

M. B. Porter Lectures
Rice University, Department of Mathematics
Salomon Bochner, Founding Editor

**The Geometry
And Dynamics
of Magnetic Monopoles**

Michael Atiyah and Nigel Hitchin

Oxford University, U.K.

Princeton University Press
Princeton, New Jersey
1988

М.Атья, Н.Хитчин

**Геометрия и динамика
магнитных
монопольей**

Перевод с английского
О. В. Огиевского



Москва «Мир» 1991

А92 Атья М., Хитчин Н.
Геометрия и динамика магнитных монополей:
Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 150 с., ил.

ISBN 5-03-001794-1

Книжка известных английских математиков, систематически излагающая основные вопросы теории неабелевых автодуальных монополей. Бурное развитие этой теории, уравнения которой вполне интегрируемы, связано с методами теории твисторов и гиперклеровой геометрии и позволило описать пространства модулей монополей и простейшие процессы рассеяния; с этой теорией тесно связаны в пространства модулей инстантонов, столь важные в современной топологии. Читатель сможет по этой небольшой книжке научиться всем этим вещам и познакомиться со взаимно обогащающим взаимодействием современной геометрии и физики из первых рук. В книге обсуждаются также и численные расчёты процессов рассеяния.

Для математиков разных специальностей (алгебраическая геометрия, топология, геометрия, комплексный анализ, математическая физика), физиков-теоретиков, аспирантов и студентов вузов.

А 1602050000-038 8-91
041 (01)-91

ББК 22.31

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001794-1 (русск.)
ISBN 0-691-08480-7 (англ.)

© 1988 by Princeton University Press
© перевод на русский язык, О. В. Огневский, 1991

Вряд ли сегодня можно провести строгую грань между теоретической физикой и математикой. Зачастую одна и та же задача возникает в обеих дисциплинах и, лишь полагаясь на своё мироощущение, исследователь относит себя к одной из них. В последние десятилетия взаимопроникновение этих дисциплин происходит с особенной силой. Ярким тому примером служит лежащая перед читателем книга замечательных математиков М. Атья и Н. Хитчина, посвящённая вопросам, родившимся в недрах современной теории поля.

Мотивировкам, предыстории и целям книги отведено достаточно места во введении, поэтому я ограничусь несколькими замечаниями. С математической точки зрения тему книги следует отнести к «инстантонной» геометрии — геометрии, связанной с уравнениями автодуальности в четырёхмерном пространстве. Возникнув около пятнадцати лет назад, эта область продолжает бурно развиваться и принести новые открытия. Уравнения, описывающие автодуальные монополи, представляют собой трёхмерную редукцию уравнений автодуальности. Здесь ситуация оказывается даже более простой и элегантной, чем в случае инстантонов. Пространства модулей монополей полностью описаны, и это открывает возможность приближённо исследовать низкоэнергетическую динамику.

Поразительно обилие применяемых авторами методов. С помощью весьма абстрактных конструкций, связанных с твисторами, эллиптическими функциями, авторам удаётся получить явные и простые формулы, описывающие процессы рассеяния монополей.

Книга написана увлекательно, языком живой лекции. Для чтения её требуется некоторое владение дифференциальной и алгебраической геометрией. Кроме того, авторы предполагают знакомство с некоторыми результатами, относящимися к монополям. Большая часть из них содержится в сборнике «Монополи: топологические и вариационные методы», вышедшем в издательстве «Мир» в 1989 г.

Нет сомнения, что книга будет полезна широкому кругу читателей — как математиков, так и физиков. Множество открытых проблем в этой области (исследование метрик на пространствах модулей монополей с высоким топологическим зарядом, описание пространств модулей монополей на нетривиальных трёхмерных многообра-

зиях, описание процессов рассеяния нескольких монополей, исследование связанных пар, состоящих из монополя и антимонополя, и др.) ждут своих исследователей. Теперь, когда пространства модулей инстантонов нашли неожиданные применения в топологии трёх- и четырёхмерных многообразий, ситуация становится особенно захватывающей. Возможно, читатель, оценивший красоту изложенных в книге идей, захочет принять участие в их развитии.

О. Огиевецкий

ПРЕДИСЛОВИЕ

В январе 1987 года я прочёл курс лекций на Портеровских чтениях в Райсском университете. Это дало мне прекрасную возможность собрать вместе результаты по магнитным монополям, полученные Найджелом Хитчином и мною за последние несколько лет. Настоящая книга, написанная нами совместно, представляет собой расширенный вариант лекций. В ней полно и подробно изложены основные новые результаты. В своих исследованиях мы опирались на работы многих авторов, и, чтобы сделать изложение более замкнутым, мы включили в книгу разделы, содержащие вводный и подготовительный материал.

Майкл Атья

В этой книге мы применяем геометрические методы к исследованию решений нелинейной системы гиперболических уравнений, описывающих эволюцию во времени неабелевых магнитных монополей. Изучается упрощённая модель, но эта модель сохраняет достаточно много существенных черт реальности, чтобы быть физически интересной. Она даёт информацию о низкоэнергетическом рассеянии монополей и позволяет обнаружить некоторые новые важные явления.

С чисто математической точки зрения наше исследование следует отнести к теории солитонов. Солитонами в общем случае называются решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые в определённых отношениях ведут себя подобно частицам — они приближённо локализованы в пространстве и «сохраняются» при столкновениях.

Сейчас развита обширная теория солитонов в одномерном пространстве. Прототипом и наиболее известным примером здесь служит уравнение КдФ [14]. Эти солитоны обладают рядом замечательных свойств. Уравнения, описывающие их эволюцию, образуют бесконечномерную интегрируемую гамильтонову систему. Вот некоторые основные свойства теории:

- (1) имеются явные формулы, описывающие k взаимодействующих солитонов (при любом целом k);
- (2) в этих формулах используется теория римановых поверхностей (или алгебраических кривых);
- (3) решения строятся с помощью метода *обратной задачи рассеяния* (для линейных операторов);
- (4) рассеяние солитонов при столкновениях по существу тривиально (т. е. скорости не меняются).

Хотя само уравнение КдФ решается «точно», следует помнить, что оно естественно возникает при *приближённом* описании мелких волн в канале. Поэтому свойства (1)–(4) лишь приближённо выполняются в реальной физической ситуации.

Уравнения, которыми мы будем заниматься, описывают динамику монополей. Эти уравнения разделяют некоторые из существенных свойств уравнения КдФ, в частности свойства (1)–(3). С другой стороны, рассеяние монополей после столкновения оказывается не-

тривиальным (скорости монополей изменяются, т. е. имеет место «передача импульса»). Кроме того, процессы, в которых участвуют монополи, происходят в трёхмерном пространстве, и потому уравнения более сложны. В гл. 15 аналогия с КдФ будет обсуждена более подробно.

Мы получим не точные решения, а лишь приближения, справедливые при малых относительных скоростях. Однако, как уже отмечено, сама теория КдФ служит лишь приближением к более реалистической модели. С физической точки зрения нет существенной разницы между приближённым решением точного уравнения и точным решением приближённого.

Понятие магнитного монополя как изолированного точечного источника магнитного заряда было введено около 50 лет назад Дираком в работе [13], оказавшей большое влияние на весь ход дальнейшего развития теории. Электричество и магнетизм участвуют в уравнениях Максвелла на равных основаниях, но электрические заряды возникают естественным образом, магнитные же заряды, или монополи, — нет. Тем не менее, постулируя их существование, Дирак предложил убедительный (и пока, по сути дела, единственный) аргумент, объясняющий квантование электрического заряда, т. е. тот факт, что электрические заряды всегда являются целыми кратными некоторого фиксированного заряда (заряда электрона).

После появления неабелевых калибровочных теорий, в которых группа $U(1)$ максвелловской теории расширяется до какой-либо неабелевой группы, например до группы $SU(2)$, т'Хоофт и Поляков обнаружили, что существуют *гладкие* полевые конфигурации, которые на больших расстояниях ведут себя как монополи Дирака. По существу оказалось, что нелинейные уравнения, обобщающие линейные уравнения Максвелла, допускают решения солитонного типа, в которых сингулярная точечная частица Дирака заменяется на гладкую полевую конфигурацию, приближённо локализованную в точке, где находилась частица.

Монополь т'Хоофта и Полякова описан лишь численно. Однако имеется упрощённая модель, введённая Прасадом и Sommerфилдом (в ней коэффициент λ при потенциале Хиггса $(1 - |\phi|^2)^2$ равен нулю), в которой найдены явные монопольные решения. Они называются монополями Богомольного — Прасада — Sommerфилда (БПС) или автодуальными монополями. Именно их мы и будем изучать.

Монополи БПС — это решения уравнений Богомольного. Мы введём эти уравнения в главе 1. Они описывают *статические* монополи в R^3 . В последние годы уравнения Богомольного активно изучались. Они обладают рядом замечательных свойств, которые лучше всего можно понять, рассматривая эти уравнения как частный случай (выделяемый условием независимости полей от одной из переменных) уравнений автодуальности в четырёх измерениях. В частности, к уравнениям Богомольного применима теория твисторов Пенроуза.

Она и лежит в основе всех методов решения этих уравнений. Теория твисторов позволяет использовать методы комплексного анализа и в конечном счёте приводит к конструкции монополей с помощью римановых поверхностей. Обзор результатов, относящихся к этому кругу вопросов, дан в главе 2, а сведения вспомогательного и исторического характера вынесены в главу 16.

Как объясняется в главе 16, есть несколько подходов к изучению монополей. У каждого из них свои преимущества. В книге мы пользуемся сразу всеми этими подходами. Логически было бы проще придерживаться какой-то одной точки зрения. Однако в каждом из подходов имеются некоторые не разрешённые до сих пор технические трудности. Чтобы обойти их, мы комбинируем различные подходы, следуя линии наименьшего сопротивления.

Магнитный заряд k решения уравнений Богомольного может быть произвольным целым числом. Когда k простых монополей далеко отстоят друг от друга, их суперпозиция приближённо совпадает с некоторым k -монопольным решением. Конфигурация, состоящая из k удалённых монополей, действительно может быть статической, поскольку магнитное отталкивание между монополями сбалансировано силой притяжения, возникающей благодаря наличию поля Хиггса. Совокупность всех k -монопольных решений параметризуется некоторым $4k$ -мерным многообразием M_k . Оно подробно описывается в главе 2. При $k = 1$ пространство M_1 изоморфно $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Это означает, что 1-монополь определяется точкой в $\mathbb{R}^3$ (своим положением) и фазовым углом. При $k > 1$ область многообразия M_k вблизи ∞ приближённо совпадает с (неупорядоченным) произведением k копий многообразия M_1 . Точки этой асимптотической области представляют конфигурации, состоящие из k удалённых друг от друга монополей. Однако решения, отвечающие внутренним точкам многообразия M_k , не похожи на комбинацию простых монополей. Отличие внутренней части многообразия M_k от произведения многообразий M_1 существенным образом влияет на процессы, происходящие с монополями. Именно поэтому основная тема нашей книги — исследование взаимодействия монополей — и представляет такой интерес.

Мантон [35] выдвинул соображения, показывающие, что геодезический поток на M_k по отношению к естественной метрике (индуцированной L^2 -нормой на $\mathbb{R}^3$) приближённо описывает низкоэнергетическую эволюцию монополей. Эти соображения (мы обсуждаем их в главе 1) основаны на аналогии с частицей в $\mathbb{R}^n$, движущейся в потенциальном поле V . Положения равновесия образуют подпространство $M \subset \mathbb{R}^n$, на котором V достигает минимума. При движении с энергией, близкой к этому минимуму, траектория частицы, вектор начальной скорости которой касался M , близка к соответствующей геодезической на M (с некоторыми малыми осцилляциями в трансверсальных направлениях).

При исследовании динамики монополей пространство $\mathbb{R}^n$ заменя-

ется на бесконечномерное многообразие, а M — на M_k . Существенно, что уравнения Богомольного дают абсолютный минимум потенциальной энергии. Мы находимся теперь в бесконечномерной ситуации, и потому аргументация Мантона, хотя и правдоподобная с физической точки зрения, требует аккуратного аналитического обоснования. Мы не будем проводить этот анализ и отметим лишь, что похожая задача подробно изучалась в статье Эбина [17].

Таким образом, чтобы осуществить программу Мантона, нам надо исследовать риманову метрику на M_k . В частности, нам нужно показать, что она *конечна* и *полна*. Потеря конечности означала бы, что метрика бесконечна (или не определена) в некоторых направлениях. Это приводило бы к ограничениям на движение монополей. Неполнота означала бы, что монополи (а значит, и магнитные заряды) исчезали бы за конечное время. Свойства конечности и полноты доказываются в главе 3 с помощью основных аналитических результатов Таубса. Эти результаты позволяют также исследовать асимптотическую область в M_k , в которой k -монополь распадается на отдельные монополи.

Для непосредственного определения метрики на M_k необходимо вычислить L^2 -нормы нулевых мод (решений линеаризованных уравнений). Это слишком сложная, а поэтому вряд ли приемлемая процедура. К счастью, однако, метрика на M_k обладает некоторыми общими свойствами симметрии, которыми можно эффективно воспользоваться. Основное наблюдение состоит в том, что метрика на всех пространствах M_k гиперкэлерова. Это означает, что группа голономии метрики лежит в симплектической группе $\mathrm{Sp}(k) \subset \mathrm{SO}(4k)$. Формально это можно доказать, привлекая бесконечномерный вариант *гиперкэлеровой конструкции факторпространств* [26], причём такое доказательство требует обоснований, использующих аналитические результаты Таубса. Мы обсуждаем эти вопросы в главе 4.

При изучении гиперкэлеровых многообразий важную роль играет обобщение теории твисторов Пенроуза, предложенное Саламоном [40; 41]. Твисторная конструкция позволяет соотнести каждому гиперкэлерову многообразию M комплексное многообразие Z (твисторное пространство для M) вместе с некоторыми дополнительными данными. За исключением вещественной инволюции, эти данные относятся к голоморфной геометрии пространства Z (здесь можно провести аналогию с алгебраическим многообразием, определённым над полем вещественных чисел). Более того, многообразие Z вместе с дополнительными данными несёт ту же информацию, что и гиперкэлерово многообразие M . Поэтому в принципе для нахождения гиперкэлеровой метрики на пространстве параметров монополей M_k достаточно построить соответствующее твисторное пространство Z_k (вместе с дополнительными данными). Это составляет предмет главы 5.

В главе 6 мы интерпретируем твисторное пространство в терми-

нах симметрических произведений. Эта интерпретация привлекательна тем, что она связывает воедино точку зрения на монополи как на частицы с твисторным описанием. Кроме того, она оказывается весьма общей. Она применима ко всем калибровочным группам, а не только к группе $SU(2)$.

Группа сдвигов пространства R^3 и группа S^1 поворотов фазового угла естественно (и свободно) действуют на M_k . Производя факторизацию по действию этих групп, мы вводим в главе 2 редуцированное (или относительное) пространство монополей M_k^0 размерности $4k-4$. В главе 4 доказывается, что k -листное накрытие $\tilde{M}_k$ пространства M_k изометрически разлагается в произведение

$$\tilde{M}_k \cong R^3 \times S^1 \times \tilde{M}_k^0,$$

где $\tilde{M}_k^0$ — это k -листное (универсальное) накрытие пространства M_k^0 . Кроме того, пространство M_k^0 неприводимо как риманово многообразие и тоже гиперкэлерово. Следовательно, геодезическое движение на M_k разлагается (локально) в геодезическое движение на M_k^0 и геодезическое движение (по отношению к плоской метрике) на $R^3 \times S^1$. Точку в R^3 , отвечающую k -монополю, можно рассматривать как центр масс, и её движение определяет (сохраняющийся) импульс системы. Движение по S^1 определяет электрический заряд [35]. Заметим, что в отличие от магнитного заряда эта величина в нашей ситуации не целочисленна. Напротив, она принимается очень малой. Оставшееся движение по M_k^0 (движение относительно центра масс) представляет наибольший интерес. Неприводимость метрики означает, что дальнейшее разложение динамики в композицию более простых невозможно.

До сих пор все наши рассуждения относились к случаю произвольного k . Оставшиеся главы посвящены исключительно случаю $k=2$. Для исследования четырёхмерного многообразия M_2^0 мы отойдём от общей теории, развитой в главе 5, и применим более прямой подход.

При $k=2$ спектральная кривая k -монополя оказывается эллиптической кривой. Опираясь на этот факт, Уртюбиз [27] дал явное описание пространства M_2^0 . Кроме того, он показал, что у типичного 2-монополя имеются три главные оси. Обзор этих результатов Уртюбиза приведён в главе 7. Там же они сравниваются с результатами Доналдсона о параметризации (описанной в главе 2) пространства M_k^0 рациональными функциями. В следующей главе мы вычисляем три «спектральных радиуса», соответствующие трём главным осям 2-монополя, и используем эту информацию для нахождения конформной структуры пространства M_2^0 .

В главе 9 мы исходим из другой точки зрения. Поскольку $Sp(1) = SU(2)$, в размерности 4 многообразии гиперкэлерово тогда и только тогда, когда его тензор Римана антиавтотуален (откуда следует, что это многообразие эйнштейново с нулевой скалярной

кривизной). Далее, на пространстве M_2^0 имеется естественное действие группы $SO(3)$, индуцированное вращениями вокруг центра масс в R^3 . Следовательно, метрика на M_2^0 является $SO(3)$ -инвариантной, и её тензор Римана антиавтотуален. Условия антиавтотуальности тензора Римана сводятся при наличии $SO(3)$ -инвариантности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описанной Гиббонзом и Поупом [20]. Глава 9 посвящена качественному изучению этих уравнений и, в частности, индуцированных уравнений для конформной структуры (которая для многообразия M_2^0 была найдена в главе 8). Мы показываем, что эта система имеет по существу единственное решение, определяющее полное многообразие, и, следовательно, это многообразие должно совпадать с M_2^0 .

Хотя формула, полученная в главе 8, — явная, в неё входят эллиптические интегралы, и извлечь из неё аналитическим путём информацию о решении не так просто. Численные вычисления позволяют найти форму решения, а в главе 10 мы выводим, исходя непосредственно из дифференциального уравнения, ряд полезных неравенств, характеризующих решение. После этого в главе 11, завершая эту часть наших исследований, мы переходим от формулы из главы 8 для конформной структуры к явному виду метрики на M_2^0 .

В главе 12 с помощью этой явной формулы для метрики выносятся асимптотические разложения, описывающие поведение пары удалённых друг от друга монополей и поведение вблизи «состояний столкновения». Мы исследуем также геометрию вполне геодезических поверхностей в M_2^0 , представляющих монополи, у которых одна из главных осей фиксирована. Наиболее интересная из таких поверхностей имеет форму воронки. Геодезическое движение на этих поверхностях изучается в главе 13. В частности, оказывается, что геодезические на воронке бывают двух типов: геодезические первого типа «проваливаются» в отверстие воронки, а второго — «возвращаются обратно».

Наконец, в главе 14 результаты о геодезическом движении, полученные в главе 13, интерпретируются в терминах рассеяния монополей. Мы показываем сперва, что при прямом столкновении монополи (без электрического заряда) рассеиваются под углом 90° к исходному направлению. Плоскость рассеяния определяется начальной относительной фазой. Затем мы переходим к случаю, когда начальные скорости лежат в одной из двух главных плоскостей, проходящих через ось Хиггса. Результат процесса зависит теперь от прицельного параметра μ , измеряющего отклонение начального направления движения от направления на центр. Мы описываем эту зависимость. Для одной из главных плоскостей угол рассеяния монотонно убывает от 90° до 0° . Для другой главной плоскости ситуация сложнее. Этот процесс рассеяния соответствует геодезическому движению по поверхности, имеющей форму воронки (одной из вполне геодезических поверхностей, описанных в главе 13). Оказывается, в частности, что

при малых μ вылетающие монополи приобретают (равные по абсолютной величине и противоположные по знаку) электрические заряды и, таким образом, становятся дионами. Поэтому для каждого монополя в отдельности электрический заряд не сохраняется. Это связано с асимптотической $U(1)$ -симметрией пространства M_2^0 , которая нарушается во внутренней его части.

Много вопросов в этой области остаются открытыми. Прежде всего, хотя метрика на M_2^0 и описана явно, про геодезические относительно этой метрики известно очень мало; мы нашли лишь геодезические весьма специального вида, а именно инвариантные относительно некоторой инволюции пространства R^3 . Было бы интересно знать, существуют ли замкнутые геодезические, или геодезические, которые приходят из бесконечности и «захватываются» конечной областью.

Далее, было бы интересно обобщить полученные результаты в двух направлениях: описать рассеяние k -монопольей (или, другими словами, геодезическое движение на M_k^0) при $k > 2$ и исследовать ситуацию для случая других групп Ли, скажем $SU(n)$ (все наши исследования относятся к случаю группы $SU(2)$). Пространства монопольей в случае других групп Ли по-прежнему гиперкэлеровы. Поэтому для их исследования можно применять те же методы. Хотя мы и не касались этого, по-видимому, при исследовании геометрии этих пространств обнаруживаются некоторые новые явления, особенно в вырожденном случае, когда поле Хиггса ϕ имеет совпадающие собственные значения на бесконечности.

Мантон и Гиббонз [19] применили результаты о пространстве M_2^0 для более подробного анализа классического рассеяния монопольей. Они исследовали также и квантовое рассеяние. В частности, изучая излучение и поглощение дионами массивных заряженных мезонов, они дали естественное объяснение упомянутому выше явлению обмена электрическим зарядом.

Наконец, необходимо аналитически обосновать утверждение Мантона о том, что низкоэнергетическая динамика монопольей приближенно определяется геодезическим потоком на M_1 . Сюда же относится вопрос о том, как зависит от скорости интервал времени, на протяжении которого это приближение справедливо. Кроме того, следовало бы доказать, что это приближение работает (на достаточно больших интервалах времени) и для монопольей т'Хоофта – Полякова при малых λ .

Мы благодарны многим коллегам за советы и помощь. Постановка задачи принадлежит Нику Мантону. Клифф Таубс и Саймон Доналдсон помогали нам в аналитических вопросах, а с Гари Гиббонзом мы консультировались по поводу уравнений Эйнштейна. При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений, фигурирующих в главе 9, нам были весьма полезны беседы с Джоном Оккендоном, а Дейвид Атья занимался по нашей просьбе соответствующими машинными вычислениями.

Основные результаты книги в сжатом виде были представлены в статьях [3] и [4]. По общим вопросам анализа монопольей стандартной ссылкой служит монография [30], а более свежие результаты о получении решений с помощью твисторных методов можно найти в [22; 47; 9; 36].

Уравнения, описывающие монополи

В этой главе мы кратко опишем физические конструкции, в которых возникают уравнения Богомольного, описывающие изучаемые нами монополи. Дальнейшие сведения, о связях между математикой и физикой монополей читатель может найти в [30; 12; 11].

Прототипом калибровочной теории, в которой возникают монополи, служит теория электромагнитного поля. В дифференциально-геометрических терминах электрическое поле E в теории Максвелла есть 1-форма на $\mathbb{R}^3$, а магнитное поле B — это 2-форма. Из уравнений Максвелла следует, что 2-форма (максвелловский тензор поля) $F = B + cdt \wedge E$ замкнута в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4$. Поэтому её можно записать в виде $F = dA$ для некоторой 1-формы (электромагнитного потенциала) A . Частицы, описываемые этой теорией, называются фотонами.

Величина A определяется неоднозначно: мы можем сделать замену $A \rightarrow A + d\lambda$. С точки зрения калибровочной теории это связано с неоднозначностью $\psi \rightarrow e^{i\lambda} \psi$ в выборе волновой функции. Поэтому геометрически величину A следует рассматривать как связность на (тривиальном) главном расслоении со структурной группой $U(1)$ (определяющей неоднозначность фазы), а поле F — как кривизну этой связности. Уже на этом уровне заметно различие между электрическим и магнитным полями: при фиксированном значении времени $t = t_0$ магнитное поле B есть кривизна связности на $\mathbb{R}^3$, электрическое же поле E не допускает такой геометрической интерпретации.

Калибровочно-инвариантная плотность действия в электромагнитной теории имеет вид (F, F) (здесь мы используем стандартные обозначения для внутреннего произведения 2-форм в пространстве Минковского). Отсюда получаются уравнения движения для поля A (уравнения Максвелла без источников):

$$dF = 0 = d \star F.$$

Теория Янга–Миллса — непосредственное обобщение электромагнитной теории. В ней вместо абелевой группы $U(1)$ используется некоторая неабелева группа Ли G . Векторный потенциал A интерпретируется как связность на главном G -расслоении. С физической точки зрения эта теория описывает частицы, аналогичные фотону, по одной для каждого генератора алгебры Ли группы G . По аналогии с электромагнетизмом плотность действия выбирается в виде (F, F) . Она калибровочно-инвариантна и приводит к уравнениям Янга–Миллса:

$$D_A F = 0 = D_A \star F,$$

где $D_A = d + A$ — ковариантная внешняя производная, содержащая связность A .

Один из недостатков теории Янга–Миллса, выявившийся почти сразу после её появления, заключается в том, что она описывает частицы, имеющие, подобно фотону, нулевую массу. Физически введение массы означает добавление к действию члена типа $m^2 Q(A)$, где $Q(A)$ — некоторое квадратичное по векторному потенциалу выражение. Такой член, однако, не может быть калибровочно-инвариантным. Один из способов обойти эту трудность состоит в том, чтобы ввести в калибровочную теорию новое поле — поле Хиггса ϕ .

На математическом языке ϕ — это сечение векторного расслоения, ассоциированного с помощью некоторого представления с главным G -расслоением, на котором определена связность A . С физической точки зрения ϕ — это скалярное поле, преобразующееся по некоторому представлению группы G . Часто выбирают присоединенное представление. Плотность действия имеет вид

$$a = (F, F) + (D\phi, D\phi) + V(\phi),$$

где V — калибровочно-инвариантный потенциал, а $D\phi$ — ковариантная производная величины ϕ . Действие такого вида называется действием Янга–Миллса–Хиггса.

Чтобы понять, как поле A приобретает массу, рассмотрим поле Хиггса в основном состоянии, т.е. в точке минимума потенциала V . Поскольку V калибровочно-инвариантен, минимум достигается не при какой-то одной конфигурации поля ϕ , а на всей орбите поля ϕ относительно группы калибровочных преобразований. Поэтому любое ϕ в основном состоянии может быть калибровочным преобразованием превращено в постоянное поле Хиггса ϕ_0 . В этой калибровке (поскольку ϕ_0 — константа)

$$D\phi_0 = d\phi_0 + A\phi_0 = A\phi_0.$$

Таким образом,

$$(D\phi_0, D\phi_0) = (A\phi_0, A\phi_0).$$

Это даёт требуемый квадратичный по A член. Значение массы определяется константой ϕ_0 . Когда ϕ преобразуется по присоединённому представлению, чаще всего в качестве потенциала выбирают полином четвёртой степени $V = \lambda(1 - |\phi|^2)^2$. Это отвечает плотности действия

$$(1.1) \quad a = (F, F) + (D\phi, D\phi) + \lambda(1 - |\phi|^2)^2.$$

Соответствующие вариационные уравнения называются уравнениями Янга–Миллса–Хиггса. Они записываются так:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} D_A F &= 0 \text{ (тождество Бьянки)} \\ D_A \star F &= -[\phi, D_A \phi], \\ D_A \star D_A \phi &= 2\lambda\phi(|\phi|^2 - 1). \end{aligned}$$

Если магнитные монополи существуют, то классический предел соответствующей квантовой теории должен описываться солитоноподобными решениями уравнений (1.2).

Хотя введение уравнений (1.2) было мотивировано физическими соображениями — требованиями калибровочной инвариантности, наличия массы, а также простоты, — их математическая согласованность и широкая область применимости стимулировали их дальнейшее изучение. Остановимся на некоторых частных случаях системы Янга — Миллса — Хиггса.

(1) Совершенно независимо от калибровочной теории частиц, Гинзбург и Ландау ввели в 1950 г. действие (1.1) для математического описания сверхпроводимости. В той ситуации, с которой они имели дело, калибровочной группой была группа $U(1)$, а поле Хиггса было комплексно. Но это можно рассматривать как внедиагональную компоненту, поля Хиггса со значениями в $SU(2)$, когда $SU(2)$ -связность сводится к $U(1)$ -связности. Потенциал четвёртой степени был введён в основном по феноменологическим соображениям. Особенно интересная ситуация возникает в двумерной версии, где доказано [30] существование статических полюсоподобных решений — «вихрей».

(2) Рассмотрим уравнения движения для чистой теории Янга — Миллса не в пространстве Минковского, а в евклидовом пространстве R^4 . Решения, инвариантные относительно различных групп евклидовых движений, можно интерпретировать как решения полевых уравнений в пространствах меньшей размерности. Виттен доказал, что $SO(3)$ -инвариантные решения уравнений Янга — Миллса с группой $SU(2)$ соответствуют полной абелевой системе Янга — Миллса — Хиггса (при некотором конкретном значении коэффициента λ) на двумерном пространстве постоянной отрицательной кривизны. Как показано в [30], уравнения Гинзбурга — Ландау на R^2 возникают при аналогичной размерной редукции из чистой теории Янга — Миллса на $S^2 \times R^2$ с метрикой произведения.

(3) Рассмотрим в евклидовом пространстве R^4 уравнения Янга — Миллса, инвариантные относительно сдвигов вдоль оси x_4 . Мы можем записать форму связности в виде

$$A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + \phi dx_4,$$

где A_i и ϕ — функции на R^3 со значениями в некоторой алгебре Ли. Тогда евклидово действие Янга — Миллса можно выразить через кривизну и ковариантную производную связности $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ на R^3 . Оно запишется так:

$$a = (F, F) + (D\phi, D\phi).$$

Поэтому теория Янга — Миллса — Хиггса на R^3 с $\lambda = 0$ получается размерной редукцией из чистой теории Янга — Миллса на R^4 с евклидовой метрикой. Среди решений уравнений Янга — Миллса на R^4

выделяются автодуальные связности, удовлетворяющие уравнению $F = *F$. Это порождает частные решения уравнений Янга — Миллса — Хиггса на R^3 . Именно эти решения мы будем использовать для описания статических монополей.

Наконец, имеется формальная механическая интерпретация уравнений (1.2) с $\lambda = 0$. Из неё следует предположенный Мантоном [35] рецепт приближённого исследования динамики монополей которому мы и следуем в этой книге. Начнём с рассмотрения пространства $\mathcal{A}$ всех пар (A, ϕ) на R^3 , состоящих из векторного потенциала и поля Хиггса с подходящими условиями убывания на бесконечности. На $\mathcal{A}$ действует группа $\mathcal{G}$ калибровочных преобразований. Обозначим факторпространство $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ через $\mathcal{C}$. Касательный вектор $\dot{c}$ к пространству $\mathcal{C}$ будем задавать в виде вектора $(\dot{A}, \dot{\phi})$ в пространстве $\mathcal{A}$, ортогонального к орбите калибровочной группы, проходящей через точку (A, ϕ) . Это означает, что $d_A^* \dot{A} + [\phi, \dot{\phi}] = 0$. При таком выборе формула

$$(1.3) \quad h(\dot{c}, \dot{c}) = \int_{R^3} (\dot{A}, \dot{A}) + (\dot{\phi}, \dot{\phi})$$

задаёт (формально) риманову метрику на $\mathcal{C}$. Кроме того, имеется потенциальная функция U на $\mathcal{C}$, определённая формулой

$$(1.4) \quad U = \frac{1}{2} \int_{R^3} (F, F) + (D\phi, D\phi).$$

Рассмотрим движение частицы в потенциальном поле U на бесконечномерном многообразии $\mathcal{C}$. Записывая соответствующие уравнения в гамильтоновом формализме, можно обнаружить, что эволюция частицы описывается решением уравнений Янга — Миллса — Хиггса с $\lambda = 0$.

Это — формальное утверждение. Однако можно продолжить аналогию и рассмотреть подмногообразие M в $\mathcal{C}$, на котором U достигает минимума. Если начальное направление движения частицы было касательным к M , то естественно ожидать, что изменение величины U при последующем движении будет малым. Поэтому оно будет определяться кинетическим членом (1.3) и, следовательно, будет движением по геодезическим на M (по отношению к индуцированной метрике).

Чтобы воспользоваться этой процедурой, нам надо найти абсолютный минимум величины U на $\mathcal{A}$ и индуцированную метрику.

Потребуем, чтобы $SU(2)$ -связность A и поле Хиггса ϕ (в присоединённом представлении) удовлетворяли условиям $|F| = O(r^{-2})$ и $|D\phi| = O(r^{-2})$. Это обеспечивает конечность функции U . Из второго условия следует, что $|\phi|$ стремится к константе на бесконечности. Выберем её равной 1; это последнее условие, напоминающее о потенциальном члене $\lambda(1 - |\phi|^2)^2$, который мы положили равным нулю.

Интегрируя по шару радиуса R , находим

$$(1.5) \quad \int_{B_R} (F, F) + (D\phi, D\phi) = \int_{B_R} (F - *D\phi, F - *D\phi) + 2(*D\phi, F).$$

Согласно тождеству Бьянки, $DF = 0$, поэтому

$$d(\phi, F) = (D\phi, F) = (*D\phi, F).$$

Отсюда следует, что второй член в интеграле сводится к интегралу по поверхности сферы радиуса R от 2-формы (ϕ, F) :

$$(1.6) \quad \int_{B_R} (*D\phi, F) = \int_{S_R} (\phi, F).$$

Рассмотрим двумерное комплексное векторное расслоение над S_R со связностью A . Так как $|\phi| \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$, собственные подпространства оператора ϕ задают комплексные линейные расслоения над S_R с классами Черна, равными $\pm k$. Из условия убывания $|D\phi| = O(r^{-2})$ следует, что кривизна этих линейных расслоений приближённо равна проекции на них кривизны F . Таким образом, поскольку $|\phi| \rightarrow 1$, мы получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (\phi, F) = \pm 4\pi k.$$

Подставляя это в (1.5), находим

$$\int_{R^3} (F, F) + (D\phi, D\phi) = \int_{R^3} |F - *D\phi|^2 \pm 8\pi k.$$

Поэтому при $k \geq 0$ абсолютный минимум функции U равен $4\pi k$ и достигается на конфигурациях (A, ϕ) , удовлетворяющих уравнениям Богомольного

$$(1.7) \quad F = *D\phi.$$

Эти уравнения получаются из автодуальных уравнений Янга–Миллса в евклидовом пространстве R^4 при размерной редукции к R^3 . Целое число k есть заряд решения.

Итак, причина, заставляющая нас рассматривать метрику на пространстве модулей калибровочно-эквивалентных классов решений уравнений Богомольного заключается в том, что они дают абсолютный минимум потенциала U на $\mathcal{C}$, и аналогия с механикой показывает, что изучая эту метрику, мы получаем способ приближения к полной, зависящей от времени системе Янга–Миллса–Хиггса.

В случае группы $U(1)$ уравнения Богомольного сводятся к уравнениям

$$B = \text{grad } \phi,$$

описывающим при $\phi = k/2r$ первый магнитный монополяр, предложенный Дираком в 1931 г. [13]. В современных терминах условие квантования (условие целочисленности параметра k) — это в точности утверждение о том, что B есть кривизна связности на некотором линейном расслоении над $R^3 \setminus \{0\}$. Наши монополи ведут себя на бесконечности как монополяр Дирака, но ввиду своей неабелевой природы имеют конечную энергию.

Геометрия пространств монополей

Начнём с короткого обзора определений монополей и их пространств параметров (или модулей). Подробности можно найти в [22] или [30]. В качестве калибровочной группы G мы выбираем $SU(2)$, хотя в принципе наши методы могут быть распространены и на случай произвольной группы G .

Монополяр описывается конфигурацией, состоящей из калибровочного поля (или связности) $A_\mu(x)$, $\mu = 1, 2, 3$, и поля Хиггса $\phi(x)$. Все эти функции гладко зависят от точки $x \in R^3$ и принимают значения в алгебре Ли группы $SU(2)$. Как обычно, ковариантная производная $D_\mu \phi$ определяется формулой

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi],$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, а кривизна F — формулой

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Для монополя эти функции должны удовлетворять уравнениям Богомольного

$$(2.1) \quad D\phi = *F,$$

где $*$ — оператор дуальности на R^3 . Кроме того, мы требуем, чтобы энергия, совпадающая по существу с L^2 -нормой кривизны F , была конечна. Отсюда, как показано в [30], следует, что

$$(2.2) \quad |\phi| \rightarrow \alpha \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

для некоторой константы α . Здесь $|\phi|$ обозначает инвариантную норму на алгебре Ли, которую мы для определённости выберем в виде

$$(2.3) \quad |T|^2 = -\frac{1}{2} \text{tr } T^2.$$

Хотя значение параметра α имеет физический смысл, мы можем (при $\alpha \neq 0$), выполнив преобразование подобия в R^3 , считать, что $\alpha = 1$. На самом деле мы наложим более сильные асимптотические

$$(1.5) \quad \int_{B_R} (F, F) + (D\varphi, D\varphi) = \int_{B_R} (F - *D\varphi, F - *D\varphi) + 2(*D\varphi, F).$$

Согласно тождеству Бьянки, $DF = 0$, поэтому

$$d(\varphi, F) = (D\varphi, F) = (*D\varphi, F).$$

Отсюда следует, что второй член в интеграле сводится к интегралу по поверхности сферы радиуса R от 2-формы (φ, F) :

$$(1.6) \quad \int_{B_R} (*D\varphi, F) = \int_{S_R} (\varphi, F).$$

Рассмотрим двумерное комплексное векторное расслоение над S_R со связностью A . Так как $|\varphi| \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$, собственные подпространства оператора φ задают комплексные линейные расслоения над S_R с классами Черна, равными $\pm k$. Из условия убывания $|D\varphi| = O(r^{-2})$ следует, что кривизна этих линейных расслоений приближённо равна проекции на них кривизны F . Таким образом, поскольку $|\varphi| \rightarrow 1$, мы получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (\varphi, F) = \pm 4\pi k.$$

Подставляя это в (1.5), находим

$$\int_{R^3} (F, F) + (D\varphi, D\varphi) = \int_{R^3} |F - *D\varphi|^2 \pm 8\pi k.$$

Поэтому при $k \geq 0$ абсолютный минимум функции U равен $4\pi k$ и достигается на конфигурациях (A, φ) , удовлетворяющих уравнениям Богомольного

$$(1.7) \quad F = *D\varphi.$$

Эти уравнения получаются из автодуальных уравнений Янга–Миллса в евклидовом пространстве R^4 при размерной редукции к R^3 . Целое число k есть заряд решения.

Итак, причина, заставляющая нас рассматривать метрику на пространстве модулей калибровочно-эквивалентных классов решений уравнений Богомольного заключается в том, что они дают абсолютный минимум потенциала U на $\mathcal{C}$, и аналогия с механикой показывает, что изучая эту метрику, мы получаем способ приближения к полной, зависящей от времени системе Янга–Миллса–Хиггса.

В случае группы $U(1)$ уравнения Богомольного сводятся к уравнениям

$$B = \text{grad } \varphi,$$

описывающим при $\varphi = k/2r$ первый магнитный монополю, предложенный Дираком в 1931 г. [13]. В современных терминах условие квантования (условие целочисленности параметра k) — это в точности утверждение о том, что B есть кривизна связности на некотором линейном расслоении над $R^3 \setminus \{0\}$. Наши монополи ведут себя на бесконечности как монополю Дирака, но ввиду своей неабелевой природы имеют конечную энергию.

Геометрия пространств монополей

Начнём с короткого обзора определений монополей и их пространств параметров (или модулей). Подробности можно найти в [22] или [30]. В качестве калибровочной группы G мы выбираем $SU(2)$, хотя в принципе наши методы могут быть распространены и на случай произвольной группы G .

Монополю описывается конфигурацией, состоящей из калибровочного поля (или связности) $A_\mu(x)$, $\mu = 1, 2, 3$, и поля Хиггса $\varphi(x)$. Все эти функции гладко зависят от точки $x \in R^3$ и принимают значения в алгебре Ли группы $SU(2)$. Как обычно, ковариантная производная $D_\mu \varphi$ определяется формулой

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + [A_\mu, \varphi],$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, а кривизна F — формулой

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Для монополя эти функции должны удовлетворять уравнениям Богомольного

$$(2.1) \quad D\varphi = *F,$$

где $*$ — оператор дуальности на R^3 . Кроме того, мы требуем, чтобы энергия, совпадающая по существу с L^2 -нормой кривизны F , была конечна. Отсюда, как показано в [30], следует, что

$$(2.2) \quad |\varphi| \rightarrow \alpha \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

для некоторой константы α . Здесь $|\varphi|$ обозначает инвариантную норму на алгебре Ли, которую мы для определённости выберем в виде

$$(2.3) \quad |T|^2 = -\frac{1}{2} \text{tr } T^2.$$

Хотя значение параметра α имеет физический смысл, мы можем (при $\alpha \neq 0$), выполнив преобразование подобия в R^3 , считать, что $\alpha = 1$. На самом деле мы наложим более сильные асимптотические

условия (как в [22]), а именно:

$$(2.4) \quad \begin{cases} |\varphi| = 1 - \frac{k}{2r} + O(r^{-2}), \\ \frac{\partial |\varphi|}{\partial \Omega} = O(r^{-2}), \\ |D\varphi| = O(r^{-2}), \end{cases}$$

где r — расстояние до начала координат в $\mathbb{R}^3$, а $\partial/\partial\Omega$ обозначает производные по углам. Усовершенствуя доказательство соотношения (2.2), можно показать (см. [30]), что в действительности всё это следует из условия конечности энергии.

Величина k в (2.4) есть положительное целое число, равное степени отображения

$$|\varphi|^{-1}\varphi: S_R^2 \rightarrow S^2,$$

где S_R^2 — сфера большого радиуса R в $\mathbb{R}^3$, а S^2 — единичная сфера в алгебре Ли. В подходящих единицах величина k есть магнитный заряд монополя.

Отождествляя калибровочно-эквивалентные монополи (заряда k), мы получаем пространство параметров (или модулей). Обозначим его через N_k . На самом деле в большинстве случаев удобнее рассматривать пространство M_k , получаемое добавлением некоторой окружности (фазового множителя). Простейший способ определить M_k заключается в следующем. Фиксируем направление в $\mathbb{R}^3$ (скажем, направление x_1), используем калибровку $A_1 = 0$ и разрешим только те калибровочные преобразования, которые стремятся к единице при $x_1 \rightarrow \infty$. Вследствие условий убывания (2.4) несущественно, будем ли мы налагать это условие вдоль всех прямых, параллельных оси x_1 , или же только вдоль самой этой оси. Отсюда следует, что M_k расслаивается над N_k со слоем S^1 , а также что M_k зависит лишь от выбранного направления, т.е. от выделенной точки, скажем $*$, на сфере в ∞ . Если нам нужно будет подчеркнуть зависимость от выбора направления, мы будем писать $M_k(*)$.

Пространство M_k можно определить более хитроумным способом, уже не зависящим от выбора направления. Обозначим через H линейное расслоение Хопфа над S^2 и образуем векторное расслоение $H^k \oplus H^{-k}$ над S^2 . Продолжим его вдоль радиальных направлений до расслоения над $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = S^2 \times \mathbb{R}^+$. Это даёт $SU(2)$ -расслоение E_k над $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, на котором заданы связность, поле Хиггса и естественное действие группы $SO(3)$. Прделанный в [22] анализ асимптотического поведения монополей показывает, что любой монополи заряд k асимптотически изоморфен E_k . Группа автоморфизмов расслоения E_k есть $U(1)$. Отсюда следует, что этот асимптотический автоморфизм (обозначим его, скажем, через α) определён с точностью до преобразования из группы $U(1)$. Кроме того, поскольку при $k \neq 0$ связности,

задаваемые монополями, неприводимы, единственный элемент из $U(1)$, который продолжается до автоморфизма монополя, есть -1 . Поэтому если мы сделаем монополи «жёстким», зафиксировав α с точностью до знака, то классы изоморфизма таких «жёстких» монополей будут параметризоваться некоторым пространством M_k , расслаивающимся над N_k со слоем, изоморфным окружности. Точнее говоря, на M_k свободно действует группа $U(1)/\{\pm 1\}$, причём соответствующее факторпространство изоморфно N_k .

Аutomорфизмы расслоения E_k определяются своими значениями в одной точке, поэтому мы можем отождествить пространства $M_k(*)$ и M_k . Второе определение пространства M_k удобно тем, что оно выявляет естественное действие группы евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$, в частности группы вращений $SO(3)$, которая естественно действует (с точностью до множителя ± 1) на расслоении E_k .

Подгруппа $SO(2)$ группы $SO(3)$, сохраняющая выделенное направление, естественно действует на $M_k(*)$, однако следует помнить, что это действие не согласовано с отождествлением $M_k \rightarrow M_k(*)$. Дело в том, что точка пространства M_k представляет расслоение E монополя вместе с асимптотическим изоморфизмом $\alpha: E(*) \rightarrow E_k(*)$, а точка пространства $M_k(*)$ представляет E вместе с изоморфизмом $E(*) \rightarrow C^2$. Группа $U(1)$ действует на $E_k(*)$ нетривиально, по формуле

$$\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix},$$

действие же её на C^2 тривиально; поэтому действия на M_k и $M_k(*)$ различны.

Как мы только что отметили, евклидова группа и группа $U(1)$ автоморфизмов расслоения E_k действуют на M_k . Производя факторизацию по группе $U(1)$ и группе сдвигов пространства $\mathbb{R}^3$, мы получаем пространство M_k^0 :

$$(2.5) \quad M_k^0 = \frac{M_k}{U(1) \times \mathbb{R}^3} = \frac{N_k}{\mathbb{R}^3}.$$

Это пространство параметризует монополи с точностью до сдвигов. Можно выразить это иначе. Поскольку каждый монополи имеет хорошо определенный центр (см. гл. 5), пространство M_k^0 параметризует монополи с фиксированным центром.

При $k = 1$ существует единственный монополи с фиксированным центром — монополи Прасада — Соммерфилда. Поэтому $M_1^0 = 0$ (точка), и, следовательно,

$$(2.6) \quad M_1 = \mathbb{R}^3 \times S^1.$$

Анализ монополей основан на изучении обыкновенного дифференциального оператора

$$(2.7) \quad D_\mu = \nabla_\mu - i\varphi,$$

действующего на сечения расслоения E над фиксированной ориентированной прямой u . Здесь ∇_u — ковариантная производная вдоль u . В частности, мы будем изучать рассеяние, связанное с этим оператором. Это означает следующее. Фиксируем линейный параметр t на прямой u и рассмотрим дифференциальное уравнение $D_u s = 0$. Оно имеет два линейно-независимых решения. При $t \rightarrow +\infty$ мы можем (см. гл. 16) выбрать s_0, s_1 так, чтобы

$$\begin{aligned}s_0(t) t^{-k/2} e^t &\rightarrow e_0, \\ s_1(t) t^{k/2} e^{-t} &\rightarrow e_1,\end{aligned}$$

где e_0, e_1 — постоянный в асимптотической калибровке базис в слое расслоения E над $+\infty$. Таким образом, s_0 экспоненциально убывает. Аналогично существует решение s'_0 , асимптотически убывающее при $t \rightarrow -\infty$. Оно единственно с точностью до константы. Запишем его как линейную комбинацию решений s_0 и s_1 :

$$s'_0 = a s_0 + b s_1.$$

Отношение a/b не зависит от выбора решения s'_0 . Это и есть функция рассеяния S , которую мы связываем с прямой u . Итак, положим

$$(2.8) \quad S(u) = \frac{a}{b} \in \mathbb{C}P^1.$$

Эта величина зависит от базиса e_0, e_1 расслоения E над бесконечной точкой прямой u .

Далее, фиксируем изоморфизм

$$(2.9) \quad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

Другими словами, выберем из координат (x_1, x_2, x_3) пару, скажем x_2 и x_3 , и объединим их в одну комплексную координату $z = x_2 + ix_3$. Пусть $u = u(z)$ — прямая, параллельная оси x_1 и проходящая через точку $(0, z)$. В качестве параметра на этой прямой выберем $t = x_1$. Тогда для монополя, тривиализованного над точкой $*$ $= (\infty, 0, 0)$, мы имеем корректно определенную точку $S(z) = S(u(z))$ (заданную формулой (2.8)) пространства $\mathbb{C}P^1$. Это сопоставление зависит лишь от точки $t \in M_k(*)$, представляющей монополь. Основным результатом Доналдсона [15] можно сформулировать следующим образом:

Теорема (2.10) (Доналдсон). Для любой точки $t \in M_k(*)$ функция рассеяния $S_m(z)$ есть рациональная функция степени k , такая что $S_m(\infty) = 0$. Сопоставление $t \rightarrow S_m$ определяет диффеоморфизм

$$M_k(*) \rightarrow R_k$$

пространства $M_k(*)$ на пространство всех таких рациональных функций.

Первая часть теоремы (2.10) — это, по существу, простое следствие уравнений Богомольного. Основное содержание теоремы Доналдсона

заклучено во второй части. На самом деле Доналдсон не формулировал свои результаты в терминах отображения рассеяния. Это усовершенствование принадлежит Уртюбизу (см. также [2], где обсуждается аналогичный гиперболический случай).

Особый интерес представляют полюсы рациональной функции $S_m(z)$, связанной с монополем. Формула (2.8) показывает, что они возникают тогда, когда $b = 0$. Это означает, что решение s_0 убывает и при $t \rightarrow +\infty$, и при $t \rightarrow -\infty$. Прямые $u(z)$ с таким свойством были названы в [22] спектральными прямыми. Таким образом, полюсы функции $S_m(z)$ соответствуют k спектральным прямым, параллельным оси x_1 . В гл. 5 при описании твисторного подхода к монополям спектральные прямые (во всех направлениях) будут играть фундаментальную роль. Пространство всех ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$ может быть отождествлено с двумерным комплексным многообразием TP^1 (касательным расслоением к комплексной проективной прямой). Подпространство, отвечающее всем спектральным прямым, называется спектральной кривой (см. также гл. 16).

Отождествим теперь M_k с R_k . Как отмечено выше, нужно проявлять аккуратность в отношении действия группы $SO(2)$. Поэтому опишем подробно действие группы $SO(2) \times \mathbb{R} \times U(1) \times \mathbb{C}$ на R_k , согласованное с естественным действием этой группы на M_k . Здесь $\mathbb{R}$ обозначает сдвиги в направлении x_1 , $\mathbb{C}$ — сдвиги в перпендикулярной плоскости, а $U(1)$ — изменение фазы, т. е. действие на асимптотический изоморфизм α . Пусть

$$(\lambda, \mu, \nu) \in SO(2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \cong SO(2) \times \mathbb{R} \times U(1) \times \mathbb{C},$$

где λ, μ, ν — комплексные числа, $|\lambda| = 1$, $\mu \neq 0$ и $\ln |\mu| \in \mathbb{R}$, $\mu/|\mu| \in U(1)$. Тогда функция рассеяния $S(z)$ преобразуется элементом (λ, μ) в

$$(2.11) \quad \mu^{-2} \lambda^{-2k} S(\lambda^{-1}(z - \nu)).$$

Заметим, что полюсы функции $S_m(z)$ преобразуются естественным образом, как того и следовало ожидать, поскольку они параметризуют спектральные прямые, параллельные оси x_1 .

При $k = 1$ функция S имеет вид

$$(2.12) \quad S(z) = \frac{a}{z - b}.$$

Стандартный монополь с центром в начале координат получается при $b = 0$, $a = 1$. Из (2.11) следует, что в общем случае монополь расположен в точке $(-2^{-1} \ln |a|, b)$, а аргумент величины a описывает его фазу. Таким образом, пространство M_1 имеет следующую комплексную структуру:

$$(2.13) \quad M_1 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

Рассмотрим теперь случай произвольного k и предположим, что

у функции $S(z)$ все полюсы простые, т.е. она записывается в виде

$$(2.14) \quad S(z) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{z - b_i}.$$

Как мы увидим в гл. 3 (см. предложение (3.12)), если точки b_i расположены далеко друг от друга, то монополю, ассоциированный с $S(z)$, приближённо совпадает с комбинацией, состоящей из k простых монополей, отвечающих слагаемым в (2.14), т.е. имеющих центры в точках $(-2^{-1} \ln |a_i|, b_i)$ и фазовые углы, определяемые аргументами величин a_i .

Отметим одно важное следствие из теоремы Доналдсона (2.10) — она показывает, что пространства M_k и M_k^0 обладают двухпараметрическим семейством комплексных структур, по одной для каждой точки сферы S^2 , представляющей выделенную ось в R^3 . Заметим, что естественное действие группы $SO(3)$ не сохраняет эти комплексные структуры, а вращает их. Только подгруппа $SO(2)$, оставляющая неподвижной выделенную ось, сохраняет соответствующую комплексную структуру. В гл. 3 мы объясним естественное происхождение этих комплексных структур и то, каким образом они связаны с естественной метрикой на M_k .

Рациональные функции из R_k имеют нормальную форму

$$(2.15) \quad S(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i}{z^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i z^i},$$

где числитель и знаменатель взаимно просты. Напомним, что условием этого служит отличие от нуля результата

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \dots & a_{k-1} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{k-1} & b_k & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & \dots & b_{k-1} & b_k \end{vmatrix},$$

где $b_k = 1$. Этот детерминант матрицы размера $(2k-1) \times (2k-1)$ однороден степени k по a_i и степени $k-1$ по b_i . Таким образом, R_k есть открытое множество в S^{2k} , дополнительное к алгебраическому многообразию $\Delta(a, b) = 0$. Иначе говоря, если мы добавим ещё одну

переменную b_k и компактифицируем S^{2k} до проективного пространства CP^{2k} , то R_k станет дополнением до подмногообразия, заданного однородным уравнением $b_k \Delta(a, b) = 0$ полной степени $2k$. Таким образом, R_k — аффинное алгебраическое многообразие. Более того, оно является дополнением в CP^{2k} до антиканонического дивизора (возьмём $b_k = 0$ с кратностью 2). В силу общих результатов, полученных Яу, из этого свойства следует, что на R_k существует риччи-плоская кэлерова метрика. На самом деле, как мы покажем позже, именно такова естественная метрика на пространстве монополей. Мы предложим более явную, не опирающуюся на общие теоремы существования, конструкцию этой метрики.

Из вида действия группы сдвигов R^3 и фазовой группы $U(1)$ на M_k вытекает, что редуцированное пространство монополей M_k^0 параметризуется рациональными функциями вида (2.15) с $b_{k-1} = 0$ по модулю отношения эквивалентности $S \sim \lambda S$ для ненулевых комплексных чисел λ . Таким образом, M_k^0 можно отождествить с подпространством в $CP^{k-1} \times CP^{k-1}$, дополнительным к подмногообразию, заданному уравнением $b_k \Delta(a, b) = 0$. Поскольку это уравнение однородно бистепени (k, k) , мы заключаем, что M_k^0 есть также дополнение до антиканонического дивизора. Заметим, что при $k = 2$ пространство M_2^0 представляет собой алгебраическую поверхность с эйнштейновой антиавтотдуальной метрикой.

Топология пространств R_k рациональных функций изучалась в [42]. В частности, было показано, что фундаментальная группа не зависит от k и равна

$$(2.16) \quad \pi_1(R_k) \cong \mathbb{Z}.$$

Более точно, имеется определённое с точностью до гомотопии включение $R_k \rightarrow R_{k+1}$, заданное на компактных подмножествах формулой

$$S(z) \rightarrow S(z) + \frac{1}{z - K},$$

где K — большое вещественное число. Этим включением индуцируется изоморфизм соответствующих групп π_1 . При $k = 1$ имеем $R_1 \cong C^* \times C$, откуда следует (2.16). На самом деле с точностью до гомотопии определено отображение сложения

$$R_k \times R_l \rightarrow R_{k+l},$$

заданное формулой

$$(S(z), T(z)) \rightarrow S(z) + T(z + K).$$

В частности, определено отображение

$$(R_1)^k \rightarrow R_k,$$

которое индуцирует на π_1 гомоморфизм

$$(2.17) \quad \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z},$$

переводящий каждую образующую в 1. Рассмотрим теперь действие группы C^* , заданное умножением функции $S(z)$ на константу λ . Когда λ меняется так, что $|\lambda| = 1$, мы получаем элемент группы π_1 . Ясно, что на R_1^k это даёт элемент $(1, 1, \dots, 1)$. Поэтому, применяя (2.17), мы получаем на R_k генератор, умноженный на k . Поскольку пространство M_k^0 получается из $M_k = R_k$ факторизацией по мультипликативному действию группы C^* (и аддитивному действию группы C), заключаем, что

$$(2.18) \quad \pi_1(M_k^0) \cong Z_k.$$

Реализуем, как выше, пространство M_k^0 как дополнение в $CP^{k-1} \times C^{k-1}$ к $\Delta(a, b) = 0$, где $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in CP^{k-1}$ и $(b_0, \dots, b_{k-2}) \in C^{k-1}$. При $\Delta(a, b) \neq 0$ мы можем нормировать a_i так, чтобы $\Delta(a, b) = 1$. Поскольку Δ — однородный полином степени k по a_i , эта нормировка единственна с точностью до корня k -й степени из единицы. Следовательно, многообразие $\tilde{M}_k^0 \subset C^{2k-1}$, определённое уравнением $\Delta(a, b) = 1$, есть k -листное накрытие пространства M_k^0 . Поскольку полином $\Delta(a, b) - 1$ неприводим, пространство $\tilde{M}_k^0$ связно. Поэтому из (2.18) следует, что $\tilde{M}_k^0$ — универсальное накрытие пространства M_k^0 .

При $k = 2$ наши нормированные рациональные функции имеют вид

$$S(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{z^2 + b_0},$$

и $\Delta = a_0^2 + b_0 a_1^2$. Значит, $\tilde{M}_2^0$ есть алгебраическая поверхность в C^3 , заданная уравнением

$$(2.19) \quad x^2 - zy^2 = 1$$

(мы сделали здесь очевидную замену переменных). Многообразие M_2^0 получается факторизацией по действию инволюции $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$.

Метрика на пространствах монополей

В предыдущей главе мы изучали пространство M_k параметров отмеченных k -монополей. Это многообразие имеет размерность $4k$, и теорема Доналдсона даёт простую явную модель этого многообразия. Теперь введём и исследуем естественную риманову метрику на M_k . Она определяется L^2 -нормой «нулевых мод», т.е. решений линейаризованных уравнений. Сперва нужно показать, что эта норма конечна, т.е. что нулевые моды квадратично-интегрируемы. Из-за некомпактности пространства R^3 этот факт нетривиален и нуждается в аналитической проверке. К счастью, Таубс [44] подробно исследовал такие аналитические вопросы, и нам остаётся лишь применить его результаты к соответствующей ситуации. Возможно, стоит отметить, что в сходном случае σ -моделей, изученном Уордом [49], не все нулевые моды квадратично-интегрируемы. Это означает, что некоторые направления движения на пространстве параметров запрещены, поскольку они требовали бы бесконечной энергии.

Пусть $c = (A, \varphi)$ — некоторый k -монополь, т.е. решение уравнений Богомольного с зарядом k , и пусть T_c — пространство квадратично-интегрируемых конфигураций (a, ψ) , удовлетворяющих уравнениям

$$(3.1) \quad *D_A a - D_A \psi + [\varphi, a] = 0,$$

$$(3.2) \quad *D_A *a + [\varphi, \psi] = 0.$$

Здесь a и ψ — это соответственно 1-форма и функция, принимающие значения в некоторой алгебре Ли. Уравнение (3.1) есть линейаризация уравнений Богомольного, а уравнение (3.2) выражает то обстоятельство, что (a, ψ) ортогонально калибровочным направлениям, или, точнее, направлениям, отвечающим инфинитезимальным калибровочным преобразованиям с компактным носителем. В [44] Таубс доказывает, что

$$(3.3) \quad \dim T_c = 4k.$$

Поле Хиггса φ само по себе можно рассматривать как инфинитезимальное калибровочное преобразование (не обращающееся в нуль на бесконечности), и вектор $(D_A \varphi, 0)$ лежит в T_c . Обозначим через T'_c пространство, ортогональное к этому вектору. Имеем $\dim T'_c = 4k - 1$. Из результатов статьи [44] следует также, что T'_c

можно отождествить с касательным пространством к пространству модулей N_k в точке $[c]$. Существенно, что все направления в N_k могут быть представлены *квадратично-интегрируемыми* вариациями.

Пространство модулей M_k отмеченных k -монополей имеет размерность $4k$ и расслаивается над N_k со слоем S^1 . Направление вдоль слоя соответствует инфинитезимальному калибровочному преобразованию, задаваемому полем Хиггса. Таким образом, касательное пространство к M_k в точке $[c]$ можно отождествить с T_c .

Как отмечено в [44], пространство всех пар (a, ψ) можно отождествить с пространством функций со значениями в $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов. Если $a = a dx + \beta dy + \gamma dz$, то (a, ψ) соответствует функции $\psi + aI + \beta J + \gamma K$, где I, J, K — стандартный базис в $\mathbb{H}$. Кроме того, уравнения (3.1) и (3.2) $\mathbb{H}$ -инвариантны. Отсюда следует, что

(3.4) T_c есть векторное пространство над $\mathbb{H}$.

Снабдим теперь M_k естественной L^2 -метрикой, задаваемой L^2 -нормой на касательных пространствах T_c . Тогда преобразования I, J, K становятся изометриями пространства T_c .

Поскольку $I^2 = -1$, оператор I задает почти-комплексную структуру на M_k . Это же верно и для любого другого мнимого кватерниона единичной нормы. С другой стороны, как было объяснено в гл. 2, теорема Доналдсона позволяет отождествить пространство M_k с пространством R_k рациональных функций комплексного переменного и тем самым превращает M_k в комплексное многообразие. Далее, это отождествление зависит от выбранного направления в $\mathbb{R}^3$, и поэтому комплексные структуры на M_k естественно параметризованы тем же самым многообразием S^2 , что и почти-комплексные структуры, введенные выше. На самом деле непосредственно видно, что почти-комплексная структура, определяемая оператором I , совпадает с комплексной структурой, возникающей в теореме Доналдсона. Это показывает, в частности, что I (и аналогично все остальные единичные мнимые кватернионы) в действительности определяет комплексную структуру; другими словами, почти-комплексная структура, задаваемая оператором I , интегрируема. Другое, более непосредственное доказательство этого факта будет дано в гл. 5. Мы покажем там, что на самом деле почти-комплексная структура I *ковариантно постоянна*.

Самое простое объяснение того, что почти-комплексная структура I и комплексная структура, возникающая из теоремы Доналдсона, совпадают, заключается в следующем. Выделение первой оси координат в $\mathbb{R}^3$ позволяет отождествить $\mathbb{R}^3 \times S^1$ с $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$:

$$((x_1, x_2, x_3; \theta) \rightarrow [x_2 + ix_3, \exp(x_1 + 2\pi i\theta)]).$$

Всякий монополяр определяет S^1 -инвариантное решение уравнений антиавтодуальности на $\mathbb{R}^3 \times S^1$, и, следовательно, голоморфное рас-

слоение на $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ с некоторым $\mathbb{C}^*$ -действием. Условия на ∞ означают, что это расслоение имеет естественные тривиализации около 0 и ∞ в $\mathbb{C}^*$. С помощью действия группы $\mathbb{C}^*$ мы можем перейти от 0 или ∞ к точке $1 \in \mathbb{C}^*$, и матрица рассеяния, введенная в гл. 2, определяет по существу связь между этими двумя тривиализациями в точке $1 \in \mathbb{C}^*$. Заметим, что дифференциальное уравнение по переменной x_1 , введенное в гл. 2, в точности задает радиальную компоненту $\mathbb{C}^*$ -действия. Теорема Доналдсона связывает, по сути дела, описание голоморфного расслоения через соответствующий $\bar{\partial}$ -оператор с чеховским описанием через матричные функции. Почти-комплексная структура I задается в таком $\bar{\partial}$ -описании.

Группа сдвигов пространства $\mathbb{R}^3$, равно как и группа фазовых поворотов S^1 , естественным образом действуют на M_k , сохраняя его метрику. Кроме того, в любой точке пространства M_k направления, соответствующие группе сдвигов, получаются из S^1 -направления умножением на I, J, K . Другими словами, касательное пространство к фактормногообразию

$$(3.5) \quad M_k^0 = \frac{M_k}{S^1 \times \mathbb{R}^3}$$

есть $\mathbb{H}$ -пространство в T_c , ортогональное направлению, заданному полем Хиггса. В гл. 4 будет показано, что на самом деле расслоение (3.5) есть (с точностью до перехода к k -листному накрытию) метрическое произведение.

Теперь перейдем к исследованию поведения пространства M_k на бесконечности. Снова все существенные результаты здесь уже известны. Они содержатся в статьях Таубса [44, 45] и Уленбек [46], поэтому мы ограничимся коротким резюме. Прежде всего:

(3.6) *Метрика на M_k полна.*

Чтобы доказать (3.6), нужно проверить, что открытая кривая конечной длины в M_k имеет предельную точку. Такая кривая задается в виде $c(t) = (A(t), \phi(t))$, $0 \leq t \leq s$, причём $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}$ и $\|\dot{c}(t)\|_2 = 1$. В [44] Таубс вводит важную норму $\|\cdot\|_c$ на пространстве пар (a, ψ) . Она определяется следующим образом:

$$(3.7) \quad \|(a, \psi)\|_c^2 = \|\nabla_A a\|^2 + \|D_A \psi\|^2 + \|\phi, a\|^2 + \|\phi, \psi\|^2,$$

где в правой части стоят обычные L -нормы. Таубс доказывает, что на T_c норма $\|\cdot\|_c$ ограничена L^2 -нормой. Далее, обычное неравенство Соболева показывает, что L^6 -норма на T_c также ограничена L^2 -нормой. Положим $b(t) = c(t) - c(0)$. Поскольку $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}$ для всех t , мы заключаем, интегрируя, что

$$\|b(t)\|_p = O(s), \quad p = 2, 6.$$

Следовательно, ввиду неравенства Гёльдера, то же верно и для

$2 \leq p \leq 6$. Используя это и интегрируя по t , приходим к оценке

$$\|b(t)\|_{C(0)} = O(s).$$

Отсюда получаем, что для кривизны справедлива оценка

$$\|F_{A(t)} - F_{A(0)}\|_2 = O(s).$$

Заменяя здесь $t = 0$ на $t = s - \varepsilon$, видим, что

$$\|F_{A(t)} - F_{A(t')}\|_2 = O(\varepsilon)$$

при $t, t' > s - \varepsilon$. Эта оценка для энергии вместе с основными результатами Уленбек [46] показывает, что после калибровочного преобразования мы можем найти требуемую сходящуюся подпоследовательность.

Итак, мы показали, что M_k полно. Перейдём теперь к исследованию асимптотического поведения. Основной факт заключается в следующем:

Предложение (3.8). Для любой данной бесконечной последовательности точек в M_k найдутся подпоследовательность m_v , разбиение $k = \sum_{i=1}^l k_i$, $k_i > 0$ и последовательность точек $x_v^i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, l$, такие что

(i) последовательность $m_v^i = T_v^i(m_v)$, где T_v^i — сдвиг $y \rightarrow y - x_v^i$, слабо сходится (т.е. сходится равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^3$) к некоторому k_i -монополю m^i с центром в начале координат;

(ii) при $v \rightarrow \infty$ расстояние между любой парой точек x_v^i, x_v^j стремится к ∞ , а направление прямой $x_v^i x_v^j$ — к некоторому фиксированному направлению.

Грубо говоря, эту ситуацию можно представлять себе как «расширяющуюся вселенную», в которой l различных «галактик» разбегаются друг от друга в определённых направлениях. Центры галактик расположены в точках x_v^i .

Основой доказательства предложения (3.8) служит следующая лемма:

Лемма (3.9). Пусть (A_v, φ_v) — последовательность k -монопольей, причём $\varphi_v(0) = 0$. Тогда существуют подпоследовательность v_i и калибровочные преобразования g_i , такие что последовательность $g_i(A_{v_i}, \varphi_{v_i})$ слабо сходится к некоторому k_1 -монополю, $1 \leq k_1 \leq k$.

Доказательство. Из основных результатов работы Уленбек [46] следует, что существуют подпоследовательности v_i и g_i , такие что $g_i(A_{v_i}, \varphi_{v_i})$ слабо сходится к решению (A, φ) уравнений Богомольного. Полная энергия конфигурации (A, φ) по-прежнему конечна, поэтому, как и в [30], $|\varphi|$ стремится при $|x| \rightarrow \infty$ к некоторой константе c . На

самом деле $c = 1$, так как функции $|\varphi_v| - 1$ равномерно ограничены по L^6 -норме [30]. Таким образом, (A, φ) есть k_1 -монополю для некоторого $k_1 \leq k$. Наконец, равенство $\varphi(0) = 0$ показывает, что (A, φ) не может быть 0-монополем, а значит, $k_1 \geq 1$.

Переходя к доказательству предложения (3.8), выберем для каждой функции φ_v какой-нибудь её нуль x_v и сдвинем его в начало координат. Применяя (3.9), построим подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому k_1 -монополю. Сдвигая центр этого монополя в начало координат, получаем нашу первую подпоследовательность x_v^1 . Если $k_1 = k$, то процесс закончен. Если $k_1 < k$, то по топологическим причинам у полей φ_v должны существовать (при больших v) и другие нули, расположенные далеко от x_v^1 . Повторяя эту конструкцию и используя компактность пространства S^2 (сферы направлений в $\mathbb{R}^3$), приходим в конце концов к подпоследовательности, удовлетворяющей свойствам (i) и (ii) из предложения (3.8).

Исследуем теперь поведение спектральных кривых.

Предложение (3.10). Пусть $m_v \in M_k$ — последовательность, существование которой утверждается в предложении (3.8), и пусть m^i — слабые пределы сдвинутых подпоследовательностей. Обозначим через Γ_v и Γ^i соответствующие спектральные кривые. Тогда сдвинутые спектральные кривые $\Gamma_v^i = T_v^i(\Gamma_v)$ сходятся к вырожденной кривой $\Gamma^i + \sum_j (L_{ij} + L_{ji})$, где L_{ij} — прямая в TP^1 , отвечающая прямому, параллельным предельной прямой $\lim_v (x_v^i, x_v^j)$.

Доказательство. Из предложения (3.8) следует, что для больших v монополю m_v можно приближённо рассматривать как составленный из далеко удалённых друг от друга меньших монопольей. Это пример «кластерного» разложения Таубса [45]. Найденные в [45] (см. леммы C.3.1, C.4.1 и D.2.3) сильные оценки убывания величин $|\varphi| - 1$ и $D_A \varphi$ в областях между монополями достаточны для установления непрерывности в случае, когда спектральные прямые подходят близко не более чем к одному монополю. Это доказывает, что вне некоторых окрестностей прямых L_{ij} и L_{ji} кривые Γ_v^i сходятся к Γ^i . Меняя местами i и j , можно получить с помощью тех же рассуждений, что L_{ij} и L_{ji} являются предельными компонентами кривых Γ_v^i . Следовательно, Γ_v^i вырождаются в пределе так, как и утверждалось.

Замечания. 1. Вырожденность, о которой идет речь в (3.10), носит чисто теоретико-множественный характер. Если учитывать кратности, то L_{ij} следует приписать кратность k_j .

2. Из предложения (3.10) следует, что при больших v кривая Γ_v приближённо совпадает с объединением далеко удалённых друг от друга спектральных кривых степеней k_i . Если, выполнив сдвиг,

добиться того, чтобы одна из них, скажем Γ^i , имела фиксированный центр, то остальные кривые Γ^j расположатся далеко от неё и будут приближённо совпадать с парой прямых $L_{ij} + L_{ji}$. Почти все спектральные прямые, отвечающие Γ^j , параллельны этому (или противоположному) направлению.

Перейдём теперь к доналдсоновскому описанию монополей в терминах рациональных функций. Если выбрать направление в $\mathbb{R}^3$, отличное от направлений L_{ij} , связанных с последовательностью m_ν из (3.8), то оценки убывания из [45] показывают, что функции рассеяния S_ν слабо сходятся (т.е. сходятся равномерно на компактных множествах в z -плоскости) к функции рассеяния S_t , отвечающей предельному монополю m_t . С другой стороны, если мы выберем направление, совпадающее с одним из L_{ij} , то функции рассеяния S_ν сходятся не будут. В этом можно убедиться следующим образом. Предположим, что (A, φ) приближённо совпадает с комбинацией конфигураций (A_1, φ_1) и $(A_2, \varphi_2)_\lambda$, где $(A_2, \varphi_2)_\lambda$ — сдвинутая на λ конфигурация (A_2, φ_2) . Это означает (при больших λ), что (A, φ) выглядит как (A_1, φ_1) около 0, как $(A_2, \varphi_2)_\lambda$ около $(0, 0, \lambda)$ и подходящим образом убывает между ними.

Пусть s'_0 — убывающее при $t \rightarrow -\infty$ решение уравнения $(\nabla_{A_1} - i\varphi_1)s = 0$ вдоль прямой, параллельной оси x_3 . Предположим, что эта прямая не является спектральной прямой. Тогда, если λ велико, $s'_0(t)$ при $t = \lambda/2$ лежит близко к собственному подпространству оператора φ , отвечающему собственному значению $-i$. Конфигурации (A_1, φ_1) и $(A_2, \varphi_2)_\lambda$ близки в этой области, поэтому s'_0 также близко к решению t'_0 уравнения $(\nabla_{A_2} - i\varphi_2)s = 0$, убывающему при $t \rightarrow -\infty$. Следовательно, полное рассеяние, определяемое конфигурацией (A, φ) , приблизительно совпадает с рассеянием, определяемым конфигурацией $(A_2, \varphi_2)_\lambda$. Однако (2.11) показывает, что сдвиг на λ приводит к умножению рациональной функции, отвечающей (A_2, φ_2) , на $e^{2\lambda}$.

Применяя это к нашей последовательности монополей m_ν , по отношению к одной из прямых L_{ij} , мы получаем, что функция рассеяния $S(z)$ не сходится при $\nu \rightarrow \infty$. На самом деле $S(z)$ экспоненциально растёт с ростом расстояния между центрами x'_ν, x'_ν .

Проведённое выше обсуждение позволяет сформулировать в терминах доналдсоновской параметризации рациональными функциями следующее свойство сходимости монополей:

Предложение (3.11). *Рассмотрим последовательность $S_\nu(z)$ рациональных функций степени k , нормированных так, что $S_\nu(\infty) = 0$. Предположим, что эта последовательность слабо сходится к рациональной функции $S(z)$ степени $l \leq k$. Тогда соответствующие монополи m_ν слабо сходятся к монополю m , отвечающему функции S .*

Доказательство. Из (3.8) и (3.10) следует, что существует подпоследовательность m_μ последовательности m_ν , слабо сходящаяся к монополю m , причём соответствующие спектральные кривые Γ_μ сходятся к спектральной кривой Γ монополя m и некоторому конечному числу прямых L_j . Рациональные функции S_ν сходятся, поэтому проведённое выше обсуждение показывает, что ни одна из прямых L_j не параллельна оси x_1 (использованной в доналдсоновской параметризации). Отсюда следует, что S есть рациональная функция монополя m . Таким образом, монополь m определяется однозначно. Теперь сделаем то же самое, заменив S_ν любой бесконечной подпоследовательностью. Мы снова получим подпоследовательность монополей, сходящуюся к m . Отсюда следует, что в действительности и сама последовательность m_ν слабо сходится к m .

Рассмотрим, в частности, последовательность

$$S_\nu(z) = S(z) + \frac{a}{z - \nu b}, \quad b \neq 0.$$

Из (3.11) следует, что монополи m_ν слабо сходятся к монополю m , отвечающему S . Повторяя наши рассуждения и используя описание 1-монополей из гл. 2, приходим к следующему предложению:

Предложение (3.12). *Для любого данного набора чисел $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}^*$ существует константа $R(a_1, \dots, a_k)$, такая что при $|b_i - b_j| > R$ рациональная функция*

$$S(z) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{z - b_i}$$

представляет k -монополь, являющийся приближённой суперпозицией 1-монополей, локализованных в точках $(-2^{-1} \ln |a_i|, b_i)$ с фазами $\arg a_i$.

Появляющиеся в (3.12) рациональные функции с далеко удалёнными друг от друга полюсами соответствуют асимптотической части пространства монополей M_k , в которой мы можем использовать описание в терминах частиц. При $k = 2$ после фиксации центра и подходящего выбора осей такое описание справедливо для всех асимптотических направлений в M_2 . Случай $k = 2$ будет подробно исследован в следующих главах.

Вернёмся к метрике на M_k . Заметим сперва, что естественная физическая норма, определяемая кинетическим членом, равна половине обычной L^2 -нормы. В частности, квадрат длины $U(1)$ -направления, порождённого полем Хиггса φ (рассматриваемым как инфинитезимальное калибровочное преобразование), равен

$$\frac{1}{2} \|D_A \varphi\|^2 = \frac{1}{2} \|F_A\|^2 \quad (\text{в силу уравнений Богомольного}) \\ = 2\pi k.$$

Применяя три почти-комплексные структуры I, J и K к этому $U(1)$ -генератору, мы получаем R^3 -генераторы сдвигов. Поэтому квадрат длины каждого из них также равен $2\pi k$. В частности, при $k = 1$ это показывает, что 1-монополь, рассматриваемый как классическая частица, имеет массу 4π . Метрика на $M_1 = R^3 \times S^1$ есть стандартная плоская метрика; на R^3 она равна $2\pi ds^2$, где ds^2 — обычная евклидова метрика. Поскольку $S^1 = U(1)/Z_2$, радиус окружности S^1 равен $\sqrt{2\pi}/2$.

В асимптотической области, указанной в предложении (3.12), пространство M_k можно описать как произведение k копий многообразия M_1 . Из результатов Таубса [45] следует, что метрика на M_k асимптотически равна метрике произведения. Следовательно, эта метрика асимптотически плоская. В следующих главах мы получим более точную информацию об асимптотическом поведении метрики на M_k .

Свойство гиперкэлэровости метрики

В предыдущей главе мы построили риманову метрику на пространстве модулей M_k . Как было отмечено в (3.4), она эрмитова по отношению к почти-комплексным структурам I, J и K , порождаемым действием кватернионов на касательном расслоении к M_k . Кроме того, из теоремы Доналдсона следует, что эти структуры интегрируемы. Здесь мы покажем, что построенная метрика кэлэрова по отношению к этим трём комплексным структурам. Такие метрики называются гиперкэлэровыми. Группа голономии такой метрики содержится в группе $Sp(k)$. В частности, тензор Риччи нашей метрики равен нулю, поэтому она даёт (положительно-определённое) решение вакуумных уравнений Эйнштейна.

Существование такой специальной метрической структуры на пространстве модулей следует из самой структуры уравнений Богомольного. Пространство модулей решений можно формально рассматривать как гиперкэлэрово факторпространство в смысле [26], автоматически обладающее гиперкэлэровой метрикой. Аналогичные замечания справедливы и для пространства модулей инстантонов или пространства модулей решений двумерной редукции уравнений автодualности [25]. Чуть позже мы опишем формализм гиперкэлэровых факторпространств.

Для доказательства кэлэровости метрики по отношению к комплексным структурам I, J и K надо проверить, что отвечающие им 2-формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ замкнуты. Как вытекает из следующей леммы, мы тем самым еще раз, без привлечения теоремы Доналдсона, докажем интегрируемость этих структур.

Лемма (4.1). Пусть метрика g эрмитова по отношению к почти комплексным структурам I, J, K , порождаемым кватернионной структурой на касательном расслоении. Эта метрика гиперкэлэрова тогда и только тогда, когда соответствующие 2-формы замкнуты.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\omega_2(X, Y) = g(JX, Y) = g(KIX, Y) = \omega_3(IX, Y),$$

а значит,

$$(4.2) \quad \iota(X)\omega_2 = \iota(IX)\omega_3.$$

Применяя три почти-комплексные структуры I, J и K к этому $U(1)$ -генератору, мы получаем R^3 -генераторы сдвигов. Поэтому квадрат длины каждого из них также равен $2\pi k$. В частности, при $k = 1$ это показывает, что 1-монополь, рассматриваемый как классическая частица, имеет массу 4π . Метрика на $M_1 = R^3 \times S^1$ есть стандартная плоская метрика; на R^3 она равна $2\pi ds^2$, где ds^2 — обычная евклидова метрика. Поскольку $S^1 = U(1)/Z_2$, радиус окружности S^1 равен $\sqrt{2\pi}/2$.

В асимптотической области, указанной в предложении (3.12), пространство M_k можно описать как произведение k копий многообразия M_1 . Из результатов Таубса [45] следует, что метрика на M_k асимптотически равна метрике произведения. Следовательно, эта метрика асимптотически плоская. В следующих главах мы получим более точную информацию об асимптотическом поведении метрики на M_k .

Свойство гиперкэлэровости метрики

В предыдущей главе мы построили риманову метрику на пространстве модулей M_k . Как было отмечено в (3.4), она эрмитова по отношению к почти-комплексным структурам I, J и K , порождаемым действием кватернионов на касательном расслоении к M_k . Кроме того, из теоремы Доналдсона следует, что эти структуры интегрируемы. Здесь мы покажем, что построенная метрика кэлэрова по отношению к этим трём комплексным структурам. Такие метрики называются гиперкэлэровыми. Группа голономии такой метрики содержится в группе $Sp(k)$. В частности, тензор Риччи нашей метрики равен нулю, поэтому она даёт (положительно-определённое) решение вакуумных уравнений Эйнштейна.

Существование такой специальной метрической структуры на пространстве модулей следует из самой структуры уравнений Богомольного. Пространство модулей решений можно формально рассматривать как гиперкэлэрово факторпространство в смысле [26], автоматически обладающее гиперкэлэровой метрикой. Аналогичные замечания справедливы и для пространства модулей инстантонов или пространства модулей решений двумерной редукции уравнений автодуальности [25]. Чуть позже мы опишем формализм гиперкэлэровых факторпространств.

Для доказательства кэлэровости метрики по отношению к комплексным структурам I, J и K надо проверить, что отвечающие им 2-формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ замкнуты. Как вытекает из следующей леммы, мы тем самым еще раз, без привлечения теоремы Доналдсона, докажем интегрируемость этих структур.

Лемма (4.1). Пусть метрика g эрмитова по отношению к почти комплексным структурам I, J, K , порождаемым кватернионной структурой на касательном расслоении. Эта метрика гиперкэлэрова тогда и только тогда, когда соответствующие 2-формы замкнуты.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\omega_2(X, Y) = g(JX, Y) = g(KIX, Y) = \omega_3(IX, Y),$$

а значит,

$$(4.2) \quad \iota(X)\omega_2 = \iota(IX)\omega_3.$$

Отсюда следует, что комплексное векторное поле X имеет тип $(1, 0)$ по отношению к I (т.е. $IX = iX$) тогда и только тогда, когда

$$(4.3) \quad \iota(X)\omega_2 = i(\iota(X)\omega_3).$$

По теореме Ньюлендера–Ниренберга комплексная структура I интегрируема, если скобка Ли двух векторных полей X и Y типа $(1, 0)$ снова имеет тип $(1, 0)$. Поэтому нам нужно показать, что если X и Y удовлетворяют соотношению (4.3), то ему удовлетворяет и $[X, Y]$. Но

$$\iota([X, Y])\omega_2 = \mathcal{L}_X(\iota(Y)\omega_2) - \iota(Y)\mathcal{L}_X\omega_2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X\omega_2 &= d(\iota(X)\omega_2) \quad (\text{поскольку } d\omega_2 = 0) \\ &= d(i(\iota(X)\omega_3)) \quad (\text{в силу (4.3)}) \\ &= i\mathcal{L}_X\omega_3 \quad (\text{поскольку } d\omega_3 = 0), \end{aligned}$$

и из (4.3) вытекает, что

$$\iota(Y)\omega_2 = i(\iota(Y)\omega_3).$$

Таким образом,

$$\iota([X, Y])\omega_2 = i(\mathcal{L}_X(\iota(Y)\omega_3) - \iota(Y)\mathcal{L}_X\omega_3) = i(\iota[X, Y]\omega_3).$$

Итак, I действительно интегрируема, и из равенства $d\omega_1 = 0$ следует, что метрика элерова по отношению к I . Повторяя те же выкладки для J и K , заключаем, что метрика гиперэлерова.

Нам потребуются некоторые сведения о виде 2-форм ω_1 , ω_2 и ω_3 на пространстве модулей монополей. Для этого обсудим чуть подробнее упомянутые в гл. 3 результаты Таубса, относящиеся к касательному пространству к пространству модулей. Таубс рассматривает эллиптический комплекс, связанный с задачей деформации:

$$\Omega^0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_1} \Omega^1(\mathfrak{g}) \oplus \Omega^0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_2} \Omega^2(\mathfrak{g}),$$

где

$$d_2(a, \psi) = D_A a - *D_A \psi + *[\psi, a]$$

и

$$d_1(\psi) = (D_A \psi, [\psi, \psi]).$$

Уравнение $d_2(a, \psi) = 0$ есть линеаризация уравнений Богомольного, а образ оператора d_1 состоит из решений, получающихся применением инфинитезимальных калибровочных преобразований.

Стандартный способ исследования такого комплекса на компактном многообразии заключается в рассмотрении одного эллипти-

ческого оператора $d_2 + d_1^* = \mathcal{D}_A$, действующего на элементы пространства $\Omega^1(\mathfrak{g}) \oplus \Omega^0(\mathfrak{g})$. Здесь d_1^* – оператор, формально сопряжённый к d_1 . По существу это оператор Дирака, отвечающий связности на $S \otimes \mathfrak{g}$ (где S – спинорное расслоение со связностью Леви-Чивиты) и полю Хиггса φ . Над $\mathbb{R}^3$ расслоение S тривиализуется ковариантно-постоянными сечениями. Поэтому можно отождествить S с пространством кватернионов. Это превращает $\mathcal{D}_A$ в оператор, коммутирующий с кватернионами. Его нуль-пространство определяется уравнениями (3.1) и (3.2) и является кватернионным векторным пространством.

Анализ указанного комплекса над некомпактным пространством $\mathbb{R}^3$ был проведён Таубсом [44]. Он использовал норму (3.7):

$$\|(a, \psi)\|_c^2 = \|\nabla_A a\|^2 + \|D_A \psi\|^2 + \|\varphi, a\|^2 + \|\varphi, \psi\|^2,$$

где $c = (A, \varphi)$. Таубс рассматривал $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{D}_A^*$ как операторы, действующие из $\Omega^1(\mathfrak{g}) \oplus \Omega^0(\mathfrak{g})$ с нормой $\|\cdot\|_c$ в то же пространство с L^2 -нормой. Он доказал, что операторы $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{D}_A^*$ фредгольмовы, с индексами $4k$ и $-4k$ соответственно. Кроме того, он показал, что решения, лежащие в ядрах операторов $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{D}_A^*$, квадратично-интегрируемы. Из формулы Вейценбёкка вытекает, что ядро $\text{Ker } \mathcal{D}_A^*$ равно нулю, откуда, как отмечалось в гл. 3, следует, что пространство T_c квадратично-интегрируемых решений уравнения $\mathcal{D}_A(a, \psi) = 0$ есть векторное пространство над кватернионами вещественной размерности $4k$.

Используя такой вариант теории Фредгольма, можно показать, что если (a, ψ) – гладкое квадратично-интегрируемое решение уравнения $d_2(a, \psi) = 0$ и (a', ψ') – ортогональная проекция этого решения на конечномерное ядро оператора $\mathcal{D}_A$, то

$$(4.4) \quad (a, \psi) = (a', \psi') + d_1 \theta$$

для некоторого $\theta \in \Omega^0(\mathfrak{g})$.

Это даёт возможность связать T_c с касательным пространством к пространству модулей: мы сопоставляем каждому квадратично-интегрируемому решению уравнения $d_2(a, \psi) = 0$ его гармонический представитель.

Предположим теперь, что $c = (A, \varphi)$ есть решение уравнений Богомольного, удовлетворяющее граничным условиям (2.4). Как показано в [22], существует асимптотическая калибровка, в которой поле Хиггса диагонально, а матрица связности имеет вид

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & A \end{pmatrix},$$

причём $\|B\| = O(r^{-2})$, $A(\partial/\partial r) = 0$ и $\|\bar{A} - A\| = O(r^{-2})$, где A – форма связности для однородной связности на линейном расслоении степени k над двумерной сферой направлений в $\mathbb{R}^3$. Следовательно, связность

и поле Хиггса каждой монополярной конфигурации калибровочно-эквивалентны таким, которые отличаются от стандартной однородной связности и поля Хиггса на $R^3 \setminus \{0\}$ на выражение порядка r^{-2} . Отсюда, в частности, вытекает их квадратичная интегрируемость. Обозначим через $\mathcal{V}$ бесконечномерное векторное пространство всех таких пар, не обязательно удовлетворяющих уравнениям Богомольного.

Пространство $\mathcal{V}$ обладает кватернионной структурой. Мы определим её, как в гл. 3, записывая конфигурацию $(a, \psi) = (adx + \beta dy + \gamma dz, \psi)$ в виде

$$(4.6) \quad (a, \psi) = \psi + \alpha I + \beta J + \gamma K$$

(это та же самая структура, что и на ядре оператора $\mathcal{D}_A$). Далее, поскольку коэффициенты квадратично-интегрируемы, мы можем определить 2-формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, отвечающие I, J и K :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \omega_1((a_1, \psi_1), (a_2, \psi_2)) &= \int_{R^3} (I(a_1, \psi_1), (a_2, \psi_2)) \\ &= \int_{R^3} (\psi_1, a_2) - (\alpha_1, \psi_2) + (\beta_1, \gamma_2) - (\gamma_1, \beta_2). \end{aligned}$$

Эти формы постоянны и, следовательно, замкнуты.

Рассмотрим теперь не одно решение уравнений Богомольного, а гладкое семейство решений $c(x)$, параметризованное некоторым открытым множеством в R^n . Калибровочные преобразования, переводящие отдельные конфигурации в точки пространства $\mathcal{V}$, могут быть выбраны равномерно по компактным множествам в R^n . Это даёт отображение $f: U \rightarrow \mathcal{V}$, где U — некоторая окрестность в R^n . Вычисляя прообразы трёх 2-форм $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, мы получаем три замкнутые формы на U .

Касательный вектор X и U определяет, согласно (4.4), касательный вектор к пространству модулей. А именно, положим $(a, \psi) = df(X)$ и возьмём $(a', \psi') \in T_x$, где (a', ψ') — проекция конфигурации (a, ψ) на ядро оператора $\mathcal{D}_A$. Но, как следует из результатов, представленных в [30, VI], квадратично-интегрируемые решения уравнения $\mathcal{D}_A(a, \psi) = 0$ имеют порядок r^{-2} . Поэтому

$$(4.8) \quad (a, \psi) = (a', \psi') + d_1\theta,$$

где $d_1\theta = (D_A\theta, [\varphi, \theta]) = O(r^{-2})$.

Так как $[\varphi, \theta] = O(r^{-2})$, мы можем, используя калибровку (4.5), записать

$$\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}, \text{ где } b = O(r^{-2}).$$

Поскольку $D_A\theta = O(r^{-2})$, имеем $\partial a / \partial r = O(r^{-2})$, поэтому при $r \rightarrow \infty$

величина a стремится к некоторому пределу. Рассматривая ковариантные производные по углам, заключаем, что этот предел постоянен. Тем самым, θ отличается от некоторого скалярного кратного поля Хиггса φ на член порядка r^{-1} .

Далее, $d_1\varphi = (D_A\varphi, 0)$ лежит в L^2 -ядре оператора $\mathcal{D}_A$, так как $D_A * D_A\varphi = 0$ вследствие уравнений Богомольного. Но поскольку $d_1\theta$ ортогонально этому ядру, то

$$0 = \int_{R^3} (d_1\varphi, d_1\theta) = \int_{R^3} (D_A\varphi, D_A\theta).$$

Записывая θ в виде $\theta = \theta_0 + \lambda\varphi$, где $\theta_0 = O(r^{-1})$, заключаем, что

$$0 = \int_{R^3} (D_A\varphi, D_A\theta_0) + \lambda \int_{R^3} (D_A\varphi, D_A\varphi).$$

Интегрирование первого члена по частям даёт нуль, поскольку $D_A * D_A\varphi = 0$ и $\theta_0 = O(r^{-1})$, $D_A\varphi = O(r^{-2})$.

Следовательно, $\lambda = 0$. Таким образом, θ в (4.8) имеет порядок r^{-1} .

Пусть теперь (a, ψ) — касательный вектор из $\mathcal{V}$ и θ — произвольное инфинитезимальное калибровочное преобразование, для которого $d_1\theta = O(r^{-2})$ и $\theta = O(r^{-1})$.

Вычисляя значение формы ω_1 , как в (4.7), и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \omega_1((a, \psi), d_1\theta) &= \int_{R^3} (\psi, \nabla_1\theta) - (\alpha, [\varphi, \theta]) + (\beta, \nabla_3\theta) - (\gamma, \nabla_2\theta) \\ &= \int_{R^3} (-\nabla_1\psi - \nabla_3\beta + \nabla_2\gamma + [\varphi, a], \theta). \end{aligned}$$

Но если (a, ψ) удовлетворяет линеаризованным уравнениям Богомольного $d_2(a, \psi) = 0$, то это выражение (равно как и соответствующие выражения для ω_2 и ω_3) обращается в нуль. Таким образом, эти формы корректно определены на факторпространстве пространства решений уравнения $d_2(a, \psi) = 0$ по модулю инфинитезимальных калибровочных преобразований порядка r^{-1} . В частности, из (4.8) видно, что они зависят лишь от L^2 -гармонических представителей конфигураций (a, ψ) , т. е. от векторов из касательного пространства к пространству модулей M_k .

Поэтому мы заключаем, что формы ω_i на семействе U являются прообразами форм ω_i на M_k относительно индуцированного отображения в M_k . Поскольку они замкнуты в U для всех семейств U , они должны быть замкнуты и в M_k .

Следовательно, по лемме (4.1), метрика на M_k гиперклевна.

Замечания. 1. В доналдсоновском описании пространства модулей наше рациональное отображение связано, как было объяснено в

гл. 2, с задачей рассеяния для оператора $\nabla_\mu - i\phi$. Например, если мы выбрали направление x_3 , то речь идёт об операторе $\nabla_3 - i\phi$. Определение нашего отображения требует калибровки или асимптотической стандартизации связности и поля Хиггса. Деформации с помощью конфигураций (a, ψ) порядка r^{-2} хорошо приспособлены для изучения вариации асимптотического поведения решений уравнения $(\nabla_3 - i\phi)s = 0$ стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как в [22], и, соответственно, для изучения производной нашего рационального отображения по отношению к изменению параметра. В этой связи отметим, что некоторая инфинитезимальная вариация $(a, \psi) = \psi + \alpha I + \beta J + \gamma K$ определяет вариацию $\gamma - i\psi$ нашего оператора, а инфинитезимальная вариация

$$K(a, \psi) = -\gamma - \beta I + \alpha J + \psi K$$

– вариацию $(\psi + i\gamma) = i(\gamma - i\psi)$. При этом, как отмечено в гл. 3, комплексная структура K на пространстве модулей совпадает с естественной комплексной структурой на пространстве рациональных отображений, ассоциированных с рассеянием в направлении x_3 .

2. Как было сказано в начале главы, с формальной точки зрения существование гиперкэлеровой структуры на M_k можно установить с помощью бесконечномерной версии конструкции гиперкэлеровых факторпространств [26]. Пусть N – гиперкэлерово многообразие с кэлеровыми формами ω_1, ω_2 и ω_3 , и пусть группа Ли G свободно действует на N , сохраняя эти формы. Используя обычные методы симплектической геометрии, мы получаем три отображения моментов μ_1, μ_2 и μ_3 , переводящие N в пространство, двойственное к алгебре Ли группы G . В случае конечного числа измерений имеется теорема, утверждающая, что многообразие $\cap \mu_i^{-1}(0)/G$ с индуцированной метрикой также гиперкэлерово. В нашей ситуации N есть бесконечномерное плоское кватернионное пространство $\mathcal{V}$, а G – группа калибровочных преобразований, алгебра Ли которой состоит из функций порядка r^{-1} . Три уравнения $\mu_i(A, \phi) = 0$ – это три компоненты уравнений Богомольного, а значит, $\cap \mu_i^{-1}(0)/G$ представляет собой пространство модулей решений.

Вернёмся к рассмотрению метрики на M_k . На M_k определены естественные действия окружности (как было отмечено в гл. 3, M_k есть главное S^1 -расслоение над N_k , $(4k-1)$ -мерным пространством классов эквивалентности относительно всех калибровочных преобразований) и евклидовой группы пространства $\mathbb{R}^3$. Векторное поле, порождённое действием окружности, равно

$$(4.9) \quad U = (D_A \phi, 0) \in T_c.$$

Если X – сдвиг в $\mathbb{R}^3$, то, отождествляя расслоения и поля Хиггса с помощью параллельного переноса в направлении X , мы получаем инфинитезимальные деформации порядка $O(r^{-2})$ (см. (2.4)) в точке

(A, ϕ) :

$$(4.10) \quad (a, \psi) = (i(X)F_A, \nabla_A \phi).$$

Используя уравнения Богомольного $D_A \phi = *F$ и формулу (4.10), запишем векторные поля X_1, X_2, X_3 , соответствующие сдвигам $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3$, в виде

$$X_1 = (\nabla_3 \phi dx_2 - \nabla_2 \phi dx_3, \nabla_1 \phi) \in T_c \text{ и т. д.,}$$

или, в кватернионном описании,

$$X_1 = \nabla_1 \phi + J \nabla_3 \phi - K \nabla_2 \phi \text{ и т. д.}$$

В этом описании векторное поле U из (4.9) равно

$$U = I \nabla_1 \phi + J \nabla_2 \phi + K \nabla_3 \phi.$$

Таким образом,

$$(4.11) \quad X_1 = -IU \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что $X_2 = KX_1$.

Ясно, что сдвиги сохраняют метрику и комплексные структуры на M_k . Таким образом, X_1 и X_2 являются полями Киллинга, сохраняющими K . Вводя связность Леви-Чивиты, мы получаем, что ∇X_1 и ∇X_2 косозермитовы по отношению к K в каждой точке. Однако если $X_2 = KX_1$, то ∇X_1 и ∇X_2 также эрмитовы и, следовательно, равны нулю. Таким образом, векторные поля X_1, X_2 и X_3 ковариантно-постоянны на M_k .

Поскольку для гиперкэлеровой метрики комплексные структуры I, J, K ковариантно-постоянны, мы заключаем на основании (4.11), что все четыре векторных поля, U, X_1, X_2, X_3 , ковариантно-постоянны и порождают кватернионное подпространство в T_c .

Далее, действие окружности, порождённое полем U , превращает M_k в главное S^1 -расслоение над N_k . Поскольку поле U ковариантно-постоянно, то такой же будет и двойственная к нему 1-форма, служащая формой связности на M_k . Будучи ковариантно-постоянной, она также замкнута. Следовательно, эта связность плоская.

Формула (2.18) показывает, что $\pi_1(N_k) = \mathbb{Z}_k$; поэтому связность над k -листным (универсальным) накрытием $\tilde{N}_k$ пространства N_k тривиальна. Таким образом, k -листное накрытие $\tilde{M}_k$ пространства M_k изометрично произведению

$$\tilde{M}_k = S^1 \times \tilde{N}_k.$$

Далее, поскольку поля X_1, X_2, X_3 ковариантно-постоянны и линейно-независимы, пространство $\tilde{N}_k$ есть произведение пространства $\mathbb{R}^3$ с плоской метрикой и $(4k-4)$ -мерного многообразия $\tilde{M}_k^0$. Поскольку U, X_1, X_2, X_3 порождают кватернионное пространство, мы приходим к следующему утверждению:

Предложение (4.12). Указанное выше k -листное накрытие $\tilde{M}_k$ пространства M_k изометрически разлагается в произведение гиперкэлеровых многообразий

$$\tilde{M}_k = \tilde{M}_k^0 \times (S^1 \times \mathbb{R}^3).$$

До сих пор мы имели дело с изометриями пространства M_k , индуцированными сдвигами пространства $\mathbb{R}^3$. Группа вращений $SO(3)$ тоже действует изометриями. Но поскольку её действие на связность на бесконечной сфере нетривиально, то, прежде чем написать выражение типа (4.10), надо дополнить это действие калибровочным преобразованием.

Рассмотрим действие группы $SO(3)$ на ковариантно-постоянные комплексные структуры I, J, K . Заметим (этот факт будет играть фундаментальную роль в следующей главе при обсуждении твисторного подхода), что если вещественные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $(aI + bJ + cK)^2 = -1$. Поэтому, хотя в нашем определении гиперкомплексного многообразия фигурировало три комплексные структуры, таких структур имеется целая двумерная сфера. В доналдсоновском описании это очевидно, поскольку изоморфизм с пространством рациональных отображений получается при произвольном выборе направления. Элементы группы $SO(3)$ вращают двумерную сферу; следовательно, действие группы $SO(3)$ на M_k индуцирует вращение в трёхмерном пространстве ковариантно-постоянных тензоров, порождённом I, J, K .

Накрывающие преобразования пространства $\tilde{M}_k^0$ на сомножителе $\mathbb{R}^3$ в разложении (4.12) действуют тривиально, поэтому определена проекция пространства модулей M_k на $\mathbb{R}^3$. Она сопоставляет каждому монополю его центр; это отображение, очевидно, эквивариантно по отношению к $SO(3)$. В гл. 5 мы приведём более явное описание центра монополя. Действие группы $SO(3)$ изометриями на пространстве M_k^0 монополей с фиксированным центром поднимается на накрывающее пространство $\tilde{M}_k^0$. Это непосредственно видно из рассмотрения действия группы $SO(2) \subset SO(3)$ на пространстве рациональных отображений (см. (2.11)). Описание пространства $\tilde{M}_k^0$ как аффинного многообразия $\Delta(a, b) = 1$ (гл. 2) наглядно показывает, что это действие поднимается на $\tilde{M}_k^0$, и, значит, именно $SO(3)$, а не $SU(2)$ действует на $\tilde{M}_k^0$.

Таким образом, $\tilde{M}_k^0$ есть односвязное гиперкэлерово многообразие, на котором изометрически действует группа $SO(3)$, вращающая комплексные структуры I, J, K .

Предложение (4.13). Как риманово многообразие $\tilde{M}_k^0$ неприводимо.

Доказательство. По теореме разложения де Рама, любое односвязное полное риманово многообразие может быть изометрически

представлено в виде произведения

$$V = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n,$$

где V_0 — эвклидово пространство и пространства V_i ($i > 0$) неприводимы. Более того, это разложение однозначно с точностью до порядка, поэтому связная компонента группы изометрии также разлагается в произведение

$$G_0 \times G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n.$$

Если V гиперкэлерово, то таков же и каждый сомножитель, поскольку группа голономии лежит в $Sp(k)$ [6].

Приводимость пространств $\tilde{M}_k^0$ означала бы существование ковариантно-постоянных, $SO(3)$ -инвариантных и коммутирующих с I, J, K проекторов P_i на касательные пространства к сомножителям V_i . Рассматривая осесимметричные решения, мы увидим, что это невозможно.

В доналдсоновском описании (гл. 2) пространства M_k^0 монополей с фиксированным центром представляются как пространства рациональных функций

$$S(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i}{z^k + \sum_{i=0}^{k-2} b_i z^i}$$

по модулю отношения эквивалентности $S \sim \lambda S$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Из (2.11) следует, что вращение на элемент $u \in SO(2) \cong S^1$ вокруг направления, определяющего это разложение, задаётся формулой

$$S(z) \rightarrow u^{-2k} S(u^{-1}z).$$

Отсюда видно, что, с точностью до скалярного множителя, единственным рациональным отображением, инвариантным относительно этой группы вращений, служит

$$S(z) = z^{-k}.$$

Следовательно, для каждого (неориентированного) направления имеется единственный осесимметричный монополь с фиксированным центром; этот факт можно усмотреть также из анализа, основанного на спектральной кривой [23].

Таким образом, осесимметричные решения образуют подмногообразие в M_k^0 , диффеоморфное пространству $\mathbb{R}P^2$. Кроме того, это подмногообразие есть орбита группы $SO(3)$. Его прообраз в $\tilde{M}_k^0$ состоит из нескольких копий пространств S^2 или $\mathbb{R}P^2$, в зависимости от чётности числа k .

Рассмотрим поднятие касательного расслоения к M_k^0 на накрытие S^2 пространства $\mathbb{R}P^2$. Это — однородное расслоение на S^2 , поскольку

группа $SO(3)$ действует изометриями. Поэтому оно задаётся некоторым представлением группы $SO(2)$ – подгруппы изотропии точки в S^2 . Это представление определяется действием группы $SO(2)$ на касательном пространстве в точке, отвечающей осесимметричному решению. Рассмотрим поэтому её действие на пространстве рациональных функций, близких к $S(z) = z^{-k}$.

Поскольку $a_0 = 1$ и $a_i = 0$ ($i > 0$) для осесимметричного решения, близкие к указанному отображения могут быть однозначно представлены в M_k^0 (т.е. в пространстве классов эквивалентности относительно умножения на константы) в виде

$$S(z) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i z^i}{z^k + \sum_{i=0}^{k-2} b_i z^i}.$$

Тогда действие элемента $u \in SO(2)$ задаётся формулами

$$(4.14) \quad \begin{cases} a_i \rightarrow u^{-i} a_i, & 1 \leq i \leq k-1, \\ b_i \rightarrow u^{k-i} b_i, & 0 \leq i \leq k-2. \end{cases}$$

Таким образом, касательное расслоение TM_k^0 соответствует комплексному представлению группы $SO(2) \subset SO(3)$ с весами

$$(4.15) \quad \begin{cases} -1, -2, -3, \dots, -(k-1), \\ 2, 3, 4, \dots, k. \end{cases}$$

Заметим, что эта комплексная структура совпадает с $aI + bJ + cK$ в точке $(a, b, c) \in S^2$. Поскольку каждый проектор P_i коммутирует с I, J и K , он определяет комплексный изоморфизм расслоения TM_k^0 , суженного на S^2 , по отношению к этой однородной структуре. Кроме того, эти проекторы $SO(3)$ -инвариантны, поэтому они проектируют на подрасслоение, являющееся прямой суммой комплексных линейных расслоений с весами (4.15).

Заметим, что все веса, и в частности вес -1 , отвечающий касательному расслоению к S^2 , встречаются с кратностью единица. Поэтому на касательном расслоении к S^2 каждый оператор P_i действует либо как нулевой, либо как тождественный. Другими словами, S^2 отображается в точности в один из сомножителей V_i разложения де Рама.

Пусть $(m, n) \in V_i \times \prod_{j \neq i} V_j \cong \tilde{M}_k^0$ – осесимметричное решение. Вся его $SO(3)$ -орбита лежит в $V_i \times \{n\}$, и, значит, n есть неподвижная точка действия группы $SO(3)$ на $\prod_{j \neq i} V_j$. Поэтому группа $SO(3)$ действует на касательном пространстве в точке n . Но любое представление группы

$SO(3)$ имеет по отношению к подгруппе $SO(2)$ нулевой вес. Таким образом, если $\tilde{M}_k^0 \neq V_i$, мы приходим к противоречию. Итак, пространство $\tilde{M}_k^0$ либо евклидово, либо неприводимо. Евклидов случай легко исключить (например, используя то обстоятельство, что не существует свободного действия группы Z_k изометриями на евклидовом пространстве), и мы заключаем, что $\tilde{M}_k^0$ неприводимо.

Следствие (4.16). Пространство ковариантно-постоянных 2-форм на $\tilde{M}_k^0$ состоит из линейных комбинаций форм ω_1, ω_2 и ω_3 .

Доказательство. Существование любой иной ковариантно-постоянной 2-формы позволило бы провести редукцию группы голономии к некоторой собственной подгруппе группы $Sp(k-1)$. Но, согласно классификации Берже групп голономии, это означало бы приводимость нашей метрики (см. [6]).

Замечания. 1. Средняя кривизна поверхности $RP^2 \subset M_k^0$ осесимметричных решений есть некоторое сечение нормального расслоения. Поскольку эта поверхность является орбитой группы $SO(3)$, средняя кривизна представляет собой инвариантное сечение. Однако нулевой вес не фигурирует в (4.15), поэтому единственное инвариантное сечение нормального расслоения – нулевое. Поскольку поверхность RP^2 вложена в M_k^0 изометрически, это минимальная поверхность в M_k^0 . Однако она не является вполне геодезической поверхностью. Действительно, предположим противное. Тогда касательное расслоение TRP^2 сохраняется связностью Леви-Чивиты метрики на M_k^0 . Поскольку I, J, K ковариантно-постоянны, кватернионное линейное расслоение, порождённое TRP^2 , также сохраняется. В разложении (4.15) ему отвечает комплексное векторное расслоение ранга 2, соответствующее весам -1 и 2 . Однако связность Леви-Чивиты гиперкэлеровой метрики задаёт на этом расслоении связность с группой голономии $Sp(1) = SU(2)$. Это означает, что детерминантное расслоение тривиально, и мы получаем противоречие, так как сумма весов не равна нулю.

В случае $k = 2$ можно сказать, что поверхность с таким индексом самопересечения, как у двумерной сферы осесимметричных классов эквивалентности в $\tilde{M}_2^0$, не может быть вполне геодезической.

2. Поскольку тензор Риччи гиперкэлерова многообразия равен нулю, мы вправе применить к $\tilde{M}_k^0$ теорему Чнгра и Громола о расщеплении [8]. Эта теорема утверждает, что любая прямая (т.е. геодезическая, минимизирующая расстояние между любой парой точек на ней) на полном многообразии с неотрицательным тензором Риччи изометрически отщепляется. Поскольку многообразие $\tilde{M}_k^0$ неприводимо, такие прямые на нём отсутствуют. Из общих соображений, это свидетельствует об интересном характере поведения геодезических на нашем пространстве модулей.

Твисторное описание

При исследовании гиперкэлеровых многообразий важную роль играет твисторное описание, обобщающее конструкцию Пенроуза нелинейных гравитонов [37]. Твисторная конструкция находит своё естественное место в общей теории кватернионных многообразий, развитой Саламоном [40; 41]. Частный случай гиперкэлеровых многообразий рассматривался в [26].

Напомним, что если M^{4n} — гиперкэлерово многообразие с ковариантно-постоянными комплексными структурами I, J, K , то и $aI + bJ + cK$, где $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, тоже ковариантно-постоянная комплексная структура. Следовательно, наша метрика кэлерова по отношению к двумерной сфере комплексных структур. Этот факт служит отправной точкой твисторной конструкции.

По определению, твисторное пространство Z многообразия M^{4n} есть произведение

$$Z = M \times S^2.$$

На твисторном пространстве имеется почти-комплексная структура, заданная в точке (m, a, b, c) формулой

$$I = (aI + bJ + cK, I_0),$$

где I_0 — стандартная комплексная структура на двумерной сфере.

Можно показать, что структура I интегрируема. Тем самым Z превращается в комплексное многообразие размерности $2n + 1$. Кроме того, проекция p твисторного пространства на двумерную сферу голоморфна, и слой отображения $p: Z \rightarrow S^2$ над точкой (a, b, c) есть копия многообразия M с комплексной структурой $aI + bJ + cK$.

Заменим евклидовы координаты $(a, b, c) \in S^2$ на комплексную аффинную координату $\zeta \in \mathbb{C}P^1$ и построим из ковариантно-постоянных 2-форм $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ комплексную 2-форму

$$(5.1) \quad \omega = (\omega_2 + i\omega_3) - 2\omega_1\zeta - (\omega_2 - i\omega_3)\zeta^2.$$

Это голоморфная симплектическая форма на слое над точкой ζ . Квадратичная зависимость от ζ означает, что глобально на Z эта форма является голоморфным сечением расслоения $\Lambda^2 T_F^* \otimes \mathcal{O}(2)$. Здесь T_F — касательное расслоение вдоль слоёв и $\mathcal{O}(2)$ — голоморфное

линейное расслоение на Z , являющееся прообразом единственного линейного расслоения степени 2 на $\mathbb{C}P^1$.

Будем обозначать через $\mathcal{O}(k)$ аналогичное линейное расслоение степени k . По отношению к стандартному покрытию многообразия $\mathbb{C}P^1$ двумя открытыми аффинными множествами оно имеет функцию перехода ζ^{-k} .

Каждая двумерная сфера вида $(m, S^2) \subset M \times S^2 = Z$ вложена в Z голоморфно и потому является голоморфным сечением проекции $p: Z \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Нормальное расслоение к этому сечению голоморфно-нетривиально. Оно изоморфно $\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathcal{O}(1)$.

Антиподальное отображение на двумерной сфере определяет антиголоморфную инволюцию $\tau: Z \rightarrow Z$ (вещественную структуру). Двумерные сферы вида (m, S^2) переходят в себя при этой инволюции.

Конструкция Пенроуза замечательна тем, что гиперкэлерово многообразие M совпадает с пространством параметров вещественных сечений расслоения Z . И само многообразие, и гиперкэлерова метрика закодированы в комплексной структуре многообразия Z . Точнее говоря, имеет место следующая теорема:

Теорема (5.2) [26]. Пусть M^{4n} — гиперкэлерово многообразие и Z — его твисторное пространство.

- (i) Проекция $p: Z \rightarrow \mathbb{C}P^1$ задаёт на Z структуру голоморфного расслоения над проективной прямой.
- (ii) Это расслоение допускает семейство сечений, нормальные расслоения к которым изоморфны $\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathcal{O}(1)$.
- (iii) Существует голоморфное сечение ω расслоения $\Lambda^2 T_F^* \otimes \mathcal{O}(2)$, задающее симплектическую форму на каждом слое.
- (iv) Многообразие Z обладает вещественной структурой τ , согласованной с (i)–(iii) и индуцирующей антиподальное отображение на $\mathbb{C}P^1$.

Обратно, пространство параметров вещественных сечений любого комплексного многообразия Z^{2n+1} , удовлетворяющего условиям (i)–(iv), есть $4n$ -мерное многообразие с естественной гиперкэлеровой метрикой. Твисторным пространством для этого многообразия служит само многообразие Z .

Сопоставление соответствующему сечению его значения в точке $\zeta_0 \in \mathbb{C}P^1$ задаёт отождествление этого пространства параметров со слоем расслоения Z над точкой ζ_0 .

Гиперкэлерова метрика строится по голоморфным данным с помощью процедуры, описанной в [26]. Однако ситуация упрощается, если на M задано действие группы $SO(3)$, вращающее комплексные структуры. Рассмотрим подгруппу $SO(2) \subset SO(3)$, оставляющую неподвижной форму ω_2 . Она порождается векторным

полем X , таким что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \omega_2 &= 0, \\ \mathcal{L}_X \omega_3 &= \omega_1, \\ \mathcal{L}_X \omega_1 &= -\omega_3.\end{aligned}$$

Предположим, что многообразие Z , голоморфные сечения и голоморфное действие группы $SO(2)$ на Z известны. Тогда, отождествляя M со слоем над точкой $\zeta = 0$ и вычисляя значения вещественных сечений в точке $\zeta = 0$, мы получаем (неголоморфное) векторное поле X на M . Зная ω , находим по формуле (5.1) голоморфную 2-форму $\omega_2 + i\omega_3$ на этом слое. Но

$$\mathcal{L}_X(\omega_2 + i\omega_3) = i\omega_1.$$

Поэтому мы знаем кэлерову форму, а следовательно, и метрику.

Рассмотрим теперь твисторное пространство Z_k , отвечающее гиперкэлерову многообразию M_k — пространству модулей отмеченных монополей. Используя теорему Доналдсона и совпадение определенных комплексных структур I, J, K , данных в главах 2 и 4, мы заключаем, что комплексная структура на каждом слое многообразия Z_k голоморфно-эквивалентна комплексной структуре на пространстве рациональных функций R_k . Чтобы построить твисторное пространство, нам надо изучить вариацию рационального отображения по отношению к изменению направления в $\mathbb{R}^3$. Проще всего это сделать, воспользовавшись принадлежащим Уртюбизу [29] описанием рационального отображения непосредственно в терминах спектральной кривой Γ .

Как мы отмечали в гл. 2, полюсы рационального отображения, определенного по отношению к заданному направлению, отвечают спектральным прямым, идущим в этом направлении; следовательно, они соответствуют k точкам в слое пространства TP^1 прямых в $\mathbb{R}^3$ [22]. Поэтому каждая точка в слое пространства Z_k над $\zeta = \zeta_0$ определяет неупорядоченный набор из k точек в слое многообразия TP^1 над $\zeta = \zeta_0$. Далее, TP^1 есть тотальное пространство линейного расслоения $\mathcal{O}(2)$ над CP^1 . Поэтому, сопоставляя каждому неупорядоченному набору точек полином со старшим коэффициентом 1, корнями которого служат эти точки, мы получаем проекцию

$$Z_k \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(2l) = Y_k.$$

(Если $(\eta_1, \dots, \eta_k) \in \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(2l)$, то полюсы рационального отображения — это нули полинома $z^k + \eta_1 z^{k-1} + \dots + \eta_k = 0$.)

Пусть знаменатель рационального отображения не имеет кратных нулей. Тогда, согласно Уртюбизу, числитель равен единственному

полиному степени $(k-1)$, принимающему в этих нулях определенное ненулевое значение в слое линейного расслоения L^{-2} над соответствующей точкой пространства TP^1 . (В терминах локальной тривиализации $(\eta, \zeta \rightarrow \eta d/d\zeta)$ касательного расслоения TP^1 линейное расслоение L^2 имеет функцию перехода $\exp(2\eta/\zeta)$.)

Таким образом, каждой из k точек β_i в слое расслоения TP^1 мы должны сопоставить точку расслоения L^{-2} над β_i , учитывая подходящим образом вырождение, возникающее при совпадении точек β_i . Для этого рассмотрим многообразие

$$D = \{(\eta, \eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathcal{O}(2) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(2l) \right) \mid \eta^k + \eta_1 \eta^{k-1} + \dots + \eta_k = 0\},$$

представляющее пространство неупорядоченных наборов точек в слое расслоения TP^1 , одна из которых выделена. Это многообразие

k -листно покрывает пространство $Y_k = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}(2l)$. Кроме того, имеется его проекция $(\eta, \eta_1, \dots, \eta_k) \rightarrow \eta$ на TP^1 :

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ TP^1 & & Y \end{array}$$

Пучок $(p_2)_*(p_1^* L^{-2})$, прямой образ пучка $p_1^* L^{-2}$, есть векторное расслоение V_k над Y_k ; чтобы задать точку в слое над $(\eta_1, \dots, \eta_k)$, нужно выбрать по точке в L^{-2} для каждого β_i , удовлетворяющего равенству $\beta_i^k + \eta_1 \beta_i^{k-1} + \dots + \eta_k = 0$. Лишь открытое множество в V_k , соответствующее выбору ненулевой точки в L^{-2} , приводит к рациональным отображениям степени k . Таким образом, мы имеем открытое включение твисторного пространства:

$$\begin{array}{ccc} Z_k \subset V_k & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ CP^1 = \mathbb{C}P^1 & & Y_k \end{array}$$

В этой конструкции легко описать естественное голоморфное действие (комплексифицированной) евклидовой группы пространства $\mathbb{R}^3$: эта группа действует на TP^1 , и линейное расслоение L инвариантно относительно этого действия.

Алгебро-геометрическую конструкцию пространства V_k можно описать более явно в виде склейки двух евклидовых пространств.

Прежде всего, само пространство CP^1 получается склейкой двух копий пространства $\mathbb{C}$ с координатами ζ и $\bar{\zeta}$ по области $\zeta \neq 0$:

$$\bar{\zeta} = \zeta^{-1}.$$

Чтобы построить векторное расслоение V_k над CP^1 , возьмём две копии пространства C^{k+1} с координатами $(\zeta, \eta_1, \dots, \eta_k)$ и $(\xi, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_k)$ и отождествим их над областью $\zeta \neq 0$ по формулам

$$\begin{aligned}\xi &= \zeta^{-1}, \\ \tilde{\eta}_i &= \zeta^{-2i} \eta_i.\end{aligned}$$

Описанную выше конструкцию пространства V_k как прямого образа можно переформулировать следующим образом: рассмотрим две копии пространства C^{2k+1} с координатами $\zeta, \eta_1, \dots, \eta_k, \xi_0, \dots, \xi_{k-1}$ и $\xi, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_k, \xi_0, \dots, \xi_{k-1}$ и отождествим их по формулам

$$(5.3) \quad \begin{cases} \xi = \zeta^{-1}, \\ \tilde{\eta}_i = \zeta^{-2i} \eta_i, \\ (\xi_0 + \xi_1 \tilde{\eta} + \dots + \xi_{k-1} \tilde{\eta}^{k-1}) \\ = e^{-2\eta/\zeta} (\xi_0 + \xi_1 \eta + \dots + \xi_{k-1} \eta^{k-1}) \bmod \eta^k + \eta^{k-1} \eta_1 + \dots + \eta_k, \end{cases}$$

где $\tilde{\eta} = \zeta^{-2} \eta$. (Последнее условие эквивалентно тому, что выражение

$$\sum_{i=0}^{k-1} \xi_i \frac{\eta^i}{\zeta^{2i}} - e^{-2\eta/\zeta} \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i \eta^i$$

делится как голоморфная функция на $\sum_{i=0}^k \eta^{k-i} \eta_i$.)

Примеры. 1. Рассмотрим случай $k = 1$. Функции перехода (5.3) имеют вид

$$\begin{aligned}\xi &= \zeta^{-1}, \\ \tilde{\eta}_1 &= \zeta^{-2} \eta_1, \\ \xi_0 &= e^{2\eta_1/\zeta} \xi_0.\end{aligned}$$

Эти формулы определяют тотальное пространство линейного расслоения L^2 над TP^1 . Открытое множество Z_1 является дополнением к нулевому сечению $\xi_0 = 0 = \xi_0$. Поэтому твисторное пространство для $M_1 = S^1 \times R^3$ есть главное C^* -расслоение над TP^1 , полученное из линейного расслоения L^2 . Этот факт легко вывести из рассмотрения твисторного пространства для пространства R^4 , универсального накрытия пространства M_1 .

2. Рассмотрим для случая общего k пространство V_k и его подпространство, заданное уравнением $\eta_1 = 0 = \tilde{\eta}_1$. Если $\beta_1, \dots, \beta_k$ (соотв. $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k$) — нули полинома $\eta^k + \eta^{k-2} \eta_2 + \dots + \eta_k = 0$ (соотв. полинома $\tilde{\eta}^k + \tilde{\eta}^{k-2} \tilde{\eta}_2 + \dots + \tilde{\eta}_k = 0$), то

$$\begin{aligned}& \prod_{i=1}^k (\xi_0 + \xi_i \beta_i + \dots + \xi_{k-1} \beta_i^{k-1}) \\ &= e^{-2(\sum \beta_i/\zeta)} \prod_{i=1}^k (\xi_0 + \xi_i \beta_i + \dots + \xi_{k-1} \beta_i^{k-1}).\end{aligned}$$

Поскольку $\eta_1 = -\sum \beta_i = 0$, корректно определено подмногообразие

$$\begin{aligned}& \prod_{i=1}^k (\xi_0 + \xi_i \beta_i + \dots + \xi_{k-1} \beta_i^{k-1}) = 1 \\ &= \prod_{i=1}^k (\xi_0 + \xi_i \beta_i + \dots + \xi_{k-1} \beta_i^{k-1})\end{aligned}$$

пространства V_k . Далее, результат $\Delta(a, b)$ рациональной функции

$$S(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i}{z^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i z^i}$$

можно задать не только детерминантным выражением из гл. 2, но и формулой

$$\Delta(a, b) = \prod_{i=1}^k (a_0 + a_1 \beta_i + \dots + a_{k-1} \beta_i^{k-1}),$$

где произведение берётся по всем нулям β_i знаменателя рациональной функции S .

Данное в гл. 2 описание пространства модулей монополей с фиксированным центром позволяет легко найти функции перехода для твисторного пространства Z_k^0 универсального накрытия M_k^0 этого пространства. Они получаются из функций перехода (5.3) при $\eta_1 = 0 = \tilde{\eta}_1$ и

$$\begin{aligned}& \prod_{i=1}^k (\xi_0 + \xi_i \beta_i + \dots + \xi_{k-1} \beta_i^{k-1}) = 1 \\ &= \prod_{i=1}^k (\xi_0 + \xi_i \beta_i + \dots + \xi_{k-1} \beta_i^{k-1}).\end{aligned}$$

3. Рассмотрим твисторное пространство Z_2^0 всех 2-монополей с фиксированным центром. Предыдущий пример показывает, что оно получается отождествлением пространств

$$\{(\zeta, \eta_2, \zeta_0, \xi_1) | \xi_0^2 + \eta_2 \xi_1^2 = 1\}$$

$$\{(\xi, \tilde{\eta}_2, \xi_0, \tilde{\xi}_1) | \xi_0^2 + \tilde{\eta}_2 \tilde{\xi}_1^2 = 1\}$$

по формулам

$$\begin{aligned}\xi &= \zeta^{-1}, \\ \tilde{\eta}_2 &= \zeta^{-4} \eta_2, \\ (\xi_0 + \xi_1 \tilde{\eta}) &= e^{-2\eta/\zeta} (\xi_0 + \xi_1 \eta) \bmod \eta^2 + \eta_2 = 0.\end{aligned}$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\xi_0 = \xi_0 \cos\left(\frac{2\sqrt{\eta_2}}{\zeta}\right) + \xi_1 \sqrt{\eta_2} \sin\left(\frac{2\sqrt{\eta_2}}{\zeta}\right),$$

$$\zeta^{-2} \xi_1 = -\frac{\xi_0}{\sqrt{\eta_2}} \sin\left(\frac{2\sqrt{\eta_2}}{\zeta}\right) + \xi_1 \cos\left(\frac{2\sqrt{\eta_2}}{\zeta}\right).$$

Эти формулы дают явное описание твисторного пространства для пространства модулей 2-монопольей, которое будет изучаться в следующих главах.

Продолжим обсуждение твисторной интерпретации гиперкэлери-вой метрики на пространствах модулей монопольей. Пока мы нашли твисторное пространство Z_k . Оно наследует вещественную структуру от той вещественной структуры на пространстве TP^1 , которая использовалась в твисторном описании уравнений Богомольного.

Теперь нам надо построить семейство сечений. Поскольку Z_k расслаивается над $Y_k = \bigoplus_1 \mathcal{O}(2i)$, всяким голоморфным сечением пространства Z_k определяется некоторое сечение $A \in Y_k$. Оно состоит из сечений $a_1(\zeta), \dots, a_k(\zeta)$ расслоений $\mathcal{O}(2), \dots, \mathcal{O}(2k)$, т.е. полиномов a_i степеней $2i$. Эти полиномы определяют кривую Γ :

$$\eta^k + \eta^{k-1} a_1(\zeta) + \dots + a_k(\zeta) = 0$$

в TP^1 . Эта кривая лежит в многообразии D , фигурировавшем в конструкции пространства Z_k . Проекция p_2 отображает её в сечение A пространства Y_k . Сечение пучка $(p_2)_*(p_1^* L^{-2})$ над проективной прямой A в Y_k , получаемое из исходного сечения пространства $Z_k \subset V_k$, соответствует тогда глобальному сечению расслоения L^{-2} над Γ . Степень расслоения L^{-2} равна нулю. Для того чтобы сечение лежало в Z_k , оно должно быть нулевым. Поэтому мы заключаем, что расслоение L^3 должно быть тривиальным над Γ .

Это условия, которым должна удовлетворять спектральная кривая (см. гл. 16). Действительно, данное Уртюбизом определение рационального отображения показывает, что спектральная кривая монополя определяет сечение пространства Z_k описанным способом. Заметим, что могут быть и другие сечения (спектральная кривая должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям), но пространство модулей порождается именно этим семейством.

Для завершения твисторного описания нам нужна ещё информация о форме $\omega \in \Lambda^2 T_F^* \otimes \mathcal{O}(2)$. В частности, надо знать симплектическую структуру на пространстве R_k рациональных отображений.

Напомним очередной раз, что пространство R_k есть пространство

рациональных отображений степени k вида

$$S(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i}{z^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i z^i} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Если нули $\beta_1, \dots, \beta_k$ знаменателя различны, то их можно рассматривать как локальные координаты на пространстве полиномов степени k с единичным старшим коэффициентом. Линейное преобразование, сопоставляющее коэффициенты полинома $p(z)$ степени $k-1$ значениям $p(\beta_i)$ этого полинома в k различных точках, обратимо. Поэтому набор $(\beta_1, \dots, \beta_k, p(\beta_1), \dots, p(\beta_k))$ можно использовать в качестве локальных координат на R_k . Далее, если Γ имеет степень k , то все $p(\beta_i)$ отличны от нуля. Положим

$$(5.4) \quad \omega = \sum_{i=1}^k \frac{dp(\beta_i) \wedge d\beta_i}{p(\beta_i)}.$$

Отметим следующие факты:

- (i) Форма ω симметрична по β_i . Поэтому на самом деле ω -рациональная форма на пространстве S^{2k} с координатами $a_0, \dots, a_{k-1}, b_0, \dots, b_{k-1}$.
- (ii) Форма ω замкнута.
- (iii) В области определения локальных координат $\beta_1, \dots, \beta_k, p(\beta_1), \dots, p(\beta_k)$ (т.е. области, где знаменатель имеет простые нули) форма ω невырождена.

Рассмотрим $2k$ -форму ω^k на пространстве R_k . Формула (5.4) показывает, что она рациональна и её знаменатель равен

$$\prod_{i=1}^k p(\beta_i) = \Delta(a, b).$$

Компактифицируем S^{2k} до проективного пространства CP^{2k} , как в гл. 2. Непосредственно видно, что ω^k есть форма с полюсом на множестве $b_k^2 \Delta(a, b) = 0$. Как отмечалось в гл. 2, это антиканонический дивизор. Поэтому мы можем рассматривать ω^k как сечение тривиального расслоения $K_p \otimes K_p^*$. Поскольку ω невырождена на открытом множестве, на котором $q(z)$ имеет простые нули, это сечение не обращается в нуль хотя бы в одной точке и, следовательно, не обращается в нуль нигде. Таким образом, форма ω невырождена на всём R_k .

Итак, мы видим, что формула (5.4) определяет голоморфную симплектическую форму ω на R_k . Построим с её помощью голоморфную симплектическую форму вдоль слоёв твисторного про-

пространства. Для этого выразим более явно функции перехода (5.3) пространства Z_k в терминах рациональных функций.

Возьмём две копии пространства $\mathbb{C} \times R_k$, параметризованные наборами $(\zeta, S(z))$ и $(\tilde{\zeta}, \tilde{S}(z))$, и отождествим их над $\zeta \neq 0$ посредством формул

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta} &= \zeta^{-1}, \\ \tilde{q}\left(\frac{z}{\tilde{\zeta}^2}\right) &= \zeta^{-2k} q(z), \\ \tilde{p}\left(\frac{z}{\tilde{\zeta}^2}\right) &= e^{-2Z/\zeta} p(z) \bmod q(z).\end{aligned}$$

Сравнивая построенную выше симплектическую форму на R_k на этих двух копиях, заключаем, что

$$\sum_i \frac{d\tilde{p}(\beta_i) \wedge d\tilde{\beta}_i}{\tilde{p}(\beta_i)} = \sum_i \left[\frac{dp(\beta_i)}{p(\beta_i)} \wedge \frac{d\beta}{\zeta^2} - 2\zeta d\beta_i \wedge d\beta_i \right] = \frac{1}{\zeta^2} \sum \frac{dp(\beta_i)}{p(\beta_i)} \wedge d\beta_i.$$

Таким образом, ω определяет голоморфное сечение расслоения $\Lambda^2 T_F^* \otimes \mathcal{O}(2)$, как и требовалось.

По теореме (5.2) этот набор данных задаёт гиперклерову метрику на M_k , согласованную с комплексными структурами I, J и K . Из результата предложения (4.13) о неприводимости следует, что ограничение этой метрики на M_k^0 может отличаться от требуемой метрики лишь постоянным множителем. Всё пространство M_k локально-приводимо, и для того, чтобы добиться совпадения симплектической формы, построенной выше, с той, которая соответствует естественной метрике, надо надлежащим образом определить две нормировочные константы. Выбор этих констант не меняет связности Леви-Чивиты, поэтому полученной информации уже достаточно для изучения геодезических (геодезические зависят только от связности). Однако ради полноты мы всё-таки определим эти константы.

Для этого воспользуемся асимптотическим описанием из предложения (3.12): для данных $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}^*$ существует константа $R(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, такая что при $|\beta_i - \beta_j| > R$ рациональная функция

$$S(z) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{z - \beta_i} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

представляет k -монополю, приближённо совпадающий с суперпозицией 1-монополей, локализованных в точках $(-2^{-1} \ln |\alpha_i|, \beta_i)$ с фазами $\arg \alpha_i$.

Имеем

$$\alpha_i = \frac{p(\beta_i)}{q'(\beta_i)} = \frac{p(\beta_i)}{\prod_{j \neq i} (\beta_i - \beta_j)}.$$

Записывая симплектическую форму ω в терминах локальных координат α_i, β_i , получаем

$$\omega = \sum \frac{dp(\beta_i)}{p(\beta_i)} \wedge d\beta_i = \sum_i \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} \wedge d\beta_i + \sum_{i \neq j} \frac{d\beta_i \wedge d\beta_j}{(\beta_i - \beta_j)}.$$

Таким образом, если R велико, то ω приближённо совпадает с естественной формой

$$\sum_i \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} \wedge d\beta_i$$

на произведении $(\mathbb{C}^* \otimes \mathbb{C})^k$.

Используя результат Таубса о том, что асимптотически метрика совпадает с метрикой произведения, и нормировку, найденную в гл. 3, заключаем, что голоморфная симплектическая форма на R_k имеет вид

$$\pi \sum_i d\beta_i \wedge \frac{dp(\beta_i)}{p(\beta_i)}.$$

Собирая полученные результаты вместе, получаем в соответствии с теоремой (5.2) полное твисторное описание метрики на M_k :

Теорема (5.5). Пусть M_k — пространство модулей отмеченных монополей заряда k и Z_k — твисторное пространство для M_k :

(i) Пространство Z_k получается отождествлением над областью $\zeta \neq 0$ двух копий пространства $\mathbb{C} \times R_k$ (где R_k — пространство рациональных отображений степени k , переводящих бесконечность в нуль), параметризованных наборами $(\zeta, p(z)/q(z))$ и $(\tilde{\zeta}, \tilde{p}(z)/\tilde{q}(z))$ соответственно по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta} &= \zeta^{-1}, \\ \tilde{q}\left(\frac{z}{\tilde{\zeta}^2}\right) &= \zeta^{-2k} q(z), \\ \tilde{p}\left(\frac{z}{\tilde{\zeta}^2}\right) &= e^{-2Z/\zeta} p(z) \bmod q(z).\end{aligned}$$

(ii) Монополю определяет сечение пространства Z_k с помощью своей спектральной кривой Γ : уравнение кривой даёт знаменатель рационального отображения, а тривиализация расслоения L^2 над Γ — числитель.

(iii) Голоморфное сечение ω расслоения $\Lambda^2 T_F^* \otimes \mathcal{O}(2)$ задаётся формулой

$$\omega = \pi \sum d\beta_i \wedge \frac{d\tilde{p}(\beta_i)}{\tilde{p}(\beta_i)} = \frac{\pi}{\zeta^2} \sum d\beta_i \wedge \frac{dp(\beta_i)}{p(\beta_i)},$$

где $\tilde{\beta}_i$ (соотв. β_i) — нули полинома $\tilde{q}$ (соотв. q).

(iv) Вещественная структура пространства Z_k определяется формулами

$$\tau(\zeta) = -\bar{\zeta}^{-1}, \quad \tau\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right) = (-1)^k \bar{\zeta}^{-2k} \frac{\overline{p(-\bar{z}\zeta^{-2})}}{q(-\bar{z}\zeta^{-2})}.$$

Эта теорема вместе с твисторной конструкцией гиперкэлеровой структуры даёт в принципе способ вычисления метрики при всех k .

Сечения, описанные в пункте (ii) теоремы, можно более явно описать следующим образом.

Пусть $\eta^k + a_1(\zeta)\eta^{k-1} + \dots + a_k(\zeta) = 0$ — уравнение спектральной кривой. При $\zeta \neq \infty$ положим

$$q(z) = z^k + a_1(\zeta)z^{k-1} + \dots + a_k(\zeta).$$

Пусть s — тривиализация расслоения L^{-2} , нормализованная так, что $(\sigma^*s)s = 1$, где σ — вещественная структура на спектральной кривой. Расслоение L^{-2} задается функцией перехода $\exp(-2\eta/\zeta)$, и мы можем найти голоморфные функции b и $\bar{b}$ на Γ , определённые при $\zeta \neq \infty$, $\zeta \neq 0$ соответственно и представляющие s . Для значений ζ , при которых $q(z)$ имеет простые нули, числитель $p(z)$ есть полином степени $k-1$, значения которого равны значениям функции b в k точках кривой Γ над ζ .

Этот рецепт приводит к корректно определённому сечению.

В гл. 6 мы сделаем это явно в случае $k=2$, а сейчас остановимся на некоторых следствиях из твисторного описания.

Замечания. 1. В (4.12) мы построили, исходя лишь из дифференциальной геометрии, разложение накрытия $\tilde{M}_k$ пространства M_k в произведение $\tilde{M}_k^0 \times S^1 \times \mathbb{R}^3$. Этим разложением определяется некоторое отображение в $\mathbb{R}^3$. Мы можем интерпретировать точку, в которую переходит монополю при этом отображении, как центр монополя. Однако указанное разложение неединственно — мы можем изменить его посредством изометрии. Поэтому нам нужен канонический способ сопоставить монополю его центр. Это можно сделать, используя асимптотическое поведение поля Хиггса. Следуя Наму, Уртюбиз [28] показал, что по модулю экспоненциально убывающих членов длина поля Хиггса как гармоническая функция имеет асимптотическое разложение

$$|\varphi|_{\infty} = 1 - \frac{k}{2r} + \dots$$

Следующий член этого разложения должен иметь вид $\sum_{i=1}^3 a_i x_i / r^3$,

поскольку функция $|\varphi|_{\infty}$ — гармоническая. Далее,

$$\frac{-k}{2|\Gamma - c|} = -\frac{k}{2r} - \frac{k \sum c_i x_i}{2r^3} + \dots$$

Поэтому имеет смысл определить центр монополя формулой

$$c = -\frac{2}{k}a,$$

ибо асимптотически наше поле совпадает с полем частицы заряда k , расположенной в точке c .

В формуле Уртюбиза рассматривается пересечение спектральной кривой с сечением расслоения TP^1 , заданным формулой $\eta = b\zeta$ при больших b . Получающееся уравнение для ζ имеет $2k$ корней, k из которых стремятся к нулю при $b \rightarrow \infty$. Обозначим эти точки через $z_1, \dots, z_k$. Остальные корни получаются из $z_1, \dots, z_k$ антиподальным преобразованием пространства CP^1 . Формула для $|\varphi|_{\infty}$ имеет вид

$$|\varphi|_{\infty} = 1 + \frac{\partial}{\partial b} \ln \left(\prod_{i=1}^k z_i(b) \right).$$

Она описывает асимптотическое поведение вдоль прямой, проходящей через начало координат и задаваемой сечениями $\eta = b\zeta$. В твисторном описании пространства $\mathbb{R}^3$ это просто прямая в направлении x_3 .

Далее, записывая $z_i(b)$ при $b \rightarrow \infty$ в виде $z_i(b) = u_i/b + v_i/b^2 + \dots$, имеем

$$\begin{aligned} & b^k \zeta^k + a_1(\zeta) b^{k-1} \zeta^{k-1} + \dots + a_k(\zeta) \\ & = c_0 \prod_{i=1}^k \left(\zeta - \left(\frac{u_i}{b} + \frac{v_i}{b^2} \right) \right) \left(\zeta + \left(\frac{b}{\bar{u}_i} - \frac{\bar{v}_i}{\bar{u}_i^2} \right) \right) + O(b^{k-2}). \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при b^k даёт

$$\zeta^k = \frac{c_0}{\prod \bar{u}_i} \zeta^k,$$

а при b^{k-1} —

$$a_1(\zeta) \zeta^{k-1} = c_0 \left\{ -\frac{\sum u_i \zeta^{k-1}}{\prod \bar{u}_i} + \zeta^{k+1} \frac{\sum \bar{u}_i}{\prod \bar{u}_i} - \zeta^k \frac{\sum \bar{v}_i}{\prod \bar{u}_i} \right\}.$$

Запишем вещественный квадратичный полином $a_1(\zeta)$ в виде

$$a_1(\zeta) = (y_1 + iy_2)\zeta^2 - 2y_3\zeta - (y_1 - iy_2),$$

где

$$(5.6) \quad 2y_3 = \sum \frac{\bar{v}_i}{\bar{u}_i} = \sum \frac{v_i}{u_i}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial}{\partial b} \ln z_i(b) &= \sum_i \frac{-\frac{u_i}{b^2} - \frac{2v_i}{b^3} + \dots}{\frac{u_i}{b} + \frac{v_i}{b^2} + \dots} \\ &= -\frac{k}{b} - \sum_i \frac{v_i}{b^2 u_i} + \dots = -\frac{k}{b} - \frac{2y_3}{b^2} + \dots,\end{aligned}$$

в силу (5.6). Положив $b = 2r$, находим

$$|\varphi|_{\infty} = 1 - \frac{k}{2r} - \frac{y_3}{2r^2} + \dots$$

вдоль прямой, идущей в направлении оси x_3 .

Изменяя направление и повторяя те же выкладки, заключаем, что центр монополя со спектральной кривой $\eta^k + a_1(\zeta)\eta^{k-1} + \dots + a_k(\zeta) = 0$ находится в точке c , такой что квадратичный полином $a_1(\zeta)$ равен

$$(5.7) \quad a_1(\zeta) = k((c_1 + ic_2)\zeta^2 - 2c_3\zeta - (c_1 - ic_2)).$$

2. Твисторное описание даёт дополнительную информацию об этой связи между центром монополя и уравнением спектральной кривой. Выше уже отмечалось, что когда группа Ли G действует на гиперкэлеровом многообразии, сохраняя кэлеровы формы, мы получаем три отображения моментов μ_1 , μ_2 и μ_3 . С другой стороны, действие группы на твисторном многообразии сохраняет комплексную структуру, слои и голоморфную симплектическую форму вдоль слоёв. Это приводит к голоморфному отображению моментов μ , принимающему значения в линейном расслоении $\mathcal{O}(2)$. Связь между этими отображениями моментов может быть записана [26] в виде

$$\mu = (\mu_1 + i\mu_2)\zeta^2 - 2\mu_3\zeta - (\mu_1 - i\mu_2).$$

Далее, действие группы окружности на M_k , задающее на нём структуру главного расслоения над N_k , сохраняя кэлеровы формы, и отображения моментов μ_1 , μ_2 и μ_3 определяют проекцию на $\mathbb{R}^3$. Приведённые в замечании 1 дополнительные соображения позволяют канонически выбрать эту проекцию. Соответствующее голоморфное отображение моментов для твисторного пространства строится по формуле (5.7).

3. Более естественное описание карт и функций перехода пространства Z_k (теорема (5.5)) может быть дано с помощью симплектической формы ω . Мы можем построить комплексное многообразие, расслаивающееся над CP^1 и имеющее скрученную симплектическую форму, найдя голоморфное отображение из C^* в группу голоморфных симплектических диффеоморфизмов пространства R_k . Подставляя в результат z/ζ^2 вместо z , получим требуемое скручивание.

Далее, симплектический диффеоморфизм может быть получен экспоненцированием векторного поля, сохраняющего симплектическую структуру. Такое векторное поле порождается одной функцией. Рассмотрим функцию

$$H: C^* \times R_k \rightarrow C,$$

заданную формулой

$$H\left(\zeta, \frac{\sum_{i=0}^{k-1} a_i z^i}{z^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i z^i}\right) = \frac{1}{\zeta} (b_{k-1}^2 - 2b_{k-2}) = \frac{1}{\zeta} \sum \beta_i^2.$$

Если $\iota(X)\omega = dH$, то

$$X = -\frac{2}{\pi\zeta} \sum \beta_i p(\beta_i) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Но это в точности векторное поле, заданное дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dq(z)}{dt} &= 0, \\ \frac{dp(z)}{dt} &= -\frac{2z}{\pi\zeta} p(z) \bmod q(z'),\end{aligned}$$

и экспоненцирование с показателем $t = \pi$ приводит к конструкции из теоремы (5.5).

Итак, всё твисторное пространство порождается одной функцией

$$H = \frac{1}{\zeta} \sum \beta_i^2.$$

Конструкции такого типа в размерности четыре были предложены Пенроузом [37]. Другой пример — описанная в [26] конструкция, использующая преобразование Лежандра.

Частицы и симметрические произведения

В предыдущих главах в качестве основной модели пространства модулей k -монополюсных конфигураций использовалось пространство рациональных функций R_k . В гл. 2 мы реализовали R_k как дополнение к некоторому подмногообразию в CP^{2k} . Эта реализация показывает, что R_k — гладкое многообразие. Однако при определении голоморфной симплектической структуры в (5.5) мы нарушили симметрию модели и стали рассматривать нули полиномов вместо их коэффициентов. Хотя эта точка зрения была принята лишь для удобства введения симплектической формы, она на самом деле приводит к новому описанию пространства модулей, более близкому к физическим истокам задачи, а именно связанному с *частицеподобным* поведением монополей.

Напомним параметризацию пространства модулей из предыдущей главы. Для рациональной функции

$$S(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

мы выбирали в качестве параметров нули $\beta_1, \dots, \beta_k$ полинома $q(z)$ и значения $p(\beta_1), \dots, p(\beta_k)$ полинома $p(z)$ в этих нулях. Эти величины являются хорошими координатами лишь при $\beta_i \neq \beta_j$ ($i \neq j$). Полиномы $p(z)$ и $q(z)$ не имеют общих делителей, поэтому комплексные числа $p(\beta_i)$ не равны нулю, и эти параметры определяют неупорядоченный набор из k точек в $C \times C^*$.

Пространство модулей одного монополя параметризуется его положением в R^3 и фазой из S^1 , или, в голоморфном виде, рациональной функцией $a/(z+b)$, т.е. точкой в $C \times C^* \cong R^3 \times S^1$. Если бы описываемые нами объекты были просто частицами, то пространство модулей состояло бы из всех неупорядоченных наборов из k точек в $C \times C^*$, т.е. было бы k -й симметрической степенью $S^k(C \times C^*)$. Это пространство, однако, имеет особенности в точках, в которых положения и фазы двух частиц совпадают. Следовательно, это пространство не может быть нашим пространством модулей. Тем не менее имеется отображение

$$R_k \rightarrow S^k(C \times C^*),$$

сопоставляющее рациональной функции $p(z)/q(z)$ набор пар $(\beta_i, p(\beta_i))$.

Это отображение биголоморфно на открытом множестве $\beta_i \neq \beta_j$. Мы можем, таким образом, рассматривать R_k как десингуляризацию конфигурационного пространства для k точек в $C \times C^*$, т.е. k частиц, задаваемых фазой и положением.

В алгебраической геометрии существует абстрактный способ построения таких десингуляризаций — теория гильбертовых схем. Бовиль [6] использовал их для построения компактных комплексных многообразий с симплектической формой. Теорию гильбертовых схем удобно использовать и в нашей ситуации.

По комплексному многообразию Y можно построить произведение Y^k , симметрическое произведение $S^k(Y)$ и гильбертову схему $Y^{[k]}$. Точка в $Y^{[k]}$ — это, по определению, либо

- (i) пучок идеалов $I \subset \mathcal{O}_Y$, такой что $\dim \mathcal{O}_Y/I = k$,

либо, что эквивалентно,

- (ii) циклический пучок $\mathcal{O}_Y$ -модулей S с конечным носителем, такой что $\dim H^0(Y, S) = k$.

Соответствие между этими двумя определениями задаётся формулой $I \rightarrow S = \mathcal{O}_Y/I$. Если $\{y_1, \dots, y_m\} = \text{supp } S$, то $S_{y_i} = \mathcal{O}_{y_i}/I_{y_i}$ — модуль конечной длины k_i и $\sum_i k_i = k$.

Имеется бирациональное отображение

$$Y^{[k]} \rightarrow S^k Y.$$

Если $\dim Y = 1$, то это изоморфизм. Если $\dim Y = 2$, то многообразие $Y^{[k]}$ гладко и является десингуляризацией пространства $S^k Y$.

Пусть Y — симплектическое многообразие с 2-формой ω . Тогда на множестве регулярных точек пространства $Y^{[k]}$ естественно возникает симплектическая структура с формой $\omega^{[k]}$. Поэтому если $\dim Y = 2$, то $Y^{[k]}$ — симплектическое многообразие [6].

Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ — комплексное расслоение и $\dim X = 1$. Введём открытое множество

$$Y_\pi^{[k]} \subset Y^{[k]},$$

состоящее из пучков S (как в пункте (ii)), таких что $\mathcal{O}_X$ -пучок $\pi_*(S)$ циклический. Это эквивалентно одному из следующих двух условий:

- (а) существуют локальные сечения $\phi: X \rightarrow Y$, такие что $\phi_*(T) = S$ для некоторого циклического пучка T на X ;

- (б) отображение $\text{supp } S \rightarrow \text{supp } \pi_*(S)$ биективно, и если $x, y_1, \dots, y_r$ — локальные координаты с центром в точке, принадлежащей $\text{supp } S$ (где x — локальная координата на X), то соответствующий локальный идеал I (ядро отображения $\mathcal{O}_X \rightarrow S$) порождён набором $(x^m, y_1 - p_1(x), \dots, y_r - p_r(x))$, где $m \geq 1$, а $p_i(x)$ — полиномы степени ниже m .

Чтобы убедиться в эквивалентности этих условий, заметим прежде всего, что $(a) \Rightarrow$ пучок $\pi_*(S) = \pi_* \phi_*(T) = T$ цикличен. Далее, в локальных координатах сечение ϕ будет задаваться уравнениями $y_i = p_i(x)$, где p_i — сходящиеся степенные ряды. Поскольку любой циклический пучок на X локально имеет вид $\mathcal{O}/(x^m)$, мы заключаем, что $(a) \Leftrightarrow (b)$. Наконец, из условия цикличности пучка $\pi_*(S)$ следуют первая часть условия (b) и то, что степени координаты x (локальной координаты на X) образуют базис. Это означает, что $y_i \equiv p_i(x) \pmod I$ для некоторых полиномов p_i , и, следовательно, вторая часть условия (b) также выполнена.

В более геометрических терминах идеалы I из $Y^{[k]}_*$ — это просто (локально над X) полные пересечения кратных слоёв и локальных сечений.

Пример. Пусть $k = 2$. Отображение $Y^{[2]} \rightarrow S^2 Y$ есть десингуляризация, заданная раздутием диагонали $\Delta \subset Y^2$ с последующей факторизацией по действию группы Z_2 . Отображение $Y^2 \rightarrow Y^{[2]}$ является двулистным накрытием с ветвлением вдоль $\tilde{\Delta}$ (проективизированным нормальным расслоением к Δ). Рассмотрим дивизор C в $S^2 Y$, отображающийся на диагональ в $S^2 X$, и пусть $\tilde{C}$ — собственное преобразование дивизора C в $Y^{[2]}$ (это означает, что полный прообраз состоит из $\tilde{C}$ и исключительного дивизора $\tilde{\Delta}$). В этом случае наше открытое множество $Y^{[2]}_*$ есть просто дополнение к $\tilde{C}$. Заметим, что в данном примере множество $\tilde{C}$ — это просто множество особых точек отображения $Y^{[2]} \rightarrow S^2 X$, поэтому $Y^{[2]}_*$ представляет собой множество регулярных точек, т. е. точек, в которых дифференциал имеет максимальный ранг.

Условие (b) позволяет дать явное описание локальных координат для $Y^{[k]}_*$, которое, в частности, показывает, что $Y^{[k]}_*$ — многообразие, а $Y^{[k]} \rightarrow X^{[k]}_*$ — расслоение. Предположим сперва, что $m = k$, т. е. что $\text{supp } S$ состоит в точности из одной точки. Тогда идеал

$$(x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k, y_1 - p_1(x), \dots, y_r - p_r(x)),$$

где $\deg p_i = k - 1$, канонически описывает некоторую окрестность в $Y^{[k]}_*$, т. е. локальными координатами служат коэффициенты $a_1, \dots, a_k$ и все $r(k - 1)$ коэффициентов полиномов p_i . В общем случае, если $\text{supp } S$ состоит из нескольких точек, лежащих над точкой $\sum k_i x_i \in X^{[k]}$, где $\sum k_i = k$, то локально $Y^{[k]}_*$ распадается в произведение пространств $Y^{[k_i]}_*$ и мы возвращаемся к предыдущему случаю, когда $\text{supp } S$ состоит из одной точки. Пространство $Y^{[k]}_*$ наследует локальные координаты от сомножителей.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $X = C$, $Y = C^* \times C$ и наше отображение задаётся проекцией на последний сомножитель. В этой ситуации мы можем использовать глобальные координаты $y_1, \dots, y_r$, x и идеалы из $Y^{[k]}_*$ могут быть глобально описаны как

полные пересечения

$$(q(x), y_1 - p_1(x), \dots, y_r - p_r(x)),$$

где $q(x)$ — полином степени k со старшим коэффициентом 1, а все $p_i(x)$ имеют степень ниже k . Предыдущее описание, использующее локальное произведение, получается при разложении полинома $q(x)$ и соответствующей локализации полиномов p_i . Таким образом, $Y^{[k]}_* \rightarrow C^{k(r+1)}$.

Если заменить Y на открытое множество $(C^* \setminus 0) \times C$, то $Y^{[k]}_*$ будет параметризоваться полиномами $q(x), p_1(x), \dots, p_r(x)$, где для каждого корня α полинома q не все $p_i(\alpha)$ равны нулю, т. е. не все q, p_i обращаются в нуль одновременно. Другими словами, полиномы q, p_i порождают единичный идеал в $C[x]$. Ясно, что пространство таких q, p_i параметризует рациональные отображения $f: CP^1 \rightarrow CP^r$ степени k , для которых $f(\infty) = (1, 0, \dots, 0)$.

В частном случае $r = 1$ получаем, что пространство R_k рациональных функций f степени k (с $f(\infty) = 0$) отождествляется с $Y^{[k]}_*$ для $\pi: C^* \times C \rightarrow C$.

Напомним теперь, что тотальное пространство расслоения L^2 над TP^1 (или, эквивалентно, пространство $(CP^3 \setminus CP^1)/Z$) — это комплексное трёхмерное многообразие Z , расслоённое над CP^1 со слоем $C^* \times C$. Это — твисторное пространство для $S^1 \times R^3$. Применяя послойно описанную выше конструкцию, мы получим новое комплексное многообразие Z_k , расслоённое над CP^1 со слоем R_k . Это — твисторное пространство для k -монополей. Мы просто пришли к новой интерпретации предыдущего описания: спектральная кривая в TP^1 , над которой L^2 тривиально, поднимается в главное расслоение, определяя кривую в Z , пересекающую каждый слой в k точках, или, точнее говоря, индуцирующую идеал I кодлины k на каждом слое. Это задаёт сечение расслоения Z_k , и мы получаем твисторное описание k -монополя.

Пространство $C^* \times C$ имеет естественную 2-форму $\frac{dy}{y} \wedge dx$, поэто-

му мы получаем канонически индуцированную симплектическую структуру на слоях расслоения Z_k ; в принципе эти данные определяют гиперкэлерову метрику.

Замечание. То обстоятельство, что Z_k есть послойное симметрическое произведение, связано с тем, что функция Гамильтона $H = (1/2\zeta) \sum \beta_i^2$, которую мы использовали для скручивания, есть просто сумма базисных функций для k сомножителей (и с тем, что функция $\beta^2/2\zeta$ задаёт скручивание самого Z).

Эту конструкцию ввиду её общности можно применять и к другим монополярным системам, обладающим одновременно частицеподобным описанием и автодуальными решениями. Например, можно рассмотреть монополи с калибровочной группой $SU(n)$, для которых

поле Хиггса на бесконечности имеет $n-1$ равных собственных значений. Аналогом теоремы Доналдсона о рациональных отображениях было бы утверждение о том, что пространство модулей таких монополей эквивалентно пространству рациональных отображений степени k из CP^1 в CP^{n-1} . В гиперболическом случае такая теорема действительно верна [2]. Естественно ожидать, что в этой ситуации твисторное пространство описывается изложенной выше общей конструкцией при $r = n-1$.

Вернёмся к частному случаю, наиболее важному для нас, — к пространству модулей M_2^0 монополей с зарядом 2 и с фиксированным центром. Двухлистным накрытием $\tilde{M}_2^0$ этого пространства служит пространство рациональных функций вида

$$S(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{z^2 + b_0},$$

где $\Delta(a, b) = 1$, т. е. $a_0^2 + a_1^2 b_0 = 1$.

Полагая $x = a_0, y = a_1, z = -b_0$, перепишем последнее равенство в виде

$$x^2 - zy^2 = 1.$$

Это уравнение задаёт аффинную поверхность. Используя описание в терминах частиц, запишем

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{z}, & \beta_2 &= -\sqrt{z}, \\ p(\beta_1) &= x + \sqrt{zy}, & p(\beta_2) &= x - \sqrt{zy}. \end{aligned}$$

Симплектическая форма имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \pi \left(d\beta_1 \wedge \frac{dp(\beta_1)}{p(\beta_1)} + d\beta_2 \wedge \frac{dp(\beta_2)}{p(\beta_2)} \right) \\ &= 2\pi d\sqrt{z} \wedge \frac{d(x + \sqrt{zy})}{(x + \sqrt{zy})} \quad (\text{ибо } x^2 - zy^2 = 1) \\ &= \pi \frac{dz \wedge dy}{x} \quad (\text{ибо } 2x dx = y^2 dz + 2yz dy). \end{aligned}$$

Это стандартная голоморфная 2-форма на аффинной поверхности.

Спектральную кривую Γ можно привести к стандартной форме (6.1)

$$\eta^2 = 4k_1^2(\zeta^3 - 3k_2\zeta^2 - \zeta).$$

Согласно Уртюбизу [27], условие тривиальности расслоения L_2 выражается равенством

$$\omega = 4k_1,$$

где ω — вещественный период эллиптической кривой. Пусть $\zeta(u)$

обозначает ζ -функцию Вейерштрасса для нормальной формы кривой (6.1). Тогда тривиализация расслоения L^2 записывается в виде

$$b(\eta, \zeta) = \exp \left(-4k_1 \left(\zeta(u) - \frac{\eta u}{\omega} \right) \right),$$

где $\zeta(u)$ имеет вещественный квазипериод η (эти ζ и η не имеют ничего общего с ζ и η из (6.1)).

Группа $PSU(2) = SO(3)$ проективно действует на CP^1 и индуцирует действие на расслоении L^2 над CP^1 . Сечение твисторного пространства Z_2^0 , отвечающее некоторому 2-монополю, получается преобразованием стандартной спектральной кривой Γ и тривиализации расслоения L^2 с помощью элемента из этой группы.

Запишем элемент группы $SU(2)$ в виде $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Чтобы связать сечение пространства Z_2^0 с координатами в R_2^0 , вычислим значение сечения в точке $\zeta = 0$. Получим

$$(6.2) \quad \begin{cases} \sqrt{z} = \beta = \frac{\bar{a}^2 \omega}{4} \wp'(u), \\ 2 \ln(x + \sqrt{zy}) = 2 \ln p(\beta) = \omega \left(\zeta(u) - \frac{\eta u}{\omega} \right) + \frac{\bar{a} b \omega}{2} \wp'(u), \end{cases}$$

где u определяется равенством

$$(6.3) \quad \frac{b}{\bar{a}} = \wp(u) + k_2.$$

Это выражает, в неявной, но аналитической форме, связь между параметризацией пространства модулей с помощью модуля эллиптической кривой и элемента группы $SO(3)$ и параметризацией с помощью рационального отображения. В частности, это описывает действие группы $SO(3)$ на комплексном многообразии R_2^0 . При известной голоморфной симплектической форме это даёт, как было объяснено выше, всю информацию, нужную для нахождения метрики.

Далее, правое умножение матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ на матрицу $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ переводит a в $e^{i\theta} a$, b в $e^{-i\theta} b$. Из (6.3) вытекает, что u при этом не меняется. Кроме того, $\bar{a}b$ также не меняется, и мы получаем голоморфное действие группы окружности

$$\begin{aligned} z &\rightarrow e^{-4i\theta} z, \\ y &\rightarrow e^{2i\theta} z \end{aligned}$$

на поверхности $x^2 - zy^2 = 1$.

Таким образом, действуя справа элементом $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, мы приходим к не голоморфному действию группы окружности, сохраня-

ющему ω_2 . Это действие порождается векторным полем X , задаваемым формулами

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -b, \\ \frac{db}{dt} &= a.\end{aligned}$$

Поскольку производная Ли формы $\omega_2 + i\omega_3 = 2\pi \frac{dp}{p} \wedge d\beta$ по этому полю даёт оставшуюся кэлерову форму $i\omega_1$, её можно определить, дифференцируя (6.2) и (6.3) по X .

Мы не будем следовать этому подходу и в дальнейшем укажем более элементарный и удобный способ нахождения метрики, хотя наше исходное аналитическое выражение для метрики было получено именно твисторными методами.

Замечание. Поверхность $x^2 - zy^2 = 1$ можно рассматривать как вырожденный случай поверхностей $x^2 - zy^2 = z^k$. При $k \geq 2$ эти поверхности имеют рациональную двойную точку в начале координат. Это особенность, появляющаяся при факторизации пространства S^2 по действию бинарной диэдральной группы D_k . При $k = 1$ поверхность имеет две обычные двойные точки. Пространства, получающиеся при разрешении этих особенностей, допускают гиперкэлеровы метрики различных типов. При $k \geq 2$ имеются асимптотически локально-евклидовы решения, построенные Кронхаймером [31]. Случай $k = 1$ в качестве приближения к метрике на поверхности КЗ обсуждался в [24]. Во всех случаях твисторный подход к построению метрики использует эллиптические кривые в TP^1 .

При $k \geq 1$ вторая группа гомологий разрешения особенностей имеет размерность $k + 1$ и порождается двумерными сферами, пересекающимися в соответствии с диаграммой Дынкина группы $SO(2k + 2)$. В частности, индекс самопересечения каждой сферы равен -2 . При $k = 0$ группа гомологий порождается одной двумерной сферой с индексом самопересечения -4 — двулистным накрытием пространства осесимметричных монополей.

Пространства 2-монополей

Начиная с этого места основное внимание будет уделено монополям с зарядом $k = 2$. Мы подробно исследуем геометрию пространств модулей M_2 и M_2^0 . Твисторный подход в случае $k = 2$ подробно изучался Уртьюбизом [27]. Начнём с обзора его результатов, которые мы сформулируем в несколько иных терминах.

У всякого 2-монополя имеется центр, который мы и выберем в качестве начала координат в $\mathbb{R}^3$. Через центр проходят ровно две (неориентированные) спектральные прямые. Назовём их α и β . Если $\alpha = \beta$, то монополю осесимметричен с осью симметрии α , причём в этом случае ось симметрии однозначно определяет соответствующий монополю. Данной (неупорядоченной) паре (α, β) , $\alpha \neq \beta$, отвечают в точности 2 монополя. Они различаются выбором биссектрисы e_1 угла между α и β (в плоскости α, β). Назовём (неориентированную) прямую e_1 *первой* или *главной* осью монополя. Если $\alpha = \beta$, то главная ось совпадает с осью симметрии. В случае $\alpha \neq \beta$ обозначим биссектрису угла, дополнительного к углу между α и β , через e_2 (рис. 1), и назовём её (по причинам, которые станут ясны в дальнейшем) осью Хитса. Проходящую через начало координат прямую, перпендику-

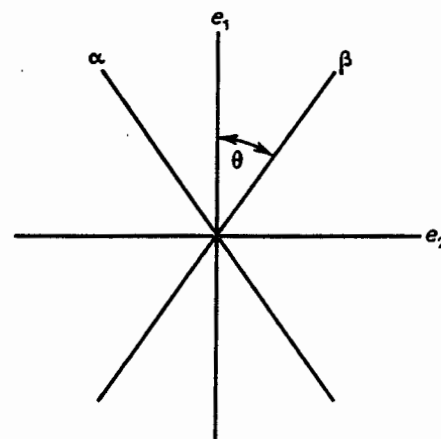


Рис. 1

лярную к e_1 и e_2 , т. е. к плоскости α, β , обозначим через e_3 и назовём третьей осью.

Ясно, что при заданных осях e_1, e_2, e_3 монополю определяется углом $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$, показанным на рис. 1. Заметим, что при $\theta = 0$ монополю осесимметричен с осью симметрии e_1 , и ось e_2 становится неопределённой.

Группа вращений $SO(3)$ естественно действует на пространстве модулей M_2^0 два-монополей с фиксированным центром. Из сказанного следует, что орбиты параметризуются углом θ . При $\theta = 0$ орбита изоморфна вещественной проективной плоскости RP^2 , а при $\theta \neq 0$ — пространству $SO(3)/D$, где $D \cong Z_2 \times Z_2$ — подгруппа диагональных матриц. Отсюда следует, в частности, что M_2^0 ретрагируется на RP^2 , и, значит, имеет фундаментальную группу порядка 2, в чём мы уже убедились в гл. 2.

Фиксируем оси и рассмотрим множество C неподвижных точек группы D , действующей на M_2^0 . Оно с необходимостью является подмногообразием. Из данного выше описания пространства M_2^0 легко вывести, что C имеет три одномерные компоненты C_1, C_2, C_3 , а именно C_i состоит из монополей m_i , имеющих e_i главной осью. Компонента C_1 содержит единственную точку $m_1 \in RP^2$. Эта точка разделяет C_1 на две части. Для одной части (т. е. для одной компоненты множества $C_1 \setminus \{m_1\}$) осью Хиггса служит e_2 , для другой e_3 . Другими словами, при движении вдоль C_1 вторая и третья оси меняются местами в момент пересечения с RP^2 . Это явление будет играть очень важную роль в дальнейшем, при описании рассеяния 2-монополей.

Рассмотрим подгруппу $D_1 \cong Z_2$ группы D , порождённую отражением относительно первой оси. Множество Σ неподвижных точек этой подгруппы также будет подмногообразием в M_2^0 , на этот раз размерности 2. У него две компоненты, которые мы обозначим через Σ_1 и Σ_{23} . Компонента Σ_1 , содержащая C_1 , состоит из всех монополей с главной осью e_1 . Эта компонента пересекает RP^2 в единственной точке $m_1 \in C_1$. Компонента Σ_{23} содержит одновременно C_2 и C_3 и состоит из всех монополей, главная ось которых перпендикулярна к e_1 , т. е. лежит в плоскости e_2, e_3 . Эта компонента пересекает RP^2 по окружности RP^1 , проходящей через точки m_2 и m_3 . В последующем, при обсуждении рассеяния монополей, мы будем подробно исследовать обе эти поверхности, Σ_1 и Σ_{23} .

Поучительно понять, как выглядят поверхности Σ_1 и Σ_{23} в доналдсоновском описании пространства M_2^0 с помощью рациональных функций. Напомним (см. гл. 2), что элементы пространства M_2^0 могут быть представлены рациональными функциями

$$S(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{z^2 + b_0}$$

по модулю отношения эквивалентности $S \sim \lambda S, \lambda \in C^*$. Отсюда следу-

ет, что неподвижные точки отражения $z \rightarrow -z$ соответствуют либо функциям вида

$$(I) \quad S(z) = \frac{1}{z^2 - u}, \quad u \in C,$$

либо функциям вида

$$(II) \quad S(z) = \frac{z}{z^2 - v}, \quad v \in C^*.$$

Заметим, что в (II) число v не может равняться нулю, поскольку тогда степень рациональной функции была бы равна 1. Если в нашем разложении $R^3 = R \times C$ множитель R задает первую ось e_1 , то поверхности (I) и (II) должны соответствовать компонентам Σ_1 и Σ_{23} . Поскольку (I) содержит осесимметричный элемент m_1 (при $u = 0$), мы заключаем, что (I) совпадает с Σ_1 , а (II) — с Σ_{23} .

Вращение вокруг оси e_1 на угол ϕ соответствует умножению u или v в (I) или (II) на $e^{i\phi}$. Поскольку Σ_{23} пересекает RP^2 по окружности, инвариантной относительно таких вращений, мы получаем, что при некотором значении σ величины $|v|$ выражение (II) отвечает осесимметричным монополям. Оси монополей, заданных выражениями (I) и (II), будут определены чуть позже, а в гл. 8 мы покажем, что $\sigma = \pi/4$.

Как показал Уртюбиз [27], нормальная форма спектральной кривой $\Gamma \subset TP^1$ монополя имеет вид

$$(7.1) \quad \eta^2 = r_1 \zeta^3 - r_2 \zeta^2 - r_1 \zeta, \quad r_i \in R, \quad r_i \geq 0.$$

Здесь ζ — неоднородная координата на CP^1 , а η — соответствующая координата в слое. Эта эллиптическая кривая имеет четыре точки ветвления, а именно $0, \infty, -a$ и a^{-1} , где $-a$ и a^{-1} — корни квадратного уравнения

$$(7.2) \quad \zeta^2 - \frac{r_2}{r_1} \zeta - 1 = 0.$$

Эти две антиподальные пары задают спектральные прямые α и β , проходящие через центр монополя (центр соответствует точке $\eta = 0$). Определим величину θ равенством

$$(7.3) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2r_1}{r_2}.$$

Тогда корни уравнения (7.2) равны $-\operatorname{tg} \theta$ и $\operatorname{ctg} \theta$. На рис. 2 показана стереографическая проекция сферы $S^2 = CP^1$ на C (и, следовательно, окружности S^1 на R). Мы видим, что угол между прямыми α и β равен 2θ . Кривая (7.1) соответствует осесимметричному монополю, когда $r = 0$, т. е. когда $\theta = 0$. Это показывает, что для произвольных θ главная ось e_1 служит биссектрисой угла между α и β (см. рис. 2), что соответствует значению $\zeta = -\operatorname{tg}(\theta/2)$. Таким образом, наше опреде-

т.е. точки $z = \pm \sqrt{u}$, представляют две спектральные прямые, параллельные главной оси. Точки $(0, \pm \sqrt{u}) \in \mathbb{R}^3$ пересечения этих прямых с плоскостью e_2, e_3 инвариантно связаны с монополем. Следовательно, прямая, соединяющая их, должна быть инвариантна относительно группы D — группы симметрии монополя. Это может случиться, только если эта прямая совпадает либо с e_2 , либо с e_3 . Кроме того, по непрерывности, выбор между e_2 и e_3 не должен зависеть ни от $|u|$, ни от θ . Но, как мы только что видели, при $\theta \rightarrow \pi/2$ все спектральные прямые приближённо проходят через точки $\pm K/2$ на оси Хиггса e_2 . Это показывает, что полюсы $\pm \sqrt{u}$ должны всегда лежать на оси Хиггса и что асимптотически они представляют «положения» двух «частиц», в согласии с общими результатами гл. 3.

Перейдем к случаю (II). Теперь главная ось лежит в плоскости $(0, C)$ и мы имеем две асимптотические области, а именно $|v| \rightarrow \infty$ и $|v| \rightarrow 0$. Когда $\theta \rightarrow \pi/2$, расстояние до спектральных прямых, параллельных оси e_3 , равно $K/2$, стремится к ∞ . Таким образом, случай $|v| \rightarrow \infty$ соответствует тому, что $e_3 = (R, 0)$ и полюсы $\pm \sqrt{v}$ лежат на оси Хиггса e_2 . С другой стороны, когда $\theta \rightarrow \pi/2$, спектральные прямые, параллельные оси Хиггса, должны лежать близко к оси Хиггса, поэтому случай $|v| \rightarrow 0$ соответствует тому, что $e_2 = (R, 0)$. Наконец, прямая, соединяющая полюсы, должна на этот раз совпадать с осью e_3 , т.е. должна быть ортогональна к оси e_1 ; это следует по непрерывности из её поведения в области $|v| \rightarrow \infty$. Дело в том, что при критическом значении $|v| = \sigma$, отвечающем осесимметричным монополям, оси e_2 и e_3 становятся неопределёнными (они меняются местами при пересечении критической окружности), но ось e_1 всегда однозначно определена.

Обсуждение поверхности типа (I) показывает, что монополю определяется своей главной осью e_1 и парой взаимно противоположных точек на оси Хиггса e_2 . Это означает, что пространство модулей M_2^0 естественно отождествляется с пространством пар векторов $(\pm x, \pm y)$ из $\mathbb{R}^3$, где $|y|^2 = 1$ и $x \cdot y = 0$; обозначения подразумевают, что все четыре комбинации знаков соответствуют одной и той же точке из M_2^0 .

Спектральные радиусы и конформная структура

В предыдущей главе мы показали, что 2-монополю с фиксированным центром определяется с точностью до поворота одним угловым параметром θ , $0 \leq \theta < \pi/2$. Кроме того, для любого заданного (неориентированного) направления χ существуют ровно две спектральные прямые, проходящие в этом направлении. По симметрии, они лежат на одном и том же расстоянии от центра. Обозначим это расстояние через $\rho(\chi)$. Мы будем называть $\rho(\chi)$ **спектральным радиусом** в направлении χ . В частности, когда направление χ совпадает с одной из трёх осей e_i монополя, мы получаем три *главных* спектральных радиуса $\rho_i = \rho(e_i)$. Мы вычислим ρ_i как функции от θ и покажем, что

(8.1) ρ_3 — наибольший из всех спектральных радиусов, т.е.

$$\rho_3 = \max_{\chi} \rho(\chi);$$

(8.2) для направлений, перпендикулярных к e_3 , главные спектральные радиусы ρ_1 и ρ_2 доставляют локальные максимумы.

В связи с утверждением (8.2) напомним, что плоскость e_1, e_2 содержит две спектральные прямые α и β , проходящие через центр, поэтому $\rho(\chi) = 0$ при $\chi = \alpha$ и $\chi = \beta$. Таким образом, функция $\rho(\chi)$ имеет в этой плоскости два (локальных) максимума и два минимума.

Мы будем использовать нормальную форму спектральной кривой, заданную выражениями (7.1) и (7.3), а именно

$$(8.3) \quad \eta^2 = r_1 \zeta (\zeta^2 - 2\zeta \operatorname{ctg} 2\theta - 1).$$

Ориентированные направления параметризуются теперь величиной $\zeta \in \mathbb{C} \cup \infty$, и две спектральные прямые в направлении ζ параметризуются двумя решениями η уравнения (8.3). Далее, расстояние до начала координат задаётся равенством

$$(8.4) \quad \rho(\zeta)^2 = \frac{|\eta^2|}{(1 + |\zeta|^2)^2}.$$

В этом можно убедиться с помощью формулы (7.9), связывающей (η, ζ) с (x_1, x_2, x_3) . Используя (8.3), найдём теперь максимальное

значение величины (8.4). Прежде всего, имеем

$$(8.5) \quad |\eta|^2 = r_1 |\zeta|^2 |\zeta - \zeta^{-1} - 2 \operatorname{ctg} 2\theta|.$$

Положим $\zeta = se^{i\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} (8.6) \quad & |\zeta - \zeta^{-1} - 2 \operatorname{ctg} 2\theta|^2 \\ &= |(s - s^{-1}) \cos \varphi - 2 \operatorname{ctg} 2\theta + i(s + s^{-1}) \sin \varphi|^2 \\ &= (s - s^{-1})^2 \cos^2 \varphi - 4(s - s^{-1}) \cos \varphi \operatorname{ctg} 2\theta \\ &\quad + 4 \operatorname{ctg}^2 2\theta + (s + s^{-1})^2 \sin^2 \varphi \\ &= (s + s^{-1})^2 - 4(\cos \varphi + \frac{(s - s^{-1})}{2} \operatorname{ctg} 2\theta)^2 \\ &\quad + (s - s^{-1})^2 \operatorname{ctg}^2 2\theta + 4 \operatorname{ctg}^2 2\theta \\ &= (s + s^{-1})^2 \operatorname{cosec}^2 2\theta - 4(\cos \varphi + \frac{(s - s^{-1})}{2} \operatorname{ctg} 2\theta)^2 \\ &\leq (s + s^{-1})^2 \operatorname{cosec}^2 2\theta, \end{aligned}$$

причём равенство достигается при

$$(8.7) \quad \cos \varphi + \frac{(s - s^{-1})}{2} \operatorname{ctg} 2\theta = 0.$$

Следовательно, в силу (8.4)–(8.6),

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq r_1 \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} (s + s^{-1}) \operatorname{cosec} 2\theta \\ &= r_1 \frac{s}{1 + s^2} \operatorname{cosec} 2\theta \leq \frac{r_1}{2 \sin 2\theta}, \end{aligned}$$

причём равенство достигается при $s = 1$ и, ввиду (8.7), $\cos \varphi = 0$. Таким образом, ρ достигает максимума при $\zeta = \pm i$, что отвечает направлению оси e_3 . Иначе говоря,

$$(8.8) \quad \rho_{\max}^2 = \rho_3^2 = \frac{r_1}{2 \sin 2\theta}.$$

Этим доказано утверждение (8.1) о том, что ρ_3 – максимальный спектральный радиус. Кроме того, получено его точное значение. Используя формулу (7.5):

$$r_1 = kk' K^2 = \sin \theta \cos \theta K^2,$$

мы можем записать его в виде

$$(8.9) \quad \rho_3 = \frac{K}{2}.$$

Для направления в плоскости e_1, e_2 величина ζ вещественна. Положив

$\zeta = -\operatorname{tg} \alpha$, получаем

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{r_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sec^4 \alpha} |2 \operatorname{ctg} 2\alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\theta| \\ &= \frac{r_1}{2} \sin^2 2\alpha \left| \frac{\sin 2(\alpha - \theta)}{\sin 2\alpha \sin 2\theta} \right| \\ &= \frac{r_1}{2 \sin 2\theta} |\sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \theta)| \\ &= \frac{r_1}{2 \sin 2\theta} \left| \frac{\cos 2\theta - \cos(4\alpha - 2\theta)}{2} \right|. \end{aligned}$$

Это выражение имеет минимумы (нулевые значения) при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$, что отвечает двум спектральным прямым, проходящим через центр. Локальные максимумы этого выражения достигаются при $\alpha = \theta/2$ и $\alpha = \pi/4 + \theta/2$, что отвечает осям e_1 и e_2 соответственно (см. рис. 2). Далее, значения ρ_1 и ρ_2 даются формулами

$$\rho_1^2 = \frac{r_1}{2 \sin 2\theta} \sin^2 \theta, \quad \rho_2^2 = \frac{r_1}{2 \sin 2\theta} \cos^2 \theta.$$

Подстановка выражения (7.5) для r_1 приводит к окончательным формулам

$$(8.10) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{kK}{2}, \\ \rho_2 = \frac{k'K}{2}. \end{cases}$$

Отсюда видно, в частности, что $\rho_2 \geq \rho_1$ при $k' \geq k$, или, эквивалентно, при $\theta \leq \pi/4$. Заметим, что критическое значение $\theta = \pi/4$ соответствует эллиптической кривой с квадратной решёткой.

Замечание. Формулы (8.9) и (8.10) показывают, что треугольник со сторонами ρ_i прямоугольный, причём против стороны длиной ρ_2 лежит угол θ . Было бы интересно понять, допускает ли этот замечательный факт простое геометрическое объяснение.

Перейдём теперь к вопросу о расположении главных спектральных прямых. Для каждой оси e_i две спектральные прямые, параллельные e_i , пересекают ортогональную плоскость, проходящую через центр, в паре точек $\pm P_i$. Прямая, соединяющая эти две точки, должна определяться всеми симметриями 2-монополя (поскольку симметриями определяются все оси). Это означает, что точки P_i должны лежать на одной из двух других осей. Мы покажем, что

$$(8.11) \quad \begin{cases} P_1 \text{ и } P_3 \text{ лежат на } e_2, \\ P_2 \text{ лежит на } e_3. \end{cases}$$

По соображениям непрерывности достаточно проверить (8.11) для какого-нибудь одного значения угла θ из интервала $0 < \theta < \pi/2$. Сперва рассмотрим случай, когда $\theta \rightarrow \pi/2$. Тогда, как показано в гл. 7, два-монополь приближённо совпадает с комбинацией двух простых монополей, расположенных в точках $\pm K/2$ на оси e_2 , в том смысле что спектральные прямые приближённо совпадают со звёздами прямых, проходящих через эти две точки. В частности, рассматривая спектральные прямые, параллельные e_1 и e_3 , мы заключаем, что точки P_1 и P_3 должны лежать на e_2 . Заметим, что из (8.9) следует, что точка P_3 расположена на расстоянии точно $K/2$ от центра монополя, в то время как (8.10) показывает, что $P_1 \sim K/2$ при $k \rightarrow 1$.

Рассмотрение области $\theta \rightarrow \pi/2$ не помогает определить положение точки P_2 , поскольку $\rho_2 \rightarrow 0$. Вместо этого рассмотрим область $\theta \rightarrow 0$. Поскольку $K \rightarrow \pi/2$, мы получаем из (8.9) и (8.10), что

$$\rho_1 \rightarrow 0, \quad \rho_2 \rightarrow \pi/4, \quad \rho_3 \rightarrow \pi/4.$$

Таким образом, P_3 стремится к точке $\pi/4$ на оси e_2 . Поскольку значение $\theta = 0$ соответствует осесимметричному 2-монополью (с осью e_1), мы заключаем по симметрии, что при $\theta \rightarrow 0$ точка P_2 должна стремиться к точке $\pi/4$ на оси e_3 . Это доказывает оставшуюся часть утверждения (8.11). Заметим кстати, что эти вычисления позволяют найти критическое значение σ , введённое в гл. 7 в связи с поверхностями типа (II) в M_2^0 . А именно, из того, что $\rho_2 \rightarrow \pi/4$ при $\theta \rightarrow 0$, следует, что $\sigma = \pi/4$.

Можно исследовать более общую задачу о расположении всех спектральных прямых, параллельных плоскости e_1, e_2 . Результат таков: для направлений, лежащих между спектральными прямыми α и β (в том же секторе, что и e_1), все спектральные прямые лежат в плоскости e_1, e_2 ; для остальных направлений все спектральные прямые пересекают e_3 . Это согласуется с (8.11).

В гл. 3–5 мы ввели естественные римановы метрики на M_k и M_k^0 и установили некоторые их общие свойства. В частности, мы показали, что эти метрики гиперкэлеровы. Точнее, для каждого выбора ориентированного направления в $\mathbb{R}^3$ мы получили индуцированную комплексную структуру на M_k и M_k^0 , по отношению к которой метрика эрмитова (фактически, кэлерова). Кроме того, эта комплексная структура совпадает со структурой, фигурирующей в описанной в гл. 2 доналдсоновской параметризации с помощью рациональных функций.

Используя наши результаты о спектральных радиусах, найдём теперь конформную структуру пространства M_2^0 , т.е. метрику с точностью до скалярного множителя. В следующих главах мы определим и сам множитель.

Напомним, что на M_2^0 действует группа вращений. Типичная орбита трёхмерна и изоморфна $SO(3)/2$, где D – подгруппа диагональных матриц. Из того что это действие сохраняет метрику, следует,

что на каждой орбите метрика инвариантна и потому определяется своими значениями в одной точке. Далее, группа D действует изометриями на касательном пространстве к орбите в этой отмеченной точке. Это означает, что метрика диагональна по отношению к осям, определяемым собственными векторами группы D . Таким образом, на каждой орбите метрика может быть записана в виде

$$a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – инвариантные 1-формы на $SO(3)$, двойственные к стандартному базису X_1, X_2, X_3 алгебры Ли группы $SO(3)$. Как векторное поле на M_2^0 каждое X_i задаёт инфинитезимальное вращение 2-монополя вокруг соответствующей его оси e_i .

Предположим, что мы построили траектории, ортогональные к орбитам в M_2^0 . Обозначим через ξ расстояние от отмеченной точки вдоль траектории. Тогда метрика на M_2^0 будет иметь вид

$$(8.12) \quad ds^2 = d\xi^2 + a(\xi)^2 \sigma_1^2 + b(\xi)^2 \sigma_2^2 + c(\xi)^2 \sigma_3^2,$$

где $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$ – функции от ξ , подлежащие определению.

В гл. 7 мы параметризовали орбиты угловой переменной θ , $0 \leq \theta < \pi/2$. Используя θ вместо ξ в качестве основного параметра, можно переписать (8.12) в виде

$$(8.13) \quad ds^2 = \left(\frac{d\xi}{d\theta} \right)^2 \{ d\theta^2 + a(\theta)^2 \sigma_1^2 + b(\theta)^2 \sigma_2^2 + c(\theta)^2 \sigma_3^2 \},$$

где $a(\theta), b(\theta), c(\theta)$ – функции от θ , связанные с $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$ формулами

$$(8.14) \quad \frac{d\xi}{a} = \frac{d\theta}{a}, \quad \frac{d\xi}{b} = \frac{d\theta}{b}, \quad \frac{d\xi}{c} = \frac{d\theta}{c}.$$

Чтобы определить a, b, c , рассмотрим поверхности Σ_1 и Σ_{23} , введённые в гл. 7. Напомним, что в доналдсоновском описании с помощью рациональных функций эти поверхности задаются формулами

$$\Sigma_1: \quad S(z) = \frac{1}{z^2 - u}, \quad u \in \mathbb{C},$$

$$\Sigma_{23}: \quad S(z) = \frac{z}{z^2 - v}, \quad v \in \mathbb{C}^*.$$

Поскольку метрика на M_2^0 эрмитова по отношению к доналдсоновской комплексной структуре, индуцированная метрика на каждой из этих поверхностей также эрмитова, т.е. кратна $|du|^2$ или $|dv|^2$ соответственно. Сравним это с метрикой, возникающей при ограничении метрики (8.13). Рассмотрим сначала поверхность Σ_1 . На ней $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, и $\sigma_1 = d\varphi/2$, где $u = re^{i\varphi}$. Множитель $1/2$ возникает потому, что $\sqrt{u}$ ведёт себя как z при вращениях вокруг оси e_1 . Кроме

того, $\sqrt{r}$ равен первому спектральному радиусу ρ_1 . Следовательно,

$$|du|^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = r^2 \{(d \ln r)^2 + d\varphi^2\} = 4r^2 \{(d \ln \rho_1)^2 + \sigma_1^2\}.$$

Сравнивая это с (8.13), заключаем, что с точностью до знака

$$(8.15) \quad \alpha^{-1} = \frac{d}{d\theta} (\ln \rho_1).$$

Рассмотрим теперь поверхность Σ_{23} . Она пересекает подпространство осесимметричных 2-монопольей по окружности. Поэтому после выбрасывания этой окружности поверхность Σ_{23} разбивается на две компоненты. Для одной компоненты, скажем Σ_{23}^0 , величина $|v|$ велика, а для другой, Σ_{23}^1 , мала. Для Σ_{23}^0 выделенная ось (в доналдсоновском описании) есть e_3 , поэтому если $v = re^{i\varphi}$, то $\sigma_3 = d\varphi/2$ и $\sqrt{r} = \rho_3$, а $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Следовательно,

$$|dv|^2 = r^2 \{(d \ln r)^2 + d\varphi^2\} = 4r^2 \{(d \ln \rho_3)^2 + \sigma_3^2\}.$$

Сравнение с (8.13) даёт

$$(8.16) \quad \gamma^{-1} = \frac{d}{d\theta} (\ln \rho_3).$$

Аналогично для Σ_{23}^1 выделенная ось есть e_2 , и потому

$$(8.17) \quad \beta^{-1} = \frac{d}{d\theta} (\ln \rho_2).$$

В гл. 8 мы вычислили три спектральных радиуса ρ_i и нашли, что

$$\rho_1 = \frac{kK}{2}, \quad \rho_2 = \frac{kK}{2}, \quad \rho_3 = \frac{K}{2}.$$

Из (8.15)–(8.17) вытекает, что

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \alpha^{-1} &= K^{-1} \frac{dK}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta, \\ \beta^{-1} &= K^{-1} \frac{dK}{d\theta} - \operatorname{tg} \theta, \\ \gamma^{-1} &= K^{-1} \frac{dK}{d\theta}. \end{aligned}$$

Таким образом, метрика на M_2^0 конформно-эквивалентна метрике

$$(8.19) \quad ds^2 = d\theta^2 + \alpha^2 \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2 + \gamma^2 \sigma_3^2,$$

где α, β, γ – функции от θ , заданные выражениями (8.18). Заметим, что при изменении знаков величин α, β, γ в (8.18) метрика не меняется. Для знаков, выбранных в (8.18), величины α и γ положительны, а β отрицательна. Эти знаки будут играть существенную роль в следующей главе.

Антиавтодуальные уравнения Эйнштейна

Из общих соображений, обсуждавшихся в гл. 4, известно, что M_k^0 – гиперкэлерово многообразие для всех k . При $k = 2$ многообразие M_2^0 четырёхмерно. В размерности четыре многообразие гиперкэлерово тогда и только тогда, когда оно эйнштейново и антиавтодуально (поскольку группа голономии в этом случае есть $SU(2) \subset SO(4)$). Поскольку M_2^0 допускает группу изометрии $SO(3)$, начнём с обсуждения произвольных $SO(3)$ -инвариантных антиавтодуальных эйнштейновых метрик. Дифференциальные уравнения для таких метрик сводятся ввиду $SO(3)$ -симметрии к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (по крайней мере в области, где орбиты трёхмерны). Эта задача была проанализирована Гиббоном и Поупом [20]. Они показали, что метрику можно записать в виде (8.12):

$$ds^2 = d\zeta^2 + a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2,$$

причём если ввести переменную η по формуле

$$(9.1) \quad d\zeta^2 = (abc)^2 d\eta^2,$$

то a, b, c как функции от η удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(9.2) \quad \frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} = b^2 + c^2 - a^2 - 2\lambda bc \text{ и т. д.,}$$

где «и т. д.» означает, что надо дописать ещё два уравнения, получающиеся циклической перестановкой функций a, b, c .

Постоянная λ в (9.2) равна либо 0, либо 1. Она имеет следующий смысл. Гиперкэлеровость метрики означает, что имеется семейство комплексных структур, параметризуемое сферой S^2 . Группа $SO(3)$ должна действовать на эту сферу, и действие либо тривиально ($\lambda = 0$), либо стандартно ($\lambda = 1$). Как мы знаем, в случае многообразия M_2^0 действие нетривиально, поэтому $\lambda = 1$. Таким образом, наши дифференциальные уравнения имеют вид

$$(9.3) \quad \frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} = (b - c)^2 - a^2 \text{ и т. д.}$$

Тут есть, однако, один важный момент, который мы хотели бы отметить. Он заключается в том, что при решении уравнения (9.3) нет

того, $\sqrt{r}$ равен первому спектральному радиусу ρ_1 . Следовательно,

$$|du|^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = r^2 \{(d \ln r)^2 + d\varphi^2\} = 4r^2 \{(d \ln \rho_1)^2 + \sigma_1^2\}.$$

Сравнивая это с (8.13), заключаем, что с точностью до знака

$$(8.15) \quad \alpha^{-1} = \frac{d}{d\theta} (\ln \rho_1).$$

Рассмотрим теперь поверхность Σ_{23} . Она пересекает подпространство осесимметричных 2-монополь по окружности. Поэтому после выбрасывания этой окружности поверхность Σ_{23} разбивается на две компоненты. Для одной компоненты, скажем Σ_{23}^+ , величина $|v|$ велика, а для другой, Σ_{23}^- , мала. Для Σ_{23}^+ выделенная ось (в дональдсовском описании) есть e_3 , поэтому если $v = re^{i\varphi}$, то $\sigma_3 = d\varphi/2$ и $\sqrt{r} = \rho_3$, а $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Следовательно,

$$|dv|^2 = r^2 \{(d \ln r)^2 + d\varphi^2\} = 4r^2 \{(d \ln \rho_3)^2 + \sigma_3^2\}.$$

Сравнение с (8.13) даёт

$$(8.16) \quad \gamma^{-1} = \frac{d}{d\theta} (\ln \rho_3).$$

Аналогично для Σ_{23}^- выделенная ось есть e_2 , и потому

$$(8.17) \quad \beta^{-1} = \frac{d}{d\theta} (\ln \rho_2).$$

В гл. 8 мы вычислили три спектральных радиуса ρ_i и нашли, что

$$\rho_1 = \frac{kK}{2}, \quad \rho_2 = \frac{k'K}{2}, \quad \rho_3 = \frac{K}{2}.$$

Из (8.15)–(8.17) вытекает, что

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \alpha^{-1} &= K^{-1} \frac{dK}{d\theta} + \operatorname{ctg} \theta, \\ \beta^{-1} &= K^{-1} \frac{dK}{d\theta} - \operatorname{tg} \theta, \\ \gamma^{-1} &= K^{-1} \frac{dK}{d\theta}. \end{aligned}$$

Таким образом, метрика на M_2^0 конформно-эквивалентна метрике

$$(8.19) \quad ds^2 = d\theta^2 + \alpha^2 \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2 + \gamma^2 \sigma_3^2,$$

где α, β, γ – функции от θ , заданные выражениями (8.18). Заметим, что при изменении знаков величин α, β, γ в (8.18) метрика не меняется. Для знаков, выбранных в (8.18), величины α и γ положительны, а β отрицательна. Эти знаки будут играть существенную роль в следующей главе.

Антиавтотдуальные уравнения Эйнштейна

Из общих соображений, обсуждавшихся в гл. 4, известно, что M_k^0 – гиперкэлерово многообразие для всех k . При $k = 2$ многообразие M_2^0 четырёхмерно. В размерности четыре многообразие гиперкэлерово тогда и только тогда, когда оно эйнштейново и антиавтотдуально (поскольку группа голономии в этом случае есть $SU(2) \subset SO(4)$). Поскольку M_2^0 допускает группу изометрии $SO(3)$, начнём с обсуждения произвольных $SO(3)$ -инвариантных антиавтотдуальных эйнштейновых метрик. Дифференциальные уравнения для таких метрик сводятся ввиду $SO(3)$ -симметрии к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (по крайней мере в области, где орбиты трёхмерны). Эта задача была проанализирована Гиббонзом и Поупом [20]. Они показали, что метрику можно записать в виде (8.12):

$$ds^2 = d\xi^2 + a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2,$$

причём если ввести переменную η по формуле

$$(9.1) \quad d\xi^2 = (abc)^2 d\eta^2,$$

то a, b, c как функции от η удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(9.2) \quad \frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} = b^2 + c^2 - a^2 - 2\lambda bc \text{ и т. д.,}$$

где «и т. д.» означает, что надо дописать ещё два уравнения, получающиеся циклической перестановкой функций a, b, c .

Постоянная λ в (9.2) равна либо 0, либо 1. Она имеет следующий смысл. Гиперкэлеровость метрики означает, что имеется семейство комплексных структур, параметризуемое сферой S^2 . Группа $SO(3)$ должна действовать на эту сферу, и действие либо тривиально ($\lambda = 0$), либо стандартно ($\lambda = 1$). Как мы знаем, в случае многообразия M_2^0 действие нетривиально, поэтому $\lambda = 1$. Таким образом, наши дифференциальные уравнения имеют вид

$$(9.3) \quad \frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} = (b - c)^2 - a^2 \text{ и т. д.}$$

Тут есть, однако, один важный момент, который мы хотели бы отметить. Он заключается в том, что при решении уравнения (9.3) нет

необходимости требовать, чтобы все функции a, b, c были положительными. Конечно, в выражении для ds^2 появляются лишь a^2, b^2, c^2 , но уравнение (9.3) содержит перекрёстный член bc , и поэтому знаки функций a, b, c становятся существенными. На самом деле, как мы увидим, для метрики на M^2 одна из функций a, b, c отрицательна. Эта возможность была пропущена в [20]. Однако при одновременном изменении знаков функций a, b, c ни метрика, ни уравнения (9.3) не меняются, поэтому мы можем считать, что, скажем, функция a положительна. После этого ориентируем трансверсальную переменную ξ так, чтобы $d\xi = -abc d\eta$.

Правые части уравнений (9.3) однородны по a, b, c , поэтому можно спроектировать траектории на проективную плоскость. Поскольку степень однородности правых частей чётна, мы получим на проективной плоскости ориентированные траектории. Это означает, что решения уравнений (9.3) можно найти, решив сначала некоторое обыкновенное дифференциальное уравнение на проективной плоскости, а затем выполнив одно-единственное интегрирование.

На проективной плоскости получается изображённая на рис. 4 диаграмма критических точек, очевидных прямолинейных траекторий и искривлённых траекторий F и F' , которые мы опишем позже.

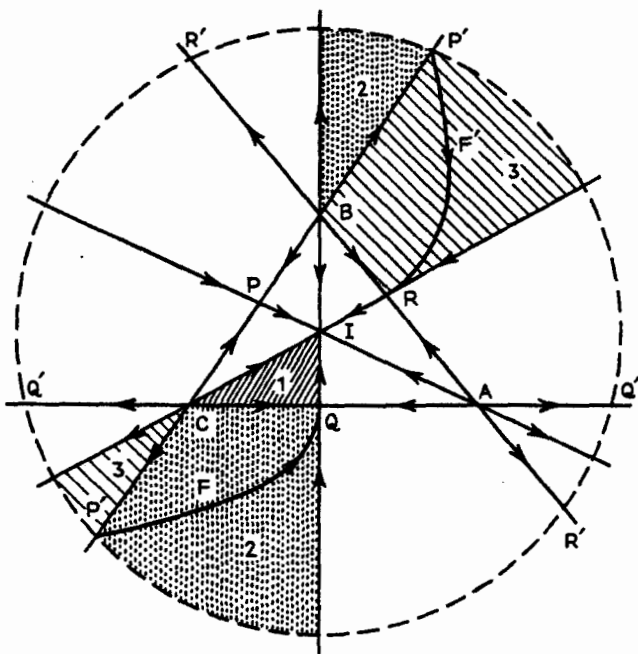


Рис. 4

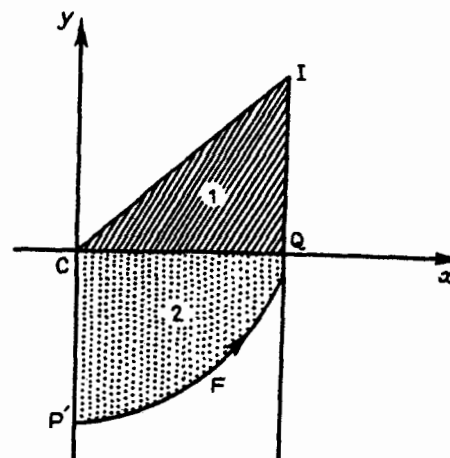


Рис. 5

Пунктирная окружность изображает прямую на бесконечности (противоположные точки должны быть отождествлены); однородные координаты точек A, B и C суть $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ соответственно; точки P, P' имеют координаты $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ и т.д., точка I — координаты $(1, 1, 1)$.

Ясно, что уравнения (9.3) инвариантны относительно симметрической группы перестановок величин a, b, c . Поэтому при изучении траекторий на проективной плоскости можно ограничиться двумя типичными областями 1 и 2. Чтобы исследовать их, нарушим симметрию и введём аффинные координаты

$$x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c}.$$

Начало координат находится в точке C . Относящаяся к делу часть диаграммы представлена на рис. 5.

Из уравнений (9.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{2d \ln x}{d\eta} &= \frac{2d \ln a}{d\eta} - \frac{2d \ln c}{d\eta} \\ &= [(b-c)^2 - a^2] [(a-b)^2 - c^2] \\ &= 2(c^2 - a^2 - bc + ab) \\ &= 2(c-a)(a+c-b). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{d \ln y}{d\eta} = (c-b)(b+c-a).$$

Деля на c^2 и вводя параметр u формулой

$$(9.4) \quad du = c^2 d\eta,$$

приходим к следующему векторному полю на плоскости x, y :

$$(9.5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = x(1-x)(1+x-y), \\ \frac{dy}{du} = y(1-y)(1+y-x). \end{cases}$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$(9.6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)(1+y-x)}{x(1-x)(1+x-y)}.$$

Из этих уравнений немедленно вытекает, что начало координат C представляет собой *источник* (это показано стрелочками на рис. 4). Далее, около точки $P' = (0, -1)$ имеем

$$(9.7) \quad \frac{dy}{dx} \sim -\frac{(1+y-x)}{x}.$$

Это показывает, что P' — *седловая точка*, причём $P'C$ ($x=0$) — *устойчивая кривая*, а *неустойчивая кривая* F имеет касательную $1+y-x/2=0$.

В точке $Q = (1, 0)$ у производной dy/du нуль второго порядка. Это означает, что локальное поведение траекторий около этой точки более сложно. В области 1 производные dx/du и dy/du обе положительны, поэтому траектории выглядят, как показано на рис. 6. Точка Q в этой области ведет себя как седло. Однако в области 2 асимптотическое поведение уравнения (9.6) вблизи точки Q определяется (как мы покажем позже) уравнением

$$(9.8) \quad \frac{dy}{dx} \sim \frac{y^2}{2(1-x)}.$$

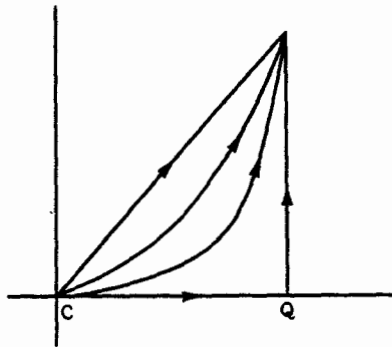


Рис. 6

Отсюда следует, что

$$(9.9) \quad y^{-1} \sim \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

Таким образом, локально траектории около точки Q в области 2 устроены, как изображено на рис. 7. Имеется бесконечное число экспоненциально близких к прямой $x=1$ ветвей с концом в точке Q .

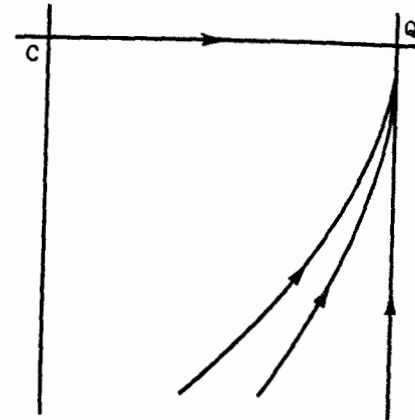


Рис. 7

Рассмотрим глобальные траектории. Ясно, что в области 1 лишь прямая $x=1$, идущая от Q к I , не проходит через C .

Перейдём к области 2. Здесь $dx/du > 0$, и поэтому на каждой траектории (кроме $x=0$) x монотонно возрастает от 0 до 1. Поскольку C и $B = (0, -\infty)$ — источники, все траектории должны кончаться в точке Q . В частности, это относится к траектории F (неустойчивой кривой для точки P'). Более того, это единственная траектория в данной области, для которой точки B и C не являются концевыми.

В результате мы получаем, что всего две глобальные траектории не проходят через C или B , а именно прямая QI в области 1 и кривая F в области 2 (см. рис. 5), ведущая из P' в Q (F — неустойчивая кривая для P'). Кроме того, при приближении к Q кривая F экспоненциально близка к прямой $x=1$.

Вернёмся теперь к нашему гиперкэлерову четырёхмерному многообразию с метрикой, задаваемой решениями уравнений (9.3). Если мы хотим получить *полное* четырёхмерное многообразие, то, очевидно, нам нужна полная траектория системы уравнений (9.3). Далее, пока траектория в проективной плоскости не подходит к

сторонам треугольника ABC (так что $abc \neq 0$), все $SO(3)$ -орбиты трёхмерны. Однако при появлении точек на треугольнике ABC мы получаем вырожденные орбиты и четырёхмерное многообразие может стать сингулярным. На траектории, лежащие целиком на сторонах треугольника, обращать внимания не будем, поскольку они не соответствуют метрикам с трёхмерными орбитами общего положения.

Рассмотрим сперва траекторию, проходящую через одну из вершин треугольника, скажем C. Около точки $C = (0, 0)$ уравнение (9.6) асимптотически имеет вид

$$\frac{dy}{dx} \sim \frac{y}{x}.$$

Поэтому асимптотически траектории, проходящие через C, задаются уравнением $y \sim \lambda x$. (Здесь $\lambda \in \{0, \infty\}$, чтобы траектория не совпала ни с одной из осей.) Тогда уравнения (9.3)–(9.5) показывают, что

$$\frac{dx}{d\eta} \sim c^2 x, \quad \frac{dc}{d\eta} \sim -\frac{c^3}{2}.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{dx}{dc} \sim -\frac{2x}{c}, \quad x \sim \mu c^{-2}$$

для некоторой константы μ . Геодезическое расстояние ξ в направлениях, перпендикулярных к орбитам, связано с η формулой $d\xi = -abc d\eta$. Следовательно,

$$-\frac{d\xi}{dx} \sim \lambda x^2 c^3 \frac{d\eta}{dx} \sim \lambda x c \sim (\lambda \mu^{1/2}) x^{1/2}.$$

Интегрируя, получаем, что ξ остаётся конечным при $x \rightarrow 0$. Поэтому, для того чтобы получить полное четырёхмерное многообразие, нам надо было бы добавить вырожденную орбиту, отвечающую точке C. Но если $x \rightarrow 0$, то $c^2 \rightarrow \infty$ и, значит, ds^2 перестаёт быть конечным. Таким образом, траектории, проходящие через вершины, можно исключить.

Итак, остаются лишь две траектории, QI и F, а также траектория-точка I. Для последней $a = b = c$, все орбиты сферические, и уравнения (9.3) показывают, что $\eta = a^{-2}$, $\xi = 2a$. Это отвечает плоской метрике на пространстве R^4/Z_2 . Оно имеет коническую сингулярность в начале координат, которая возникает потому, что мы ищем многообразия с действием группы $SO(3)$, а не $SU(2)$.

Для траектории QI имеем $a = c$, поэтому из уравнений (9.3) следует, что $b = \eta^{-1/2}$ и

$$\frac{2 da}{a d\eta} = (\eta^{-1/2} - a)^2 - a^2 = \eta^{-1} - 2a\eta^{-1/2},$$

откуда

$$\frac{d}{d\eta}(a^{-1}\eta^{1/2}) = -\frac{\eta^{1/2}}{2a}(\eta^{-1} - 2a\eta^{-1/2}) + \frac{\eta^{-1/2}}{2a} = 1.$$

Последнее уравнение немедленно интегрируется, и мы получаем (9.10)

$$a^{-1}\eta^{1/2} = \eta - \gamma$$

для некоторой константы γ . Поскольку a было выбрано положительным, $\eta^{1/2}$ означает положительную ветвь корня. При $\eta \rightarrow \infty$ мы приходим к точке I, а при $\eta \rightarrow \gamma$ к точке Q. Заметим, что η всегда положительно, а значит, $\gamma \geq 0$ ($\gamma \neq 0$, ибо в противном случае $a = b = c$ и мы возвращаемся к неподвижной точке I). Наконец, геодезическое расстояние определяется уравнением

$$-d\xi = abc d\eta = \frac{\eta^{1/2}}{(\eta - \gamma)^2} d\eta.$$

Следовательно,

$$\xi = -\int \frac{\eta^{1/2}}{(\eta - \gamma)^2} d\eta.$$

Этот интеграл сходится при $\eta \rightarrow \infty$ и расходится ($\rightarrow +\infty$) при $\eta \rightarrow \gamma$, поэтому, чтобы получить полную метрику, надо ещё добавить вырожденную орбиту, соответствующую $\eta = \infty$ (т.е. точке I). Поскольку a, b, c стремятся к 0 при $\eta \rightarrow \infty$, вырожденная орбита состоит из одной точки. Далее, полученные формулы показывают, что $a \sim \xi/2$, поэтому при добавлении этой точки появляется коническая сингулярность. Как и в плоском случае, это означает, что фактически мы строим несингулярное гиперкэлерово многообразие, на котором действует группа $SU(2)$, а не $SO(3)$.

Только что описанное решение хорошо известно; оно принадлежит к тауб-НУТ-семейству. Заметим, что, поскольку $a = c$, эта метрика обладает дополнительной $U(1)$ -симметрией. На бесконечности, т.е. при $\eta \rightarrow \gamma$, мы имеем $a = c \sim \xi \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \gamma^{-1/2}$.

В конце концов остаётся решение, задаваемое кривой F, связывающей точку P с Q. Это, конечно, то самое решение, которое нам нужно. Оно задает метрику на пространстве M_2^2 два-монополь, поскольку уже известно, что это — полное гиперкэлерово четырёхмерное многообразие, на котором действует группа $SO(3)$, а, как мы только что убедились, других возможностей нет. Тем не менее проверим независимо, что F действительно определяет полное несингулярное многообразие.

Вблизи точки Q кривая F экспоненциально близка к прямой $x = 1$. Отсюда легко следует, что формулы для a, b, c экспоненциально близки к соответствующим формулам для тауб-НУТ-метрики, за исключением того, что b теперь отрицательно. Равенство $a = c$

заменяется на экспоненциальную малость величины $a - c$ (как функции от ξ). Кроме того, поскольку η теперь возрастает при приближении к Q , член $(\eta - \gamma)^{1/2}$ заменяется на $(\gamma - \eta)^{1/2}$, и мы имеем

$$(9.11) \quad a \approx \frac{\eta^{1/2}}{(\gamma - \eta)^{1/2}}, \quad b \approx -\eta^{1/2}$$

при $\eta \rightarrow \gamma$, где $\approx$ означает, что разница между левой и правой частями экспоненциально мала.

Чтобы понять, как устроена кривая F вблизи седловой точки P' , напомним, что $y \sim -1 + x/2$, а значит,

$$(9.12) \quad b \sim -c + \frac{a}{2}.$$

Поэтому асимптотически система (9.3) сводится к системе

$$(9.13) \quad \frac{2}{a} \frac{da}{d\eta} \sim 4c^2, \quad \frac{2}{c} \frac{dc}{d\eta} \sim \left(c + \frac{a}{2}\right)^2 - c^2 \sim ac.$$

Деля первое уравнение на второе, получаем

$$(9.14) \quad \frac{da}{dc} \sim 4, \quad \text{или} \quad a \sim 4(c - \delta)$$

для некоторой константы δ . Поскольку $a/c \rightarrow 0$ в точке Q , заключаем, что $c \rightarrow \delta$. Далее, из (9.13) следует, что

$$(9.15) \quad d\xi = -abc d\eta \sim ac^2 d\eta \sim 2dc.$$

Поэтому, снова используя (9.13), получаем

$$\frac{d \ln a}{d\eta} \sim 2\delta^2,$$

или

$$(9.16) \quad a \sim \beta \exp(2\delta^2 \eta)$$

для некоторой положительной константы β . Поскольку $a/c \rightarrow 0$ и $c \rightarrow \delta$, имеем $a \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow -\infty$. Выберем начало отсчета для ξ так, чтобы

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} -abc d\eta.$$

Тогда $\xi = 0$ при $\eta = -\infty$. Из (9.14) и (9.15) вытекает, что

$$(9.17) \quad \begin{cases} c \sim \delta + \frac{\xi}{2}, \\ a \sim 2\xi. \end{cases}$$

Наконец, (9.12) даёт

$$(9.18) \quad b \sim -\delta + \frac{\xi}{2}.$$

Ведущие члены в уравнениях (9.17) и (9.18) показывают, что при добавлении вырожденной двумерной орбиты при $\xi = 0$ мы получаем гладкое многообразие. Эта двумерная орбита имеет метрику с $a = |b| = \delta$ и является поэтому либо сферой радиуса δ , либо же порождаемой ею проективной плоскостью. Кроме того, в плоскости, нормальной к этой орбите, метрика имеет вид

$$d\xi^2 + 4\xi^2 \sigma_1^2.$$

Это показывает, что отвечающая σ_1 подгруппа $SO(2)$ группы $SO(3)$ двулистно накрывает нормальную окружность. Если $\xi = 0$ соответствует двумерной сфере, то орбиты при $\xi \neq 0$ должны быть изоморфны $SO(3)/Z_2$, где $Z_2 \subset SO(2)$ — подгруппа порядка 2. Если же $\xi = 0$ соответствует RP^2 , то орбиты при $\xi \neq 0$ должны быть изоморфны $SO(3)/D$, где D — подгруппа диагональных матриц. Это согласуется с описанием пространства M_2^0 два-монополь, данным в гл. 6.

В статье [20] двумерные орбиты только что описанного типа были названы *болтами*. Авторы полагали, что случай $a \sim 2\xi$, который, как было выше показано, приводит к трёхмерным орбитам вида $SO(3)/Z_2 = SU(2)/Z_4$, не встречается.

Подведём итоги. Мы видим, что существует единственное (с точностью до двулистного накрытия) полное гиперкэлерово четырёхмерное многообразие M , на котором действует группа $SO(3)$, причём

- (а) типичные орбиты трёхмерны,
- (б) группа $SO(3)$ вращает комплексные структуры на M .

Следовательно, это многообразие должно совпадать с пространством M_2^0 два-монополь (или с его накрытием $\tilde{M}_2^0$). Мы исследовали поведение метрики вблизи болта и на бесконечности. В гл. 10 мы дополним этот качественный анализ и выведем ряд неравенств, которым удовлетворяют функции a, b, c . После этого в гл. 11 будут выведены явные аналитические формулы для метрики.

Заметим, что в случае плоской метрики и тауб-НУТ-метрики группой, действующей на многообразии, является $SU(2)$, а не $SO(3)$. Это отличает их от нашего многообразия.

Некоторые неравенства

В главе 9 мы показали, что в проективной плоскости (a, b, c) существует единственная траектория F дифференциальных уравнений (9.3), идущая от P' к Q . В этой главе мы выведем ряд неравенств, которые дают полезную информацию о траектории F . Как и прежде, мы используем аффинные координаты (x, y) с центром в точке C . Прежде всего, докажем следующую лемму.

Лемма (10.1). *Кривая F целиком лежит в области*

$$-1 + \frac{x}{2} \leq y \leq -1 + x.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для дифференциального уравнения (9.6) производная dy/dx удовлетворяет условиям:

- а) $dy/dx < 1$ на отрезке $y = -1 + x$, $0 < x < 1$,
- б) $dy/dx > 1/2$ на отрезке $y = -1 + x/2$, $0 < x < 1$,
- с) около точки P' кривая F лежит в требуемой области.

Если эти условия выполнены, то векторное поле на границе области будет выглядеть, как показано на рис. 8. Из рисунка видно, что, находясь в этой области, кривая F не может выйти из неё, не достигнув точки Q .

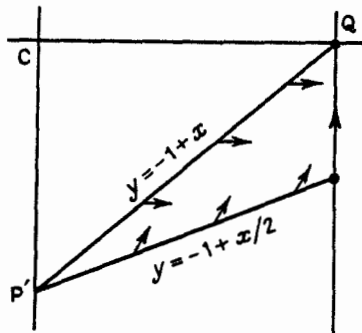


Рис. 8

Условие (а) тривиально, поскольку на самом деле $dy/dx = 0$ при $y = -1 + x$. Чтобы доказать (б), мы должны проверить, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)(1+y-x)}{x(1-x)(1+x-y)} > \frac{1}{2}$$

на отрезке $y = -1 + x/2$, $0 < x < 1$, т.е. что

$$\left(-1 + \frac{x}{2}\right)\left(2 - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{-x}{2}\right) > \frac{1}{2}x(1-x)\left(2 + \frac{x}{2}\right).$$

Поскольку $x > 0$, это эквивалентно тому, что

$$\begin{aligned} (2-x)(4-x) &> 2(1-x)(4+x), \\ 8-6x+x^2 &> 8-6x-2x^2, \\ x^2 &> 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (б) выполнено.

Наконец, (с) вытекает из (б) и из того, что P' есть седловая точка. Из условия (б) следует, что никакая траектория в секторе, ограниченном $P'C$ и $y = -1 + x/2$, не может пересечь последнюю прямую. Это показывает, что F не может начинаться в P' ниже своей касательной $y = -1 + x/2$. Другими словами, F начинается выше своей касательной и, значит, лежит в требуемой области.

Из леммы (10.1) следует, в частности, что $x, |y|, 1$, а следовательно, и $a, |b|, c$ удовлетворяют неравенствам, связывающим стороны треугольника. Нам будет удобно использовать этот треугольник. Обозначим его углы через A, B, C . Имеем

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

Поэтому из неравенства $-1 + x/2 \leq y$, или

$$|b| \leq c - a/2$$

следует, что

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > \frac{1}{2} + \frac{3a}{8c} \geq \frac{1}{2}.$$

Кроме того, оба эти неравенства превращаются в равенства только при $a = 0$, т.е. на болте. Таким образом, мы доказали, что

(10.2) $B \leq \pi/3$, причём равенство достигается только на болте.

Из леммы (10.1) следует, что $|y| \leq 1$. Поскольку $x \leq 1$, мы заключаем, что c — наибольшая сторона треугольника, и поэтому C — наибольший угол. Следующая лемма ограничивает C сверху.

Лемма (10.3). $C \leq 2\pi/3$, причём равенство достигается только на болте.

Доказательство. Если $s = \frac{1}{2}(a + |b| + c)$, то

$$\begin{aligned}\sin^2 C/2 &= \frac{(s-a)(s-|b|)}{a|b|} \\ &= -\frac{(-a-b+c)(a+b+c)}{4ab} \\ &= \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{4xy} = \frac{(x+y)^2-1}{4xy}.\end{aligned}$$

Далее, неравенство $C \leq 2\pi/3$ эквивалентно неравенству $\sin^2 C/2 \leq 3/4$. Следовательно, мы должны показать, что

$$\frac{(x+y)^2-1}{xy} \leq 3.$$

Поскольку $xy \leq 0$ на кривой F , мы можем, умножая обе части на xy , переписать это неравенство в виде

$$(x+y)^2-1 \geq 3xy,$$

или

$$(10.4) \quad x^2 + y^2 - xy - 1 \geq 0.$$

Геометрически это означает, что мы должны показать, что кривая F лежит ниже эллипса

$$(10.5) \quad x^2 + y^2 - xy - 1 = 0.$$

Заметим, что этот эллипс проходит и через точку $P' = (0, -1)$, и через точку $Q = (1, 0)$. Более того, в точке P' он имеет ту же касательную $y = -1 + x/2$, что и F . Разлагая уравнение эллипса до второго порядка по x , мы получаем

$$\begin{aligned}y &= \frac{x}{2} - \left(1 - \frac{3x^2}{4}\right)^{1/2} \\ &= \frac{x}{2} - 1 + \frac{3x^2}{8} + \dots\end{aligned}$$

Коэффициент при x^2 положителен. С другой стороны, поток, заданный уравнениями (9.3) в проективной плоскости (a, b, c) , симметричен при перемени местами величин b и c . Поскольку такая замена оставляет точку P' неподвижной, а точку Q переводит в точку R (см. рис. 4 в главе 9), она должна переводить траекторию F в траекторию F' , лежащую в области 3 и соединяющую точку P' с точкой R . Симметрия конфигурации (локально — отражение в точке P') показывает, что F' лежит ниже своей касательной $y = -1 + x/2$. Отсюда следует, что в тэйлоровском разложении для кривой F в точке P' член,

следующий за $-1 + x/2$, имеет нечётную степень. В частности, коэффициент при x^2 равен нулю. Таким образом, эллипс (10.5) начинается *выше* F около точки P' .

Чтобы проверить, что эллипс остается выше F , достаточно показать, что на эллипсе угол наклона нашего векторного поля меньше, чем угол наклона касательной к эллипсу, т. е. что при $0 < x < 1$, $y < 0$ справедливо неравенство

$$\frac{2x-y}{x-2y} > \frac{y(1-y)(1+y-x)}{x(1-x)(1+x-y)},$$

где $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$. Оба знаменателя в рассматриваемой области положительны, поэтому мы можем переписать это неравенство в виде

$$(2x-y)x(1-x)(1+x-y) > (x-2y)y(1-y)(1+y-x).$$

Но для точек эллипса имеем

$$(1-x)(1+x-y) = 1 - x^2 + xy - y = y^2 - y,$$

$$(1-y)(1+y-x) = 1 - y^2 + xy - x = x^2 - x.$$

Следовательно, мы должны показать, что

$$xy(2x-y)(y-1) > xy(x-2y)(x-1),$$

или, поскольку $xy < 0$, что

$$(2x-y)(y-1) < (x-2y)(x-1),$$

$$2xy - y^2 - 2x + y < x^2 - 2xy - x + 2y,$$

$$x^2 + y^2 - 4xy + x + y > 0.$$

Снова используя уравнение эллипса, мы можем свести это неравенство к виду

$$1 - 3xy + x + y > 0,$$

$$\frac{4}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Но $y - 1/3 < 0$, поэтому полученное выражение достигает минимума при $x = 0$, $y = -1$, и минимальное значение равно

$$\frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Следовательно, в рассматриваемой области (для которой $x > 0$ и $y > -1$) это выражение положительно. Лемма доказана.

На болте имеем

$$A = 0, \quad B = \frac{\pi}{3}, \quad C = \frac{2\pi}{3},$$

а в ∞ —

$$B \rightarrow 0, \text{ и } A, C \rightarrow \pi/2,$$

поскольку $|b| \rightarrow \text{const}$ и $a, c \rightarrow \infty$, причем разница между ними экспоненциально мала (см. главу 9). Таким образом, A и C стремятся к $\pi/2$ снизу. Поскольку очевидно, что углы непрерывно зависят от величины ξ (параметризующей $SO(3)$ -орбиты), мы получаем, что C должно принимать значение $\pi/2$ хотя бы один раз. На самом деле справедлива следующая лемма:

Лемма (10.6). $C = \pi/2$ в точности для одного значения ξ .

Доказательство. Равенство $C = \pi/2$ эквивалентно равенству $c^2 = a^2 + b^2$, или

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Таким образом, мы должны показать, что кривая F пересекает эту окружность ровно в одной точке (не совпадающей с точками P' и Q). В точке P' окружность имеет касательную $y = -1$ и, следовательно, проходит под F , а в точке Q' окружность проходит над F (поскольку F экспоненциально близко к $x = 1$). Следовательно, достаточно доказать, что в квадранте $x > 0, y < 0$ тангенс угла наклона нашего векторного поля равен тангенсу угла наклона касательной к окружности в точности в одной точке окружности. Разница ϕ этих тангенсов равна

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{y(1-y)(1+y-x)}{x(1-x)(1+x-y)} + \frac{x}{y} \\ &= \frac{y^2(1-y)(1+y-x) + x^2(1-x)(1+x-y)}{xy(1-x)(1+x-y)}. \end{aligned}$$

Числитель

$$-(x^4 + y^4) + (x^2 + y^2) - xy(x+y) + xy(x^2 + y^2)$$

этого выражения упрощается на окружности $x^2 + y^2 = 1$ и принимает вид

$$xy(2xy - x - y + 1).$$

Но гипербола

$$2xy - x - y + 1 = 0$$

пересекает окружность $x^2 + y^2 = 1$ в четырех точках

$$(1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Из них только третья лежит строго внутри интересующего нас квадранта. Таким образом, ϕ меняет знак ровно один раз. Это завершает доказательство леммы.

Прямая $y = -1 + x/2$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 1$ в точках с абсциссой $x = 0$ или $x = 4/5$. Поэтому из леммы (10.1) следует, что абсцисса той, единственной по лемме (10.6), точки, в которой F пересекает окружность, должна быть больше $4/5$. Таким образом, мы получаем:

$$(10.7) \quad \cos B > 4/5 \text{ при } C = \pi/2.$$

Перепишем наши основные уравнения (9.3) в тригонометрических терминах, пользуясь треугольником со сторонами $a, |b|, c$ и углами A, B, C . Кроме того, мы будем пользоваться геодезическим расстоянием ξ , связанным с η , как и прежде, формулой $d\xi = -abc d\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\xi} &= -\frac{1}{abc} \frac{da}{d\eta} = -\frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{|b|^2 + 2|b|c + c^2 - a^2}{2|b|c} \quad (\text{поскольку } b < 0) \\ &= \cos A + 1. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления (с учетом знаков) для b и c приводят к системе

$$(10.8) \quad \begin{cases} \frac{da}{d\xi} = \cos A + 1, \\ \frac{d|b|}{d\xi} = \cos B - 1, \\ \frac{dc}{d\xi} = \cos C + 1. \end{cases}$$

Из этих уравнений немедленно вытекает, что a и c монотонно возрастают при увеличении ξ , а $|b|$ убывает. Кроме того, вычисляя вторые производные, мы получаем

$$(10.9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a}{d\xi^2} = -\sin A \frac{dA}{d\xi}, \\ \frac{d^2 |b|}{d\xi^2} = -\sin B \frac{dB}{d\xi}, \\ \frac{d^2 c}{d\xi^2} = -\sin C \frac{dC}{d\xi}. \end{cases}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма (10.10). A , как функция от ξ , возрастает, причём $d^2 a / d\xi^2 \leq 0$, т. е. a — выпуклая функция от ξ . Равенство достигается лишь при $\xi = 0$, т. е. на болте.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\cos A$ убывает при возрастании параметра ξ . Более того, поскольку $x = a/b$ — возрастающая функция от ξ (см. (9.4) и (9.5)), это эквивалентно тому, что $\cos A$ убывает при возрастании координаты x . Далее,

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2|b|c} \\ &= -\frac{y^2 + 1 - x^2}{2y}.\end{aligned}$$

Дифференцируя по x , получаем

$$\frac{d}{dx}(\cos A) = \frac{x}{y} - \left(\frac{1}{2} + \frac{(x^2 - 1)}{2y^2} \right) \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, мы должны доказать, что

$$(10.11) \quad 2xy + (1 - x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} \leq 0.$$

Далее, на кривой F имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - y)(1 + y - x)}{x(1 - x)(1 + x - y)}.$$

Отсюда следует тождество

$$(10.12) \quad \frac{dy}{dx} - 1 = \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{x(1 - x)(1 + x - y)}.$$

Поскольку знаменатель и $(x - y)$ положительны, мы получаем, что

$$(10.13) \quad \frac{dy}{dx} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Вернёмся к доказательству неравенства (10.11). Заметим, что результат тривиален при $x^2 + y^2 > 1$, поскольку $y < 0$ и $dy/dx \geq 0$. Таким образом, мы можем предположить, что $x^2 + y^2 \leq 1$. В этом случае, пользуясь (10.13), мы получаем, что (10.11) следует из неравенства

$$2xy + 1 - x^2 - y^2 \leq 0,$$

т.е.

$$(x - y)^2 \geq 1.$$

Но на кривой F , по лемме (10.1), $y \leq 1 + x$, и поэтому $x - y \geq 1$, что и требовалось. Наконец, заметим, что все неравенства, которые мы использовали, становятся равенствами только при $x = 0$, т.е. при $\xi = 0$.

Тангенс угла наклона кривой F в точке P' равен $1/2$. Покажем теперь, что это минимальное значение.

Лемма (10.14). $dy/dx \geq 1/2$ на кривой F , причём равенство достигается только в точке P' .

Доказательство. По определению, наклон кривой F задается дифференциальным уравнением (9.6). Рассмотрим поэтому кривую G в области $0 \leq x \leq 1$, $y \leq 0$, задаваемую уравнением

$$(10.15) \quad f(x, y) \equiv 2y^3 - 2xy^2 + (x^2 + x - 2)y + (x - x^3) = 0,$$

или, раскрывая скобки, уравнением

$$(10.16) \quad f(x, y) \equiv 2y^2 - 2xy^2 + (x^2 + x - 2)y + (x - x^3) = 0.$$

При $0 < x < 1$ эта функция, как функция от y , имеет единственный отрицательный корень. Поэтому G содержит единственную ветвь, ведущую из точки $P' = (0, -1)$ в точку $Q = (1, 0)$. Для доказательства леммы мы должны показать, что $f(x, y) < 0$ на F , или, эквивалентно, что G лежит выше F всюду, кроме общих точек P' и Q . Далее, из доказательства леммы (10.1) следуют неравенства

$$f(x, -1 + x) \leq 0, \quad f(x, -1 + x/2) \geq 0,$$

показывающие, что G , как и F , лежит целиком внутри сектора

$$(10.17) \quad -1 + \frac{x}{2} \leq y \leq -1 + x.$$

Более того, степенные разложения около точки P' имеют вид

$$y \sim -1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{16}x^3 + \dots$$

для G , и

$$y \sim -1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{32}x^3 + \dots$$

для F . Отсюда следует, что вблизи точки P' кривая G лежит выше кривой F . Поэтому достаточно доказать, что наклон кривой G больше чем $1/2$ (т.к. $1/2$ — наклон потока (9.6) на G). Дифференцируя (10.16), получаем

$$(10.18) \quad (6y^2 - 4xy + (x^2 + x - 2)) \frac{dy}{dx} - 2y^2 + y(2x + 1) - 3x^2 + 1 = 0.$$

Наклон кривой G конечен во всех точках, за исключением точки Q , которая является двойным корнем (по y) функции (10.16). Поэтому коэффициент при dy/dx в (10.18) не может обращаться в нуль при $x < 1$. При $x = 0$, $y = -1$ он положителен, и, следовательно, он остается положительным на G . Таким образом, наклон кривой G больше или равен $1/2$, если

$$2(2y^2 - y(2x + 1) + 3x^2 - 1) \geq 6y^2 - 4xy + (x^2 + x - 2),$$

т.е.

$$5x^2 \geq 2y^2 + 2y + x.$$

Используя ограничения (10.17) на x , мы можем свести это неравенство к неравенству

$$5(y+1)^2 \geq 2y^2 + 2y + 2(y+1) = 2(y+1)^2,$$

которое, очевидно, выполнено. Более того, все наши неравенства превращаются в равенства лишь при $y = -1$, $x = 0$, т.е. в точке P' . Это завершает доказательство.

Вернёмся теперь к изучению вариации угла B , и докажем лемму:

Лемма (10.19). Угол B возрастает как функция от ξ и $d^2|b|/d\xi^2 \geq 0$, т.е. $|b|$ -вогнутая функция от ξ . Кроме того, равенство достигается только при $\xi = 0$, т.е. на болте.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы (10.10), достаточно показать, что

$$\frac{d}{dx}(\cos B) \geq 0.$$

Далее,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{x^2 + 1 - y^2}{2x}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dx}(\cos B) = \frac{x^2 - 1 + y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}}{2x^2}.$$

Это выражение положительно, если

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 2xy \frac{dy}{dx}$$

или, поскольку $y \leq 0$, если

$$(10.20) \quad \frac{dy}{dx} \geq \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy}.$$

Но мы уже доказали, что на кривой F

$$\frac{dy}{dx} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{лемма (10.14)}),$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq xy \quad (\text{лемма (10.3) или, эквивалентно, неравенство (10.4)}).$$

Поскольку $y \leq 0$, вместе это приводит к (10.20).

В заключение этой главы выпишем для удобства таблицу областей значений всех наших переменных. При этом полезно присоединить к нашей кривой F её зеркальный образ F' , получающийся при симметрии $b \leftrightarrow c$, поскольку эти две кривые вместе образуют полное гладкое решение нашего дифференциального уравнения, сохраняющееся при симметрии $(a, b, c, \xi) \rightarrow (-a, -c, -b, -\xi)$.

	η	ξ	a	b	c	A	B	C	
R	γ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\gamma^{-1/2}$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	F'
P'	$-\infty$	0	0	$-\delta$	δ	0	$2\pi/3$	$\pi/3$	
							$\pi/3$	$2\pi/3$	F
Q	γ	∞	∞	$-\gamma^{-1/2}$	∞	$\pi/2$	0	$\pi/2$	

Очевидно, что углы B и C претерпевают разрыв в точке P' (см. рис. 9, на котором изображен треугольник ABC при $A \sim 0$; B^+ и B^- представляют вершину B треугольника в областях $\xi > 0$ и $\xi < 0$ соответственно). В таблице этот разрыв показан пунктирной линией в клетках для B и C , отвечающих точке P' .

Как было установлено выше (см. леммы (10.10) и (10.19)), при движении от P' к Q углы A и B меняются монотонно. Угол же C меняется не монотонно, поскольку (в силу (10.6)) он принимает значение $\pi/2$ в некоторой точке, лежащей строго между P' и Q .

Рассмотрим какую-либо ортогональную к $SO(3)$ -орбитам полную геодезическую на нашем четырёхмерном многообразии и используем ξ как геодезический параметр (меняющийся от $-\infty$ до $+\infty$). Наша таблица показывает, как ведут себя величины a, b, c, A, B, C вдоль геодезической. Обратите внимание на то, как b и c меняются местами,

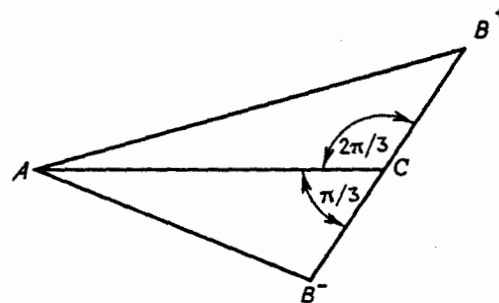


Рис. 9

когда мы пересекаем точку $\xi = 0$. Это отражает то обстоятельство, что точки $\pm \xi$ лежат на одной $SO(3)$ -орбите.

Константы в таблице определяются кривой F лишь с точностью до общего множителя. Однако отношение $\delta/\gamma^{-1/2}$ есть внутренний инвариант кривой F . Как мы увидим в гл. 12,

$$\frac{\delta}{\gamma^{-1/2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, там будет показано, что для некоторой подходящей нормировки метрики $\gamma = 1/2$, $\delta = \pi/\sqrt{2}$.

Метрика на M_2^0

В этой главе мы соберем вместе результаты глав 8 и 9 и найдем явный вид метрики на пространстве монополей M_2^0 . Напомним, что в гл. 8 мы нашли (формула (8.18)) явный вид конформной структуры на M_2^0 , поэтому нам осталось лишь определить общую скалярную функцию. С другой стороны, в гл. 9, исходя из совсем других соображений, мы проанализировали дифференциальные уравнения (9.3) для $SO(3)$ -инвариантной гиперкэлеровой метрики. Сравнивая эти два результата (включая и правильные знаки), мы получаем, что кривая F из гл. 9, описывающая частное решение дифференциального уравнения

$$(11.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)(1+y-x)}{x(1-x)(1+x-y)},$$

в явном виде задаётся параметрическими уравнениями

$$(11.2) \quad \begin{cases} x^{-1} = 1 + \frac{K \operatorname{ctg} \theta d\theta}{dK}, \\ y^{-1} = 1 - \frac{K \operatorname{tg} \theta d\theta}{dK}. \end{cases}$$

Используя величины $k = \sin \theta$ и $k' = \cos \theta$, эти уравнения можно переписать так:

$$(11.3) \quad \begin{cases} x^{-1} = 1 + \frac{d \ln k}{d \ln K}, \\ y^{-1} = 1 + \frac{d \ln k'}{d \ln K}. \end{cases}$$

Полный эллиптический интеграл K удовлетворяет [32] линейному дифференциальному уравнению

$$(11.4) \quad \frac{d}{dk} \left(k(k')^2 \frac{dK}{dk} \right) = kK,$$

или, эквивалентно,

$$(11.5) \quad \frac{d^2 K}{d\theta^2} + 2 \operatorname{ctg} 2\theta \frac{dK}{d\theta} - K = 0.$$

В принципе, прямой подстановкой с использованием уравнения (11.5)

когда мы пересекаем точку $\xi = 0$. Это отражает то обстоятельство, что точки $\pm \xi$ лежат на одной $SO(3)$ -орбите.

Константы в таблице определяются кривой F лишь с точностью до общего множителя. Однако отношение $\delta/\gamma^{-1/2}$ есть внутренний инвариант кривой F . Как мы увидим в гл. 12,

$$\frac{\delta}{\gamma^{-1/2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, там будет показано, что для некоторой подходящей нормировки метрики $\gamma = 1/2$, $\delta = \pi/\sqrt{2}$.

Метрика на M_2^0

В этой главе мы соберем вместе результаты глав 8 и 9 и найдем явный вид метрики на пространстве монополей M_2^0 . Напомним, что в гл. 8 мы нашли (формула (8.18)) явный вид конформной структуры на M_2^0 , поэтому нам осталось лишь определить общую скалярную функцию. С другой стороны, в гл. 9, исходя из совсем других соображений, мы проанализировали дифференциальные уравнения (9.3) для $SO(3)$ -инвариантной гиперкэлеровой метрики. Сравнивая эти два результата (включая и правильные знаки), мы получаем, что кривая F из гл. 9, описывающая частное решение дифференциального уравнения

$$(11.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)(1+y-x)}{x(1-x)(1+x-y)},$$

в явном виде задаётся параметрическими уравнениями

$$(11.2) \quad \begin{cases} x^{-1} = 1 + \frac{K \operatorname{ctg} \theta d\theta}{dK}, \\ y^{-1} = 1 - \frac{K \operatorname{tg} \theta d\theta}{dK}. \end{cases}$$

Используя величины $k = \sin \theta$ и $k' = \cos \theta$, эти уравнения можно переписать так:

$$(11.3) \quad \begin{cases} x^{-1} = 1 + \frac{d \ln k}{d \ln K}, \\ y^{-1} = 1 + \frac{d \ln k'}{d \ln K}. \end{cases}$$

Полный эллиптический интеграл K удовлетворяет [32] линейному дифференциальному уравнению

$$(11.4) \quad \frac{d}{dk} \left(k(k')^2 \frac{dK}{dk} \right) = kK,$$

или, эквивалентно,

$$(11.5) \quad \frac{d^2 K}{d\theta^2} + 2 \operatorname{ctg} 2\theta \frac{dK}{d\theta} - K = 0.$$

В принципе, прямой подстановкой с использованием уравнения (11.5)

можно проверить, что формулы (11.2) дают решение уравнения (11.1). Однако вычисления при этом довольно сложны, и мы отложим проверку до тех пор, пока у нас не появятся более удобные средства выполнить её. Далее, будет показано, что, подставляя в (11.2) вместо K любое решение уравнения (11.5), мы всегда получаем решение уравнения (11.1). Таким образом, подстановка (11.2) эффективно линеаризует уравнение (11.1). Второй эллиптический интеграл K' (см. (7.4)) также удовлетворяет уравнению (11.5). Поэтому общее решение есть линейная комбинация K и K' . Отметим, в частности, что решение, соответствующее K' , определяет ввиду симметрии формул (11.3) кривую, получающуюся из F отражением относительно прямой $y = x$. Иначе говоря, эта кривая переводится в F одной из симметрий, которыми обладает диаграмма на рис. 4.

Вид уравнений (8.18) подсказывает, что наши дифференциальные уравнения (9.3) могут принять более удобный вид, если записать их в терминах величин α, β, γ , обратных к a, b, c , или же в терминах произведений bc, ca, ab . Положим поэтому

$$(11.6) \quad \lambda = bc, \quad \mu = ca, \quad \nu = ab.$$

Несложное вычисление показывает, что уравнения (9.3) эквивалентны уравнениям

$$(11.7) \quad \frac{d}{d\eta}(\lambda + \mu) = -2\lambda\mu \quad \text{и т.д.}$$

Вычитая поочерёдно из первого уравнения второе и третье, получаем

$$(11.8) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\eta}(\lambda - \nu) = -2\mu(\lambda - \nu), \\ \frac{d}{d\eta}(\mu - \nu) = -2\lambda(\mu - \nu). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$(11.9) \quad \lambda d\ln(\lambda - \nu) = \mu d\ln(\mu - \nu).$$

Заметим, что параметр η здесь исчез, поэтому уравнение (11.9) даёт способ вычислить скалярную функцию, требующуюся для нахождения метрики при известной конформной структуре.

Исходя из уравнений (8.18), мы можем записать λ, μ, ν в виде

$$(11.10) \quad \begin{cases} \lambda = (r + p)f, \\ \mu = (r + q)f, \\ \nu = rf, \end{cases}$$

где

$$(11.11) \quad p = \operatorname{ctg} \theta, \quad q = -\operatorname{tg} \theta, \quad r = K^{-1} \frac{dK}{d\theta},$$

а f — некоторая подлежащая определению функция от θ . Заметим, что

$\nu = ab < 0$ и $r > 0$, поэтому функция f должна быть отрицательной. Подставляя выражения для λ, μ, ν в (11.9), получаем следующее уравнение для f :

$$(11.12) \quad d\ln f = - \left[\frac{d\ln p - d\ln q}{p - q} \right] r - d\ln(p - q).$$

Из (11.11) находим

$$-d\ln p = d\ln q = (p - q) d\theta = 2 \operatorname{cosec} 2\theta d\theta.$$

Поэтому (11.12) упрощается до

$$(11.13) \quad d\ln f = 2d\ln K + d\ln \sin 2\theta.$$

Это уравнение немедленно интегрируется и даёт

$$(11.14) \quad f = -\Lambda K^2 \sin 2\theta$$

для некоторой положительной константы Λ .

Наконец, параметр η можно получить из (11.8). А именно, имеем

$$(11.15) \quad \frac{d\ln(\lambda - \mu)}{d\theta} = -2\nu \frac{d\eta}{d\theta}.$$

Далее,

$$\lambda - \mu = f(p - q) = 2f \operatorname{cosec} 2\theta = -2\Lambda K^2 \quad (\text{в силу (11.14)}),$$

и

$$\nu = f \frac{d\ln K}{d\theta}.$$

Поэтому (11.15) даёт требуемое соотношение между η и θ :

$$(11.16) \quad \frac{d\eta}{d\theta} = -f = \Lambda K^2 \sin 2\theta.$$

Заметим, что из сравнения записей метрики через η и через θ сразу следует соотношение $d\theta^2 = f^2 d\eta^2$. Соотношение (11.16) нужно лишь для определения правильного знака.

В следующей главе, при рассмотрении асимптотического поведения, мы увидим, что $\Lambda = 1$ в правильной нормировке. Более того, уравнение (11.16) можно явно решить и получить η как функцию от θ . Ответ имеет вид

$$(11.17) \quad \eta = -\frac{K'}{\pi K} + \operatorname{const.}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что K и K' удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению (11.5). Поэтому если положить

$$\omega = K \frac{dK'}{d\theta} - K' \frac{dK}{d\theta},$$

то

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -(2\operatorname{ctg} 2\theta)\omega.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln \omega = -\ln \sin 2\theta + \ln C,$$

или

$$\omega = C(\sin 2\theta)^{-1}$$

для некоторой константы C . Устремляя θ к 0 и используя асимптотические выражения для K и K' (см. следующую главу), находим, что $C = -\pi$. Поэтому, дифференцируя (11.17), получаем

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-\omega}{\pi K^2} = \frac{1}{K^2 \sin 2\theta},$$

что согласуется с (11.16) при $\Lambda = 1$.

Заметим, что естественный параметр в верхней полуплоскости, связанный со спектральной (эллиптической) кривой

$$\eta^2 = r_1 \zeta (\zeta^2 - 2\zeta \operatorname{ctg} 2\theta - 1),$$

т. е. отношение двух периодов, есть в точности iK'/K . Таким образом, (11.17) показывает, что переменная η имеет простую геометрическую интерпретацию в терминах спектральной кривой.

Соберем наши результаты в виде следующей теоремы:

Теорема (11.18). Метрика на M_2^0 имеет вид

$$ds^2 = (abc)^2 d\eta^2 + a^2 \sigma_1^2 + b^2 \sigma_2^2 + c^2 \sigma_3^2,$$

где a, b, c, η — функции от параметра k , пробегающего интервал $(0, 1)$, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} ab &= -2k(k')^2 K \frac{dK}{dk}, \\ bc &= ab - 2(k'K)^2, \\ ca &= ab + 2(kK)^2, \\ \eta &= -\frac{K'}{\pi K} + \gamma. \end{aligned}$$

Здесь k', K, K' — стандартные функции от k , определённые выражениями (7.4), а γ — некоторая константа.

Замечание. Константу γ мы включили в формулировку просто для того, чтобы облегчить сравнение с тауб-НУТ-метрикой, как при обсуждении в гл. 9. Таблица в конце гл. 10 показывает, что γ надо выбрать так, чтобы $b \rightarrow \gamma^{-1/2}$ на ∞ . В гл. 12 мы увидим, что $b \rightarrow -\sqrt{2}$. В соответствии с этим мы должны взять $\gamma = 1/2$.

Вернёмся теперь к проверке того, что формулы для a, b, c из теоремы (11.18) действительно приводят к решению дифференциальных уравнений (9.3) (или что формулы для $\lambda = bc$ и т. д. приводят к решению эквивалентных уравнений (11.7)). Отсюда, конечно, будет следовать, что формулы (11.2) дают решение уравнения (11.1), поскольку (11.1) было выведено из (9.3) при переходе к отношениям $x = a/c, y = b/c$.

Три уравнения (11.7) эквивалентны двум уравнениям (11.8) и уравнению

$$(11.19) \quad \frac{dv}{d\eta} = \lambda\mu - v(\lambda + \mu).$$

Используя формулы (11.10) и (11.16), перепишем (11.19) в виде

$$-f \frac{d(f+r)}{d\theta} = f^2 \{(r+p)(r+q) - r(2r+p+q)\},$$

т. е.

$$\frac{d(fr)}{d\theta} = f(r^2 - pq).$$

Подставляя сюда выражения (11.11) и (11.14) для f, p, q, r , получаем

$$\frac{d}{d\theta} \left(K \sin 2\theta \frac{dK}{d\theta} \right) - \sin 2\theta \left(\frac{dK}{d\theta} \right)^2 - K^2 \sin 2\theta = 0,$$

или

$$K \sin 2\theta \frac{d^2 K}{d\theta^2} + 2K \cos 2\theta \frac{dK}{d\theta} - K^2 \sin 2\theta = 0.$$

После сокращения на K и деления на $\sin 2\theta$ приходим к дифференциальному уравнению (11.5), которому удовлетворяет K .

Из проведённых ранее вычислений, приведших к формулам (11.14) для f и (11.16) для $d\eta$, непосредственно следует, что уравнения (11.8) удовлетворяются (тождественно по K). Таким образом, мы проверили, что формулы (11.18) действительно дают решение уравнений (9.3) или эквивалентных им уравнений (11.7). Более того, от величины K нам потребовалось только то, что она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (11.5). Следовательно, начиная с общего решения уравнения (11.5), т. е. линейной комбинации величин K и K' , и вычисляя η как функцию от θ (для этого требуется лишь выполнить интегрирование), мы получаем трёхпараметрическое семейство решений уравнений (9.3). Тем самым мы имеем открытое множество решений уравнений (9.3). Возможно, применение симметрий позволяет получить даже открытое плотное множество решений. Заметим, однако, что тауб-НУТ-решение не лежит в нашем открытом множестве; вероятно, оно лежит в его замыкании.

Замечание. Твисторные методы и связанная с ними геометрия

привели нас к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (9.3) или эквивалентных им уравнений (11.7). Задним числом мы узнали от П. Кларксона, что ещё в 1881 г. Альфэн [21] нашёл общее решение уравнений (11.7), используя другие методы.

Компьютерные вычисления, выполненные Н. Мантоном, который исходил непосредственно из дифференциальных уравнений (9.2), приводят [19] к графикам зависимости величин a , b , c от параметра K , представленным на рис. 10.

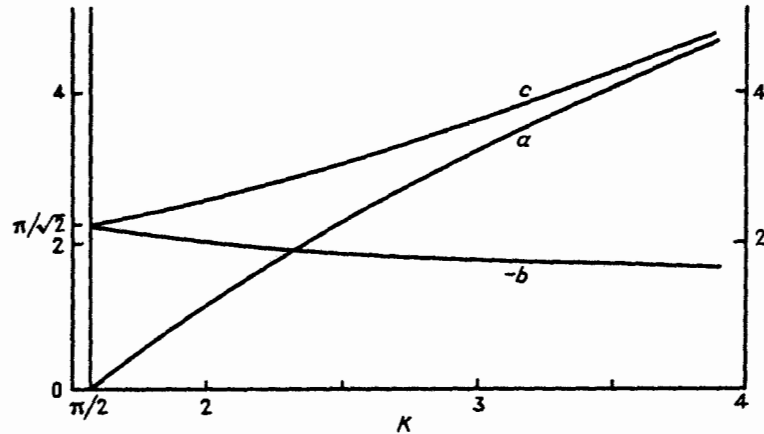


Рис. 10

Свойства метрики на M_2^0

Теперь, когда мы нашли явный вид метрики на M_2^0 , исследуем более подробно некоторые её свойства. В частности, изучим поведение метрики вблизи орбит, для которых $k = 0$ и $k = 1$. Напомним, что $k = 0$ соответствует пространству RP^2 , представляющему осесимметричные монополи, а $k \rightarrow 1$ — области в «бесконечности».

Функция $K(k)$ аналитична при $k < 1$ и имеет [32] следующее разложение в ряд [32]:

$$(12.1) \quad K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right\}.$$

При $k \rightarrow 1$, т. е. при $k' \rightarrow 0$, функция $K(k)$ обладает [43; 32] асимптотическим разложением

$$(12.2) \quad K(k) \sim -\ln k' \left\{ 1 + \frac{(k')^2}{4} + \dots \right\}.$$

Подставляя (12.1) в формулы из теоремы (11.18), получаем

$$\begin{aligned} ab &= -2k(1-k^2) \frac{\pi^2}{4} \left\{ 1 + \frac{k^2}{4} + \dots \right\} \left\{ \frac{k}{2} + \frac{9k^3}{16} + \dots \right\} \\ &= -\frac{\pi^2 k^2}{4} \left(1 + \frac{3k^2}{8} + \dots \right), \\ bc &= \frac{\pi^2 k^2}{4} \left(1 + \frac{3k^2}{8} + \dots \right) \\ &\quad - 2(1-k^2) \frac{\pi^2}{4} \left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{11k^4}{32} + \dots \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \left(1 + \frac{k^4}{32} + \dots \right), \\ ca &= -\frac{\pi^2 k^2}{4} \left(1 + \frac{3k^2}{8} + \dots \right) + 2k^2 \frac{\pi^2}{4} \left(1 + \frac{k^2}{2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2 k^2}{4} \left(1 + \frac{5k^2}{8} + \dots \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(12.3) \quad \begin{cases} a = \frac{\pi k^2}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{k^2}{2} + \dots \right), \\ b = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(-1 + \frac{k^2}{8} + \dots \right), \\ c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{k^2}{8} + \dots \right). \end{cases}$$

В частности, при $k = 0$ имеем

$$(12.4) \quad -b(0) = c(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Этим определяется константа δ в формулах (9.17) и (9.18). Далее, сравнение с этими формулами показывает, что вблизи $k = 0$ геодезическое расстояние ξ связано с k соотношением

$$(12.5) \quad \xi \sim \frac{\pi}{4\sqrt{2}} k^2.$$

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение при $k \rightarrow 1$. Используя (12.2), получаем из (11.18)

$$\begin{aligned} ab &\sim 2 \ln k', \\ bc &\sim 2 \ln k', \\ ca &\sim 2 (\ln k')^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(12.6) \quad \begin{cases} b \rightarrow -\sqrt{2}, \\ a \sim c \sim -\sqrt{2} \ln k' \sim \sqrt{2} K. \end{cases}$$

Сравнивая с (9.11), заключаем, что константа γ равна $1/2$. Используя теперь (12.6) и найденную в гл. 9 асимптотическую связь между геодезическим расстоянием ξ и a , находим

$$(12.7) \quad \xi \sim \sqrt{2} K.$$

Далее, как мы видели в гл. 7, в асимптотической области $k \rightarrow 1$ два-монополь приближённо совпадает с двумя простыми монополями, находящимися на расстоянии K друг от друга. Таким образом, (12.7) показывает, что геодезическое расстояние (до RP^2) в M_2^0 совпадает с точностью до множителя $\sqrt{2}$ с евклидовым расстоянием между монополями в R^3 . Это согласуется с асимптотическим видом метрики, найденным в гл. 3. Именно этим был обусловлен наш выбор константы Λ в гл. 11.

Рассмотрим теперь геометрию специальных поверхностей Σ_1 и Σ_{23} , введённых в гл. 6. Напомним, что это компоненты множества

неподвижных точек инволюции в M_2^0 , индуцированной отражением относительно оси x_1 . В частности, эти поверхности вполне геодезические. Далее, каждая из них обладает группой симметрии S^1 , индуцированной вращениями вокруг оси x_1 в R^3 . Таким образом, эти поверхности являются «поверхностями вращения».

Возьмём сперва поверхность Σ_1 . Метрика на этой поверхности, индуцированная вложением в M_2^0 , имеет вид

$$(12.8) \quad ds^2 = d\xi^2 + a^2 d\varphi^2,$$

где φ — угол поворота вокруг оси x_1 , так что $d\varphi = \sigma_1$. Следовательно, геометрия этой поверхности определяется функцией $a(\xi)$. В частности, кривизна K поверхности равна

$$(12.9) \quad K = -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\xi^2}.$$

Далее, в лемме (10.10) мы доказали, что $d^2 a/d\xi^2 \leq 0$ (причём равенство имеет место только при $\xi = 0$). Таким образом, $K \geq 0$, или, другими словами,

(12.10) поверхность Σ_1 выпукла, т.е. имеет положительную кривизну.

Точнее говоря, поверхность Σ_1 строго выпукла всюду, за исключением точки $\xi = 0$.

Уравнения (12.6) и (12.7) показывают, что $a \sim \xi$ в ∞ и, значит, метрика на Σ_1 (локально) асимптотически совпадает с плоской метрикой $d\xi^2 + \xi^2 d\varphi^2$. При изучении глобального поведения метрики в гл. 6 (см. также гл. 8) мы получили, что вращение на угол $\varphi = \pi$ (т.е. отражение) действует на Σ_1 тривиально, а значит, угловая переменная на Σ_1 есть на самом деле 2φ . Таким образом,

(12.11) асимптотически поверхность Σ_1 изометрична R^2/Z^2 , т.е. конусу с углом при вершине $\pi/3$.

Итак, поверхность Σ_1 имеет вид, изображённый на рис. 11.

Перейдём теперь к поверхности Σ_{23} . Напомним (см. гл. 7), что её можно параметризовать ненулевой комплексной переменной v и что она пересекает пространство RP^2 (отвечающее осесимметричным монополям) по окружности RP^1 , заданной (как показано в гл. 8) уравнением $|v| = \pi/4$. Область Σ_{23}^0 , задаваемая неравенством $|v| < \pi/4$, представляет монополи, ось Хиггса которых совпадает с осью x_1 , а область $\Sigma_{23}^{\pm}$, задаваемая неравенством $|v| > \pi/4$, — монополи, для которых ось e_3 совпадает с осью x_1 . Подходящим вращением мы можем перевести Σ_{23} в Σ_{12} или Σ_{13} . Эти две поверхности получаются из кривой C_1 (см. гл. 7) применением вращений R_i вокруг осей x_i для $i = 3$ и 2 соответственно. Если мы возьмём лишь орбиту кривой C_1^+ , представляющей нашу нормальную форму, то, рассматривая главные

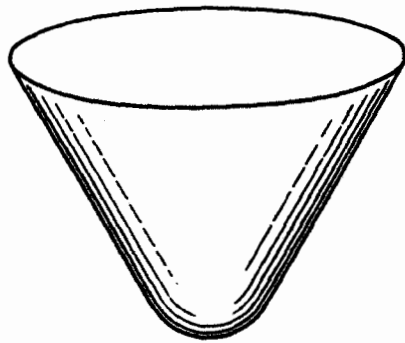


Рис. 11

оси, получим

$$(12.12) \quad \begin{cases} R_2(C_1^+) = \Sigma_{13}^0, \\ R_3(C_1^+) = \Sigma_{12}^\infty. \end{cases}$$

Отсюда следует, что метрики на этих поверхностях имеют такой вид:

$$(12.13) \quad \begin{cases} ds^2 = d\xi^2 + b^2 \sigma_2^2 \text{ на } \Sigma_{13}^0, \\ ds^2 = d\xi^2 + c^2 \sigma_3^2 \text{ на } \Sigma_{12}^\infty. \end{cases}$$

Далее, вращение вокруг оси x_1 на угол $\pi/2$ изометрично отображает Σ_{13}^0 на Σ_{12} , сохраняя области 0 и ∞ . Поэтому первое уравнение в (12.13) даёт одновременно метрику на Σ_{12}^0 , а значит, оба уравнения (12.13) задают метрику на всём Σ_{12} . С аналитической точки зрения это связано с тем, что мы можем продолжить функцию $c(\xi)$ на отрицательные значения ξ , просто положив $c(-\xi) = -b(\xi)$. Это отвечает, в контексте гл. 9, продолжению кривой F (дающей решение наших дифференциальных уравнений) за седловую точку P' путём добавления кривой F' .

Наши предыдущие результаты о функциях $b(\xi)$ и $c(\xi)$ дают теперь геометрическую информацию о поверхности Σ_{12} . Лемма (10.19) показывает, что

$$(12.14) \quad \Sigma_{12}^0 - \text{вогнутая поверхность, т. е. поверхность отрицательной кривизны.}$$

Как и прежде, кривизна строго отрицательна всюду, кроме $\xi = 0$. При $\xi \rightarrow \infty$, как мы знаем из (12.6), $b \rightarrow -\sqrt{2}$. Следовательно, $c(\xi) \rightarrow \sqrt{2}$ при $\xi \rightarrow -\infty$, а значит Σ_{12}^0 выглядит асимптотически как цилиндр. Более того, поскольку вращение на угол $\varphi = \pi$ действует на Σ_{12}^0 тождественно, радиус этого асимптотического цилиндра равен $1/\sqrt{2}$.

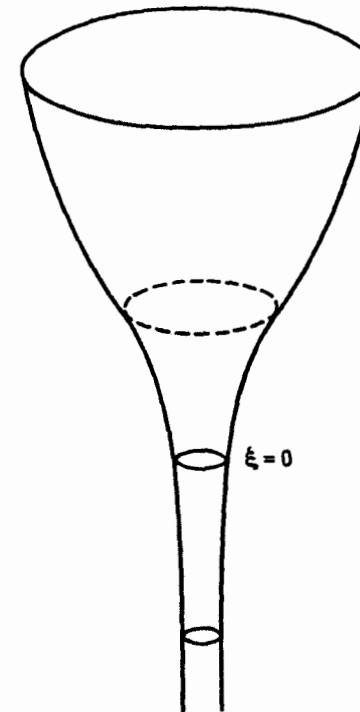


Рис. 12

Из (12.3) и (12.5) вытекает, что около $\xi = 0$ функция $c(\xi)$ вогнута (как и $b(\xi)$). Однако в гл. 9 мы видели, что при $\xi \rightarrow \infty$ функции $a(\xi)$ и $c(\xi)$ совпадают с точностью до экспоненциально малых членов. В частности, при больших ξ функция $c(\xi)$ должна быть выпуклой, как и $a(\xi)$. Таким образом, кривизна поверхности Σ_{12}^0 должна где-то менять знак. Поэтому поверхность Σ_{12} выглядит как воронка, на одном конце асимптотически приближающаяся к конусу (с углом при вершине $\pi/3$), а на другом — к цилиндру радиуса $1/\sqrt{2}$ (рис. 12). «Шейка», отвечающая значению $\xi = 0$ и разделяющая области Σ^0 и Σ^∞ , имеет согласно (12.3) радиус $\pi/2 \sqrt{2}$. Пунктирная окружность на рисунке соответствует тому единственному значению ξ , при котором касательная параллельна асимптотическому конусу. Это то значение ξ , при котором угол C равен $\pi/2$ (см. (10.6)), а значит, в силу (10.8), $dc/d\xi = 1$.

Сравнивая поверхности Σ_1 и Σ_{12} , мы видим, что каждая из них начинается в бесконечности как конус, но не имеет сингулярности в его вершине. Поверхность Σ_1 сглажена, а в поверхности Σ_{12} «пробурена дыра».

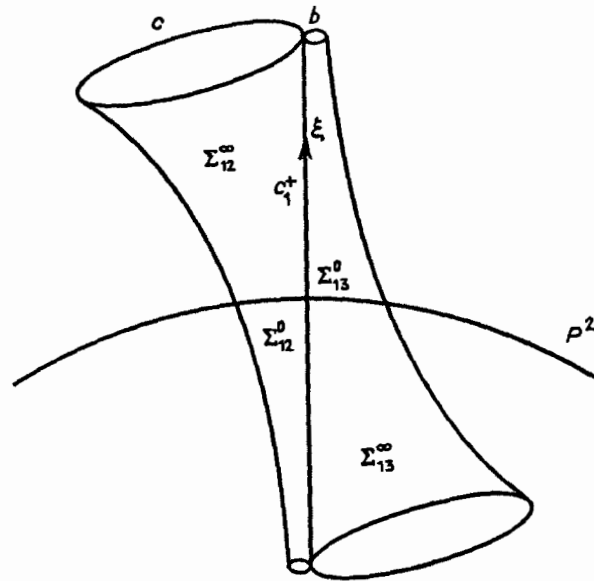
Геodesические на M_2^0 

Рис. 13

Для лучшего понимания мы изобразили на рис. 13 взаимное расположение поверхностей Σ_{13} и Σ_{12} . Буквы b и c соответствуют (с точностью до множителя 2) радиусам соответствующих окружностей. Рисунок наглядно демонстрирует существование изометрии (отвечающей вращению на угол $\pi/2$ вокруг оси x_1), меняющей местами поверхности Σ_{13} и Σ_{12} .

Теперь, располагая подробной информацией о явном виде метрики на пространстве M_2^0 параметров монополей, займёмся исследованием геodesических. Поскольку метрика асимптотически-плоская, геodesические около ∞ выглядят асимптотически как прямые линии. Нас интересует, в частности, где геodesические, начинающиеся в ∞ , снова уходят в асимптотическую область. Другими словами, мы хотим изучить рассеяние геodesических. Это рассеяние возникает благодаря нетривиальной кривизне (и топологии) «конечной части» многообразия M_2^0 , т. е. части, расположенной вблизи RP^2 .

Несмотря на то что мы знаем явный вид метрики и, следовательно, явный вид обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих геodesические, их полное исследование представляет собой весьма сложную задачу. Однако для некоторых геodesических дело упрощается. Прежде всего, кривая C_1 , введённая в гл. 7 как компонента множества неподвижных точек диагональной группы $D \subset SO(3)$, обязательно должна быть геodesической. Как показано на рис. 13, эта геodesическая приходит из ∞ , пересекает RP^2 ровно один раз и снова уходит на ∞ с другой стороны. Далее, как мы отмечали ранее, главные оси e_2, e_3 соответствующего монополя меняются местами, когда мы пересекаем RP^2 . На рисунке это отвечает тому, что маленькая и большая окружности меняются местами. Это обстоятельство играет важную роль в физической интерпретации, которая будет обсуждаться в следующей главе.

Перейдём теперь к геodesическим, лежащим на вполне геodesических поверхностях Σ_1 и Σ_{12} . Обе эти поверхности являются поверхностями вращения, т. е. обладают S^1 -симметрией, а значит, соответствующей сохраняющейся величиной. Если проинтерпретировать геodesическое движение на такой поверхности как движение свободной частицы, вынужденной оставаться на поверхности, то эта сохраняющаяся величина есть не что иное, как угловой момент. Если частица имеет единичную массу и единичную скорость, то угловой момент δ равен

$$(13.1) \quad \delta = 2r \sin \psi,$$

где r — радиус поперечного сечения поверхности, а ψ — угол между траекторией и «вертикалью», т. е. геodesической, параллельной оси

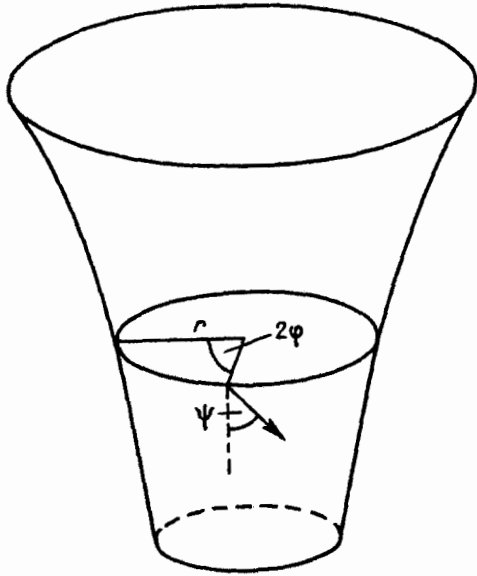


Рис. 14

поверхности (рис. 14). Появление множителя 2 связано с тем, что естественно возникающая здесь окружность S^1 (представляющая вращение в $\mathbb{R}^3$) двусторонне покрывает круговое поперечное сечение поверхности.

На аналитическом языке, если метрика на поверхности задаётся формулой

$$(13.2) \quad ds^2 = d\xi^2 + e(\xi)^2 d\varphi^2,$$

где 2φ — угловая переменная на поверхности, то $r = e(\xi)/2$ и, значит,

$$(13.3) \quad \delta = e(\xi) \sin \psi.$$

Чтобы вывести соотношение между φ и ψ , заметим, что

$$rd(2\varphi) = -\operatorname{tg} \psi d\xi,$$

или

$$(13.4) \quad e(\xi) d\varphi = -\operatorname{tg} \psi d\xi.$$

С другой стороны, вычисляя логарифмическую производную от (13.3), получаем

$$(13.5) \quad \frac{de}{e} + \operatorname{ctg} \psi d\psi = 0.$$

Вместе с (13.4) это даёт

$$(13.6) \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{de}{d\xi}.$$

Для наших поверхностей Σ_1 и Σ_{12} имеем $e(\xi) = a(\xi)$ и $e(\xi) = c(\xi)$, где a, c — функции, определённые в гл. 11. В обоих случаях имеем

$$(13.7) \quad \begin{cases} e(\xi) \sim \xi \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \\ \frac{de(\xi)}{d\xi} > 0. \end{cases}$$

Вместе с (13.3) это показывает, что геодезические, начинающиеся при $\xi = \infty$, идут вниз (т.е. $\psi \leq \pi/2$) до тех пор, пока $e(\xi) \geq \delta$. Возникают, следовательно, две возможности, в зависимости от того, может ли быть достигнуто равенство. Если равенство достигается для некоторого ξ_δ , то это наинизшая точка геодезической. После неё геодезическая начинает подниматься. Далее, группа инвариантности поверхности вращения есть на самом деле не $SO(2)$, а $O(2)$. Поэтому, применяя отражение, мы заключаем, что восходящая часть геодезической есть зеркальный образ нисходящей части.

Для поверхности Σ_1 имеем $a(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, и следовательно, равенство достигается, причём $\xi > 0$. С другой стороны, для Σ_{12} имеем $c(\xi) \rightarrow \sqrt{2}$ при $\xi \rightarrow -\infty$. Таким образом, геодезические ведут себя по-разному, в зависимости от того, будет ли $\delta > \sqrt{2}$ или $\delta \leq \sqrt{2}$. В первом случае равенство достигается при некотором ξ_δ и после того геодезическая идёт вверх, как раньше. Однако во втором случае геодезическая идёт вниз до бесконечности, спирально навиваясь на асимптотический цилиндр (см. рис. 12).

Для геодезической, которая идёт вниз до минимального уровня ξ_δ , а потом начинает подниматься, интересно найти угол рассеяния $S(\delta)$, т.е. полное возрастание угла φ при прохождении по геодезической. Учитывая зеркальную симметрию, запишем

$$(13.8) \quad S(\delta) = 2 \int_{-\infty}^{\xi_\delta} d\varphi - \pi.$$

Постоянный член π добавлен из соображений, которые вскоре станут ясны. Заметим, что возрастание угла φ на π соответствует добавлению величины 2π к углу на поверхности. Чтобы записать этот интеграл в удобной форме, используем e или ψ в качестве независимой переменной и рассмотрим теперь ξ как функцию от e или ψ . Это возможно, поскольку (в обоих случаях) $e(\xi)$ — монотонная функция от ξ и $\psi = \arcsin(\delta/e)$.

Используя (13.6) и (13.3), можно переписать (13.8) в виде

$$(13.9) \quad S(\delta) = 2 \int_0^{\pi/2} \xi' \left(\frac{\delta}{\sin \psi} \right) d\psi - \pi.$$

Заметим, что в наших случаях $e(\xi) \sim \xi$ в ∞ , а значит, $\xi' \rightarrow 1$, откуда

$$(13.10) \quad S(\infty) = 0.$$

Это объясняет выбранную нормировку. Геометрически наша поверхность асимптотически изоморфна конусу с углом $\pi/3$, или, эквивалентно, полуплоскости (получающейся при разрезании конуса вдоль образующей). Следовательно, геодезические выглядят (асимптотически) как прямые, для которых ϕ возрастает на π . Вычитание этой константы означает, что $S(\delta)$ измеряет отличие геодезической от прямой.

Формула (13.9) для угла рассеяния показывает, что

$$(13.11) \quad \begin{cases} \xi'' \geq 0 \Rightarrow S(\delta) \text{ возрастает с ростом } \delta, \\ \xi'' \leq 0 \Rightarrow S(\delta) \text{ убывает с ростом } \delta. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{d^2 e}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\xi'} \right) \frac{de}{d\xi} = - \frac{\xi''}{(\xi')^3}.$$

Поскольку $\xi' > 0$ в наших случаях, мы видим, что знак величины ξ'' противоположен знаку $d^2 e / d\xi^2$. Поэтому, в силу (12.9), он совпадает со знаком кривизны K поверхности. Таким образом, мы можем придать утверждениям (13.11) более геометрическую форму:

$$(13.12) \quad \begin{cases} \text{кривизна положительна} \Rightarrow S(\delta) \text{ возрастает с ростом } \delta, \\ \text{кривизна отрицательна} \Rightarrow S(\delta) \text{ убывает с ростом } \delta. \end{cases}$$

Поверхность Σ_1 , для которой $e(\xi) = a(\xi)$, имеет согласно (12.10) положительную кривизну. Поэтому (13.12) показывает, что на Σ_1 угол рассеяния $S(\delta)$ возрастает с ростом δ . При $\delta = 0$ получается «вертикальная» геодезическая C_1 , для которой 2ϕ возрастает на π , а значит,

$$(13.13) \quad S(0) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что это согласуется с пределом при $\delta \rightarrow 0$ формулы (13.9), поскольку асимптотически справедливо соотношение $a(\xi) \sim 2\xi$ (см. (9.17)).

Таким образом, мы установили, что

$$(13.14) \quad \text{на поверхности } \Sigma_1 \subset M_2^0 \text{ угол рассеяния } S(\delta) \\ \text{возрастает от } -\pi/2 \text{ при } \delta = 0 \text{ до } 0 \text{ при } \delta = \infty.$$

Это означает, что геодезическая никогда не совершает полного оборота вокруг поверхности. Типичная геодезическая выглядит, как показано на рис. 15.

В случае поверхности $\Sigma_{1,2}$ ситуация усложняется. Как уже отмечалось, геодезические ведут себя по-разному при $\delta > \sqrt{2}$ и $\delta \leq \sqrt{2}$. Рассмотрим сперва случай $\delta > \sqrt{2}$. Тогда геодезическая спускается до некоторого минимального уровня ξ_δ , а потом идёт вверх. Угол рассеяния $S(\delta)$ снова даётся формулой (13.9), но теперь $e(\xi) = c(\xi)$. Мы знаем, что $c(\xi) \sim a(\xi)$ при больших δ , поэтому геодезические ведут себя приблизительно так же, как на Σ_1 , т.е.

$$(13.15) \quad S(\delta) < 0$$

при больших δ .

Кроме критического значения $\delta = \sqrt{2}$ имеется ещё одно важное значение, а именно $\delta = \pi/\sqrt{2}$. Формула (12.4) показывает, что это значение величины δ отвечает геодезическим, для которых минимум $\xi_\delta = 0$. При $\delta > \pi/\sqrt{2}$ можно дать грубые оценки величины $S(\delta)$, используя (13.9) вместе с одной из формул (10.8), а именно

$$\xi' = \frac{1}{1 + \cos C}.$$

Здесь C — угол треугольника со сторонами $a, |b|, c$, введенного в гл. 10.

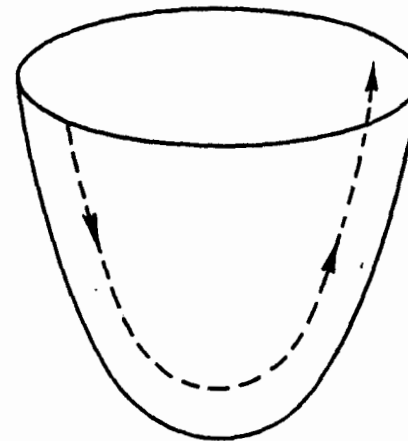


Рис. 15

Мы доказали там, что

$$\pi/3 < C < 2\pi/3$$

(нижняя граница не является точной и просто выражает тот факт, что C — наибольший угол в треугольнике). Используя эти формулы, получаем

$$(13.16) \quad -\frac{\pi}{3} < S(\delta) < \pi$$

при $\delta > \pi/\sqrt{2}$. С помощью численных вычислений эти неравенства можно существенно уточнить.

При $\delta \rightarrow \sqrt{2}$ угол рассеяния $S(\delta)$ стремится к ∞ . Чтобы получить асимптотическое выражение для $S(\delta)$, нам понадобится следующая формула для асимптотики величины $c(-\xi) = -b(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$:

$$(13.17) \quad c(-\xi) \sim \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2\xi} \right).$$

Её можно вывести, используя либо выражения для b и ξ через K вместе с асимптотической формулой для K , либо, что проще, асимптотическую формулу (9.11) и то, что константа γ равна $1/2$. Из (13.17) следует, что

$$(13.18) \quad \frac{d\xi}{dc} \sim \sqrt{2} \xi^2$$

при $\xi \rightarrow -\infty$. С другой стороны, положив $\delta = \sqrt{2}(1 + \varepsilon)$ и $\sigma = \pi/2 - \psi$, мы получаем из (13.3) асимптотическое соотношение между ξ и σ :

$$(13.19) \quad -\xi \sim \frac{1}{2\left(\varepsilon + \frac{\sigma^2}{2}\right)}.$$

Применяя (13.18) и (13.19), заключаем на основании (13.9) (где ξ' теперь обозначает $d\xi/dc$), что

$$(13.20) \quad S(\sqrt{2}(1 + \varepsilon)) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\sigma}{\varepsilon^2 + \varepsilon\sigma^2} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \varepsilon^{-3/2}.$$

Таким образом, при $\delta = \sqrt{2}(1 + \varepsilon)$, где ε мало, геодезическая на поверхности Σ_{12} уходит далеко вниз по воронке, прежде чем развернуться и начать взбираться обратно. Она также многократно навивается вокруг цилиндрической части воронки. Точнее, формула (13.20) показывает, что число витков приблизительно равно $(\varepsilon/2)^{-3/2}/2$. Глубина, на которую опускается геодезическая, приблизительно равна $1/2\varepsilon$ (в силу (13.19)). В основном геодезическая идёт почти горизонтально, поэтому её длина (ниже уровня $\xi = 0$) приблизительно равна радиусу цилиндра, умноженному на S , т.е. $\sim (\pi/4)\varepsilon^{-3/2}$.

Поскольку скорость при движении по геодезической равна единице, эту длину можно интерпретировать также как время, которое геодезическая проводит ниже уровня $\xi = 0$.

При $\delta \leq \sqrt{2}$ геодезическая никогда не возвращается обратно. Она «проваливается» в воронку. Асимптотически геодезическая выглядит как спираль, намотанная на цилиндр, причём угол ψ постоянен и равен $\arcsin(\delta/\sqrt{2})$.

При удалении от поверхностей Σ_1 и Σ_{12} описать геодезическое движение труднее. Интересно было бы узнать больше об общем случае. Например, было бы хорошо узнать, полно ли геодезическое рассеяние, т.е. любая ли геодезическая, приходящая из бесконечности, снова уходит на бесконечность (т.е. не «захватывается» конечной частью). Близкий вопрос — о возможности существования замкнутых геодезических. Гиббонз и Мэнтон [19] показали, что для тауб-НУТ-метрики, асимптотически совпадающей с метрикой на M_2^0 , замкнутые геодезические существуют.

Добавление при корректуре. Используя теорию КАМ, М. Вейтковски доказал существование бесконечного числа ограниченных геодезических для метрики на пространстве монополей. Эти геодезические лежат в асимптотической области (т.е. в области, где можно говорить о точечных частицах) пространства M_2^0 . С другой стороны, Л. Бейтс и Р. Монтгомери обнаружили одну замкнутую геодезическую в области «взаимодействия» на M_2^0 , т.е. там, где метрика существенно отличается от тауб-НУТ-метрики.

В этой главе мы проинтерпретируем геодезическое рассеяние, обсуждавшееся в гл. 13, в терминах рассеяния монополей, рассматриваемых как точечные частицы. Напомним, что при больших ξ точка в M_2^0 определяет 2-монопольную конфигурацию, которая приближённо совпадает с суперпозицией двух простых монополей, находящихся далеко друг от друга. Точнее говоря, (12.7) показывает, что эвклидово расстояние между этими двумя монополями равно $\xi/\sqrt{2}$.

В гл. 7 было дано определение трёх главных осей e_1, e_2, e_3 два-монополя. В асимптотической области ось Хиггса e_2 совпадает с прямой, соединяющей частицы. Поэтому вращение вокруг оси Хиггса не меняет положений частиц. Однако при этом изменяется «относительная фаза». Если частица на M_2^0 движется с постоянной скоростью вдоль такой «окружности Хиггса», то эту величину можно интерпретировать как **относительный электрический заряд** двух частиц, которые поэтому становятся **дионами** (19).

Вращения вокруг двух остальных осей очевидным образом меняют положения наших двух частиц. В случае оси e_1 частицы вращаются в плоскости e_2, e_3 . Отметим, в частности, что при повороте на угол π частицы меняются местами, а значит конфигурация как целое остаётся прежней.

Согласно Мантону [35], геодезическое движение на M_2^0 служит низкоскоростным приближением к движению полей монополей. В частности, рассеяние геодезических на M_2^0 описывает рассеяние медленно движущихся монопольных (или, скорее, дионных) частиц.

Рассмотрим сперва простейшую геодезическую, а именно C_1 . Движение вдоль неё отвечает прямому соударению двух чистых монополей (т.е. монополей с нулевым электрическим зарядом). Как мы неоднократно отмечали выше, главные оси e_1, e_2 меняются ролями в точке столкновения, т.е. в точке $\xi = 0$ на C_1 . Это означает, что монополи рассеиваются под углом 90° к их исходному направлению, как показано на рис. 16. Отметим, что рассеяние происходит в плоскости e_2, e_3 , т.е. в плоскости, перпендикулярной главной оси e_1 .

Неожиданный факт рассеяния на угол $\pi/2$ заслуживает того, чтобы сделать по его поводу несколько замечаний общего характера. Прежде всего, само наличие плоскости рассеяния ярко демонстрирует, что исходная 2-монопольная конфигурация не осесимметрична, как мож-

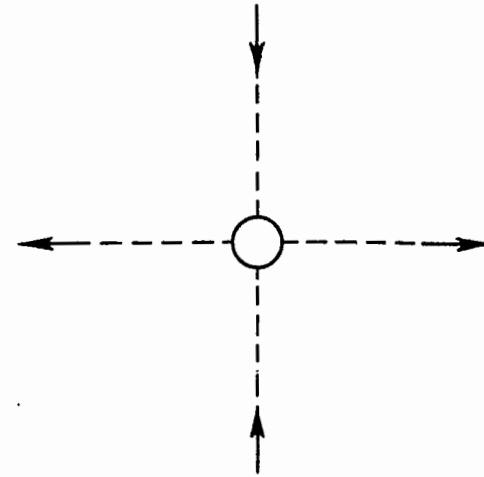


Рис. 16

но было бы вообразить, исходя из интерпретации в терминах частиц. Мы уже знаем, что три главные оси могут нарушать осевую симметрию, однако неясно, как это выражается на языке частиц. Для малых движений динамика двух монополей экспоненциально близка к динамике, определяемой тауб-НУТ-метрикой, а в этом случае осевая симметрия в действительности существует. Этот факт использовал Мантон [33], чтобы интерпретировать различные силы между частицами. Потеря осевой симметрии проявляется лишь в крупномасштабном движении, в котором происходят столкновение и рассеяние на угол $\pi/2$.

Чтобы лучше понять рассеяние на угол $\pi/2$, рассмотрим более общий случай геодезического движения на поверхности Σ_1 . Результаты предыдущей главы дают картину рассеяния частиц в зависимости от прицельного параметра (или углового момента) μ , пропорционального расстоянию от исходной траектории до параллельной ей прямой, проходящей через центр (см. рис. 17). Пунктирные линии на рисунке просто соединяют соответствующие «входы» и «выходы» и не обязательно отражают точное поведение траекторий. Кроме того, мы изобразили лишь одну частицу из каждой пары; положение второй получается центральным отражением. Параметр μ и отличается от параметра δ (см. гл. 13) множителем $\sqrt{2}$, $\mu = \delta/\sqrt{2}$. В гл. 13 было показано, что угол рассеяния $S(\mu)$ возрастает от 0 до $\pi/2$, когда μ убывает от ∞ до 0.

Рисунок показывает, что монополь, идущий сверху, поворачивает налево (а значит, то же самое происходит и с его отражением). Следовательно, между частицами действует сила *отталкивания*.

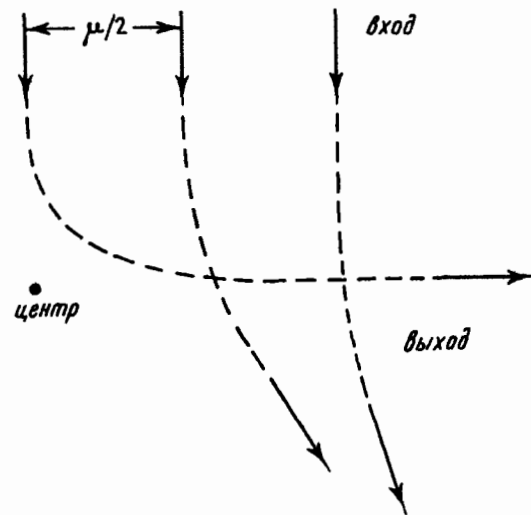


Рис. 17

Ясно, что при больших μ такая интерпретация имеет смысл. Однако в области взаимодействия (т.е. когда μ мало) рисунок может ввести в заблуждение, поскольку в этой области описание в терминах частиц уже перестает быть оправданным. Действительно, разрешим μ принимать отрицательные значения. Тогда мы получим картину частиц, поворачивающих направо. Если мы хотим использовать язык частиц вблизи столкновения, мы вынуждены по соображениям симметрии считать, что при прямом столкновении (с рассеянием на угол $\pi/2$) половина каждой частицы поворачивается налево, а другая половина — направо. Иными словами, вылетающие частицы нельзя отождествлять с исходными; скорее, дело обстоит так, что каждая из исходных частиц распадается на две части, из которых потом по-другому составляются вылетающие частицы. Такая картина подтверждается, как мы сейчас увидим, и рассмотрением плотности энергии.

Осесимметричный 2-монополь (состояние «столкновения») совершенно не похож на суперпозицию двух простых монополей, находящихся в центре. Наоборот, как показывают численные исследования [18], плотность энергии имеет (в плоскости e_2, e_3) локальный минимум в центре. Максимум же лежит на некотором кольце вокруг оси симметрии. Таким образом, 2-монополь сосредоточен в основном в некоторой тороидальной области. Поэтому рассеянию на угол $\pi/2$ при прямом столкновении соответствует схематическая диаграмма плотностей энергии, представленная на рис. 18. Эта диаграмма согласуется с численными результатами, описанными в [18].

Рассеяние на угол $\pi/2$ можно качественно объяснить, опираясь на

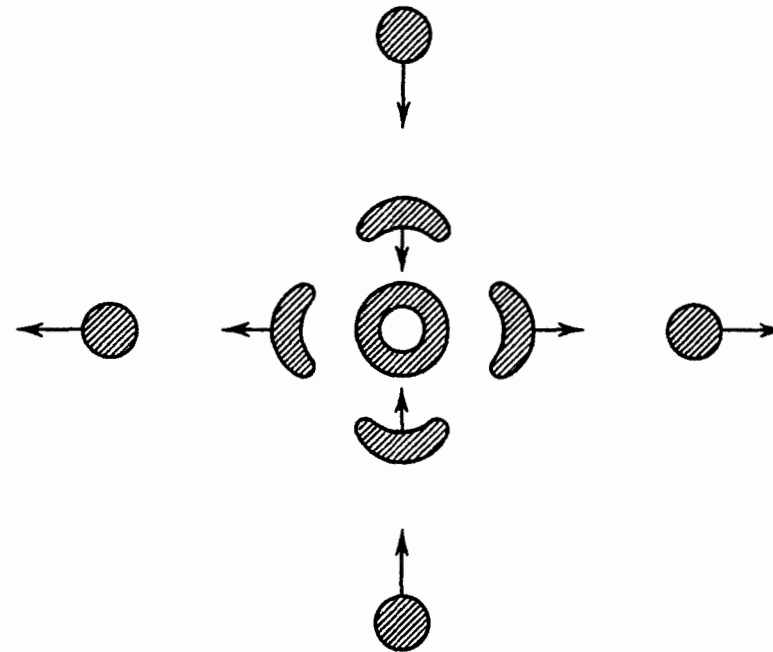


Рис. 18

геометрию поверхности Σ_1 . Как было показано в гл. 12, Σ_1 — выпуклая поверхность вращения, асимптотически совпадающая с конусом с углом $\pi/3$ при вершине. Её можно рассматривать как результат сглаживания сингулярности в вершине этого асимптотического конуса. Далее, каждая точка конуса представляет пару точек из $\mathbb{R}^2$, т.е. конус изоморфен $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, и геодезические на конусе описывают свободное движение невзаимодействующих частиц на плоскости $\mathbb{R}^3$. При этом прямому столкновению соответствует образующая конуса; это геодезическая, «отскакивающая» обратно от вершины. Однако на любой поверхности, сглаженной с соблюдением круговой симметрии, геодезическая, ортогональная окружностям симметрии, проходит область вершины и выходит на противоположной стороне, как показано на рис. 19. Таким образом, рассеяние монополей на угол $\pi/2$ происходит по существу благодаря тому, что конфигурационное многообразие не имеет сингулярностей в точках, соответствующих состояниям столкновения.

Перейдем теперь к интерпретации геодезического движения на поверхности Σ_{12} . Теперь монополи расположены на плоскости e_1, e_2 , снова без начального электрического заряда. Для больших μ мы имеем, как и раньше, слабое отталкивание. При убывании μ оно

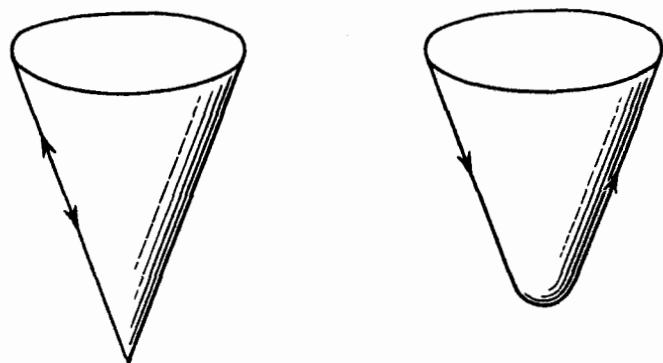


Рис. 19

постепенно переходит в притяжение. Для $\mu > \pi/2$ мы получили грубую оценку (13.16):

$$-\frac{\pi}{3} \leq S(\mu) < \pi.$$

Если $\mu < \pi/2$, то происходит «столкновение», и при $\mu \rightarrow 1$ угол рассеяния $S(\mu) \rightarrow \infty$. Наконец, в случае $\mu \leq 1$ частицы, вместо того чтобы рассеиваться в плоскости e_1, e_2 , начинают двигаться всегда

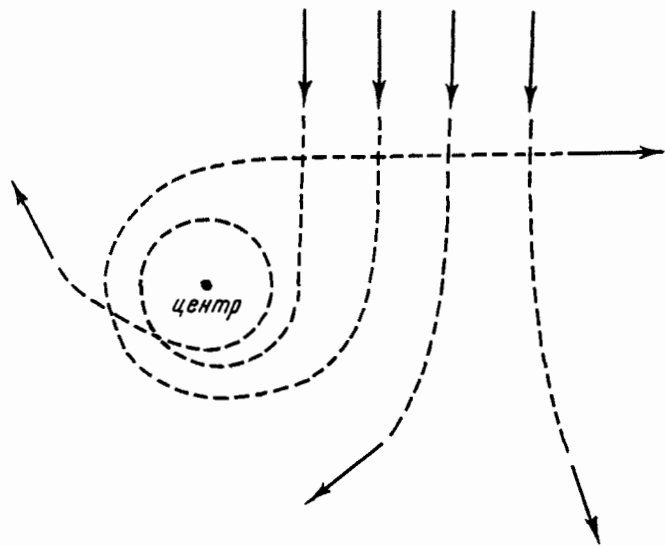


Рис. 20

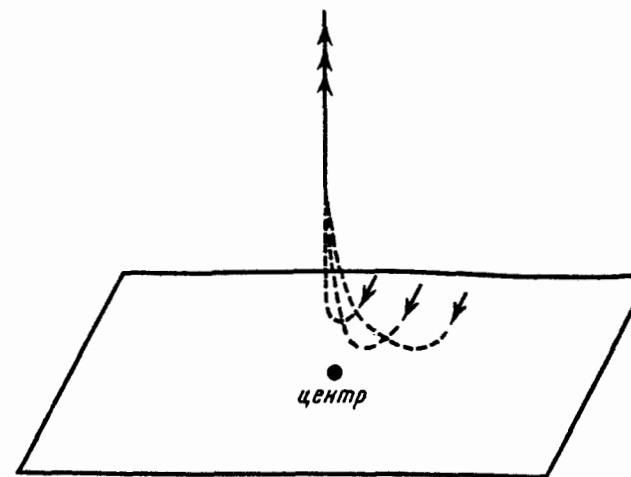


Рис. 21

вдоль нормали к этой плоскости (проходящей через центр). Кроме того, теперь они становятся дионами с относительным электрическим зарядом, пропорциональным μ , и скоростью $\sqrt{1 - \mu^2}$ (начальные скорости нормированы на 1). Это подтверждает гипотезу Мантона [35] о том, что взаимодействие монополей может порождать дионы. В физических терминах, орбитальный угловой момент μ превращается в угловой момент электромагнитного поля возникающих дионов.

Качественно картина рассеяния при $\mu > 1$ выглядит, как показано на рис. 20, а при $\mu \leq 1$ мы имеем трёхмерную картинку, изображённую на рис. 21.

При $\mu = 1 + \epsilon$, где ϵ мало, частицы за время порядка $\epsilon^{-3/2}$ покидают плоскость, становясь дионами, и отдаляются от неё на расстояние порядка ϵ^{-1} , а затем падают обратно и рассеиваются. Можно сказать, что их скорость недостаточна для того, чтобы навсегда покинуть плоскость.

Задача рассеяния монополей при произвольных начальных данных требует информации обо всех геодезических на M_2^0 . В частности, из ответов на вопросы, поставленные в конце гл. 13, можно было извлечь интересные следствия для монополей. Замкнутые геодезические представляли бы связанные состояния, а полнота означала бы, что монополи никогда не «теряются».

Сравнение с солитонами КдФ

Как отмечалось во введении, монополи БПС в $\mathbb{R}^3$ во многом напоминают обычные одномерные солитоны, такие как в теории КдФ. Теперь, получив взаимодействия монополей БПС (при низких энергиях), мы можем обсудить сходство и различия между ними более подробно.

Напомним, что в теории КдФ функция $u(x)$ на прямой рассматривается как потенциал для оператора

$$L_u = \frac{d^2}{dx^2} + u.$$

В матрицу рассеяния оператора L_u входят коэффициенты прохождения и отражения. Если коэффициент отражения равен нулю, то мы говорим, что u — безотражательный потенциал. Тогда решение уравнения КдФ с u в качестве начальных данных есть чистое k -солитонное решение, где k — число дискретных собственных значений оператора L_u .

Такая функция $u(x)$ является по существу аналогом k -монополя $c(x)$. Однако уравнение КдФ имеет первый порядок по d/dt , а уравнения Янга–Миллса–Хиггса — второй. Поэтому мы должны рассматривать k -монополи $c(x)$ вместе с касательным вектором $b(x)$ к пространству M_k монополей. Таким образом, решение $u(x, t)$ уравнения КдФ, равное $u(x)$ при $t = 0$, аналогично приближенному решению $c_i(x)$ уравнений Янга–Миллса–Хиггса, где c_i — геодезическая, выходящая из точки c в направлении b .

В теории КдФ решение $u(x, t)$ строится с помощью данных рассеяния S , связанных с собственными значениями оператора L_u . Эти данные параметризуются некоторым тором размерности k , и рассматриваемый поток становится линейным или геодезическим потоком на этом торе. Решение $u(x, t)$ строится по S с помощью обратного спектрального преобразования.

В теории монополей мы фиксируем направление в $\mathbb{R}^3$ и связываем с данным монополем (A, φ) линейный оператор $D_z = \nabla_z - i\varphi$ вдоль каждой прямой $z \times \mathbb{R}$, идущей в этом направлении. Это аналог оператора $L_u - \lambda$ в теории КдФ. В гл. 2 мы сопоставили монополю данные рассеяния — рациональную функцию $S(z)$, или, эквивалентно,

её полюсы (соответствующие спектральным прямым) и вычеты. В теории КдФ мы имеем аналогичную рациональную функцию, но её полюсы (собственные значения) являются сохраняющимися величинами, а вычеты дают координаты на торе. Для монополей получается $4k$ вещественных измерений (поскольку как полюсы, так и вычеты комплексны и меняются произвольным образом). Далее, описание в терминах полюсов и вычетов работает лишь в случае простых полюсов; тем самым полюсы и вычеты не дают глобальных координат. Напомним, однако, что, как было показано в гл. 5, асимптотически они дают комплексные симплектические координаты.

На этом этапе существенное отличие монополей БПС от солитонов КдФ заключается в том, что M_k не является тором (или произведением тора и плоского пространства), даже топологически. Поскольку риманово многообразие M_k не плоско, геодезический поток не линейен. Однако свойство гиперкэлеровости частично заменяет свойство быть плоским, в том смысле что некоторые компоненты кривизны обращаются в нуль. Тем не менее интересные особенности взаимодействия монополей и их рассеяния обусловлены кривизной пространства M_k , а это связано (качественно) с нетривиальностью его топологии.

Далее, следует заметить, что теорема Доналдсона играет роль обратного преобразования в задаче рассеяния. Однако теперь теория нелинейна, и поэтому не существует линейного интегрального уравнения, которое «строило» бы монополи по рациональной функции. Однако, как объяснялось в гл. 2, имеется простой способ связать монополи с рациональными функциями в асимптотической области, используя как раз полюсы и вычеты. Это означает, что мы можем явно описать рассеяние монополей, даже несмотря на то, что не располагаем полной информацией об их взаимодействии.

Чтобы построить явные решения уравнения Богомольного, надо вместо подхода Доналдсона (в некотором фиксируется направление в $\mathbb{R}^3$) использовать подход, связанный со спектральной кривой [22]. В этом подходе римановы поверхности и соответствующие абелевы функции входят в явные формулы для монополей в точности так же, как в случае уравнения КдФ. Заметим, однако, что вообще говоря это не очень удобный способ исследования динамики, поскольку спектральная кривая подчинена многим ограничениям.

Возможно, стоит отметить (Мантон [33]), что силы, действующие на пару далеко отстоящих друг от друга монополей, экспоненциально хорошо приближаются очевидными силами, действующими на точечные частицы (электромагнитная сила и скалярная сила Хиггса). Этот факт объясняется наличием тауб-НУТовского приближения к метрике на M_2^0 (см. гл. 9). Таким образом, удалённые друг от друга монополи ведут себя как точечные частицы не только статически, но и динамически. Всё это имеет интригующие аналогии с результатами Эро, Мозера и Маккина [1]. Они показали, что движение полюсов

солитонов уравнения КдФ, ассоциированных с рациональной функцией, определяется некоторой k -частичной гамильтоновой системой.

Наконец, отметим ещё один замечательный факт. Группы Ли играют важную роль как в случае одномерных солитонов, так и в случае монополей. Сейчас ясно, что целые иерархии интегрируемых систем типа КдФ естественно связаны с группами Ли [51]. В то же время компактные группы Ли непосредственно участвуют в определении монополей.

Проведённое выше обсуждение показывает, что между монополями БПС и солитонами КдФ имеются как интересные моменты сходства, так и существенные отличия. Эти отличия не позволяют принять часто высказываемую наивную точку зрения, состоящую в том, что уравнения Янга–Миллса интегрируемы или могут быть решены в рамках теории уравнения КдФ. Однако они дают много пищи для размышлений.

Некоторые дополнительные сведения и исторические замечания

При анализе геометрии пространства модулей монополей мы использовали разнообразные подходы к решению уравнений Богомольного. У каждого из них свои преимущества и недостатки, и всякий раз выбирался тот подход, который наилучшим образом соответствовал цели. В этой главе мы попытаемся дать (отчасти исторический) обзор всех этих различных точек зрения. Это поможет читателю охватить единым взглядом содержание предыдущих глав и лучше понять доказательства некоторых утверждений. В частности, мы подробно остановимся на теореме Доналдсона о монополях и рациональных отображениях.

Исходным пунктом всей теории неабелевых магнитных монополей послужило открытие в 1975 г. основного сферически симметричного 1-монопольного решения уравнений Богомольного (Богомольный [7], Прасад и Соммерфилд [39]). В течение нескольких лет этот пример оставался единственным известным решением, и было непонятно, существуют ли мультимонополи. В то время под мультимонополем подразумевалось решение уравнений Богомольного, приблизительно совпадающее с суперпозицией 1-монопольных решений, далеко отстоящих друг от друга. Поскольку уравнения Богомольного описывают статические конфигурации, существование мультимополей с этой точки зрения требует некоторого равновесия сил, действующих между отдельными 1-монополями (если только это осмысленно с физической точки зрения). Мантон [33] исследовал такие асимптотические силы и показал, что, хотя противоположно заряженные монополи притягиваются по закону обратных квадратов, сила взаимодействия между одинаково заряженными монополями действительно обращается в нуль. Этот факт свидетельствовал о существовании мультимополей.

С математической точки зрения первое доказательство существования появилось в 1980 г. в книге Джаффе и Таубса [30]. Исходным пунктом для Таубса послужили те же физические соображения о суперпозиции 1-монополей, но ему удалось доказать, что существует настоящее решение уравнений Богомольного, близкое в надлежащем смысле к приближенной суперпозиции. Его доказательство построено на прямом анализе уравнений в частных производных, использующем эллиптические оценки, неравенства Соболева и калибровочные

солитонов уравнения КдФ, ассоциированных с рациональной функцией, определяется некоторой k -частичной гамильтоновой системой.

Наконец, отметим ещё один замечательный факт. Группы Ли играют важную роль как в случае одномерных солитонов, так и в случае монополей. Сейчас ясно, что целые иерархии интегрируемых систем типа КдФ естественно связаны с группами Ли [51]. В то же время компактные группы Ли непосредственно участвуют в определении монополей.

Проведённое выше обсуждение показывает, что между монополями БПС и солитонами КдФ имеются как интересные моменты сходства, так и существенные отличия. Эти отличия не позволяют принять часто высказываемую наивную точку зрения, состоящую в том, что уравнения Янга–Миллса интегрируемы или могут быть решены в рамках теории уравнения КдФ. Однако они дают много пищи для размышлений.

Некоторые дополнительные сведения и исторические замечания

При анализе геометрии пространства модулей монополей мы использовали разнообразные подходы к решению уравнений Богомольного. У каждого из них свои преимущества и недостатки, и всякий раз выбирался тот подход, который наилучшим образом соответствовал цели. В этой главе мы попытаемся дать (отчасти исторический) обзор всех этих различных точек зрения. Это поможет читателю охватить единым взглядом содержание предыдущих глав и лучше понять доказательства некоторых утверждений. В частности, мы подробно остановимся на теореме Доналдсона о монополях и рациональных отображениях.

Исходным пунктом всей теории неабелевых магнитных монополей послужило открытие в 1975 г. основного сферически симметричного 1-монопольного решения уравнений Богомольного (Богомольный [7], Прасад и Соммерфилд [39]). В течение нескольких лет этот пример оставался единственным известным решением, и было непонятно, существуют ли мультимонополи. В то время под мультимонополем подразумевалось решение уравнений Богомольного, приблизительно совпадающее с суперпозицией 1-монопольных решений, далеко отстоящих друг от друга. Поскольку уравнения Богомольного описывают статические конфигурации, существование мультимополей с этой точки зрения требует некоторого равновесия сил, действующих между отдельными 1-монополями (если только это осмысленно с физической точки зрения). Мантон [33] исследовал такие асимптотические силы и показал, что, хотя противоположно заряженные монополи притягиваются по закону обратных квадратов, сила взаимодействия между одинаково заряженными монополями действительно обращается в нуль. Этот факт свидетельствовал о существовании мультимополей.

С математической точки зрения первое доказательство существования появилось в 1980 г. в книге Джаффе и Таубса [30]. Исходным пунктом для Таубса послужили те же физические соображения о суперпозиции 1-монополей, но ему удалось доказать, что существует настоящее решение уравнений Богомольного, близкое в надлежащем смысле к приближенной суперпозиции. Его доказательство построено на прямом анализе уравнений в частных производных, использующем эллиптические оценки, неравенства Соболева и калибровочные

преобразования. Помимо доказательства существования удаленных друг от друга монополей он дал также априорные оценки поведения поля Хиггса и кривизны для общего мультимонополя.

После доказательства теоремы существования главные усилия исследователей были направлены на поиски явных решений. (Интересно отметить, что во второй части книги Джаффе и Таубса, посвященной вихрям, тоже содержится некая теорема существования, но соответствующие явные решения до сих пор не найдены.) В каком-то смысле способ построения общего решения уравнений Богомольного уже был известен. Он основан на связи уравнений Богомольного с уравнениями автодуальности. В работе [34] Мантон обнаружил, что, хотя мы ищем статические решения полной системы Янга–Миллса–Хиггса в пространстве Минковского, уравнения Богомольного на самом деле эквивалентны не зависящим от мнимого времени автодуальным уравнениям Янга–Миллса в евклидовом четырёхмерном пространстве. Тем самым для их решения можно использовать твисторные методы Пенроуза и Уорда. Проблема состояла в том, чтобы обеспечить правильное поведение на бесконечности и несингулярность в $\mathbb{R}^3$. В 1980 г. Уорд [47], используя твисторные методы, нашёл первый пример осесимметричного 2-монопольного решения. Вскоре после этого были построены осесимметричные k -монополи (Прасад и Росси, см. [38]), а затем и неосесимметричный 2-монополь (Уорд [48]). Наконец, Корриган и Годдард [9], развивая методы Уорда, построили общие k -монополи.

В основе всех этих методов нахождения решений лежат в конечном счёте те или иные варианты A_k -анзаца, введённого Атьёй и Уордом [5] для построения инстантонов. В этом анзаце используются решения линейных полевых уравнений в $\mathbb{R}^3$ и специальная нелинейная подстановка для получения калибровочного потенциала. В твисторных терминах дело сводится к построению некоторого голоморфного расслоения как расширения. Хитчин [22] предложил более геометрическое описание твисторного подхода. Из его результатов следует, в частности, что любое решение с требуемыми граничными условиями может быть получено каноническим применением указанного анзаца. Описание Хитчина основано на использовании комплексной структуры на пространстве ориентированных прямых в $\mathbb{R}^3$, превращающей это пространство в комплексную поверхность TP^1 .

Для данной связности ∇ и данного поля Хиггса ϕ нуль-пространство оператора $\nabla - i\phi$ на каждой прямой определяет векторное расслоение над TP^1 , которое оказывается голоморфным, если связность и поле Хиггса удовлетворяют уравнениям Богомольного. Граничные условия определяют единственное с точностью до постоянного множителя решение s уравнения $(\nabla - i\phi)s = 0$ на каждой прямой, убывающее на $-\infty$. Это приводит к представлению соответствующего векторного расслоения в виде некоторого расширения и тем самым к

использованию A_k -анзаца для построения решения. Рассматривая решение, убывающее на другом конце, можно получить дополнительную информацию. Множество прямых, на которых уравнение $(\nabla - i\phi)s = 0$ имеет решение, убывающее на обоих концах, оказывается компактной алгебраической кривой, которая с помощью простой гомологической алгебры определяет требуемое расширение, а следовательно, и решение. В своей окончательной форме эта конструкция показывает, что решение определяется спектральной кривой – некоторой алгебраической кривой Γ в TP^1 .

Большим местом во всех подходах долгое время оставался вопрос о несингулярности решения. Предложить анзацы или даже явную формулу, было ещё только полдела, главная трудность состояла в проверке того, что решение несингулярно. Эта трудность была преодолена Намо [36]. Его подход основан на АДХМ-конструкции инстантонов. Нам строит векторное расслоение, слоем которого над точкой $x \in \mathbb{R}^3$ служит нуль-пространство кватернионного дифференциального оператора $\Delta^*(x)$ на интервале $(0, 2)$, где

$$\Delta(x) = \sum x_j e_j + id/ds - i \sum T_j e_j.$$

Для того чтобы оператор Δ был кватернионным, матрицы $T_j(s)$ должны удовлетворять нелинейным уравнениям

$$dT_i/ds + \varepsilon_{ijk} T_j T_k = 0.$$

Кроме того, матрицы $T_j(s)$ имеют сингулярности лишь на концах рассматриваемого интервала. В итоге решение уравнений Богомольного эффективно сводится в подходе Нама к решению некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Преимущество этого подхода заключается в том, что несингулярность монополя обеспечивается несингулярностью матриц $T_j(s)$ на интервале $(0, 2)$.

Остаётся решить обыкновенные дифференциальные уравнения. Как показано в [23], это можно сделать, рассматривая орбиту потока на якобиане некоторой алгебраической кривой – на самом деле спектральной кривой монополя. Эта конструкция приводит к дополнительной информации о спектральной кривой – условию несингулярности, которое записывается в виде

$$H^0(\Gamma, \mathcal{L}(k-2)) = 0 \text{ при } s \in (0, 2).$$

Таким образом, решение в подходе Нама зависит, как и в твисторном подходе, от спектральной кривой.

Итак, в обоих последних методах фундаментальную роль играет спектральная кривая. Её основное достоинство в том, что это калибровочно-инвариантный объект, полностью определяющий решение. Кроме того, поскольку спектральная кривая лежит в пространстве прямых, она имеет естественный закон преобразования относительно группы сдвигов и поворотов трёхмерного евклидова пространства.

Использование спектральной кривой в качестве ключевого объекта имеет и свои недостатки. Например, очень трудно получить качественную информацию о плотности энергии или описание далеко отстоящих друг от друга монополей. Даже в простейшем случае осесимметричных 2-монополей нам приходится полагаться на компьютеры при проверке тороидальности распределения энергии [18]. Аналитические методы Таубса гораздо лучше приспособлены для получения подобной информации.

Параллельно развитию методов решения уравнений Богомольного происходило исследование пространства всех решений по модулю калибровочной эквивалентности, т. е. пространства модулей. В работе [50] Вейнберг предпринял попытку проанализировать задачу деформации, отталкиваясь от аналогичного случая пространства модулей инстантонов и используя эллиптические комплексы и теоремы об индексе. Аналитические трудности, связанные с некомпактностью пространства R^3 , не были полностью разрешены, однако Вейнберг всё-таки пришёл к числу $4k - 1$ как предположительной размерности пространства модулей. В конструкциях Корригана – Годдарда, Хитчина и Нама подсчёт числа параметров приводит к тому же ответу, но также опирается на непроверенные условия трансверсальности, необходимые для того, чтобы пространство модулей было гладким. Анализ, который придал результатам Вейнберга окончательную строгость, был проведен Таубсом [44].

В статьях [44; 45] Таубс доказал основные результаты, с помощью которых мы установили существование и гладкость пространства модулей, нашли размерность этого пространства, установили существование и исследовали асимптотические свойства естественной метрики на нём. Эти результаты не так легко извлечь из статей Таубса, поскольку мотивировкой для него служило не столько изучение решений уравнений Богомольного, дающих абсолютный минимум функционала Янга – Милса – Хиггса $\int |F|^2 + |\nabla \phi|^2$, сколько рассмотрение высших критических точек и их индексов.

Структура пространства модулей (и в частности его топология) в случае заряда 2 была впервые проанализирована Уртюбизом [27]. Используя описание в терминах спектральной кривой, он явно вычислил ограничения на коэффициенты эллиптической кривой, определяемые условием тривиальности расслоения L^2 и условием несингулярности $H^0(\Gamma, E) = 0$ при $s \in (0, 2)$, возникающим в подходе Нама.

Общий случай был исследован Доналдсоном [15]. Он доказал, что расслоение со слоем S^1 над пространством модулей изоморфно пространству рациональных отображений степени k из CP^1 в CP^1 , переводящих отмеченную точку в отмеченную. Поскольку описание в терминах рациональных отображений играло столь важную роль в нашем анализе метрики, мы обсудим здесь доказательство теоремы Доналдсона.

Доналдсон исходил из доказанного в [23] утверждения об эквива-

лентности между монополями и решениями уравнения Нама. Оно формулируется следующим образом:

Предложение (16.1). *Существует естественная эквивалентность между (а) монополями заряда k , отвечающими группе $SU(2)$ и рассматриваемыми с точностью до калибровочной эквивалентности, и (б) классами $O(k, R)$ -сопряжённости матричнозначных функций $T_1(s)$, $T_2(s)$, $T_3(s)$ одной вещественной переменной $s \in (0, 2)$, удовлетворяющих условиям:*

$$(i) \frac{dT_i}{ds} + \sum \varepsilon_{ijk} T_j T_k = 0$$

(уравнение Нама);

$$(ii) T_i^*(s) = -T_i(s);$$

$$(iii) T_i(2-s) = T_i(s)^T;$$

(iv) T_i продолжается до мероморфной функции на окрестности отрезка $[0, 2]$, аналитичной вне точек $s = 0, 2$. В точках $s = 0, 2$ функция T_i имеет простые полюсы;

(v) вычеты матриц T_i в полюсах $s = 0, 2$ задают неприводимое представление группы $SU(2)$.

Доналдсон заметил, что уравнения Нама (условие (i)) эквивалентны уравнениям антиавтотодуальности для связности

$$A = T_1(s) dx_1 + T_2(s) dx_2 + T_3(s) dx_3$$

на пространстве $R \times R^3$ с координатами s, x_1, x_2, x_3 . В другой работе, посвящённой решениям уравнений антиавтотодуальности на компактных четырёхмерных многообразиях, Доналдсон показал, что любое стабильное голоморфное векторное расслоение на компактной алгебраической поверхности обладает антиавтотодуальной связностью, единственной с точностью до унитарных калибровочных преобразований. Отсюда следует, в частности, что пространство модулей допускает естественную голоморфную интерпретацию [16]. Доналдсон предложил аналогичную голоморфную интерпретацию для пространства модулей решений уравнений Нама. Его конструкция заключается в следующем. Введём четвёртую матрицу Нама $T_0(s)$ и рассмотрим антиавтотодуальную связность

$$A = T_0(s) ds + T_1(s) dx_1 + T_2(s) dx_2 + T_3(s) dx_3$$

на S^2 с координатами $(z, w) = (s + ix_1, x_2 + ix_3)$. На пространстве таких связностей действует калибровочная группа, состоящая из преобразований, зависящих от s . Искусственно введённую матрицу $T_0(s)$ можно обратить в нуль с помощью подходящего калибровочного преобразования и вернуться тем самым к уравнениям Нама.

Положим теперь $\alpha = (T_0 + iT_1)/2$, $\beta = (T_2 + iT_3)/2$. Тогда уравне-

ния Нама принимают вид

$$(16.2) \quad \frac{d\beta}{ds} + 2[\alpha, \beta] = 0,$$

$$(16.3) \quad \frac{d}{ds}(\alpha + \alpha^*) + 2[\alpha, \alpha^*] + 2[\beta, \beta^*] = 0.$$

Первое уравнение определяет комплексный объект, который, подобно голоморфному векторному расслоению, локально-тривиален – комплексным калибровочным преобразованием уравнение (16.2) приводится к виду $d\beta/ds = 0$. Второе уравнение представляет собой унитарное ограничение на α и β . Стратегия Доналдсона заключается в том, чтобы показать, что при правильных граничных условиях любое решение уравнения (16.2) калибровочно-эквивалентно (относительно группы комплексных калибровочных преобразований) решению уравнения (16.3). С этой целью он вводит понятие *комплекса Нама*; это набор, состоящий из пары $k \times k$ -матричнозначных функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$, где $s \in (0, 2)$, и вектора $v \in \mathbb{C}^k$. Эти данные должны удовлетворять условиям:

$$(i) \quad \frac{d\beta}{ds} + 2[\alpha, \beta] = 0;$$

$$(ii) \quad \alpha(2-s) = \alpha^T(s), \quad \beta(2-s) = \beta^T(s);$$

(iii) функции α и β гладки в $(0, 2)$, мероморфны в некоторых окрестностях точек $s = 0, 2$ и имеют простые полюсы в точках $s = 0, 2$. Обозначим вычеты функций α и β при $s = 0$ через a и b соответственно;

(iv) $\text{tr}(a) = 0$; вектор v лежит в собственном подпространстве оператора a , отвечающем собственному значению $-(k-1/4)$, и $\mathbb{C}^k$ порождается векторами $b^j v$, $0 \leq j \leq k-1$.

Естественное понятие эквивалентности таких комплексных объектов определяется действием группы непрерывных отображений $g: [0, 2] \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$, гладких в $(0, 2)$ и таких, что $g(2-s) = g^T(s)^{-1}$. Основная теорема Доналдсона утверждает, что любой комплекс Нама эквивалентен комплексу, связанному с решением уравнения (16.3) и, следовательно, с решением уравнений Нама. Идея доказательства состоит в том, что уравнение (16.3) интерпретируется как вариационное уравнение для некоторого лагранжиана. Доналдсон сначала минимизирует этот лагранжиан на интервале $(\varepsilon, 2-\varepsilon)$, а затем внимательно анализирует переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Эта теорема позволяет заменить классы эквивалентности решений уравнений Нама на классы эквивалентности голоморфных объектов – комплексов Нама. Связь с рациональными отображениями возникает при рассмотрении поведения комплексов Нама в точке 1 – середине интервала $(0, 2)$. Это неподвижная точка инволюции $s \rightarrow 2-s$,

фигурирующей во всех определениях. В силу определения комплекса Нама, $\beta(2-s) = \beta^T(s)$, поэтому $\beta(1) = B$ есть симметричная комплексная матрица. С точкой $s = 1$ можно связать также вектор $w = u(1)$, где $u(s)$ – единственное решение уравнения $du/ds + 2au = 0$, удовлетворяющее условию $s^{-(k-1)/2}u(s) \rightarrow v$ при $s \rightarrow 0$ (v – вектор из определения комплекса Нама).

Доналдсон показал, что w – циклический вектор для $\mathbb{C}(B)$ -модуля $\mathbb{C}^k$ и что пара (B, w) определяет комплекс Нама с точностью до изоморфизма.

Конструкция завершается построением рационального отображения. Оно задается формулой

$$S(z) = w^T(zI - B)^{-1}w.$$

Несмотря на то что исходной мотивировкой доналдсоновского доказательства послужила аналогия с уравнениями антиавтодуальности на алгебраической поверхности, оно хорошо укладывается в рамки гиперкэлеровой конструкции факторпространств, аналогичной соответствующей конструкции для самих уравнений Богомольного. Если объединить матрицы Нама в один кватернионнозначный оператор

$$Q(s) = \frac{d}{ds} + T_0(s) + iT_1(s) + jT_2(s) + kT_3(s),$$

то действие унитарных калибровочных преобразований определяет гиперкэлерово отображение моментов (μ_1, μ_2, μ_3) , как в гл. 4. Нуль-множество $\cap \mu_i^{-1}(0)$ есть в точности множество решений уравнений Нама.

Доналдсоновский выбор комплексных координат z, w , при котором координата x_1 выделена, эквивалентен рассмотрению комплексного отображения моментов $\mu_2 + i\mu_3$, голоморфного по отношению к комплексной структуре I . При этом комплексное уравнение (16.2) записывается формально в виде $\mu_2 + i\mu_3 = 0$ и унитарное уравнение (16.3) совпадает с уравнением остающегося отображения моментов $\mu_1 = 0$.

С этой точки зрения ясно, что выбор комплексных координат, необходимый для задания изоморфизма с пространством рациональных отображений, эквивалентен выбору комплексной структуры из некоторого гиперкэлерова семейства.

Рациональное отображение возникает в доналдсоновском доказательстве хотя и естественным, но не очень прямым способом. Уртюбиз [29], исходя из решения уравнений Нама, построенного по спектральной кривой [23], описал рациональное отображение непосредственно в терминах спектральной кривой. Это позволило ему дать затем то описание в терминах данных рассеяния для оператора $\nabla - i\phi$ на семействе параллельных прямых, которым мы пользовались в гл. 2.

Таким образом, описание пространства модулей в терминах рациональных отображений может быть непосредственно связано с любым другим описанием решений — с описанием в терминах отображения рассеяния, определённого самими связностью и полем Хиггса; с описанием, использующим значения тривиализации расслоения L^2 на k точках над 0 в CP^1 , определённое с помощью спектральной кривой; с описанием при помощи значения матриц и векторов Нама. По этой причине способ описания в терминах рациональных отображений, по-видимому, наиболее удобен, и мы всё время пользовались именно им.

В 1980 г. (уже после доказательства существования мультимонополей) Мантон привёл соображения, показывающие, что геодезическое движение на пространстве модулей можно рассматривать как приближение к решению полных, зависящих от времени, уравнений Янга — Миллса — Хиггса [35]. В связи с этим возник вопрос о нахождении соответствующей метрики. Несмотря на то что появившееся позже описание Доналдсона было довольно явным, прямое вычисление метрики казалось невозможным, поскольку для этого нужно было сперва найти связность и поле Хиггса, затем решить соответствующее линейное уравнение и, наконец, проинтегрировать квадрат длины решения по R^3 . Хотя каждый шаг в процедуре построения решения уравнений по рациональному отображению полностью определён, но цепочка переходов настолько длинна, что вряд ли можно надеяться прийти с её помощью к разумному ответу.

Способ обойти эту трудность появился после того, как было понято, что искомая метрика есть метрика весьма специального вида — она *гиперкэлерова*. Кватернионная структура была замечена Таубсом [44]. Он использовал её при оценке индексов высших критических точек. Интегрируемость этой структуры, однако, не была ясна. Если в конструкции Доналдсона выбрать другое направление, то получится другая интегрируемая комплексная структура, но вначале на взаимосвязь между различными возникающими комплексными структурами не было обращено внимания. Понимание этой связи пришло лишь в контексте гиперкэлеровых факторпространств, когда было осознано, что сами уравнения Богомольного представляют собой версию гиперкэлерова отображения моментов (Хитчин, Карледе, Линдстрём, Рочек [26]) для действия некоторой группы на бесконечномерном гиперкэлеровом многообразии.

Связь уравнений Богомольного с кватернионами основывается в конечном счёте на отождествлении пространства R^3 с пространством мнимых кватернионов. Эта связь пронизывает все наши рассуждения, вплоть до пространства модулей. Она проявляется в равной мере во всех конструкциях, которые использованы в этой книге. Остановимся, в частности, на двух из них. Первая — это интерпретация уравнений Богомольного в терминах гиперкэлерова отображения

моментов, объясняющая естественную гиперкэлерову структуру метрики на пространстве модулей. Вторая — интерпретация теоремы Доналдсона об уравнениях Нама. Уравнения Нама снова можно связать с нулевым множеством некоторого бесконечномерного отображения моментов. Хотя мы и не касались здесь следствий из этого факта, из него, несомненно, вытекает, что естественная метрика на подходящим образом определённом пространстве решений уравнений Нама гиперкэлерова.

Преобразование, которое позволяет получить решение уравнений Нама, исходя из решения уравнений Богомольного (и наоборот), следует рассматривать как аналог преобразования Фурье. По-видимому, здесь должен выполняться аналог теоремы Планшереля, т.е. утверждение о том, что естественные метрики на пространстве модулей монополей и на пространстве модулей решений уравнения Нама изометричны относительно преобразования Нама.

Это преобразование (*преобразование взаимности* (reciprocity), в терминологии статьи [10]) сближает различные точки зрения, которые мы принимали выше в этой книге. Теория твисторов, в которой все комплексные структуры, задаваемые кватернионами, рассматриваются одновременно и которая приводит в конечном счёте к голоморфным объектам, в равной мере составляют общую основу всех наших конструкций (а также и многих других, относящихся к дифференциальным уравнениям, имеющим естественное геометрическое происхождение).

В заключение сформулируем те основные свойства спектральной кривой и рационального отображения, которыми мы пользовались для описания монополей.

1. Спектральная кривая Γ — это компактная алгебраическая кривая в касательном расслоении TP^1 к проективной прямой, лежащая в линейной системе $|\mathcal{O}(2k)|$ и удовлетворяющая следующим уравнениям:

- (i) кривая Γ не имеет кратных компонент;
- (ii) она вещественна по отношению к стандартной вещественной структуре τ на TP^1 ;
- (iii) расслоение L^2 тривиально на Γ , а расслоение $L(k-1)$ вещественно;
- (iv) $H^0(\Gamma, E(k-2)) = 0$ при $s \in (0, 2)$.

Здесь E — голоморфное линейное расслоение на TP^1 , задаваемое величиной $\exp(\omega)$, где $\omega \in H^1(TP^1, \mathcal{O})$ — стандартный $SL(2, C)$ -инвариантный элемент. Более конкретно, E задаётся функцией перехода $\exp(\pi\eta/\zeta)$. Как показано в [23], кривая Γ , удовлетворяющая этим свойствам, определяет с помощью конструкции Нама несингулярный монополю заряда k .

2. Рациональное отображение, ассоциированное с монополем, определяется по спектральной кривой следующим образом [29]. Пусть a — такая тривиализация расслоения L^2 , что

$$\tau(a) \cdot a = 1 \in H^0(\Gamma, L^{-2} L^2) = H^0(\Gamma, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}.$$

(Если a, a' — две такие тривиализации, то $a' = e^{\theta} a$.) Представим $\tau(a)$ голоморфными функциями $b^0(\eta, \zeta)$ и $b^1(\eta, \zeta)$, удовлетворяющими соотношению $b^0(\eta, \zeta) = \exp(-2\eta/\zeta) b^1(\eta, \zeta)$. Пусть $q(\eta)$ — полином степени k с единичным старшим коэффициентом, такой что кривая Γ над $\zeta = 0$ задаётся уравнением $q(\eta) = 0$, и пусть $p(\eta)$ — полином степени $(k-1)$, такой что $p(\eta) = b^0(\eta, 0)$ по модулю $q(\eta)$.

Тогда $S(z) = p(z)/q(z)$ есть рациональное отображение, ассоциированное с монополем по отношению к точке $\zeta = 0$.

3. Чтобы определить рациональное отображение непосредственно по монополю (A, Φ) , мы поступаем следующим образом [22]. Выберем направление в $\mathbb{R}^3$ (отвечающее точке $\zeta = 0$, как выше) и рассмотрим уравнение $(\nabla_A - i\Phi)s = 0$ вдоль прямых, идущих в этом направлении. Такие прямые параметризуются точкой z в ортогональной двумерной плоскости $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

При $t \rightarrow +\infty$ существует асимптотическая калибровка с постоянными сечениями e_0, e_1 , такая что если s_0 — решение уравнения $(\nabla_A - i\Phi)s = 0$, убывающее при $t \rightarrow \infty$, то

$$s_0(t) t^{-k/2} e^t \rightarrow c e_0.$$

(Любые два сечения e_0, e'_0 связаны соотношением $e'_0 = e^{\theta} e_0$.)

Выберем какое-нибудь сечение e_0 , и пусть $s_0(z, t)$ — такое решение, что

$$s_0(z, t) t^{-k/2} e^t \rightarrow e_0$$

при $t \rightarrow \infty$. (Заметим, что это условие зависит от выбора начала координат: при сдвиге на λ в данном направлении решение s_0 умножается на $e^{-\lambda}$.)

Рассмотрим ещё решение $s_1(z, t)$, удовлетворяющее условию $\langle s_0, s_1 \rangle = 1$. Оно определено с точностью до добавления решения, кратного s_0 .

Пусть s'_0 — решение наших уравнений, убывающее при $t \rightarrow -\infty$ и нормированное как выше. Тогда

$$s'_0(z, t) = a(z) s_0(z, t) + b(z) s_1(z, t).$$

Коэффициент $b(z)$ — это некоторый корректно определённый полином степени k .

Рациональное отображение, ассоциированное с монополем, есть $S(z) = p(z)/b(z)$, где $p(z)$ — единственный полином степени $(k-1)$, такой что $p(z) = a(z)$ по модулю $b(z)$.

Замечание. Нет никаких препятствий к тому, чтобы выбрать $s_1(z, t)$ голоморфным на $\mathbb{C}$, а тогда, добавляя к s_1 голоморфное

кратное решения s_0 , мы можем добиться того, что коэффициент $a(z)$ станет равным $p(z)$. В общем случае базис s_0, s_1 определён канонически. Выбор коэффициента $a(z)$ в виде полинома (как и $b(z)$) можно проинтерпретировать как ограничение на рост. Здесь прослеживается аналогия с выбором базиса в случае гиперболических монополей [2] (когда мы компактифицируем комплексную плоскость $\mathbb{C}$).

Этот выбор позволяет определить полную матрицу рассеяния из гл. 2. Действительно, если

$$(16.4) \quad s'_0 = a s_0 + b s_1,$$

то, меняя местами величины s_0 и s'_0 и повторяя процесс, мы получаем

$$(16.5) \quad s_0 = a' s'_0 + b' s'_1.$$

Далее, полином b' , определяющий спектральные прямые в данном направлении, совпадает с b . Поэтому из (16.4) и (16.5) следует, что

$$(16.6) \quad s_0 = a' (a s_0 + b s_1) + b' s'_1.$$

Таким образом, $a'a = 1 \bmod b$, т.е.

$$a'a = 1 + \beta b$$

для некоторого полинома β степени $k-2$. Из (16.6) вытекает теперь, что

$$-\beta b s_0 = a' b s_1 + b' s'_1,$$

т.е.

$$s'_1 = -\beta s_0 - a' s_1.$$

Следовательно, (s'_1, s'_0) и (s_0, s_1) связаны матрицей рассеяния

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\beta & -a' \end{pmatrix}.$$

- [1] H. Airault, H. P. McKean, J. Moser, Rational and elliptic solutions of the KdV equation and a related many body problem.—Comm. Pure. Appl. Math. 30 (1977), 95–148.
- [2] M. F. Atiyah, Magnetic monopoles in hyperbolic space, in: Vector Bundles on Algebraic Varieties.—Oxford Univ. Press, 1987, pp. 1–34. [Имеется перевод: Атья М. Ф. Магнитные монополи в гиперболическом пространстве.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 184–213.]
- [3] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, Low energy scattering of nonabelian monopoles.—Phys. Lett. 107A (1985), 21–25.
- [4] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, Low energy scattering of nonabelian magnetic monopoles.—Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A315 (1985), 459–469. [Имеется перевод: Атья М. Ф., Хитчин Н. Дж. Низкоэнергетическое рассеяние неабелевых магнитных монополей.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 214–230.]
- [5] M. F. Atiyah, R. S. Ward, Instantons and algebraic geometry.—Commun. Math. Phys. 55 (1977), 117–124.
- [6] A. Beauville, Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle.—J. Diff. Geom. 18 (1983), 755–782.
- [7] Богомольный Е. Б. Устойчивость классических решений.—Яд. физ., 1976, т. 24, с. 449–454.
- [8] J. Cheeger, D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature.—J. Diff. Geom. 6 (1971), 119–128.
- [9] E. Corrigan, P. Goddard, An n -monopole solution with $(4n - 1)$ degrees of freedom.—Commun. Math. Phys. 80 (1981), 575–587.
- [10] E. Corrigan, P. Goddard, Construction of instanton and monopole solutions and reciprocity.—Ann. Phys. (NY) 154 (1984), 253–279.
- [11] N. S. Craigie (ed.), Theory and detection of magnetic monopoles in gauge theories, World Scientific, Singapore, 1986.
- [12] N. S. Craigie, P. Goddard, W. Nahm (eds.), Monopoles in quantum field theory.—Proceedings of the monopole meeting in Trieste 1981, World Scientific, Singapore, 1982.
- [13] P. A. M. Dirac, Quantised singularities in the electromagnetic field.—Proc. Roy. Soc. Lond. A133 (1931), 60–72.
- [14] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbons, H. C. Morris, Solitons and nonlinear wave equations.—Academic Press, London, 1982.
- [15] S. K. Donaldson, Nahm's equations and the classification of monopoles.—Commun. Math. Phys. 96 (1984), 387–407. [Имеется перевод: Дональдсон С. К. Уравнения Нама и классификация монополей.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 123–159.]
- [16] S. K. Donaldson, Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles.—Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 1–26.
- [17] D. Ebin, The motion of slightly compressible fluids viewed as a motion with strong constraining forces.—Ann. of Math. 105 (1977), 141–200.
- [18] P. Forgács, Z. Horvath, L. Palla, Non-linear superposition of monopoles.—Nucl. Phys. B192 (1981), 141–158.
- [19] G. Gibbons, N. S. Manton, Classical and quantum dynamics of BPS monopoles.—Nucl. Phys. B274 (1986), 183–224.
- [20] G. Gibbons, C. Pope, The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity.—Commun. Math. Phys. 66 (1979), 267–290.
- [21] G.-H. Halphen, Sur un système d'équations différentielles.—C. R. Acad. Sci. Paris 92 (1881), 1101–1103.
- [22] N. J. Hitchin, Monopoles and geodesics.—Commun. Math. Phys. 83 (1982), 579–602. [Имеется перевод: Хитчин Н. Дж. Монополи и геодезические.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 11–48.]
- [23] N. J. Hitchin, On the construction of monopoles.—Commun. Math. Phys. 89 (1983), 145–190. [Имеется перевод: Хитчин Н. Дж. О построении монополей.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 49–122.]
- [24] N. J. Hitchin, Twistor construction of Einstein metrics, in: Global Riemannian Geometry, N. J. Hitchin, T. J. Willmore (eds.)—Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [25] N. J. Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface.—Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 59–126.
- [26] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, Hyperkähler metrics and supersymmetry.—Commun. Math. Phys. 108 (1987), 535–589.
- [27] J. Hurtubise, SU(2) monopoles of charge 2.—Commun. Math. Phys. 92 (1983), 195–202. [Имеется перевод: Уртюбиз Ж. SU(2)-монополи заряда 2.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 160–173.]
- [28] J. Hurtubise, The asymptotic Higgs field of a monopole.—Commun. Math. Phys. 97 (1985), 381–389.
- [29] J. Hurtubise, Monopoles and rational maps: a note on a theorem of Donaldson.—Commun. Math. Phys. 100 (1985), 191–196. [Имеется перевод: Уртюбиз Ж. Монополи и рациональные отображения; замечания к теореме Дональдсона.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 174–183.]
- [30] A. Jaffe, C. H. Taubes, Vortices and monopoles.—Birkhäuser, Boston, 1980.
- [31] P. Kronheimer, Instantons gravitationnels et singularités de Klein.—C. R. Acad. Sci. Paris 303 Serie I (1986), No. 2, 53–55.
- [32] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. Soni, Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics (3rd ed.)—Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [33] N. S. Manton, The force between't Hooft-Polyakov monopoles.—Nucl. Phys. B126 (1977), 525–541.
- [34] N. S. Manton, Complex structure of monopoles.—Nucl. Phys. B135 (1978), 319–332.
- [35] N. S. Manton, A remark on the scattering of BPS monopoles.—Phys. Lett. 110B (1982), 54–56.
- [36] W. Nahm, The construction of all self-dual monopoles by the ADHM method, in: Monopoles in quantum field theory, Proceedings of the monopoles meeting in Trieste 1981.—World Scientific, Singapore, 1982.

- [37] R. Penrose, Non-linear gravitons and curved twistor theory.—Gen. Rel. and Grav. 7 (1976), 31–52. [Имеется перевод: Пенроуз Р. Нелинейные гравитоны и искривлённая теория твисторов.—В сб.: Твисторы и калибровочные поля.—М.: Мир, 1983, с. 225–249.]
- [38] M. K. Prasad, Yang-Mills-Higgs monopole solutions of arbitrary topological charge.—Commun. Math. Phys. 80 (1981), 137–149.
- [39] M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, Exact classical solutions for the 't Hooft monopole and Julia-Zee dyon.—Phys. Rev. Lett. 35 (1975), 760–762.
- [40] S. Salamon, Quaternionic Kähler manifolds.—Invent. Math. 67 (1982), 143–171.
- [41] S. Salamon, Differential geometry of quaternionic manifolds.—Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 19 (1986), 1–30.
- [42] G. B. Segal, The topology of spaces of rational functions.—Acta Mathematica 141 (1979), 39–72.
- [43] J. Tannery, J. Molk, Fonctions Elliptiques.—Gauthier-Villars, Paris, 1893.
- [44] C. H. Taubes, Stability in Yang-Mills theories.—Commun. Math. Phys. 91 (1983), 235–263.
- [45] C. H. Taubes, Min-max theory for the Yang-Mills-Higgs equations.—Commun. Math. Phys. 97 (1985), 473–540. [Имеется перевод: Таубс К. Г. Теория минимакса для уравнений Янга–Миллса–Хиггса.—В сб.: Монополи. Топологические и вариационные методы.—М.: Мир, 1989, с. 379–491.]
- [46] K. K. Uhlenbeck, Connections with L^p bounds on curvature.—Commun. Math. Phys. 83 (1982), 31–42.
- [47] R. S. Ward, A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2.—Commun. Math. Phys. 79 (1981), 317–325.
- [48] R. S. Ward, Ansätze for self-dual Yang-Mills fields.—Commun. Math. Phys. 80 (1981), 563–574.
- [49] R. S. Ward, Slowly moving lumps in the CP^1 model in $(2+1)$ dimensions.—Phys. Lett. 158B (1985), 424–428.
- [50] E. Weinberg, Parameter counting for multimonopole solutions.—Phys. Rev. D20 (1979), 936–944.
- [51] G. Wilson, Infinite dimensional Lie groups and algebraic geometry in soliton theory.—Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A315 (1985), 393–404.

Альфэн <G.-H. Halphen> 106, 141
 Атья Д. <D. Atiyah> 14
 Атья М. <M. F. Atiyah> 5, 7, 130, 140

Бейтс <L. Bates> 119
 Бовиль <A. Beauville> 63, 140
 Богомольный Е. Б. 129, 140

Вейяберг <E. Weinberg> 132, 142
 Войтковски <M. Wojtkowski> 119

Гиббонз <G. Gibbons> 13, 14, 81, 119, 140, 141
 Гинзбург В. Л. 18
 Годдард <R. Goddard> 130, 132, 140
 Громол <D. Gromoll> 47, 140

Джаффе <A. Jaffe> 129, 130, 141
 Дирак <P. M. A. Dirac> 9, 20, 140
 Долд <R. K. Dodd> 140
 Доналдсон <S. Donaldson> 12, 14, 24, 25, 127, 132–136, 140

Карлеле <A. Karlhede> 136, 141
 Кларксон <P. Clarkson> 106
 Корриган <E. Corrigan> 130, 132, 140
 Крейги <N. S. Craigie> 140
 Кронхаймер <P. Kronheimer> 68, 141

Ландау Л. Д. 18
 Линдстрём <U. Lindström> 136, 141

Магнус <W. Magnus> 141
 Маккин <H. P. McKean> 127, 140

Мантон <N. S. Manton> 10, 11, 14, 19, 106, 119–121, 125, 127, 129, 130, 136, 141
 Мозер <J. Moser> 127, 140
 Молк <J. Molk> 142
 Монтгомери <R. Montgomery> 119
 Моррис <H. C. Morris> 140

Нам <W. Nahm> 58, 131–133, 136, 140, 141

Оберхеттингер <F. Oberhettinger> 141
 Огневский О. В. 6
 Оккендон <J. Ockendon> 14

Палла <L. Palla> 141
 Пенроуз <R. Penrose> 9, 11, 48, 49, 61, 130, 142
 Поляков А. М. 9
 Поуп <C. Pope> 13, 81, 141
 Прасад <M. K. Prasad> 9, 129, 130, 142

Росси <Rossi> 130
 Рочек <M. Roček> 136, 141

Саламон <S. Salamon> 11, 48, 142
 Сигал <G. B. Segal> 142
 Sommerfield <C. M. Sommerfield> 9, 129
 Сонн <R. Soni> 141

Таннери <J. Tannery> 142
 Таубс <C. Taubes> 11, 14, 29, 31, 33, 36, 38, 39, 57, 129, 130, 132, 136, 141, 142
 т'Хоофт <'t Hooft> 9

¹ Курсивом выделены номера страниц, отсылающие к списку литературы.—Прим. изд. ред.

Уилсон <G. Wilson> 142
 Уленбек <K. K. Uhlenbeck> 31, 32, 142
 Уорд <R. S. Ward> 29, 130, 140, 142
 Уртюбиз <J. Hurtubise> 12, 25, 50, 54,
 58, 59, 66, 69, 71, 72, 132, 135, 141

136, 140, 141
 Хорват <Z. Horvath> 141
 Чигер <J. Cheeger> 47, 140

Форгач <P. Forgács> 141

Эбин <D. Ebin> 11, 141
 Эйльбекк <J. C. Eilbeck> 140
 Эро <H. Airault> 127, 140

Хитчин <N. J. Hitchin> 5, 7, 130, 132,

автодуальная связность <self-dual connection> 19
 анзац <ansatz> 130

Богомольного - Прасада - Соммерфилда монополярное уравнение <BPS monopole> 9
 Богомольного уравнения <Bogomolny equations> 9, 20, 21
 -- линеаризованные <linearized ~ ~> 29
 болт <bolt> 89
 БПС <BPS> 9

геодезическая <geodesic> 125
 -- замкнутая <closed ~> 125
 Гиббонса - Поупа уравнения <Gibbons-Pope equations> 81, 101
 гильбертова схема <Hilbert scheme> 63
 Гинзбурга - Ландау уравнения <Ginzburg-Landau equations> 18
 гиперкэлерова метрика <hyperkähler metric> 37
 гиперкэлерово факторпространство <~ quotient> 42
 главная ось <main axis> 69

десингуляризация <desingularization> 63
 дюон <dyon> 120
 Дональдсона теорема <Donaldson's theorem> 24

заряд <charge> 20
 -- магнитный <magnetic ~> 22
 -- электрический <electric ~> 120, 123
 -- относительный <relative ~ ~> 120

калибровочная теория <gauge theory> 16
 КдФ теория <KdV theory> 126

-- уравнение <~ equation> 8
 ковариантная внешняя производная <covariant exterior derivative> 17
 кэлерова метрика <Kähler metric> 37

масса <mass> 36
 монополярное <monopole> 9, 138
 -- автодуальное <self-dual ~> 9
 -- БПС <BPS ~> 9
 -- Дирака <Dirac ~> 9, 20
 -- осесимметричный <axially symmetric ~> 45
 -- Прасада - Соммерфилда <Prasad-Sommerfield ~> 23
 мультимонополярное <multimonopole> 129

Нама комплекс <Nahm complex> 134
 -- уравнение <~'s equations> 139

отображение моментов <moment map> 42, 135

почти-комплексная структура <almost complex structure> 30
 прицельный параметр <impact parameter> 121
 пространство модулей <moduli space> 132

рассеяние <scattering> 24
 -- геодезических <~ of geodesics> 113
 рациональное отображение, ассоциированное с монополем <rational map associated to a monopole> 138
 результат <resultant> 26
 риманова метрика <Riemannian metric> на пространстве модулей 29

связанное состояние <bound state> 125

- симметрическая степень $\langle \text{symmetric product} \rangle$ 62
 солитон $\langle \text{soliton} \rangle$ 8
 соударение см. столкновение
 спектральная кривая $\langle \text{spectral curve} \rangle$ 25, 54, 131, 137
 — прямая $\langle \sim \text{line} \rangle$ 25
 спектральный радиус $\langle \sim \text{radius} \rangle$ 75
 столкновение (соударение) $\langle \text{collision} \rangle$ 120, 122
 тауб-НУТ-метрика $\langle \text{Taub-NUT-metric} \rangle$ 87
 твисторное пространство $\langle \text{twistor space} \rangle$ 48
 угловой момент $\langle \text{angular momentum} \rangle$ 113, 121
 угол рассеяния $\langle \text{scattering angle} \rangle$ 115
 фаза $\langle \text{phase} \rangle$ 22, 120
- Хиггса ось $\langle \text{Higgs axis} \rangle$ 69
 — поле $\langle \sim \text{field} \rangle$ 17
 центр $\langle \text{center} \rangle$ монополя 59
 частица $\langle \text{particle} \rangle$ 9, 120
 Чжэня (= Черна) класс $\langle \text{Chern class} \rangle$ 20
 Эйнштейна метрика $\langle \text{Einstein metric} \rangle$ 27
 — уравнения $\langle \sim \text{equations} \rangle$ 37
 Янга-Миллса теория $\langle \text{Yang-Mills theory} \rangle$ 16
 Янга-Миллса-Хиггса действие $\langle \text{Yang-Mills-Higgs action} \rangle$ 17
 — уравнения $\langle \sim \text{equations} \rangle$ 17
 A_1 -анзац $\langle A_1\text{-ansatz} \rangle$ 130
 k -монополь $\langle k\text{-monopole} \rangle$ 10, 69, 129

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

L'	51
M_k	22
M_k^0	23
N_k	22
R_k	24, 27
TP_1	25
Z_k	50
Σ_1	70
$\Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \Sigma_{23}$	70, 109

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	5
Предисловие	7
Введение	8
Глава 1. Уравнения, описывающие монополи	16
Глава 2. Геометрия пространств монополей	21
Глава 3. Метрика на пространствах монополей	29
Глава 4. Свойство гиперкэлеровости метрики	37
Глава 5. Твисторное описание	48
Глава 6. Частицы и симметрические произведения	62
Глава 7. Пространства 2-монополей	69
Глава 8. Спектральные радиусы и конформная структура	75
Глава 9. Антиавтотуальные уравнения Эйнштейна	81
Глава 10. Некоторые неравенства	90
Глава 11. Метрика на M_2^0	101
Глава 12. Свойства метрики на M_2^0	107
Глава 13. Геодезические на M_2^0	113
Глава 14. Рассеяние частиц	120
Глава 15. Сравнение с солитонами КдФ	126
Глава 16. Некоторые дополнительные сведения и исторические замечания	129
Литература	140
Именной указатель	143
Предметный указатель	145
Указатель обозначений	147

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, её оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».