен 18», «молекула воды состоит из атома кислорода и двух атомов водорода», конечно, чрезвычайно устойчивы. Но их устойчивость связана с устойчивостью теоретических принципов, и она может быть поколеблена критикой теории и анализом других фактов.

Предельный обосновательный слой в математике, связан только с категориальной и праксеологической интуицией, в конечном итоге, с фундаментальными категориальными подразделениями; он не может быть изменен посредством внешней (логической или гносеологической) критики и в некотором смысле остается неизменным на протяжении всей истории математики. Математическое утверждение, прямо или косвенно сведенное к этому слою, не может быть поколеблено дальнейшим прогрессом математической теории или логики обоснования и в этом смысле имеет окончательный характер.

В своей критике непогрешимости математики Лакатос обращается еще к одному аргументу, а именно, к факту исторической изменчивости критериев строгости. «Пифагорейцы,— пишет он,— считали, что строгие доказательства могут быть только арифметическими. Однако они открыли строгое доказательство того, что $\sqrt{2}$ был «иррациональным». Когда этот скандал вышел наружу, то критерий был изменен, арифметическая интуиция была дискредитирована и ее место заняла геометрическая интуиция. Это означало большую и сложную реорганизацию математического знания (была введена теория пропорций). В XVIII столетии «вводящие в заблуждение» чертежи испортили репутацию геометрических доказательств, и XIX век увидел снова арифметическую интуицию, воцарившуюся при помощи сложной теории действительных чисел. Сегодня основные споры идут о том, что является или не является строгим в теоретико-множественных и математических доказательствах, как это видно из хорошо известной дискуссии Цермело и Гентцена [38]. Если же критерии строгости математического доказательства не достигают полной устойчивости и определенности, то сама постановка вопроса о полной строгости представляется лишенной смысла.

Этот аргумент возник задолго до Лакатоса.

Ф. Клейн в своих «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» уже говорит об относительности всякого уровня строгости, хотя он не делает отсюда вывода о релятивности доказательства [39]. Более современные математики считают такой вывод вполне законным. Американский математик Р. Л. Уальдер писал в 1944 году: «Совершенно ясно, что мы не обладали и, по-видимому, никогда не будем обладать критерием доказательства, не зависящим ни от времени, ни от того, что требуется доказать, ни от тех, кто использует этот критерий, будь то отдельное лицо или школа мышления. В этих условиях самое разумное, пожалуй, признать, что, как правило, в математике не существует абсолютно истинного доказательства, хотя широкая публика убеждена в обратном» [40]. В еще более определенной форме эту мысль выражает И. С. Синельников, который пишет, что «понятие строгости зависит всецело от условностей, диктуемых господствующим вкусом, которому дано на определенный хронологический период утверждать меру требовательности в отношении математической строгости» [41]. Можно привести много рассуждений математиков и философов, в которых отсутствие полной строгости в математике непосредственно выводится из факта исторической изменчивости ее критериев.

Убедительность этого аргумента, однако, чисто внешняя. Ход мысли основан здесь на той же ложной посылке, о которой уже говорилось выше: предполагается чем-то само собой разумеющимся то положение, что новые критерии строгости способны упразднять математические результаты, достигнутые до их принятия. Но это не подтверждается историей математики. Здесь не учитывается в должной мере вторичность логических критериев перед содержанием математики, тот факт, что эти критерии вводятся лишь при условии сохранения достигнутого содержания, базирующегося в конечном итоге на праксеологических и категориальных представлениях. Если бы принятие доказательства было действительно делом вкуса или авторитета, то мы имели бы огромную свалку теорем, когда-то считавшихся доказанными. Ничего подобного мы не имеем.

В аргументации от изменчивости критериев предполагается также как нечто самоочевидное, что фактическая строгость доказательства прямо зависит от существующих рационально выраженных критериев строгости и не может превосходить их. Но это неверно. Математик, проводя доказательство, ориентируется не на рациональные принципы строгости, но на теоремы, которые уже признаны доказанными, т. е. по существу он занят редукцией к предельно достоверному слою. Но таким путем он получает предельно обоснованные доказательства, которые имеют внеличностный и вневременной статус. Фактическая строгость математики первична и в широком диапазоне не зависит от существующих критериев строгости.

Практически математики верят в надежность своих доказательств. Вряд ли кто допускает, что на некотором уровне строгости, с точки зрения некоторых ее критериев мы объявим в качестве неполных теоремы арифметики, основную теорему алгебры или доказательство того, что аксиома параллельных невыводима из других аксиом евклидовой геометрии. Возможности такого пересмотра, очевидно, никто не допускает, и тем не менее, в общефилософских рассуждениях о математике мы охотно соглашаемся с тем, что «ничто не абсолютно» и, следовательно, допускаем принципиальную возможность такого пересмотра.

Такое расхождение практической установки и общефилософского воззрения в современной математике объясняется рядом обстоятельств, и прежде всего некритическим перенесением в сферу математики положений общенаучной методологии. Нетрудно видеть, что основной идейный мотив критики строгости математического доказательства у Лакатоса проистекает из отождествления знания математического и эмпирического. Общепризнанные методологические принципы опытного знания переносятся на математику и более или менее правдоподобно интерпретируются на новом материале.

В действительности, однако, математические положения в плане подтверждения не могут быть поставлены ни в какое соответствие с положениями опытных наук. Подтверждение опытного предложения есть бесконечный процесс в силу самой его открытости по отношению к бесконечному числу возможных наблюдений. Подтверждение (проверка доказательства) математической теоремы представляет собой всегда конечный процесс, сводящийся к установлению возможности или невозможности некоторых комбинаций в конечном множестве элементов, т. е. к элементарным праксеологическим констатациям, которые уже не могут быть подвергнуты ревизии со стороны логики или опыта. Доказательства математических теорем являются столь же законченными, сколь законченной может быть наша практическая деятельность по упорядочению конечного числа элементов. Трехлетний ребенок уверенно строит пирамиду из кружочков, накладывая один на другой по величине. Его знания о мире еще незначительны, и ему предстоит длинный путь совершенствования, но то, что он сделал сейчас, абсолютно: расположить кружочки в порядок по величине совершеннее, абсолютнее и т. д. не удастся более ни ему и никому другому на Земле. Комбинация в соответствии с принятым правилом закончена, и сам вопрос о ее относительности является неосмысленным. Некто, конечно, может возразить следующим образом: «Расположение кружочков по величине окончательно, если принять неизменными наши критерии различения «больше», «меньше», которыми ребенок руководствовался. Но могут измениться и эти критерии». Это возражение, несмотря на всю его гипотетичность, можно принять. Тогда мы будем говорить о *предельной* завершенности комбинации, т. е. о такой завершенности, которая не может быть поставлена под сомнение в рамках существующей категориальной сетки. Представляется, однако, что различие между предельным и абсолютным в данном случае не имеет практического смысла.

Математическое доказательство представляет собой не что иное, как построение некоторой комбинации в конечном и обозримом множестве объектов. Законность такой комбинации является предельно общезначимой, ибо каждый шаг в ее построении опирается либо на простые правила (соглашения), либо на элементарные праксеологические соображения о возможности некоторой конечной комбинации. В индивидуальном творчестве математика здесь возможна ошибка в виде негерметичности, нарушения законов

логики и т. п., но социализация доказательства, безусловно, исключает все ошибки такого рода. Мы, таким образом, имеем основание утверждать, что в действительности подавляющая часть реально функционирующих математических результатов является предельно обоснованной, в том смысле, что их доказательства полностью гарантированы от опровержения в будущем, и это относится не к особо выверенной формализованной математике, но к обычной содержательной математике, доказательства которой обладают достаточной убедительностью. Негерметичность доказательства не тождественна его недостоверности, а содержательность не означает неоднозначности и возможности контрпримеров.

Блехман И. И., Мышкис А. Д. и Пановко Я. Г. высказывают мнение, что математическое доказательство нельзя считать совершенно строгим уже потому, что оно содержит в себе такие слова, как «пусть», «рассмотрим» и т. п., которые должны быть одинаково поняты всеми читателями. «...Но насколько,— спрашивают они,— универсально само понятие понятности?» [42] Можно определенно сказать, что такого рода довод против строгости доказательства не имеет серьезных оснований. Отдельно взятые слова обычного языка неоднозначны, но практика показывает (это можно обосновать и теоретически), что в этом языке возможна формулировка совершенно однозначных, не допускающих двусмысленности команд. Такие слова как «пусть» «рассмотрим» праксеологически совершенно однозначны. Вряд ли в истории математики можно найти пример, где бы неоднозначность в понимании подобных слов привела к различию в выводах. Но это значит, что мы имеем дело здесь с чисто абстрактной возможностью разнопонимания, которая не имеет шансов быть реальной.

«Почему мы не можем честно признать,— пишет Лакатос, — несовершенство (fallibility) математики и попытаться защитить достоинство такой не идеально совершенной науки от скептицизма, вместо того, чтобы обманывать себя надеждой, что мы когда-нибудь будем способны сделать последний шаг к обоснованию ее на основе непогрешимой интуиции?» [43] Такой ход мысли не вызывает возражения по отношению к человеческому знанию в целом. Мы, однако, снизили бы стандарт математики, защищая ее от скептицизма наряду с обычным теоретическим знанием. Математика может претендовать на нечто большее, на что не могут претендовать другие науки, а именно, на окончательность своих результатов. Этот принципиальный момент полностью затушевывается в современной эмпирицистской философии математики.

В концепции Лакатоса, вообще говоря, смешиваются два вопроса: вопрос о том, возможно ли полное обоснование математики на базе некоторого единого и достоверного фундамента, и вопрос о том, достигают ли отдельные математические доказательства полной завершенности. Он справедливо отвергает идею непосредственно достоверного (интуитивно ясного) основания для математики в целом, но отсюда некоторым образом приходит к отрицанию достоверности всякой интуиции и окончательной достоверности любого математического утверждения. Этот переход не выглядит убедительным. Из невозможности окончательного фундамента математики не вытекает отсутствие окончательных утверждений и доказательств внутри математических теорий, а из недостаточности интуиции для целей обоснования не следует, что интуиция (по крайней мере, в некоторых ее формах) не может быть гарантией завершенности (полной достоверности) математического рассуждения.

Глава II

НАДЕЖНОСТЬ ЛОГИЧЕСКИХ НОРМ

Выясняя вопрос о достоверности доказательства, мы рассматривали его до сих пор только с точки зрения его исходных посылок и внешнего контекста, не затрагивая вопроса о самой логике доказательства. Мы исходили из предположения, что законы логики сами по себе не могут нарушить достоверности рассуждения и при их точном соблюдении не могут привести нас от истинных суждений к ложным.

Здесь, однако, существует проблема. Обычная логика только интуитивна, и ее адекватность отнюдь не очевидна — особенно для сторонника формализации. Попытка формализовать реальную логику приводит ко многим возможным системам, относительно которых опять-таки возникает вопрос об их адекватности с точки зрения общих задач математического мышления. Брауер и его последователи, как известно, поставили под сомнение возможность использования классической логики в полном объеме в рассуждениях о бесконечных множествах и на этом основании — строгость классической математики вообще. Для определения строгого доказательства необходимо, таким образом, исследовать семантический аспект логических норм, а именно выяснить их зависимость от содержания математического рассуждения.

Математическая теория функционально подчинена эмпирическому знанию, и вследствие этого она принципиально тавтологична по отношению к нему: из эмпирически истинных суждений она должна приводить только к истинным. Это значит, что в математическом доказательстве приемлема не всякая логика, но только логика, обладающая такого рода адекватностью по отношению к истине. Используя математику, физик предполагает это условие несомненно выполненным. Но каковы реальные гарантии надежности логических норм в этом отношении и основания существующей уверенности в их адекватности?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны исследовать систему логических норм не только в ее отношении к содержанию математических утверждений, но и в отношении к понятию истины вообще.

1. Логика в структуре математического доказательства

Место логики в математическом доказательстве выявляется полностью только при формальном его анализе, когда доказательство очищается от всех случайных для него моментов и предстает в его полной внутренней структуре.

Математическое доказательство в своем законченном виде содержит посылки двух типов. Это прежде всего математические аксиомы, т. е. утверждения, сформулированные на основе представлений о некоторых объектах и свойствах, о которых идет речь в теории. Другая группа посылок представляет собственно логические нормы, допустимые в данной теории. Различие между двумя этими типами утверждений достаточно очевидно: математические допущения теории являются синтетическими, описывающими некоторое положение дел в мире математических объектов, которое устанавливается независимо от логики и норм мышления вообще. Утверждая, к примеру, что для каждого натурального числа существует число последующее, мы просто фиксируем положение дел в натуральном ряду как в объекте, безусловно данном. Такое утверждение не может быть получено из логики, хотя оно и не является констатацией эмпирического факта в обычном смысле этого слова [1]. Законы же логики сами по себе не содержат информации о специфических объектах данной математической теории или об объектах какой-либо другой теории. Они представляют собой правила обращения с понятиями вообще, независимо от их смысла и уровня абстрактности. Логика привносится в математику извне, как нечто уже выработанное в обычном содержательном языке. Она не извлекается из математических рассуждений, но прилагается к ним, как к частному типу рациональной аргументации вообще.

Традиционная математика не накладывала никаких ограничений на состав логики, т. е. она исходила

из представления о безупречности любой логической нормы в любой сфере ее действия. Некоторые современные математические теории, напротив, с самого начала строятся с ограниченной логикой, неизбежно ограничивая тем самым и класс выводимых следствий. Мы не будем пока обсуждать правомерность таких вариаций в логических средствах, а сосредоточим внимание на структуре конкретных доказательств, на соподчинении в них логических и внелогических компонентов.

Из общего определения формализованного доказательства ясно, что каждый его шаг должен быть обоснован с точки зрения того или другого логического правила. В реальном же содержательном математическом доказательстве логика редко выступает на передний план. Большую часть математических доказательств занимают обычно переходы от одной формулы к другой на основе преобразований, имеющих чисто предметный характер, проистекающих из характера математических объектов, зафиксированных в определениях. Так, переходя от выражения $(a+bi)(a-bi)$ к выражению a^2+b^2, мы опираемся исключительно на правила действий с действительными числами и мнимой единицей. В этом переходе нет логики, хотя, несомненно, присутствует полная аподиктичность и однозначность. Многие достаточно объемные математические доказательства основаны целиком на предметных преобразованиях и не содержат в себе каких-либо логических правил.

В процессе доказательства мы ссылаемся не только на законы, относящиеся к объектам теории, но и на законы, относящиеся к теории в целом, к ее внутренней структуре. Такими законами являются, например, принципы двойственности и симметрии, имеющие место в различных математических теориях и позволяющие из одного истинного утверждения теории получать другое истинное утверждение посредством некоторой перестановки понятий или символов. Утверждения такого рода входят в доказательство также в качестве определенных внелогических правил преобразования, приводящих к новым утверждениям.

Являются внелогическими также все доказательства, связанные с построением. Осуществляя построение, мы опираемся только на свойства объектов, которые используются в построении, и не обращаемся к дедукции как таковой. Исходя из этого, интуиционисты утверждают, что математическое доказательство вообще внелогично. Оно, по их мнению, движется всецело по своим внутренним законам, определяемым понятием построения, а правила логики представляют собой только постфактум зафиксированные схемы этого движения [2].

В общем эта идея несостоятельна. Интуиционизм не представляет всей математики. Кроме того, интуиционистское доказательство, как всякое доказательство, нуждается в определенном содержательном контексте, который имеет смысл лишь в рамках обычной логики рассуждения, предшествующей всякой математике. Интуиционисты, однако, справедливо обращают внимание на тот факт, что нельзя представлять себе любое математическое доказательство как постоянное оперирование с силлогизмами и принципами логики. Преобразования и построения, основанные на свойствах объектов, являются основным стержнем всякого математического доказательства, как интуиционистского, так и классического.

Логика проявляет себя прежде всего в тех моментах доказательства, когда происходит замена одного выражения другим, представляющим его частный случай. Если мы рассматриваем закономерности натуральных чисел, то, естественно, используем здесь все равенства и неравенства, относящиеся к действительным числам вообще. Такое применение логики может быть названо силлогистическим, так как во всех таких случаях мы от утверждения (отрицания) некоторого свойства, принадлежащего множеству объектов, переходим к утверждению (отрицанию) того же свойства для его подмножества, т. е. имеем дело с неявным использованием фигур силлогизма. В современной классификации логических систем все модусы силлогистики являются формулами одноместного исчисления предикатов первого порядка. Более или менее сложное математическое доказательство тесно связано с силлогистикой, так как постоянными его моментами являются подведение частного под общее или ограничение общего на основе частного. В содержательном доказательстве правила силлогистики никогда не выписываются, они вообще не обсуждаются и принимаются как нечто совершенно самоочевидное. Поэтому, если математическое доказательство основывается только на предметных преобразованиях и правилах силлогистики, оно является тривиальным в логическом отношении. И если бы, как это в свое время утверждал М. Шлик, вся логика математики сводилась к фигурам категорического силлогизма, то проблема обоснования математического доказательства в плане его логических средств была бы довольно простой или бы даже исчезла совсем ввиду предельной простоты и непреложности силлогистических норм. В действительности, однако, это не так. Хотя многие математические доказательства совершенно тривиальны по своим логическим средствам и не выходят за пределы силлогистики, математика в целом не может обойтись только этими средствами.

Применение логики становится нетривиальным, когда математик вынужден прибегать к переходам, которые связаны с формами исчисления высказываний. Кроме известных логических принципов непротиворечия и исключения третьего, мы используем здесь такие правила, как снятие двойного отрицания, закон транзитивности следования, закон контрапозиции и закон приведения к абсурду в различных формах. Эти принципы нельзя получить как следствие силлогистики; они сами оказываются необходимыми для систематического обоснования силлогистики как системы. Они независимы от силлогистики и представляют другой, существенно автономный уровень логических связей. Если посылки доказательства обозначить в виде системы утверждений A_1, $A_2 \dots A_n$, а заключение — как утверждение B, то отношение доказательства, т. е. отношение $A_1 \dots A_n \vdash B$, всегда может быть представлено в виде ряда формул исчисления высказываний в их соподчинении по правилам этого исчисления.

В качестве примера рассмотрим доказательство основной теоремы арифметики, утверждающей, что каждое натуральное число может быть разложено на простые сомножители однозначно с точностью до порядка сомножителей. Доказательство опирается на следующие два утверждения как исходные: 1. если произведение нескольких сомножителей делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p; 2. если простое число делится на число, бо́льшее единицы, то делитель равен делимому. Первое утверждение по отношению к аксиомам арифметики является теоремой и требует доказательства, второе же утверждение непосредственно следует из определения простого числа как делящегося только на единицу и на самого себя. Если оба эти утверждения приняты, тогда доказательство основной теоремы арифметики легко осуществляется методом от противного.

Если утверждение теоремы обозначить буквой A, а исходные допущения 1-е и 2-е — соответственно буквами M и N, то общая пропозициональная схема доказательства будет иметь следующий вид:

$$(\bar{A},\ M,\ N \rightarrow (B \& \bar{B})) \rightarrow A.$$

Всякое математическое доказательство, очевидно, может быть представлено такого рода всегда истинной пропозициональной схемой. Это вытекает из того простого соображения, что исчисление высказываний запрещает только те формулы, в которых из истинного может следовать ложное. Но такие формулы не могут быть схемами математических теорем.

Эта схема может быть несколько усложнена. Так как допущение M — не аксиома, то оно может быть заменено конъюнкцией аксиом, из которых оно вытекает. Логический смысл доказательства становится при этом предельно ясным: оно демонстрирует, что допущение возможности различных разложений на простые множители одного и того же натурального числа несовместимо с аксиомами арифметики и с определением простого числа.

Здесь уместно отметить, что теоремы в математической теории вытекают не из аксиом, но из аксиом и некоторых определений. Широко распространенное убеждение, что все теоремы в математической теории выводятся исключительно из аксиом посредством правил логики, является ошибочным и приводит к существенным затруднениям в понимании внутреннего содержания математических теорий.

Пропозициональная схема доказательства, очевидно, не представляет собой полной его формализации. Она лишь обозначает общую схему умозаключения

на уровне высказываний при условии, что все входящие в нее гипотезы доказаны. Более глубокий анализ математического доказательства показывает, что, кроме правил исчисления высказываний и силлогистики, оно может содержать в себе логику многоместных предикатов и логику предикатов высших, чем первый, порядков. Многоместные предикаты необходимы для адекватной записи математических утверждений, где речь идет не об отдельном свойстве объекта, но о связи двух и более его различных свойств. Например, утверждение «между двумя точками на прямой существует, по крайней мере, еще одна точка, принадлежащая этой прямой» не может быть записано посредством системы логических отношений между одноместными предикатами; здесь необходимо введение особого свойства (предиката) «между», который будет трехместным, т. е. будет определен на множестве из трех объектов. Предикаты высших порядков необходимо появляются там, где возрастает уровень абстракции и где мы наряду со свойством объекта начинаем обсуждать свойства его свойств и т. д. Формальное изложение арифметики с самого начала требует использования правил исчисления предикатов 2-го порядка, ибо аксиома индукции не может быть записана в исчислении предикатов первого порядка. Логицистское изложение арифметики, если не использовать принцип сводимости, уже для простых теорем требует введения предикатов третьего и более высоких порядков. Таким образом, фактическая логика математического доказательства, будучи выявлена и зарегистрирована, оказывается весьма сложной системой утверждений, которая сама нуждается в обосновании своей надежности.

Развитие систем математической логики в нашем веке поставило вопрос о строгой демаркации математических и собственно логических теорий. Логические исчисления являются, разумеется, частью математики. Вопрос состоит в том, чтобы указать необходимые и достаточные признаки собственно логических исчислений. Принадлежность простых систем математической логики к логике не вызывает сомнения, так как в них эксплицируются отношения, открытые содержательной логикой и имеющие непосредственное отношение к нормам реального мышления. Но это трудно сказать уже о логике предикатов высших порядков, ибо она сложна, интуитивно не ясна и мало используется в обычной аргументации математика. Многочисленные системы многозначной, интуиционистской и модальной логик, очевидно, имеют смысл только как определенные математические теории, но не как теории, эксплицирующие и исследующие нормы реального мышления. Вопрос о том, что́ в современной математической логике относится к логике, достаточно сложен и не имеет ясного решения.

Аналогичный вопрос возникает и в том случае, если мы ограничимся несомненно логическими исчислениями, т. е. теми логическими системами, в которых непосредственно эксплицируются нормы реального мышления, и в формулах которых отражены схемы реальных математических доказательств. Если мы возьмем такие теории, как исчисления высказываний и исчисление предикатов, логическая природа которых несомненна, то легко видеть, что оба этих исчисления содержат бесконечное число формул, которые в силу своей сложности заведомо не входят в число реальных норм рассуждения. Даже такое простое и всегда истинное выражение, как $(x \to y) \to$ $\to (x \vee z \to y \vee z)$, не является аподиктичным и само по себе не может определять реального шага доказательства. Математическое доказательство, взятое в целом, может иметь такую или даже более сложную пропозициональную схему, но математик может прийти к ней только через отдельные шаги, на каждом из которых должно быть использовано более простое и аподиктическое правило.

Мы можем, таким образом, говорить о совокупности правил *реальной* логики, тех правил, которые самоочевидны, полностью убедительны для здравого смысла и которые практически определяют содержательное мышление в математике. Это те правила, которые даны человеку без их изучения, которые присущи мышлению вообще, общезначимость и аподиктичность которых лежит в основе всякого, в том числе и математического, рассуждения.

Анализ доказательств показывает, что существует совсем небольшое число логических форм, которые

даны нашему сознанию аподиктически и каждое из которых может непосредственно определять шаг доказательства. Это такие формы, как закон непротиворечия, закон исключенного третьего, правило снятия двойного отрицания, закон транзитивности следования, правило приведения к абсурду. Этот список неполон, но он недалек от того, чтобы быть полным. Если прибавить к этому формулы одноместного исчисления предикатов, выражающие силлогистику, и некоторые схемы непосредственных умозаключений на основе кванторов, то мы получим все фактическое логическое оборудование математики, т. е. всю систему норм, которая наряду с предметными, внутриматематическими преобразованиями определяет ход содержательного математического доказательства и его аподиктическую непреложность. Эту систему норм мы будем называть *реальной логикой* математического доказательства в отличие от логических форм, которые существуют только в качестве их формального замыкания или формального обоснования[3].

Формы реальной логики занимают такое же место в логических исчислениях, как и элементарные числовые равенства в арифметике. Они образуют онтологический центр этих систем: всякая аксиоматика логики признается лишь при том условии, что она безусловно оправдывает эти формы. Но оправдание из аксиоматики не есть гносеологическое оправдание. Последнее требует анализа генезиса этих форм и обоснования их необходимости как таковых из общих условий познания.

История математики и история познания показывают чрезвычайную устойчивость норм реальной логики. Анализ «Начал» Евклида показывает, что в них используются совершенно те же логические средства, что и в современных математических доказательствах, причем — все эти средства. Несмотря на многообразие и изощренность современных логических теорий, реальное рассуждение современного математика в плане логических средств ничем не отличается от мышления таких математиков, как Гиппократ и Евклид: в том и другом случае оно движется в очень узком кругу норм, аподиктичных для сознания, таких, как закон непротиворечия, закон исключенного третьего и т. д. Кант был, конечно, не-прав, когда утверждал, что логика как наука достигла в силлогистике Аристотеля полного завершения, но он не ошибался в том (несомненно, он имел в виду и этот факт), что система логических норм, реально определяющих человеческое мышление, является в высшей степени устойчивой и мало меняется с изменением содержания знания.

Кант был убежден в том, что логика как высшая априорная норма мышления вообще не изменяется. В настоящее время этот взгляд не может быть принят. Всякая система норм, включенная в процесс развития знания, очевидно, проверяет и корректирует себя в этом процессе.

Весь вопрос, однако, в том, чтобы уяснить факторы, определяющие эту эволюцию. Зависит ли изменение логики непосредственно от содержания мышления, как это думал Брауэр, или оно определяется какими-то более общими условиями мышления? В каком случае закон логики вообще может быть объявлен некорректным, и имеем ли мы действительно серьезные претензии к закону исключенного третьего? Можем ли мы быть полностью уверенными в корректности других принципов реальной логики, определяющих математическое доказательство?

Мы нуждаемся, таким образом, в гносеологическом анализе статуса логики, в уяснении ее истоков и функции в познании, в частности в выяснении поразительной устойчивости логических норм и их аподиктичности для сознания.

Мы будем говорить в дальнейшем о логике в трех смыслах, а именно, как о системе норм, фактически определяющих мышление (реальная логика), как о системе математических структур, возникших на основе экспликации и формального обобщения норм реальной логики (математическая логика) и, наконец, как о теории некоторых реальных отношений, выраженной на языке математической логики (логика причинности, логика времени и т. п.). Значительная часть затруднений в гносеологическом понимании логики проистекает из смешения этих смыслов, в особенности 1-го и 3-го. В действительности никаких оснований для смешения здесь нет. Логика причинности, к примеру, выражает на языке исчисления высказываний некоторые интуитивно ясные утверждения о причинной связи. Формулы, полученные таким образом, не являются тавтологиями в обычном смысле и не могут претендовать на подмену норм реальной логики. Вопрос о природе логики математического мышления, о ее надежности и возможной эволюции, сводится, в конечном итоге, к анализу природы реальной логики.

2. Рационализм и эмпиризм в истолковании логики

Основные законы современной формальной логики, фигуры силлогистики, основные положения модальной логики и некоторые общие правила (закон исключенного третьего, закон тождества и закон непротиворечия) были сформулированы Аристотелем в IV веке до н. э. Эти законы трактовались им как нечто, присущее самому разуму, как безусловные нормы мышления, отражающие его природу. Вплоть до начала XIX века аристотелевское учение о логике почти не изменилось ни по объему, ни по глубине, что дало повод Канту считать эту дисциплину завершенной и неспособной к развитию по самому своему существу.

Сам Кант, считая логику наиболее совершенной и законченной частью человеческого знания, фактически положил ее в основание своей философской системы. Традиционная классификация суждений служит у Канта средством классификации категорий, а именно категории рассматриваются в качестве функций познания, обеспечивающих подведение эмпирической ситуации под тот или другой вид суждения. В силу этого количество основных философских категорий и их взаимная связь целиком определяются у него исходной структурой логического знания.

Что же касается природы самой логики, то Кант ограничивается рядом положений, которые не представляют сколько-нибудь законченного обоснования этой науки и статуса ее законов. Основные его установки сводятся к следующим положениям:

1. Логика — наука о необходимых законах рассудка и разума, о форме мышления, безотносительно к его содержанию.

2. Логические правила — основа всех наук, поэтому логика не может быть обоснована посредством

какой-то частной науки. Эти правила даны априори.

3. Логика устанавливает формальные или негативные критерии истинности. То, что не отвечает логике, не может быть истинным.

4. Как негативный критерий истинности логика представляет собой необходимый канон построения знания, но она, поскольку ее правила отвлечены от содержания, не может служить в качестве органона, средства получения нового знания.

XIX век, характеризующийся бурным развитием естествознания, инстинктивно отвернулся от априоризма Канта. Хотя кантовская трактовка логики поддерживалась рядом известных философов, большинство мыслителей пошли здесь принципиально в другом направлении. Логика стала истолковываться как набор законов правильного мышления, которые должны получить свое обоснование в рамках исследования мышления как реального процесса, и прежде всего в рамках психологии. Дж. Ст. Милль выдвинул взгляд, согласно которому логика есть просто прикладная психология. Логические нормы, по Миллю, есть технические правила мышления, правила, определяющие практическое искусство мыслить, в отличие от общих законов психологии, которые лежат в их основе. Закон непротиворечия, к примеру, обосновывается Миллем из того обыденного факта, что «уверенность» и «отрицание» — два различных духовных состояния, исключающих друг друга[4]. Близкие мнения высказывались Г. Спенсером, Т. Липсом, Х. Зигвартом и другими философами XIX века. Психологизм оставался господствующим направлением в истолковании логики вплоть до начала XX века, а именно до появления «Логических исследований» Э. Гуссерля.

Основное направление рассуждений Гуссерля — критика психологического обоснования логики. Прежде всего он настаивает на том, что психология как эмпирическая наука, как наука, имеющая в своей основе приближенные законы, в принципе не может быть основанием для вывода таких строгих законов, как законы логики. Законы логики, по Гуссерлю, отражают отнюдь не природу мышления в его эмпирической данности, но выражают лишь общие нормы соподчинения суждений в соответствии с требованием истинности их содержания. Закон исключения противоречий говорит не о том, что субъект в силу каких-то психологических законов не может мыслить **А** и не-А одновременно (люди практически вполне могут это делать), но лишь то, что два таких суждения не могут одновременно обеспечить своей истинности. Законы логики выражают не психологию мышления, но лишь общие требования к истинности, к возможности теоретического знания вообще.

Другое возражение, которое выдвигает Гуссерль против психологизма, исходит из факта аподиктичности логических принципов. «...Нам убедительно ясна,— говорит Гуссерль,— не простая вероятность, а истинность логических законов... Против самой истины, воспринимаемой нами с внутренней убедительностью, бессильна и самая сильная психологическая аргументация; вероятность не может спорить против истины, предположение — против очевидности. Пусть тот, кто остается в сфере общих соображений, поддается обманчивой убедительности психологических аргументов,— достаточно бросить взгляд на какой-либо из законов логики, обратить внимание на настоящий его смысл и на внутреннюю убедительность, с которой воспринимается его истинность, чтобы положить конец этому заблуждению»[5].

Гуссерль прав в том, что психологические трактовки логики в XIX веке были довольно некритическими. Они выросли на волне философского эмпиризма и исходили не из анализа отдельных законов логики и условий их применения, но из общего учения об опытном происхождении всякого знания. Настаивая на эмпирическом происхождении математических и логических понятий, они не анализировали особенностей этих понятий, в частности того факта, что исходные утверждения математики и логики даны человеку с исключительной однозначностью; они как бы навязаны ему и не допускают альтернатив. Обращаясь к психологии в обосновании логических норм, Милль игнорировал этот центральный психологический факт, факт аподиктичности логических норм. Гуссерль, напротив, берет этот факт как исходный пункт своего обоснования логики. Эта его установка легла затем в основу феноменологии, которая внутренние факты сознания ставит рядом с внешними (чувственными), а в ряде случаев отдает им предпочтение (приписывает большую достоверность).

Позитивная концепция логики Э. Гуссерля покоится на его различении между ноэтическими и ноэматическими моментами научного знания, а также между теоретической (номологической) и нормативной науками. Знание в своем непосредственном бытии — человеческое, психологическое явление; оно представляет собой совокупность образов, актов воли и внимания, узнавания, различения и т. д. При таком рассмотрении знания на первый план выдвигается процесс его создания, возникновения, конструирования. Этот аспект рассмотрения знания Гуссерль называет ноэтическим Но, с другой стороны, знание может рассматриваться как система суждений в их взаимной связи, как система взаимосвязанных идеализаций, в которой уже нет ничего психологического. Система знания, какими бы путями она ни возникала, строится по своим внутренним законам как система, соответствующая понятию истины, как теоретическое единство. Логика как наука относится не к миру психологических (ноэтических) актов познания, но к миру значений (ноэм) в их рациональной взаимосвязи. «Мы интересуемся,— пишет Гуссерль,— не возникновением и изменением представлений о мире, а объективным правом, с которым научное представление о мире противопоставляет себя всякому другому и в силу которого оно утверждает свой мир как объективно-истинный» [6]. Это право знания на объективную истинность не зависит от его генезиса, от психологических переживаний, связанных с его возникновением, и поэтому система логических норм не имеет отношения к психологии, к совокупности психологических законов мышления. В работах, написанных после «Логических исследований», Гуссерль выдвигает на первый план противопоставление эмпирических и эйдейтических наук и логика характеризуется как одна из формальных эйдейтических наук, независимая в своих принципах не только от психологии, но и от любой другой эмпирической науки.

В отличие от теоретических наук, направленных на определенный объект исследования и раскрывающих фактическое положение дела, логика является наукой нормативной, описывающей идеал знания с точки зрения определенных его целей. Поскольку целью знания является истина, то логику можно понять как систему норм, раскрывающих понятие истины. «Логика исследует, что относится к истинной, правильной науке, как таковой, другими словами, что конституирует идею науки, чтобы, приложив полученную мерку, можно было решить, отвечают ли эмпирические данные науки своей идее... В этом логика проявляет свой характер нормативной науки и отстраняет от себя сравнительный способ рассмотрения, свойственный исторической науке...» [7]. Вся система логических норм как бы проистекает у Гуссерля из понятия истины. «Основные логические основоположения выражают не что иное, как известные истины, коренящиеся только в самом смысле (содержании) известных понятий, как-то понятие истины, ложности, суждения (положения)» [8]. Логика предстает поэтому системой априорного (внеопытного) и аналитического знания.

Но как же в таком случае обосновать систему логических норм как таковую? В обосновании априорности логических законов Гуссерль следует сначала за Кантом. Он исходит из факта существования теорий как ноэматических единств и истолковывает логику как одно из необходимых условий существования этих единств, определенных безотносительно к предмету теорий. Как и Кант, Гуссерль считает, что истина может быть постигнута только в виде системы понятий и что над человеческим знанием господствует тенденция к теоретическому единству как некоторый безусловный нормативный принцип. Можно было бы ожидать, что Гуссерль поставит теперь задачу, исходя из истины или максимального теоретического единства как общих норм знания, вывести основные принципы логики как частные нормы. Характеризуя нормативную науку, Гуссерль говорит именно о том, что все законы нормативной науки образуют замкнутую группу и что все они должны следовать из некоторой основной нормы [9].

Гуссерль, однако, отказывается от такого пути. Он полагает, что кантовская трансцендентальная дедукция основоположений грешит тем, что выводит априорное, неэмпирическое знание из некоторых допущений о субъекте, которые являются эмпирическими или метафизическими гипотезами. Во всех своих рассуждениях Кант, как известно, опирается на единство самосознания и априорные свойства времени. Для Гуссерля логика должна быть очищена как от психологии, так и от метафизики не только в изложении (по смыслу понятий), но и в обосновании. По этой же причине он отказывается и от обоснования логических норм на основе понятия пространства и времени, которое было предложено Ф. Ланге.

Единственным путем обоснования конкретных логических норм остается для Гуссерля их самоочевидность, непосредственная данность сознанию. «Ни один естественный закон не познается a priori, т. е. с сознанием его очевидности... Напротив, совершенно ясно, что все «чисто логические» законы истинны a priori. Они обосновываются и оправдываются не через индукцию, а через аподиктическую очевидность» [10].

Аподиктическая очевидность является одним из центральных понятий философии Э. Гуссерля. В обосновании этого понятия он идет отчасти от Декарта, который утверждал, что истины, данные интуитивно, ничуть не меньше обоснованы, чем истины, дедуктивно доказанные. Гуссерль, однако, усиливает этот тезис, утверждая, что теоретическое доказательство не может соперничать с интуитивной ясностью в смысле обоснования какого-либо положения. В обосновании поэтому нуждаются только истины эмпирические, априорные же даны непосредственно в аподиктической интуиции, и это обосновывает их полностью и окончательно. Эта идея непосредственной достоверности используется Гуссерлем и для обоснования философии. В своих ранних работах Гуссерль находился под сильным влиянием идей В. Шуппе о философии как беспредпосылочной науке. Согласно этой идее, если последние основания всякой науки находятся в философии, то философия не может ссылаться в своем обосновании на другие науки, но должна быть чистой, беспредпосылочной наукой, опирающейся в конечном итоге на интуицию [11].

В 20-х годах все большее значение в философии Гуссерля приобретает идея генетического конституирования, согласно которой смысл фундаментальных предположений о мире и о познании может быть выявлен и обоснован через анализ процесса становления, «конституирования» этих представлений в сознании человека. Речь идет не о выяснении психологического или реального исторического генезиса понятия, но о выяснении абстрактной логики его развития и о выявлении основных сторон «жизненного мира», которые определили его становление как такового. В русле этой идеи в книге «Опыт и суждение» (1939) Гуссерль попытался обосновать конкретные законы логики, сведя их очевидность к некоторому более глубокому уровню, к очевидности первичного, «допредикативного» опыта. Очевидность закона непротиворечия, в частности, сводится теперь к первоначальным различениям опыта, который еще не затронут концептуальной систематизацией. Эти последние идеи Гуссерля, характеризующиеся отступлением от его первоначальной надэмпирической позиции, по мнению большинства исследователей, не продвинули вперед понимание природы логики.

Несомненная заслуга Гуссерля состоит в том, что он отделил логику от психологии в плане обоснования. Вслед за Кантом он подчеркнул связь логики и категорий, которая и в настоящее время полностью игнорируется в эмпирических концепциях логики, а также указал на интуитивную данность (аподиктичность) логических норм как на их специфическое качество, связанное с их природой.

Что касается надежности логики как средства математического доказательства, то ответ Гуссерля здесь совершенно однозначен. Система логических норм не может измениться, она дана абсолютно и не может быть источником неадекватности в доказательном мышлении. Логические законы, по Гуссерлю, «суть чисто теоретические истины идеального вида, коренящиеся исключительно в содержании своего значения и никогда не выходящие за его пределы. Их, стало быть, не может коснуться никакое действительное или фиктивное изменение в мире matter of fact» [12]. Анализируя математическое доказательство в плане его возможной нестрогости, мы с этой точки зрения не можем выдвигать претензий к логике, но можем сомневаться только в его содержательных посылках и в правильности использования логических норм. Такого рода абсолютный фундаментализм не противоречит практике математики (законы логики никогда не опровергались), но надо признать, что Гуссерль не сумел дать ему достаточно убедительного теоретического обоснования.

В философии Гуссерля — это относится к априористским системам вообще — нормы логики повисают в воздухе, они скорее обожествляются, чем обосновываются. Представляется поэтому понятной тенденция объяснить эти нормы на какой-то более естественной основе, снять с них мистическое покрывало. Наиболее радикальная попытка в этом направлении была предпринята Ж. Пиаже (1896—1980), который попытался восстановить права опыта в развитии и обосновании логических норм.

Осознавая историческую борьбу между эмпиризмом и рационализмом в истолковании логических норм, Пиаже, естественно, стремится найти слабые стороны обоих этих направлений мысли и найти в конечном итоге некоторую «среднюю», более адекватную позицию.

Логика, по мнению Пиаже, вовсе не априорная структура, она, так же как и всякая другая понятийная система, предполагает опыт, хотя этот опыт и имеет специфические особенности. В процессе контакта с окружающим миром человек, по Пиаже, приобретает опыт двоякого характера. «Если все знания ребенка,— пишет он,— предполагают эксперимент для своего осуществления, то это психологическое утверждение не оправдывает эмпиризма, потому что существуют две формы эксперимента: эксперимент физический, ведущий к абстракции свойств, взятых от самих предметов, и эксперимент логико-математический с абстракцией по отношению к действиям или операциям, осуществляемым над предметами, а не по отношению к самому предмету как он есть» [13]. Когда ребенок сравнивает камешки друг с другом по качеству (цвету и т. п.), то он находится в сфере собственно физического или конфигуративного опыта. Когда же ребенок считает камешки, то он отвлекается от всех их физических качеств, он имеет дело с ними как с тождественными единицами, которые различаются лишь порядком, в котором они фигурируют как объекты операций. Абстракция числа, таким образом, не физическая абстракция, но абстракция процедуры, абстракция действия, рефлективное понятие, отражающее структуру специфического человеческого поведения (процедуру упорядочения). Мы должны различать, таким образом, физический (конфигуративный) и логико-математический опыт и соответственно физические (простые) и логико-математические (рефлективные) абстракции. Недостаток традиционного эмпиризма в обосновании математики и логики состоит, по Пиаже, в отождествлении этих двух уровней опыта и в несостоятельных попытках вывести логические и математические понятия из представлений физического опыта.

Для понимания характера логических операций важно сопоставить их с операциями психологическими и предметными (материальными). «Внутренние», психологические операции представляют, по Пиаже, отражение (интериоризацию) внешних, материальных операций. Они представляют собой действия, «которые, прежде чем выполняться на символах, выполнялись на объектах» [14]. Логика же как система символических операций является отражением более высокого порядка, а именно она является идеализированным отражением структуры внутренних, психологических операций.

Но каким же образом строгие нормы логики могут базироваться на психологических операциях, которые, как и всякие субъективные операции, подвержены различного рода ошибкам и смешениям? Пиаже, в отличие от Гуссерля, считает, что здесь нет проблемы, что само множество фактических операций мышления служит лишь реальной основой для логики как системы идеальных норм. По его мнению, соотношение здесь такое же, как между физикой и математической физикой или между реальной и аксиоматической (математической) геометрией. «Логика, — пишет Пиаже,— это аксиоматика разума, по отношению к которой психология интеллекта — соответствующая экспериментальная наука» [15]. Идеальная модель не вполне соответствует системе реальных отношений и наоборот, но тем не менее обоснование структуры идеальной модели, которую мы принимаем, может быть найдено только в указании на определенную структуру реальных отношений, исходя из исследования этой последней структуры. Исходя из этих соображений, Пиаже формулирует свою основную установку, согласно которой «психология интеллекта должна установить каноны формальных операций», т. е. логика должна быть обоснована в рамках психологии мышления.

Пиаже характеризует логику как «мораль мысли». Этим сравнением подчеркиваются два момента: во-первых, то, что логика отражает реальные процессы мышления, а во-вторых, то, что она идеальна, она говорит о должном, а не о фактическом процессе мышления, и, следовательно, как таковая не может быть получена (обоснована) простой индукцией из реальных процедур мышления [16].

Эти соображения, по мнению Пиаже, позволяют примирить традиционную тяжбу эмпиризма и рационализма в истолковании логики. Логика с этой точки зрения не может предопределять результаты психологического анализа мышления, но, с другой стороны, психология не определяет однозначно системы формальных операций, в которых выражены законы логики.

При объяснении сущности логических структур имели место, по Пиаже, три основных подхода: платонизм (априоризм), конвенционализм и позитивизм.

Платонизм соотносит логику с системой универсалий, существующих независимо от опыта и непсихологических по своему происхождению. В таком случае, считает Пиаже, возникает задача объяснить, как разум приходит к открытию таких универсалий. Платоническая гипотеза, по его мнению, только отодвигает проблему и не приближает нас к ее решению.

Конвенционализм все сводит к системе удобных соглашений относительно правил употребления языка, но он не объясняет, за счет чего эти соглашения оказываются столь плодотворными.

Наконец, позитивизм истолковывает логические нормы как элементы правильно построенного языка, базирующегося на обыденном содержательном языке. Пиаже указывает в связи с этим, что экспериментальная психология определенно указывает на то, что не язык является основой логики, но что, напротив, выработка элементарных логических операций является необходимым условием становления языка.

Пиаже полагает, что его концепция логики (которую он называет операционализмом) позволяет установить действительную связь между психологией и логикой и дать реальное обоснование природы логических норм. Это обоснование должно исходить из двух принципов: генетического (нужно показать становление психологических операций в истории развития индивида) и системного (нужно показать становление логических норм как системы обратимых символических операций). Интересно отметить, что, как и у Гуссерля, у Пиаже анализ генезиса логических норм выполняет роль их обоснования. Однако гуссерлевское вневременное генетическое конституирование заменяется у Пиаже рассмотрением реального становления логических норм на основе данных эксперимента.

Для того чтобы понять генезис логических норм в трактовке Ж. Пиаже, нужно понять две ведущие и взаимосвязанные его идеи, а именно идею равновесия и идею обратимости.

Идея равновесия человека с окружающим миром, как ее берет Пиаже, это по существу идея гомеостазиса, представление о системе взаимодействий человека (и общества в целом) с окружающей средой, в которой действия человека (общества) направлены на сохранение устойчивости и увеличение приспособленности перед лицом действий среды. Пиаже справедливо настаивает на том, что, как и предметные (реальные) операции, интеллектуальные операции субъекта в конечном итоге обусловлены законами этого равновесия, т. е. стремлением отдельного человека и общества в целом к более целесообразной системе реакций на воздействия среды. Психологические операции и логика с этой точки зрения лишь системы, обеспечивающие равновесие, и могут быть поняты в своей структуре, только исходя из этой их основной функции.

Физическое равновесие субъекта и объекта, по Пиаже, обеспечивается тем, что на каждое воздействие объекта субъект отвечает некоторым своим «уравновешивающим» действием, так что сумма всех возможных действий субъекта и объекта в идеале равна нулю. Эта схема взаимодействия субъекта и объекта непосредственно переносится у Пиаже в сферу интеллектуальных операций: как система психологических, так и система логических операций должны быть «уравновешенными». Но уравновешенность понимается теперь в смысле формальной обратимости, комбинаторной замкнутости системы операций.

Представление об операциональной обратимости логики кладется Пиаже в основу понимания ее генезиса и структуры, берется в качестве внешней нормы, определяющей совершенствование логических операций у индивида. Развитие логических норм происходит в направлении от простых к более сложным, от меньшей операциональной обратимости к большей.

Обратимость логических операций проявляется в двух формах, а именно в форме обратимости операций и обратимости отношений (реципрокности). Так, для любой формулы A в исчислении высказываний мы можем поставить в соответствие ее отрицание $\bar{A}$. Мы отрицаем здесь операцию, утверждаемую первой формулой. Мы можем, однако, для формулы A написать формулу, утверждающую просто противоположное отношение. Например, формуле $A \rightarrow B$ соответствует в этом смысле формула $B \rightarrow A$, которая не является ее отрицанием, но вместе с тем утверждает обратное отношение. Логические исчисления (исчисление высказываний и исчисление предикатов), по мнению Пиаже, являются полностью операционально обратимыми, поскольку для каждой операции мы можем указать в их рамках как обратную, так и реципрокную операции.

Двойственный характер обратимости в логике Пиаже стремится объяснить, так сказать, «снизу», из обратимости на уровне предметного действия. Уже на самом первом этапе приспособления к окружающему миру, когда ребенок осваивает пространственные перемещения, он, по Пиаже, уже имеет дело с двумя указанными видами обратимости. Он имеет дело с обратимостью в буквальном смысле, когда, к примеру, передвигает игрушку от себя и к себе, и имеет дело с реципрокностью, когда, отодвинув игрушку от себя, он затем передвигается к ней. В этом последнем случае нет обратимости той же

операции, хотя налицо восстановление исходной позиции (обратимость отношения). Эти естественные структуры поведения оказывают, по Пиаже, решающее влияние на становление отдельных норм логики и на характер логики как системы операций в целом.

Логические операции, по Пиаже, являясь отражением психологических, не могут оформиться раньше, чем сама система психологических операций. Логика поэтому формируется постепенно, проходя несколько стадий своего развития. Зрелая логика, включающая силлогистику, операции исчисления высказываний и исчисления предикатов, появляется, согласно Пиаже, только к 11—12 годам. До этого времени ребенок пребывает в сфере несовершенного, предлогического мышления, которое происходит в структурах, не обладающих законченностью (по отношению к структурам зрелой логики). Эти неполные структуры Пиаже называет группировками.

Если взглянуть на становление логических норм в целом, то, согласно концепции Пиаже, оно проходит несколько стадий: появление отдельных операций (композиции, разделения на классы и др.), появление группировок, т. е. более полного освоения допущений, связываемых с той или другой операцией, и, наконец, появление систематизированных операциональных структур, канонов мышления, которые обладают универсальной обратимостью и посредством которых мышление отрывается от наглядности, превращается в вербальное, комбинаторное и гипотетическое мышление, т. е. в мышление в собственном смысле слова.

Логика с этой точки зрения не является ни априорной и ни врожденной структурой. Она не является также произвольной системой соглашений, ибо отражает некоторого рода объективную реальность — множество психологических операций мышления. Она не является, наконец, системой эмпирического знания, так как суть логики, условие ее эффективности во взаимосвязанности операций. Логика в своем концептуальном представлении необходимо должна быть поэтому дедуктивной дисциплиной, исчислением, математической моделью процессов реального мышления.

Непреходящая заслуга Пиаже состоит в конкретизации проблемы логики, в переводе ее на уровень экспериментального исследования. Хотя мы имеем здесь дело уже не с философским, но с психологическим анализом логических норм, важность этого анализа для философии не подлежит сомнению: построенная на фактах генеалогия логики существенно ограничивает произвол гносеологических гипотез, в частности, она не оставляет более места для традиционных идей о врожденности и физиологической обусловленности логических норм. Разделение уровней опыта, введенное Пиаже, дает новую и несомненно более адекватную основу для понимания природы математических абстракций. Пиаже указал на связь логики с операциями деятельности, а также с социальной коммуникативной деятельностью вообще. Нет никакого сомнения в том, что только на этой основе мы можем понять ее истинную природу и функцию.

Концепция логики Пиаже, однако, не может удовлетворить нас полностью. Ее исходные положения не выглядят достаточно обоснованными. Не очень ясно, в частности, каким образом из факта физического равновесия общества и природы можно вывести уравновешенность математических и логических структур в смысле их полной операциональной обратимости. Анализ показывает, что Пиаже не смог дать здесь удовлетворительного обоснования [17].

Отвергая априоризм, Пиаже, как мы видим, придает логическим нормам статус законов на уровне теоретических идеализаций. Но в таком случае он оказывается перед лицом всех аргументов, выдвинутых против эмпирического обоснования логики: теоретические принципы опровержимы, а это значит, что законы логики должны постоянно корректироваться и заменяться новыми, что не подтверждается историей знания. Более того, он приходит здесь даже к некоторому противоречию: с одной стороны, поскольку логика в идеализированной форме отражает систему содержательных интеллектуальных операций, она не может быть законченной и должна эволюционировать. Но, с другой стороны, это невозможно, так как современные структуры логики обладают, по Пиаже, уже полной формальной законченностью (полной обратимостью операций).

Надо отметить также, что концепция логики у Пиаже имеет чрезвычайно абстракный характер, она оказывается фактически неприменимой к обоснованию статуса конкретных логических законов. Пытаясь оправдать принятие закона непротиворечия в логике, он пишет: «...Понятие является ничем иным, как схемой действия или операции, и, только выполняя действия, порождающие A и B, мы можем констатировать, совместимы они или нет. Далекие от того, чтобы «применять принцип», эти действия организуются согласно внутренним условиям связи между ними, и именно структура этой организации составляет реальное мышление и соответствует тому, что в аксиоматическом плане принято называть принципом непротиворечия» [18]. Итак, принцип противоречия — просто формальное утверждение, обозначающее несовместимость некоторых реальных действий. Нетрудно видеть, что такое объяснение закона непротиворечия фактически повторяет миллевское его объяснение с той лишь разницей, что несовместимость переживаний заменяется несовместимостью действий. Но всегда ли действия A и не-A несовместимы? Является ли закон непротиворечия обязательной нормой мышления или же это закон для тех сфер явлений, где действия A и не-A всегда несовместимы? Теория Пиаже, как всякая эмпирическая теория в логике, не дает здесь ответа.

Еще в большей мере неконкретность концепции Пиаже проявляется при обсуждении интуиционистской философии математики. Критикуя интуиционизм в ряде своих работ, он избегает обсуждения вопроса о статусе закона исключенного третьего — вопроса центрального для понимания статуса логических законов и структуры математического доказательства. Делая классическое исчисление высказываний идеалом законченной логической системы, Пиаже, очевидно, принимает и закон исключенного третьего, не предпринимая, однако, никакой попытки оправдать этот шаг. На первый взгляд, мощная по своим основаниям концепция логики не приводит к конкретным выводам и не становится вследствие этого средством разрешения противоречий в философии и методологии математики. Опираясь на идеи Пиаже, нельзя сказать ничего определенного относительно надежности логических норм как одного из компонентов математического доказательства.

Концепция логики Пиаже несостоятельна, потому что она, в конечном итоге, не выходит за рамки эмпиризма. Указав на деятельностные основания логики он ограничил эту деятельность активностью отдельного индивида. Понятие социальной деятельности одно из центральных понятий в общих воззрениях Пиаже. И тем не менее его подход к объяснению логики существенно антропоморфен. Социальная коммуникация выступает у него лишь в качестве общего стимулирующего фона. Конкретная же структура логики целиком определяется структурой индивидуального действования, системой уравновешивающих операций, которые принадлежат индивиду как таковому в его физической конкретности.

Несомненно, что логика может быть понята только в контексте деятельности, но не на основе структур индивидуального действования, а в контексте социальной (коммуникативной) деятельности, ее общих целей. Мы рассмотрим логические нормы в этом более широком плане, а также в связи с категориальными (онтологическими) представлениями о мире, что дает, по-видимому, возможность подойти в конечном итоге и к выяснению вопроса об их надежности в математическом доказательстве.

3. Деятельностное обоснование логических норм

Узел затруднений, связанный с пониманием логики, может быть распутан лишь посредством анализа практической функции знания. Может показаться, что, переходя к анализу понятия практики или деятельности, мы уходим из сферы чисто гносеологических понятий и удаляемся от цели, от задачи обоснования логических норм. Однако это не так. Именно рассмотрение механизма практического использования знания позволяет достаточно адекватно сформулировать наиболее общие требования к нему в плане формальных требований к понятиям и тем самым уяснить природу основных логических норм.

Понятие практики может быть включено в понятие равновесия при достаточно широком истолковании этого понятия. Суть ошибки Пиаже не в том,

что он исходит из равновесия, но в том, что от некоторой структуры равновесия он непосредственно переходит к требованиям для интеллектуальных структур, и в частности для структуры логики, от факта физического равновесия — к формальной обратимости логических операций. Этот ход мысли необоснован. Мы можем перейти от практики к логике, но лишь опосредованно; необходимо сначала понять общие требования, которые практика предъявляет к человеческому знанию, и только затем перейти к нормам логики как к одной из сторон этих требований.

Необходимо признать правильным учение Гуссерля о логике как нормативном познании, которое вытекает из некоторой общей нормы. Но этой общей нормой нельзя признать истину в том рационалистическом истолковании, в котором берет ее Гуссерль. Мы должны понять истину в контексте практики. Вопрос о том, что требует истина от знания, нужно заменить вопросом, что требует практика от знания, какие общие нормы она накладывает на него. Человек не просто стремится к истине как к некоторому абстрактному видению сущности вещей, он стремится к истине как к средству для действия. Суждение или система суждений может быть средством для действия только при достаточной определенности понятий. Утверждение логически неопределенное не истинно или истинно не вполне, но если мы предполагаем истинность суждения, то явно или неявно предполагаем и его полную определенность, строгое ограничение значения входящих в него понятий. Основные законы логики не врождены, они не являются некоторой исходной сущностью разума, не допускающей обоснования, каковы они у Канта, они также не продукты мистического проникновения человеческого сознания в «идеальное царство истины», как это представлено у Гуссерля. Эти законы гораздо прозаичнее по своим истокам: они навязываются нам необходимостью действовать, они выражают общие требования к качеству понятий и суждений с точки зрения их приемлемости для действия.

Пусть суждение строго определено. Это значит, что объем каждого понятия имеет строгие границы, и некоторая вещь в таком случае либо принадлежит данному понятию, либо не принадлежит ему — третьего не дано. Закон исключенного третьего, таким образом, выражает не что иное, как простое требование определенности суждения, строгую дихотомию логического пространства. Закон непротиворечия представляет собой частный случай утверждения этой дихотомии, а именно невозможность третьего в виде A и не-A одновременно. Невозможность этого случая с очевидностью диктуется практикой: утверждения A и не-A одновременно бесполезны с точки зрения практики, ибо утверждение противоречия есть случай максимальной неопределенности суждения, которая абсолютно неприемлема для значимого практически ориентированного мышления. Попытки Гегеля опровергнуть этот закон исходили из непонимания его статуса и статуса формального мышления вообще.

Общие требования к суждениям с точки зрения истинности (практической значимости) не сводятся только к требованию их строгости. Закон тождества $A=A$ может быть выполнен в принципе и при допущении расплывчатости понятий. Этот логический закон проистекает из другого требования, а именно из требования постоянства предмета рассуждения, которое, очевидно, имеет также практическую основу. Самое строгое и непротиворечивое мышление при подмене объекта рассуждения, очевидно, будет бесполезным в плане его практического использования. Более широкий анализ логических законов заставил бы нас сформулировать и другие по своей природе праксеологические требования, которые лежат в основе реально используемых логических законов. Нам здесь важно, однако, подчеркнуть принципиальную сторону дела, а именно то, что законы логики представляют собой не что иное, как общие требования к понятиям и суждениям, продиктованные в конечном итоге практической нацеленностью знания. Это означает, что система реальной логики может быть обоснована только праксеологически, на основе представлений о функции знания, но не интуитивно и не эмпирически.

Реальные суждения, конечно, не являются строго определенными. Реальные понятия всегда расплывчаты и содержат, как правило, спорную область в определении своего объема. Более того, эта область постоянно колеблется в зависимости от контекста,

в котором понятие используется. И тем не менее именно предпосылка полной определенности понятий лежит в основе всякого логического рассуждения. Этот момент может быть пояснен простым математическим примером. В геометрических задачах на построение мы начинаем обычно с того, что предполагаем построение осуществленным. Это допущение позволяет нам выяснить, что собственно требуется для построения, какие необходимые условия должны быть выполнены. Идеальное предположение, предположение осуществленной цели, позволяет нам, таким образом, наметить реальный путь ее достижения. Каждое логическое умозаключение аналогично этому опирается на идеальную гипотезу истинности исходных суждений. Именно это идеальное предположение позволяет нам предъявить определенные требования к реальным суждениям и в определенном отношении приблизиться к истине. Если суждение истинно, то его понятия строго определены, следовательно, относительно каждого из них справедливо $A \vee \bar{A}$, если оно истинно, то оно не допускает противоречия и т. д. Априорная гипотеза истинности определенного класса суждений позволяет предъявить к ним вполне конкретные требования, которые дают возможность, с одной стороны, отсеять суждения, заведомо не являющиеся истинными, а с другой стороны, вывести суждения, истинность которых не очевидна. Проверка выводов с опытом позволяет исправить исходные суждения и на новой основе повторить процесс логического анализа.

Логические законы, таким образом, не что иное, как нормы, проистекающие из понятия истинности или, в более широком плане, из требования практической значимости суждений. Логический анализ — это анализ с точки зрения такого рода целевых требований. Отсюда ясно, что логика представляет собой негативный критерий истинности, ибо все, не удовлетворяющее ей заведомо, не истинно по самой сути логических норм.

Эти общие соображения далеко не исчерпывают проблему обоснования логики. Однако они представляют уже достаточную основу для некоторых заключений о сущности логики и практике использования ее в науках.

Прежде всего ясно, что логика не является эмпирической наукой в обычном смысле слова. Ее законы отражают не содержание мышления, но скорее его цель, и поэтому они не могут быть обоснованы из материала какой-то конкретной науки или даже из материала комплекса специальных наук в целом. В этом смысле борьба Канта и Гуссерля против психологического и вообще эмпирического обоснования логики является, несомненно, оправданной. Верно, конечно, что все высказывания о действительности подчиняются законам логики, и все-таки законы логики — не законы о действительности в том же смысле, в каком таковыми являются, к примеру, физические законы, возникающие в результате обобщения определенного эмпирического материала и приближенные по своему существу. Законы логики — точные законы, нормы, проистекающие из самой цели знания, т. е. утверждения, имеющие принципиально другую природу.

Законы логики могут быть представлены так же, как тавтологии, разъясняющие смысл основных логических связок. Закон «неверно, что $A\&\bar{A}$» есть в этом плане не что иное, как разъяснение смысла связки «и». Такое истолкование законов логики не ошибочно, оно вполне согласуется с пониманием их как норм, продиктованных общей задачей знания, но само по себе оно не является достаточным. При истолковании логики как системы аналитических суждений, как определенного рода соглашений относительно смысла исходных логических констант теряется из виду то существенное обстоятельство, что эти соглашения в совокупности не произвольны, но соответствуют определенной общей норме, объективным требованиям к познанию в целом. Хотя все логические законы в отдельности могут быть истолкованы как аналитические суждения, как соглашения о смысле исходных связок, система их в целом отнюдь не соглашение. Она выражает единый принцип практической направленности мышления и в известном смысле однозначно навязывается структуре мышления. Идея свободного конструирования, имеющая смысл по отношению к математике, неприменима к логике, в смысле логики реального рассуждения.

Из сказанного ясно также, что законы логики

универсальны. Не может быть такого положения, чтобы в одной науке была справедлива одна логика, в другой — другая. Утверждения о возможной множественности логик основаны на искажении действительного статуса этой науки, истоков логических норм, на некритическом подчинении их конкретному содержанию мышления. Универсальность логических норм является совершенно очевидной с точки зрения праксеологического истолкования этой науки.

К выводу о единственности и универсальности реальной логики мы приходим и при истолковании логических норм как аналитических суждений, фиксирующих систему исходных соглашений о логических связках. Если некоторая совокупность эмпирического материала зафиксирована в суждениях с использованием связок «и», «или» и т. д. в определенном их смысле, то этим однозначно предопределена и система логических норм, допустимая в этой сфере. Сторонник множественности логик неявно допускает, что в зависимости от материала суждений человек может менять смысл логических констант в самом акте суждения. Это допущение ничем не оправдано. Анализ механизма образования суждений вполне определенно отвергает это допущение. Образование суждений подчинено категориальным представлениям, и человек, который захотел бы мыслить (фиксировать содержание опыта в суждениях) в другой логике, в другой системе логических констант, должен был бы радикально сменить и систему категориального видения вещей, к примеру, он должен был бы как-то иначе рассматривать соотношение части и целого, что является совершенно неприемлемым. Система категориального видения не конвенциональна, она однозначно навязана мышлению необходимым его контекстом, т. е. практической деятельностью.

Надо сказать, что истинность законов логики ставилась под сомнение неоднократно. Гегель, как известно, полагал, что законы диалектики опровергают или, по крайней мере, ограничивают действие законов формальной логики. Анри Бергсон, исходя из исторического взгляда на развитие познания, считал, что формальную логику следует ограничить сферой исследования твердых тел и механических движений. Появление феномена неопределенности пространственно-временного описания в квантовой механике побудило Биркгофа, Неймана и Рейхенбаха сконструировать особую трехзначную логику — логику квантовой механики, где наряду со значением истинности и ложности вводится также значение неопределенности. Теперь можно уже определенно сказать, что ни одна из этих реформ не имела успеха. В настоящее время вряд ли кто считает, что формальная логика находится в такой антитезе к диалектике, как это думал Гегель. Прогнозы Бергсона также не оправдались: в XX веке теоретическая биология шагнула далеко вперед, но это не привело ни к изменению логики, ни к кризису рационального познания вообще. «Логика квантовой механики» не оказала никакого воздействия на развитие этого раздела физики даже в качестве простого формального аппарата, тем более она не изменила внутреннюю структуру обоснования в этой науке. Последний случай, впрочем, заслуживает более подробного рассмотрения.

«Логика квантовой механики» обязана своим появлением одному в настящее время общеизвестному факту. Если мы скажем, что электрон в данное время имеет точную координату x и в то же время точное значение импульса p, то в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга мы высказываем ни истинное, ни ложное, но бессмысленное утверждение, поскольку по отношению к данной экспериментальной ситуации оба понятия не могут быть осмысленными в своем точном значении. Биркгофф и Нейман в 30-х годах поставили задачу сформулировать общие критерии осмысленности сложных высказываний в квантовой механике и задачу установления правил, которые бы позволяли от осмысленных высказываний переходить только к осмысленным или, в более узком плане, от истинных только к истинным. Рейхенбах позднее показал, что трехзначное исчисление высказываний с особыми правилами вывода может быть использовано в качестве таких правил перехода. Нельзя подвергать сомнению ни принцип неопределенности, из которого исходят эти ученые, ни осмысленность их задачи, ни даже то, по-видимому, что эта задача ими удовлетворительно решена. Два обстоятельства, на наш взгляд, привели к тому, что этот, в общем, рядовой результат превратился у неко-

торых философов и логиков в «особую логику квантовой механики», в опровержение универсальности реальной логики.

1. Отсутствие различения между языком и метаязыком квантовой механики.

Любая реальная задача в квантовой механике с самого начала формулируется либо в координатном, либо в импульсном языке. Но задание исходного языка описания представляет собой одновременно и отделение осмысленных высказываний от бессмысленных. Вследствие этого решение конкретных задач в квантовой механике в принципе не может столкнуться с неосмысленными конъюнкциями типа вышеприведенной и не нуждается ни в каких правилах по их изъятию. Поэтому ни исчисление Рейхенбаха и никакое другое подобное исчисление никогда не применялось для решения собственных проблем квантовой механики. Только в метаязыке, в плане чисто внешнего сопоставления высказываний квантовой механики друг с другом эти исчисления приобретают некоторый смысл.

2. Смешение различных способов применения логических исчислений. Искусственные логики типа логики квантовой механики, разумеется, могут иметь приложения, но эти приложения сами по себе не могут быть истолкованы как введение «новой логики» в ту или другую науку. К примеру, применение трехзначного исчисления высказываний в теории релейно-контактных схем не есть введение особой логики в эту теорию, ибо это исчисление применяется здесь не как логика, не в качестве структуры, определяющей смысл основных элементов языка, но просто как модель, как особая математическая теория, описывающая соотношения данной области. Использование трехзначного исчисления в метаязыке квантовой механики, если бы оно оказалось необходимым, не представляло бы собой ничего другого. Это исчисление формализовало бы определенные связи между объектами метаязыка — высказываниями о конкретных ситуациях, но оно вводилось бы и обсуждалось как математическая структура в содержательном языке, в рамках общепринятой логики. Утверждение об особой логике квантовой механики, таким образом, не более как некоторая спекуляция на слове

«логика», результат подмены его смысла. Логика квантовой механики является, очевидно, логикой только в третьем из указанных выше смыслов слова логика и она ни в какой мере не выводит квантовую механику за пределы единой для человеческого познания реальной логики.

Часто встречается также трактовка логики, в которой она представляется некоторым вторичным элементом знания, по крайней мере, элементом не очень существенным для его эффективности. Так Ю. И. Манин пишет: «Физик не обязан быть ни последовательным, ни непротиворечивым — он должен эффективно описывать природу на определенных уровнях. Тем менее логичны естественные языки и непосредственная работа сознания. Вообще логичность как условие эффективности проявляется лишь в узко специализированных сферах человеческой деятельности» [19]. О логичности работы сознания, конечно, говорить нельзя. Но любое явное (понятийное) представление знания, будь то в обыденном или научном языке, не может игнорировать законов логики, сохраняя при этом осмысленность и принципиальную эффективность. Формулируя элементарное суждение, мы неизбежно следуем общепринятому смыслу заключенных в нем логических связок. Но в таком случае это суждение сразу же попадает в сферу действия общепринятых логических норм. Логичность суждений и теорий — хотя и недостаточное, но абсолютно необходимое условие истинности и возможной эффективности знания. Другое дело, что тенденция к логичности не реализуется идеально. Но такого рода случайные и неизбежно устраняемые отклонения от идеала не дают оснований говорить о какой-либо автономии эффективности знания от его логичности. Физика, конечно, никогда не является полностью непротиворечивой, но она несомненно эффективна только в тех фрагментах своей теории, где она, утверждая нечто, не утверждает одновременно и противоположного.

Если основные принципы реальной логики определены целью знания, то логика оказывается некоторым образом рядоположенной с онтологией. Она, как и категориальные принципы, оказывается в таком случае нормативной структурой, предписанной

всякому мышлению независимо от его содержания. В чем же тогда различие между логикой и онтологией и какова между ними связь? В частности, насколько мы можем с современной точки зрения оправдать кантовский параллелизм логических и онтологических понятий? Что касается различия, то оно довольно очевидно. Категориальные принципы относятся к содержанию представлений, они накладывают ограничения на представления посредством требований к фундаментальным представлениям, таким, как пространство, время, причинность и т. д. Логические же принципы формулируются как только требования к форме языка, они заданы в терминах, безразличных к содержанию, таких, как субъект, предикат, объем понятия и т. д. Это разделение, однако, не абсолютно. Логические константы, без которых не может обойтись формулировка законов логики, а именно, такие слова, как «и» или «не», «все», «некоторые» и т. д., содержательно осмыслены, т. е. они имеют в своей основе некоторую содержательную интуицию, касающуюся реальной структуры вещей и явлений. В этом пункте логические принципы тесно смыкаются с онтологическими представлениями, точнее, они существенно опираются на онтологические представления.

Предыдущее рассмотрение показывает, что логика как наука может рассматриваться в трех аспектах. Во-первых, она представляет собой систему утверждений, неявно определяющих смысл некоторого множества исходных терминов. Когда мы говорим, что $A\vee\bar{A}$ всегда истинно, из $(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$ и т. д., то мы тем самым определяем смысл связки «или» на формальном уровне, т. е. через иллюстрацию ее использования в языке. Смысл любого высказывания может быть определен только на основе какого-то множества принятых смыслов. Логика может быть понята наряду с онтологией в качестве фундаментальной смыслозадающей области, где фиксируются в своем значении и определяют друг через друга универсальные, необходимые для любого высказывания независимо от его содержания термины, такие, как «все», «некоторые», «и», «не» и т. д.

Во-вторых, логика представляет собой формальную систему. В отличие от онтологии она определяет свои смыслы посредством системы строгих утверждений, в которых соответствующие символы выступают в качестве исходных. Легко понять, что формальность логики, т. е. строгая заданность ее исходных терминов и наличие формальных взаимозависимостей между ними, — ее атрибутивная черта. Смысл и значение логики состоит в том, чтобы высказывание, сформулированное в одном множестве логических констант, могло быть переведено в другую, в каком-то отношении более предпочтительную форму, т. е. функция логики всецело основана на строгой взаимозависимости основных логических констант друг от друга. Логика в собственном смысле слова есть только средство преобразования суждений, и она должна быть поэтому формальной структурой.

В-третьих, логика представляет собой систему праксеологических запретов, т. е. систему запретов, положенных на форму мышления со стороны его содержательной значимости и практической эффективности. Логика в своей позитивной форме указывает систему допустимых норм преобразования суждений, под которыми, естественно, подразумеваются нормы недопустимые. Граница между теми и другими целиком определена праксеологически, т. е. практической ориентацией знания. Так как эти формы выражают объективную цель знания, то при определенных принятых смысловых единицах (связках) структура реальной логики задается совершенно однозначно. Реальная логика может быть понята как система утверждений, выражающих праксеологические требования (запреты) к форме правильного мышления.

Но каким образом формируются исходные смысловые единицы (связки), на которых строится логика? При систематическом развитии логики мы берем их как уже данные, достаточно ясные по смыслу элементы обыденного языка. В данном случае мы должны придать особое значение именно такому качеству связок, как их очевидность, общезначимость, общепонятность. Логика вообще не функционировала бы, если бы исходные ее представления, выражаемые в константах, не были общепонятны. Человек, не имеющий общезначимой интуиции пространства, времени, причинности, очевидно, не мог бы понимать

языка людей. Непонимание смыслов терминов «все», «некоторые», «и», «не» и т. д. имело бы точно такой же результат. Логические представления в принципе интуитивно ясны по сути самой своей функции. Логические нормы, однако, не могут быть связаны с эмпирической интуицией, которая зависит от конкретного опыта. Логика как универсальное средство выражения любого содержания опирается на общезначимую интуитивную базу, а именно на базу категориальных представлений. Аподиктичность логических норм — это всецело категориальная аподиктичность. Это значит, что логика существует не как обособленная фундаментальная структура мышления, но как структура, зависимая от онтологии, опирающаяся на нее в своих исходных интуициях.

Сказанное не означает, что за каждой логической связкой лежит определенная категория, как это пытался доказать Кант. Связь здесь значительно сложнее. Если мы возьмем, например, понятие импликации (из A вытекает B), то его нельзя прямо, как это делал Кант, сопоставлять с онтологической связью причины и следствия. Понятие импликации в своей содержательной интерпретации гораздо абстрактнее: она одинаково выражает и ситуацию, связанную с причинным отношением, и ситуацию, связанную с чисто временной регулярностью, и даже ситуацию простого сосуществования событий (связь вещи и свойства, например). Понятие импликации фиксирует в себе нечто общее у всех этих реальных типов связей, а именно представление об онтологически необходимой связи. Но и идея необходимой связи не выражает еще интуитивного содержания импликации, поскольку импликация вполне мыслима как рефлективное отношение (из X вытекает X), в то время как подобное высказывание по отношению к реальной связи (X необходимо связано с X) не имеет никакого смысла. Вместе с тем ясно, что исходные логические понятия имеют корень в категориальных представлениях, они, так сказать, получают свое интуитивное определение и общезначимость именно в сфере категорий и посредством их. Такие логические термины, как «все» и «некоторые», прямо соответствуют онтологическим понятиям целого и части, т. е. непосредственно определяются онтологически. Это, по-видимому, также справедливо по отношению к понятию отрицания. По отношению к другим логическим константам это обстоит много сложнее, но важно, что каждое логическое понятие соответствует некоторому категориальному видению объекта, определяется через это категориальное видение, и только в силу этого подведение некоторой ситуации под категории, т. е. представление ее, ведет одновременно и к выражению ее в языке, т. е. к оформлению в логических константах. Онтологическая определенность всех логических констант диктуется самой сущностью языка, возможностью его функционирования. Восприятие событий в категориях было бы бесполезно или почти бесполезно, если бы мы не обладали способностью тотчас же выражать представление в языке, т. е. через логические смысловые элементы.

Итак, мы можем сказать, что элементарные логические понятия ясны и что их ясность непосредственно связана с ясностью (интуитивной данностью) смысла основных категорий. Именно вследствие этого любая данность в категориях, т. е. любое восприятие явления, есть одновременно (по крайней мере, в принципе) и выражение его в языке, т. е. посредством системы логических представлений. Мы не можем определить, по крайней мере на данном этапе, какие аспекты общего категориального представления о мире соответствуют той или другой логической константе, кроме отдельных, указанных выше случаев. Но мы можем сказать, исходя из функции логики, что эти аспекты выбраны таким образом, что они допускают отражение в формальной системе. Как уже говорилось, логика не была бы логикой, не выполняла бы своей функции, если бы ее исходные смыслы (константы) не находились друг с другом в формальных связях. Логические связки (и соответственно логические типы суждений) не могут взаимно-однозначно соответствовать онтологическим категориям, поскольку категории как таковые не образуют формальной системы, не допускают взаимных строго формальных определений. Логика в своей интуиции, несомненно, базируется на онтологии, но ее понятия поставлены в соответствие не отдельным категориям, как это думал Кант, но некоторым аспектам категориального видения, которые, с одной стороны, так же интуитивно ясны, как и сами категории, а с другой стороны, позволяют взаимоопределение в формальном языке. Логика, таким образом, в своей содержательной основе не что иное, как формализуемый аспект категориальных представлений. Этот момент чрезвычайно важен, он может быть, на наш взгляд, исходным пунктом при обосновании всех других особенностей логики как науки.

Логика, таким образом, связана по своей сущности не с эмпирическим и не с научным (теоретическим) знанием, но с категориальными представлениями о мире: она является нормативной стороной этих представлений по отношению к основным категориям языка. Человеческое мышление не может выйти за пределы существующей реальной логики точно так же, как оно не может выйти за пределы основных категорий. Отсюда вытекают два следствия, которые являются решающими для понимания статуса логики в науке вообще и в математике, в частности.

1. Логические нормы являются необходимыми (аподиктичными) в том смысле, что человек четко следует этим нормам в своей языковой практике и тонко чувствует отклонение от них. Природа этой необходимости лежит в необходимости для сознания основных категориальных подразделений, таких, как часть и целое, случайное и необходимое, бытие и небытие. Логическая интуиция — часть категориального видения реальности. Она отлична от пространственной интуиции, ибо логика аподиктична для субъекта не в силу какого-либо авторитарного наглядного представления, но в силу устойчивого идеализированного представления об основных категориях бытия, которое необходимо порождается и поддерживается деятельностью. Здесь мы имеем дело с необходимостью как со специфическим чувством нормы, которое создается деятельностью и поддерживается системой критериев, связанных с общей тенденцией к истинности и эффективности мышления.

Все нормы реальной логики аподиктичны и общезначимы в этом смысле. В этом состоит необходимое условие их функционирования. Мы можем утверждать также, что интуитивная ясность (общезначимость) какой-либо нормы логики является и достаточным признаком ее полной достоверности. Такого рода ясность нормы является свидетельством ее социально-практического признания, которое не может быть подвергнуто какой-либо рациональной критике. Гуссерль, несомненно, был прав, указывая на аподиктичность логических норм как на свидетельство их полной достоверности. Связь между аподиктичностью и надежностью может быть объяснена, однако, только в плане праксеологического понимания логики.

2. Логические нормы не могут опровергаться с точки зрения каких-либо фактов реальности или через сопоставление с законами специальных наук, т. е. они не подвержены критике с точки зрения материала мышления вообще.

Возможные изменения в логике могут быть вызваны только существенными изменениями в категориальном видении мира, которое в свою очередь может быть вызвано только радикальными изменениями в структуре деятельности. Нельзя изменить логику реального мышления, не изменив смысла фундаментальных категорий, лежащих в основе всякого познания, но такие изменения не могут быть вызваны просто появлением новых наук и новых объектов исследования.

Имевшая место в истории науки критика ряда основных принципов логики неявно исходила из предположения, что эти принципы имеют статус обычных теоретических принципов или индуктивных обобщений, которые, следовательно, допустимо корректировать как с точки зрения отдельных фактов, так и с точки зрения хорошо обоснованных теоретических положений о мире. Изложенные соображения показывают, что такая критика в принципе не может быть успешной: она не является адекватной статусу логики как науки.

Концепция Пиаже, придающая логике статус теоретического знания, не является адекватной. Логика не может быть истолкована как отражение психологических операций мышления. Соподчинение здесь обратное: психологические операции в индивидуальном сознании формируются под воздействием логики и категорий, чем и объясняется их относительное единство. Априористская философия, подчеркивая независимость логического от психологического, более адекватно фиксирует действительное положение дел,

хотя и не объясняет его. Категориальные представления и логика формируются непосредствено в коммуникативной деятельности, отражая ее универсальные целевые установки, но отнюдь не структуру переживаний или мысленных операций отдельного индивида.

4. О законе исключенного третьего

Надо сказать, что закон исключенного третьего действительно обладает определенной спецификой, а именно он теряет универсальность при некоторых интерпретациях логических норм, при которых все другие законы сохраняют свою истинность. Формулы исчисления высказываний можно понять, во-первых, как схемы, которые превращаются в содержательно истинные высказывания при подстановке на место переменных любых истинных высказываний. Их можно понять так же, как некоторое правило выбора гипотез в рассуждении. Закон непротиворечия в этой интерпретации означает, что A и $\bar{A}$ не могут быть одновременно посылками какого-либо рассуждения. Смысл закона исключенного третьего в этом плане будет состоять в том, что в любом рассуждении мы можем взять в качестве посылки либо A, либо не-A и ничего третьего.

В обоих этих истолкованиях закон исключенного третьего выглядит столь же разумным предположением, что и закон непротиворечия. Можно, однако, истолковать эти законы как некоторые утверждения о доказуемости в теории. Закон непротиворечия будет означать в этом смысле, что в теории нельзя одновременно доказать A и $\bar{A}$. Если над теорией с самого начала мы будем понимать непротиворечивую теорию (это допущение разумно, так как противоречивая теория не имеет познавательного смысла), то закон непротиворечия является истинным и в этой интерпретации, он превращается в определение необходимого логического качества теории. Закон исключенного третьего будет утверждать в этом случае, что в теории доказуемо либо A, либо не-A и ничего третьего, т. е. будет утверждать дедуктивную полноту теории, что, очевидно, неверно: здесь может иметь место 3-я возможность, а именно то положение, что ни A, ни не-A не являются доказуемыми.

Этот простой пример уже дает нам возможность понять основное направление интуиционистской критики закона исключенного третьего. Эта критика связана с определенной его интерпретацией, которую интуиционисты выдвигают как единственно законную для сферы математического мышления.

Самое общее соображение интуиционистов против закона исключенного третьего проистекает из идеи содержательности математики. Математические понятия, по мнению Брауэра, представляют собой отражение реального математического мышления (мысленного конструирования) и не могут иметь какого-либо значения вне этого содержания, т. е. вне сопоставления с конкретными конструкциями. Логицисты и формалисты, по его мнению, заменили математику как интуитивно ясную деятельность с конкретными объектами, анализом языка, механической стенографией и лингвистическими ухищрениями. Вследствие этого математика оказалась заполненной словесными определениями, которым ничего не соответствует в действительности. Поскольку такого рода словесные сущности вводятся только посредством чистых доказательств существования, которые предполагают использование правила снятия двойного отрицания и закона исключенного третьего, то, по мнению Брауэра, необходимо изъять из обращения указанные логические законы во всех местах, где они выводят за пределы конструктивной проверки, т. е. за пределы оперирования с конечными множествами.

Закон исключенного третьего, таким образом, ограничивается в области своего действия вследствие определенного понимания допустимого математического объекта, т. е. из некоторой философии математики, из контенсивистского понимания ее предмета.

Второй аргумент за такое ограничение состоит в том, что только таким образом математика может быть избавлена от противоречий [20]. Брауэр предполагает здесь, что действительным источником противоречий в математике являются именно неконструктивные определения, полученные посредством чистых доказательств существования.

Первый довод исходит из содержательного представления об объектах математики, из того убеждения, что математический объект должен быть некоторым образом означен на основе элементарных объектов, сконструирован из них, предъявлен как конструкция, существование (приемлемость) которой определяется существованием (приемлемостью) исходных объектов. В настоящее время мы можем совершенно определенно утверждать, что такая философия математики не соответствует природе этой науки, не вытекает из ее функции. В свое время Юм требовал, чтобы каждое абстрактное понятие было содержательным, соответствовало некоторому комплексу восприятий. Исходя из такой установки, он отвергал законность даже такого понятия, как «сила», которое уже широко использовалось в физике. Как мы сейчас понимаем, критерий осмысленности Юма никак не вытекает из природы абстракций; эффективность физической теории не требует столь жесткой привязки каждого ее понятия к опыту. Контенсивизм в математике имеет прямое родство с радикальным эмпиризмом в физике и разделяет все его недостатки. Математическая теория вполне может быть продуктивной, если она непротиворечива, независимо от того, имеют или не имеют ее объекты и утверждения конструктивное оправдание. Ограничение Брауэром сферы приемлемых математических объектов столь же произвольно, как и ограничение Юма на приемлемость абстракций, и столь же мало вытекает из функции науки.

Но, может быть, не прибегая к такому ограничению, мы действительно не сможем построить теорий, в достаточной мере гарантированных от противоречий? В настоящее время мы не имеем аргументов за истинность этого предположения, но имеем достаточное число доводов против него. Еще в начале века Рассел показал, что все известные парадоксы в теории множеств происходят из смешения уровней рассуждения, и показал, каким образом можно избавиться от них. В аксиоматизации теории множеств, произведенной на основе теории типов, до настоящего времени не обнаружено ни одного парадокса, что показывает, что Рассел правильно зафиксировал их источник. Но тогда надо признать, что возникновение противоречий в математике не имеет отношения к закону исключенного третьего или к какому-либо другому принципу логики высказываний.

В 1925 г. А. Н. Колмогоров посредством прямых рассуждений показал, что закон исключенного третьего не может быть сам по себе источником противоречий. Если некоторая интуиционистская теория непротиворечива, то она останется такой и с прибавлением к ее логическим средствам этого закона.

Х. Б. Карри (1942) обнаружил парадокс в теории множеств, который возникает в чисто импликативном рассуждении, т. е. вообще без использования отрицания, а следовательно, и закона исключенного третьего.

Таким образом, уже чисто логический анализ парадоксов показал, что их появление не имеет прямой связи с этим законом.

Некоторого рода прямой довод против закона исключенного третьего, принятый всеми интуиционистами, состоит в том, что этот закон недостоверен, поскольку он не может быть проверен в случае бесконечных множеств [21]. Проверка действительно невозможна, так как мы не можем пересмотреть все элементы бесконечного множества и убедиться, что каждый из них либо обладает некоторым свойством, либо не обладает. Здесь, однако, упускается из виду, что по отношению к бесконечному множеству нельзя проверить также закон непротиворечия и все другие законы логики.

Если мы зададим вопрос, почему интуиционист допускает закон непротиворечия действительным и по отношению к бесконечным множествам, то он, по-видимому, ответит, что допускать одновременное существование свойств A и не-A абсурдно. Но почему не является абсурдным допускать возможность для некоторого элемента бесконечного множества некоторого состояния, отличного как от A, так и от не-A? Никто из интуиционистов не дал разъяснения этой возможности, ее отличия от чистой абсурдности. Но только на этом пути мы могли бы оправдать ограничение закона исключенного третьего для бесконечных множеств.

Является несостоятельной сама идея опытной проверки логических принципов. Она проистекает из неясности в понимании содержания этих принципов и их места в познании. Логические законы — не индуктивные правила, меняющиеся в зависимости от

объекта исследования, и даже не обычные теоретические принципы, но нормы познания, проистекающие из самых общих его целей. Они оправдываются только этой целью, но отнюдь не характером объектов, к которым они прилагаются в данное время. Именно этой связью с целью знания может быть объяснена их универсальность и аподиктичность. Эмпирическое истолкование логики противоречит всей практике ее использования. Если мы будем настаивать на эмпирическом оправдании логических норм, то неизбежно возникает вопрос, поставленный еще Кантом: если логические законы опытные, то на каком основании они могут рассматриваться в качестве обязательной нормы для других опытных суждений?

Наиболее изощренный аргумент против закона исключенного третьего, идущий также от Брауэра, состоит в том, что признание этого закона означало бы разрешимость любой математической проблемы, что не может быть принято. К. Шютте интерпретирует это положение на примере проблемы Гольбаха следующим образом: «Пусть мы имеем два предположения:

(а) Всякое четное число, большее чем 2, может быть представлено суммой двух простых чисел.

(б) Существует число, которое больше двух, но не представимо суммой двух простых чисел.

Мы можем спросить, является ли одно из этих двух положений правильным. Учтем при этом, что правильность математического утверждения должна быть доказана. Значит, мы спрашиваем, доказуемо ли одно из двух предложений в принципе. Если кто-то отвечает на этот вопрос утвердительно, тогда он должен быть уверен, что одна из проблем либо (*а*), либо (*б*) разрешима. Но такая уверенность необоснованна. Действительно, из того, что проблема (*а*) неразрешима, не следует, что может быть указано число, удовлетворяющее положению (б). Невозможно также из допущения неразрешимости второй проблемы заключить, что существует общая процедура для решения первой проблемы... Поэтому нет разумного смысла говорить, что принцип «tertium non datur», который утверждает, что либо тезис, либо его логическое отрицание правильно, должен быть принят для математических высказываний» [22].

Нетрудно видеть, что эта аргументация основана на определенной интерпретации компонентов закона, т. е. высказывания и его отрицания. А именно утверждение и отрицание предлагается понимать как наличие доказательства A и соответственно как наличие доказательства не-A. Но делая так, мы неявно подменяем логику математического рассуждения метатеоретической системой высказываний о разрешимости проблем, т. е. переходим на совершенно другой уровень рассуждения и опровергаем не логический закон исключенного третьего, но метатеоретическую формулу $A \vee \bar{A}$ при определенном истолковании отрицания. Она действительно не универсальна, если A и не-A понять в смысле получения доказательства в системе.

В 1932 г. Н. А. Колмогоров интерпретировал интуиционистскую логику как логику решения задач. Согласно этой интерпретации, высказывание $A \& B$ означает, что задача A и задача B разрешены, $A \vee B$ — разрешена задача A или задача B, не-A — предположение о разрешимости A приводит к противоречию. В таком случае $A \vee \bar{A}$ означает, что либо разрешена задача A, либо предположение о ее разрешении приводит к противоречию. Ясно, что эти два случая не исчерпывают всех мыслимых возможностей, ибо может оказаться, что задача является неразрешимой и вместе с тем предположение о ее разрешимости само по себе не ведет к какому-либо противоречию. Это становится особо ясным в свете положений Гёделя о существовании аксиоматически неразрешимых задач в достаточно богатых формальных исчислениях.

Эта интерпретация интуиционистской логики, на наш взгляд, не просто одна из возможных ее содержательных интерпретаций. Она представляется в некотором роде естественной, обнаруживающей основной смысл интуиционистской логики, ее связь с высказываниями о разрешимости. Интуиционистская логика — это не логика истинности-ложности математических утверждений, а т е о р и я   р а з р е ш и м о с т и, выраженная посредством языка обычной логики. Такая метаматиматическая «логика» не совпадает и не должна совпадать с логикой собственно математического рассуждения. Поскольку в ней зафиксированы существенно внелогические предположения, связанные с фактической возможностью разрешения, она никак не может претендовать на статус универсальной логики, как и на статус единственно возможной логики математического рассуждения.

Интуиционисты неявно вводят в понимание математической истины средства ее достижения и тем самым подменяют логику отношений между утверждениями и отрицаниями тезисов в теории описанием возможных отношений их разрешимости и неразрешимости. Смешиваются принципиально различные вещи: высказывания об истинности-ложности тезисов в теории с высказываниями об истинности-ложности некоторых тезисов в метатеории, таких, как «A разрешимо», «A доказано», «A построено» и т. д. При правильном понимании логических норм мы вообще не должны соподчинять их со средствами и возможностями обоснования того или другого тезиса. Как уже говорилось, применение логики в принципе основано на предположении истинности суждений вне всяких предпосылок о средствах и возможностях ее достижения. Логика выясняет только то, что следует из суждения, *если принять его истинным.*

При логическом сопоставлении утверждений предполагается, что их истинность установлена. В частности, закон исключенного третьего по отношению к рассматриваемому примеру (гипотеза Гольбаха) означает только то, что если эта з а д а ч а   к а к и м и-т о   с р е д с т в а м и   р а з р е ш е н а, то либо верен первый тезис, либо второй (четных чисел, не представимых суммой двух простых, не существует или такие четные числа существуют). Хотя в конкретных математических теориях определенная задача не всегда разрешима, гипотеза разрешимости является абсолютной предпосылкой логического рассуждения, но не тезисом, который должен обсуждаться для выявления приемлемой логики.

Фактически мы имеем следующую картину. Последовательное интуиционистское рассуждение опирается исключительно на предметные свойства, оно стоит на собственных ногах и не нуждается в обычной логике, но нуждается лишь в общих схемах, описывающих построение (типа: если A построено и B построено, то $A \& B$ построено). Эти схемы вторичны, они лишь разъясняют интуитивный смысл понятия «построение», используя символику логики. Система этих схем и выдвигается интуиционистами в качестве логики, причем в качестве единственно истинной логики. Поскольку в этой «логике» нет формулы, соответствующей закону исключенного третьего, то этот закон объявляется ложным. В действительности же в интуиционистской математике нет логики вообще, но есть общая теория построения, выраженная на языке обычной логики, и она имеет очень косвенное отношение к действительной логике мышления.

Слово «логика» может быть использовано, по крайней мере, в трех различных смыслах. Мы можем говорить о логике как о системе норм реального мышления, как о системе математических структур, генетически связанных с этими нормами, и, наконец, как о теории некоторого реального процесса или отношения, выраженной на языке математической логики. Интуиционистская логика — типичный пример логики в третьем смысле. Она представляет собой теорию, эксплицирующую в логических символах интуитивный смысл понятия «построение». Такая «логика» может быть логикой и во втором смысле, т. е. целостной математической структурой, но, будучи структурой, связанной с конкретной интерпретацией, она не может претендовать на подмену или корректировку норм реальной логики, имеющих универсальное значение.

Брауэр выдвигает также некоторого рода историческое воззрение на логику, согласно которому логика зависит от материала рассуждения и должна постепенно изменяться вместе с ним. Этот аргумент не направлен конкретно против закона исключенного третьего, но, очевидно, призван дать некоторого рода гносеологическую санкцию всей интуиционистской критике логики.

Из приведенного выше анализа природы логики следует, что этот аргумент также не может быть принят. Логика как структура, включенная в развивающееся познание, несомненно, претерпевает некоторые исторические изменения. Но, во-первых, темпы этих изменений несравнимы с темпами развития самого знания (в обозримой истории мы не имеем случаев отказа от каких-либо ранее принятых логических норм!), а во-вторых, эти изменения зависят не от содержания знания, но от эволюции категориального видения в целом. Это значит, что конкретная теория, даже при ее выдающемся значении для мировоззрения и философии, не может стать основой для опровержения принципов реальной логики.

Интуиционистская критика логики должна быть поэтому признана несостоятельной в целом. В частности, дискредитация закона исключенного третьего как менее надежного является совершенно необоснованной, проистекающей из неадекватного понимания сущности логических норм вообще. Интуиционизм в действительности опровергает не универсальность закона исключенного третьего, а только универсальность *метатеоретической формулы* $A \vee \bar{A}$ при частном истолковании отрицания. Закон исключенного третьего как логический закон является столь же универсальным и надежным требованием, как закон непротиворечия и другие законы классической логики. В своей сущности он просто отражает дихотомию логического пространства на объекты, которые подходят под понятие, и на объекты, которые не удовлетворяют этому условию. Эта дихотомия — не опытный факт, который должен проверяться в каждом отдельном случае и зависеть от материала мышления, а нормативное требование, проистекающее из природы понятийного мышления, из его практической направленности.

Интуиционисты ошибаются и в том допущении, что логика математического рассуждения может отличаться от обычной логики, определяющей содержательное мышление. Такая ситуация совершенно недопустима с функциональной точки зрения. Представим себе на момент, что некоторый закон обычной логики L полностью изъят из математики. Пусть теперь при анализе некоторого физического процесса допустимая математика позволяет предсказывать событие A. Не исключено теперь, что физик, используя закон L, продолжит рассуждение и предскажет событие B, которое также будет подтверждено экспериментом. Нет никакого сомнения в том, что для единообразия своего метода он откажется от ограничений «строгого» математика и введет в свой логический аппарат также и закон L, почему-либо отвергнутый математиком. Математик в свою очередь не сможет не восстановить в правах отброшенный закон, если он желает проанализировать реальную структуру рассуждений, которая привела физика к успеху. Это значит, что математика не может быть более бедной в своих логических средствах, чем физика и содержательное мышление вообще, ибо математическая конструкция не самоцель, но в конечном итоге именно анализ такого рода успешных структур, приложимых к другим наукам.

Математика представляет собой концептуальное построение над содержательным знанием, функционально подчиненное ему, а именно она призвана давать строгие модели для логических выводов внутри содержательного знания. Но отсюда следует, что математика в принципе не может опираться на более бедную логику, чем логика содержательного мышления.

Это относится к математике вообще и не означает, что отдельные математические теории, исходя из специфики своего предмета, не могут ограничить свою логику. Но эти местные ограничения при правильном их понимании не могут истолковываться как опровержение или дискредитация норм обычной логики.

Не можем ли мы усомниться в какой-либо логической норме вообще? Может ли оказаться, что, действуя по некоторым бесспорным для нас правилам, мы от истинных суждений придем к ложным? Ведь если мы вообще допускаем эволюцию логических норм, то допускаем и существование «устаревающих» норм, а следовательно, и возможность ошибок, связанных с их абсолютизацией. Если это верно, то какими средствами обладает человечество для своевременного выявления и устранения таких норм?

Эти вопросы являются в высшей степени трудными. По крайней мере ясно, что, отвергая интуиционистскую концепцию логики, мы еще не отвечаем на них. Они являются также предельно гипотетичными. Мы можем конкретно ставить вопрос о возможной смене физических принципов: история физики дает богатый материал для исследования этого вопроса. История мышления, однако, не дает ни одного бесспорного примера устаревания, корректировки или замены принятой до этого логической нормы.

Тем не менее мы можем высказать здесь одно отрицательное суждение, которое будет достаточным для нашей цели. При всей неясности механизма эволюции категорий и логики мы можем вполне определенно утверждать, что эти фундаментальные структуры мышления эволюционируют не в результате рациональной критики.

Это положение может показаться несколько странным. Современный человек привык думать, что любой принцип может быть рассмотрен критически, а результатом критики может быть его изменение. В строго гносеологическом плане, однако, это убеждение неверно. Человек не подвергает сомнению свое собственное существование, факт мышления, объективного мира, пространства, времени и т. д. Человек живет в мире социально признанных аподиктичностей, которые являются внешней предпосылкой всякого акта мышления и которые не могут быть изменены на основе результатов или принципов самого мышления.

Критический анализ таких утверждений, как «материя неуничтожима», «пространство бесконечно», «время необратимо», важен для понимания их природы, но, с другой стороны, этот анализ не может ставить своей задачей изменение или опровержение этих утверждений. Эти принципы — не индуктивные обобщения и не выводы теоретического естествознания, но представления о реальности, внушаемые непосредственно практикой и закрепляемые каждым ее актом. Они обладают высшей достоверностью для сознания. Все человеческие понятия образованы на основе такого рода праксеологических принципов; они являются онтологической основой нашего мышления и не могут быть поставлены под сомнение путем какой-либо критики. [23]

Если выразить эту ситуацию в общем плане, то надо сказать, что принципы деятельности, лежащие в основе познания и определяющие его, не могут опровергаться с точки зрения познавательных принципов. Задача философии состоит здесь в усмотрении, экспликации и систематизации положений, но отнюдь не в их изменении. Их возможная эволюция осуществляется непосредственно в контексте человеческой деятельности, и она не может предрешаться в рамках актуального познания и его средств критики.

Эти общие положения о статусе онтологии позволяют нам понять и ситуацию с логикой. Допуская эволюцию логических норм, мы должны уяснить то обстоятельство, что эта эволюция определяется эволюцией категориального видения в целом. Логика может измениться под влиянием объективных причин, определяющих систему категориальных представлений, но не под влиянием каких-либо теоретических аргументов, всецело находящихся в рамках этих представлений. Для данной эпохи реальная логика является заданной безусловно. Мы принимаем логические нормы как достоверные в силу их аподиктичности, и мы не можем их не принимать, не исключая себя из общего процесса человеческого мышления и коммуникации.

Методологическое мышление XIX века в своем стремлении к надежному теоретическому обоснованию всякого знания уверовало в одну ложную посылку: оно резко противопоставило строгое теоретическое мышление нестрогому и ограниченному здравому смыслу. В этом плане естественно было думать, что обычная человеческая логика несовершенна и должна уточняться на основе некоторого теоретического анализа. Сегодня мы ясно видим недостаточность такого взгляда. В системе представлений, которая называется здравым смыслом, наряду с самыми неустойчивыми, чисто субъективными воззрениями содержатся и наиболее устойчивые структуры, которые лежат в основе всякой, в том числе и теоретической, достоверности. Это прежде всего онтология (категории) и логика.

Это значит, что математическое рассуждение, проведенное по правилам обычной социально признанной логики, является предельно достоверным просто потому, что в данное время никто не сможет предложить нам лучшей логики. Именно то обстоятельство, что эта логика является обычной, массовой, говорит о ее надежности в практическом плане. Более высокой гарантии не существует. Если математическое рассуждение герметично и проведено в точном соответствии с правилами обычной логики, то его следует считать предельно надежным в смысле возможного орудия получения следствий в математике и в содержательной науке. Все принципы реальной логики, обладающие интуитивной ясностью, в одинаковой степени и предельно санкционированы в своей достоверности. Это значит, что попытки достигнуть большей надежности рассуждения за счет ограничения реальной логики произвольны и являются гносеологически необоснованными.

Современный эмпиризм в математике не имеет определенной концепции логики. Лакатос справедливо замечает, что философы всех направлений, критикуя интуицию, оставляли в стороне интуицию логики, ибо логика была им нужна для борьбы со своими противниками. Современные эмпиристы в своем большинстве признают логику как надежный механизм передачи истины от посылок к следствиям, но делают это также без всякого теоретического обоснования.

Можно определенно утверждать, что вопрос о логике является камнем преткновения для всякого эмпириста. Будучи последовательным, он должен признать за логическими нормами статус индуктивных обобщений и тем самым уничтожить всякое различие между индукцией и дедукцией. Такой ход мысли, однако, входит в явное противоречие с практикой математики, и его мало кто отваживается защищать [24]. С другой стороны, эмпиризм не может признать за логикой особых прав и другого статуса, не подорвав своей общей идеи релятивности интуитивного мышления.

В действительности, логика занимает особое место в системе человеческого знания. Она представляет собой систему норм, проистекающую из категориальных представлений, вследствие чего надежность дедуктивного заключения столь же принципиально отличается от надежности индуктивного вывода, сколь категориальные подразделения отличаются от эмпирических по своей устойчивости и общезначимости. Прояснение природы логики приводит к концу всякий эмпиризм в истолковании математики, ибо неизбежно приводит к выводу, что математическое доказательство опирается на интуиции особого порядка, которые делают его абсолютно детерминированным, независимым от всякого содержательного контекста, а тем более, от вкусов того или другого времени.

Глава III

ОДНОЗНАЧНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В СИСТЕМЕ ПОСЫЛОК

Будучи герметичным и корректным в своей логике, доказательство может оказаться неоднозначным в том смысле, что принципы теории могут допускать другое доказательство, опровергающее его результат. Идея строгого математического доказательства включает в себя также и предположение его однозначности, неопровержимости его результата в той же системе посылок. Но имеем ли мы достаточные гарантии выполнимости этого условия для конкретных доказательств?

Анализ проблемы непротиворечивости, проведенный К. Гёделем, показал, что непротиворечивость математической теории в большинстве случаев не может быть выявлена (обоснована) посредством строгих методов. Этот факт дает повод для скептицизма. Если основные математические теории не гарантированы от противоречий, то любое доказательство только гипотетично: при всех прочих достоинствах оно не может быть гарантировано в смысле надежности (устойчивости) результата.

Мы попытаемся здесь выяснить, в какой мере законен этот скептицизм, насколько известные ограничения на логическое обоснование математики ставят под сомнение однозначность математических доказательств и традиционные представления о математической строгости вообще.

1. Развитие идеи непротиворечивости

Представление о непротиворечивости математических утверждений — часть общего идеала математики всех эпох. Но как методологическое требование оно стало выдвигаться только в XVIII веке в связи с противоречиями в исчислении бесконечно малых, с парадоксами при суммировании рядов и в операциях с отрицательными и комплексными числами. Математики того времени, однако, не выработали сколько-нибудь ясных критериев непротиворечивости. Как мы сейчас понимаем, идея строгой проверки теории на непротиворечивость и не могла появиться раньше вызревания современных представлений об аксиоматическом построении теории.

В начале XIX века математики определили основные понятия анализа и установили строгие правила оперирования с рядами, что, как казалось, полностью устраняло источники противоречий в математике и снимало проблему непротиворечивости в целом. Возникновение неевклидовых геометрий, однако, снова поставило ее и причем в значительно более глубокой форме: здесь впервые возник вопрос о непротиворечивости по отношению к математической теории в целом.

В процессе поисков обоснования непротиворечивости неевклидовых геометрий в XIX веке был выработан общий метод такого обоснования, а. именно, метод интерпретации. С логической точки зрения этот метод сводится к тому, что каждой аксиоме теории, непротиворечивость которой доказывается, ставится в соответствие (по определенному правилу) истинное утверждение в некоторой другой (базисной) теории, непротиворечивость которой предполагается гарантированной. Если такое соответствие установлено, то ясно, что каждому выводимому утверждению первой теории будет соответствовать выводимое утверждение во второй и каждому противоречию в первой — противоречие во второй. Из непротиворечивости базисной теории мы, таким образом, можем заключить, что рассматриваемая теория также непротиворечива.

Во всех доказательствах непротиворечивости неевклидовых геометрий, проведенных в XIX в., в качестве базисной теории выступала обычная геометрия, а в конце концов, арифметика, т. к. все утверждения евклидовой геометрии в соответствии с принципом, который лежит в основе аналитической геометрии, превращаются в утверждения о числах и операциях над ними.

Такой подход к обоснованию непротиворечивости математических теорий представляется естественным и достаточным при условии, что мы имеем основание верить в непротиворечивость некоторой базисной теории. События в математике в конце XIX века, однако, поставили под сомнение верования такого рода. Этот новый поворот событий связан с появлением теории множеств и с преодолением ее внутренних логических трудностей.

О. Коши, как представлялось многим математикам в первой половине XIX в., на базе понятия предела достиг полного обоснования анализа и тем самым разрешил кризис в основаниях математики, продолжающийся более ста лет. Однако скоро обнаружилось, что это обоснование недостаточно и даже в некотором смысле противоречиво. При изложении теории пределов как базы математического анализа Коши опирался на понятие действительного числа. Вместе с тем он трактовал иррациональное число как предел последовательности рациональных чисел. Для выхода из этого логического круга необходимо было обосновать свойства действительных чисел как-то иначе, без ссылки на понятие предела. Далее было обнаружено, что для строгого доказательства ряда теорем внутри анализа требуется понятие множеств со всеми его элементами, т. е. понятие актуальной бесконечности.

Новые факты математики, таким образом, породили потребность в более широких основаниях математического анализа и математики в целом. Задача состояла в том, чтобы: а) дать обоснование действительных чисел, независимое от понятия предела; б) строго обосновать те разделы анализа, где практически использовалось понятие актуальной бесконечности. Первую задачу в начале 70-х гг. разрешил Дедекинд своей теорией сечений. В это же время Кантор выдвинул теорию трансфинитных чисел, которая не только устанавливала законы оперирования с бесконечными множествами, но и давала полную теорию действительных чисел: нужно сказать, что до настоящего времени теория множеств является наиболее глубокой основой для понимания соподчинения и связи различных числовых множеств.

Однако триумф теории множеств был прерван в начале XX в. открытием целого ряда противоречий (парадоксов) в ее основе. Все эти парадоксы связаны, в конечном итоге, с интуитивным пониманием множества. Мы приведем здесь некоторые из них для уяснения принципиальной стороны дела.

1. Парадокс Кантора (был обнаружен самим

Кантором в 1899 г.). Пусть M — множество всех множеств, а UM — множество всех подмножеств этого множества. Согласно одной из исходных теорем теории множеств, мощность множества всегда меньше, чем мощность множества всех его подмножеств, что может быть записано неравенством: $\overline{UM}>\overline{M}$. Но, поскольку M содержит все множества, то $UM\subseteq M$, вследствие чего, согласно другой теореме теории множеств, $\overline{UM}\leqslant\overline{M}$, что противоречит предыдущему неравенству.

2. Парадокс Рассела—Цермело. Обозначим через M — множество всех нормальных множеств, т. е. множеств, не включающих себя в качестве элемента. Допустим, что M — само нормальное множество, тогда оно будет включаться само в себя, т. е. будет ненормальным множеством. Если же мы предположим обратное, а именно, что M — ненормальное множество, тогда то же рассуждение приводит нас к выводу, что оно нормальное. Мы, таким образом, не можем предположить без противоречия ни нормальности, ни ненормальности множества всех нормальных множеств.

3. Парадокс Ришара. Пусть все определения арифметики расположены в ряд по длине, к примеру, по числу букв, содержащихся в них. Если определения, содержащие одно и то же число букв, расположить в обычном алфавитном порядке, то тогда каждому определению может быть поставлено в соответствие некоторое натуральное число n — его порядковый номер. Назовем число ришаровым, если оно не обладает свойством, которое зафиксировано в соответствующем определении. Но определение ришарова числа также есть определение арифметики, и оно также имеет некоторое число в качестве своего номера. Пусть это число m. Является ли m ришаровым? Здесь налицо противоречие, ибо m — ришарово тогда и только тогда, когда оно не обладает свойством, требуемым в определении, т. е. тогда, когда оно не ришарово.

Обнаружение парадоксов в теории множеств поставило перед математиками проблему обоснования математики в целом. В узком смысле она состояла в том, чтобы найти способ избавиться от известных парадоксов. В более широком — необходимо было ответить на вопрос: в какой мере является законным стремление полностью избавиться от противоречий в математике, может ли математика получить когда-либо окончательное обоснование? В начале XX в. возможность абсолютно надежного обоснования математики не вызывала сомнений. Самые выдающиеся математики разделяли эту веру и предлагаемые им программы устранения парадоксов они рассматривали одновременно и как программы решения проблемы обоснования вообще.

Исторически первой программой такого рода является логицизм. Еще в 80-х годах прошлого века Г. Фреге нашел способ выразить основные арифметические понятия на языке логики таким образом, что каждому истинному арифметическому утверждению ставилась в соответствие логическая тавтология. Арифметика, как казалось, получала при этом абсолютно надежное обоснование, как и вся область математики, интерпретируемая на арифметике. Б. Рассел, изучая работу Фреге, обнаружил в ней приведенное выше противоречие, связанное с понятием множества всех множеств, не содержащих самих себя. Он, однако, не отверг основной идеи Фреге — обосновать математику на базе логики. Рассел полагал, что при некоторых уточнениях программа Фреге может быть полностью реализована, и тем самым желаемая строгость математики будет достигнута.

Причина парадоксов, по Расселу, кроется в использовании суждений, которые оборачиваются сами на себя. Он исключает такого рода суждения из математического языка посредством своей теории типов или теории логических ступеней. Суть этой теории состоит в том, что математические высказывания делятся на классы в соответствии с областью определения. Пусть имеется некоторая область объектов: a, b, c и т. д. К первому типу относятся высказывания о свойствах этих объектов: $f(a)$, $g(b)$ и т. д. К типу второму относятся высказывания о свойствах этих свойств, которые могут быть выражены логическими функциями $F(f)$, $F(g)$ и т. д. К третьему типу относятся высказывания о свойствах свойств и т. д. Основное правило теории типов состоит в том, что каждый предикат относится только к определенному типу и может быть осмысленно применен только

к объектам нижележащего типа; он не может быть применен к предикатам более высокого уровня или к самому себе как к объекту. Выражения $f(f)$, $f(g)$, $f(F)$ — не истинны и не ложны, но бессмысленны. Ошибка Фреге, по мнению Рассела, состояла в том, что он допускал универсальную область определения для любой логической переменной.

Идея ступенчатой логики позволяет исключить все известные парадоксы теории множеств. Парадокс Кантора исключается потому, что само понятие множества всех множеств (безотносительно к ступени) является теперь незаконным. Является также незаконным и понятие множества всех нормальных множеств. Мы можем говорить о нормальных множествах только определенной ступени. Но множество, образованное из всех нормальных множеств n-й ступени, будет уже объектом $n+1$-й ступени, и высказывания о его включении или невключении в исходный ряд множеств согласно теории типов будут бессмысленными, основанными на смешении различных уровней логического рассуждения (областей определения логических функций). То же самое относится и к парадоксу Ришара. Определение ришарова числа не является уже собственно арифметическим, но является определением метаязыковым, определением 2-й ступени, и мы не имеем права ставить его в один ряд с собственно арифметическими определениями, из множества которых мы первоначально исходили.

Реализация этой программы, предпринятая Расселом и Уайтхедом, столкнулась с рядом затруднений. Оказалось, прежде всего, что мы не можем ввести общее понятие натурального числа как предиката от предиката, не предположив бесконечной области объектов, на которой выполняется предикат — аргумент. Но тезис: «Область предметов, определяющих числовые функции, бесконечна» — не может быть истолкован как закон логики, как тождественно истинное высказывание в рамках логистической системы. Оказалось также, что операции над произвольными множествами не могут быть корректно заданы с логицистской точки зрения без использования аксиомы выбора, которая также непредставима в виде логической тавтологии.

Таким образом, логицизм как программа полного сведения математики к логике в какой-то мере сам поставил себя под сомнение еще до теорем Геделя, которые показали принципиальную необоснованность его целей.

Программа логицизма выглядит уязвимой уже с общих гносеологических позиций. Первоначальная идея логицизма — это абсолютный редукционизм и фундаментализм — требование единой основы математики, не меняющейся со временем. Ни одна развивающаяся теория не может иметь такого фундамента. Из общих гносеологических соображений, конечно, не следует невозможность сведения к логике какой-то конкретной теории, например, арифметики. Теорема Геделя о неполноте показала, однако, что возможности логицизма ограничены и в этом более узком понимании его задач.

Было бы, однако, неверным утверждать, что идея логицизма полностью дискредитирована. Законы логики занимают совершенно особое место в системе строгого знания. Мы имеем основание думать, что они безусловно непротиворечивы и что часть математики, которая сводится к ним, получает тем самым полное обоснование своей непротиворечивости. Проблема здесь в том, чтобы выяснить, на какую часть логических систем мы можем опереться как на обосновательный слой. У нас нет оснований считать, что этот вопрос неразрешим. Это значит, что при более глубоком прояснении своих основ логицистская редукция может оказаться важным компонентом в решении задач обоснования математики.

Следует отметить также, что Фреге и Рассел указали на органическую связь арифметики и логики, адекватное понимание которой может существенно изменить нашу концепцию математики и указать новые пути к ее обоснованию.

Л. Брауэр в своей диссертации (1907) наметил принципиально другое направление мышления, которое известно сегодня как интуиционизм. Исходным пунктом интуиционизма является вера в то, что некоторые объекты математики, а также некоторые операции, связанные с ними, безусловно ясны во всех своих свойствах и оперирование с ними никогда не сможет привести к противоречивым заключениям. Такая позиция связана с философией Канта,

с истолкованием числа и фигуры в качестве продуктов непосредственного знания (чистого созерцания), универсального и непогрешимого.

Брауэр считал, что хотя неевклидовы геометрии нанесли удар по кантовской интуиции пространства, позиция Канта в истолковании времени должна быть сохранена. Время — фундаментальный феномен человеческого интеллекта и самая глубокая основа наших математических представлений. На интуиции времени покоится понятие натурального числа, а также наше представление о линейном континууме[1].

В качестве безусловного данного интуиционисты рассматривают представление о единице, об операции сложения единиц, о натуральном ряде как о бесконечно продолжающемся процессе и, наконец, представление о произвольной (становящейся) последовательности чисел (конструктивных объектов), которая может быть по желанию ограничена каким-либо законом. В отличие от логицистов, интуиционисты не разлагают натуральное число на логические компоненты, они берут его как нечто целостное, не нуждающееся в анализе и строгом определении.

Центральная идея интуиционизма заключается в специфическом понимании математического существования. Математический объект существует, если он дан интуитивно или может быть сконструирован, построен мысленно посредством интуитивно ясных операций под интуитивно ясными элементами. В первоначальной (брауэровской) версии интуиционизма понятие конструирования не разъясняется, оно также относится к числу интуитивно ясных.

По мнению Брауэра, математика должна быть содержательной наукой, она должна иметь дело с конкретными, непосредственно воспринимаемыми объектами (хотя бы только и представимыми в уме) и подыматься к более сложным объектам лишь в той мере, в которой это позволяет интуитивно ясная операция конструирования. Таким образом, любой объект в интуиционистской математике должен быть введен «снизу», построен на основе элементарных объектов. Объекты, не удовлетворяющие требованию конструктивности, например, бесконечные множества, взятые в качестве законченных, объявляются незаконными, несуществующими.

Реальное математическое мышление (мысленное конструирование) протекает, по Брауэру, независимо от языка; математические утверждения (формулы, уравнения и прочее) представляют собой только отражение процесса математического мышления и как таковые не могут приобретать в математике самодовлеющего значения. Брауэр не согласен поэтому с логицистами и формалистами, у которых, по его мнению, «лингвистическая структура, не имеющая ничего общего с математикой, пригодная только как несовершенное средство передачи математической мысли, выдается за суть математики» [2].

В интуиционистской математике как утверждение, так и отрицание имеют позитивный смысл, связаны с требованием построения. Это ведет к существенной реформе логики, о чем уже шла речь выше.

Интуиционизм как философия математики содержит ряд моментов, имеющих важное значение для понимания природы математики.

Вслед за Кантом и Шопенгауэром Брауэр подчеркнул роль надлогической, аподиктической интуиции в математике. Обвинения интуиционизма в субъективизме здесь неосновательны. В своем обосновании математики Брауэр опирался (независимо от того, насколько он осознавал это) на праксеологическую интуицию числа, которая ничего общего не имеет с эмпирической интуицией и обладает безусловной, предельной достоверностью. Данное интуитивно в этом смысле — интерсубъективно и не допускает инотолкований. Математика, построенная на интуиции числа, задана совершенно однозначно и не может иметь какого-то субъективного, личностного оттенка. Брауэр указал тем самым сферу предельно обоснованной математики, независимой в своих положениях от возможной логической критики.

Другая важная идея Брауэра, по-видимому еще не оцененная в должной мере, состоит в четком разделении математического рассуждения на два уровня: содержательный (интуитивный) и формальный (лингвистический). Брауэр подчеркивал приоритет, а иногда и полную независимость первого уровня от второго. Мышление и язык, конечно, связаны органически и, в общем, мышление без языка не существует. Но Брауэр прав в том, что мышление в сфере

аподиктических интуиций может проходить несколько стадий и приходить к безусловно достоверным результатам независимо от языкового (лингвистического) оформления этих стадий, а тем более, независимо от формального соподчинения суждений на уровне языка, которое задается явным использованием норм логики. Брауэр справедливо отвергал ту идею, что достоверность математического рассуждения определяется исключительно его лингвистической формой и подтверждается только формальной правильностью суждений и умозаключений. Источник и критерий достоверности математического рассуждения лежит не в его знаковой форме, но в его содержании, в системе специфических интуиций, на которых зиждется математика. Развитие этих идей Брауэра имеет, несомненно, первостепенное значение для понимания природы математики как науки, а также и ее реальной истории.

Во всем остальном, однако, философская установка Брауэра представляется несостоятельной. Интуиционистское понимание математики — разновидность контенсивизма, т. е. учения, которое привязывает систему математических понятий к некоторому конкретному содержанию и обусловливает ее этим содержанием. История показывает, что всякое такое ограничение математики через произвольно выделенный внешний предмет, будь то реальные отношения порядка, пространственные отношения или конструктивные процессы, не отражает сути этой науки. Такое понимание математики, основанное на идее отражения, упускает из виду ее специфику, логическую сущность математических теорий, и принципиальную универсальность математического метода.

Глубинной основой интуиционистской философии математики является натурфилософия бесконечного. Суть ее в том, что человек практически не имеет дела с бесконечностью, а следовательно, и не может мыслить о бесконечности, не теряя достоверности. В XVIII веке, как мы видели, математики также стремились понять математическое бесконечное на основе реального («метафизического») бесконечного. Натурфилософия Брауэра отличается тем, что она отрицательная: он не обосновывает актуально бесконечное на основе реальной бесконечности, но отбрасывает его. Тем не менее, это натурфилософия, ибо приемлемость математического понятия всецело ставится в зависимость от его содержательной, интуитивной основы.

Такого рода отрицательная натурфилософия бесконечного не была изобретена Брауэром и не принадлежала только ему. Пуанкаре, Бэр, Лебег, Борель, Вейль, Лузин и многие другие математики начала века, даже несогласные с радикальным интуиционизмом, разделяли убеждение в недостоверности мышления о бесконечном ввиду его трансцендентности. «Логическое направление в современной теории множеств, — писал Н. Н. Лузин, — есть источник неисчислимого количества сущностей, существование которых в действительности чисто словесно. ...Становясь на точку зрения непротиворечивости, по методу Гильберта, пытаются легализовать эти сущности, отождествляя то, что непротиворечиво *в себе,* с тем, что имеет неоспоримую реальность»[3]. Помимо непротиворечивости объекта все эти математики стремились установить его реальность, осмысленность и пр., ставя, таким образом, достоверность математического рассуждения в зависимость от данности его предмета в некотором содержательном, внелогическом смысле. Такой подход к математическим понятиям не может быть оправдан гносеологически.

Не более обоснованной выглядит и сама интуиционистская программа обоснования математики. В основе ее лежит идея редукции всей математики к одному типу объектов, а именно к объектам арифметики. Нет сомнения в том, что интуиционистская арифметика предельно надежна и непротиворечива. Но почему Брауэр ограничил себя только этой базой редукции? Мы должны признать, что это ограничение совершенно произвольно. Брауэр говорит, что интуиция пространства, из которой исходил Кант, поставлена под сомнение неевклидовыми геометриями. Это, однако, неверно. Неевклидовы геометрии доказывают только возможность логически непротиворечивых систем, подобных обычной геометрии, но они никак не колеблют интуиции реального пространства и ее аподиктичности. Если исходить из доверия к аподиктической интуиции, то Брауэр должен был бы признать и полную достоверность всех законов реальной логики, в том числе, и закона исключенного третьего. Методологическая позиция Брауэра, таким образом, довольно противоречива. С одной стороны, он стремится найти надежное, не подверженное критике основание математики, но, с другой стороны, отсекает многое такое, что безусловно достоверно и принадлежит к этому основанию. Недостаточность гносеологических критериев приводит неизбежно к методологическому произволу, к сверхжестким ограничениям и к провалу программы в целом.

В 20-х годах Д. Гильберт предложил свой подход к обоснованию математики, который стал известен как формализм.

Основная философская предпосылка Гильберта заключается в отрицании натурфилософии. Существование в математике понимается только логически: объект существует, если он может быть введен без противоречия в некоторую систему объектов и определяющих их аксиом.

Эта точка зрения на математические объекты с полной ясностью была выражена уже Г. Кантором в его «Основах общего учения о многообразиях». По отношению к математической теории, согласно Кантору, можно говорить об имманентной истинности, означающей ее внутреннюю непротиворечивость и о транзиентной истинности, означающей ее соответствие некоторому положению дел в мире. Хотя стремление к внешней (транзиентной) истине влияет на развитие математики и интересы математиков, только имманентная истина определяет приемлемость того или иного понятия. Математика, таким образом, не ограничена ничем в конструировании своих понятий, кроме требования непротиворечивости. Сущность математики в ее свободе. Эта свобода, подчеркивает Кантор, не может привести к какому-то вырождению математики, ибо если введенное понятие нецелесообразно, то оно скоро отбрасывается[4].

Эта принципиально антинатурфилософская позиция является исходной и для Гильберта. Он настаивает на том, что попытки связать судьбу математического понятия бесконечного с идеей метафизического, внелогического его существования, являются анахронизмом, возвращением к способу мышления, отвергнутому практикой науки. Он писал по этому поводу: «Недавно, например, было высказано следующее: если даже введение какого-либо понятия может быть произведено без опасений, т. е. без получения противоречий, и это может быть доказано, то все же понятие не является в достаточной мере оправданным. Не является ли это в точности тем возражением, которое в свое время выдвигали против комплексных чисел, говоря: правда, из-за них не получается никаких противоречий, но их введение все же незаконно, так как мнимые величины все-таки не существуют» [5].

Гильберт указывал на то, что идеальные образы всегда играли существенную роль в математике наряду с реальными, конкретно интерпретируемыми образами. Бесконечно малые, иррациональные и мнимые числа, несобственные элементы геометрии, идеальные числа в теории чисел, воображаемые геометрии — все это примеры идеальных понятий, введение которых позволяет решать задачи, бывшие до того неприступными. Изъятие этих понятий из математики нанесло бы ей непоправимый ущерб. Введение идеальных элементов, по мнению Гильберта, есть основной творческий принцип математики для преодоления трудностей. В этом плане может быть понята и необходимость актуальной бесконечности в математике как особого идеального образа.

Позиция Гильберта по отношению к понятию актуально бесконечного является, несомненно, более верной, чем позиция Брауэра. Разумеется, мы не можем говорить о бесконечном на тех же основаниях, что и о конечном. Понятие законченной бесконечности во многих отношениях противоречиво, что было зафиксировано уже в апориях Зенона. Отсюда однако не следует, что содержательная интуиция актуальной бесконечности не может быть основой для создания логически завершенных математических структур, полезных как для математики, так и для других наук.

Брауэр прав, указывая на конструктивные понятия как на аподиктический центр математического мышления, на сферу математики, заведомо гарантированную от противоречий. Но непротиворечивая математика несомненно шире математики конструктивной. Для приложений же математической теории

непротиворечивость является достаточным условием.

Функциональная точка зрения, таким образом, целиком на стороне Кантора и Гильберта. Мы не имеем права возводить конструктивность в обязательный принцип образования математических понятий. Программа обоснования математики должна быть обоснованием непротиворечивости всех теорий, независимо от возможности их конструктивного представления, наличия или отсутствия в них понятия актуальной бесконечности. С функциональной точки зрения бесконечность не более чем символ, по отношению к которому справедливы определенные правила операций. Для оправдания законности этого понятия, как всякого другого математического понятия, достаточно показать, что система этих операций внутренне непротиворечива.

Процедура обоснования математической теории, предложенная Гильбертом, включала в себя два этапа. Теория должна быть, во-первых, формализована, представлена как совокупность формул, строчек символов, соединенных логическими константами. Для этого необходимо записать в логических символах ее аксиомы и явно сформулировать допустимые правила логики. Формализация не требует сведения математики к логике, превращения теорем в тавтологии, как это требовалось программой логицизма, но просто состоит в использовании логических символов для записи математических утверждений. Такой перевод содержательной аксиоматики на логический язык в большинстве случаев не вызывает каких-либо затруднений. Во-вторых, требуется доказать непротиворечивость этой системы аксиом вместе с ее логическими правилами, исходя только из ее формальной структуры, т. е. на чисто синтаксическом уровне.

Если мы возьмем исчисление высказываний в записанных выше аксиомах (гл. I, § 2), то простое рассуждение относительно его строения приводит нас к необходимому результату. Исходя только из структуры формул и характеристик правил вывода, можно заключить, что в данном исчислении не выводима формула, состоящая только из одной буквы. Кроме того, можно вывести теорему: $p \rightarrow (\bar{p} \rightarrow q)$, которая означает, что из двух противоположных формул (из противоречия) в данном исчислении по его правилам вывода может быть получена любая формула. Но так как формула, состоящая из одной буквы, в данном исчислении заведомо не может быть получена, то это значит, что в нем не могут быть выведены одновременно какая-то формула и ее отрицание. А это значит, что рассматриваемое исчисление непротиворечиво.

Доказательство непротиворечивости, схему которого мы привели, является абсолютным, так как оно не опирается на какую-то интерпретацию данного исчисления, но исходит исключительно из его структуры, из внешнего строения формул.

Однако, рассуждая о структуре формул (на уровне метаязыка), мы также могли использовать сомнительные аргументы. Отсюда проистекает идея гильбертовского финитизма. Метаязыковые рассуждения по Гильберту должны иметь дело только с конечными последовательностями знаков (формул), о существовании какого-либо объекта (формулы) мы должны заключать только из факта его построения, утверждать принадлежность некоторого свойства всем объектам можно только в конструктивном смысле и т. д.

Короче говоря, на уровне метаязыка Гильберт принимает интуиционистские стандарты рассуждения. Он в общем соглашается с той идеей Пуанкаре и Брауэра, что бесконечное должно быть обосновано через конечное, но не наоборот. Гильберт верил, что эта программа может быть осуществлена по отношению к арифметике и теории множеств и, таким образом, сделает надежными основы математики, превратив ее в «трибунал высшей инстанции» для всех вопросов, которые попадают в область математического мышления [6].

Гильбертовское доказательство непротиворечивости там, где оно проходит, обеспечивает, очевидно, предельно достоверное обоснование этого факта, ибо оно опирается только на оперирование с конечными комбинациями, т. е. находится всецело в рамках праксеологической достоверности. Область его действия, однако, оказалась еще более узкой, чем у логицизма и интуиционизма.

Надо особо отметить, что программа обоснования, хотя она и исходит необходимо из некоторых допущений философского порядка, включает в себя и более конкретные методологические допущения, которые могут оказаться ограниченными или ложными. Отсюда ясно, что «хорошая» философия сама по себе не обеспечивает успеха программы, а с другой стороны, отказ от программы не означает еще отказа от философских установок, лежащих в ее основе. Хотя формализм как программа обоснования в настоящее время также признан недостаточным, философия математики, идущая от Кантора, Вундта и Гильберта, несомненно, дает наиболее адекватное понимание природы этой науки и ее задач, достигнутое к настоящему времени.

Попытки ограничить образование математических понятий через соотнесение с конкретными аспектами реальности (пространство, величина, порядок и пр.), типичные для философии XVII—XIX веков, оказались несостоятельными: математика определенно вышла за пределы этих интуиций. Более современные ограничения, налагаемые на математические понятия, типа конструктивности объекта, эффективности рассуждения, измеримости множеств и т. п., идут хотя и на несколько другом уровне, но по существу в том же направлении. Можно определенно сказать, что все эти границы также относительны и в лучшем случае могут фиксировать в себе современные интересы математиков. В действительности, и в этом Гильберт прав, математическое мышление ограничено только двумя принципами, а именно непротиворечивостью и полезностью. Но приняв этот широкий взгляд на математику и отказавшись от различного рода содержательных критериев законности математических объектов и рассуждений, мы попадаем, как кажется, в некоторую методологическую пустоту из-за невозможности *фактически* фиксировать непротиворечивость в конкретных случаях.

2. Теоремы Гёделя и их методологические следствия

Все три программы обоснования математики, выдвинутые в начале века, достигли известных успехов, однако все они в дальнейшем столкнулись с большими затруднениями. Логическая природа этих затруднений в определенной мере стала ясной с появлением в 1931 г. статьи К. Гёделя «О формально неразрешимых утверждениях Principia Mathematica и родственных систем», где он доказал две широко известные в настоящее время логические теоремы, касающиеся внутреннего устройства математических теорий. Первая теорема Гёделя (о неполноте) утверждает, что если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то она неполна, т. е. она содержит истинные утверждения, формулируемые в ее исходных понятиях, которые недоказуемы и неопровержимы в этой системе. Вторая теорема (о непротиворечивости) утверждает, что если арифметика или система, включающая ее, непротиворечива, то доказательство этой непротиворечивости не может быть достигнуто в метаязыке, допускающем представление в арифметическом формализме.

Для уяснения смысла теорем Гёделя, нужно провести разделение между дедуктивным (синтаксическим) и смысловым (семантическим) уровнями формализованной теории. При построении формализованной теории мы задаем вид допустимых (правильно построенных) формул. Требования к правильности формулы отражают наши содержательные представления о структуре математических суждений и их возможных компонентов. Затем мы выделяем из них (основываясь также на содержательных признаках) систему истинных формул и, наконец, подыскиваем среди этих последних такое множество формул (систему аксиом), из которого все истинные формулы следовали бы по правилам логики. Система аксиом является полной, если каждая правильная и замкнутая формула дедуктивно охватывается системой аксиом в том смысле, что либо она сама, либо ее отрицание выводимы в этой системе аксиом. Смысл теоремы Гёделя о неполноте состоит в том, что для непротиворечивой и достаточно богатой формализованной теории (содержащей формализованную арифметику) такого рода дедуктивный охват не будет иметь места: для любой системы аксиом всегда найдется правильно построенная формула, такая, что ни она сама, ни ее отрицание не будут выводимы в этой аксиоматике. Но так как либо утверждение, либо отрицание формулы является истиной, то это значит, что в таких теориях существуют истинные, но

не выводимые утверждения. Иначе говоря, такие теории всегда уже (беднее) на синтаксическом уровне, чем на семантическом.

Теорема о непротиворечивости представляет собой некоторое важное следствие теоремы о неполноте. Она указывает на тот факт, что утверждение о непротиворечивости арифметики, будучи формально выражено в языке самой арифметики, представляет как раз такую формулу, которая не охватывается аксиомами арифметики: ни само это утверждение, ни его отрицание недоказуемы в языке арифметики. Непротиворечивость арифметики, таким образом, не может быть доказана в формализме арифметики, если не использовать каких-то допущений, выходящих за ее пределы, т. е. без добавления к ее формализму дополнительных аксиом или правил вывода.

Рассуждения Гёделя удовлетворяют самым строгим требованиям финитизма и, безусловно, относятся к числу предельно достоверных утверждений математики.

Непосредственным следствием из этих теорем является то, что формализм и логицизм как программы обоснования математики не могут быть реализованы. Замысел Гильберта, как мы видели, как раз состоял в том, чтобы вопрос о непротиворечивости решить в сфере метаязыка, обладающего более ограниченной логикой, чем та, которая содержится в самом языке. Согласно второй теореме Гёделя, это в принципе неосуществимо. Фреге и Рассел ставили задачей свести математику к некоторой ограниченной системе логических исчислений, в общем случае, к расширенному исчислению предикатов. Согласно первой теореме Гёделя никакое такое исчисление, определенное конечным числом аксиом, недостаточно для того, чтобы включить в себя все истинные утверждения арифметики или теории множеств.

Надо заметить, что эти положения являются не логическими, но только методологическими следствиями теорем Гёделя, существенно зависящими от того, как мы понимаем суть программ логицизма и формализма, в частности, от того как мы определяем такие понятия как «финитный», «конструктивный», «содержательный» и т. п. Поскольку здесь возможны различные толкования, то в принципе возможны и различные взгляды на то, в какой мере теоремы Гёделя ограничивают ту или иную из этих программ. Большинство логиков и специалистов по основаниям математики убеждены в том, что невозможность осуществления логицистской и формалистской программ по отношению к богатым математическим теориям доказывается столь же строго как, к примеру, невозможность вывода аксиомы о параллельных из остальных аксиом геометрии. Имеются, однако, возражения против этого мнения, основанные на несколько иных, чем общепринятые, истолкованиях идей Рассела и Гильберта.[7]

Мы будем исходить здесь из общепринятой трактовки отношения теорем Гёделя к основным программам обоснования математики как совершенно истинной и постараемся выявить возможные ее следствия для философии математики.

Из теорем Гёделя выводятся и многие другие методологические следствия, которые однако являются значительно менее определенными и достоверными. Так часто утверждается, что эти теоремы ограничивают возможности формализации и аксиоматического метода в целом. Это утверждение уже не вполне адекватно в методологическом отношении. Формализация любой математической теории ничем не ограничена. То же обстоятельство, что эта формализация оставляет всегда какие-то содержательно истинные утверждения за пределами своего дедуктивного охвата не может рассматриваться как существенное ограничение аксиоматического метода. Практическое использование аксиоматики всегда сориентировано на конечное число теорем (законов), которые уже известны и которые предполагается получить из некоторого количества исходных положений (аксиом). Если такая аксиоматика находится, то она для нас практически полна, и ее принципиальная неполнота по отношению к какой-то интерпретации в методологическом отношении не имеет большого значения. Теоремы Гёделя никак не сужают обычную сферу использования аксиоматического метода, не отбрасывают и не ограничивают ни одной из его реальных функций.

Существуют интерпретации теорем Гёделя, которые выходят далеко за сферу методологии и философии математики. Из них некоторым образом выводится несоизмеримость формы и содержания мышления, невозможность искусственного интеллекта, неустранимость интуитивного компонента в мышлении и т. п. Некоторые философы видят в теоремах Гёделя аргумент для обоснования качественного разнообразия мира и бесконечности его развития. Имеются попытки приложить эти теоремы к истолкованию музыки и живописи[8]. Такого рода интерпретации, конечно, мало что оставляют от утверждений Гёделя как математических теорем, выполняющихся для определенного класса формальных систем.

Эта ситуация однако не уникальна и не является безусловно отрицательной. История науки показывает, что каждое значительное открытие получает метафорическую трактовку, далеко выходящую за пределы его специального содержания. И дело здесь не в усердии дилетантов; многие такие трактовки создавались и поддерживались самими учеными. В целом они порождаются естественным стремлением создать на базе новых и известных идей некоторую более широкую (хотя, разумеется, менее определенную) концепцию, которая могла бы быть эвристическим средством в новых областях знания, при объяснении явлений, которые еще не могут быть подчинены строгой теории. В принципе, поэтому такого рода «гуманитарные» трактовки теорем Гёделя нельзя считать совершенно неправомерными[9]. Однако мы должны хорошо отличать точные следствия этих теорем от следствий, порожденных такого рода метафорическими обобщениями, в особенности, когда речь идет о методологии самой математики.

В этом плане мы можем принять только одно следствие теорем Гёделя, а именно заключение о невозможности полной реализации логицистской и формалистской программ обоснования математики. Это следствие лежит в основе современной философии математики, которая утверждает невозможность полного внутреннего обоснования математики вообще и методологическое родство математики и естествознания. В некотором смысле можно говорить о «послегеделевской философии математики», которая поставила под сомнение традиционный образ математики как строгой и хорошо обоснованной науки.

В статье «Бесконечный регресс и основания математики» Лакатос пишет: «Вторая теорема Геделя наносит решительный удар по целям евклидианской математики. Бесконечный регресс в доказательствах не устраняется посредством тривиальной метатеории: доказательства непротиворечивости должны быть достаточно сложными. Это делает сомнительной непротиворечивость теорий, в которых они выполняются, и поэтому сами они обречены на то, чтобы оставаться сомнительными, подверженными ошибкам»[10]. Отсюда он делает вывод, что математику следует признать эмпирической наукой не только по происхождению, но и по обоснованию.

Обоснование математики, согласно Лакатосу, может протекать и реально протекает не через формальное, метатеоретическое доказательство, но только через развитие теории на основе контрпримеров и постепенного уточнения оснований. Математика уравнивается здесь с эмпирическим знанием: математические теории могут быть более или менее достоверными, но никогда не могут быть абсолютно достоверными, мы можем более или менее гарантировать непротиворечивость теории, но никогда не сможем гарантировать ее полностью.

Выше мы установили, что математики могут обладать полной и вполне обоснованной уверенностью в завершенности (окончательности) математического доказательства. Если истолковать теоремы Геделя так, как это делает Лакатос, то они означают, что математики никогда не будут обладать аналогичными критериями завершенности по отношению к теории в целом. Эти теоремы представляются, таким образом, некоторой границей рационального самопознания математики вообще. Умея однозначно отделить доказанное от недоказанного, математик с этой точки зрения, никогда не будет обладать столь же однозначным критерием отделения противоречивого от непротиворечивого в отношении теорий и аксиоматических систем. Будучи строг в конкретных дедукциях, он никогда не сможет гарантировать самую их основу — совместимость системы посылок.

Близкое к этому воззрение на основания математики было высказано еще раньше Х. Б. Карри. Соглашаясь с тем, что теоремы Геделя заставляют нас

отказаться от достоверного логического обоснования математики, он считает, что в таком обосновании, вообще говоря, никогда не было большой необходимости. Математика, по Карри, практическая наука, а в качестве таковой она должна заботиться не об идеальной строгости, а скорее о приемлемости своих теорий для решения практических задач. Доказательство непротиворечивости математической теории, по его мнению, не является ни необходимым, ни достаточным условием ее приемлемости. Такое доказательство не является достаточным, поскольку непротиворечивая теория не обязательно является приемлемой. Такое доказательство не является и необходимым; будучи проведено, оно не увеличит существенно сферы приложения и эффективности теории, которая уже доказала свою полезность[11]. Поиски идеального логического обоснования математики, таким образом, в значительной мере надуманная проблема, проистекающая из априористской философии математики. «Поиск абсолютной надежности, — пишет Карри, — был, очевидно, основной мотивировкой для концепций Брауэра и Гильберта. Но нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Зачем, скажем, нам так уже нужно быть уверенными в непротиворечивости теории или в том, что ее можно вывести с помощью абсолютно определенной интуиции чистого времени, прежде чем использовать эту теорию? Ведь ни в какой другой науке мы не предъявляем таких требований. ... Мы принимаем научную теорию до тех пор, пока она удовлетворяет современным требованиям естественности и простоты, и пока она не приводит нас к ошибкам. Мы должны следить, чтобы наши теории удовлетворяли этим требованиям, и получать новые следствия из этих теорий. Теорема Геделя утверждает, что это все, что мы можем сделать, философия эмпиризма утверждает, что это все, что нам надо делать»[12].

Л. Кальмар в своем докладе об основаниях математики приходит к еще бо́льшему принижению роли логического анализа. Современные трудности в основаниях, по его мнению, оставляют только один путь, а именно, путь обоснования по методу физики. В математике должна быть выделена сфера достоверных суждений типа арифметических равенств и их простых обобщений, все же остальные должны быть оправданы через них таким же образом, каким общие принципы физики оправдываются через отношение к данным эксперимента. В отличие от Лакатоса и других эмпиристов Кальмар считает возможным отказаться также и от взгляда на математику как на исключительно дедуктивную науку. Математика, согласно Кальмару, не идеально строга и не идеально дедуктивна, она лишь более строга и более дедуктивна, чем эмпирические науки. Проблема обоснования математики поэтому может быть решена только через выявление ее родственных связей с эмпирическим знанием и через соответствующее изменение методов обоснования [13].

Суть изложенных позиций, в общем, сводится к тому, что: 1. математика не может быть с достоверностью обоснована внутренними (логическими) средствами; 2. идеальное (полное) обоснование непротиворечивости, которого требовали в начале века, не является существенным для математики; 3. математика фактически обосновывается по схеме опытного знания и только с достоверностью этого типа знания.

Эти положения составляют основу современного так называемого эмпирицистского понимания математики, которое, сближая методологию математики с методологией опытных наук, отбрасывает традиционный идеал логической завершенности математики либо на уровне обоснования (метатеории), либо на уровне обоснования и доказательства одновременно.

Столь радикальный отход от традиционных воззрений на математику, хотя он имеет немало сторонников, не имеет достаточных оснований и никак не может быть представлен в качестве необходимого следствия теорем Геделя.

Карри, конечно, прав в том, что приемлемость математической теории не обусловлена наличием строгого доказательства ее непротиворечивости. Однако стремление к такому обоснованию проистекает не из философского априоризма, но из необходимости адекватного решения математических проблем. Если Ньютон, Лейбниц и даже еще Эйлер могли обходиться без строгих принципов оперирования с рядами, то математики начала XIX века были поставлены перед настоятельной необходимостью прояснить эти

принципы [14]. Математики стремятся и будут стремиться в таких случаях именно к окончательному обоснованию, к полной гарантии от противоречий.

Вопрос о соотношении опыта и логики в таком обосновании достаточно сложен, но он никоим образом не решается отказом от логики или умалением ее роли.

Прежде всего нужно заметить, что математика в своем обосновании в любом случае полагается на опыт, т. е. на истинность некоторого числа содержательных утверждений. Если мы возьмем ту небольшую часть математики, которая обосновывается в рамках гильбертовского финитизма, то можем ли мы сказать, что она обоснована чисто логически? Разумеется, нет, ибо метаязык принимается в качестве истинного, обоснованного и непротиворечивого только на основании праксеологических соображений. Обоснование математики, таким образом, всегда связано с опытом, и теоремы Геделя здесь не при чем.

Если сторонники эмпирического обоснования математики хотят сказать, что после теорем Геделя стало ясно, что математика должна обосновываться точно так же, как физика, и что она в этом отношении не имеет никакой специфики перед физикой или другой естественной наукой, то здесь они, конечно, заблуждаются.

Математика занимает особое место среди наук. Математическая теория — это знаково-оперативная система, для приложения которой необходима ее непротиворечивость, имеющая смысл независимо от характера возможной интерпретации. Обоснование математической теории должно быть обоснованием ее логической непротиворечивости, но не истинности, как это имеет место в эмпирических науках.

Но если мы устанавливаем ясное различие между направлениями обоснования математики и содержательного знания, то отсюда немедленно проистекают и решающие различия в самой его структуре. Развитие содержательной теории через ассимиляцию контрпримеров и есть ее обоснование, а именно обоснование ее истинности. В физике не существует и не может существовать особого теоретического раздела, занимающегося установлением истинности физических теорий: установление истинности (обоснование) является здесь *практической* задачей — каждая теория устанавливает свою истинность в актах приложения и в конкуренции с другими теориями. Совсем другое положение непротиворечивости в математике.

Для приложения математической теории, как и для приложения теории вообще, важна в первую очередь ее структурная адекватность описываемой сфере. Непротиворечивость предполагается как нечто само собой разумеющееся, хотя это, конечно, не всегда имеет место. Широкое применение опытной теории доказывает ее истинность, обосновывает ее, широкое же применение математической теории доказывает только ее структурную адекватность некоторым сферам действительности, наличие в ней непротиворечивых фрагментов и лишь ставит серьезно проблему ее обоснования, которая является не проблемой практики, а сугубо *теоретической,* метаматематической проблемой.

Мы должны разделять оправдание математической теории и ее обоснование. Оправдание математики, как и других наук, производится через опыт, через использование. Но в отличие от других наук по отношению к математике имеет смысл еще и вопрос о ее обосновании, который не может быть решен на основе опыта. Когда физик для каких-то целей строит математическую структуру, то он приобретает веру в ее непротиворечивость первоначально из употребления, и более широкое употребление повышает эту веру. Но проблема непротиворечивости этим не решается, она, по существу, только ставится. Математик неизбежно постарается включить эту структуру в общую систему математического знания, интерпретировать ее в терминах разработанных теорий, просмотреть ее посылки в логическом плане и т. п., иначе говоря, проведет *теоретическую* работу, которая собственно только и может называться обоснованием математической теории и результаты которой мало зависят от того, насколько успешно применение данной теории, имеет ли она вообще какое-либо приложение и насколько, наконец, она может выдержать сравнение с другими теориями в решении определенных проблем.

Таким образом, неверно, что теоремы Геделя перенесли обоснование математики в практическую плоскость, что они оставили для математики единственный путь обоснования своей надежности — обоснование в опыте, по аналогии с физикой. Выясняя смысл и границы действия методов, математик постоянно занимается именно внутренним обоснованием математики, т. е. наведением некоторого логического порядка в системе теорий вне зависимости от их приложений. Это естественный для математики путь обоснования, проистекающий из ее специфики, и он не может быть изменен какими-либо результатами самой математики или логики.

Только внутренний анализ математической теории способен удостоверить нас и в ее непротиворечивости. Хотя теоремы Геделя запрещают полное доказательство непротиворечивости арифметики на основе финитных соображений, они не запрещают доказательство непротиворечивости арифметики без аксиомы индукции и в ряде других ее частных вариантов и, тем самым, безусловно повышают нашу веру в непротиворечивость арифметики в целом. То же самое справедливо и по отношению к другим известным теориям. Теоремы Геделя, таким образом, не пресекают всех путей внутреннего обоснования непротиворечивости математики.

Ситуация здесь в значительной мере подобна той, которую мы имеем в теории алгоритмов: отсутствие общего алгоритма для класса задач не означает отсутствия частных и, следовательно, принципиальной разрешимости этих задач. Развитие формальной логики и оснований математики в настоящее время — не что иное как выработка все новых средств движения в направлении обоснования логической надежности математики.

Ниоткуда не следует также, что логические средства после ограничений, налагаемых теоремами Геделя, обречены играть некоторую вторичную роль в обосновании непротиворечивости. Наша вера в непротиворечивость математических теорий, за исключением самых элементарных, имеет не практическую, но именно логическую основу. Мы верим в непротиворечивость неевклидовых геометрий не потому, что они в конце концов нашли приложение, но в силу определенного математического рассуждения. Теоремы

Геделя ни в какой мере не могут изменить этого, специфического для математики, положения. Аргумент практики здесь слишком слаб, чтобы конкурировать с логикой.

Здесь возникает, однако, главный для нас вопрос: если естественным и единственно эффективным путем обоснования непротиворечивости математических теорий является путь логического анализа, то каковы возможные пределы этого обоснования с учетом ограничений, полагаемых теоремой Гёделя? Гильберт рассчитывал дать финитное обоснование непротиворечивости всех теорий, и в этом содержался большой гносеологический смысл. Финитное обоснование было бы и предельно достоверным, т. е. гарантирующим отсутствие контрпримеров. Означает ли теорема Гёделя о непротиворечивости полный запрет на получение предельного обоснования непротиворечивости арифметики или какой-либо другой достаточно богатой теории? Другими словами, является ли запрет на обоснование непротиворечивости посредством финитного метаязыка запретом на предельное (окончательное) обоснование непротиворечивости математических теорий вообще.

Большинство современных философов, близких к методологии математики, несомненно ответят на этот вопрос утвердительно. В действительности, ситуация здесь также не определена столь однозначно.

3. Содержательное обоснование непротиворечивости

Говоря об обосновании математических теорий, мы должны четко разделять два уровня рассуждения, а именно логический и гносеологический. Реализация финитного доказательства непротиворечивости, там, где оно возможно, — это просто логический факт, состоящий в выводимости некоторой формулы, обозначающей утверждение о непротиворечивости данной теории. На каком основании мы можем утверждать, что вывод такой формулы означает фактическую непротиворечивость теории, абсолютную невозможность получения в ее рамках противоречия? Другими словами, на каком основании мы доверяем финитному рассуждению? Переход от финитного доказательства непротиворечивости как логического факта к убеждению фактической непротиворечивости теории, о которой идет речь, предполагает некоторое гносеологическое рассуждение, а именно обоснование того положения, что всякое финитное доказательство является достоверным. Обоснование математической теории, таким образом, никогда не сводится к чисто логической процедуре, оно предполагает гносеологическую концепцию достоверности, которая оправдывает нашу веру в определенные средства и заставляет смотреть на другие средства как на сомнительные.

Исходя из общих представлений праксеологической интуиции мы действительно можем оправдать финитное доказательство непротиворечивости как предельно достоверное, т. е. мы можем утверждать, что фактическое развитие теории, по отношению к которой такое доказательство проведено, никогда не столкнется с внутренним противоречием. Но можем ли мы утверждать обратное положение, а именно, что всякое достоверное рассуждение о непротиворечивости теории представляет собой рассуждение в финитном метаязыке. Другими словами, можем ли мы сказать, что не существует никаких логических рассуждений, не удовлетворяющих требованиям финитизма, но тем не менее достоверных, обеспечивающих абсолютную гарантию от противоречий.

Общепринятая интерпретация второй теоремы Гёделя исходит, очевидно, из утвердительного ответа на этот вопрос. Однако этот ответ нельзя признать хорошо обоснованным. Понятие достоверности и понятие финитности — разные понятия, и они не могут быть априори приняты, как имеющие один и тот же объем. На это в свое время указывал П. С. Новиков. «Нет никаких оснований предполагать, — писал он, — что границы, которые кладет финитизм Гильберта, действительно необходимы для того, чтобы исключить вызывающие сомнение элементы математического мышления. Возможен дальнейший анализ предмета математики и выделение в нем надежных непротиворечивых средств, выходящих за рамки финитизма и все же достаточно сильных для того, чтобы решать интересующие нас вопросы» [15].

Современный логический и гносеологический анализ совершенно определенно показывают, что класс достоверных рассуждений о математической теории не исчерпывается классом рассуждений, удовлетворяющих требованиям финитизма, а это значит, что теоремы Гёделя в принципе не закрывают путей к полному внутреннему (логическому) обоснованию математики.

Если мы согласимся с тем, что интуиционистская теория гарантирована от противоречий (мы можем обосновать этот факт на основе понятия о праксеологической достоверности), то мы должны признать, что классическая арифметика является обоснованной как предельно непротиворечивая теория. Заслуга этого обоснования принадлежит А. Н. Колмогорову и К. Гёделю. В статье «О принципе tertium non datur» (1925) А. Н. Колмогоров показал, что если все формулы некоторой классической теории, которые могут рассматриваться как высказывания, заменить их двойными отрицаниями, то мы получим перевод этой теории в некоторую «псевдотеорию», где будут действовать только законы интуиционистской логики. Отсюда следует, что если интуиционистская логика доказательства безупречна, то она останется столь же безупречной и с добавлением к ней закона исключенного третьего. Закон исключенного третьего, делает вывод Колмогоров, может привести к недостоверным результатам с точки зрения интуиционистских стандартов, но он никогда не может быть причиной противоречивости теории. Если интуиционистская теория непротиворечива, то соответствующая классическая будет также непротиворечивой [16]. Через восемь лет Геделю удалось осуществить прямое погружение классической арифметики в интуиционистскую, т. е. указать систему преобразований, которая каждой формуле классической арифметики ставила в соответствие истинную формулу интуиционистской арифметики. Тем самым он доказал, что если непротиворечива интуиционистская арифметика, то непротиворечива и классическая [17].

Интуиционистская арифметика не выходит за пределы конечного, она является праксеологически (предельно) достоверной, чем обеспечивается и предельная достоверность всех теорий, интерпретируемых в ее объектах. Но это означает, что значительная часть современной математики, понятия которой допускают арифметическую интерпретацию, может считаться сегодня предельно обоснованной, т. е. абсолютно гарантированной от появления противоречий.

Всякие противоречия, конечно, исключить нельзя. В развитии теории, на ее периферии, в процессе выявления тех или иных интуитивных представлений, могут появляться нечеткие и даже самопротиворечивые понятия. Но такого рода противоречия являются внешними, они устраняются простым уточнением понятий и не затрагивают совместимости аксиом и основных определений теории.

Надо иметь в виду, что в рассуждениях Колмогорова и Гёделя речь идет не о конструктивной перестройке классической теории (для большинства классических теорий такая перестройка в принципе невозможна), но лишь о построении ее аналога в конструктивной теории, сохраняющего свойства противоречивости-непротиворечивости. Такие аналоги возможно построить и для тех теорий, которые сами по себе не могут быть изложены в соответствии с конструктивистскими требованиями. Имеются серьезные доводы за то, что на этом пути возможно полное обоснование и таких сильных теорий, как теория множеств, а значит, в принципе, — и всех центральных областей математики [18].

Программа конструктивизации, как и всякая другая, может столкнуться с трудностями, которые могут оказаться непреодолимыми, и подпасть под некоторые новые запреты, о которых мы сейчас пока не имеем представления. Но это техническая сторона дела. Нам здесь важно отметить лишь, что такой путь логического обоснования не запрещается теоремами Гёделя и представляется вполне приемлемым с точки зрения достоверности.

Основной гносеологический вопрос сводится здесь к тому, насколько является обоснованной наша вера в непротиворечивость конструктивных теорий. Для основателей интуиционизма эта вера была исходным пунктом всех рассуждений, они никогда не пытались обосновать ее рационально. Сторонники формализма также в конце концов согласились с этой верой, считая, что непротиворечивость обеспечивается здесь (при конструктивном задании объекта) полной обозримостью всех деталей рассуждения. Мы видим этот ход мысли у Гильберта при обосновании финитности метаязыка.

Современные логики обычно воздерживаются от того, чтобы утверждать, что погружение классической теории в интуиционистскую абсолютно обосновывает ее в смысле непротиворечивости. Многие из них считают такое обоснование все-таки в чем-то менее качественным, чем финитное обоснование в соответствии с программой Гильберта и думают, что сама интуиционистская математика должна еще найти оправдание на основе некоторого логического анализа.

Эта неопределенность имеет не логическую, но гносеологическую природу. Надо признать, что современная философия математики не имеет сколько-нибудь ясной концепции достоверности математического доказательства и обоснованной градации математических результатов и рассуждений по их надежности.

Мы, однако, не можем обойтись без такой концепции. Логическое обоснование по своей сути может состоять только в сведении сомнительных теорий к теориям, непротиворечивость которых может быть обоснована из *внелогических* соображений, на основе некоторой гносеологической концепции достоверности. Оставаясь в рамках логики, мы можем до бесконечности ужесточать критерии обоснованности путем новых и новых ограничений на логику обоснования, но такая погоня за строгостью, начиная с определенного уровня, теряет гносеологический смысл. Основная задача методологического мышления в основаниях математики состоит в том, чтобы определить круг математических понятий и средств, *не нуждающихся в логическом обосновании,* сведение к которым всех других теорий гарантирует их предельную обоснованность.

Мы имеем все основания утверждать, что интуиционистская математика не нуждается в логическом обосновании своей непротиворечивости и доказательства непротиворечивости классических теорий, полученные путем их погружения в интуиционистские, не менее достоверны, чем доказательства, проведенные на основе финитной метатеории. Они предельно достоверны. Логическое обоснование вообще не может пойти дальше конструктивного рассуждения, т. е. дальше утверждений, достоверность которых имеет праксеологическое обоснование.

Гносеологическая задача, которую ставил перед собой Гильберт в арифметике, — с достоверностью обосновать отсутствие противоречий, — несомненно, решена Колмогоровым и Гёделем. И если мы не проводим такой идентификации, и все еще рассматриваем непротиворечивость арифметики как проблему, которую предстоит решить, то это происходит всецело из-за формалистской установки «все обосновать логически», из-за отсутствия адекватного критерия достоверности, который позволил бы оборвать «дурную бесконечность» логического обоснования на основе гносеологических соображений. Дело здесь не в развитии техники, но в углублении методологического контекста обоснования.

Концепция аподиктической интуиции дает нам основание принять интуиционистскую арифметику как предельно достоверную и как совершенно надежный базис для обоснования других математических теорий. Если это так, то это значит, что мы имеем эффективный путь внутреннего обоснования математики, обладающий полной достоверностью и не подпадающий под ограничения Геделя.

Расширение методологического взгляда на доказательства непротиворечивости может привести также к определенной реабилитации формальных доказательств непротиворечивости, выходящих за пределы финитизма.

Как известно, Генцен в 1936 г. дал доказательство непротиворечивости арифметики, использовав при этом аксиому трансфинитной индукции. Отличие правила трансфинитной индукции от правила обычной индукции, использующейся в математике, состоит в том, что основной шаг рассуждения ведется здесь не по обычным натуральным, но по ординальным числам, обозначающим бесконечные совокупности чисел. Такой переход, очевидно, не вмещается в рамки финитизма, требуемого для метаязыка в соответствии с программой Гильберта.

Результат Генцена был повторен позднее многими математиками: (Аккерман (1940), Новиков П. С. (1943), Кальмар (1946), Лоренц (1951), Шютте

(1951), Хлодовский (1959)), что само по себе безусловно подтверждает достоверность доказываемого факта. Однако в силу господства финитистской концепции этим доказательствам до настоящего времени не придается значения достоверных доказательств, т. е. значения рассуждений, самим своим существованием исключающих возможность противоречия в арифметике. Г. Вейль назвал доказательство Генцена «пирровой победой», поскольку, по его мнению, оно проведено на чрезвычайно низком уровне очевидности. Такое отношение к трансфинитным доказательствам остается неизменным и по сей день: они рассматриваются не в качестве доказательства непротиворечивости арифметики, но лишь в качестве иллюстрации к ходячей методологической идее, что строго логическое и одновременно заслуживающее доверие доказательство непротиворечивости арифметики невозможно.

В философской литературе распространена точка зрения, согласно которой доказательства непротиворечивости арифметики типа генценовских представляют своего рода порочный круг, ибо они стремятся доказать непротиворечивость теории, опираясь на более широкую теорию, в предположении ее непротиворечивости. Применительно к доказательству Генцена и ему подобных это означает, что они не могут быть приняты как безупречные, ибо проведены в теориях, которые сами нуждаются в обосновании.

Столь радикальное отбрасывание трансфинитных доказательств непротиворечивости не представляется, однако, методологически оправданным.

Во-первых, ясно, что эти доказательства не содержат в себе логического круга в обычном смысле. Конечно, если из тезиса *A* мы выводим тезис *B*, и причем известно, что в тезисе *A* в качестве его составной части уже имеется тезис *B*, то здесь мы имеем порочный круг: мы доказываем то, что уже содержится в посылках. Но это только в том случае, если *A* и *B* находятся на одном уровне, скажем, в качестве теорем некоторой математической теории. Положение меняется, если положение *A* является элементом метаязыка теории, в которой доказывается *B*. В этом случае с помощью тезиса *A* мы доказываем не утверждение *B* (оно должно вытекать из аксиом теории), но нечто о его связях с другими тезисами: независимость, непротиворечивость и прочее. Порочный круг в обычном понимании здесь, таким образом, отсутствует. Наличие одинаковых тезисов в языке и метаязыке не противоречит строгости рассуждения, ибо система утверждений метаязыка нацелена не на доказательство положений языка, но на доказательство некоторых положений о языке.

Неверно также, что в основе доказательства непротиворечивости некоторой теории лежит предпосылка непротиворечивости метатеории, в которой это доказательство проводится. То, что нам здесь в действительности необходимо, это достоверность самого доказательства. Как уже неоднократно говорилось выше, эта достоверность не зависит от утверждений о теории в целом, но зависит исключительно от достоверности отдельных его шагов и устанавливается непосредственно в процессе данного индивидуального доказательства. Теория, в которой ведется доказательство непротиворечивости, содержательна, а это значит, что вопрос о ее непротиворечивости не может быть решен логически, да в этом и нет необходимости. Логика рассуждения в такого рода метаязыковых доказательствах такова: из достоверности компонентов доказательства следует достоверность доказательства в целом, и если оно проведено, то заключаем о непротиворечивости рассматриваемой теории. Наличие такого рода достоверного доказательства имплицитно предполагает, конечно, и существование непротиворечивого метаязыка в целом, но эта предпосылка не используется в нашем доказательстве. Отдельное доказательство может быть достоверным и в противоречивой системе. Нам же важна только достоверность отдельного доказательства и ничего больше[19]. Эта достоверность не устанавливается через анализ системы метатеории в целом и не требует такого анализа. Идея Лакатоса о бесконечной башне теорий, каждая из которых должна быть обоснована в своей непротиворечивости, для того, чтобы мы могли, наконец, заключить о непротиворечивости исходной теории, является элементарно ошибочной. В метатеоретическом рассуждении вопрос о непротиворечивости формализованной теории сводится не к непротиворечивости метатеории (здесь был бы тогда действительно бесконечный регресс), но к достоверности отдельного рассуждения в метатеории, которая может быть окончательно установлена проверкой аподиктичности всех его шагов.

Наконец, является неверным заключение, что любое метаязыковое доказательство сомнительно уже по той причине, что оно использует «более богатые», «менее элементарные» и т. д. средства, чем средства, формализованные в самой теории. В такой аргументации предполагается, что если мы имеем теорию, более богатую, чем некоторая другая теория, то в этой (первой) теории не может быть достоверных доказательств вообще! Но это абсурдно. Вопрос должен стоять в рассматриваемом случае не об относительном богатстве или бедности метатеории, но о достоверности конкретного доказательства в метатеории. Относительное богатство метатеории не является достаточным для того, чтобы утверждать, что всякое доказательство непротиворечивости, проведенное в ней, заведомо недостоверно. Вопрос должен решаться здесь только анализом конкретного доказательства с точки зрения используемых в нем средств.

В обычном утверждении, что метатеория, достаточная для доказательства непротиворечивости теории, более богата, чем сама теория, скрыта некоторая двусмысленность. Чаще всего предполагается, что любое возможное доказательство непротиворечивости должно использовать все предпосылки рассматриваемой теории. Однако это неверно. Такое доказательство может быть значительно более бедным, чем сама теория, в том смысле, что в нем будет использована лишь некоторая часть аксиом теории [20]. Другое дело, что это доказательство в соответствии с теоремой Геделя должно содержать какие-то утверждения, выходящие за пределы теории. Но это последнее обстоятельство не означает, что эти дополнительные утверждения всегда более сомнительны, чем утверждения самой теории, и всегда выводят доказательство за пределы достоверности. Как замечает М. Детлефсен, «нет никаких оснований apriori предполагать, что если множество утверждений лежит «вне» теории и достаточно для доказательства ее непротиворечивости, то оно будет более сомнительным, чем всякое конечное множество суждений,

принадлежащих теории. Математика не была построена с таким умыслом» [21].

В практическом обыденном и научном мышлении мы всегда обсуждаем предмет в языке более богатом, чем тот, в котором дается описание предмета. Конечно, обыденное мышление неточно, но этот факт все-таки показывает, что расширение языка обсуждения не мешает достижению вполне достоверных истин. Наука о грамматике, несомненно, исчезла бы, если бы, исходя из некоторых идей чистоты рассуждения, мы запретили пользоваться всеми правилами грамматики при обсуждении части этих правил.

Обоснование генценовского доказательства непротиворечивости арифметики как достоверного, таким образом, сводится к непосредственному оправданию правила трансфинитной индукции до ε_0 или некоторого его дедуктивного эквивалента самого по себе без доказательства непротиворечивости метаязыка в целом. В настоящее время такого оправдания мы не имеем, но оно отнюдь не является невозможным. Известно, что в некоторых рассуждениях это правило может быть заменено использованием закона исключенного третьего по отношению к бесконечным множествам [22]. Если бы удалось показать, что такая замена возможна и при доказательстве непротиворечивости арифметики, то мы могли бы говорить о полной достоверности этого доказательства, поскольку мы имеем сильные логические и гносеологические доводы за универсальное значение этого логического закона. Вполне допустимо также и некоторое непосредственное методологическое оправдание принципа трансфинитной индукции.

Генценовское доказательство непротиворечивости арифметики по всему видимому достоверно, т. е. оно гарантирует отсутствие противоречий в арифметике в той же степени, в какой это делает, скажем, финитное обоснование ограниченной арифметики. Сегодня мы не можем решительно признать или отвергнуть этот факт из-за неопределенности наших методологических установок. Но это значит, что вопрос о том, возможно ли внутреннее и достоверное обоснование непротиворечивости арифметики, вовсе не решен окончательно теоремами Гёделя в отрицательном смысле. Отрицательный вывод получается здесь только тогда, когда к этим теоремам прибавляется дополнительное предположение, а именно предположение о том, что всякое доказательство, выходящее за пределы финитизма, заведомо недостоверно. Но почему мы должны думать, что эта, идущая от Брауэра, предельно ограничительная концепция достоверности математического рассуждения является адекватной и окончательной? На это нет никаких оснований. Уже тот факт, что теоретико-множественные рассуждения всегда приводят к верным результатам при решении конкретных задач математики, говорит о том, что в своей основе теория множеств совершенно достоверна. Можно быть уверенным в том, что будущая методология математики реабилитирует трансфинитные доказательства в смысле достоверности и тем самым сделает реальной возможность полного внутреннего обоснования основных математических теорий.

В последнее время наметился еще один путь логического обоснования сложных математических теорий, который можно назвать методом упрощения объектной теории. Пусть мы имеем теорию T, содержащую арифметику, и некоторый метаязык M, удовлетворяющий требованиям финитности. Согласно теореме Геделя о непротиворечивости он заведомо недостаточен для доказательства непротиворечивости T. Но оказывается, что система выводов теории T может быть погружена в некоторую теорию T_1, которая значительно проще исходной теории в логическом отношении в том смысле, что поддается финитному обоснованию непротиворечивости. Если между выводами теории T и T_1 установлено такое соответствие, что противоречие в T необходимо приводит к противоречию в T_1, то это достаточно для того, чтобы считать исходную теорию полностью обоснованной в своей непротиворечивости по методу Гильберта. Теоремы Геделя не накладывают каких-либо ограничений на погружение системы выводов сложных теорий в теории более простые с сохранением свойства противоречивости-непротиворечивости и, тем самым, открывается эффективный путь для финитного обоснования теорий, которые не поддаются прямому обоснованию в соответствии с программой Гильберта или методом конструктивизации.

Недавно А. С. Кузичев показал, что если аксиоматику теории множеств Цермело-Френкеля выразить на языке исчисления секвенций, то ее система выводов погружается в специально построенное секвенциональное исчисление S, которое является полным и непротиворечивым. Системы ZF и S связаны таким образом, что всякое противоречие в ZF было бы равносильно выводу пустой секвенции в S, что невозможно в силу правил вывода системы S. Непротиворечивость системы аксиом Цермело-Френкеля, таким образом, доказывается, причем финитными средствами [23].

С некоторой ортодоксальной точки зрения, такое доказательство вообще не может иметь места, т. к. финитное доказательство не может привести к заключению о непротиворечивости теории трансфинитной. В этом рассуждении, однако, упускается из виду некоторое простое обстоятельство, связанное с геделевской теоремой о непротиворечивости.

Теорема Геделя о непротиворечивости утверждает невозможность вывода высказывания, обозначающего непротиворечивость теории в *формализованном* языке этой теории. Но доказательство непротиворечивости по Гильберту должно происходить в *содержательном* метаязыке и опираться на некоторые утверждения, очевидные с содержательной точки зрения. В реальном метаязыке, таким образом, сосуществуют формальные и содержательные моменты. Мы считаем такой метаязык финитным, если мы нигде в явном виде, не воспользовались представлением об актуально бесконечном. Но значит ли это, что мы не использовали его неявно, в неэксплицированном контексте содержательных понятий?

Представим себе доказательство некоторой теоремы, которое опирается на интуитивно ясное утверждение о том, что замкнутая линия, не имеющая самопересечений, делит плоскость на две области. Это утверждение, известное как лемма Жордана, является содержательно истинным и предельно обоснованным в том смысле, что мы отвергли бы любое доказательство, приводящее нас к противоречию с этим содержательным представлением. Если все остальные посылки доказательства финитны, то наше доказательство будет, очевидно, предельно достоверным. Но если мы попробуем формализовать это доказательство, то наше утверждение о замкнутой кривой потребует обоснования на языке теории множеств, т. е. выходящего за сферу финитных средств. Содержательному и безусловно надежному доказательству при полной формализации, таким образом, соответствует трансфинитное доказательство. Но можно представить себе и обратный ход: нефинитному формализованному доказательству непротиворечивости некоторой теории мы можем поставить в соответствие содержательное, вполне финитное и предельно достоверное доказательство. При таком переходе трансфинитные элементы доказательства исчезают, они как бы упаковываются в аподиктических содержательных допущениях. Геделевский запрет на возможность формализованного и финитного доказательства непротиворечивости достаточно богатой теории не является принципиальным запретом на то, что этот факт может быть доказан посредством *содержательного, аподиктичного,* и, следовательно, *предельно достоверного* рассуждения.

Если формализовать все рассуждения Кузичева, посредством которых он приходит к выводу о непротиворечивости *ZF,* то в таком виде они, безусловно, будут очень богатыми в каких-то допущениях, выходящими за пределы средств, формализованных в *ZF*. Но как содержательное такое доказательство является вполне финитным и приемлемым в смысле достоверности. Трансфинитность исчезает здесь в некоторых интуитивно ясных переходах, истинность которых не вызывает сомнения, причем мы не можем указать, в каких элементах доказательства она потенциально скрыта, до полной его формализации.

То же самое относится и к геделевскому доказательству непротиворечивости арифметики. Если интуиционистскую арифметику считать финитно обоснованной по построению и если все рассуждения по сведению финитны, то Гедель осуществил финитное доказательство непротиворечивости арифметики, которое запрещено теоремами Геделя! Карри пишет по этому поводу: «Непротиворечивость классической арифметики удается доказать интуиционистскими методами, в то время как строго финитное доказательство этой непротиворечивости противоречило бы теореме Геделя о неполноте. Поэтому с финитной точки зрения в интуиционистской арифметике есть неконструктивный элемент: в чем именно он заключается, я не знаю» [24]. Дело здесь скорее всего не в том, что в интуиционистской математике есть неконструктивный элемент, а в том, что доказательство Геделя финитно только в своем содержательном виде, т. е. оно проходит как финитное именно потому, что оно полностью не формализовано. Если это так, то это означает, что трансфинитный элемент в обосновании непротиворечивости арифметики не так существенен: он эквивалентен некоторым бесспорным содержательным соображениям.

Содержательное и всюду аподиктическое доказательство является предельно достоверным. Формализация сама по себе не увеличивает достоверности, но дает лишь механическое средство ее проверки. Задача обоснования математики состоит, таким образом, в открытии содержательных рассуждений, с достоверностью обосновывающих непротиворечивость той или иной теории. Мы не имеем запрета на построение таких рассуждений для самых богатых теорий математики, в том числе и для теории множеств. При таком подходе к обоснованию, очевидно, исключается регресс в бесконечность, т. к. содержательный метаязык признается в качестве предельно достоверного по внелогическим (внеформальным) соображениям.

Наиболее распространенная, негативная интерпретация теорем Геделя смешивает логическое утверждение о невозможности вывода в формальной теории утверждения, выражающего непротиворечивость этой теории с гносеологическим положением, что непротиворечивость достаточно богатой математической теории вообще не может быть обоснована с достоверностью. В действительности второе никак не следует из первого, а в настоящее время уже противоречит и фактам.

Формалистская философия математики, выросшая как отрицание некритической, интуитивной манеры рассуждения, возвела в культ форму, знак и правила оперирования со знаками. В определенном отношении это был прогресс. Достижения формалистского анализа математики велики и никогда не будут перечеркнуты. Но эта философия утвердила вместе с тем целую систему ложных верований. Всякое содержательное мышление в математике стало рассматриваться как не очень достоверное и нуждающееся в логическом анализе. Формализация стала постепенно пониматься как единственный способ окончательной санкции какого-либо результата, причем достоверность была отождествлена с финитностью. Негативные выводы из теорем Геделя были сделаны в полном соответствии с этими крайними идеями формалистской философии. Если в формализме арифметики невозможно вывести формулу, соответствующую утверждению о непротиворечивости арифметики, то достоверного обоснования вообще не существует даже для арифметики — вот суть самого распространенного на сегодняшний день истолкования второй теоремы Геделя. В действительности, однако, эта ситуация вовсе не исключает содержательного рассуждения, обосновывающего непротиворечивость с предельной достоверностью. Аподиктическое содержательное доказательство не нуждается в формализации для подтверждения своей надежности. А это значит, что содержательное обоснование математики вполне независимо и не ограничивается в своих возможностях теоремами Геделя.

Таким образом, даже если безусловно признать, что теоремы Геделя отвергают гильбертовскую программу обоснования математики, мы не можем признать, что они закрывают путь для предельно достоверного логического ее обоснования.

Что касается отношения теорем Геделя к программе Гильберта, то вопрос здесь также остается открытым. Т. Детлефсен в результате тщательного исследования этого вопроса приходит к выводу, что распространенное утверждение о крушении гильбертовской программы вследствие теорем Геделя основано на недоразумении, на незаконном отождествлении логики теории с логикой метатеории [25]. К аналогичным выводам, хотя и из других соображений приходит К. Самохвалов [26]. Мы не будем, однако, касаться здесь этого сугубо логического вопроса, т. к. наши выводы остаются в силе при любом его решении.

Смысл сказанного выше состоит в том, что у нас в действительности нет достаточных оснований утверждать невозможность полного внутреннего обоснования математики.

Этот вывод важен, т. к. эмпиристы в современной философии математики чаще всего ссылаются именно на геделевские ограничения [27]. Мы, однако, не будем придавать этому выводу решающего значения. В конце концов может прийти второй Гёдель и показать, что эти оставшиеся пути к логическому обоснованию математики также закрыты.

В действительности, скептические выводы эмпиризма относительно строгости математики являются несостоятельными при любом положении дел в основаниях математики. Для понимания этого обстоятельства достаточно уяснить тот факт, что строгость в математике создается не логическим анализом, а следовательно, и не зависит существенно от возможностей этого анализа.

Логическое обоснование математики является только вторичной процедурой; в процессе его мы *лишь фиксируем непротиворечивость* математических теорий, если она налицо, но отнюдь *не создаем* ее, не вводим ее в математические структуры. Непротиворечивость математических теорий создается *стихийно,* до обоснования их, и именно этот момент должен быть центральным в философском исследовании. Другими словами, мы должны понять механизмы, формирующие математическую теорию как непротиворечивую. Мы должны понять процесс самообоснования математики.

Математики начала века после обнаружения парадоксов часто рассматривали дело так, что от решения этих парадоксов зависит само дальнейшее развитие математической науки, само доверие к ней как к научному методу. «...Состояние, в котором мы находимся в отношении парадоксов, — говорил Д. Гильберт, — на продолжительное время невыносимо» [28]. Математика в то время часто сравнивалась со зданием, в основании которого появилась трещина, и которая, следовательно, угрожает устойчивости всего здания. В настоящее время постепенно уясняется, что такое отношение к проблеме обоснования непротиворечивости не является адекватным, не отражает сути дела. То, что мы называем основаниями математики, если использовать приведенную аналогию, является не фундаментом здания математики, а скорее его верхним этажом, неустройство на котором не мешает нормальному функционированию и устойчивости всего здания в целом. Истинным фундаментом математики в современном ее понимании является практика. Устойчивость здания математики целиком определяется ее связью с практикой, эффективностью в функционировании, обоснование математики — вторичная задача, решение которой важно лишь постольку, поскольку способствует осуществлению ее связи с практикой, позволяет дать теоретическое оправдание теориям, которые доказали свою эффективность. Другими словами, мы хорошо понимаем теперь вторичность обоснования науки по отношению к ее развитию и функционированию. То, что хорошо проявляет себя в практике, необходимо будет обосновано, и трудности обоснования не могут упразднить теорий, которые необходимы в плане функционирования математики как системы.

Вторичность логического обоснования выражается и в том, что строгость математики, которую мы фиксируем в процедурах обоснования, не устанавливается рациональными критериями строгости, но устанавливается стихийно в процессе функционирования теории. Именно практическая потребность, интенция на такую потребность позволяет создавать строгие и непротиворечивые математические теории даже в условиях полного отсутствия рефлексии, т. е. тогда, когда самих представлений о строгости доказательств и непротиворечивости теорий еще не существовало. Поразительная строгость рассуждений, которую мы наблюдаем у математиков всех времен, обязана своим происхождением не философии и логике, но стихийному процессу самообоснования, который стимулируется в конечном итоге функционированием и взаимодействием математических теорий.

Это означает, в частности, что отсутствие средств полного логического обоснования математической теории в смысле непротиворечивости ни в какой мере не может быть истолковано как признак ее противоречивости или как свидетельство большей вероятности появления в ней противоречивых суждений, чем в хорошо обоснованных теориях. Из того факта, что непротиворечивость арифметики не может быть обоснована с той же ясностью, что и непротиворечивость исчисления высказываний, никак не следует, что арифметика является теорией, менее завершенной в логическом отношении, чем исчисление высказываний. Напротив, у нас имеются все доводы думать, что обе теории одинаково совершенны и абсолютно непротиворечивы. Дело здесь не в степени совершенства теорий, но лишь в степени их «проницаемости» для логических средств анализа.

Одна из ошибок Лакатоса в философии математики состоит в том, что он непосредственно связывает строгость доказательства со строгостью анализа доказательства. Строгость доказательства у него целиком характеризуется строгостью анализа доказательства, «местом, где должен остановиться критицизм».

В таком случае строгость доказательства может возрастать только с углублением строгости анализа доказательства, и основания математики становятся главным источником ее совершенствования в смысле строгости доказательств, непротиворечивости теорий и пр. Это, однако, не соответствует действительности. История математики хорошо подтверждает тот факт, что фактическая строгость математики была чрезвычайно высокой и в условиях полного отсутствия логических критериев строгости. Исторически возникающие рациональные критерии строгости, конечно, способствуют повышению общей культуры математического мышления, оказывают влияние на фактическую строгость, но тем не менее ясно, что строгость в математику не привносится рациональными критериями строгости и никогда не контролируется ими полностью. Фактическая строгость математического мышления определена фундаментальными интуициями, которые лежат в основе математических понятий, функционированием математики как системы, и ее уровень зависит от наших исследований в этом направлении не более, чем средняя продолжительность жизни людей от демографических исследований.

Это полностью относится и к вопросу о непротиворечивости математических теорий. Современная философия математики систематически смешивает вопрос о средствах обоснования непротиворечивости математических теорий с вопросом об уровне их фактической непротиворечивости, и действительные или мнимые неудачи обоснования, рассуждения, иллюстрирующие ограниченность таких средств, сплошь и рядом превращаются в утверждения о нестрогости математики, о неизбежном логическом несовершенстве ее теорий и т. п.

Современный методологический скептицизм в математике в значительной мере опирается на теоремы Геделя и в особенности на теорему о непротиворечивости. Но теорема Геделя о непротиворечивости, даже если ее истолковать в самом пессимистическом смысле, говорит лишь о том, что мы не имеем логических средств для доказательства непротиворечивости многих теорий. Она ничего не утверждает о действительном качестве математических теорий в этом отношении и вполне совместима с представлением об идеальном совершенстве математики в смысле непротиворечивости. Из теорем Геделя при самом пессимистическом их истолковании вытекает только то, что с логической точки зрения вопрос здесь остается открытым, но не вытекает того утверждения, что этот вопрос не может быть решен никаким другим способом. Иначе говоря, теорема Геделя о непротиворечивости, формулируя запрет на известные пути обоснования математики, не ставит под сомнение фактическую строгость математики в плане непротиворечивости, а также и возможность рациональных путей ее обоснования

О высоком уровне непротиворечивости математики говорит прежде всего ее история. В содержательных науках наличие противоречащих тезисов, каждый из которых представляется его сторонникам совершенно обоснованным и единственно возможным, — обычное явление как в прошлом, так и в настоящем. Совсем другое положение в математике. Доказанное утверждение, как правило, согласуется со всеми утверждениями, доказанными ранее. Это настолько обычно, что математики, обсуждая новую теорему, никогда не ставят вопроса о такой ее согласованности: само доказательство рассматривается

как гарантия невозможности обоснования противоположного утверждения. Все противоречия, на которые натолкнулись математики в течение 3000 лет ее развития, могут быть пересчитаны по пальцам. Современная математика содержит в себе несколько десятков больших дисциплин, которые распадаются на сотни разделов и подразделов. Это тысячи теорем, доказываемых ежегодно при полном отсутствии таких явлений, которые можно было бы назвать логическими противоречиями. Этот факт, если мы вдумаемся, совершенно поразителен. Он не менее удивителен, чем факт полной устойчивости теорем, доказанных на интуитивном уровне, или факт постоянства законов логики. Если бы вокруг Солнца в небольшом пространстве по разным орбитам вращались тысячи планет, никогда не сталкиваясь друг с другом, то этот факт был бы менее удивительным, чем наблюдаемая согласованность в мире математических теорем. Даже в тех редчайших случаях, когда обнаруживаются противоречия, они лишь доказывают эту внутреннюю гармонию математики: опыт показывает, что они никогда не затрагивают основ или даже значительных результатов математики и устраняются посредством элементарных разграничений. Это относится и к парадоксам теории множеств. Давно замечено, что эти парадоксы возникли не в процессе доказательства существенных теорем, но в некоторых искусственных построениях и относительно понятий, которые не могут быть использованы в развитии конкретной теории. Кроме того, как и все предыдущие парадоксы, эти парадоксы удалось снять путем простейших и естественных ограничений на логику рассуждения. История математики, таким образом, не дает нам повода сомневаться в непротиворечивости математики. Напротив, она определенно свидетельствует о том, что противоречия в мире математических утверждений нечто внешнее, случайное, ни в какой мере не угрожающее его внутренней гармонии.

Истоки непротиворечивости математики лежат прежде всего в ее системности. Функционирующая система математических теорий стремится к экономичности, а следовательно, к унификации понятий и образов, к их взаимопроникновению. Каждая новая математическая теория уже в самом процессе ее создания отображается на другие теории, согласуется с ними. Этот механизм взаимосогласования математических идей является мощным барьером для противоречивых концепций. Вводя отрицательные или комплексные числа, математики не могли обосновать их непротиворечивость современным (формальным) путем, но система операций в том и другом случаях была задана совершенно определенно. Она была однозначно продиктована задачами, в которых эти числа первоначально появились, т. е. через согласование с действиями для натуральных чисел. Анализ возникновения основных математических теорий показывает, что противоречивую теорию в математику ввести чрезвычайно трудно: она немедленно проявила бы себя противоречивыми следствиями по отношению к признанным результатам [29].

Системный характер математического знания проявляется во многих явлениях как внутри математики, так и по отношению к содержательным наукам. Математические понятия исключительно мобильны: выработанные в одной области и для определенных целей, они, как правило, быстро расширяют диапазон своего действия. Известно, что аппарат, созданный для описания одного класса физических явлений, как правило, находит интерпретацию и в других областях, а абстрактные неинтерпретированные образы математики получают со временем естественнонаучную интерпретацию и непосредственное приложение. Говоря об этой впечатляющей гармонии математики, Е. Вигнер совершенно справедливо указывает и на загадку ее внутренней непротиворечивости. «Невольно создается впечатление, — пишет он, — что чудо, с которым мы сталкиваемся здесь, не менее удивительно, чем чудо, состоящее в способности нанизывать один за другим тысячи аргументов, не впадая при этом в противоречие...» [30]. Совершенно очевидно, что обе эти особенности математики органически связаны; обе они проистекают из ее системного, телеологического характера.

Корни логической непротиворечивости математики, однако, существенно глубже. Содержательные теории также не лишены системности и взаимодействуют друг с другом. Решающим обстоятельством, определяющим специфику математики в отношении ее непротиворечивости, является то, что все математические теории в конечном итоге согласованы со структурами, обладающими предельной степенью непротиворечивости, а именно с логикой и арифметикой. Арифметика, будучи элементарной теорией, тем не менее является основой и центром всей системы математического знания. Образно говоря, галактика математических созвездий вращается вокруг арифметики и логики, неизбежно отражаясь в этих структурах и получая свою завершенность через согласование с ними. Полная непротиворечивость арифметики вытекает из возможности ее конструктивного изложения. Такая возможность свидетельствует о предельной достоверности всех положений теории. Это — с логической точки зрения.

Центральная роль арифметики в математике, однако, вытекает прежде всего из ее особого онтологического статуса, а именно из ее связи с логикой и категориями.

Логика и арифметика органически связаны в своем генезисе. На основе экспериментальных данных Пиаже заключил, что образование логического понятия класса не было бы возможно без понятия числа, точно так же как понятие числа не могло образоваться без логического понятия класса. «Если число охватывает класс, — пишет Пиаже, то класс в свою очередь имплицитно опирается на число в качестве постоянного возможного отношения, поддерживающего сеть объемов» [31].

Арифметика и логика, согласно Пиаже, — глубоко родственные системы понятий: обе они образовались из слияния группировок классификации и сериации с той лишь разницей, что логическая теория абстрагируется от точного количественного сравнения классов, хотя и принимает его в расчет (при сравнении классов по объему).

Если с психологической точки зрения перейти на гносеологическую, то указанный факт можно выразить в следующем виде: логика и арифметика являются однопорядковыми структурами в том смысле, что они как понятийные системы являются отражением одного класса интуиций, а именно класса фундаментальных праксеологических интуиций. Основные арифметические понятия — не просто идеализации и теоретические конструкты, но понятия, в которых выражаются некоторые фундаментальные различения реальности, лежавшие в основе образования всех других более конкретных представлений. Они представляют собой не только результат мышления о некотором аспекте реальности, но фундаментальную рамку мышления вообще и, таким образом, имеют тот же статус достоверности и надежности, что и законы логики.

Этот факт имеет далеко идущие методологические следствия. Он объясняет значительный успех логицистского обоснования арифметики, который представлялся до этого чисто случайным совпадением структур. Он позволяет также понять рациональный момент в традиционном априористском истолковании математики. Исследования Пиаже показывают, что арифметика и элементарная геометрия, будучи в логическом отношении рядовыми структурами математики, имеют совершенно привилегированное онтологическое значение: они формируются наряду с логикой и фундаментальными категориями, они внедрены в человеческое сознание и выступают в качестве его норм при отражении любой сферы реальности.

Операциональный опыт, на котором формируются арифметические понятия, является ведущим по отношению к физическому опыту в том смысле, что все физические абстракции образуются под влиянием операциональных представлений. Это значит, что человек может не иметь каких-то частных математических представлений, но он не может обойтись без элементарных арифметических представлений, ибо они наряду с логикой и категориями образуют сам механизм сознания, систему его внутренних норм.

Но если арифметика в какой-то своей части рядоположенна с логикой по характеру своей интуитивной основы и своей функции, то в этой своей части она, как и логика, должна быть признана предельно обоснованной, т. е. не подлежащей логической критике. В этой части она, следовательно, может выполнять роль предельно обосновательного слоя, служить фундаментом обоснования вторичных математических структур. Поскольку общие принципы арифметики приняты на основе праксеологической достоверности, то мы имеем основание предпо-

лагать предельную надежность арифметики в смысле непротиворечивости и можем представить себе самообоснование математики как распространение непротиворечивости от арифметики к новым теориям или как сведение непротиворечивости вторичных теорий к непротиворечивости арифметики. В этом плане мы можем говорить о предельной обоснованности всех математических теорий, имеющих арифметическую интерпретацию.

Формалистская философия математики всегда подчеркивала равноправие всех математических теорий как логических структур. До определенного времени это было важно, так как только такая позиция позволяла оправдать принятие таких теорий, как неевклидовы геометрии и теория множеств. Однако в настоящее время такая установка, отрицающая онтологическое различие математических структур, фактически закрывает путь к адекватной методологии обоснования математики. Она ведет к бесконечному регрессу логического обоснования, ибо, с точки зрения сторонника формалистской философии, все системы равноправны и ни одна из них не имеет преимуществ перед другой при обосновании математики[32]. Но почему мы стремимся свести теорию множеств к арифметике, а не наоборот? Мы не можем обойтись здесь без некоторых соображений о различной степени внелогической обоснованности этих структур. Это различие обусловлено различием фундаментальных интуиций, а в конечном итоге, различной степенью связи их основных понятий с категориальными и праксеологическими представлениями о мире. Обоснование математической теории должно идти вне эмпирии и вне натурфилософии, но оно не может идти без предварительной классификации теорий по их онтологическому базису. Математика без онтологии теряет сам принцип обоснования, возможность выделить преимущественное направление логической редукции.

Задача философии математики состоит как раз в том, чтобы уточнить основания и критерии непосредственной достоверности, позволяющие прерывать на определенном этапе регресс чисто логического обоснования, определить тот слой математического знания, который мог бы быть признан в качестве достоверного по внелогическим соображениям. Интуиционистская философия математики в этом отношении выше формалистской, но она до сих пор не выработала никакого теоретического обоснования своих установок. Она представляет собой скорее практическую попытку в истинном направлении, чем теоретически обоснованную программу. Почему нужно считать безусловно достоверной интуицию числа и построения, но нельзя считать таковой интуицию непрерывности и континуума, как это предлагалось Брауэром в первом варианте его концепции? Никто не имеет ясного ответа на этот вопрос, а это значит, что обосновательный слой, предлагаемый интуиционизмом, ограничен произвольно. Метод проб и ошибок в рамках самой логики здесь ничего не может решить. Мы нуждаемся в гносеологическом оправдании обосновательного слоя, в исследовании истоков внелогической достоверности математических положений.

Математические теории в генетическом отношении могут быть разделены на три группы. Во-первых, это теории, основанные на соглашениях и не имеющие какого-либо интуитивного базиса. Простейший пример — это неевклидовы геометрии на начальном этапе своего развития. Во-вторых, — теории, «изъятые из физики», т. е. имеющие эмпирический базис (теория потенциалов, тензорное исчисление и т. п.). И, наконец, теории онтологического статуса, к которым относятся арифметика, евклидова геометрия и логика. Теории последнего типа занимают особое место в структуре математического и вообще человеческого знания. Мы можем заменить одни соглашения другими в теориях первого типа. При каком-то радикальном изменении условий физического мира, мы должны были бы также заменить одни теории второго типа другими. Но в любом случае мы не можем отказаться от представлений, на которых зиждется арифметика и элементарная геометрия, ибо эти представления органически внедрены в наш процесс познания мира. Никакие гипотетически возможные противоречия в этих теориях не могут заставить нас отказаться от них как от таковых в их праксеологически утвержденном виде. Но отсюда следует, что эти теории предельно непротиворечивы, ибо практика вы-

ше логики и система праксеологически необходимых истин не может быть логически противоречивой.

Фактическая непротиворечивость математики может быть понята также и из следующих соображений. Каждая математическая теория начинается с некоторой системы доказательств, бесспорных логических связей, которые имеют для нас достоверность факта. Непротиворечивость этой исходной сетки понятий гарантирована ее аподиктичностью. Если теперь каждое новое определение вводится корректно либо посредством конструкции, либо доказательством существования, то такая система безусловно продолжает оставаться непротиворечивой. Таким образом, даже если мы не имеем полного логического доказательства непротиворечивости теории (для всех возможных ее определений) и даже если в этой теории еще не выявлена адекватная аксиоматика, мы вправе верить в ее непротиворечивость, по крайней мере в том фрагменте, в котором она в настоящее время существует.

Можно, таким образом, утверждать, что непротиворечивость математической теории в существенной мере (хотя, разумеется, и не абсолютно) гарантируется уже самой логикой ее развертывания: бесспорностью исходного базиса и корректностью введения новых понятий, а иначе говоря, — идущей от исходных понятий достоверностью всей системы доказательств.

Отсюда ясно, что математики поступают вполне рационально, заботясь больше о корректности отдельных доказательств, чем о непротиворечивости в целом. За этим поведением лежит вполне обоснованное допущение, что система достоверных доказательств не может оказаться противоречивой и что непротиворечивость теории — необходимое следствие достоверности отдельных доказательств. Вызревание теории в смысле надежности ее доказательств есть одновременно и становление ее как непротиворечивой структуры.

Становление математических теорий как непротиворечивых, логически завершенных — объективный процесс, который обусловлен системностью математики, наличием предельно обоснованного базиса в виде логики и арифметики и, наконец, естественным совершенствованием доказательств до их предельной завершенности[33]. Этот процесс стимулируется в конечном итоге функционированием математики и протекает существенно независимо от наших попыток найти рациональные критерии непротиворечивости и способы обоснования отдельных математических теорий в этом отношении. Является поэтому совершенно неадекватной гносеологическая установка, которая вопрос о строгости в математике решает исключительно с точки зрения достижений в критериях строгости. Здесь уместно привести притчу, которой М. Клайн заканчивает одну из глав своей интересной книги о математике. «На берегах Рейна в течение многих веков возвышался прекрасный замок. Пауки, обитавшие в подвалах замка, затянули паутиной все его проходы. Однажды сильный порыв ветра разрушил тончайшие нити паутины, и пауки принялись поспешно восстанавливать образовавшиеся бреши; они считали, что замок держится на их паутине!»[34] Многие современные философы, несомненно, повинны в аналогичном заблуждении. Они верят, что строгость в математике целиком зиждется на наших критериях строгости, и ограниченность этих критериев рассматривают как угрозу самому существованию математики, по крайней мере в качестве строгой науки.

Логический анализ строгости, конечно, не столь бесполезен для эволюции строгости, как деятельность пауков для устойчивости замка. Математика представляет собой систему теорий, находящихся на различных уровнях обоснованности. Выявление рациональных критериев строгости, несомненно, ускоряет процесс стандартизации этих теорий, унификации в обосновании их результатов, в прояснении их исходных предпосылок. Без общей идеи аксиоматического метода, разработанной в методологии математики XIX века, не было бы строгого построения геометрии, теории множеств, теории вероятностей и многих дисциплин, которое оказалось полезным не только с точки зрения формального обоснования, но и с точки зрения выявления внутренней структуры этих теорий.

С развитием математики значение логического анализа ее теорий несомненно возрастает. И тем не менее всегда остается верным положение о приоритете самообоснования. Математическая строгость по большому счету не создается и не поддерживается рациональными критериями строгости. Непротиворечивость математической теории как одно из ее сущностных свойств проистекает из ее функционирования, из связи с другими математическими теориями. Рациональные критерии обоснования играют некоторую роль в становлении фактической строгости, но отсутствие или неопределенность таких критериев не снижает уровня фактической строгости и не останавливают ее естественного прогресса.

Приводит ли этот стихийный процесс к полной законченности теорий в смысле непротиворечивости? Безусловно, да, ибо, как уже говорилось, логический анализ только фиксирует непротиворечивость, если она имеет место, но не создает ее. Все теории, в непротиворечивость которых мы безусловно верим, доказывают такую возможность.

Более сложный вопрос возникает относительно сферы полной непротиворечивости. Она, несомненно, шире того круга простых теорий, относительно которых существуют соответствующие логические доказательства. Мы имеем основание предполагать, что все аксиоматизированные теории, т. е. все центральные теории современной математики являются полностью непротиворечивыми. Как уже говорилось, нельзя исключать возможности вполне достоверного логического обоснования этого положения. Мы ограничимся здесь некоторыми наводящими соображениями гносеологического порядка.

Будем называть противоречие в аксиоматизированной теории внутренним, если оно содержится в непосредственных следствиях аксиом, т. е. в следствиях, полученных без введения производных определений. Соответственно внешним будет противоречие, появляющееся в теории в результате введения какого-либо производного определения. Говоря о непротиворечивости центральных математических теорий, мы имеем в виду прежде всего их внутреннюю непротиворечивость. Если бы аксиоматика какой-либо из этих теорий была противоречива, то это обстоятельство неизбежно проявилось бы уже на первоначальном этапе развития теории. Сама развитость теории в рамках определенной аксиоматики, несомненно, свидетельствует о полной совместности ее аксиом. Противоречия в таких теориях могут возникнуть из-за нечетких или некорректно введенных определений, но они устраняются частными разграничениями и не ставят под вопрос ценность теории и окончательный характер ее основных результатов.

Будем называть теорию *практически непротиворечивой,* если она внутренне непротиворечива и если все ее определения введены корректно, т. е. через построение или посредством доказательств существования. Теория в этом случае непротиворечива в том смысле, что ни один из ее полученных до сих пор результатов не может быть отвергнут в той же системе посылок (аксиом).

Требование практической непротиворечивости, очевидно, слабее требования обычной логической непротиворечивости, которая формулируется как непротиворечивость по отношению к аксиомам и ко *всем возможным определениям.* Для практического использования математики достаточно иметь убежденность в однозначности существующих результатов в отношении существующих определений. Если доказательства непротиворечивости теории в логическом смысле чрезвычайно трудны и связаны с принципиальными ограничениями, то аргументы за практическую непротиворечивость мы получаем из самого ее построения. Не общие логические соображения, но именно генезис понятий и теорем лежит в основе обычной веры математика в непреложность своих результатов. Мы можем утверждать, что все достаточно развитые математические теории, в той мере, в которой они оперируют с корректно введенными определениями, являются практически непротиворечивыми. Это значит, что отсутствие общих логических доказательств непротиворечивости не дает нам повода сомневаться в непротиворечивости основных теорий современной математики и полной однозначности их результатов.

Мы можем теперь сформулировать общий вывод о связи между строгостью доказательств и непротиворечивостью теории. Фаллибилистская идея, как мы видели, состоит в том, что при всех прочих гарантиях строгости доказательство может оказаться недостоверным вследствие возможной противоречивости теории, в которой оно производится, или вследствие противоречивости метаязыка, который в него вовлечен. Эта идея несостоятельна, во-первых, потому, что ниоткуда не следует невозможность предельно достоверного логического обоснования непротиворечивости всех интересующих нас теорий. Ссылка на теоремы Геделя не является здесь достаточной. Во-вторых, даже при наличии полного запрета на такого рода обоснование, мы имели бы все основания не сомневаться в высочайшей надежности достаточно развитых математических теорий в смысле непротиворечивости. Что касается метаязыка, то обоснование его непротиворечивости вообще не является условием обоснования полной строгости и окончательности доказательства. Наконец, надо указать на то обстоятельство, что даже крайнее фаллибилистское допущение относительно структуры математических теорий, а именно предположение скрытой противоречивости каждой из них, не означало бы отсутствия в математике достоверных и окончательных доказательств, ибо отдельное доказательство первично перед системой в своих критериях достоверности и законченности.

Мы можем заключить, таким образом, что практическая вера математиков в однозначность своих доказательств (в невозможность противоречащего результата в данной системе посылок) имеет вполне объективные основания. Напротив, доводы фаллибилизма нужно признать поверхностными, и особенно те из них, которые извлекаются из теорем Геделя и общей ситуации в основаниях математики.

Глава IV

ТАВТОЛОГИЧНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Для гносеологической характеристики математического доказательства важно также понять такое его свойство, как тавтологичность. Мы можем определить это понятие через понятие информации. Будем считать математическое доказательство тавтологичным, если его результат (вывод) не содержит информации, не заключающейся в посылках. Понятие информации мы берем здесь в самом общем гносеологическом смысле, как сообщение о некоторой системе связей. Говоря о математической теории, мы, конечно, не связываем понятие информации с какой-либо конкретной ее эмпирической интерпретацией и с понятием эмпирической истинности вообще. Мы будем говорить, что математический вывод тавтологичен, если он утверждает только часть абстрактных отношений, которые явно или неявно уже утверждаются в его посылках.

Тавтологичность математического доказательства наряду с другими его сущностными свойствами всегда предполагалась как само собой разумеющееся, как совершенно очевидное его свойство. В последнее время, однако, появились колебания и в этом плане. Мы рассмотрим здесь концепцию Хинтикки, согласно которой математическое доказательство связано с приростом информации и, следовательно, принципиально нетавтологично.

1. Тавтологичность и аналитичность

Каждое утверждение обладает непосредственным содержанием, которое является совершенно ясным для человека, понимающего смысл слов или знаков, из которых оно составлено. Оно дает нам информацию о некоторых реальных или предполагаемых связях в действительности. Если мы возьмем систему связанных друг с другом утверждений, то кроме этой непосредственной, явно выраженной информации об объектах, она может содержать еще и информацию неявную, которую можно получить, лишь сопоставляя эти утверждения друг с другом. Так, утверждая, что сумма смежных углов равна двум прямым и постулат параллельности («через точку на плоскости можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой»), мы утверждаем одновременно и то, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Эта последняя информация не содержится ни в одном из приведенных утверждений в отдельности, но имплицитно предполагается, если взять оба вместе и определение треугольника.

Итак, информация об объектах, заданная системой утверждений, делится на две части: непосредственная, явная информация, содержащаяся в каждом из них (обозначим буквой A), и информация неявная, имплицитная, содержащаяся в системе в целом (B). Информация B полностью задана информацией A: сказавши A, мы уже сказали и B, хотя субъективно мы можем этого и не осознавать. Можно выразить эту связь между A и B и в такой (онтологической) форме: мир, в котором реализуется система отношений, заданная в A, не может не удовлетворять системе отношений, задаваемой B. Если мы, к примеру, признаем законы механики Ньютона и то, что планеты движутся по эллипсам, то тем самым мы необходимо утверждаем и то, что сила, действующая между Солнцем и планетами, обратно пропорциональна квадрату расстояния. Это последнее обстоятельство не лежит на поверхности: оно извлекается посредством достаточно трудной дедуктивной обработки исходных положений. Если определен (описан) некоторый объект и дана система утверждений относительно него, то мы можем говорить о потенциальной информации об объекте, которая задана этими утверждениями и которая может быть выявлена посредством их логического анализа.

Наличием объективной, но неявной информации определяется само существование математики как науки. Ее задача состоит не в сборе информации и не в ее уточнении, но исключительно в том, чтобы выявить скрытую информацию в системе посылок, которая может оказаться в некоторых отношениях более значительной, чем информация, содержащаяся в каждой из них. Математический метод становится существенным лишь тогда, когда посредством немногих утверждений (аксиом) задается достаточно богатая область неявной информации. Что следует из того, что мы приняли данную группу суждений в качестве истинной? Какая структура мира определяется принятием данной системы положений и какие связи следует считать исключенными при наличии связей, выраженных в аксиомах? Такого рода вопросы определяют смысл математических исследований в науке. Эти исследования сводятся в конечном счете к выявлению неявно заданной информации в некоторой системе утверждений.

Каждая область эмпирического знания задает свою систему отношений и каждая требует особых математических средств. Различие математических теорий по характеру их аксиом и определений также обусловлено задачей выявления неявной информации: каждая сфера знания требует специфического языка для своего формального выражения и выведения нетривиальных следствий.

Из функции математики следует принципиальная тавтологичность математического доказательства. Доказательство не имело бы большого смысла, если бы не выводило за пределы информации, непосредственно данной в посылках, но оно не имело бы никакого смысла, если бы выводило за пределы информации, объективно определенной посылками. Если бы в процессе доказательства появлялась некая новая информация, не определенная посылками, имплицитно не содержащаяся в них, то мы не вправе были бы вообще говорить о том, что теорема следует из аксиом, ибо идея следования имеет гносеологическую основу в понятии необходимой связи по содержанию, по истинности. Мы не были бы вправе класть такого рода выводы в основу нашей деятельности. Если в выводах имеется информация, объективно не определенная системой посылок, то не исключено, что при полной истинности посылок мы имели бы ложные заключения.

Тавтологичность доказательства, а именно то его свойство, что оно никогда не выводит за пределы информации, заключенной в посылках, есть необходимое, сущностное его свойство. Строгость математики во всех ее требованиях направлена в конечном итоге на выполнение этого простого требования. Мы требуем герметичности доказательства для того, чтобы обезопасить заключение от информации, не содержащейся в посылках. Ту же цель преследует совершенствование норм реальной логики. Требование непротиворечивости также продиктовано задачей выявления объективной информации посылок, ибо только непротиворечивая система проводит границу между объективно определенной информацией и всякой другой информацией о мире. Тавтологичность может быть понята, таким образом, как интегральное требование, лежащее в основе всех критериев строгости математического рассуждения. Мы не имеем специального критерия тавтологичности доказательства. Доказательство, проведенное корректно, мы принимаем и как тавтологичное, ибо из функциональных соображений ясно, что критерии строгости исторически формируются прежде всего как гарантия тавтологичности доказательств.

Если A — система аксиом, B — система доказанных утверждений, а C — система производных определений, использованных в доказательстве, то требование тавтологичности доказательства может быть записано как утверждение об информации: $\inf A+\inf C>\inf B$, означающее, что информация, заключенная в выводах, является частью информации, заключенной в посылках. Доказательство не создает новой информации, но лишь проявляет скрытую информацию, содержащуюся в аксиомах и определениях.

Тавтологичность математики может быть более адекватно понята через сопоставление с такой же характеристикой, как аналитичность.

По Канту, который впервые стал разделять суждения на аналитические и синтетические, к аналитическим относятся те суждения, у которых в предикате речь идет о свойстве, которое принадлежит субъекту по его сущности или по определению. Если мы говорим «человек мыслит», «все тела протяженны», «треугольник имеет три стороны» и т. п., то мы высказываем аналитические суждения, ибо человек может быть определен как мыслящее животное, тело представляется всегда как неразрывно связанное с протяженностью, суждение «треугольник имеет три стороны» является простым представлением определения треугольника в форме утвердительного суждения. Высказывая аналитическое суждение, мы, очевидно, не расширяем наше знание о предмете, но лишь проясняем его, указывая на компоненты, с самого начала заключенные в его принятом определении. Знание расширяется только благодаря синтетическим суждениям, в которых субъекту приписываются свойства, не заключенные в определении.

В чисто логическом плане разделение суждений на аналитические и синтетические, несомненно, имеет место как в математике, так и в опытных науках. Человеческий язык состоит из понятий, каждое из которых связано с некоторой совокупностью неотъемлемых свойств, признаков, необходимо связываемых с сущностью этого предмета, к которому это понятие относится. Суждения, в которых утверждается наличие у предмета такого рода признаков, являются аналитическими; все же другие суждения, относящиеся к предмету, соответственно образуют класс синтетических суждений. Практически это разграничение нечетко в силу нечеткости всякого, в особенности содержательного, понятия, но объективно оно всегда существует, и само подразделение аналитического и синтетического имеет объективную основу в фактическом содержании понятия. Общее подразделение суждений на аналитические и синтетические фиксирует некоторую фундаментальную структуру нашего языка. Язык может быть уподоблен сетке, где понятия образуют своего рода узелки. Каждый узелок характеризуется своей внутренней структурой и системой связей с другими узелками. Система аналитических суждений дает знание о внутренней структуре понятия, система синтетических — характеризует его внешние связи, причем одно обусловлено другим: внешние связи понятия всегда устанавливаются на основе его внутреннего содержания, т. е. его исходного определения.

Аналитическое высказывание — это высказывание из определения. Если определение налицо, и мы не подвергаем его сомнению, то такое суждение является лишь расшифровкой определения. Так как

всякое знание покоится на определениях, то разделение аналитических и синтетических суждений носит универсальный характер: оно относится как к суждениям обыденного языка, так и к суждениям любой науки, как к суждениям математики, так и физики (опытных наук).

Современные представления о разделении суждений на аналитические и синтетические существенно отличны от кантовского в следующем отношении. Для Канта это разделение совершенно абсолютно; он нигде не говорит о том, что синтетическое суждение может превратиться в аналитическое, да это и недопустимо с его точки зрения. Между тем если мы связываем это разделение с определенной сеткой человеческих понятий, то ясно, что она исторична, и вследствие этого граница между совокупностью аналитических и совокупностью синтетических суждений постоянно изменяется. Кантовская позиция остается верной лишь в том, что такая граница всегда существует и она проистекает из структуры человеческого языка.

Кантовская концепция является неудовлетворительной и в том отношении, что она не проводит никакого различия между обыденным и теоретическим языком. Это различие, однако, существенно. Если аналитическое суждение берется из сферы обыденного или философского языка, то оно является логически изолированным, оно не следует дедуктивно из других суждений и не порождает дедуктивных следствий. Если же мы возьмем определение в рамках теоретического языка, то оно оказывается связанным со многими другими определениями, и аналитические суждения, относящиеся к некоторой совокупности определений, могут послужить основой для получения некоторых других суждений, не вытекающих непосредственно из определений. Возникает вопрос: является ли дедуктивное следствие из системы аналитических суждений аналитическим? В начале нашего века Б. Рассел и Л. Кутюра доказывали аналитичность всех математических суждений на том основании, что они в конечном итоге сводимы к утверждениям логики. Если логические истины аналитичны и если все утверждения математики могут быть выведены из логических тавтологий и представлены в виде логических тавтологий (тезис логицизма), то в таком случае математика аналитична и не содержит синтетических суждений вообще[1]. Вывод очевидно противоречащий философии математики Канта.

Нетрудно видеть, что логицисты существенно изменили кантовское понимание аналитичности, отождествив его с выводимостью из логических тавтологий.

Философы, близкие к формалистской философии математики, стали понимать аналитичность суждения как истинность при определенной интерпретации его внелогических терминов. Согласно Р. Карнапу, суждение является аналитическим (L — истинным) в семантической системе M, если и только если его истинность в M может быть установлена на основе одних лишь семантических правил этой системы, без ссылки на внеязыковые факты. Вопрос об аналитичности того или другого суждения не имеет здесь категорического ответа: все зависит от интерпретации, от принятых постулатов значения[2]. Если под постулатами значения понимать аксиомы математической теории (аксиомы могут быть поняты как неявные определения, как утверждения, разъясняющие смысл основных терминов), то аналитичность утверждения становится тождественной его выводимости в системе аксиом. Такое понимание аналитичности, очевидно, отлично от кантовского, так как утверждает полную аналитичность математики, и от логицистского, ибо не связано с выводимостью из логики.

Общая ситуация может быть описана здесь следующим образом. В современной логике сосуществует несколько определений аналитичности и соответственно синтетичности суждений, и на вопрос: являются ли математические утверждения аналитическими или синтетическими — не может быть получено однозначного ответа. Все зависит от точки зрения, причем каждая из них может быть целесообразной в некотором отношении, в контексте некоторого исследования. Категоричное решение вопроса здесь скорее всего недостижимо.

В этом плане мы можем провести различие между понятиями аналитичности и тавтологичности по их гносеологическому статусу.

Из сказанного уже ясно, что аналитичность и тавтологичность — существенно различные понятия. Если аналитичность относится к суждениям, то тавтологичность — к доказательствам. Здесь имеется некоторый параллелизм: аналитические суждения являются и тавтологичными в том смысле, что каждому из них может быть поставлено в соответствие доказательство, выводящее эти суждения из значения входящих в них терминов. Об аналитических суждениях мы, таким образом, можем говорить как о тавтологиях, как о суждениях, раскрывающих информацию, заключенную в определениях. Но параллелизм понятий не означает их тождественности[3].

Аналитичность, в каком бы определении мы ее ни брали, представляет собой внутреннюю, логическую характеристику суждения, зависимую от определенной интерпретации его компонентов. Представление об аналитичности-синтетичности возникает из рассмотрения отдельных суждений и прилагается к математике в целом как некоторый признак, который может быть эффективно проверен в каждом отдельном случае. Тавтологичность, напротив, представляет собой только гносеологическую характеристику. Никакой логический анализ доказательства не способен выявить его тавтологичность или нетавтологичность, если это понятие связывается с понятием информации в его общегносеологическом значении или, иначе, с понятием эмпирической истинности суждений. Представление о тавтологичности доказательств проистекает не из анализа конкретных случаев, но из представлений о функции математического доказательства вообще, из представлений о природе логики и об отношении логического рассуждения к истинности суждений вообще. Свойство тавтологичности, таким образом, навязывается математике не индуктивно, не из рассмотрения отдельных случаев, но из общих гносеологических представлений, из понимания места математики в системе знания.

Это определяет существенно различный статус требований аналитичности и тавтологичности по отношению к математике в целом. Аналитичность как логико-семантическое понятие может быть определена по-разному, и ответ на вопрос, является ли математика аналитическим знанием, может быть соответственно различным. Единообразный ответ может оказаться здесь недостижимым, да он и не является обязательным с методологической точки зрения. Адекватное решение вопроса может состоять здесь просто в упорядочении (классификации) понятий аналитичности и в соответствующем уточнении логической терминологии. Напротив, если приняты определенные воззрения на функцию математики, то вопрос о тавтологичности доказательств решается совершенно однозначно, и это решение не может быть поколеблено логическим анализом математических теорий.

Утверждение о тавтологичности доказательства может быть высказано в количественной форме, а именно как утверждение о том, что информация, содержащаяся в заключении, не превышает информации, содержащейся в посылках. Может показаться, что при такой формулировке мы получаем возможность опровергнуть универсальность тавтологичности, исходя из некоторого уточнения меры информации. Такое допущение, однако, не имеет оснований.

Во-первых, информация берется здесь в предельно широком, гносеологическом смысле. Сама возможность адекватного определения количества информации в этом случае является проблематичной.

Во-вторых, любая мера информации, которая могла бы быть введена здесь, должна была бы в первую очередь быть согласованной с требованием тавтологичности. Всякая мера задается на основе некоторых общих, качественных, но совершенно необходимых требований. Мы не могли бы, к примеру, признать адекватным такой способ измерения длины, который не сохранял бы сумму длин отрезков при изменении порядка их измерения. Способ измерения задается всегда в рамках некоторых конститутивных представлений о величине, и он отбрасывается как неадекватный, если не удовлетворяет этим представлениям. Определение гносеологической информации, не удовлетворяющее требованию тавтологичности, не может быть принято вообще, как не удовлетворяющее своему основному конститутивному требованию, проистекающему из общих представлений о природе логического вывода.

2. Информационная емкость определений

Принимая идею тавтологичности доказательства, мы сталкиваемся, как кажется, с неким парадоксом, который может быть обозначен как парадокс дедукции[4]. Аксиомы существующих математических теорий относительно бедны содержанием и в значительной степени очевидны, а между тем в каждой из этих теорий имеются результаты, не сравнимые с аксиомами ни по содержанию, ни по практической значимости. Аксиоматика евклидовой геометрии в систематизации, данной Гильбертом, содержит 20 аксиом, каждая из которых без труда может быть понята человеком, только начинающим изучать геометрию. Трудно примириться с идеей, что в этом относительно небольшом списке очевидных утверждений уже заложена имплицитно вся информация о геометрических телах и фигурах, заключенная в огромном количестве доказанных теорем, нетривиальных по своему содержанию. Эта ситуация еще более ярко проявляется в арифметике, где список аксиом значительно короче и также состоит из совершенно очевидных утверждений. Эта система аксиом обладает, однако, богатейшими дедуктивными возможностями. Значительное число современных математических теорий (это относится, в частности, ко всему комплексу геометрических теорий) имеет интерпретацию в арифметике и, следовательно, может быть представлено во всем своем внутреннем содержании как простое следствие пяти тривиальных утверждений, принятых в качестве аксиом арифметики. Аналогичным образом впечатляет сила любой аксиоматики, будь то аксиоматика теории множеств, топологии, теории вероятностей и т. д. Небольшое количество простых утверждений оказывается достаточной базой для обоснования необозримого числа идей и утверждений теории.

Это обстоятельство кажется труднопостижимым не только с точки зрения внутреннего богатства математики, но и с точки зрения ее приложений. Все существенные открытия в физике, имевшие место на протяжении двух последних столетий, связаны с доказательством некоторого рода неочевидностей, с существенной корректировкой здравого смысла, и в этих доказательствах решающее место всегда принадлежало математике. Математика проявила себя в естествознании прежде всего как орудие предсказания нетривиальных истин, как средство раскрытия глубинных причин явлений, недоступных непосредственному восприятию и здравому смыслу. Отождествление содержания математических теорий с информацией, заложенной в очевиднейших аксиомах, с этой точки зрения кажется также совершенно неправомерным. Но, с другой стороны, аксиомы, по определению, представляют собой единственное содержательное основание, из которого все остальные утверждения теории вытекают по правилам логики, не прибавляющей какой-либо информации об объекте рассуждения. Если герметичность математического вывода — сущностная характеристика математики, то проблема состоит в том, чтобы примирить бедность аксиом и богатство математики, объяснить то, каким образом система простых и в большинстве случаев очевидных утверждений способна приводить к многочисленным следствиям, не сравнимым с ней по информативным и предсказательным возможностям.

А. Пуанкаре в свое время ставил вопрос: «Если дедукция ничего не привносит в математическое знание, то чем отличается математика от грандиозной системы тавтологий, от бесконечного повторения того, что *A* тождественно *A*?» По его мнению, математика обогащается содержательно за счет обобщений на основе принципа индукции. С современной точки зрения такое объяснение является недостаточным: принцип индукции представляет собой одну из аксиом арифметики, и его многократное использование не выводит нас за сферу содержания, зафиксированного в аксиомах.

Мы должны, таким образом, признать одновременно и логическую достаточность аксиом («в теории нет ничего, что в конечном итоге не выводимо из аксиом»), и содержательную несоизмеримость их с теоремами, которая подтверждается всем опытом развития и использования математики. В этой ситуации кажется естественным поставить под сомнение саму тавтологичность логического следования, идею сохранения (отсутствие прироста) информации, заложенной в посылках в процессе ее логической трансформации. Такой подход был бы очевидным отказом от основных принципов традиционного понимания математического метода и его роли в развитии эмпирического знания. В действительности, однако, столь радикальная мера не является здесь необходимой. Описанное противоречие является только кажущимся и полностью исчезает при более детальном рассмотрении процесса развертывания математической теории, т. е. процесса получения следствий из аксиом.

Переход от аксиом к теоремам существенно зависит от введения в рассмотрение производных объектов, и можно вполне определенно утверждать, что введение каждого нового объекта или отношения увеличивает количество информации, содержащейся в математической теории в целом. Это справедливо уже при обыденном понимании прироста информации как о появлении новых сведений о каком-либо объекте. Рассмотрение известного предмета в новых отношениях увеличивает информацию о нем. А. Эйнштейн и Л. Инфельд сравнивали эволюцию физических представлений с подъемом на небоскреб: с каждого более высокого этажа мы не только видим что-то такое, что было за пределами наших возможностей раньше, но и по-другому видим давно знакомые нам улицы и площади, поскольку мы видим их теперь в их взаимосвязи с более широким целым. Совершенно аналогичное явление имеет место и в процессе развертывания математической теории. Человек, усвоивший на некоторых примерах содержание геометрических аксиом, знаком по существу только с очень ограниченным числом свойств элементарных объектов: прямой, точки и плоскости. В аксиомах геометрии нет понятия окружности, и поэтому аксиомы заведомо не дают никакой информации о тех свойствах этих объектов, которые проявляются в их отношении к окружности. Вводя понятие окружности, мы вводим новую систему отношений и увеличиваем наши знания о свойствах прямой. Понятие прямой раскрывается, таким образом, в процессе всего развития теории, включаясь в систему все более сложных отношений. Сказанное, очевидно, справедливо по отношению к любому математическому понятию. В отношении более сложных понятий это проявляется еще более отчетливо. Понятия отрезка, расстояния, многоугольника, многогранника, площади и т. д., будучи элементарными и формально однозначно определяемыми, исторически проделали богатую содержательную эволюцию: каждый новый этап развития математики был связан с включением этих понятий в новые концепции и с обогащением их содержания.

Мы можем, таким образом, определенно утверждать, что развитая (развернутая) математическая теория информативно богаче своих аксиом и что это обогащение теории происходит за счет введения новых объектов (определений).

О содержательном обогащении математической теории в процессе ее развития можно говорить в двух смыслах. Можно говорить от увеличении содержательности теории как об увеличении ее внутреннего многообразия, системы внутренних связей. Введение в рассмотрение каждого нового объекта увеличивает многообразие связей внутри теории и тем самым обогащает ее. При таком понимании содержательности мы рассматриваем математическую теорию саму по себе, без ее связей с внешним миром и с информацией об этом мире, но только в плане богатства и многообразия ее внутренних связей.

Можно говорить об увеличении содержания математической теории в другом смысле, а именно как об увеличении ее информационной емкости, способности к отражению, к кодированию в своих терминах, информации об эмпирическом мире. Математическая теория, очевидно, увеличивает свои потенции в этом отношении по мере своего развития, и в частности, по мере введения целесообразных определений.

Любая аксиоматика исключительно бедна в плане информационной емкости. В терминах объектов и отношений, зафиксированных в аксиомах, невозможно сказать ничего существенного об окружающем мире. И это понятно. Человек в реальном мире имеет дело не с идеальными точками и плоскостями, но с треугольниками, сферами, площадями, объемами и т. д. Практически ценная информация о мире может быть отражена в математической теории только на определенном уровне сложности математических определений.

Таким образом, в процессе развития математической теории она увеличивает свое содержание в плане внутреннего богатства отношений и в плане своих возможностей применения, адекватного отражения информации о реальных объектах. Речь здесь идет, очевидно, о двух сторонах единого процесса, хотя и о сторонах существенно различных: обогащение внутреннего содержания (многообразия) математической теории не всегда имеет своим следствием увеличение ее информационной емкости. История математики говорит о том, что существуют разделы математического знания, на данном этапе бесперспективные, истощившие запас плодотворных идей. Развитие этих разделов в плане увеличения внутреннего многообразия обычно продолжается (через введение новых определений), но оно уже не сопровождается увеличением эффективности этой теории в целом. Практические запросы к математике исторически обеспечивают здесь определенное равновесие: увеличение внутренней содержательности математического знания, даже если оно происходит вне зависимости от непосредственных запросов, в конечном-то итоге идет в направлении увеличения информационной емкости математического знания в целом. В этом проявляется вторичность математики по отношению к эмпирическому знанию и относительность ее внутренней свободы.

Но, может быть, можно думать, что дополнительная информация, которую мы получаем посредством введения новых определений, была уже также имплицитно заложена в аксиомах. С чисто логической точки зрения информативность определений может быть поставлена под сомнение. «Определение — не предложение, — писал в свое время Л. Кутюра, — ибо оно ни истинно, ни ложно; его нельзя ни доказать, ни опровергнуть; это — соглашение, касающееся единственно употребления нового простого знака, подставляемого на место некоторой совокупности знаков... Следовательно, те же самые выводы можно было бы получить (лишь более длинным и сложным путем), обойдясь совершенно без определения и заменив всюду определяемое определяющим. Словом, определение не является ни истиной, ни источником истин: оно не составная часть логической цепи предложений, а лишь удобное вспомогательное средство, средство сокращения»[5].

Такое понимание статуса определений, однако, не может быть принято. Мы имеем все основания утверждать прямо противоположное, а именно то, что определения являются таким же источником истины, каким являются аксиомы, и что теория не может быть адекватно представлена в своем содержании без введения производных определений.

Каждая аксиоматика предполагает минимальную систему объектов для своей реализации. Часть этих объектов явно зафиксирована в аксиомах. Это основные, неопределяемые или, точнее, неявно определяемые объекты теории. Другая часть объектов также непосредственно определена аксиомами, но без их терминологической фиксации. Эти последние объекты, назовем их имплицитными, будучи явно введены, не расширяют минимальной системы объектов, так как они необходимо предполагаются самой аксиоматикой в любой ее реализации. Относительно такого рода производных объектов действительно можно сказать, что они в некотором смысле заданы аксиоматикой и их введение не расширяет информации, содержащейся в аксиомах. Понятие плоского угла, к примеру, не фигурирует в числе основных понятий евклидовой геометрии, но в ряде аксиом речь идет о пересечении прямых в данной точке, и, следовательно, такой объект, как плоский угол, фактически задан аксиоматикой геометрии. В мире, где прямые не образуют углов, аксиоматика геометрии не может быть реализована, ибо ряд аксиом потеряет смысл. Если бы геометрическая теория оперировала только исходными объектами и имплицитно заданными объектами, то можно было бы с полным правом сказать, что она не содержит информации, кроме той, которая уже заложена в аксиомах. Но фактически положение иное. Основная масса производных определений, вводимых в теории, вводит объекты, имплицитно не предполагаемые аксиоматикой. Если понятие угла имплицитно задано аксиоматикой евклидовой геометрии, то уже понятие прямого угла не является таковым. Ни одна из аксиом не требует

пересечения прямых под прямым углом; прямой угол допускается как возможность, как частный случай угла вообще. Мы могли бы не вводить понятие прямого угла вообще без всякого противоречия с аксиоматикой, но в этом случае мы потеряли бы возможность сформулировать ряд важных теорем, в том числе и теорему Пифагора. Этот простой пример показывает, что производные определения теории не заданы аксиоматикой, они находятся к ней не в отношении *необходимости,* но только в отношении *возможности* (допустимости), и, следовательно, каждое такое определение, будучи введено в теорию в качестве необходимого, расширяет и специфицирует мир объектных связей, непосредственно заданных аксиомами, увеличивает потенциальное многообразие этих связей и тем самым привносит в теорию информацию, заведомо не содержащуюся в аксиомах. Это уже ясно из того факта, что изъятие каких-либо определений из теории, не запрещая аксиом, устраняет всю информацию, относящуюся к этим объектам.

Возможность производного объекта (определения) обычно доказывается на основе аксиом. Так, опираясь на аксиомы, мы можем продемонстрировать возможность построения прямого угла и других объектов, непосредственно не заданных аксиомами. Это обстоятельство служит основой убеждения, согласно которому связи, утверждаемые определением, уже в некотором смысле заданы в аксиомах. В действительности это неверно. Обоснование существования производного объекта доказывает лишь совместимость отношений, постулируемых в определении, с отношениями, заданными в аксиомах, но не доказывает никакой логической соподчиненности этих отношений. Из связей, утверждаемых в аксиомах, не вытекает необходимости связей, постулируемых в определении, вследствие чего присоединение производного определения к аксиомам равносильно присоединению новых посылок и расширению базы дедукции.

Таким образом, информация, содержащаяся в математической теории, независимо от того, рассматриваем мы ее как чистую структуру или в предметной интерпретации, вытекает не только из ее аксиом, но и из ее определений. Утверждения: «теоремы вытекают из аксиом» или «аксиомы — это система утверждений, достаточная для вывода всех теорем», строго говоря, неверны. Аксиомы в действительности информативно чрезвычайно бедны и приводят к нетривиальным утверждениям только за счет введения производных объектов, т. е. за счет постулирования новых отношений, не заданных аксиомами.

Механизм содержательного обогащения математической теории в процессе ее развертывания, таким образом, чрезвычайно прост. Аксиоматика задает некоторый абстрактный мир отношений между исходными объектами, который мы постепенно конкретизируем постулированием других отношений через введение производных объектов. Развертывание математической теории представляет из себя, таким образом, постоянную конкретизацию и усложнение ее совокупного объекта, чем и порождается в конечном итоге все многообразие ее внутреннего содержания. Математическая теория отнюдь не закрытая система, даже если она не выходит за рамки заданных аксиом; мы постоянно обогащаем ее развертыванием системы ее объектов, что с логической точки зрения равносильно привнесению новых исходных предположений. То, что мы обычно называем аксиоматикой, — это не все дедуктивные предположения теории, но лишь та их часть, которая относится к простейшим ее объектам, лежащим в основе определения всех других ее объектов Но как мы уже говорили, производный объект, определенный в некотором исходном языке, отнюдь не имплицитный объект, без которого данная аксиоматика не может быть реализована. Введение данного объекта, утверждение системы связей, которую он предполагает в качестве необходимой, представляют собой новое основание для дедукций и принципиальное обогащение внутреннего многообразия теории. Можно сказать поэтому, что любая математическая теория опирается в действительности на огромное количество исходных предположений, соизмеримое в целом с числом ее производных определений. Вместо высказывания «теоремы вытекают из аксиом» справедливо было бы говорить, что теоремы вытекают из определений, при ограничениях накладываемых аксиомами на основные объекты теории.

Общая логическая ситуация может быть опреде-

лена также следующим образом: аксиоматика, утверждая ряд необходимых отношений, задает бесконечное многообразие возможных объектов и отношений, совместимых с ней (но не заключающихся в ней). Развитие математической теории опирается на то, что мы постулируем в качестве необходимых определенную часть этого возможного мира отношений, и тем самым конкретизируем и обогащаем аксиоматику. Действительное содержание математической теории относится не к системе отношений, прямо или имплицитно заданных аксиоматикой, но ко всей системе отношений, которую мы приняли в качестве необходимой посредством введения производных определений. Утверждая в качестве необходимых отношения, имплицитно не утверждаемые аксиоматикой, мы выходим за пределы аксиоматики, накладываем дополнительные ограничения на систему аксиом, т. е. конкретизируем и обогащаем содержательное основание дедукции.

Механизм содержательного обогащения теории через введение определений совершенно очевидным образом проявляется и вне математики. Законы механики в чистом виде, относящиеся к движению материальных точек и систем таких точек, не говорят еще ничего о траектории движения Земли, о времени солнечных и лунных затмений и т. д. Никакой информации такого рода эти законы в себе не содержат. Для получения подобной информации надо, очевидно, прибавить к законам механики описание Солнечной системы в понятиях механики, постулировать наличие определенных сил и расстояний, которые ни в какой форме не содержатся в чистой механике. Откуда же в таком случае следует информация о характере движения солнечной системы и эволюции ее состояний? Очевидно, что не только из законов механики, но из тех ограничений, которые были положены на эти законы применительно к данному случаю. Поппер, несомненно, прав в своем утверждении, что из одних универсальных законов природы нельзя получить ничего существенного [6].

Действительная тайна математического языка состоит не в мнимом богатстве аксиоматики, но в богатых возможностях определения производных объектов на базе незначительного числа исходных объектов и отношений, т. е. в богатстве конструктивных возможностей, которые могут быть заложены в простейшей системе исходных идеализаций. Прежде всего обычный содержательный язык должен быть объяснен в этом отношении. Выразительные возможности формализованных языков являются, по-видимому, лишь наиболее ярким проявлением конструктивности абстрактного мышления вообще.

Информативный вывод оказался возможным в силу того, что к законам механики, утверждающим нечто о действии сил вообще, мы прибавили представление о конкретной форме сил и конкретной конфигурации тел. Оба этих компонента дедукции независимы. Законы механики совместимы с предположением о силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния, но совсем не предполагают их в качестве необходимых. Богатство внутреннего содержания механики определяется не самими законами механики, но введением конкретных сил и конкретных объектов, не заданных законом механики как таковыми.

Введение каждого производного определения в математике совершенно аналогично введению конкретных сил и объектов в механике. Благодаря такому введению общее ограничивается частным, и совокупная система выводов отражает содержание как аксиом, так и определений. Для физики понимание этого обстоятельства не вызывает никаких затруднений, ибо мы ясно отличаем теоретические принципы от описания конкретного объекта, которое берется из опыта. Определения же в математической теории строятся в рамках самой теории и как бы принадлежат этой теории. В действительности, однако, это различие совершенно несущественно. Информация об изобретенных объектах, какими являются объекты математической теории, столь же независима от информации, содержащейся в аксиомах, является не менее внешней по отношению к ним, как и описание конкретных сил и объектов, имеющих место в реальности от аксиом механики. В обоих случаях эта информация не предполагается аксиомами и, следовательно, прибавляется к ним в качестве дополнительной базы вывода.

Распространенный аргумент за сводимость содержания математической теории к содержанию аксиом покоится на логическом принципе элиминации производных определений из теории. Если теория корректно представлена в аксиоматической форме, то каждое новое ее определение вводится на базе предыдущих, а это значит, что, двигаясь назад, мы всегда можем устранить производные определения из теории, записав все ее положения только на языке аксиоматики. Отсюда делается вывод, что определения играют в теории только роль удобных сокращений и потому могут быть устранены из нее без ущерба для ее содержания.

Этот аргумент, однако, ошибочен. Он основан на смешении определения как некоторого описания объекта и знака (термина), которым этот объект обозначается. Все производные знаки можно, конечно, удалить из теории, не уменьшая ее содержания. В этом случае в теоремах вместо данного знака (термина) будет фигурировать описание определяемого объекта. Вместо утверждения: «Сумма углов треугольника равна $2d$», мы будем говорить: «Сумма всех углов, получающихся при взаимном пересечении трех прямых таким образом, что каждая из них пересекается с двумя остальными, равна $2d$». Теорема еще бы более усложнилась, если бы мы попытались элиминировать понятие угла и прямого угла. В обычном языке такая теорема уже не выглядела бы осмысленной в силу своей громоздкости, но при формализованном представлении геометрии такая элиминация, несомненно, осуществима: ее возможность вытекает из того допущения, что определение треугольника представляет собой правильно построенную формулу в формализованном языке геометрии.

Положение о том, что все термины математической теории выразимы на языке аксиом, несомненно, верно. Оно совершенно тривиально и вытекает из самых общих условий построения дедуктивной теории. Однако такая редукция теории к языку аксиом никак не означает сведения содержания теории к содержанию аксиом. Чтобы сохранить содержание геометрических утверждений о треугольнике, мы, несомненно, должны сохранить определение треугольника. Устраняя из языка сам термин «треугольник», мы не устраняем его определения как описания некоторой целостной системы отношений, которой мы приписываем те или иные свойства именно как целостности. Действительное устранение понятия треугольника привело бы к немедленному содержательному обеднению геометрии, к устранению всех положений, которые опираются на это понятие. Другими словами, если мы оставляем теорию содержательно адекватной самой себе, то мы должны сохранить конфигурации примитивных терминов, соответствующие всем производным определениям. Такого рода конфигурации, хотя они записаны на языке аксиом, не являются необходимыми с точки зрения аксиом, и принятие их должно истолковываться в качестве ограничений, налагаемых на аксиомы извне. Сказанное означает, что нельзя смешивать два понятия: сведение языка теории к языку аксиом и сведение содержания теории к содержанию аксиом. При реализации первого мы не осуществляем второго.

Итак, необходимо заключить, что развитие математической теории связано с постоянным ростом ее содержательности или информативности. Аксиомы по своему содержанию несравненно беднее, чем вся совокупность выведенных из них теорем. Дело, однако, здесь не в нарушении тавтологичности доказательств. Система математических теорем не вытекает из аксиом, но вытекает из определений объектов, при ограничениях, накладываемых аксиомами. Аксиомы никогда не заключают и не могут заключать в себе всего содержания математической теории.

Логицистская и формалистская философия математики выработали ограниченный взгляд на определения как на простые сокращения языка, введение и устранение которых безразлично для содержания теории. В действительности, однако, определения являются средством расширения спецификации совокупного объекта теории и основой прироста ее внутреннего содержания. Здесь нужно провести различие между актуальной и потенциальной информацией определения. Каждое определение несет актуальную информацию в том смысле, что оно утверждает наличие некоторой связи, не вытекающей из аксиом. Но это введение новой связи открывает возможность нового анализа других связей и, таким образом, содержит в себе информацию, раскрываемую только в

процессе исследовательской работы. Доказательство, в процессе которого не вносится никаких новых определений, совершенно тавтологично, так как оно сводится лишь к проявлению имплицитной (потенциальной) информации, заданной в уже имеющейся совокупности аксиом и определений.

Ответ на вопрос, является ли доказательство тавтологичным по отношению к аксиомам, таким образом, прямо зависит от того, что́ использовалось в доказательстве, кроме аксиом. Если в процессе доказательства вводились новые определения, то по отношению к аксиомам такое доказательство может быть нетавтологичным, т. е. оно может утверждать связи, имплицитно не заданные в аксиомах. Если же все необходимые определения мы поместим в класс посылок, то по отношению к этому классу любое доказательство совершенно тавтологично. Доказательство как простая дедукция не выходит за пределы информации, объективно содержащейся в посылках.

При интерпретации математической теории в сфере эмпирического знания мы имеем ряд интерпретированных аксиом и определений, которые и составляют базу всех содержательно значимых выводов. В процессе доказательств мы можем прибегать и к неинтерпретированным математическим определениям (это не запрещено, если эти определения совместимы с аксиомами), но эти определения служат лишь средством промежуточных формальных преобразований; они исключаются из результата как не имеющие смысла. Вся система умозаключений опирается на интерпретированные положения и представляет из себя систему тождественных преобразований, систему логических и математических переходов, нацеленных на то, чтобы выявить информацию, содержащуюся в законах (теоремах) и в описаниях реальных объектов (определениях). Математическое доказательство в эмпирической науке, таким образом, всегда тавтологично, ибо оно не принимает в расчет никакой информации, кроме той, которая задана с самого начала в интерпретированных аксиомах и определениях.

Именно в тавтологичности доказательства состоит основная ценность его для науки. Доказательство, которое не было бы тавтологичным, т. е. привносило бы в следствие информацию, не содержащуюся в посылках, было бы совершенно бесполезным для научного языка, пока бы мы не изобрели способов фиксировать и устранять такого рода неконтролируемую информацию.

3. О приросте информации в доказательстве

Как уже было сказано выше, разрешить парадокс дедукции можно в принципе и более радикальным путем, а именно путем отказа от тавтологичности математического доказательства, т. е. от того естественного для всякого математика предположения, что в следствиях содержится только то, что уже заключено в посылках. Этот путь был реализован Я. Хинтиккой, который развил специфическое представление о процедуре математического доказательства, в котором предполагается прирост информации при переходе от посылок к следствиям и, таким образом, отрицается полностью традиционное представление о тавтологичности математических выводов. С точки зрения, изложенной выше, такое положение совершенно недопустимо, так как находится в противоречии с основной функцией математики. Мы рассмотрим, однако, ход рассуждения Хинтикки, так как речь идет здесь о понимании самой сути математического метода.

Хинтикка исходит из понятия семантической информации, которая в целом согласуется с шенноновским пониманием информации события. Информация, по Шеннону, измеряется вероятностью события. Если I — информация, а p — вероятность события, то $I = -\log p$. Чем менее вероятно событие, тем большую информацию мы получаем при сообщении о его наступлении, и, наоборот, сообщение о наступлении события, которое соответствует нашим ожиданиям, несет малую информацию или не несет ее вообще. Если, к примеру, поезд приближается к станции, где имеется 8 путей, то информация о том, что он должен будет проехать по какому-то одному из этих путей, для машиниста равна нулю. Сообщение о том, что он должен будет проехать по первому или восьмому пути, уже существенно положительна, ибо она иск-

лючает 6 возможностей. Если информация определяется через логарифм по основанию два, то он получает в этом случае информацию, равную 2 единицам (битам). Наконец, машинист получает полную информацию (3 бита), когда ему указывают строго определенный путь следования. Получение информации, таким образом, может быть понято как устранение неопределенности в наших знаниях о некоторой ситуации. Такое понимание вполне соответствует обычным представлениям о количестве и ценности информации. Шенноновская мера информации играет важную роль в теории связи и кибернетике, где мы имеем дело с достаточно ясным распределением вероятностей между альтернативными событиями.

Определение информации через вероятность было дано К. Шенноном в 1949 г. Несколько позднее Р. Карнап и И. Бар-Хиллел приложили его к теоретической логике, введя понятие так называемой семантической информации. Суть этого понятия можно проиллюстрировать на простых примерах из логики высказываний. Пусть мы имеем два элементарных высказывания: p и q и логические связки: «и» (&), «или» ($\vee$) и «не» (—). Исходя из данного материала и правил построения производных высказываний мы можем построить, вообще говоря, бесконечное количество правильных формул, различных по своей длине и конфигурации. Оказывается, однако, что любая из этих формул по своему значению истинности-ложности будет тождественна некоторой правильной части формулы $pq \vee \bar{p}q \vee p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q}$, состоящей из дизъюнкции четырех конъюнкций. Эту формулу будем называть формулой возможных миров для двух переменных, ибо ее составные части (конституэнты) выражают не что иное, как все возможные соединения данных элементарных высказываний друг с другом в их утвердительной и отрицательной формах. Если мы возьмем высказывание p, то оно тождественно высказыванию $pq \vee p\bar{q}$, т. е. дизъюнкции 1-й и 3-й конституэнт. Высказывание $p \vee q$ будет соответствовать дизъюнкции первых трех конституэнт и т. д. Каждая формула исчисления высказываний запрещает определенное число конституэнт в формуле возможных миров или, иначе говоря, исключает определенное число состояний логического универсума, что дает нам возможность определить «вероятность» этой формулы по отношению к универсуму в целом, а следовательно, и задать некоторую величину, которую можно назвать информативностью данной формулы. Так как формула p тождественна двум конституэнтам из четырех, то ее вероятность будет равна 1/2, а информативность — одной единице. Информативность формулы $p \vee q$ будет выражаться меньшей величиной, так как ее вероятность по отношению к универсуму больше. При таком подсчете информация, содержащаяся в законе исключенного 3-го, будет равна нулю, а в формуле, выражающей противоречие, — бесконечности.

Вычисляя информацию высказывания подобным образом, мы не говорим здесь о его смысловой, предметной информации, мы совершенно отвлекаемся здесь от смысла утверждений p и q. Все эти высказывания, по нашим правилам, равновероятны и равноинформативны, хотя в действительности они могут обозначать высказывание совершенно различной информации. Говоря об информации формулы в указанном контексте, мы выясняем в действительности не меру ее предметной информации, а меру ее включенности в универсальное многообразие формул, степень ее удаленности от тавтологии, степень зависимости других формул от утверждения ее истинности или ложности. Этот момент важно подчеркнуть, чтобы понять существенную условность понятия семантической информации; мы определяем здесь некоторую численную величину, заданную по аналогии с определением информации в кибернетике, но ясно, что эта величина имеет лишь весьма косвенные отношения к реальной информативности высказываний в обычном смысле этого слова.

Мы видим, что решающим обстоятельством, позволяющим ввести величину семантической информации, является наличие формулы возможных миров, по отношению к которой каждое конкретное высказывание находит свое место, отождествляется с какой-то ее частью (подформулой). Выдающееся достижение Хинтикки как логика состоит в том, что он открыл способ построения таких формул также и для исчисления предикатов. Каждая формула логики, приведенная к определенному стандартному виду, который Хинтикка называет дистрибутивной нормальной формой (*ДНФ*), оказывается теперь определенной частью формулы возможных миров. Другая часть формулы возможных миров исключается данной формулой, и количество исключаемых конституэнт определяет информацию данной формулы по тому же правилу, которое мы применяли выше для определения информации формул исчисления высказываний.

Хинтикка доказывает, что каждая конституэнта любой дистрибутивной нормальной формы может быть в свою очередь разложена на несколько конституэнт посредством тождественных логических преобразований. Так как эта процедура применима и к новым конституэнтам, то мы получаем представление исходной формулы в виде расширяющегося дерева конституэнт, так что конституэнта глубины d тождественна дизъюнкции конституэнт более высокого порядка глубины. Каждая формула логики, таким образом, может быть представлена в ДНФ на определенной глубине, причем эта глубина может возрастать неограниченно.

Информация формулы на глубине d называется поверхностной информацией глубины d. Предел, к которому стремится поверхностная информация формулы при $d \to \infty$, называется ее глубинной информацией. Конституэнту будем называть тривиально (явно) противоречивой, если она содержит в себе P и $\bar{P}$, где P — некоторый предикат. Конституэнта противоречива нетривиально (скрыто), если ее противоречивость не может быть раскрыта без дальнейшего ее разложения, т. е. без увеличения уровня представления формулы.

Решающее положение Хинтикки с точки зрения обсуждаемой здесь проблемы состоит в том, что при переходе от одного уровня представления формулы к другому ее информация не сохраняется. Из факта неразрешимости исчисления предикатов следует, что не может быть указано универсальной процедуры обнаружения противоречивых конституэнт, но Хинтикка доказывает, что противоречивая формула неизбежно обнаружит свою противоречивость на некоторой глубине ее представления в ДНФ: скрытая противоречивость на глубине d неизбежно приведет к тривиальной противоречивости на некоторой глубине $d+e$. Возвращаясь назад, мы можем зафиксировать и отбросить как ложные нетривиально противоречивые конституэнты предыдущего уровня.

Отсюда уже следует, что тождественные логические преобразования не сохраняют информацию формул. Действительно, информация определяется отношением конституэнт из формулы возможных миров, представляющих данную формулу, к общему числу конституэнт, составляющих формулу возможных миров. Чем меньше это отношение или чем больше данная формула исключает возможных состояний как ложных, несуществующих, тем больше ее информативность. При переходе от одного уровня представления формулы к другому ее информативность может сохраняться только в одном случае, а именно тогда, когда при этом переходе ни одна из конституэнт, которую мы считали истинной на предыдущем уровне, не окажется противоречивой на другом уровне (или с точки зрения другого уровня). В противном случае информация возрастает, ибо при обнаружении и отбрасывании скрыто противоречивых конституэнт указанное отношение уменьшается. Исходная формула будет отождествляться с относительно меньшей частью конституэнт формулы возможных миров и, следовательно, будет более информативной, согласно принятому определению информации.

Тем самым Хинтикка доказывает следующие положения: 1) информация любой формулы изменяется в зависимости от уровня ее представления; 2) тождественное преобразование увеличивает информацию, поскольку оно связано с переходом на более глубокий уровень представления формул и с устранением неявно противоречивых конституэнт. Последнее утверждение Хинтикка распространяет на любые логические преобразования, и в частности на процедуру доказательства, вывода следствий из посылок.

Вывод F из G может быть представлен как выявление некоторой зависимости между формулами в ДНФ, представляющими соответственно G и F. Для такой интерпретации вывода требуется прежде всего построить формулу возможных миров, использующую все средства, заключенные как в G, так и в F. Приведем затем G и F к ДНФ и будем при необходимости увеличивать глубину представления, дополняя каждую из этих формул предикатами и переменными, которые содержатся в другой формуле, но не содержатся в ней. F следует из G тогда и только тогда, когда на некотором n-м уровне представления обеих формул оказывается, что формула F содержит все конституэнты, содержащиеся в G[7]. На $n-1$-м уровне вывод не происходит вследствие того, что в G содержится некоторая конституэнта S_i, которая не содержится в F. На n-м уровне вывод оказывается возможным, так как конституэнта S_i элиминируется как противоречивая. Хинтикка делает отсюда вывод, что доказательство из посылок связано с элиминацией скрыто противоречивых конституэнт, а следовательно, и с приростом семантической информации. «Всякая нетривиальная дедукция, — пишет он, — представленная в вышеописанной форме, включает увеличение первоначальной глубины предложения, показывающее, что некоторые конституэнты, не являющиеся тривиально противоречивыми, на самом деле противоречивы. Как указывалось ранее, результатом этого является перераспределение некоторых весов. Если теперь F исключает больше весомых альтернативов, чем прежде, то поверхностная информация F возрастает, так как оказывается, что она больше ограничивает неопределенность, чем делала это прежде. В этом смысле дедукция может увеличивать поверхностную информацию... Таким образом, поверхностная информация представляет собой совершенно объективный вид информации, способной возрастать в процессе дедукции»[8].

Хинтикка делает отсюда заключение о принципиальной нетавтологичности математического доказательства. «Логическое и математическое доказательство, — пишет он, — часто требуют немалой изощренности. Результаты же подобных доказательств нередко открывают перед нами совершенно новые перспективы, позволяют увидеть что-то в совершенно новом свете, дают нам новое понимание предмета. Тем не менее многие философы уверяют нас в том, что истины логики, а возможно, и всей математики не более, чем набор тавтологий. ...Однако результаты, полученные нами, решительно противоречат подобному взгляду. Наше понятие поверхностной информации дает нам меру информации, которая может увеличиваться в процессе логических и математических рассуждений»[9].

В концепции Хинтикки имеются некоторые логические неясности. В частности, на наш взгляд, недостаточно определен сам смысл утверждения о приросте информации в доказательстве. Можно представить себе этот прирост таким образом, что выводимое утверждение F будет содержать большую информацию, чем утверждение G, являющееся посылкой. Но такого прироста, очевидно, не происходит. Логический переход от G к F осуществляется, как мы видели, благодаря такому соотношению G и F, при котором все конституэнты, содержащиеся в G, содержатся в F. Но поскольку оценка информативности этих формул проходит теперь по отношению к единой формуле возможных миров, построенной из материала, содержащегося как в G, так и в F, то при соблюдении условий вывода информация G всегда будет больше информации в F, что вполне согласуется с общим гносеологическим представлением о тавтологичности доказательства.

Можно понять прирост информации в доказательстве также в том смысле, что информация, содержащаяся в F после доказательства, больше информации этого же утверждения до доказательства. Такое понимание, однако, также не вытекает из рассуждений Хинтикки. Переход от G к F осуществляется, по Хинтикке, построением двух последовательностей формул $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и соответственно $F_1, F_2, \ldots, F_n$, где индексы обозначают уровень глубины, на котором представлены обе формулы. Доказательство основано на схеме $(G \equiv G_n)$, $(G_n \rightarrow F_n)$, $(F_n \equiv F) \rightarrow (G \rightarrow F)$. То, что Хинтикка доказывает своим рассуждением, состоит в том, что для вывода F из G мы должны пройти через аналоги F и G, обладающие большой информацией. Но так как мы все-таки доказываем утверждение F, а не F_n (такова наша задача), то мы доказываем утверждение с информацией F, т. е. мы получаем, обосновываем именно ту информацию, которая и содержалась в этом утверждении в исходной его формулировке.

Реальный смысл идеи прироста информации, который можно извлечь из рассуждений Хинтикки, состоит, по-видимому, только в том положении, что для доказательства утверждения из аксиом мы должны выйти за пределы информации, содержащейся непосредственно в аксиомах, и обратиться к анализу логически тождественных им, но более информативных утверждений. В этом плане, по-видимому, прав В. Н. Брюшинкин, который утверждает, что нужно говорить не о возрастании информации в доказательстве, но только о возрастании информации в процессе поиска доказательства[10].

Не совсем проясненным представляется также и следующий момент. Переход к более глубоким уровням представления формулы в ДНФ связан у Хинтикки с устранением нетривиально противоречивых конституэнт. Но откуда берутся такого рода конституэнты? Допустим, что мы ведем рассуждение в некоторой непротиворечивой теории. Так как переход от n-го уровня представления формулы к $n+1$-му осуществляется посредством тождественных логических преобразований, то противоречивость отдельных конституэнт не может проистекать из предмета рассуждения, из информации исходных формул. Но если такие конституэнты появляются, то они проистекают только из характера используемого логического языка, и их отбрасывание не должно сказываться на информативности оставшихся конституэнт. В концепции Хинтикки не проведено достаточного различия между противоречивыми конституэнтами, отражающими противоречия в предмете рассуждения (в исходных посылках), и противоречивыми конституэнтами, появляющимися в любой теории в силу специфики используемых преобразований. Если математическая теория непротиворечива, то отбрасывание противоречивых конституэнт, поскольку они носят чисто языковый характер, не означает, что мы уточняем смысл исходной формулы, отсекаем какие-то ложные альтернативы, и поэтому недостаточно для вывода о том, что формула F_n содержит больше информации, чем формула F.

Эти соображения, касающиеся логических деталей концепции Хинтикки, не являются для нас главными. Основной вопрос, который нас интересует, состоит в следующем: «Достаточно ли доказанное Хинтиккой изменение поверхностной информации в доказательстве для опровержения традиционных представлений о тавтологичности математического доказательства?»

Ответ, на наш взгляд, может быть только отрицательным.

Традиционное представление о тавтологичности доказательства опирается на общее гносеологическое представление о содержании (информативности) утверждения как о степени фиксации какого-то реального положения дел. Именно в этом смысловом контексте все философы были согласны в том, что математическое доказательство тавтологично, что доказанное утверждение не несет никакой информации, не заключенной в посылках. Это положение, очевидно, не может быть отвергнуто на основе какого-то специального логического понятия информации.

Основным методологическим условием применимости формального языка к исследованию содержательной проблемы является соответствие понятий и отношений этих двух областей. Математическое понятие производной отражает основные свойства скорости как стороны физических процессов, и именно поэтому математическая теория движения оказывается плодотворной. Между понятием двух областей должно быть установлено достаточно бесспорное соответствие, некоторый род изоморфизма, для того чтобы мы могли надеяться, что математические заключения будут отражать положение дел в реальности. Точность математических выводов всецело определяется точностью исходной интерпретации, точностью математической модели по отношению к реальной ситуации.

Шенноновское понятие информации, на основе которого определяется семантическая информация, само не является точным, оно не отражает множества ситуаций уже в области техники, и оно, очевидно, не отражает того смысла, в котором это слово употребляется в теории познания. Но если шенноновское определение информации все-таки содержательно, оно опирается на понятие вероятности реальных событий, то семантическое понятие информации исходит лишь из формы языка и устанавливает отношение, которому нельзя придать какого-либо смысла по отношению к реальной информации суждений. Самое большее, это понятие отражает некоторую внутреннюю структуру языка и место данного утверждения в данном языке, его вес в формальной структуре. Такое понятие может быть полезным для исследования структуры формальных языков, но оно не может априори претендовать на отражение понятия информации, которое вырабатывается в плане гносеологической характеристики этих языков. Мы имеем здесь дело с некоторой величиной, которая определена по аналогии с понятием информации, которая может увеличиваться и уменьшаться в процессе логических преобразований, но отсюда не следует, что изменение этой величины имеет отношение к изменению реальной информативности математических суждений.

Более того, если бы нам удалось построить в рамках логики понятие информации, более адекватное ее гносеологическому пониманию, то тавтологичность доказательства никогда не была бы этим опровергнута, ибо, как мы уже говорили, она сама была бы первым конститутивным требованием к мере этой информации.

Концепция Хинтикки, таким образом, ни в какой мере не может быть противопоставлена традиционному философскому учению о тавтологичности доказательства.

Сам Хинтикка здесь не очень последователен или, по крайней мере, неточен. В большинстве случаев он прямо противопоставляет свою концепцию поверхностной информации философскому учению о тавтологичности доказательств, тому воззрению, что математическое доказательство представляет собой лишь проявление того, что неявно утверждается в посылках[11]. В других же местах он вносит коррективы, существенно меняющие позицию. В статье «Поверхностная информация и глубинная информация» (1970) он пишет: «Философы, придерживающиеся такой точки зрения (логические и математические доказательства тавтологичны — В. П.), основывают свое мнение на одном безусловно верном и важном соображении, а именно на том, что в каком-то смысле логический вывод не дает нам новой информации о реальности, сверх того, что уже и так содержится в посылках этого вывода. Однако это не снимает вопроса о том, какого типа информацию дают нам логические и математические аргументы»[12]. Но в таком случае концепция прироста информации противопоставляется уже не философскому утверждению о тавтологичности доказательств, но лишь связанному с ним субъективистскому (психологическому) объяснению новизны в математике. Хинтикка проводит здесь мысль о том, что тавтологичность доказательства в общем философском смысле не исключает того, что каждое доказательство несет для нас некоторую информацию, которая совсем не субъективна, но дает нам принципиально новую точку зрения на вещи. Прирост поверхностной информации выдвигается здесь в качестве объективного основания и объяснения нашего убеждения в обогащении математики посредством доказательств.

При таком подходе вопрос о тавтологичности доказательства в его философской трактовке отодвигается на второй план. То, что мы действительно должны здесь выяснить, состоит в следующем: что значит новизна математического результата, откуда рождается представление о его большей или меньшей информативности, какова объективная основа нашего убеждения в высокой информативности некоторой теоремы? Хинтикка, как мы видим, полагает, что мы можем ответить на эти вопросы, исходя из анализа самого доказательства, а именно из факта прироста поверхностной информации: наше убеждение в содержательности вывода не субъективно, поскольку ему соответствует увеличение информации в ее логическом определении.

Это положение Хинтикки остается, однако, недоказанным. Нет никаких аргументов за то, что семантическое определение информации соответствует в достаточной мере нашим содержательным представлениям об относительной информативности суждений, и, следовательно, нет оснований утверждать, что изменение величины, которую мы назвали поверхностной информацией, имеет какое-либо отношение к нашим интуитивным представлениям о приросте информации в математическом доказательстве. В концепции Хинтикки недостает акта интерпретации,

на основе которой формальные модели только и могут рассматриваться как имеющие силу в некоторой содержательной области.

Изложенная выше концепция определений отчасти позволяет ответить на эти вопросы. Если доказательство таково, что в процессе его вводятся нетривиальные определения, то оно несет новую и объективную информацию в том смысле, что в его выводе выявляется информация, содержащаяся в этих определениях и не содержащаяся в исходных посылках (аксиомах). Хинтикка прав в своем убеждении, что доказательства как-то обогащают теорию, выводят ее за пределы информации, заключенной в аксиомах.

Он высказывает также идею, что увеличение информации связано в конечном итоге с введением в рассуждение новых объектов[13]. Этот последний вывод говорит о значительной эвристической силе концепции дистрибутивных нормальных форм, но тем не менее мы не можем придавать ее выводам доказательного значения. Дистрибутивные нормальные формы не являются адекватной моделью реального доказательства в его информационном аспекте уже потому, что новые предикаты вводятся в эту модель лишь через формы с нулевой информацией вида $P\vee\vee\bar{P}$, что, конечно, не соответствует информационному эффекту введения новых объектов в процессе реального доказательства.

Адекватное обоснование прироста информации в доказательстве может быть получено только на основе гносеологической его теории, через анализ информативности определений в общем гносеологическом понимании информации. Содержательное гносеологическое рассуждение здесь, как и во многих случаях, более адекватно, чем заключение на основе строгих моделей, корректность которых по отношению к содержанию проблемы остается недоказанной.

Логический подход к анализу информативности доказательства ограничен и в том отношении, что содержательная информативность, которую мы связываем с результатами математического рассуждения, обусловлена во многом факторами внелогического порядка.

4. Психологическая новизна доказательства

По отношению к математической теории о приросте информации можно говорить в двух смыслах. Прежде всего это онтологический прирост — увеличение внутреннего многообразия связей посредством введения новых определений. Математическое доказательство в этом плане тавтологично, оно не выходит за пределы информации, объективно заданной аксиомами и принятыми определениями.

Но можно говорить о приросте информации как о раскрытии этих связей, о превращении вещи в себе, какой является объективно заданная неявная информация, а вещь для нас, т. е. в явно сформулированные и доказанные утверждения математической теории. В этом смысле математическое доказательство в высокой степени информативно, ибо математическое рассуждение как никакое другое обладает психологической неожиданностью выводов и даже их парадоксальностью с точки зрения здравого смысла.

Теорема является для нас неожиданной в том плане, что она не является психологически очевидной. Мы хорошо представляем себе треугольник и три медианы, проведенные в нем, но только логическое рассуждение убеждает нас в том, что они должны пересекаться в одной точке. Очевидно, в круг или эллипс можно вписать произвольный шестиугольник, но совершенно неочевидно утверждение, доказанное Б. Паскалем, что стороны такого шестиугольника, будучи продолжены, пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Современный школьник легко усваивает понятие иррационального числа, но бывает удивлен, когда обнаруживает, что иррациональных чисел на числовой прямой несравнимо больше, чем целых и рациональных. Проведение дедукции в математике, как правило, приводит к чему-то глубоко скрытому от здравого смысла, на основе которого были приняты посылки, и плохо вяжется с идеей тавтологичности доказательства. И тем не менее доказательство, конечно, тавтологично. Мы имеем здесь дело не с обогащением связей в объекте исследования, но лишь с их раскрытием, с представлением в явной форме.

Гносеологическая проблема состоит здесь в том, чтобы понять, почему результат логического оперирования с тривиальностями, с очевидностями в психологическом отношении может быть для нас чем-то неожиданным, новым и, в этом смысле, высокоинформативным. Поскольку законы реальной логики «очевидны» для нас, являются, так сказать, частью нашего здравого смысла, то естественно было бы допустить, что из очевидного, психологически ясного нельзя получить ничего такого, что не было бы столь же простым и очевидным. Оставаясь в рамках логики, исходя только из структуры доказательства, мы не сможем объяснить этот типичный для математики переход от тривиального к нетривиальному, от очевидного к неочевидному и высокоинформативному.

Анализ показывает, что такие характеристики математической теоремы, как «новая», «неожиданная», «ценная» и т. п., проистекают из внелогических источников. Степень информативности, которую мы приписываем теоремам, определяется не только структурой доказательства, а некоторым их контекстом, который совершенно теряется при чисто логическом рассмотрении.

Мы имеем здесь общую проблему соотношения логического и психологического. В системе содержательных утверждений, в которых человек убежден на основе опыта, всегда содержится большое число информации, которая недоступна ему непосредственно, которая требует логического их анализа. В этом, собственно, и состоит цель математики — извлечь информацию, скрыто содержащуюся в некоторой системе посылок. Зная исходные принципы, признавая нормы логики и хорошо описывая возможные ситуации, в которых эти принципы могут иметь значение, мы удалены от большинства возможных следствий, хотя они уже объективно предопределены системой наших посылок. Принимая систему связанных друг с другом утверждений, мы задаем некоторый логический универсум, объективную систему связей, которые существуют независимо от субъекта в том смысле, что он, сохраняя посылки, может только исследовать эту систему связей точно так же, как географ исследует материки [14]. Но, будучи полностью заданной в логическом плане, система утверждений является для нас, как правило, непроницаемой психологически: имея в принципе все, мы еще не имеем ничего. И в этом плане ясно, что математическое доказательство, устанавливая связи в системе, дает нам новую информацию, ибо мы ею не обладали раньше и не могли обладать.

Здесь мы имеем дело, конечно, с приростом информации. Эта информация совершенно объективна: она ничем не отличается от информации, которую мы получаем из газет и разговоров о реальных событиях, происходящих в мире. В принципе она может быть как-то измерена. Но совершенно очевидно вместе с тем, что этот прирост информации не является следствием самой логики доказательства. Не каждое, даже сложное, доказательство приводит нас к психологически неожиданному результату, по крайней мере, мера этой неожиданности разная. Степень новизны определяется здесь исключительно степенью удаленности связей логического универсума от наших психологических представлений о нем. Эта степень может быть различной у различных математиков в зависимости от их опыта и выработанного чувства «нормального порядка вещей». Мы имеем здесь дело, таким образом, с психологической новизной.

Всякая новизна связана с приростом информации, и в этом плане нельзя отрицать того, что математическое доказательство выводит за пределы известного и обеспечивает прирост информации. Но этот прирост не имеет никакой связи с тавтологичностью — нетавтологичностью доказательства. Абсолютная тавтологичность и высокая психологическая и познавательная информативность совершенно не противоречат друг другу.

Один из аргументов Хинтикки состоит в том, что если бы доказательство было тавтологичным, то человек не выходил бы за пределы информации, данной в аксиомах, и, следовательно, с самого начала знал бы все, что может быть сказано в рамках этой теории. В действительности, однако, это неверно уже логически: зная аксиомы, человек еще не определяет всех связей теории, ибо он не знает всех значимых для этой теории определений, которые проясняются только в процессе ее развития. Если допустить, что все необходимые определения налицо, то он все-таки

еще ничего не знает, ибо однозначно заданный логический универсум не дан нам психологически. Преодоление парадокса всеведения возможно посредством анализа связи логического и психологического, но не через критику тавтологичности и математического доказательства. Тавтологичное отнюдь не психологически очевидное, и тождество по принципу тавтологии не есть тождество в информации.

Математическое доказательство несет в себе также новизну, которая может быть названа эвристической. Некоторые теоремы, не будучи даже сами по себе психологически неожиданными, могут оказаться полезными в методологическом плане, в плане развития нового взгляда на предмет исследования. Так, доказательство теоремы Эйлера о том, что в многограннике количество вершин, ребер и граней связано соотношением $V-E+F=2$, исторически способствовало осознанию того факта, что в геометрии существуют утверждения, независимые от метрических свойств фигур. Так появилась новая ветвь геометрии — топология, которая существенно обогатила не только геометрию, но и математику в целом. Доказательство, таким образом, может быть интересным не только по своему прямому результату, но с эвристической точки зрения, в плане осознания новых путей развития математического знания. С этой точки зрения сравнительно элементарный и, так сказать, лежащий на поверхности результат может иметь важнейшее значение. Большая эвристическая новизна может заключаться просто в другом порядке изложения материала или в другом подходе к доказательству известной теоремы.

Мы имеем здесь дело также с некоторого рода новизной, с приростом информации, с расширением нашего взгляда на вещи, хотя новизна в этом случае заключается не в психологической неожиданности результата, но лишь в его эвристических потенциях. Эвристическая новизна, очевидно, также не противоречит тавтологичности доказательства: высокая эвристическая ценность теоремы, высокая ее информативность с точки зрения понимания системы идей в целом никак не колеблют его логической строгости, но, напротив, всецело опираются на эту строгость. Именно такого рода высокоинформативные теоремы пользуются наибольшим вниманием математиков и с наибольшей тщательностью проверяются с точки зрения их обоснованности. Известно, что каждый математический курс содержит ряд центральных теорем. Это не обязательно самые трудные теоремы с точки зрения техники доказательства или с точки зрения психологического их восприятия, но самые важные теоремы с точки зрения основных его идей, т. е. теоремы, обладающие наибольшей эвристической ценностью. Такие теоремы не просто хорошо доказаны, они обычно доказаны многими различными путями, что гарантирует их предельную логическую обоснованность. Высокая информативность теоремы, ее предельная логическая обоснованность и тавтологичность не только не противоречат друг другу, но обусловливают друг друга.

История науки показывает, что эвристически ценный шаг не всегда принимается как научное достижение. В «Науке логики» Гегель ставит под сомнение заслуги Ньютона на том основании, что все его математические выкладки являются простой переформулировкой известного. Закон всемирного тяготения, говорил Гегель, уже содержится в законах движения планет, открытых Кеплером, поэтому Ньютон, утверждая этот закон, не говорит ничего нового[15]. С чисто логической точки зрения Гегель прав. Более того, анализ законов Кеплера позволяет вывести закон всемирного тяготения в более точной форме, чем та, в которой он был первоначально сформулирован Гуком и Ньютоном. Методологически же критика Гегеля, конечно, некорректна. Закон всемирного тяготения содержится в законах Кеплера в лишь неявной форме. Кеплер был далек от понимания сил тяготения между планетами, а тем более от идеи всемирного тяготения. Выявление сил тяготения и точное математическое определение их характера имело громадное эвристическое значение и практически определило путь развития небесной механики в XVIII и XIX веках.

Итак, мы опять видим, что выявление скрытой информации может иметь важнейшее значение для науки, хотя путь к ней может быть представлен в виде совершенно тавтологического перехода, в виде простой переформулировки того, что было уже изве-

стно. Тавтологичность в математике сосуществует с громадной эвристической новизной и информативностью.

Наконец, математические доказательства, будучи тавтологичными, могут оказаться новыми и информативными с практической точки зрения. Формула для интегрирования конкретной функции для инженера гораздо более информативна, чем сведения об общих принципах интегрирования и его способах. Для практики нужна теорема, но не система аксиом и определений, из которых она вытекает. Информация, заключенная в системе аксиом, представляется ничтожной и тривиальной по сравнению с информацией, заключенной в самой теореме, хотя логически теорема следует из аксиом.

Можно ли сказать, что мы имеем здесь дело с объективным приращением информации (при переходе от аксиом к теореме)? Безусловно, да. Эта информация является объективной, ибо она открывает новые возможности действия.

Необходимо признать, таким образом, что развертывание математической теории сопровождается постоянным приростом ее информативности с психологической, эвристической и прагматической точек зрения. Во всех случаях мы имеем дело с объективным увеличением информации: математическое доказательство приносит нам либо лучшее понимание внутренних связей теории, недоступных для непосредственного восприятия, либо новое понимание путей ее развития, либо результаты, открывающие новые пути практического действия. В этом пункте, в утверждении факта роста информации в процессе развертывания математической теории Хинтикка, несомненно, прав. Но происходит ли это за счет того, что доказательство само привносит информацию вследствие своей нетавтологичности?

Это чисто логическое объяснение прироста информации выглядит несостоятельным и с точки зрения конкретного анализа ситуаций, в которых мы можем говорить о таком приросте. Существуют, как мы видим, несколько путей прироста информации, существенно отличных друг от друга. Доказательство, мало информативное в эвристическом плане, может оказаться высокоинформативным и новым с практической точки зрения. Простое доказательство может оказаться во всех отношениях более информативным, чем сложное. Оценка информативности результата может зависеть даже от социально-исторического контекста: доказательство информативно с практической точки зрения только на определенном уровне практики. Чисто логический анализ доказательства, абстрагирующийся от внелогического его контекста, таким образом, в принципе неспособен объяснить нашу оценку тех или иных математических результатов как более или менее информативных. Наша интуитивная вера в прирост информации в процессе доказательства связана почти исключительно с этим контекстом, но не с его внутренней логикой.

Поверхностная информация Хинтикки как определенная логическая характеристика математического утверждения интересна сама по себе и она, несомненно, имеет методологическое значение. Но определенно можно сказать, что она не имеет отношения к содержательным представлениям об относительной информативности доказательств, которые каждый математик вырабатывает в практике, и не дает основы для объяснения этих представлений. Эти представления происходят из содержательного контекста доказательств, но не из их логики.

Для адекватного обсуждения вопроса об информативности математического доказательства мы должны четко разделять указанные выше два вида информации. Если речь идет об информации, объективно заданной системой аксиом и определений, то математическое доказательство само по себе не увеличивает ее, и мы не можем здесь говорить о приросте информации в процессе доказательства. Если речь идет о процессе субъективного познания этого объективно заданного множества связей, то доказательство должно быть признано в высшей степени информативным. Но прирост информации в этом случае не может быть объяснен нарушением тавтологичности и вообще не может быть полностью объяснен в контексте чисто логических подразделений.

Хинтикка часто и справедливо критикует позитивистский подход к анализу научного знания, но сам он совершенно последователен в одной из центральных установок позитивистской философии науки:

гносеологические проблемы он стремится во что бы то ни стало трансформировать в проблемы логические и решить на путях логики и анализа языка. В действительности, однако, многие проблемы философии науки заведомо не умещаются в этих рамках. Проблема информативности математического доказательства, несомненно, одна из таких проблем. Интуитивное представление о приращении информации в процессе доказательства, из которого исходит Хинтикка и которое он намерен объяснить, имеет не логическую, но более широкую гносеологическую основу, связанную с развитием и практическим использованием математического знания. В той мере, в которой этот феномен объясняется логически, он вполне объясняется из общей теории определений и не нуждается для своего обоснования в логической теории информации. Очевидно также, что обоснование прироста информации в доказательстве во всех указанных выше смыслах ни в какой мере не ставит под сомнение тавтологичность доказательства и традиционные философские воззрения по этому вопросу.

Философия XVIII века вполне могла принять положение о содержательной законченности математики как науки, которая базируется только на пространственных и количественных отношениях и принципиально ограничена двумя этими типами образов. В XIX веке стала очевидной несостоятельность такого мнения, но при этом сохранялось твердое убеждение в неизменности канона математики, в полной внутренней законченности любой математической теории. Философия математики XX века сделала новый шаг вперед: она впервые дошла до понимания того, что математика является всегда незавершенной не только по своему содержанию, но и по обоснованию своих утверждений и методов. Противоречия и парадоксы, которые понимались до этого как случайные казусы, стали рассматриваться теперь как нечто неустранимое из математики, как одно из проявлений ее развития.

Это воззрение, сближающее математику с эмпирическим знанием, получило, однако, гипертрофированное звучание в современной философии. Критика традиционного идеала математического знания стала всесторонней, и, если верить ее выводам, то этот идеал теперь отвергнут полностью: нельзя больше считать, что мы имеем где-либо строгие и абсолютно надежные доказательства, нет оснований верить в непротиворечивость самых простых теорий, доказательство не является тавтологичным, а логические нормы ненадежны. Мы должны теперь, согласно этой критике, считать математику одним из подвидов эмпирического знания, а веру в ее особое место среди наук в смысле строгости — одной из некритических иллюзий, унаследованных от прошлого.

Анализ ситуации показывает, однако, что для такого рода глобальной критики математического метода нет никаких оснований. Результат, к которому мы приходим, состоит в том, что большая часть

этой критики основана на элементарных смешениях гносеологического порядка и на неадекватном истолковании результатов современной метаматематики. Мы можем определенно утверждать, что обычные содержательные доказательства являются предельно достоверными в том смысле, что, будучи однажды приняты, они не могут быть отвергнуты каким-либо дополнительным анализом или контрпримерами, хотя и могут быть восполнены в плане экспликации аподиктических интуиций, что логические нормы, принятые в рамках обыденного мышления, являются абсолютно надежным фундаментом для математики и что, наконец, не существует каких-либо принципиальных ограничений на пути внутреннего (логического) обоснования математических теорий. Хотя в прикладных разделах мы можем допускать существенные ослабления строгости, нет никаких оснований утверждать, что математика в своей теоретической части утрачивает обычный для нее уровень строгости в каком-либо из ее компонентов и сливается с эмпирическим знанием.

Как уже говорилось, обычная методологическая установка физика в случае расхождения предсказания с опытом состоит в том, чтобы искать ошибку в физической модели, но не в математических преобразованиях, если они подтверждены в своей корректности. Проведенное рассмотрение позволяет утверждать, что такая вера в надежность математики вполне оправдана гносеологически. Здесь мы имеем тот случай, когда практическая установка оказывается более правильной, чем теоретические построения, доказывающие ненадежность математики из некоторых абстрактных соображений.

Обсуждая концепцию Кальмара, И. Бар-Хиллел вполне резонно поднимал вопрос: насколько копперовская и вообще эмпирическая методология науки применима к математике?[1]. Анализ вопроса позволяет вынести здесь вполне определенное решение: адекватная философия математики не может быть построена на аналогиях с эмпирическим знанием.

В начале века Рассел разрабатывал свою методологию на математике с тем, чтобы применить ее затем ко всему остальному знанию. Суть усилий Лакатоса и его последователей состоит в том, чтобы продвинуться в обратном направлении. Но почему мы должны вообще верить, что математика и эмпирическое знание подчиняются в конечном итоге единой методологии?

История науки знает много тщетных попыток объединения разнородного. В XVII веке стремились ввести в философию методы геометрии. В XVIII веке было приложено много усилий, чтобы построить социологию по образцу физики. В XIX и XX вв. позитивизм отвергал традиционную философию потому, что она не удовлетворяла стандартам эмпирического знания. В настоящее время мы часто и довольно легко говорим о возможности математизации гуманитарных наук, предполагая, что за исключением несуществующих мелочей, они подобны наукам естественным. К чести философов надо сказать, что некоторые из них уже в прошлом веке говорили о методологическом плюрализме и глубокой специфике отдельных наук[2]. Что же касается практического методологического мышления, то оно до настоящего времени всецело сориентировано на идею единства, реализуя ее в абстрактных и, как правило, безжизненных схемах.

Если теория познания нацелена на то, чтобы совершенствовать методологию наук, то она должна обращать главное внимание на их специфику и анализ этой специфики. Можно, конечно, как это делает Китчер, построить дисциплинарную матрицу для математики и показать, что она меняется от одного поколения математиков к другому, точно так же, как дисциплинарная матрица любой естественной науки[3]. Мы, однако, получаем при этом лишь иллюзию единства.

Математика является глубоко специфической наукой. Она является интернальной в своих критериях рациональности в том смысле, что они целиком определены логической связью понятий и фактически не зависят от естественнонаучного или социального фона эпохи. Вследствие этого математика в высшей степени кумулятивна. Она, наконец, принципиально отличается от эмпирического знания в общей схеме эволюции, достигая фактической завершенности своих утверждений и теорий.

Общенаучная методология непригодна для математики по той простой причине, что все эти моменты, относящиеся к сути математики, неизбежно остаются за ее пределами. Адекватная философия науки должна исходить из ее специфики, из возможно более ясных ее разграничений с другими науками, ибо, как говорил еще Кант, «науки не умножаются, но искажаются, если дать сплестись их границам»[4].

В последнее время наблюдается тенденция привязать теорию познания к социологии, объявить нормы рационального познания историческими на том основании, что субъектом познания является сообщество ученых, связанных с проблемами и культурой своего времени. Пример математики показывает необоснованность этой точки зрения. Будучи человеческим предприятием, наука развивается тем не менее по своим внутренним законам, по законам *логической связи* понятий и идей. Эти законы продиктованы целью теоретического познания, т. е. функцией науки вообще, но отнюдь не общекультурным контекстом конкретной эпохи. Социальность познания не означает исторической релятивности его норм. Что касается математики, то мы ясно видим, что именно социальность обеспечивает соблюдение норм достоверности, которые не содержат в себе ничего личностного, а также и исторического в обычном понимании этого слова.

Современная логическая и гносеологическая критика традиционного идеала математики обладает характерной особенностью: она построена на некоторых абстрактных силлогизмах и с легкостью игнорирует факты истории и современного состояния математики, с которыми она должна была бы быть необходимо согласованной. Если, к примеру, посредством некоторой академической критики обыденного языка удалось бы доказать, что он совершенно бесполезен для людей (такого рода развернутую систему аргументации, по-видимому, нетрудно построить), то вряд ли такая критика получила бы признание, ибо есть факт функционирования языка, который говорит об обратном. В современной же гносеологии математики значительное влияние приобрела именно абстрактная критика без соответствующего согласования с фактами или при одностороннем представлении фактов. Исключительное значение придается наличию парадоксов в наивной теории множеств, но упускается из виду факт, что в математике в целом парадоксов такого рода поразительно мало, что парадоксальность отнюдь не является систематическим явлением в математике, что они возникают только по отношению к чрезвычайно искусственным понятиям типа множества всех множеств и, наконец, то, что в аксиоматизированных теориях эти парадоксы никогда не возникают. Доказывается принципиальная недостоверность математического доказательства, но игнорируется факт, что доказательства, построенные на содержательном уровне, признаются безупречными в течение тысячелетий и оказываются корректными с точки зрения самых высоких канонов строгости. Совершенно игнорируется также факт неизменной веры ученых в непогрешимость математического доказательства, тот факт, что любой ученый, сталкиваясь с противоречиями в математизированном рассуждении, изменяет физическую (содержательную) модель, но не логику математического вывода. Этот факт кажется чисто субъективным и не заслуживающим внимания. Это, однако, неверно. За методом, который признан стихийно, имеется, как правило, объективное основание.

Другой негативный момент современной философии математики состоит в ее предельно логизированном характере. Хотя намерение Карнапа заменить философию логическим анализом языка сегодня уже в общем не признается законным, в рассуждениях о математике такая тенденция все еще является преобладающей. Это приводит к устранению традиционных философских проблем, связанных с сущностью математического знания, или к их совершенно неадекватной трансформации к проблемам логическим. В соответствии с таким стилем мышления запрет на вывод утверждения о непротиворечивости формализованной теории в рамках самой этой теории немедленно истолковывается как запрет на достоверное обоснование математики вообще, из несохранения семантической информации делается гносеологический вывод о принципиальной нетавтологичности математического доказательства и т. д. Такая установка, жестко связывая достоверность доказательства с уровнем его формализованности, заведомо отсекает

возможность обоснования надежности метаязыка и математического рассуждения в целом. Приписывая строгость только формальному доказательству и делая подозрительной всякую содержательность, она неизбежно приводит к скептицизму, ибо скоро обнаруживается, что полное освобождение от содержательности невозможно. Истина же состоит в том, что разделение строгого и нестрогого в рассуждении вообще не определяется разделением формального и содержательного. Аподиктическое содержательное доказательство не менее достоверно, чем формализованное.

Скептицизм по отношению к строгости математического доказательства в современной философии математики сосуществует с несокрушимым оптимизмом по поводу возможностей математики как метода, как эффективного средства развития других наук. Будущее математики мыслится обычно как постоянная ее экспансия за пределы физического знания, и будущее науки — при последовательном проведении этого воззрения — предстает не чем иным, как совокупностью в высокой степени математизированных теорий. Действительная ситуация, однако, диаметрально противоположна. Мы не имеем никаких серьезных оснований сомневаться в строгости математического доказательства и в его полной надежности в тех областях, где математика может быть использована, но мы имеем все аргументы за то, что математика онтологически ограничена: как специфический тип моделирования она отражает лишь определенный слой реальности, тот тип реальных систем, где свойства целого достаточно хорошо определяются свойствами его частей. В какой бы версии мы ни брали математику, она рассматривает объект только с точки зрения его частей (составляющих элементов). Как показывает все предшествующее рассмотрение, математическое мышление достоверно лишь постольку, поскольку оно опирается на праксеологическую очевидность, на достоверность воспроизведения целого на основе его частей. Переход от части к целому лежит в сути математики, в основе построения знаковых моделей вообще. С этой точки зрения разговоры о специфической биологической или социологической математике, которая теоретизировала бы соответствующие науки точно так же, как это делает современная математика в физике, являются безосновательными: математика может войти в сложные науки, существенно связанные с идеей целостности, только в той мере, в какой в них оказываются допустимыми простые (аддитивные) модели. Будущее науки связано не с математизацией в обычном ее понимании, но скорее с компьютеризацией техники исследования.

В целом можно сделать вывод, что современная критика традиционого идеала математики и математического доказательства не достигает своей цели и полезна лишь в том отношении, что заставляет более внимательно исследовать основания нашей веры в этот идеал. Мы видим, что эти основания вполне надежны и таковы по своей природе, что они не могут быть поколеблены в результате какой-либо логической или гносеологической критики.

Будущая философия математики, несомненно, существенно изменит современные представления о природе математического знания. Процесс самоосознания науки так же бесконечен, как и процесс развития ее содержания. Из этого положения, однако, не следует делать вывода о релятивности всех традиционных установок. Мы можем определенно сказать, что при любых изменениях методологического и гносеологического мышления в математике мы не откажемся от требования строгости математического доказательства и непротиворечивости математических теорий. Эти требования проистекают из функции математики, а следовательно, принадлежат ей по существу и не могут быть отменены на каком-то этапе ее развития. Задача философского анализа состоит здесь не в изменении идеи, но только в ее экспликации и обосновании.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ВНУТРЕННЕГО ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Изложенные соображения относительно строгости и однозначности математических доказательств проливают некоторый свет на проблему обоснования математики вообще.

1. Существует троякого рода подтверждение ценности математической теории: ее практическое оправ-

дание (приемлемость в качестве модели), ее общее логическое обоснование на основе надежной метатеории и, наконец, генетическое обоснование, состоящее в редукции каждого ее положения к некоторому несомненному базису. Два последних пути составляют так называемое внутреннее обоснование математики.

Распространенное мнение, согласно которому метатеоретическое и вместе с тем достоверное обоснование достаточно сложной математической теории запрещено теоремами Геделя, не имеет за собой убедительных аргументов и совсем неприемлемо то утверждение, что отсутствие такого обоснования оставляет для математики лишь возможность внешнего обоснования по типу эмпирического знания.

Практически мы верим в надежность признанных доказательств и в логическое совершенство математических теорий. Решающим аргументом, который лежит в основе этой веры, является не отсутствие контрпримеров, не наличие общих логических доказательств непротиворечивости и не полезность теории для науки. Таким аргументом является в действительности генезис ее утверждений, наша вера в истинность исходных посылок и в правильность пути, который приводит от них к тому или другому следствию. В процессе развертывания математической теории мы постоянно производим и ее обоснование, укрепляем веру в окончательность ее результатов на основе их генезиса. Такое обоснование в отличие от логического (метатеоретического) имеет смысл не по отношению к теории в целом во всех возможных ее определениях и теоремах, а только к существующему фрагменту теории, но оно является внутренним и, как показывает практика, в высшей степени надежным.

Необходимо, таким образом, признать, что в самом развертывании математической теории имеются уже гарантии ее строгости и непротиворечивости. Рациональная программа обоснования математики должна состоять в таком случае в выявлении этих гарантий и в уточнении сферы их действия. На этой основе должна быть создана теория достоверности математических построений, объясняющая их фактическую достоверность, наблюдаемую в опыте, т. е. должны быть сформулированы общие принципы правильного генезиса математических утверждений, гарантирующие строгость отдельных доказательств и непротиворечивость теории в целом. Отказ от программ общего логического обоснования математики, если он действительно неизбежен, ведет не к эмпиризму и не к замене логического обоснования практическим оправданием, но к выявлению и углублению принципов генетического обоснования, которое фактически, хотя и неосознанно, всегда реализуется в практике математического мышления.

Генетическое обоснование математической теории является актуальным, относящимся только к существующему фрагменту теории, но оно может быть предельно достоверным, обеспечивающим абсолютную ее надежность в данных ее границах.

2. В принципе по этому пути идет интуиционизм. Он стремится обосновать не теорию в целом, но каждый отдельный результат на основе его генезиса. Правильность общего принципа интуиционистского обоснования не может быть поставлена под сомнение. Но мы видим все более ясно, что интуиционизм страдает неразвитостью гносеологической концепции, узостью и произвольностью ограничений. Практика достоверного математического мышления пользуется гораздо более широким набором средств оправдания своих результатов, и она, несомненно, показывает ограниченность теории интуиционизма. Современная программа обоснования математики может мыслиться поэтому как некоторое разумное расширение интуиционизма на основе новой, более глубокой концепции математической достоверности.

Сегодня уже очевидны некоторые неоправданные ограничения интуиционизма. Прежде всего должна быть реабилитирована логика обыденного мышления. Мы не имеем аргументов за то, что какая-либо из норм реальной логики может быть источником нестрогости или противоречий. Мы имеем основания считать, что геометрическая интуиция в определенных рамках ничуть не хуже интуиции числа, а это значит, что допустимы различные и независимые друг от друга линии достоверного конструктивного рассуждения. Из общих гносеологических соображений мы можем допустить полную предельную непротиворечивость таких логических систем, как исчисление предикатов первого порядка, и тем самым оправдать и

заимствовать определенные элементы логицизма. Мы можем также в некоторых случаях допустить как согласующееся с достоверностью и непротиворечивостью аксиоматическое задание объектов. Как уже было высказано выше (§ 3, гл. III), есть все основания верить в то, что система аксиом, не обнаружившая противоречий в ближайших следствиях, является абсолютно непротиворечивой и при правильном введении производных объектов обеспечивает предельную непротиворечивость теории. Разумеется, это лишь гипотеза, которая должна быть доказана в логической теории аксиоматических систем, но возможность обоснования такого рода принципов отнюдь не исключена.

То, что мы имеем в виду под генетическим обоснованием математики, таким образом, не простое ослабление интуиционистских требований, но возможно более полное объединение всех аргументов, обеспечивающих фактическую достоверность математическому рассуждению. Задача состоит в том, чтобы, идя за практикой математического мышления и предполагая ее разумность, эксплицировать ее реальные принципы, чтобы дать им затем общее гносеологическое обоснование. Мы вправе здесь предполагать возможность слияния различных гносеологических подходов, и, соответственно, различных технических средств. Генетическое обоснование, однако, органически связано с интуиционизмом в том смысле, что центральным пунктом его гносеологии должно быть оправдание аподиктической интуиции.

Неудача традиционного интуиционизма в значительной мере обусловлена его неудовлетворительной философской базой. Какова природа интуиции, откуда взяты законы логики, какую роль играет языковый (символический) компонент математического рассуждения и т. п. — на все эти вопросы интуиционизм не отвечает или отвечает заведомо плохо. Надо сказать, что и программы, противостоящие ему, не были более обоснованы в этом отношении. Теория познания до сих пор пребывает на задворках в решении проблем обоснования математики, вследствие чего, философские проблемы, возникающие здесь, решаются произвольно, на уровне некоторого здравого смысла, либо подменяются проблемами логическими.

«Вопрос о том, что такое строгое доказательство, — пишет Карри, — имеет логический характер и относится поэтому к компетенции математической логики»[1]. Но, как справедливо говорил Брауэр, в символах нет мудрости. Логические методы обоснования получают ценность только через их гносеологическое оправдание. Обоснование математики — логико-гносеологическая проблема, в решении которой ведущую роль должно играть гносеологическое мышление.

Интуиционизм может быть превращен в эффективную программу обоснования математики через ослабление требований к логике рассуждения и к способам введения объектов, но это расширение должно быть проведено не произвольно, не в форме гипотез ad hoc, но только на основе достаточно определенной гносеологической концепции достоверности математического рассуждения. Такой концепции мы пока не имеем и в этом источник главных трудностей в современной проблеме обоснования математики.

3. Можно ли, однако, надеяться, что целесообразное и гносеологически оправданное расширение интуиционизма даст возможность обосновать все основные теории современной математики? Если при введении объектов мы сохраним принцип конструктивности в той или другой форме как обязательный, то эта цель будет, конечно, недостижимой.

Здесь важно провести различие между генетически первичной (фундаментальной) и вторичной (объяснительной) математикой. Если в первичных математических теориях все свойства математических объектов обоснованы их построением или доказательствами существования, то во вторичной они могут просто быть постулированы аксиоматически, без какой-либо гарантии их совместимости. Такого рода теории можно назвать объяснительными, так как целью их создания является не исследование некоторых уже данных объектов, но введение гипотетических объектов и аксиом, преследующее цель создания некоторой общей точки зрения на традиционные объекты. Теория множеств является типично объяснительной теорией, ибо ее исходные объекты не поддаются конструированию на базе элементарных и не вводятся как логически необходимые с точки зрения элементарных объектов и операций.

Генетическая точка зрения, сохраняющая принцип конструктивности, конечно, бессильна обосновать такого рода теории. Но, как уже говорилось выше, не исключены некоторые непосредственные подходы к обоснованию непротиворечивости аксиоматических систем, которые могут расширить генетическую точку зрения через допущение определенного типа неконструктивных объектов.

4. Рациональный смысл фаллибилистской философии математики состоит в том, что она подчеркивает относительную ненадежность объяснительных теорий, возможную неоднозначность их конкретных результатов. Однако она допускает две ошибки принципиального порядка: она абсолютизирует ненадежность объяснительной математики и распространяет эту ненадежность на всю математику, как логически подчиненную объяснительной математике. Оба этих допущения несостоятельны. Достоверность первичной математики обосновывается автономно, ее генезисом, и она совершенно не зависит от положения дел в объяснительных теориях. У нас нет оснований также думать, что логический и гносеологический анализ математики не способен совершенствовать саму объяснительную математику, выделяя и обосновывая внутри нее предельно достоверные фрагменты.

Перспективы внутреннего обоснования математики, таким образом, не безнадежны. Мы говорим здесь о возможности предельно достоверного обоснования, т. е. такого заключения о строгости доказательств и непротиворечивости отдельных теорий, которые не будут пересматриваться каким-либо дальнейшим логическим анализом. В отличие от эмпирического знания в математике возможно четкое разделение предельно обоснованного и необоснованного, гипотетичного. Первичная математика, несомненно, может быть обоснована как предельно гарантированная от противоречий. Если общее метатеоретическое обоснование действительно недостижимо для объяснительных теорий, то они всегда будут содержать в себе некоторую гипотетическую периферию. Но и в этом случае генетический анализ достаточен для того, чтобы постепенно расширять в них обоснованный центр.

ПРИМЕЧАНИЯ

Введение

1 См.: Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития. — Вопросы философии, М., 1976, № 6, с. 106.

2 Карри противопоставляет как основные контенсивный (содержательный) и формалистский взгляд на математику. См.: Карри Х. Б. Основания математической логики, М., 1969, с. 27.

Глава I

1 См.: Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. I. М., 1949.

2 Согласно аксиоме Архимеда для любых двух величин a и b найдется такое целое N, что $a \cdot N > b$.

3 См.: Ньютон И. Математические работы. М., 1937, с. 168.

4 Беркли Дж. Сочинения. М., 1978, с. 401.

5 Маркс К. Математические рукописи. М., 1968, с. 153.

6 Избранные отрывки из математических сочинений Г. В. Лейбница. Перевод А. П. Юшкевича. УМН, 1948, т. 3, вып. 1(23), с. 193.

7 Цит. по: Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984, с. 163.

8 Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.—Л., 1949, с. 90.

9 Ньютон И. Математические работы, с. 167.

10 Цит. по: Юшкевич А. П. О возникновении понятия об определенном интеграле Коши. — Труды Ин-та истории естествознания. М.— Л., 1947, т. I, с. 387.

11 См.: Больцано Б. Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения. — В кн.: Кольман Э. Бернард Больцано, М., 1975, с. 171—172.

12 См.: Кутюра Л. Философские принципы математики. Спб., 1913, с. VI—VII.

13 Философские рассуждения об интуиции в этом плане, поскольку они вступают в конкуренцию с экспериментальной психологией, свидетельствуют лишь об инерции методологического мышления. В настоящее время они не более полезны, чем попытки натурфилософов XVIII века усовершенствовать механику Ньютона, не прибегая к математическим уравнениям.

14 Если отдельный человек может ошибиться в подсчете предметов, то вероятность того, что и все человечество ошибется здесь, также больше нуля. Рассуждая так, мы должны заключить, что даже такое утверждение, как $2 \cdot 2 = 4$, истинно только с вероятностью. Такое заключение однако было бы неверным. Дело в том, что математическая схема распределения вероятностей не отражает в точности поведения реальных систем. Вероятность события в реальной системе, подчиняющегося вероятностному распределению в зависимости от некоторого параметра, не приближается асимптотически к нулю, но *фактически* становится равной нулю при некотором значении этого параметра. Так, например, заведомо не может быть человека ростом 10 метров, хотя математически некоторую вероятность этого исключить нельзя. Несмотря на возможность ошибки в подсчете предметов у отдельного индивида, мы имеем основания считать, что общество, если оно будет заинтересовано в этом, может установить это количество совершенно точно. Переход от индивидуального познания к познанию сообщества (по крайней мере в рассматриваемых случаях) является качественным в том смысле, что оно не просто уменьшает ошибку, но *абсолютно устраняет ее*. (Некоторые соображения на этот счет приводятся в книге: Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев, 1976, с. 42—44).

15 Кант, как известно, считал, что геометрия отражает в понятийной форме чистое созерцание пространства, а арифметика находится в таком же отношении к интуиции времени. С определенными поправками, касающимися природы пространственной интуиции, идея Канта может быть принята для геометрии. Что же касается арифметики, то ее сопоставление с созерцанием времени представляется искусственным. Согласно вышеизложенному, элементарные (самоочевидные) положения арифметики более естественно соотнести с праксеологической интуицией предметности вообще, которая более сложна, чем интуиция времени, и в некотором смысле опирается на весь комплекс категорий.

16 Кант И. Сочинения, т. 3. М., 1964, с. 614.

17 Там же.

18 Эта непоследовательность у Канта была отмечена Л. Кутюра, который справедливо указал на тот факт, что нет никакой аналогии между наглядным представлением в геометрии и обозримостью знаков в алгебре. См.: Кутюра Л. Философские принципы математики. Спб., 1913, с. 243.

19 Reichenbach H. Philosophy of space and time. N. Y., 1957, p. 38.

20 При подведении формулы под схему вывода мы, как правило, совершаем переход к некоторому абстрактному ее виду, при котором часть ее внутренних связок опускается. Такая схематизация формулы однако не произвольна. Она целиком определена ее исходной структурой и не требует привлечения какой-либо интуиции.

21 Большое число таких высказываний приводится в упомянутой выше книге М. Клайна (гл. XIV).

22 Доказательство дается в интерпретации И. Лакатоса. См.: Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., 1967, с. 14—15.

23 Дело обстоит здесь так, что сама аксиоматика геометрии была бы отвергнута как неадекватная, если бы она поставила под сомнение хотя бы одно из положений, из которых состоит данное доказательство.

24 Однозначность и эффективность критериев не предполагает их

явной формулировки. Математическое мышление, как и всякое другое, регулируется не правилами, а образцами.

25 См.: Штейнгауз Г. О математической строгости. — В кн.: Задачи и размышления. М., 1974.

26 См.: Медведев Ф. А. Ранняя история аксиомы выбора. М., 1982, гл. II—III.

27 Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. М., 1979, с. 108.

28 См.: Яновская С. А. Методологические проблемы науки. М., 1972, с. 267.

29 См.: Кузьмин Е. И. О причинах математических ошибок. — В кн.: Методологические проблемы математики. Новосибирск, 1979.

30 Мы приводим здесь выводы А. В. Михалева, который исследовал этот вопрос (устное сообщение).

31 Лакатос И. Доказательства и опровержения. М., 1967, с. 65.

32 Там же, раздел 4.

33 Lakatos I. Proofs and refutations. Cambridge, 1974, p. 127—141.

34 Lakatos I. A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. — In: British journ. for the phil. of science, 1976, vol. 27, N 3, p. 213—19.

35 Marchi P. Mathematics as a critical enterprise. — In: Boston studies in the philosophy of science, 1976, vol. XXXIX, p. 384.

36 Lakatos I. Infinite regress and foundations of mathematics. In: Lakatos I. Mathematics, science and epistemology, Philosophical papers, vol. 2. Cambridge, 1978, p. 20.

37 Лакатос И. Доказательства и опровержения, с. 80.

38 Там же, с. 74.

39 См.: Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., 1937, с. 84.

40 Wilder R. L. The Nature of mathematical proof. Amer. Math. Month., 1944, vol. 51, p. 319.

41 Синельников И. С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. М., 1971, с. 13.

42 Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов, с. 54.

43 Lakatos I. Mathematics, science and epistemology, p. 21.

Глава II

1 Математический факт — это или аподиктическая достоверность в мире идеализаций, или однозначно определенное соглашение, или признанная теорема. Это не эмпирический факт, но с другой стороны, он обладает онтологической или логической необходимостью такого рода, что не может быть отвергнут без отказа от данной системы идеализаций в целом. В своем развитии математическая теория должна сообразоваться с ним точно так же, как эмпирическая теория с неоспоримыми данными опыта.

2 Разъяснение этого момента в понимании интуиционизма см.: Гейтинг А. Интуиционизм. М., 1965, с. 15.

3 Совершенно очевидно, что некоторые формулы исчисления высказываний не могут служить основой выводов по содержанию, т. е. они не гарантируют осмысленного следования при любой содержательной интерпретации. Это такие формулы, как $A \to (B \to A)$, $A \to (\bar{A} \to B)$ и т. п. Предпринимаются попытки сформулировать это исчисление таким образом, чтобы такого рода формулы в нем не выводились. Мы приходим к системам так называемой *релевантной* логики, которые претендуют на отражение схем умозаключений, фактически используемых в обыденном и научном мышлении. (Об основных подходах к построению таких систем см.: Войшвилло Е. К. Понятие интенсиональной информации и интенсионального отношения логического следования. — В кн.: Логико-методологические исследования. М., 1980). Реальная логика, как мы ее определяем здесь, представляет собой, очевидно, только некоторую конечную часть релевантной логики, а именно только те схемы, которые интуитивно ясны (аподиктичны) и которые, таким образом, определяют элементарные шаги любого рассуждения. Это те нормы, которые каждый человек приобретает вместе с языком и которые, в частности, позволяют ему понимать математическое доказательство без специального обучения логике. Реальная логика не может быть представлена в виде замкнутой формальной системы, но ее выделение важно с методологической точки зрения: только через анализ такого рода норм, абсолютно принятых здравым смыслом, мы можем понять природу логической необходимости вообще, а также и истоки надежности математического рассуждения.

4 Милль Дж. Ст. Система логики силлогической и индуктивной. М., 1914, с. 250.

5 Гуссерль Э. Логические исследования, т. I, Спб., 1909, с. 54.

6 Там же, с. 178.

7 Там же, с. 20.

8 Там же, с. 120.

9 Там же, с. 37.

10 Там же, с. 53.

11 См.: Farber M. The aims of phenomenology: the motives, methods and impact of Husserl's thought. N. Y., 1966, ch. 1.

12 Гуссерль Э. Логические исследования, с. 129.

13 Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления. — В кн.: Преподавание математики. М., 1960, с. 30.

14 Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., 1969, с. 579.

15 Там же, с. 86.

16 Гуссерль также сравнивает логику с моралью. Здесь, однако, имеется существенная разница. «Мораль» Гуссерля совершенно категорична, она, так сказать, спущена с небес, в то время как у Пиаже она, в конечном итоге, выводится из реальных структур мышления, которые могут эволюционировать.

17 См.: Лекторский В. А., Садовский В. Н., Юдин Э. Г. Операциональная концепция интеллекта Жана Пиаже. — В кн.: Пиаже Ж. Избранные психологические труды, с. 9—54, 613—616.

18 Пиаже Ж. Избранные психологические труды, с. 88.

[19] Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. М., 1979, с. 110.
[20] Brouwer L. E. J. Collected work's, vol. I. Amsterdam, Oxford, 1975, p. 107.
[21] См.: Brouwer L. E. J. Collected work's, p. 110, а также: Вейль Г. О философии математики. М., 1934, с. 105.
[22] Schütte K. Proof theory. Berlin, New York, 1977, p. 3.
[23] В этом плане мы можем придать смысл тезису Гуссерля о философии как строгой науке. Рассуждения философа не строги, но категориальные подразделения, которые являются их предметом, совершенно однозначны, лежат в основе всякой, в том числе и математической достоверности.
[24] Такого рода крайние взгляды в свое время высказывал Л. Кальмар. Возражая Лакатосу он утверждал, что нельзя заранее сказать, обеспечивают ли логические каналы переход от истины только к истине (См.: Problems in the Philosophy of mathematics. Amsterdam, 1967, p. 206).

Глава III

[1] Brouwer L. E. J. Collected work's, vol. I, p. 125—129.
[2] Там же, с. 121.
[3] Лузин Н. Н. Собрание сочинений, т. II, М., 1958, с. 23.
[4] См.: Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985, с. 79—81.
[5] Гильберт Д. Основания геометрии. М., 1948, с. 340. Антинатурфилософская установка является центральным пунктом также и для более современных представителей формалистской философии математики (Р. Карнап, Х. Карри, И. Бар-Хиллел и др.). «Мы требуем, — пишет Карри,—...чтобы формализм был абсолютно свободен от каких бы то ни было допущений, которые можно было бы считать в каком-либо смысле метафизическими». (Карри Х. Б. Основания математической логики, с. 38.) Эта позиция, будучи безусловно верной в контексте борьбы против эмпиризма, становится несостоятельной, когда она переходит в отрицание роли онтологических представлений в математике и необходимости онтологической классификации формальных систем (см. § 4 данной главы).
[6] Гильберт Д. Основания геометрии, с. 364.
[7] См.: Сокулер З. А. Современные зарубежные исследования по философским проблемам математики (научно-аналитический обзор). М., 1983.
[8] См.: Левин К. Геометрическая рапсодия. М., 1984, с. 164—169.
[9] В. В. Налимов говорит об особого рода метафорическом применении математики, когда используются собственно не формулы, но скорее образы, лежащие за ними. Здесь, однако, возникает вопрос о границе, за которой такое обращение с математическим результатом превращается в его искажение, в мистику на основе математики. Современным примером такого рода являются, по-видимому, некоторые философские интерпретации математической теории катастроф. (См. Арнольд В. И. Теория катастроф. М., 1984, с. 76—77).
[10] Lakatos I. Mathematics, Science and Epistemology, p. 20.
[11] См.: Curry H. B. Outlines of a formalist philosophy of mathematics. Amsterdam, 1951, p. 61.

[12] Карри Х. Б. Основания математической логики, с. 25.
[13] См.: Kalmar L. In: Problems in the philosophy of mathematics, p. 187—194.
[14] См.: Юшкевич А. П. О возникновении понятия об определенном интеграле Коши, а также: Kitcher Ph. Mathematical rigor — who needs it? — Noûs, Bloomington, 1981, vol. 15, p. 469—493.
[15] Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973, с. 34.
[16] См.: Колмогоров А. Н. Избранные труды, т. I. М., 1985, с. 45—69. См. также: Успенский В. А., Плиско В. Е. Интуиционистская логика. В кн.: Колмогоров А. Н. Избранные труды, т. I, с. 394—404.
[17] См.: Гедель К. Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения. — В кн.: Математическая теория логического вывода. М., 1967, с. 121—128.
[18] См.: Machover M. Towards a new philosophy of mathematics. — In: Brit. journ. for the philosophy of science, L., 1983, vol. 34, N 1, p. 8—10.
[19] В классических формализациях логики выводимо правило, согласно которому из противоречия следует все, что угодно. На этой основе иногда утверждается, что обнаружение противоречия в теории сразу дезавуирует все ее доказательства, ибо в каждом случае теперь выводимо противоположное утверждение и вообще любая абсурдность (см., например: Ван Хао. Процесс и существование в математике. В кн.: Математическая логика и ее применения. М., 1965, с. 332—333). Это допущение, однако, ошибочно. Обнаружение противоречия ставит под сомнение только те доказательства, которые непосредственно связаны с противоречивыми понятиями. Если мы признаем законным понятие множества всех множеств, то это вовсе не значит, что нам удастся опровергнуть, к примеру, канторовское доказательство существования трансцендентных чисел, ибо это доказательство никак не связано с указанным понятием. Основные результаты теории множеств, математического анализа и других областей математики не колеблются парадоксами теории множеств именно по той причине, что их обоснование происходит в сфере более конкретных и совершенно бесспорных рассуждений. Таким образом, мы не можем отвергать доказательство как недостоверное, исходя только из того факта, что теория, в которой оно проведено, не свободна от противоречий.
Сказанное может быть пояснено также через понятие релевантной логики. Правило «из противоречия следует все, что угодно» справедливо только на уровне материальной импликации, когда мы полностью абстрагируемся от содержания суждений и принимаем во внимание только их истинность или ложность. Фактическое рассуждение, однако, ограничено содержательной связью понятий и протекает в логике, в которой этот принцип уже не имеет универсального значения.
[20] Анализ этого вопроса см.: Detlefsen M. On interpreting Gödel second theorem. — Journal of philosophical logic, 1979, vol. 8, N 3, p. 297—313.
[21] Там же, с. 310.
[22] Колмогоров А. Н. Избранные труды, т. I, с. 68.

23 Кузичев А. С. 1) Теорема о непротиворечивости системы ZF Цермело—Френкеля. ДАН, т. 173, № 5, 1983, с. 1053—1057; 2) Об одной арифметически непротиворечивой λ-теории. — Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 29, 1983, S. 385—416.

24 Карри Х. Б. Основания математической логики, с. 37.

25 Detlefsen M. On interpreting Gödel second theorem.

26 Самохвалов К. Ф. Теоремы Геделя и программа Гильберта. — В кн.: Методологические проблемы математики. Новосибирск, 1979, с. 65—76.

27 Кроме всего прочего, здесь есть некоторое противоречие. Если эмпирицисты ставят под сомнение достоверность доказательств вообще, то обращение к теореме Геделя как к безусловному факту представляется не совсем законным.

28 Гильберт Д. Основания геометрии, с. 349.

29 Современная логика не запрещает такого положения, что противоречие в исходных положениях теории скажется не сразу, а где-то в достаточно удаленных результатах. Однако есть основания думать, что глубокие противоречия в системе аксиом практически исключены, т. е. мы можем рассматривать в качестве совершенно непротиворечивой всякую систему, которая не обнаружила противоречия в своем первоначальном развитии. Здесь, конечно, нужно отделять вопрос о непротиворечивости системы аксиом от вопроса о непротиворечивости теории, построенной на этих аксиомах. Наличие противоречия в теории не означает несовместимости аксиом. Противоречия, проистекающие от производных определений, являются внешними и не разрушают основ теории.

30 Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., 1971, с. 190.

31 Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., 1969, с. 482.

32 Carry H. B. Outlines of a formalist philosophy, p. 56.

33 Существуют и другие подходы к объяснению стихийного становления логической завершенности математических теорий. В. А. Карпунин указывает в этой связи на роль эстетических критериев. (см.: Карпунин В. А. Формальное и интуитивное в математическом познании. Л., 1984, с. 145—150.) Эта идея может быть принята, но при каком-то более широком истолковании эстетического, ибо совершенно очевидно, что обыденные представления о прекрасном, совершенном и т. д. слишком социальны и историчны, чтобы определять логическую законченность, являющуюся практически вневременной.

34 Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984, с. 315.

Глава IV

1 См.: Кутюра Л. Кантова философия математики. — В кн.: Философские принципы математики. Спб., 1913, с. 199—260.

2 См.: Карнап Р. Значение и необходимость. М., 1959, с. 321—330; Смирнова Е. Д. К проблеме аналитического и синтетического. — В кн.: Философские вопросы современной формальной логики. М., 1962, с. 323—363.

3 Полного параллелизма здесь нет, по крайней мере, при некоторых истолкованиях аналитичности. Для одной и той же системы аксиом могут быть сформулированы различные системы правил вывода и тем самым объективно заданы различные системы следствий. Все эти следствия будут аналитическими суждениями при отождествлении аналитичности с выводимостью, но заведомо не все они будут тавтологичными, т. е. утверждениями, выявляющими информацию данных аксиом.

4 См.: Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М., 1980.

5 Кутюра Л. Философские принципы математики, с. 211—212.

6 См.: Поппер К. Логика и рост научного знания. М., 1982, с. 53.

7 Наличие истинного следования в этом случае очевидно. Если через A обозначить общие конституэнты G и F на уровне n, то наше требование состоит в утверждении формулы $A \rightarrow A \vee B$, где B — какие-то дополнительные конституэнты. Эта формула истинна при любых A и B.

8 Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования, с. 167.

9 Там же, с. 217—218.

10 См.: Брюшинкин В. Н. О методологическом значении различения понятий «вывод» и «поиск вывода». Философские науки, 1984, № 4.

11 См., напр.: Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования, с. 159—160.

12 Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования, с. 217.

13 Там же, с. 108.

14 «Математик тоже не может создавать все, что ему вздумается, он также мало имеет на это права, как и географ: он тоже лишь может открывать нечто и давать открытию название». Г. Фреге (Цит. по: Бирюков Б. В. О работах Фреге по философским вопросам математики. — В кн.: Философские вопросы естествознания, вып. 2, М., 1959).

15 Гегель Г. В. Наука логики, т. I. М., 1970, с. 358.

Заключение

1 См.: Problems in the philosophy of mathematics, p. 198.

2 Мы имеем здесь в виду идеи Дильтея, Бергсона и Риккерта о специфике гуманитарного знания. Анализ современного развития этих идей см.: Кезин А. В. Научность: эталоны, идеалы, критерии. М., 1985.

3 См.: Kitcher Philip. The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford, 1983. Мы пользовались здесь рецензией Е. Гросхольц на эту книгу, опубликованной в: The British journ. for the philos. of science, 1985, vol. 36, N 1.

4 Кант И. Логика. Спб., 1915, с. 12.

Приложение

1 Карри Х. Б. Основания математической логики. М., 1969, с. 19.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Василий Яковлевич Перминов

РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О НАДЕЖНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Зав. редакцией Г. С. Ливанова. Редактор В. П. Пазилова. Художник Е. А. Михельсон. Художественный редактор Н. Ю. Калмыкова. Технический редактор К. С. Чистякова. Корректоры И. А. Мушникова, Л. С. Клочкова

ИБ № 2365

Сдано в набор 28.10.85. Подписано в печать 14.04.86. Л-67164. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 13,03. Тираж 2270 экз. Заказ 225. Цена 1 руб. Изд. № 3758

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы