

Behälter nur zum Theil sich entleeren, und suche das Verhältniss der Wassermengen in einer und derselben Zeit bei sinkenden und constantem Niveau.

In der Zeit:

$$t = \frac{2A}{ua\sqrt{2g}} \left[\sqrt{\bar{h}} - \sqrt{\bar{h}_1} \right]$$

sinkt das Wasser in dem Gefässe von dem Querschnitte A von der Druckhöhe $\bar{h}$ auf die Druckhöhe $\bar{h}_1$, wo a den Querschnitt der Bodenöffnung und u den Ausflusscoefficienten bezeichnen. Die in der Zeit ausgeflossene Wassermenge bei veränderlichem Spiegel ist daher:

$$M_0 = A(\bar{h} - \bar{h}_1) \dots \dots \dots \text{I.}$$

Bei constantem Niveau hingegen auf der Druckhöhe $\bar{h}$ fliesst in derselben Zeit t die Wassermenge:

$$M_c = \frac{2A[\sqrt{\bar{h}} - \sqrt{\bar{h}_1}]}{u \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \cdot a \cdot u \cdot \sqrt{2g\bar{h}}$$

oder die Quantität:

$$M_c = 2A(\bar{h} - \sqrt{\bar{h}\bar{h}_1}) \dots \dots \dots \text{II}$$

aus.

Die Ausdrücke I und II liefern die Relation:

$$\frac{M_0}{M_c} = \frac{\bar{h} - \bar{h}_1}{2[\bar{h} - \sqrt{\bar{h}\bar{h}_1}]}$$

oder:

$$\frac{M_0}{M_c} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}}} \right],$$

wenn die Division ausgeführt wird, und die weiteren Glieder ausser Acht bleiben. — Bei einem Versuche, welcher 35 Sekunden andauerte, und der Wasserspiegel von 50 cm. auf 45 cm. herabsank, erhielt ich das folgende Resultat:

$$\frac{1356}{1396} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{45}{50}} \right]$$

oder:

$$0,971 = 0,974.$$

Bei der Ausführung dieses Versuchs ist der Apparat zu den Versuchen über den Ausfluss der Flüssigkeiten zu gebrauchen, und die erhaltenen Wassermengen in Grammen abzuwiegen.

Abh. der Mathematik und Physik (Brünnst) 1872, Bd. 54

III.

Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

Par

V. G. Imshenetsky,
professeur à l'Université impériale de Kazan.

Traduit du russe par J. Hotel.

Avertissement.

La théorie des équations différentielles présente un ensemble si bien enchaîné, si rigoureusement logique, que la possibilité de résoudre chaque nouveau problème que l'on rencontre en s'élevant dans cette théorie tient à la manière plus ou moins complète dont on a résolu les problèmes d'ordre inférieur qui se sont posés précédemment. Cette liaison si étroite entre toutes les parties de la doctrine est un inconvénient, lorsque, dans une certaine catégorie de questions, il se présente des difficultés capables de résister longtemps aux efforts de l'Analyse mathématique; car un arrêt dans le développement d'une seule partie se fait ressentir dans tout le système, dont les diverses portions forment un ensemble organique. Mais cet inconvénient se change en avantage, chaque fois qu'un succès notable est obtenu sur un point quelconque de la théorie; un triomphe remporté sur un obstacle considérable entraîne quelquefois avec lui la chute d'autres obstacles, et imprime une impulsion sensible au développement de la théorie tout entière. C'est ainsi que les récents perfectionnements

des méthodes générales d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ont, d'une part, aidé à la constitution et à l'achèvement de la théorie des équations simultanées de forme canonique, tandis que, d'autre part, ils ont puissamment contribué aux progrès de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Une fois la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre définitivement établie, est arrivé naturellement le tour des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs, et c'est vers la solution de ce dernier problème que doivent tendre maintenant les efforts des géomètres. Par suite de la liaison organique qui existe entre toutes les parties de la théorie des équations différentielles, ainsi qu'entre les subdivisions de chaque partie, il se manifeste une analogie et une unité remarquables dans les méthodes de solution des questions qu'elle embrasse, quelle que soit la diversité de leur nature. Il s'ensuit de là que, lorsque l'analyste rencontre une question dont la solution, poussée déjà jusqu'à un certain point, se trouve arrêtée à cette période de son développement, il doit, avant tout, chercher à se rendre compte du chemin qu'on a suivi pour parvenir jusque là, surtout quand ce chemin a été frayé par des hommes tels que d'Alembert, Euler, Laplace, Lagrange, Monge, Ampère.

En effet, l'étude attentive de ce qui a été déjà fait peut montrer quelquefois que le succès ultérieur dépend bien moins de l'invention de nouvelles méthodes, que d'une application plus complète et plus générale des méthodes anciennes.

La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs se divise en deux parties. Dans la première, on considère les équations de formes compliquées, et l'on cherche soit à déterminer leurs intégrales générales sous forme finie, soit à réduire les équations proposées aux formes les plus simples parmi celles dont les intégrales ne sont pas susceptibles d'expressions finies. Dans la seconde, on s'occupe de ces équations simplifiées et des méthodes pour les intégrer, à l'aide soit des séries, soit des intégrales définies.

Dans le présent Mémoire, je traite les questions relatives à chacune des deux parties de la théorie, dans le cas des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. En donnant le résumé succinct, mais aussi complet que possible, des principales méthodes de résolution des problèmes de cette catégorie, je pense avoir comblé une lacune qui existe

dans les Traités systématiques de calcul intégral. La plupart des auteurs se bornent, en effet, à exposer la méthode de Monge; quelquefois les Ouvrages plus complets contiennent aussi les méthodes d'Euler et de Laplace. Mais aucun, à ma connaissance, ne fait mention des travaux d'Ampère sur ce sujet, publiés dans les *Cahiers XVII et XVIII du Journal de l'Ecole Polytechnique*. Les recherches d'Ampère, qui comprennent la théorie des intégrales et les méthodes d'intégration pour des cas qui échappent à la méthode de Monge, devraient occuper une place considérable dans tout cours sérieux de Calcul intégral, tandis qu'ordinairement, comme je viens de le dire, on expose la méthode de Monge, quelquefois avec des changements de forme plus ou moins heureux. L'oubli dans lequel on laisse le beau travail d'Ampère est dû sans doute en partie au mode de rédaction de ses deux volumineux Mémoires, qui ne se prêtent pas aisément à une exposition succincte; j'ai fait cependant tous mes efforts pour atteindre ce but. J'ai trouvé moyen, dans le courant de mon exposition, d'intercaler les résultats de mes propres recherches à la place indiquée par l'ordre des questions.

Parmi ces résultats, je me permettrai de signaler un essai de généralisation de la méthode de Laplace (Chap. II, § 9), et une forme nouvelle que j'ai donnée à l'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires (Chap. IV). Le lecteur familier avec ce sujet ne pourra manquer de reconnaître facilement les passages, moins importants, où je m'écarte de mes auteurs, que j'ai partout cités avec soin dans les Notes au bas des pages.

Chapitre I^{er}.

Théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles.

§ 1.

1. Les procédés d'intégration de chaque classe d'équations différentielles sont fondés sur la manière dont nous nous représentons, d'une part, la forme et la composition de leurs intégrales, et d'autre part, la marche et les diverses circonstances caractéristiques de la formation des équations différentielles considérées au moyen de leurs intégrales. En effet, la méthode pour intégrer une équation différentielle doit consister en général à parcourir en sens inverse le chemin qui, d'après la supposition qu'on a faite sur la forme de l'intégrale, a dû conduire à cette équation différentielle. Quoique cette marche inverse soit généralement beaucoup plus difficile que la marche directe, elle est cependant facilitée par la connaissance des particularités de celle-ci et de son but final. En nous guidant sur cette analogie, nous commencerons, avant d'exposer les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, par donner la théorie de leurs intégrales.

2. Malgré notre désir d'éviter l'introduction de notations qui ne seraient pas consacrées par l'usage ordinaire, nous serons contraints quelquefois de nous départir de cette règle, et dès maintenant nous établirons une convention, qui n'offrira d'ailleurs aucune difficulté. Si nous représentons, par exemple, par la lettre u une fonction, explicite ou implicite, des deux variables x, y , nous désignerons par $u_x^{(i)}$ la dérivée partielle de cette fonction, obtenue en la différentiant dans un ordre quelconque, i fois par rapport à x , et k fois par rapport à y ; en sorte que les indices de différentiations par rapport à x et à y seront toujours écrits à droite de la lettre u , le premier en haut, le second en bas. Quand, à la place des variables x, y , il nous arrivera d'introduire, en vertu d'une relation quelconque entre x, y et z , les nouvelles variables indépendantes z, α , ou encore, d'introduire, en vertu de deux relations distinctes entre x, y, α, β , les nouvelles variables indépendantes α, β ; nous emploierons alors, dans ces deux cas, pour désigner les dérivées partielles de la fonction u , les notations habituelles

$$u_x + k u_y, \quad u_{x^2} + k u_{xy} + k^2 u_{y^2},$$

Il est à peine besoin d'ajouter que, dans ces hypothèses différentes, relatives aux variables indépendantes, on ne devra pas considérer comme égales des dérivées partielles telles que

$$u_x^{(i)} \text{ et } \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \quad u_{x^k y}^{(i)} \text{ et } \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}, \text{ etc.} \dots$$

3. En appliquant la convention précédente, et désignant par z une fonction des deux variables indépendantes x et y , et par F une expression composée d'une manière connue au moyen des quantités qui entrent sous ce signe, nous pourrions représenter les équations aux dérivées partielles, du second ordre sous la forme générale

$$(1) \quad F(x, y, z, z_x', z_y', z_{xx}'', z_{xy}'', z_{yy}'') = 0;$$

et parallèlement, l'équation générale aux dérivées partielles de l'ordre m sera représentée par

$$(2) \quad F(x, y, z, z_x', z_y', z_{xx}'', z_{xy}'', z_{yy}'', \dots, z_{x^m y}^{(m-1)}, \dots, z_{x y^{m-1}}^{(m-1)}, z_{y^m}) = 0.$$

Pour obtenir des résultats aussi généraux que possible et indépendants de l'ordre de l'équation, étudions les propriétés caractéristiques des intégrales de l'équation (2) d'ordre quelconque m .

L'équation (2) peut être considérée comme une condition donnée pour la détermination de la fonction inconnue z ; et comme, en dehors de cette condition, nous ne connaissons aucune autre condition complémentaire, la fonction z sera déterminée par cette condition de la manière la plus générale, si elle satisfait à cette condition et à toutes les conséquences qui en découlent immédiatement. Les conséquences de l'équation (2) sont en nombre infini, et s'obtiennent en différentiant cette équation autant de fois qu'on voudra par rapport à x et à y . D'ailleurs, la variable z doit être déterminée en fonction de x et de y ; par conséquent, la solution cherchée devra se présenter sous la forme d'une équation entre x, y, z , ou d'un système d'équations entre ces quantités, et d'autres variables, équations qui finalement se réduisent à une seule équation entre x, y, z . En partant de ces considérations, on pourra définir comme il suit la solution ou l'intégrale la plus générale de l'équation (2).

4. On appelle intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles de l'ordre m une équation ou un système d'équations entre les variables du problème x, y, z , jouissant de la propriété suivante: que si, d'une part, on prend les équations intégrales et toutes leurs dérivées par rapport à x et à y , jusqu'à l'ordre m inclusivement, n étant un nombre arbitraire, non moindre que m ; et si, d'autre part, on prend l'équation donnée (2) et toutes ses dérivées

par rapport à x et à y , jusqu'à l'ordre $n-m$ inclusivement; le premier système devra établir, entre les variables x, y , la fonction z de ces variables, et les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre n , les mêmes relations, et celles-là seulement, qui sont exprimées par le second système d'équations.

Si, tout en remplissant les conditions dont nous venons de parler, le premier système d'équations donne, outre cela, entre les variables x, y, z et les dérivées de z , des relations non renfermées dans le second système d'équations, alors l'intégrale sera ou particulière ou singulière. Une intégrale particulière se tire, comme cas particulier, de l'intégrale générale, et par une généralisation convenable on peut en déduire l'intégrale générale. Une intégrale singulière ne jouit pas de ces propriétés.

Les intégrales dont il s'agit sont supposées ne pas contenir de dérivées de la fonction z ; on peut, d'après cela, les appeler des intégrales primitives. Si dans une intégrale il entre des dérivées de z , on pourra toujours reconnaître si elle est générale, au moyen de la règle précédente, convenablement modifiée. Qu'une telle intégrale soit, ou non, générale, on pourra, dans tous les cas, lui donner le nom d'intégrale intermédiaire, puisqu'elle peut être considérée comme une équation différentielle par l'intégration de laquelle on peut obtenir l'intégrale primitive.

§ 2.

5. Éclaircissons par des exemples simples les définitions données plus haut et les propriétés des équations aux dérivées partielles. Soit l'équation du second ordre

$$(3) \quad z_{,11} - m z'' = 0,$$

m étant une constante donnée. Son intégrale générale peut être représentée par le système des équations

$$(4) \quad z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \alpha = x + y\sqrt{m}, \quad \beta = x - y\sqrt{m},$$

ou, en éliminant α et β , par l'équation unique

$$(5) \quad z = \varphi(x + y\sqrt{m}) + \psi(x - y\sqrt{m}),$$

φ et ψ désignant des fonctions entièrement arbitraires.

En effet, la valeur précédente de z satisfait à l'équation donnée et à toutes les équations de la forme

$$(6) \quad z_{,k+2}^{(1)} - m z_{,k+2}^{(2)} = 0,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation donnée i fois par rapport à x , et k fois par rapport à y . Et comme l'équation (5) ne fournit aucune autre relation entre les dérivées de z , que celles qui sont exprimées par les équations (6), il s'ensuit de là qu'elle représente l'intégrale générale de l'équation (3).

6. Prenons maintenant cette autre expression

$$(7) \quad z = a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2,$$

a, b, c, h, g désignant des constantes arbitraires. Il est aisé de s'assurer qu'elle satisfait aussi à l'équation donnée (3) et à toutes ses conséquences (6); mais, outre cela, l'expression (7) donne encore d'autres relations entre les dérivées de z ; et en effet, toutes ces dérivées, à partir du troisième ordre, sont égales entre elles, puisqu'elles se réduisent à zéro. Par conséquent, l'équation (7) ne représente qu'une intégrale particulière de l'équation (3). Cette intégrale particulière est remarquable en ce qu'elle renferme précisément autant de constantes arbitraires qu'il existe de dérivées de z depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre de l'équation donnée, c'est-à-dire cinq. Par suite, si l'on prend l'équation intégrale et toutes ses dérivées jusqu'au second ordre inclusivement, on aura précisément autant d'équations qu'il en faut pour éliminer toutes les constantes. D'après cette propriété, une telle intégrale particulière a reçu de Lagrange le nom d'intégrale complète. Il est évident que l'intégrale complète d'une équation du même ordre doit contenir $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)-1$ constantes arbitraires.

7. Une intégrale particulière, comme l'indique son nom, doit pouvoir se tirer, comme cas particulier, de l'intégrale générale. Pour le vérifier sur l'exemple précédent, introduisons, dans l'équation (7), α et β à la place de x et de y , au moyen des deux dernières équations du système (4). Il viendra

$$z = a + \frac{b}{2}(\alpha + \beta) + \frac{c}{2\sqrt{m}}(\alpha - \beta) + \frac{h}{4}(\alpha + \beta)^2 + \frac{g}{4\sqrt{m}}(\alpha^2 - \beta^2) + \frac{h}{4}(\alpha - \beta)^2,$$

et cette équation se déduira de l'équation (5) en donnant aux fonctions arbitraires les valeurs particulières

$$\varphi(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} \left(b + \frac{c}{\sqrt{m}} \right) \alpha + \frac{1}{2} \left(h + \frac{g}{2\sqrt{m}} \right) \alpha^2,$$

$$\psi(\beta) = \frac{1}{2} \left(b - \frac{c}{\sqrt{m}} \right) \beta + \frac{1}{2} \left(h - \frac{g}{2\sqrt{m}} \right) \beta^2.$$

8. Mais la relation reciproque entre les intégrales (3) et (7), en vertu de laquelle on peut, de l'intégrale particulière, dite complète, tirer par une généralisation convenable, l'intégrale générale, est encore plus importante. Lagrange (*) a fondé cette transformation sur la variation des constantes arbitraires. Sa méthode peut s'exposer sous une forme générale, de la manière suivante.

Soit

$$V = 0$$

une intégrale complète de l'équation (1), V renfermant x, y, z et cinq constantes arbitraires a, b, c, g, h . Tirons de là les équations

$$z' = P, \quad z, = Q.$$

Ensuite, pour passer à l'intégrale générale, supposons que a, b, c, g, h représentent des fonctions de x, y, z , qui doivent être déterminées de manière que les différentielles totales des expressions V, P, Q conservent identiquement la même forme qu'elles avaient, lorsque a, b, c, g, h représentaient des grandeurs constantes. Pour cela, il suffira d'égaliser à zéro les différentielles de V, P, Q , prises en faisant varier a, b, c, g, h , ce qui fournira trois équations linéaires et homogènes par rapport à da, db, dc, dg, dh . Entre ces équations éliminons deux quelconques des cinq différentielles, et, dans le résultat de l'élimination, égalons à zéro les coefficients des trois différentielles restantes; nous aurons ainsi trois équations pour déterminer les cinq quantités a, b, c, g, h . D'après cela, deux des cinq quantités considérées resteront indéterminées, et nous pourrions les représenter par des fonctions arbitraires des trois autres; toutefois, en cela, nous devrions procéder de telle sorte, que finalement les valeurs des cinq quantités a, b, c, g, h s'expriment toutes en fonction de x, y, z . Il suffira ensuite de combiner les expressions trouvées avec l'équation $V = 0$, pour avoir l'intégrale générale.

(*) Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1774, p. 266. — Oeuvres, tome IV, p. 98.

9. Pour appliquer cette méthode à l'exemple considéré, remarquons que l'on a

$$V = -z + a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2,$$

$$z' = P = b + 2hx + gy,$$

$$z, = Q = c + gx + 2mhy.$$

Par suite, en égalant à zéro les différentielles de V, P, Q relatives à la variation de a, b, c, g, h , on trouve, pour déterminer ces dernières quantités, les trois équations

$$da + xdb + ydc + x^2dh + xydg + my^2dh = 0,$$

$$db + 2xch + ydg = 0,$$

$$dc + xdg + 2mydh = 0.$$

Les deux dernières équations peuvent être remplacées par deux autres, qui leur sont équivalentes. Pour cela, multiplions la première par un facteur indéterminé μ , et l'ajoutons ensuite à la seconde; il viendra

$$\mu db + dc + x(2\mu ch + dg) + \mu y \left(2\frac{m}{\mu} dh + dg \right) = 0.$$

On peut déterminer μ de manière que l'on ait $\mu = \frac{m}{\mu}$, d'où l'on tire les deux valeurs $\mu = \pm \sqrt{m}$. D'après cela, au lieu des deux dernières équations du système précédent, on pourra prendre ces deux-ci:

$$dc + \sqrt{m}.db + (x + \sqrt{m}.y)(dg + 2\sqrt{m}.dh) = 0,$$

$$dc - \sqrt{m}.db + (x - \sqrt{m}.y)(dg - 2\sqrt{m}.dh) = 0.$$

Dans la première de ces équations, il n'entre que les différentielles des variables

$$c + \sqrt{m}.b, \quad g + 2\sqrt{m}.h,$$

et dans la seconde, il n'entre que les différentielles des variables

$$c - \sqrt{m}.b, \quad g - 2\sqrt{m}.h;$$

et rien n'empêche de supposer la première de ces variables égale à une fonction arbitraire de la seconde, et la troisième égale à une fonction arbitraire de la quatrième. En désignant donc par ω et π

des fonctions arbitraires, et par ω' , π' leurs dérivées par rapport à leurs arguments respectifs, on aura

$$\begin{aligned} c + \sqrt{m}.b &= \omega(g + 2\sqrt{m}.h), \\ c - \sqrt{m}.b &= \pi(g - 2\sqrt{m}.h), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} dc + \sqrt{m}.db &= \omega'(g + 2\sqrt{m}.h).(dg + 2\sqrt{m}.dh), \\ dc - \sqrt{m}.db &= \pi'(g - 2\sqrt{m}.h).(dg - 2\sqrt{m}.dh). \end{aligned}$$

Par suite, les équations précédentes prennent la forme

$$\begin{aligned} \omega'(g + 2\sqrt{m}.h) + (x + \sqrt{m}.y) &= 0, \\ \pi'(g - 2\sqrt{m}.h) + (x - \sqrt{m}.y) &= 0. \end{aligned}$$

Comme ω' , π' sont des fonctions arbitraires, si l'on désigne par Ω , Π deux autres fonctions arbitraires, on aura, d'après ces équations,

$$\begin{aligned} g + 2\sqrt{m}.h &= \Omega(x + \sqrt{m}.y), \\ g - 2\sqrt{m}.h &= \Pi(x - \sqrt{m}.y), \\ x + \sqrt{m}.y &= \alpha, \quad x - \sqrt{m}.y = \beta, \\ g + 2\sqrt{m}.h &= \Omega(\alpha), \\ g - 2\sqrt{m}.h &= \Pi(\beta), \end{aligned}$$

ou, en posant $x + \sqrt{m}.y = \alpha$, $x - \sqrt{m}.y = \beta$,

et en même temps les équations différentielles précédentes prennent la forme

$$\begin{aligned} da + \sqrt{m}.db &= -\alpha.d\Omega(\alpha), \\ dc - \sqrt{m}.db &= -\beta.d\Pi(\beta). \end{aligned}$$

Au moyen des quatre dernières équations on trouvera les valeurs suivantes de quatre des quantités cherchées,

$$\begin{aligned} g &= \frac{\Omega(\alpha) + \Pi(\beta)}{2}, & h &= \frac{\Omega(\alpha) - \Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}, \\ c &= -\frac{\int \alpha.d\Omega(\alpha) + \int \beta.d\Pi(\beta)}{2}, & b &= -\frac{\int \alpha.d\Omega(\alpha) - \int \beta.d\Pi(\beta)}{2\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs et les expressions

dans la première des équations de condition, il vient, toutes réductions faites,

$$da = \frac{\alpha^2.d\Omega(\alpha) - \beta^2.d\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}},$$

et, en intégrant, on trouve, pour la valeur de la dernière inconnue,

$$a = \frac{\int \alpha^2.d\Omega(\alpha) - \int \beta^2.d\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}.$$

10. L'ensemble de l'équation (7) et de celles qui représentent les valeurs de a , b , c , g , h , x , y constitue déjà l'intégrale générale. Mais, si l'on veut représenter celle-ci par une seule équation, il faut alors substituer dans l'équation (7) les valeurs de a , b , c , g , h , x , y . On trouve de cette manière, après réduction,

$$z = \frac{\int \alpha^2.d\Omega(\alpha) - 2c\alpha.d\Omega(\alpha) + \alpha^2\Omega(\alpha)}{4\sqrt{m}} - \frac{\int \beta^2.d\Pi(\beta) - 2\beta\beta.d\Pi(\beta) + \beta^2\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}.$$

Mais cette expression de z se simplifie encore au moyen de l'intégration par parties, et prend la forme suivante,

$$z = \frac{\int \alpha d\Omega(\alpha) d\alpha - \int \beta d\Pi(\beta) d\beta}{2\sqrt{m}}.$$

Enfin, on peut, si l'on veut, en profitant de ce que les fonctions Ω , Π sont arbitraires, poser

$$\Omega(\alpha) = 2\sqrt{m} \frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}, \quad \Pi(\beta) = -\sqrt{m} \frac{d^2\psi(\beta)}{d\beta^2},$$

φ et ψ designant des fonctions arbitraires; par suite de cela, l'intégrale générale prendra la forme

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \alpha = x + \sqrt{m}.y, \quad \beta = x - \sqrt{m}.y,$$

sous laquelle elle a été donnée plus haut.

11. La méthode de la variation des constantes arbitraires, pour la classe d'équations que nous considérons, n'a pas moins d'importance que pour les autres cas, où elle a servi à trouver des procédés généraux d'intégration. Mais son inventeur, Lagrange, n'ayant pas

découvert la forme la plus commode pour l'application de cette méthode dans le cas considéré, ne l'a pas appréciée à sa juste valeur^(*). Ampère a fait de cette méthode une application beaucoup plus heureuse, comme nous le ferons voir à la fin du présent Mémoire, où nous proposerons une généralisation encore plus grande de ces procédés, et où nous donnerons des formules en vertu desquelles la méthode de la variation des constantes arbitraires se présentera comme le plus général des moyens d'intégration pour la classe d'équations considérée.

12. Examinons maintenant comment la méthode de Lagrange s'applique aux intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles. Représentons par

$$V = 0$$

une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$F = 0.$$

Si elle contient des dérivées de z de l'ordre $k < m$, nous l'appellerons une intégrale intermédiaire de l'ordre k . L'équation $V = 0$, avec toutes ses dérivées par rapport à x et à y , jusqu'à l'ordre $m - k$, forme un système d'équations, dont le nombre est égal à $\frac{1}{2}(m - k)(m - k + 1)$. Par suite, si l'intégrale $V = 0$ est particulière, alors le plus grand nombre de constantes arbitraires qu'elle puisse contenir, pour que, par leur élimination du système en question, on obtienne l'équation donnée $F = 0$, sera $\frac{1}{2}(m - k)(m - k + 1) - 1$. A cette condition, l'intégrale intermédiaire est dite complète.

13. D'après cela, les intégrales intermédiaires d'une équation aux dérivées partielles du second ordre ne peuvent être que du premier ordre, et une intégrale complète $W = 0$ d'une telle équation doit renfermer deux constantes arbitraires, soit a et b . Pour passer de cette intégrale complète à l'intégrale générale du premier ordre, il faut considérer a et b comme des fonctions de x, y, z, z', z'' , déterminées de façon que la différentielle complète de W conserve encore, dans cette hypothèse, une forme identique à celle qu'elle avait, lorsque a et b étaient des constantes. En égalant à zéro la

(*) "Au reste, on voit par cet exemple, qui est d'ailleurs un des plus simples, que la méthode dont il s'agit, quoique directe et générale, est en quelque façon plus curieuse qu'utile, à cause des difficultés qui peuvent se rencontrer dans l'intégration des équations de condition." (Lagrange, *Mémoire cité plus haut*, p. 269. — Œuvres, tome IV, p. 101.)

différentielle de W , prise en ayant égard à la variation de a et de b , nous aurons pour unique équation de condition

$$\frac{\partial W}{\partial a} da + \frac{\partial W}{\partial b} db = 0,$$

équation qui doit servir à déterminer les fonctions a et b . Comme il n'y entre que les différentielles des deux seules variables a et b , on pourra prendre pour la seconde de ces quantités une fonction arbitraire de la première, en posant $b = \varphi(a)$. En conséquence, l'équation de condition précédente prendra la forme

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial b} \varphi'(a) = 0,$$

et, jointe aux équations

$$b = \varphi(a), \quad W = 0,$$

elle représentera l'intégrale générale de l'équation donnée.

Ainsi, par exemple, l'intégrale complète du premier ordre de l'équation (2) est

$$z_1 + \sqrt{m} \cdot z' = a + b(x + \sqrt{m} \cdot y).$$

En la généralisant, on posera

$$da + (x + \sqrt{m} \cdot y) db = 0, \quad b = \varphi(a),$$

d'où

$$1 + (x + \sqrt{m} \cdot y) \varphi'(a) = 0,$$

ou

$$\varphi'(a) = -\frac{1}{x + \sqrt{m} \cdot y}.$$

Par suite, a est une fonction arbitraire de $x + \sqrt{m} \cdot y$; mais b est une fonction arbitraire de a et aussi, par conséquent, de $x + \sqrt{m} \cdot y$; donc $a + b(x + \sqrt{m} \cdot y)$ est également une fonction arbitraire de $x + \sqrt{m} \cdot y$. Ainsi l'intégrale générale du premier ordre de l'équation (1) sera

$$z_1 + \sqrt{m} \cdot z' = \omega(x + \sqrt{m} \cdot y),$$

en désignant par ω une fonction arbitraire. Au moyen de cette intégrale, il est maintenant facile d'obtenir l'intégrale générale primitive.

14. On voit par là que l'application de la méthode de Lagrange aux intégrales complètes intermédiaires des équations du second ordre

est considérablement simplifiée par cette circonstance, que, pour la détermination des fonctions a et b , on n'a qu'une seule équation de condition. Il peut sembler, d'après cela, que, au lieu d'appliquer cette méthode immédiatement à l'intégrale complète primitive, il serait beaucoup plus simple de déduire de celle-ci une intégrale complète du premier ordre, et d'appliquer ensuite à cette dernière la méthode de la variation des constantes arbitraires. Cependant, en suivant cette voie, il se présente une difficulté: l'intégrale complète primitive renferme cinq constantes arbitraires, et, jointe à ses deux dérivées du premier ordre, donne en tout trois équations, entre lesquelles il est, en général, impossible d'éliminer trois constantes, pour obtenir une intégrale complète du premier ordre, laquelle ne doit contenir que deux constantes.

Ainsi il s'ensuit de là qu'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles n'entraîne pas, à la façon d'une intégrale complète d'une équation différentielle ordinaire, comme conséquence algébrique nécessaire, l'existence des intégrales complètes intermédiaires. Une circonstance plus digne encore de remarque, c'est que, parmi les équations aux dérivées partielles, il s'en trouve qui n'admettent pas du tout d'intégrales intermédiaires. Pour confirmer cette remarque, il nous suffira de la vérifier sur un exemple simple.

15. Soit donnée l'équation

$$z'_1 = x.$$

Supposons qu'à cette équation corresponde une intégrale du premier ordre que nous pourrions, sans restreindre la généralité, représenter sous la forme

$$z' = f(x, y, z, z_1).$$

D'après cela, l'équation donnée pourra être considérée comme une conséquence algébrique de la dernière équation et de ses deux équations dérivées

$$(b) \quad z'_1 = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial z} z_1,$$

$$(c) \quad z'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial z_1} z'_1,$$

et par suite, dans ce système, on pourra remplacer l'une ou l'autre des équations (b), (c) par l'équation proposée. Mais, si l'on tirait des équations (b), (c) les valeurs de deux des quantités z'' , z'_1 , z''_1 , et qu'on substituât de nouveau ces valeurs dans ces mêmes équations,

on obtiendrait évidemment des identités. Par suite, on obtiendra, absolument de la même manière, une identité comme résultat de la substitution de ces valeurs dans l'équation donnée.

En mettant, dans l'équation donnée, pour z'_1 sa valeur tirée de l'équation (b), il vient

$$(d) \quad \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial z} z_1 = z.$$

En vertu de ce qui précède, cette équation doit être identique, du moment que l'équation donnée admet une intégrale du premier ordre. Dans l'identité supposée, le terme en z_1 ne peut se réduire avec aucun autre; donc on a

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$

c'est-à-dire que f ne renferme pas z_1 . Dans ce cas, le terme en z , n'en a plus d'autre semblable à lui, et l'on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc f ne peut contenir que x et y . Mais alors l'égalité entre $\frac{\partial f}{\partial y}$ et z , à laquelle se réduit finalement la condition (d), ne peut subsister. Par conséquent, l'équation considérée ne saurait admettre une intégrale du premier ordre (*).

16. Le raisonnement précédent, quoique développé sur un exemple particulier, n'en a pas moins une généralité suffisante. En l'appliquant à certains cas, comme on l'a fait tout à l'heure, on se convainc de l'impossibilité de l'existence d'une intégrale intermédiaire; dans d'autres cas, on est conduit à plusieurs équations simultanées aux dérivées partielles de la fonction f , non contradictoires entre elles. Quelquefois, en effet, par cette voie, l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre conduit à l'intégration d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Mais nous nous bornerons ici à cette indication, notre dessein étant de passer maintenant à l'exposition des principales propriétés des intégrales générales, sur lesquelles sont fondées d'autres méthodes plus générales pour l'intégration de la classe d'équations considérée.

(*) Raabe, Differenzial- und Integralrechnung. Bd. III. § 704.

§. 3.

17. Les propriétés fondamentales de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles découlent de sa détermination, donnée plus haut (§ 1). Nous avons vu que l'intégrale générale peut être représentée par un système de plusieurs équations, conduisant finalement à une seule équation entre les variables du problème x, y, z . Soit donc

$$V = 0$$

une équation entre x, y, z et certaines quantités arbitraires, dont le nombre et la nature sont encore inconnus, laquelle représente l'intégrale générale de l'équation (2) aux dérivées partielles de l'ordre m . Occupons nous de déterminer le caractère principal et le nombre de ces quantités arbitraires, et déduire les diverses circonstances qui peuvent se présenter dans le passage de l'intégrale générale à l'équation différentielle correspondante.

18. En désignant par n un nombre non moindre que m , et joignant à l'équation intégrale générale toutes ses dérivées par rapport à x et à y , jusqu'à l'ordre n inclusivement, on formera un système d'équations, que nous pourrions représenter comme il suit, d'après le système de notations que nous avons adopté,

$$(A) \quad \begin{cases} V = 0, \\ V' = 0, & V_1 = 0, \\ V'' = 0, & V'_1 = 0, & V_{11} = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ V^{(n)} = 0, & V^{(n-1)} = 0, & \dots, & V_{n-1} = 0, & V_n = 0. \end{cases}$$

Pareillement, avec l'équation (2) et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-m$, on formera le système d'équations

$$(B) \quad \begin{cases} F = 0, & F_1 = 0, \\ F' = 0, & F'_1 = 0, \\ F'' = 0, & F''_1 = 0, & F_{11} = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ F^{(n-m)} = 0, & F^{(n-m-1)} = 0, & \dots, & F'_{n-m-1} = 0, & F_{n-m} = 0. \end{cases}$$

Les équations (A), d'après la définition de l'intégrale générale, ne doivent fournir, entre

$$x, y, z, x', y', z', \dots, x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)},$$

que des relations identiques à celles qui se déduisent des équations (B).

Mais dans le système (A) on a $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ équations, tandis qu', dans le système (B), il ne s'en trouve que $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$. Donc le premier de ces deux systèmes peut, et même doit renfermer des quantités arbitraires, qui n'entrent pas dans le second, et dont le nombre ne doit pas être moindre que la différence des deux nombres $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ et $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$, laquelle est

$$(C) \quad (n+1)m - \frac{1}{2}m(m-1).$$

Dans ce cas seulement il est possible de rendre, par l'élimination des quantités arbitraires, les systèmes (A) et (B) complètement identiques entre eux. En considérant le nombre (C), qui indique la limite inférieure du nombre des quantités arbitraires dans les équations (A), on remarque qu'il n'est pas constant, mais qu'il croît, au contraire, en même temps que n . Donc, relativement à la nature des quantités arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, nous sommes en droit de poser cette conclusion:

Une intégrale finie d'une équation aux dérivées partielles doit, pour être générale, renfermer des quantités arbitraires dont le nombre croît par la différentiation répétée de l'intégrale.

19. L'analyse mathématique ne fournit que deux formes d'expressions des quantités arbitraires, qui satisfassent à la condition précédente.

A la première forme appartiennent les fonctions arbitraires d'arguments exprimés par des fonctions déterminées des variables principales, par rapport auxquelles se fait la différentiation. Ainsi, par exemple, pour l'équation

$$z_{xx} - mz'' = 1,$$

nous avons en l'intégrale générale

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \alpha = x + y\sqrt{m}, \quad \beta = x - y\sqrt{m},$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires des arguments respectifs α et β , donnés en fonctions explicites de x et de y .

Mais les arguments qui entrent sous les signes de fonctions arbitraires dans l'intégrale générale s'expriment aussi quelquefois par des fonctions implicites des variables principales, et cela, de telle sorte que ces expressions varient en même temps que la forme des fonctions arbitraires. On en trouve un exemple dans l'équation

$$(z'' - z'z_{xx})^2 = z'_x z''_{xx} z''_{yy},$$

dont l'intégrale est

$$\begin{cases} z = \frac{x\alpha^4 - 2\alpha^2y + 4\alpha^3\varphi(\alpha)}{3} - 4\int \alpha^3\varphi(\alpha)d\alpha + \psi(\beta), \\ y = \alpha^2\left(x + \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right), \\ \beta = \frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi(\alpha), \end{cases}$$

comme on peut s'en assurer par la vérification. Il entre dans cette expression deux fonctions arbitraires φ et ψ , dont les arguments respectifs α et β sont donnés sous forme de fonctions implicites de x et de y , déterminées au moyen des deux dernières équations de l'intégrale, de telle sorte que leurs expressions varient avec la forme de la fonction φ .

20. Il y a encore une autre forme possible pour les expressions analytiques des quantités arbitraires de l'intégrale générale, qui satisfait également à la condition énoncée plus haut. Pour nous faire une idée de cette forme, concevons l'intégrale, définie ou indéfinie, une expression renfermant une fonction arbitraire, combinée avec certaines quantités variables, dont une seule — celle dont la différentielle multiplie cette expression — est considérée comme variable, tandis que les autres sont supposées constantes dans cette opération. L'exécution d'une telle intégration peut être appelée, d'après Ampère, par analogie avec la différentiation partielle, une intégration partielle, et son résultat sera désigné sous le nom d'intégrale partielle ou de quadrature partielle.

Comme, dans une intégrale partielle, toutes les quantités, autres que la variable d'intégration, sont considérées comme constantes, on obtiendra, en les différentiant par rapport à ces constantes, d'autres intégrales partielles, différentes en général de la première, et qui, par conséquent, se trouvant dans les équations (A), doivent être elles-mêmes éliminées individuellement.

Pour faire mieux comprendre ce que sont les expressions de cette forme, prenons des exemples particuliers. L'intégrale générale de l'équation

$$z'' = z,$$

peut être représentée sous la forme

$$z = \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi(x + 2u\sqrt{y})e^{-u} du.$$

Il y entre l'intégrale partielle définie d'une expression, dans laquelle φ désigne une fonction arbitraire, et u la variable d'intégration, tandis que les variables indépendantes x, y de l'équation donnée figurent dans cette intégrale comme des paramètres arbitraires.

L'équation

$$z'' - z_u + \frac{4}{x+y}z' = 0$$

a pour intégrale générale

$$z = 2\alpha \int_{\alpha}^{2x} e^{\frac{2x}{\alpha}} \varphi(\alpha - 2x)\alpha d\alpha + \psi(\alpha),$$

$$\alpha = x + y,$$

e étant la base des logarithmes népériens, φ et ψ des signes de fonctions arbitraires, x la variable d'intégration dans l'intégrale partielle indéfinie, et la quantité $\alpha = x + y$ étant considérée, pendant l'intégration, comme un paramètre constant.

21. Les intégrales générales des équations aux dérivées partielles qui contiennent des fonctions arbitraires, mais dans la composition desquelles il n'entre point d'intégrales partielles, forment une classe comparativement plus simple, et qui présente des traits caractéristiques mieux déterminés. Leur simplicité relative consiste en ce que, quand on les différentie par rapport aux variables autres que les arguments $\alpha, \beta, \dots$ des fonctions arbitraires, elles ne fournissent pas d'autres quantités arbitraires que celles qui sont déjà renfermées dans les équations de l'intégrale; ce qui, comme on l'a remarqué plus haut, peut ne pas avoir lieu relativement aux intégrales partielles. Leur trait caractéristique constant, comme nous le démontrerons plus bas, consiste en ce que le nombre des fonctions arbitraires indépendantes qu'elles contiennent est toujours égal à l'ordre des équations différentielles auxquelles appartiennent ces intégrales.

Ampère a formé avec ces intégrales une classe spéciale qu'il appelle la première classe. Cette dénomination n'est peut-être pas très-juste, parce qu'elle pourrait faire croire qu'après la première classe il en doit venir une seconde, tandis que la classification ne se poursuit pas plus loin. Il semble préférable, d'après cela, d'adopter pour ces intégrales la dénomination d'intégrales générales sans quadratures partielles.

22. Nous représenterons le type général d'une intégrale de cette classe, correspondante à une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre,

sous la forme d'un système d'équations, en nombre $k+1$ provisoirement indéterminé, et renfermant:

1°. Outre les variables principales x, y, z , les k quantités variables

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots;$$

2°. Un nombre g , provisoirement indéterminé, de fonctions arbitraires, indépendantes entre elles,

$$\varphi(\alpha), \psi(\beta), \omega(\gamma), \dots;$$

3°. Les dérivées de ces fonctions, jusqu'à des ordres déterminés,

$$\varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha), \dots; \psi'(\beta), \psi''(\beta), \dots; \omega'(\gamma), \omega''(\gamma), \dots; \text{etc.} \dots$$

obtenues par les différentiations relatives aux arguments respectifs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

4°. Des quantités obtenues par l'intégration relative à α d'expressions données quelconques, dépendantes de $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots$, ou par l'intégration relative à β d'expressions données quelconques, dépendantes de $\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots$; etc.

§. 4.

23. Une intégrale générale sans quadratures partielles, du type que nous venons de décrire, renferme des quantités arbitraires, dont le nombre croît avec celui des différentiations des équations de l'intégrale. Examinons maintenant de quelle manière des quantités arbitraires, non renfermées dans les équations de l'intégrale, se produisent successivement dans les expressions des dérivées partielles de la fonction z . Pour cela, voyons d'abord comment on peut déduire des équations de l'intégrale les expressions de toutes les dérivées de z .

En différentiant successivement par rapport à x et à y les $k+1$ équations de l'intégrale, on obtient $2(k+1)$ équations du premier ordre, d'où l'on peut tirer les expressions des $2(k+1)$ dérivées du premier ordre

$$z', z'', \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma'', \dots$$

En passant, au moyen de nouvelles différentiations par rapport à x et à y , aux équations du second ordre, dont le nombre sera $3(k+1)$, et y substituant les expressions précédentes de $z', z'', \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma'', \dots$, on pourra en tirer les expressions des $3(k+1)$ dérivées du second ordre

$$z', z'', z''', \alpha', \alpha'', \alpha''', \beta', \beta'', \beta''', \dots$$

En continuant de cette manière, jusqu'à ce que nous arrivions à un ordre arbitraire quelconque n , on pourra obtenir successivement des expressions de toutes les dérivées

$$z', z'', z''', z^{(n)}, \dots, z_n,$$

dans lesquelles entrent les quantités contenues dans l'intégrale, et, de plus, les nouvelles quantités arbitraires qui s'obtiennent par la différentiation des quantités arbitraires de l'intégrale par rapport à leurs arguments respectifs.

24. Pour la résolution des différentes questions relatives à l'apparition de ces nouvelles quantités arbitraires dans les expressions des dérivées de z , changeons d'abord le système des variables indépendantes. En supposant que chacun des arguments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des fonctions arbitraires dépende à la fois des deux variables x, y , introduisons, comme nouveau système de variables indépendantes, un quelconque de ces arguments, par exemple α , et l'une des anciennes variables indépendantes, par exemple x .

Supposons que l'on ait

$$\alpha = f(x, y);$$

on verra de cette équation, y sera une fonction de x et de α , et toutes les quantités variables dépendantes de x et de y pourront maintenant être considérées comme des fonctions de x et de α .

A cela ajoutons encore une remarque, dont nous ferons bientôt usage, savoir, que les dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ne peuvent avoir pour valeurs 0 ou ∞ . Car, en prenant, dans l'équation précédente, x et α pour variables indépendantes, et différentiant cette équation par rapport à x en considérant α comme constant, on a

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Donc $\frac{\partial y}{\partial x}$ devient 0 ou ∞ , lorsqu'on a respectivement $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ou $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; mais aucun de ces deux cas n'est possible, car f représente la valeur de α , laquelle dépend, par hypothèse, de x et de y .

De plus, y , d'après l'équation $\alpha = f(x, y)$, est évidemment une fonction de α ; par conséquent, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ne peut se réduire à zéro. En différentiant cette équation par rapport à α , x étant par suite considéré comme constant, il vient

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Donc $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ sera $= \infty$, si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; mais ce cas n'est pas possible, car la fonction f , qui représente la valeur de α , contient y .

Ainsi, dans les $k+1$ équations de l'intégrale, on considérera x et α comme les variables indépendantes, les autres variables, au nombre de $k+1$, savoir, $y, z, \beta, \gamma, \dots$ étant des fonctions de x et de α .

Pour désigner les dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables indépendantes x et α , on se rappellera la convention établie ci-dessus (§ 1, art. 2).

25. Maintenant, concernant l'apparition, dans les dérivées de z déduites des équations de l'intégrale, de quantités arbitraires non renfermées dans ces équations, on peut démontrer la proposition suivante:

Si une nouvelle quantité arbitraire (quelque fonction arbitraire de α , non renfermée dans les équations de l'intégrale) apparaît pour la première fois dans l'expression de la dérivée partielle $z_k^{(i)}$, de l'ordre $n = i+k$, cette quantité doit nécessairement apparaître aussi dans toutes les dérivées partielles du n ème ordre de z

$$(n) \quad z_k^{(n)}, z_{k-1}^{(n-1)}, \dots, z_{k-1}^{(i+1)}, z_k^{(i)}, z_{k+1}^{(i-1)}, \dots, z_{n-1}^{(i-1)}, z_n^{(i)}.$$

Il suffit de démontrer cette proposition pour les dérivées $z_{k-1}^{(i+1)}$ et $z_{k+1}^{(i-1)}$, voisines de $z_k^{(i)}$ dans la suite (n) parce que, en appliquant la même démonstration aux dérivées situées à droite de $z_k^{(i-1)}$ et à gauche de $z_{k-1}^{(i+1)}$, on l'étendra à toute la suite (n) .

Pour cela, prenons les dérivées partielles, du $(n-1)$ ème ordre $z_{k-1}^{(i)}$ et $z_{k+1}^{(i)}$, d'où l'on déduit $z_k^{(i)}$ (x et y étant prises pour variables indépendantes), en différentiant la première par rapport à x , la seconde par rapport à y .

Si l'on prend maintenant pour variables indépendantes x et α , en différentiant ces deux mêmes fonctions par rapport à x , il vient

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i-1)}}{\partial x} = z_k^{(i)} + z_{k+1}^{(i-1)} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_{k-1}^{(i-1)}}{\partial x} = z_k^{(i+1)} + z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x},$$

d'où l'on tire

$$z_{k-1}^{(i+1)} = \frac{\partial z_{k-1}^{(i-1)}}{\partial x} - z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad z_{k+1}^{(i-1)} = \frac{\partial z_{k-1}^{(i-1)}}{\partial x} - z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Mais, par hypothèse, il apparaît dans $z_k^{(i)}$, une nouvelle quantité arbitraire, qui n'entre ni dans les équations de l'intégrale, ni dans les expressions des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement; par suite, elle ne peut entrer non plus ni dans l'expression de y tirée des équations de l'intégrale, ni dans les expressions de $\frac{\partial z_{k-1}^{(i-1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{k-1}^{(i-1)}}{\partial x}$, obtenues en différentiant par rapport à x les dérivées du $(n-1)$ ème ordre $z_{k-1}^{(i)}$, $z_k^{(i-1)}$, où l'on considère α comme constant. De plus, d'après ce qu'on a démontré plus haut, $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne peut être ni 0 ni ∞ . Ainsi les fonctions arbitraires considérées de α n'entrent dans les seconds membres des dernières égalités que par le multiplicateur $z_k^{(i)}$ des seconds termes; et comme ces termes ne peuvent s'annuler, il faut donc que les premiers membres de ces égalités, savoir, les expressions $z_{k-1}^{(i+1)}$ et $z_{k+1}^{(i-1)}$ renferment la même fonction arbitraire de α qui s'est introduite dans $z_k^{(i)}$. Ce qu'il fallait démontrer.

26. La proposition réciproque de la précédente doit avoir nécessairement lieu, savoir que, si l'expression de la dérivée $z_k^{(i)}$, cessait de contenir une fonction arbitraire de α , elle ne pourrait apparaître que dans les dérivées de l'ordre $n = i+k$, ne contenant pas d'autres fonctions arbitraires de α que celles qui entrent dans les dérivées des ordres inférieurs, toutes les dérivées de l'ordre n devant jouir de la même propriété.

27. Pour voir à quelle condition apparaît, dans les expressions des dérivées du n ème ordre, une nouvelle fonction arbitraire de α , qui ne se trouve pas dans les expressions des dérivées de l'ordre $n-1$, prenons une de ces dernières $z_{k-1}^{(i)}$, et différencions-la partiellement par rapport à α . On obtient l'égalité

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(1)}}{\partial \alpha} = z_k^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

où $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ne peut être ni 0 ni ∞ ; donc

$$z_k^{(1)} = \frac{\frac{\partial z_{k-1}^{(1)}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Dans le numérateur et dans le dénominateur de la fraction du second membre doit apparaître la nouvelle fonction arbitraire de α , qui n'entrerait pas dans les expressions de $z_{k-1}^{(1)}$ et de y ; cette fonction arbitraire, si toutefois elle n'entre pas exclusivement dans un facteur commun au numérateur et au dénominateur, se trouvera ainsi dans l'expression de la dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre $z_k^{(1)}$. Cette remarque, jointe à la proposition précédente, conduit aux conclusions suivantes:

1°. Les expressions des dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre $z^{(n)}$, ..., z_n renfermeront une fonction arbitraire non contenue dans les expressions des dérivées du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $z^{(n-1)}$, ..., z_{n-1} , pourvu que cette fonction n'entre pas exclusivement dans un facteur commun à $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ et à chacune des expressions $\frac{\partial z_{k-1}^{(1)}}{\partial \alpha}$, ..., $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \alpha}$. Ces dernières expressions doivent, toutes sans exception, contenir ou ne pas contenir le facteur en question, commun avec $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$.

2°. Comme, dans la fonction qui représente la valeur de $z_k^{(1)}$, le nombre $n = i + k$ variant, le dénominateur reste toujours le même, tandis que le numérateur change continuellement; la nouvelle fonction de α qui y apparaît ne pourra être constamment la même, mais étant différente, et même toujours renfermée dans un facteur particulier, elle ne pourra constamment se réduire avec un facteur semblable du dénominateur; car, dans ce cas, ce dernier devrait être formé d'un nombre indéterminé de facteurs différents. Par conséquent, il existe toujours un ordre de dérivées dans lesquelles s'introduit une fonction arbitraire de α non contenue dans les expressions des dérivées inférieures; et

3°. Dès que cela a lieu pour un certain ordre de dérivées n , alors, dans chacun d'ordres suivants $n+1$, $n+2$, ..., apparaîtront de nouvelles fonctions arbitraires de α . Il suffit de s'en assurer pour

l'ordre $n+1$. En différentiant $z_k^{(1)}$ partiellement par rapport à α , on trouve

$$\frac{\partial z_k^{(1)}}{\partial \alpha} = z_{k+1}^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \text{d'où} \quad z_{k+1}^{(1)} = \frac{\frac{\partial z_k^{(1)}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Le numérateur du second membre de la dernière égalité contient une fonction de α , qui est la dérivée de celle qui a paru pour la première fois dans $z_k^{(1)}$, et cette fonction ne peut entrer dans $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, puisque la fonction primitive correspondante n'entrerait pas dans y .

28. A l'exemple d'Ampère nous appellerons les expressions des dérivées de z homogènes à l'intégrale par rapport à α , si elles ne renferment que les mêmes fonctions arbitraires de α qui entrent dans les équations de l'intégrale.

De cette définition il ne s'ensuit pas que les dérivées homogènes à l'intégrale doivent contenir inmanquablement toutes les fonctions arbitraires de α qui entrent dans l'intégrale; il suffit qu'elles n'en contiennent aucune qui n'entre dans l'intégrale.

Les dérivées de z seront dites hétérogènes à l'intégrale par rapport à α , lorsqu'elles renfermeront des fonctions arbitraires de α qui ne se trouvent pas dans les équations de l'intégrale.

29. En faisant usage de ces dénominations, on peut exprimer comme il suit les résultats obtenus dans ce §:

1°. Si la dérivée z' , et par suite aussi la dérivée z , sont hétérogènes à l'intégrale, toutes les autres dérivées seront hétérogènes à l'intégrale.

2°. Si la dérivée $z_k^{(1)}$, de l'ordre $n = i + k$, est homogène à l'intégrale, toutes les dérivées du même ordre et des ordres inférieurs seront homogènes à l'intégrale.

3°. Il existe toujours une dérivée de z , dans laquelle commence à paraître une fonction arbitraire de α qui ne se trouve pas dans les équations dont se compose l'intégrale; cette fonction commence à paraître à la fois dans toutes les dérivées du même ordre; et

4°. Alors, dans chacun des ordres de dérivées qui suivent, se produiront de nouvelles fonctions arbitraires de α , qui ne se trouvent ni dans les équations de l'intégrale, ni dans les dérivées des ordres précédents.

30. **Remarque.** Nous avons supposé ci-dessus [24] que les équations de l'intégrale générale, sans quadratures partielles, ne contiennent que des fonctions arbitraires dont les arguments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont des fonctions des deux variables x, y à la fois. Dans cette hypothèse, on a démontré que les expressions des dérivées de z d'un même ordre quelconque, déduites des équations de l'intégrale, doivent être, sans exception, ou toutes homogènes ou toutes hétérogènes à l'intégrale. Cette propriété des dérivées n'a plus lieu, si l'intégrale contient des fonctions arbitraires dont les arguments dépendent de la seule variable y .

Supposons, en effet, que l'intégrale contienne une fonction arbitraire de α , et que α soit fonction de y seulement; il s'ensuit que y sera, réciproquement, une fonction de α seulement, que nous désignons par

$$y = f(\alpha).$$

On aura donc

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = f'(\alpha),$$

et, au lieu de l'équation démontrée au n° 25

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)} + z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x},$$

on aura celle-ci

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)},$$

laquelle fait voir que, dans la dérivée $z_{k-1}^{(i+1)}$ de l'ordre n , il ne peut apparaître aucune fonction arbitraire de α qui n'existât dans la dérivée $z_{k-1}^{(i)}$ de l'ordre $n-1$; car la différentiation par rapport à x suppose α constant.

D'un autre côté, on a

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial \alpha} = z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = z_k^{(i)} f'(\alpha),$$

d'où

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial z_k^{(i)}}{f'(\alpha)}.$$

Dans le numérateur du second membre de cette égalité, par suite de la différentiation de $z_{k-1}^{(i)}$ relativement à α , il doit se produire une fonction arbitraire de α qui n'existait pas auparavant dans $z_{k-1}^{(i)}$, et cette fonction ne peut disparaître par réduction avec le dénominateur, puisque ce dernier est une fonction déterminée $f'(\alpha)$ de α . Il faut donc que l'expression de $z_k^{(i)}$ contienne une fonction arbitraire qui n'existe pas dans l'expression de $z_{k-1}^{(i)}$.

Ainsi, des deux dérivées d'ordre n , $z_{k-1}^{(i+1)}$ et $z_k^{(i)}$, la première est homogène, la seconde hétérogène, par rapport à α ; à la dérivée $z_{k-1}^{(i)}$ d'ordre $n-1$. Par suite, ces dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre sont hétérogènes entre elles, ce qu'il s'agissait de démontrer.

31. De plus, il est aisé de conclure, de ce qu'on a démontré plus haut, que les dérivées

$$z', z'', z''', \dots, z^{(n)}, \dots,$$

que l'on obtient en différentiant z par rapport à x seulement, ne contiendront pas d'autres fonctions arbitraires de α que celles qui entrent dans l'expression de z .

Au contraire, les dérivées

$$z, \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \frac{\partial z'}{\partial \alpha}, \dots, z_{k-1}^{(n-1)} = \frac{\partial z_{k-1}^{(n-2)}}{\partial \alpha}, \dots,$$

pour la formation desquelles il faut un nombre variable de différentiations relatives à z , mais une seule différentiation par rapport à y , contiendront une seule et même fonction arbitraire de α , différente de celles qui entrent dans z .

De même, les dérivées

$$z, \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \frac{\partial z'}{\partial \alpha}, \dots, z_{k-1}^{(n-2)} = \frac{\partial z_{k-1}^{(n-3)}}{\partial \alpha}, \dots$$

contiendront deux mêmes fonctions arbitraires de α , autres que celles qui entrent dans z . Et ainsi de suite.

Donc les expressions des dérivées qui proviennent de différentiations faites seulement par rapport à x seront homogènes à l'inté-

grale; les autres dérivées seront hétérogènes à l'intégrale. Mais les dérivées dans la formation desquelles il entre un même nombre de différentiations par rapport à y seront homogènes entre elles. Dans tout ceci, nous entendons l'homogénéité ou l'hétérogénéité comme se rapportant à l'argument α , dépendant de y seulement.

Il est clair qu'en échangeant, dans ce qui précède, la lettre y avec la lettre x , on parviendra à des conclusions analogues.

§. 5.

32. Maintenant nous pouvons résoudre une question très-importante, relative aux intégrales sans quadratures partielles: la question du nombre des fonctions arbitraires, indépendantes entre elles, qui sont renfermées dans une semblable intégrale, lorsqu'elle appartient à une équation aux dérivées partielles de l'ordre m .

On devra prendre pour base de cette recherche la définition de l'intégrale générale (§ 1), et répéter les raisonnements du n° 18, qui nous ont conduits aux systèmes d'équations (A) et (B). Mais, dans ce dernier article, nous avons représenté l'intégrale générale sous la forme d'une seule équation, tandis qu'ici nous la représenterons, conformément au type général indiqué à la fin du § 3, sous la forme d'un système de $k+1$ équations. En prenant donc les équations de l'intégrale et toutes leurs dérivées par rapport à x et à y , jusqu'à l'ordre n inclusivement, nous obtiendrons maintenant

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}(k+1)$$

équations. L'équation différentielle donnée aux dérivées partielles du $m^{\text{ème}}$ ordre,

$$F = 0,$$

avec toutes ses dérivées par rapport à x et à y , jusqu'à l'ordre $n-m$ inclusivement, fournit, d'après ce qui précède,

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1) + \frac{m(m-1)}{2}$$

équations.

En vertu de la définition de l'intégrale générale, le premier de ces deux systèmes d'équations, après l'élimination des quantités qui

ne se trouvent pas dans l'équation différentielle donnée, devra devenir complètement identique avec le second. La possibilité de remplir cette condition est déjà assurée par cela même, que le premier système contient plus d'équations que le second, la différence des nombres d'équations des deux systèmes étant

$$(D) \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2}k + m(n+1) - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Il suffit, par conséquent, que le nombre des quantités à éliminer du premier système ne soit pas moindre que cette différence. Ce nombre doit être égal à (D), si chacune des quantités en question s'élimine séparément; il pourra être, au contraire, plus grand que (D), si quelques-unes de ces quantités s'éliminent simultanément par groupes.

33. Essayons maintenant de trouver l'expression du nombre total des quantités sujettes à l'élimination. Elles peuvent être divisées en deux catégories:

1^o. Les k arguments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement,

$$\begin{aligned} \alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{(n)}, \dots, \alpha_n, \\ \beta', \beta'', \beta''', \beta^{(n)}, \dots, \beta_n, \\ \text{etc.} \dots \end{aligned}$$

Le nombre de ces quantités est évidemment égal à

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}k.$$

2^o. Les fonctions arbitraires et leurs dérivées par rapport à leurs arguments respectifs.

Pour exprimer de la manière la plus générale le nombre des quantités à éliminer de cette dernière catégorie, adoptons la notation suivante:

Soit g le nombre des fonctions arbitraires et indépendantes entre elles, telles que $\varphi(\alpha), \psi(\beta), \dots$, qui entrent dans les équations de l'intégrale. Si tous les arguments $\alpha, \beta, \dots$ sont différents entre eux, alors évidemment $g = k$; dans les cas contraire, on devra avoir $g > k$.

Soit g' le nombre des fonctions arbitraires formées au moyen des précédentes par la différentiation ou par l'intégration (ou par ces deux opérations à la fois) relativement à un même argument. Dans

ce nombre nous comprendrons les fonctions qui se trouvent effectivement dans les équations de l'intégrale, ou même qui, ne s'y trouvant pas, se rencontrent dans la suite des transformations qu'il faut opérer pour passer d'une fonction à une autre fonction, entrant l'une et l'autre dans les équations de l'intégrale. Par exemple $\varphi'(\alpha)$ sera comprise dans le nombre g' , si les équations de l'intégrale contiennent $\varphi(\alpha)$ et $\varphi''(\alpha)$. De même, F désignant une fonction donnée, $\int F[\alpha, \varphi(\alpha)] d\alpha$ sera comprise dans le nombre g' , si les équations de l'intégrale contiennent $\int d\alpha/F[\alpha, \varphi(\alpha)] d\alpha$ et $\varphi(\alpha)$.

Enfin soient $l+1, l'+1, l''+1, \dots$ les ordres des équations déduites des équations de l'intégrale, et qui sont les premières hétérogènes à cette intégrale par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ respectivement. Les nombres $l, l', l'', \dots$ doivent avoir des valeurs finies et déterminées, et peuvent aussi se réduire à zéro.

34. Mais on a démontré, dans le § précédent, que lorsque, dans les équations dérivées d'un ordre quelconque des équations de l'intégrale, apparaît pour la première fois une fonction arbitraire, par exemple une certaine dérivée de $\varphi(\alpha)$; alors, en passant aux équations dérivées des ordres suivants, il se produira encore, à chaque fois, de nouvelles fonctions arbitraires, provenant également de $\varphi(\alpha)$. Lors donc qu'on arrivera à l'ordre n dans la différentiation des équations de l'intégrale, on aura introduit des fonctions arbitraires qui ne se trouvaient pas dans ces équations, et parmi lesquelles il y en aura $n-l$ provenant de $\varphi(\alpha)$, $n-l'$ provenant de $\psi(\beta)$, etc. Par conséquent, le nombre total des fonctions arbitraires ainsi introduites sera $ng-l-l'-l''-\dots$. En y ajoutant les nombres déterminés ci-dessus $g, g',$ et $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k$, on obtiendra une expression générale du nombre total des quantités sujettes à l'élimination, sous la forme suivante,

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k + g(n+1) + g' - l - l' - l'' - \dots$$

Ce nombre, comme on l'a expliqué plus haut, ne doit être, en aucun cas, moindre que le nombre (D). Il faut donc nécessairement que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)k + g(n+1) + g' - l - l' - l'' - \dots \\ \geq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)k + m(n+1) - \frac{1}{2}m(m-1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(m-g)(n+1) \leq \frac{1}{2}m(m-1) + g' - l - l' - l'' - \dots$$

Mais le second nombre de cette dernière égalité ou inégalité est un nombre fini et déterminé, tandis que, dans le premier membre, entre comme facteur commun le nombre $n+1$, que peut prendre une grandeur arbitraire. Donc, pour que cette égalité ou inégalité ait lieu quel que soit n , il faut que l'on ait

$$g = m,$$

c'est-à-dire que l'intégrale générale finie sans quadratures partielles doit contenir un nombre de fonctions arbitraires et indépendantes entre elles égal à l'ordre de l'équation aux dérivées partielles à laquelle cette intégrale appartient.

§ 6.

35. Les propriétés générales, exposées ci-dessus, des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes fournissent les indications qui nous conduiront à la détermination des intégrales correspondantes à des équations différentielles données de cette classe.

Avant tout, occupons-nous de rechercher comment, d'après la forme d'une équation donnée, on peut juger des propriétés des arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale générale sans quadratures partielles, si une telle intégrale est possible.

Nous avons vu (§ 5) que, dans l'expression d'une telle intégrale, il doit nécessairement entrer des fonctions arbitraires, entièrement indépendantes entre elles, $\varphi(\alpha), \psi(\beta), \dots$, dont le nombre est égal à l'ordre différentiel de l'équation à intégrer, et dont les arguments $\alpha, \beta, \dots$ représentent généralement des fonctions, déterminées et différentes entre elles, des variables indépendantes x, y . Mais l'intégrale ne cesse pas d'être générale si les fonctions $\alpha, \beta, \dots$ sont, en partie ou en totalité, identiques entre elles, ou dépendantes de la seule variable x ou de la seule variable y . Et comme ces circonstances ne doivent pas rester sans influence sur la marche même de l'intégration, il importe beaucoup d'être en état de reconnaître préalablement, d'après la seule forme de l'équation donnée, les propriétés des arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale générale finie sans quadratures partielles, en supposant la possibilité d'une telle intégrale.

36. A cette fin, imaginons que l'équation

$$\alpha = f(x, y)$$

détermine un des arguments α des fonctions arbitraires de l'intégrale supposée. A l'aide de cette équation, nous pourrions introduire dans l'équation donnée, au lieu des variables indépendantes primitives x et y , les nouvelles variables x et α , ou y et α . En prenant successivement ces deux hypothèses, et différenciant partiellement l'équation précédente d'abord par rapport à x , puis par rapport à y , la seconde variable α étant, dans les deux cas, considérée comme constante, nous aurons

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y},$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\alpha'}{\alpha},$$

et nous aurons en même temps

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 1.$$

Par conséquent, s'il est possible de déterminer différentes fonctions $m, n, \dots$ des variables x, y , représentant les valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, nous aurons en même temps les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial y}$ sous la forme $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \dots$, et les valeurs correspondantes des arguments $\alpha, \beta, \dots$ des fonctions arbitraires s'obtiendront par l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\alpha' + m\alpha = 0, \quad \beta' + n\beta = 0, \quad \dots$$

De cette manière, la recherche des arguments des fonctions arbitraires se ramène à la recherche des différentes valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, correspondantes à ces arguments, valeurs qu'il faut tâcher d'obtenir par le seul moyen de l'équation aux dérivées partielles donnée.

37. Supposons que l'équation donnée soit du second ordre, et de la forme générale

$$F(x, y, z, z', z'', z''', z''') = 0.$$

En prenant x et α pour variables indépendantes, on tirera des équations de l'intégrale générale des expressions, au moyen de ces variables, des fonctions $y, z, z', z'', z''', \dots$, par la substitution desquelles on satisfera, non-seulement à l'équation donnée, mais encore à toutes ses dérivées par rapport à x et à y , jusqu'à un ordre quelconque. Si l'on différencie l'équation donnée $n-2$ fois par rapport à y , il viendra

$$\frac{\partial F}{\partial z''} z'' + \frac{\partial F}{\partial z'''} z''' + \frac{\partial F}{\partial z''''} z'''' + R = 0.$$

Ici les dérivées de l'ordre n n'entrent que linéairement, leurs coefficients étant formés au moyen des seules quantités qui entrent dans l'équation donnée, et le terme R contenant outre cela les dérivées de z des ordres inférieurs à n .

38. Nous avons vu, au § 4, que, à partir d'un certain ordre, les dérivées partielles de z , déduites des équations de l'intégrale, doivent nécessairement être hétérogènes à celle-ci par rapport à α . Et comme le nombre n est arbitraire, rien n'empêche d'admettre que les dérivées d'ordre n soient hétérogènes à l'intégrale par rapport à α . Cette hypothèse faite, voyons comment nous pourrions satisfaire à l'équation précédente.

Commençons par exprimer z'_{n-1} et z''_{n-2} au moyen de z_n . (On a, pour cela, les équations

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} = z'_{n-1} + z_n \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} = z''_{n-2} + z'_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

au moyen desquelles on trouve

$$z'_{n-1} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} z_n, \quad z''_{n-2} = \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 z_n.$$

En substituant ces valeurs de z'_{n-1} , z''_{n-2} dans l'équation considérée, il vient

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z''} - \frac{\partial F}{\partial z'''} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''''} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right] z_n + R + \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''} \left(\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \right) = 0.$$

Enfin, en substituant encore ici les expressions que donnent les équations de l'intégrale pour les fonctions $y, z, z', z'', \dots$ et leurs dérivées partielles par rapport à x , on devra obtenir une identité. Or l'expression de z_n , tirée de la formule

$$z_n = -\frac{\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}}$$

est, d'après ce qui précède, hétérogène à l'intégrale, c'est-à-dire contient une fonction arbitraire de α , qui ne se trouve ni dans les équations de l'intégrale, ni dans les expressions des dérivées de z d'un ordre inférieur à n , et par suite ne se trouve pas non plus dans les dérivées partielles de ces dernières et de y par rapport à x ; car la différentiation par rapport à x suppose α constant.

Donc, dans l'équation ci-dessus, le terme qui renferme le facteur z_n ne peut se réduire avec les autres termes, et l'équation ne peut se changer en identité que si l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial z_n} - \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

39. Ainsi voilà l'équation à laquelle doit satisfaire le $\frac{\partial y}{\partial x}$ correspondant à l'argument α ; mais comme α n'y entre pas explicitement, en cherchant alors la condition à laquelle devrait satisfaire la valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ correspondante à l'argument β , on devrait retrouver l'équation précédente. Par conséquent, les racines de cette équation, que nous désignerons par m et n , donneront les deux valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ correspondantes aux deux arguments α et β des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale finie sans quadratures partielles de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, si cette équation est susceptible d'une telle intégrale.

40. Le résultat que nous venons d'obtenir nous permet d'établir les conclusions suivantes relativement à la nature des arguments α, β , déduite de la forme de l'équation proposée.

1°. α et β doivent être généralement des fonctions déterminées de x et de y ; car les valeurs correspondantes de $\frac{\partial y}{\partial x}$, représentées par les racines m et n de l'équation précédente, sont exprimées sous

forme déterminée au moyen de x, y , et des fonctions z, z', z'', z''', z'''' dépendantes de x et de y .

2°. Si $\frac{\partial F}{\partial z'}, \frac{\partial F}{\partial z''}, \frac{\partial F}{\partial z'''}, \frac{\partial F}{\partial z''''}$ s'expriment en fonction de x et de y soit immédiatement, soit après la division par un facteur commun, alors m et n seront des fonctions des mêmes quantités. Par conséquent, α et β pourront se déterminer en intégrant les équations

$$\alpha' + m\alpha = 0, \quad \beta' + n\beta = 0.$$

3°. Si $m = n$, c'est-à-dire, si l'on a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right)^2 = 4 \frac{\partial F}{\partial z''} \frac{\partial F}{\partial z'''},$$

alors $\alpha = \beta$; par suite, l'intégrale générale cherchée devra contenir deux fonctions arbitraires différentes du même argument.

4°. Si $m = 0$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z_n} = 0$, l'équation qui déterminera α prendra la forme $\alpha' = 0$; donc $\alpha =$ une fonction arbitraire de y . Par conséquent, lorsque l'équation à intégrer ne contient pas z_n , alors, dans l'intégrale cherchée, une des fonctions arbitraires dépendra de la seule variable y .

5°. Si $m = \infty$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z'} = 0$, l'équation qui déterminera α prendra la forme $\alpha = 0$; donc $\alpha =$ une fonction arbitraire de x . Par conséquent, lorsque l'équation à intégrer ne contient pas z' , alors, dans l'intégrale cherchée, une des fonctions arbitraires dépendra de la seule variable x .

6°. Si $m = 0, n = \infty$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z_n} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z'} = 0$, les équations qui déterminent α et β prendront la forme $\alpha' = 0$ et $\beta = 0$; donc $\alpha =$ une fonction arbitraire de y , et $\beta =$ une fonction arbitraire de x . Par conséquent, lorsque, dans l'équation à intégrer il n'entre pas d'autre dérivée du second ordre que z' , alors dans l'intégrale cherchée une des fonctions arbitraires dépendra de la seule variable x , l'autre de la seule variable y .

7°. Si $m = 0, n = 0$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z_n} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z'} = 0$, les équations qui déterminent α et β prendront la forme $\alpha' = 0$ et $\beta' = 0$; donc α et β seront des fonctions arbitraires de la seule variable y . Par conséquent, lorsque dans l'équation à intégrer il

$$z'_{n-1} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} z_n,$$

$$z''_{n-2} = \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 z_n,$$

$$z'''_{n-3} = \frac{\partial z''_{n-3}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^3 z_n.$$

En substituant ces valeurs de z'_{n-1} , z''_{n-2} , z'''_{n-3} , l'équation précédente prend la forme

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\partial F}{\partial z_m} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^3 \right] z_n \\ & + R + \frac{\partial F}{\partial z_n} - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial z'_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial F}{\partial z_m} \left[\frac{\partial z''_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Puisque le nombre n est arbitraire, on peut toujours le supposer tel, que les expressions des dérivées de z de l'ordre n soient hétérogènes à l'intégrale par rapport à α . Dans ce cas, en substituant dans l'équation précédente les expressions des fonctions y , z et des dérivées partielles de z , tirées des équations de l'intégrale, on ne pourra y satisfaire que si l'on a l'équation, du troisième degré par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$,

$$\frac{\partial F}{\partial z_m} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^3 = 0,$$

dont les racines m , n , p sont liées aux arguments α , β , γ de l'intégrale par les équations

$$\alpha' + m\alpha = 0, \quad \beta' + n\beta = 0, \quad \gamma' + p\gamma = 0.$$

En conséquence, toutes les questions relatives à la forme des arguments pourront être résolues comme dans le cas précédent.

Chapitre II.

Intégration des formes les plus simples d'équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

§ 7.

43. Les formes de la classe d'équations différentielles considérées sont caractérisées principalement par la forme des arguments α , β des fonctions arbitraires renfermées dans les intégrales générales de ces équations. D'après cela, voulant nous occuper d'abord des équations les plus simples, auxquelles se ramèneront ensuite les équations de forme plus compliquée, nous commencerons par les hypothèses les plus simples relativement à la forme des arguments α et β . Il est évident que le cas où ces deux arguments sont égaux, et s'expriment au moyen d'une seule des variables indépendantes x ou y , correspond à l'hypothèse la plus simple.

Si, par exemple, $\alpha = \beta = y$, alors l'équation différentielle correspondante ne peut admettre une intégrale générale de forme finie (§ 6, art. 40 et 41) que dans le cas seulement où l'équation ne contient pas d'autre dérivée du second ordre que z'' , ni d'autre dérivée du premier ordre que z' ; c'est-à-dire dans le cas seulement où l'équation est de la forme générale

$$F(x, y, z, z', z'') = 0.$$

Dans ce cas, du reste, il est aisé de s'en convaincre immédiatement, en se représentant le passage de l'intégrale générale, qui contient deux fonctions arbitraires de y , à l'équation différentielle correspondante, aux dérivées partielles du second ordre, moyennant l'élimination des fonctions arbitraires. Comme, dans le calcul des dérivées z' et z'' , la quantité y est considérée comme constante, on peut aussi se maintenir à ce point de vue dans l'intégration de l'équation en question. De cette manière, on aura une équation aux différentielles ordinaires entre les variables x et z , et, en l'intégrant, on aura son intégrale générale avec deux constantes arbitraires distinctes. Or ces dernières doivent être constantes seulement par rapport à x ; par suite, elles peuvent être considérées comme deux fonctions arbitraires distinctes de y , et nous aurons ainsi l'intégrale générale de l'équation proposé.

Pour une équation différentielle ordinaire du second ordre, il existe toujours deux intégrales intermédiaires du premier ordre, contenant chacune une seule constante arbitraire. Par conséquent, en changeant ces constantes en fonctions arbitraires de y , on aura toujours des intégrales générales intermédiaires du premier ordre pour l'équation proposée.

44. Généralement, les équations qui admettent une intégrale générale dans laquelle $\alpha = \beta$ peuvent se ramener, par une transformation convenable, à la forme plus simple que nous venons de considérer. Pour cela, il ne faut qu'introduire dans l'équation proposée, comme variables indépendantes, α et x , ou bien α et y , à la place de x et de y . Nous exposerons plus loin (Chap. IV) les procédés généraux pour faire cette transformation dans le cas où l'on peut obtenir, au moyen de l'équation donnée, l'expression de α en fonction de x, y, z, z', z'' ; nous nous bornerons présentement au cas moins général où, à l'aide de l'équation donnée, on peut former l'expression de l'argument α en fonction de x et de y .

45. Supposons que l'équation donnée soit de la forme générale

$$F(x, y, z, z', z'', \xi) = 0,$$

où

$$\xi = R z'' + 2S z' + T z,$$

R, S, T désignant des fonctions données de x et de y .

En vertu de ce qui a été démontré plus haut (§ 6, art. 40), les arguments α, β de l'intégrale générale de l'équation donnée ne pourront être égaux que sous la condition

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial x''} \frac{\partial F}{\partial x''} = 0.$$

Or on a

$$\frac{\partial F}{\partial z''} = R \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = 2S \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = T \frac{\partial F}{\partial \xi};$$

par suite, la condition précédente prendra la forme

$$4 \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 (S^2 - RT) = 0,$$

et comme le facteur $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ ne saurait être nul, il faudra que l'on ait

$$S^2 - RT = 0.$$

En supposant cette dernière condition satisfaite, on aura

$$\xi = R(z' + 2mz' + m^2 z''),$$

en posant, pour abréger,

$$m = \frac{S}{R}.$$

Pour déterminer l'argument α , on a (art. 36) l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + m \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on tire, en désignant par μ le facteur d'intégration,

$$\alpha = \int \mu (dy - m dx) = f(x, y).$$

A l'aide de la relation entre x, y, α , exprimée par cette dernière équation, on peut maintenant introduire, comme variables indépendantes, α et x au lieu de x et de y . En considérant ainsi les deux systèmes de variables indépendantes, il faut se rappeler la convention établie plus haut (art. 2), et d'après laquelle les dérivées partielles d'une fonction quelconque par rapport à x et à y sont désignées par des accents placés à droite de la fonction, en haut ou en bas, tandis que, pour représenter les dérivées partielles par rapport à x et à α , on emploie la notation habituelle.

D'après cela, on a

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2,$$

par suite,

$$z' + mz'' = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

On trouve de même

$$(z' + mz'')' + m(z' + mz'')'' = \frac{\partial(z' + mz'')}{\partial x},$$

ou

$$z'' + 2mz'' + m^2 z'' + (m' + mn)z' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

On tire de ces équations

$$\xi = R(z'' + 2mz'' + m^2 z'') = R \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (m' + mn)z' \right],$$

et

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} - mz,$$

Par conséquent, si l'équation donnée admet une intégrale générale de forme finie, avec des fonctions arbitraires de l'argument $\alpha = f(x, y)$; alors, en y substituant les valeurs précédentes de ξ et de z' , il faudra encore que z , s'élimine aussi d'elle-même, par suite des réductions. Or, dans ce cas, en considérant au lieu de ξ et de z' leurs expressions ci-dessus, et différentiant partiellement le premier membre de l'équation proposée par rapport à z , on devra obtenir un résultat identiquement nul. Donc les deux égalités

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} R(m' + mn) + \frac{\partial F}{\partial z} m - \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad S^2 - RT = 0$$

seront des conditions nécessaires et suffisantes, et, lorsqu'elles seront remplies, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles considérée se ramènera à l'intégration d'une équation aux différentielles ordinaires du second ordre.

Il est clair qu'en échangeant les rôles de x et de y , et posant, pour abréger,

$$S = \frac{\partial F}{\partial y},$$

on obtiendra les deux conditions, analogues aux précédentes,

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} T(n' + mn) + \frac{\partial F}{\partial z} n - \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad S^2 - RT = 0.$$

46. Éclaircissons ce qui précède par un exemple simple. Prenons l'équation

$$f[\xi + (1 + x + y)z] + \alpha^2 + (x^2 + xy - y)z - z' = 0,$$

dans laquelle on a

$$\xi = z' + 2(x + y)z' + (x + y)^2 z,$$

et où f désigne une fonction donnée quelconque. Nous aurons ici

$$m = x + y, \quad \alpha = e^{-x} [dy - (x + y)dx] = \frac{1 + x + y}{e^x}.$$

En introduisant x et α comme variables indépendantes, au lieu de x et y , il vient

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} - (x + y)z, \quad \xi = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1 + x + y)z.$$

Par la substitution de ces valeurs de z' et de ξ dans l'équation proposée, on en élimine en même temps z , et l'on ramène l'équation à la forme

$$f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

équation aux différentielles ordinaires du second ordre, qui s'intègre par la règle de Clairaut. Si nous introduisons dans l'intégrale complète de cette équation deux fonctions arbitraires différentes de α , à la place des constantes arbitraires, nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation donnée sous la forme

$$z = \frac{x^2}{2} \varphi\left(\frac{1 + x + y}{e^x}\right) + x f\left[\varphi\left(\frac{1 + x + y}{e^x}\right)\right] + \psi\left(\frac{1 + x + y}{e^x}\right).$$

Il est facile de vérifier que, dans cet exemple la première des deux formes de conditions d'intégrabilité (art. 45) est satisfaite.

47. Si l'équation proposée est de la forme particulière

$$Rz'' + 2Sz' + Tz_n + U = 0,$$

U représentant une fonction donnée de x, y, z, z', z'' , les conditions d'intégrabilité, d'après la méthode précédente, seront

$$S^2 - RT = 0, \quad R(m' + mn) + \frac{\partial U}{\partial z} m - \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

ou

$$S^2 - RT = 0, \quad T(n' + mn) + \frac{\partial U}{\partial z} n - \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Si dans cette équation on pose

$$U = Qz' + Pz' + Nz - M,$$

M, N, P, Q designant des fonctions données de x et de y , elle se changera dans l'équation linéaire

$$Rz'' + 2Sz' + Tz_n + Qz + Pz' + Nz = M,$$

et l'on aura pour les conditions d'intégrabilité, d'après la méthode précédente,

$$S^2 - RT = 0, \quad R(m' + mn) + Pm - Q = 0,$$

ou

$$S^2 - RT = 0, \quad T(n' + mn) + Qn - P = 0.$$

48. Remarquons encore que, si nous adoptons les notations symboliques ∇ et ∇' , définies par les égalités

$$\nabla v = v' + mv, \quad \nabla^2 v = \nabla \nabla v = (v' + mv)' + m(v' + mv), \\ \nabla_1 v = v_1 + n v', \quad \nabla_1^2 v = \nabla_1 \nabla_1 v = (v_1 + n v')_1 + n(v_1 + n v')',$$

nous aurons

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \nabla_1 z = \frac{\partial z}{\partial x^2}, \\ \nabla_1 z = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \nabla_1^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Par conséquent, les équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme générale

$$F(x, y, z, \nabla z, \nabla_1^2 z) = 0, \quad \text{ou} \quad F(x, y, z, \nabla_1 z, \nabla_1^2 z) = 0$$

s'intégreront par la méthode précédente; et réciproquement, les équations qui s'intègrent par cette méthode (c'est-à-dire, qui satisfont aux conditions d'intégrabilité données ci-dessus) se ramèneront à l'une des formes symboliques précédentes.

§ 8.

49. Après les équations considérées dans le § précédent, celles dont la forme est la plus simple sont celles qui correspondent à l'hypothèse que l'un des arguments des fonctions arbitraires de leur intégrale générale est égal à x , et l'autre à y . Dans ce cas, comme on l'a vu (art. 40, 60), l'équation différentielle ne peut contenir d'autre dérivée du second ordre que z_1' , et par suite elle est de la forme générale

$$F(x, y, z, z_1', z_1, z_1'') = 0.$$

La théorie de l'intégration des équations de cette forme présente une importance spéciale, parce que toutes les équations de la classe que nous étudions doivent évidemment s'y ramener, dès que l'on y introduit comme variables indépendantes les arguments des fonctions arbitraires des intégrales générales qui leur appartiennent.

50. Auprès a été établi, comme il suit, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation précédente puisse admettre une intégrale du premier ordre avec une seule fonction arbitraire de y ou de x .

Supposons que l'équation

$$f[x, y, z, \varphi(x), \psi(y)] = 0,$$

où φ et ψ désignent des fonctions arbitraires, représente l'intégrale générale. En la différentiant par rapport à y , et éliminant toutes les fonctions arbitraires entre cette équation et celle que l'on obtient en la différentiant par rapport à x .

$$f_1[x, y, z, z_1, \psi(y), \psi'(y)] = 0.$$

Cette dernière équation ne peut évidemment représenter l'intégrale générale du premier ordre, que s'il est possible d'éliminer toutes les fonctions arbitraires entre cette équation et celle que l'on obtient en la différentiant par rapport à x .

Pour cela, il faut que, dans la dernière équation, $\psi(y)$ et $\psi'(y)$ n'entrent que dans un groupe séparé, de la forme

$$2F[\psi, \psi(y), \psi'(y)];$$

alors la fonction arbitraire de y , représentée par ce groupe, se reproduit sans altération dans l'équation provenant de la différentiation de la précédente par rapport à x , et par conséquent elle pourra être éliminée entre ces deux équations. Comme le résultat d'une telle élimination peut toujours se mettre sous la forme d'une équation linéaire par rapport à z_1' et à z_1'' , telle que

$$Gz_1' + Hz_1'' + K = 0,$$

G, H, K pouvant en général contenir x, y, z, z_1 , cette forme de l'équation différentielle sera aussi une des conditions de la possibilité de son intégrale générale du premier ordre avec une seule fonction arbitraire de y .

51. La condition obtenue, bien que nécessaire, n'est pas suffisante. En effet, en remarquant que l'on a

$$z_1' = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad z_1'' = \frac{\partial z_1}{\partial x^2},$$

et multipliant l'équation précédente par ∂x , il vient

$$G\partial z_1 + H\partial^2 z_1 + K\partial x = 0.$$

Dans cette équation linéaire par rapport aux différentielles des trois variables z_1, z_1', x , on peut considérer y comme constante. Elle admet, comme on sait, une intégrale avec une constante arbitraire (laquelle peut être remplacée par une fonction arbitraire de y), dans le cas seulement où la condition d'Euler,

$$(E) \quad G\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial K}{\partial z_1} - \frac{\partial G}{\partial x}\right) + K\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z_1}\right) = 0,$$

est satisfaite.

Ainsi l'existence de cette dernière égalité, avec la forme linéaire de l'équation proposée par rapport à z_1' et à z' , constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette dernière équation ait une intégrale générale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x .

On trouvera absolument de même les conditions de l'existence d'une intégrale générale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x .

52. Il est aisé, par exemple, de faire voir de cette manière que l'équation

$$(x + yz)z_1' - yz_1z' + \frac{y(z-1)}{x+y}z_1 = 0$$

ne peut avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x , mais peut en avoir une avec une fonction arbitraire de y . Pour obtenir celle-ci, multiplions les deux premiers termes du premier membre de l'équation proposée par ∂x , ce qui donnera

$$(x + yz)\partial z_1 - yz_1\partial z.$$

En considérant, dans cette expression différentielle binôme, z_1 et z comme seules variables, multipliant l'expression par $-\frac{1}{z_1^2}$ et intégrant, on trouve

$$\int \frac{yz_1\partial z - (x + yz)\partial z_1}{z_1^2} = -\frac{x + yz}{z_1}.$$

Introduisons maintenant, au lieu de la variable dépendante primitive z_1 , une nouvelle variable u , en posant

$$u = \frac{x + yz}{z_1}.$$

On en tire, en différentiant par rapport à x ,

$$u' = \frac{z_1(1 + yz') - (x + yz)z_1'}{z_1^2}.$$

En ajoutant cette dernière équation à la proposée multipliée par $\frac{1}{z_1^2}$, on aura

$$u' = \frac{x + yz}{(x + y)z_1},$$

ou

$$u' - \frac{u}{x + y} = 0.$$

On obtient ainsi une équation du premier ordre, et, comme il n'y entre pas de dérivée par rapport à y , en l'intégrant comme une équation ordinaire à deux variables x et u , et remplaçant la constante arbitraire de l'intégrale par une fonction arbitraire de y , il vient

$$\frac{u}{x + y} = \psi(y).$$

En substituant à u sa valeur dans cette équation, on obtient l'intégrale du premier ordre de l'équation proposée, sous la forme

$$z_1 = \frac{y}{(x + y)\psi(y)} \cdot z + \frac{x}{(x + y)\psi(y)}.$$

Dans cette équation du premier ordre, il n'entre pas de dérivée par rapport à x ; en l'intégrant donc comme une équation différentielle ordinaire entre les deux variables y et z , et remplaçant la constante arbitraire de l'intégrale par une fonction arbitraire de x , on trouve, pour l'intégrale primitive générale de l'équation proposée,

$$z = e^{\frac{y}{x+y} \cdot \frac{dy}{\psi(y)}} \cdot \left[\varphi(x) + x \int e^{-\frac{y}{x+y} \cdot \frac{dy}{\psi(y)}} \cdot \frac{dy}{(x + y)\psi(y)} \right].$$

53. Si l'on a

$$G = 1, \quad H = P, \quad K = Qz_1 + Nz - M,$$

M, N, P, Q désignant des fonctions données de x et de y , l'équation considérée sera linéaire par rapport à z, z', z_1, z_1' , et de la forme

$$z_1' + Qz_1 + Pz' + Nz = M,$$

et les conditions pour qu'elle puisse avoir une intégrale générale du premier ordre avec des fonctions arbitraires de x seule ou de y seule, s'exprimeront respectivement par les égalités

$$\frac{\partial P}{\partial x} - N + PQ = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} - N + PQ = 0.$$

Ces conditions ont été encore démontrées par Euler (*Inst. Calc. integr. t. III*).

En effet, l'équation donnée peut s'écrire sous les deux formes suivantes,

$$\frac{\partial(z_1 + Pz)}{\partial x} + Q(z_1 + Pz) + \left(N - PQ - \frac{\partial P}{\partial x}\right)z = 0,$$

$$\frac{\partial(z_1 + Qz)}{\partial y} + P(z_1 + Qz) + \left(N - PQ - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)z = 0;$$

et, si l'une des conditions précédentes est remplie, alors, en introduisant au lieu de la variable primitive z , dans le premier cas, la variable

$$u = z_1 + Pz,$$

et dans le second, la variable

$$v = z_1 + Qz,$$

on réduira l'équation proposée à l'une des deux suivantes

$$u' + Qu = M, \quad v' + Pv = M,$$

lesquelles fournissent des intégrales générales du premier ordre, savoir, la première une intégrale avec une fonction arbitraire de y , la seconde une intégrale avec une fonction arbitraire de x .

§ 9.

54. Les paroles suivantes d'Ampère, complètement vraies encore à l'époque actuelle, caractérisent l'importance et le degré de développement de la théorie de l'intégration des équations que nous avons commencé à considérer dans le paragraphe précédent:

"Les équations aux différentielles partielles du second ordre qui ne contiennent que la dérivée z_1' de cet ordre, doivent être examinées avec d'autant plus de soin, que c'est souvent en y ramenant les autres équations aux différentielles partielles du second ordre qu'on parvient à les intégrer. L'intégration générale des équations comprises dans la forme

$$F(x, y, z, z_1', z_2, z_1'') = 0$$

peut être regardée comme la première question à résoudre pour arriver à celle de toutes les équations du second ordre. Mais ce problème paraît devoir échapper encore longtemps aux méthodes de l'analyse actuelle; on ne sait encore intégrer ces équations que dans le cas dont nous venons de parler [sous la condition (E), art. 51],

où elles ont une intégrale intermédiaire, et dans le cas des équations linéaires intégrées par M. de Laplace (*)."

A en juger d'après ces considérations, chaque progrès réalisé, dans le développement et la généralisation des méthodes d'intégration des équations de la forme considérée, doit avoir une importance pour la théorie tout entière des équations aux dérivées partielles du second ordre.

55. La méthode de Laplace, mentionnée par Ampère, consiste à ramener, moyennant un changement convenable de la variable dépendante, l'intégration d'une équation linéaire

$$z_1' + Qz_2 + Pz_1' + Nz = M,$$

qui ne satisfait à aucune des deux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial P}{\partial x} - N + PQ = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} - N + PQ = 0,$$

à l'intégration d'une équation de la même forme générale.

Si l'équation transformée ne satisfait pas non plus aux conditions d'intégrabilité, on peut lui appliquer à son tour le même mode de transformation. En continuant de cette manière, on l'on parviendra à une équation linéaire satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, et au moyen de son intégrale on exprimera celle de l'équation proposée; et on bien on s'assurera de l'impossibilité d'intégrer cette dernière équation sous forme finie.

Par conséquent, cette méthode est fondée sur la possibilité d'exprimer l'intégrale de l'équation proposée au moyen de l'intégrale d'une autre équation de même forme générale, mais satisfaisant à des conditions déterminées, auxquelles la proposée ne satisfait pas. Mais on peut faire voir que ce procédé s'applique non-seulement aux équations linéaires auxquelles Laplace s'est restreint, mais encore aux équations de la forme plus générale

$$(a) \quad Gz_1' + Hz_2' + K = 0,$$

où G, H, K sont exprimés en fonction de x, y, z, z_1' . Après avoir établi cette généralisation, nous en tirerons la méthode de Laplace comme cas particulier.

56. Procédons à l'intégration de l'équation précédente comme il a été indiqué ci-dessus (art. 51). Multiplions les deux premiers ter-

(*) Journal de l'Éc. Polyt., XVIII. Cahier, p. 43.

mes de son premier membre par ∂x , ce qui donne l'expression différentielle

$$G\partial x + H\partial z;$$

en considérant, dans celle-ci, z , et x comme seules variables, déterminons le facteur d'intégration μ , puis intégrons. On trouve ainsi l'égalité

$$\int \mu (G\partial x + H\partial z) = F(x, y, z, z'),$$

dont le second membre est la valeur de l'intégrale du premier. Introduisons maintenant, au lieu de z , la nouvelle variable dépendante u , en posant

$$u = F(x, y, z, z').$$

La différentiation de cette équation par rapport à x donne

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z'' = \mu (Gx' + Hz') + \frac{\partial F}{\partial z'}.$$

Par suite, en multipliant l'équation proposée par μ , et la retranchant de la précédente, on a

$$u' = \frac{\partial F}{\partial z} - \mu K.$$

Le second membre de cette dernière équation s'exprime d'une manière déterminée au moyen de x, y, z, z' ; on peut donc poser, pour simplifier,

$$u' = F_1(x, y, z, z').$$

Si les fonctions F et F_1 ne sont pas distinctes entre elles par rapport à x et à z , c'est-à-dire si, en éliminant entre les équations

$$u = F(x, y, z, z'), \quad u' = F_1(x, y, z, z')$$

une des quantités z, z' , on élimine en même temps l'autre, on obtient alors une équation entre x, y, u, u' , d'où l'on tire, comme nous l'avons fait voir plus haut (§ 8), une intégrale générale du premier ordre avec une fonction arbitraire de y . Mais dans ce cas, comme on sait, on doit avoir l'identité

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

laquelle est aussi la condition d'existence de l'intégrale du premier ordre en question, et doit être équivalente à la condition donnée plus haut

$$G \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z} \right) + H \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + K \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Et en effet, il est aisé de vérifier que cette dernière condition découle de la première (*).

57. Nous sommes maintenant arrivés à la question qui fait l'objet de cette étude: Comment faut-il procéder, quand les conditions précédentes ne sont pas remplies?

Remarquons que les équations

$$u = F(x, y, z, z'), \quad u' = F_1(x, y, z, z')$$

peuvent être considérées comme équivalentes à l'équation proposée. En effet, si l'on substitue dans la seconde la valeur de u tirée de la première, on obtient l'équation donnée. En résolvant les équations précédentes algébriquement par rapport à z et à z' , on obtient deux autres équations de la forme

$$z = f(x, y, u, u'), \quad z' = f_1(x, y, u, u'),$$

équivalentes à celles d'où on les a tirées, et, par suite, à l'équation proposée. Si donc on porte dans l'équation proposée les valeurs précédentes de z, z' , et les valeurs de z', z'' obtenues en différenciant les équations précédentes par rapport à x , on obtient nécessairement une identité pour toute valeur de u . Or la fonction u doit être déterminée de telle sorte qu'entre les valeurs $z = f$ et $z' = f_1$ il n'y ait pas incompatibilité, ce qui exige que la dérivée de f par rapport à y soit égale à f_1 . En exprimant cette condition, on a l'équation

$$(a.) \quad \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial u'} u'' + \frac{\partial f}{\partial y} - f_1(x, y, u, u') = 0;$$

en déterminant l'intégrale de celle-ci, et substituant la valeur de cette intégrale dans le second membre de l'équation

$$z = f(x, y, u, u'),$$

on obtiendra l'intégrale de l'équation proposée.

58. Mais il est facile de démontrer que l'équation (a.), considérée comme linéaire par rapport à u', u'' , et à u , ne doit pas avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x . En effet, en multipliant les deux premiers termes de son premier membre par ∂y , et intégrant, il vient

(*) Voir, par exemple, Boole, *Traité sur Differential Equations*, p. 271.

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y, u, u') = v.$$

En différenciant la valeur de v par rapport à y , on trouve

$$v_y = \frac{\partial f}{\partial u} u'_y + \frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial y},$$

et en retranchant de la l'équation (a.), on a

$$v_y = f_1(x, y, u, u').$$

Ici les fonctions f et f_1 sont évidemment les mêmes que nous avons plus haut.

L'équation (a.) pourrait avoir une intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x , si l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u'} \frac{\partial f_1}{\partial u}$$

était identiquement égale à zéro. Mais, en vertu d'un théorème connu sur les déterminants fonctionnels des fonctions inverses, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u'} \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v'} \frac{\partial f_1}{\partial v}}.$$

Le déterminant qui entre dans le second membre de cette égalité est, par hypothèse, différent de zéro. Donc le déterminant du premier membre ne peut être ni nul ni infini.

59. Ainsi l'équation (a.), considérée comme linéaire par rapport à u' , et à u , ne conduit pas au but désiré. Cependant il reste encore la possibilité de résoudre la question de la manière qu'on s'était proposée, si l'équation (a.) est également linéaire par rapport à u' , et à u ; et pour cela il faut seulement que les fonctions f et f_1 soient du premier degré par rapport à u' . Introduisons cette condition, en posant

$$z = f(x, y, u, u') = Mu' + N,$$

$$z_1 = f_1(x, y, u, u') = mu' + n,$$

M, N, m, n désignant des fonctions de x, y, u .

Maintenant l'équation (a.) prend la forme

$$Mu'_y + \left(\frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial y} - m \right) u' + \frac{\partial N}{\partial u} u + \frac{\partial N}{\partial y} - n = 0,$$

ou, en posant, pour abréger,

$$M = g, \quad \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial y} - m = h, \quad \frac{\partial N}{\partial u} u + \frac{\partial N}{\partial y} - n = k,$$

$$(a') \quad gu'_y + hu' + k = 0.$$

Si l'équation (a') satisfait à la condition d'intégrabilité

$$g \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial u} \right) + h \left(\frac{\partial k}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0,$$

laquelle, en vertu de l'égalité

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u},$$

prend la forme

$$g \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial u} \right) + h \left(\frac{\partial k}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0;$$

elle aura alors une intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de y , à l'aide de laquelle on pourra obtenir l'intégrale générale primitive de l'équation (a'); puis on aura l'intégrale de l'équation (a) par la formule

$$z = f(x, y, u, u').$$

Si l'équation (a') ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, on peut alors lui appliquer de nouveau la méthode de transformation que l'on a employée pour l'équation (a). En continuant de cette manière, on l'on parviendra à une équation satisfaisant à la condition d'intégrabilité et fournissant, par conséquent, l'intégrale de l'équation proposée; ou l'on s'assurera de l'impossibilité d'appliquer cette méthode de solution.

60. Eclaircissons la théorie précédente par un exemple très-simple. Prenons l'équation

$$z'_y - z z' = 0.$$

En la comparant à l'équation générale

$$Gz'_y + Hz' + K = 0,$$

on trouve que la condition d'intégrabilité (E) est satisfaite; et, en effet, en multipliant l'équation proposé par $2z$, il vient

$$\partial z_y - z \partial z = 0.$$

d'où l'on tire, en intégrant, l'intégrale générale du premier ordre

$$z, -\frac{1}{2}z^2 = \Psi(y),$$

contenant une fonction arbitraire de y .

Mais, ne sachant pas intégrer les équations à deux variables z, y , de la forme de la dernière équation, nous ne pourrions pas nous servir de celle-ci pour en tirer l'intégrale générale primitive de l'équation proposée. Si donc nous comparons l'équation proposée à cette autre forme générale

$$Gz' + Hx + K = 0,$$

nous aurons

$$G = 1, \quad H = 0, \quad K = -xz',$$

et en vérifiant si la condition d'intégrabilité

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial z}\right) + H\left(\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z'}\right) = 0$$

est satisfaite, nous trouverons que son premier membre est égal, non à zéro, mais à z' ; par conséquent, l'équation proposée ne peut avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x .

Il ne nous reste, d'après cela, qu'à recourir à la méthode générale exposée plus haut, et par laquelle on trouve d'abord

$$f(G\partial z' + H\partial z) = \int \partial z' = z';$$

introduisons ensuite, au lieu de z , la nouvelle variable indépendante v , en posant

$$v = z'.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à y , et qu'on l'ajoute à la proposée, il vient

$$v, = xz'.$$

Des deux équations précédentes on tire

$$z = \frac{v,}{v}, \quad z' = v.$$

En substituant dans l'équation proposée, les valeurs obtenues pour z et z' , ainsi que la valeurs de $z,'$ que l'on trouve en différenciant par rapport à y la seconde des équations ci-dessus, on obtiendra l'identité $v, = v,$. Mais, pour qu'il n'y ait pas incompatibilité entre les valeurs de z et de z' , il faut satisfaire à la condition

$$\left(\frac{v,}{v}\right)' = v,$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\partial^2 \log v}{\partial x \partial y} = v.$$

Liouville a trouvé (*), pour l'intégrale générale de cette équation, l'expression

$$v = \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)e^{\varphi(x)+\psi(y)}}{[1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}]^2}.$$

On tire de là

$$\log v = \log 2 + \log \varphi'(x) + \log \psi'(y) + \varphi(x) + \psi(y) - 2 \log [1 - e^{\varphi(x) + \psi(y)}].$$

Enfin, en différentiant cette dernière équation par rapport à y , on obtient l'intégrale générale de la proposée,

$$z = \frac{v,}{v} = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) + 2 \frac{e^{\varphi(x)+\psi(y)} \cdot \psi'(y)}{1 - e^{\varphi(x)+\psi(y)}},$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude. Mais cette intégrale doit satisfaire aussi à l'équation

$$z, -\frac{1}{2}z^2 = \Psi(y).$$

Pour s'en assurer, on trouve

$$z, = \frac{\partial^2 \log \psi'}{\partial y^2} + \psi'' + 2\psi'' \cdot \frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2 \cdot \frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2 \cdot \frac{e^{2\varphi+2\psi}}{(1-e^{\varphi+\psi})^2}$$

$$-\frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \psi'}{\partial y} + \psi'\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \log \psi'}{\partial y} + \psi'\right) \cdot \frac{e^{\varphi+\psi} \cdot \psi'}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2 \cdot \frac{e^{2\varphi+2\psi}}{(1-e^{\varphi+\psi})^2}$$

et, en retranchant la seconde égalité de la première,

$$z, -\frac{1}{2}z^2 = \frac{\partial^2 \log \psi'(y)}{\partial y^2} + \psi''(y) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \log \psi'(y)}{\partial y} + \psi'(y)\right]^2,$$

(*) Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5^e édition, corrigée par J. Liouville, Note IV, p. 597.

où le second membre peut être égalé à une fonction arbitraire $\psi(y)$ de y , à cause de la forme entièrement indéterminée de cette fonction et de la fonction $\psi(y)$.

Remarque. De cette manière on obtient, entre autre choses, l'intégrale de l'équation précédente entre les deux variables z et y , qui est d'une forme assez compliquée. On déduit cette intégrale de la valeur de z donnée tout à l'heure, en y remplaçant seulement $\varphi(x)$ par une constante arbitraire.

§ 10.

61. Voyons maintenant comment, de la généralisation précédente, on peut tirer la méthode de Laplace (*) pour l'intégration de l'équation linéaire

$$z' + Pz + Qz + Nz = M,$$

dans le cas où les expressions

$$N - PQ - P' = A, \quad N - PQ - Q, = a$$

ne sont pas égales à zéro.

Suivant la méthode générale, en multipliant les deux premiers termes de l'équation proposée par ∂x , et considérant, dans le produit, z , et z comme seules variables, puis intégrant, il vient

$$\int (\partial z + P \partial z) = z + Pz.$$

Introduisons ensuite, au lieu de z , une nouvelle variable dépendante u , en posant

$$z + Pz = u;$$

si l'on différencie cette équation par rapport à z , et qu'on retranche le résultat de l'équation proposée, il viendra

$$Qz + (N - P')z = M - u'.$$

En résolvant les deux dernières équations par rapport à z et à z' , on trouve

$$z = \frac{1}{A} (M - Qu - u'), \quad z' = \frac{1}{A} [(N - P')u + P'u' - MP].$$

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1778.

Il est évident que l'on satisfera à l'équation proposée en substituant la valeur de z fournie par la première des deux équations précédentes, pourvu que la valeur de z , que l'on en tirera soit égale à celle que donne la seconde de ces deux équations. Par suite, la fonction u doit être déterminée par la condition

$$\left(\frac{M - Qu - u'}{A} \right)' = \frac{(N - P')u + P'u' - MP}{A};$$

en la développant, et ordonnant le résultat suivant l'ordre descendant des dérivées de u , on trouve l'équation linéaire

$$\text{en posant} \quad u' + pu' + qu + u = m,$$

$$p = P - \frac{A'}{A}, \quad q = Q,$$

$$n = N - P' + Q, - Q \frac{A'}{A}, \quad m = M - M \frac{A'}{A} + MP.$$

62. Nous savons déjà, par le §. précédent, que l'équation transformée ne peut avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x ; et en effet, en formant l'expression qui doit s'annuler pour qu'il existe une pareille intégrale, on trouve

$$b = n - pq - q, = N - PQ - P' = A$$

pour cette quantité, laquelle est, par hypothèse, différente de zéro.

Formons ensuite l'expression qui doit être égale à zéro, si l'équation transformée a une intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de y ; il vient

$$B = n - pq - p' = N - PQ - P' + (Q, - P') + \left(\frac{A'}{A} \right)',$$

ou, en vertu des égalités

$$A = N - PQ - P', \quad a = N - PQ - Q,$$

et de celle qui s'en déduit,

$$A - a = Q, - P',$$

$$B = \left(\frac{A'}{A} \right)' + 2A - a = \frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} + 2A - a.$$

63. On voit par là que B peut être égal à zéro, lors même que A et a ne seraient pas nuls. Si B n'est pas égal à zéro, on peut alors appliquer à l'équation transformée le même procédé de trans-

formation qu'à l'équation proposée. Mais il est encore plus simple, au lieu de former les équations transformées, de prolonger la série des quantités analogues à B et à b , de la valeur desquelles dépend l'intégrabilité des équations qui leur correspondent. Cette série s'écrit de la manière suivante:

$$(1) \quad \begin{cases} A = N - PQ - \frac{\partial P}{\partial x}, & a = N - PQ - \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ B = \frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} + 2A - a, & b = A, \\ C = \frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + 2B - b, & c = B, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Si, en prolongeant la suite $A, B, C, \dots$, nous rencontrons un terme égal à zéro, alors la méthode de Laplace est applicable, et le rang du terme qui s'annule indique au bout de combien de transformations on obtiendra l'intégrale cherchée.

64. Dans la recherche précédente, on pourrait attribuer à la variable y le rôle qu'avait x , et vice versa. On obtient de cette manière une autre série, semblable à la précédente,

$$(II) \quad \begin{cases} a = N - PQ - \frac{\partial Q}{\partial y}, & A = N - PQ - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ b = \frac{\partial^2 \log a}{\partial x \partial y} + 2a - A, & B = a, \\ c = \frac{\partial^2 \log b}{\partial x \partial y} + 2b - B, & C = b, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Il faut se rappeler que $B, C, \dots, b, c, \dots$ ont, dans les formules (I) et (II) des significations différentes.

65. En appliquant cette méthode à l'équation

$$x_1' + xyx_2' - 2yz = 0,$$

où $P = xy$, $Q = 0$, $N = -2y$, $M = 0$, on trouve, d'après les formules (I),

$$\begin{cases} A = -3y, & B = -4y, & C = -5y, & \dots, \\ a = -2y, & b = -3y, & c = -4y, & \dots \end{cases}$$

Par conséquent, la série des quantités $A, B, C, \dots$ ne peut se terminer par zéro.

Mais, en appliquant les formules (II), il vient

$$\begin{cases} a = -2y, & b = -y, & c = 0, \\ A = -3y, & B = -2y. \end{cases}$$

Par suite, on obtient de cette manière, au bout de trois transformations, l'intégrale de l'équation proposée. En effet, en posant

$$z' = u,$$

différentiant cette équation par rapport à y , et la soustrayant de la proposée, il vient

$$xyx_2' - 2yz = -u,$$

et des deux équations qui précèdent on tire

$$z = \frac{1}{2}xu + \frac{u_1}{2y}.$$

Partant on doit avoir

$$\left(\frac{1}{2}xu + \frac{u_1}{2y} \right)' = u,$$

ou

$$u_1' + xyu' - yu = 0.$$

En posant

$$u' = v,$$

différentiant par rapport à y , et soustrayant de l'équation précédente, on a

$$xyu' - yu = -v_1,$$

Des deux dernières équations on tire

$$u = xv + \frac{v_1}{y};$$

on doit donc avoir

$$\left(xv + \frac{v_1}{y} \right)' = v,$$

ou

$$v_1' + xyv' = 0.$$

On tire de là

$$v = \psi(y) + \int e^{-\frac{xy^2}{2}} \varphi(x) dx,$$

et

$$v_1 = \psi'(y) - y \int e^{-\frac{xy^2}{2}} x \varphi(x) dx;$$

par conséquent,

$$u = x\psi(y) + \frac{\psi'(y)}{y} + x \int e^{-\frac{xy^2}{2}} \varphi(x) dx - \int e^{-\frac{xy^2}{2}} x \varphi(x) dx.$$

Enfin, en déterminant la dérivée de u par rapport à y , et substituant pour u et u_1 leurs valeurs dans la formule

$$2x = xu + \frac{u_1}{y},$$

on obtient, pour l'intégrale générale cherchée,

$$\begin{aligned} 2x &= x^2 \psi(y) + \frac{2xy-1}{y^2} \psi'(y) + \frac{\psi''(y)}{y^2} + x^2 \int e^{-\frac{xy^2}{2}} \varphi(x) dx \\ &+ \frac{1-2xy^2}{y^2} \int e^{-\frac{xy^2}{2}} x \varphi(x) dx + \frac{1}{y^2} \int e^{-\frac{xy^2}{2}} (xy^2-1) x \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

§ 11.

66. Une équation linéaire de la forme générale

$$x'' + s_1 x' + t_2 x + q_2 x' + p_2 x' + \lambda_2 x = M,$$

dans laquelle entrent les trois dérivées partielles du second ordre, et où les coefficients M, N, p, q, s, t désignent des fonctions données de x et de y , se ramène à la forme simplifiée que nous avons considérée dans le § précédent, en s'appuyant sur les principes généraux exposés plus haut (Ch. I. § 6). Il suffit pour cela, au lieu de x et de y , d'introduire dans cette équation, pour variables indépendantes, les arguments α et β des fonctions arbitraires de son intégrale générale. Pour la détermination des arguments α et β eux-mêmes, il faut, comme on sait, intégrer deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + m \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + n \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0,$$

m, n désignant les racines de l'équation du second degré

$$\xi^2 - s\xi + t = 0,$$

tirée de la formule générale

$$\frac{\partial F}{\partial x'} \xi^2 - \frac{\partial F}{\partial z'} \xi + \frac{\partial F}{\partial z''} = 0,$$

où l'on prend pour F le premier membre de l'équation proposée.

67. De cette manière, on ne peut reconnaître si l'équation précédente peut s'intégrer par la méthode de Laplace, avant d'y avoir introduit les nouvelles variables indépendantes, ce qui exige l'intégration préalable des deux équations

$$dx = m dz, \quad dy = n dz,$$

entre les deux variables x et y .

Mais Legendre a fait connaître un procédé pour appliquer immédiatement à l'équation donnée une recherche analogue, sans y changer les variables indépendantes. Il dit, en parlant des résultats qu'il a obtenus: "C'est le fruit d'un calcul assez pénible, dont je ne crois pas utile de rapporter les détails, à cause de leur longueur."

Mais on peut présenter cette recherche sous une forme assez simple et tout à fait conforme aux recherches exposées dans le § précédent.

68. Pour cela, introduisons les notations $\square$ et ∇ , définies par les égalités

$$\square = \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + n \frac{\partial}{\partial y},$$

m et n désignant deux fonctions données quelconques de x et de y .

En représentant par u, v des fonctions de x, y , et appliquant une des opérations $\square$ ou ∇ aux fonctions composées $u \pm v, u \cdot v, \frac{u}{v}$, on trouve très-facilement

$$\begin{aligned} \square(u \pm v) &= \square u \pm \square v, \\ \square(u \cdot v) &= u \cdot \square v + v \cdot \square u, \\ \square \frac{u}{v} &= \frac{v \cdot \square u - u \cdot \square v}{v^2}. \end{aligned}$$

Outre cela, on a, par définition,

$$\square u = u' + m u_1, \quad \nabla u = u' + n u_1,$$

d'où l'on tire

$$u, = \frac{\square u - \nabla u}{m-n}, \quad u' = \frac{m \cdot \nabla u - n \cdot \square u}{m-n}.$$

En appliquant maintenant à u les opérations $\square$ et ∇ l'une à la suite de l'autre, mais dans deux ordres différents, on obtient les résultats différents

$$\begin{aligned} \nabla \square u &= u'' + (m+n)u' + mn u'' + (\nabla m)u, \\ \square \nabla u &= u'' + (m+n)u' + mn u'' + (\square n)u, \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla \square u - \square \nabla u = \frac{\nabla m - \square n}{m-n} (\square u - \nabla u),$$

ou, en posant, pour abrégé,

$$\mu = \frac{\nabla m - \square n}{m-n},$$

$$\nabla \square u - \square \nabla u = \mu (\square u - \nabla u).$$

69. Prenons maintenant une équation aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\square \nabla z + P \square z + Q \nabla z + N z = M,$$

M, N, P, Q désignant des fonctions données de x et de y .

En l'écrivant de la manière suivante,

$$\square (\nabla z + P z) + Q (\nabla z + P z) + (N - P Q + \square P) z = M,$$

remarquons que, si l'on a

$$N - P Q + \square P = 0,$$

l'équation s'intégrera comme il suit.

En posant

$$\nabla z + P z = u,$$

on aura une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\square u + Q u = M,$$

dont l'intégrale s'obtiendra par la méthode exposée plus haut (§. 7), et renfermera dans son expression une fonction arbitraire de x et de y . Si l'on substitue sa valeur dans l'équation précédente, on obtiendra une autre équation aux dérivées partielles du premier ordre. En l'intégrant absolument comme la première, elle fournira l'intégrale générale du problème, avec deux fonctions arbitraires de x et de y .

70. Il y a encore un autre moyen pour intégrer l'équation considérée. A l'aide de l'égalité établie plus haut (art. 68),

$$\square \nabla z = \nabla \square z + \mu (\nabla z - \square z),$$

on pourra introduire $\nabla \square z$ au lieu de $\square \nabla z$, par suite de quoi l'équation proposée prendra la forme

$$\nabla \square z + (Q + \mu) \nabla z + (P - \mu) \square z + N z = M,$$

et l'on pourra encore l'écrire de cette manière,

$$\begin{aligned} \Delta [\square z + (Q + \mu) z] + (P - \mu) [\square z + (Q + \mu) z] \\ + [N - (P - \mu)(Q + \mu) - \nabla(Q + \mu)] z = M. \end{aligned}$$

Si donc on a l'égalité

$$N - (P - \mu)(Q + \mu) - \nabla(Q + \mu) = 0,$$

l'équation proposée s'intégrera exactement comme dans le cas précédent.

71. Si les expressions

$$N - P Q + \square P = A, \quad N - (P - \mu)(Q + \mu) - \nabla(Q + \mu) = a$$

sont différentes de zéro, introduisons alors, à la place de z , une nouvelle variable dépendante u , en posant

$$\nabla z + P z = u.$$

En effectuant sur les deux membres de cette équation l'opération $\square$, et soustrayant le résultat de l'équation proposée, il vient

$$Q \nabla z + (N - \square P) z = M - \square u,$$

et des deux dernières équations on tire

$$z = \frac{M - Q u - \square u}{A}, \quad \nabla z = \frac{(N - \square P) u + P u - M P}{A}.$$

Si dans l'équation proposée on substitue les valeurs précédentes de z et de ∇z , et les valeurs de $\square z$ et de $\square \nabla z$, obtenues au moyen des équations précédentes en effectuant sur chacune d'elles l'opération $\square$, il est aisé de s'assurer que de cette manière on satisfait à l'équation proposée. Mais, pour que les valeurs de ∇z et de $\square \nabla z$, fournies par la seconde des équations précédentes, soient égales à celles que l'on peut tirer pareillement de la première, il faut nécessairement satisfaire à la condition suivante,

$$\nabla \left(\frac{M - Q u - \square u}{A} \right) = \frac{N - \square P + P u - M P}{A}.$$

En effectuant dans le premier membre l'opération ∇ , le résultat peut s'exprimer par l'équation

$$\nabla \square u + \left(P - \frac{\nabla A}{A} \right) \square u + Q \nabla u + \left[N - \square P + \nabla Q - Q \frac{\nabla A}{A} \right] u \\ = \nabla M - Q \frac{\nabla A}{A} + MP.$$

Mais, pour la réduire à une forme générale complètement identique à celle de l'équation proposée, introduisons $\square \nabla u$ au lieu de $\nabla \square u$, après quoi l'équation précédente prendra la forme

$$\square \nabla u + p \square u + q \nabla u + ru = l,$$

en posant

$$p = P + \mu - \frac{\nabla A}{A},$$

$$q = Q - \mu,$$

$$r = N - \square P + \nabla Q - Q \frac{\nabla A}{A}, \quad l = \nabla M - Q \frac{\nabla A}{A} + MP.$$

71. Pour juger de la possibilité d'intégrer l'équation transformée d'après la méthode que nous venons d'exposer, formons les expressions

$$n - pq - \square p = B, \quad n - (p - \mu)(q + \mu) - \nabla(q + \mu) = b.$$

En mettant pour n, p, q leurs valeurs, il est aisé de voir que l'on a

$$B = \square \frac{\nabla A}{A} + 2A - a - \mu \frac{\nabla A}{A} + l, \quad b = A,$$

en posant, pour abréger,

$$\lambda = 2\mu^2 - (\square \mu + \nabla \mu).$$

D'après cela, b est différent de zéro; mais B peut être nul. Si B aussi est différent de zéro, on peut alors appliquer à l'équation transformée le même mode de transformation que l'on a appliqué à l'équation proposée. Mais il est encore plus simple, au lieu de former l'équation transformée, de prolonger la série des quantités analogues à B et à b , de la valeur desquelles dépend l'intégrabilité des équations qui leur correspondent. Cette série se forme de la manière suivante:

$$\begin{cases} A = N - P Q - \square P, & a = N - (P - \mu)(Q + \mu) - \nabla(Q + \mu), \\ B = \square \frac{\nabla A}{A} + 2A - a - \mu \frac{\nabla A}{A} + l, & b = A, \\ C = \square \frac{\nabla B}{B} + 2B - b - \mu \frac{\nabla B}{B} + l, & c = B, \\ \text{etc.} \dots \dots \dots \end{cases}$$

La possibilité d'appliquer cette méthode d'intégration est subordonnée à la condition que la série $A, B, C, \dots$ se termine par zéro. L'ordre du terme qui s'évanouit le premier indique après combien de transformations on peut obtenir l'intégrale cherchée.

On peut présenter la recherche précédente sous une autre forme, en l'appliquant à l'équation proposée, écrite sous la forme

$$\nabla \square z + (Q + \mu) \nabla z + (P - \mu) \square z + Nz = M.$$

Mais dans ce cas on n'aurait qu'à répéter tous les calculs ci-dessus, en remplaçant partout les signes

$$P, \quad Q, \quad A, \quad \mu, \quad \square, \quad \nabla$$

respectivement par

$$Q + \mu, \quad P - \mu, \quad a, \quad A, \quad \nabla, \quad \square.$$

72. Pour montrer comment les résultats précédents s'appliquent à l'équation

$$z'' + sz' + tz_n + qz + pz' + Nz = M,$$

il suffira de prendre pour m et n les racines de l'équation

$$\xi^2 - s\xi + t = 0;$$

après quoi, en vertu des formules données plus haut, nous aurons l'égalité

$$\square \nabla z - [z'' + sz' + tz_n + (\square n)z] = 0,$$

et, en ajoutant celle-ci à l'équation proposée, il vient

$$\square \nabla z + (q - \square n)z + pz' + Nz = M.$$

Si l'on y substitue les valeurs

$$z' = \frac{m \nabla z - n \square z}{m - n}, \quad z_n = \frac{\square z - \nabla z}{m - n},$$

on ramènera l'équation précédente à la forme

$$\square \nabla z + \frac{q - \square n + pn}{m - n} \square z + \frac{pm - q + \square n}{m - n} \nabla z + Nz = M,$$

à laquelle s'applique la méthode d'intégration exposée plus haut.

73. Pour éclaircir cette méthode, appliquons-la à l'équation

$$z'' - a^2 z_n + \frac{b}{a^2} z = 0,$$

dont la condition d'intégrabilité sous forme finie a déjà été établie par Euler (*).

En posant

$$\square z = z' + az, \quad \nabla z = z' - az,$$

on a

$$\square \nabla z = \square \square z = z' - a^2 z,$$

par suite, l'équation proposée prendra la forme

$$\square \nabla z + \frac{b}{x^2} z = 0.$$

On a ici

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad N = \frac{b}{x^2}, \quad M = 0, \quad \square P = 0, \quad \nabla Q = 0, \quad \mu = 0,$$

$$A = \frac{b}{x^2}, \quad a = \frac{b}{x^2};$$

par conséquent,

$$\nabla A = -\frac{2b}{x^3}, \quad \frac{\nabla A}{A} = -\frac{2}{x}, \quad \square \frac{\nabla A}{A} = \frac{2}{x^2}.$$

On obtiendra d'après cela les séries suivantes,

$$a = \frac{b}{x^2}, \quad A = \frac{b}{x^2},$$

$$b = \frac{b}{x^2}, \quad B = \frac{k_1}{x^2}, \quad k_1 = b + 2,$$

$$c = \frac{k_2}{x^2}, \quad C = \frac{k_2}{x^2}, \quad k_2 = 2(k_1 + 1) - b,$$

$$d = \frac{k_3}{x^2}, \quad D = \frac{k_3}{x^2}, \quad k_3 = 2(k_2 + 1) - k_1,$$

etc.

En continuant ainsi, et poussant jusqu'au $(n+2)$ ème terme, il vient

$$r = \frac{k_n}{x^2}, \quad R = \frac{k_{n+1}}{x^2}, \quad k_{n+1} = 2(k_n + 1) - k_{n-1}.$$

Ainsi les coefficients k satisfont à l'équation aux différences finies

$$k_{n+1} - 2k_n + k_{n-1} = 2,$$

ℒ (*) *Miscellanea Taurinensia*, T. III, p. 60.

laquelle, en introduisant le signe des différences finies Δ , peut encore s'écrire sous la forme

$$\Delta^2 k_{n-1} = 2.$$

En l'intégrant, on trouve

$$k_{n-1} = n(n-1) + C_n + C',$$

ou

$$k_n = n(n+1) + C(n+1) + C'.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires C, C' , ou a, en faisant tour à tour $n = 1$ et $n = 2$,

$$b = 2C + C', \quad b = 3C + C',$$

d'où $C = 0, C' = b$, et par conséquent

$$k_n = n(n+1) + b.$$

De là on tire la condition d'Euler: pour une constante donnée b , l'équation considérée est intégrable sous forme finie, s'il est possible de satisfaire à la condition

$$n(n+1) + b = 0$$

par une valeur entière et positive quelconque de n . En considérant b comme une constante indéterminée, et posant $b = -n(n+1)$, on obtient la forme des équations

$$z'' - a^2 z, \quad -\frac{n(n+1)}{x^2} z = 0,$$

qui sont intégrables sous forme finie. Si l'on pose successivement

$$z = x^{n+1} u, \quad z = x^{-n} v,$$

on ramène l'équation précédente aux deux suivantes,

$$u'' - a^2 u, \quad + \frac{2(n+1)}{x} u' = 0,$$

$$v'' - a^2 v, \quad - \frac{2n}{x} v' = 0;$$

donc l'équation

$$z'' - a^2 z, \quad + \frac{b}{x^2} z' = 0$$

s'intègre sous forme finie pour toute valeur paire, positive ou négative, du nombre b .

74. **Remarque.** On sait que la méthode de Laplace s'applique aussi à certaines équations contenant à la fois des différences finies et des dérivées. Nous pourrions montrer que l'idée fondamentale de cette méthode s'applique également à plusieurs équations linéaires aux différentielles ordinaires du second ordre, de la forme

$$F(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + \varphi(x) y = \psi(x).$$

Mais nous ne croyons pas que ce soit ici le lieu d'entrer dans ces détails.

Chapitre III.

Intégration des formes combinées d'équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

§ 12.

75. L'équation

$$(1) \quad Hx'' + Kx' + Lx_n + M + N(x''_n - z', z) = 0,$$

dans laquelle les coefficients H, K, L, M, N sont supposés être des fonctions quelconques de x, y, z, z', z , représente la forme la plus générale des équations que nous considérons, pour laquelle il existe des méthodes tout à fait générales ou une théorie d'intégration.

Monge^(*), le premier, a donné une méthode générale pour l'intégration des équations de cette forme^(**); mais la théorie qu'il propose n'épuise pas tous les cas qui peuvent se présenter dans l'intégration des équations auxquelles se ramène la question considérée. Le développement le plus complet de la théorie de cette question, a été donné par Ampère^(***). Parmi les auteurs plus récents qui

(*) Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. (Histoire de l'Académie des Sciences, 1784).

(**) Il considère surtout le cas de $N = 0$; mais cette restriction n'est pas nécessaire.

(***) Mémoire contenant l'application de la théorie exposée dans le XVII^e Cahier du Journal de l'École Polytechnique. (Journ. de l'École Polyt., t. XI, 1820).

se sont occupés de la même question générale, nous ne connaissons que les deux mathématiciens anglais Boole^(*) et De Morgan^(**). Les procédés proposés par ces deux savants, bien que présentant une analyse beaucoup moins générale et moins complète que le travail d'Ampère, n'en sont pas moins remarquables par une nouvelle manière d'aborder le problème en ramenant l'intégration de l'équation considérée aux dérivées partielles du second ordre à l'intégration de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. À l'aide de cette réduction, que l'on peut du reste effectuer ainsi que Boole l'a enseigné^(***), sans s'écarter des méthodes fondamentales d'Ampère, on établit très-simplement les diverses conditions entre les coefficients $H, K, \dots, N$, par l'existence ou la non-existence desquelles se manifestent tous les cas possibles, pour lesquels la théorie de l'intégration a été constituée par Ampère.

76. Les équations, à l'intégration desquelles se ramène la question considérée, s'obtiennent par la méthode d'Ampère, de la manière suivante. À la place des variables indépendantes primitives, x, y , introduisons les nouvelles variables x, α , en supposant l'existence d'une certaine dépendance entre x, y et α . De cette manière, en conservant les notations que nous avons adoptées pour les dérivées partielles dans ces deux systèmes de variables indépendantes nous aurons

$$(2) \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = z' + z' \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'}{\partial \alpha} = z'' \frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

De la dernière équation on tire

$$(3) \quad \frac{\partial z'}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad z'' = \frac{\partial z}{\partial y};$$

(*) Ueber die partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung $Rz + Sz + T + U(z^2 - rz) = V$. (Crelle's Journal für die Mathem., Bd. LXV, 1863). — (b) Treatise on Differential Equations. Supplementary Volume, 1865; *Ch. XXVIII*. — (c) Dans le Mémoire intitulé: "Considérations sur la recherche des intégrales premières des équations différentielles partielles du second ordre", par Boldet, inséré dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, t. IV, 1862, le titre contient, d'après Todhunter, une fautive d'impression relativement au nom de l'auteur, et ce Mémoire doit appartenir à Boole.

(**) Les recherches de cet auteur, publiées dans les Cambridge Philosophical Transactions, Vol. IX. Part. IV, ne mesont connues que par les renvois qu'y fait Boole, tout en faisant remarquer en même temps la ressemblance des méthodes qu'il a employées l'un et l'autre.

(***) Journal de l'École Polytechnique, t. XXII: Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre.

ensuite l'avant-dernière donne

$$(3) \quad z' = \frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y}, \quad \frac{\partial z'}{\partial \alpha}$$

et enfin on aura, en vertu de la première,

$$(3) \quad z'' = \frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial \alpha}.$$

77. Pour substituer ces valeurs dans l'équation (1), remarquons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} z'' z'' &= \left(\frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} \right) \frac{\partial z'}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right), \\ z' z' &= \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right). \end{aligned}$$

Par suite, en retranchant la seconde égalité de la première, les termes du second degré en $\frac{\partial z'}{\partial \alpha}$ se détruiront, et l'on aura

$$z'' z'' - z' z' = - \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} \right) \frac{\partial z'}{\partial \alpha}.$$

D'après cela, le résultat de la substitution prendra la forme

$$(4) \quad P + Q \frac{\partial z'}{\partial y} = 0,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} P &= H \left(\frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} \right) + 2K \frac{\partial z'}{\partial x} + M - N \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2, \\ Q &= H \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 2K \frac{\partial y}{\partial x} + L + N \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

78. Les valeurs de la fonction z et de ses dérivées partielles, tirées de l'intégrale générale correspondante à l'équation (1), doivent satisfaire à cette dernière. De même, en exprimant la fonction z et ses dérivées partielles au moyen des variables x et α , nous satisferons, par ces expressions, au résultat de la même transformation opérée sur l'équation (1), c'est-à-dire à l'équation (4).

Jusqu'ici le choix de la dépendance entre les variables x, y, α est resté arbitraire; mais, si l'on suppose maintenant que α représente l'argument d'une des deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, alors il sera possible de tirer, des conclusions précédentes, des conséquences très-importantes. Car, avec ce choix de nouvelles variables, en vertu de ce qui a été démontré plus haut (Ch. I, §. 4), les expressions des dérivées partielles de la fonction z pourront être homogènes ou hétérogènes à l'intégrale par rapport à α ; et dans ce dernier cas, les expressions de chaque ordre de dérivées partielles de z contiendront des fonctions arbitraires de α telle qu'il n'en entrera de pareilles ni dans l'intégrale, ni dans les expressions des dérivées des ordres précédents. Par conséquent, si l'on suppose les dérivées du second ordre z'', z', z'' , hétérogènes à l'intégrale par rapport à α , on devra admettre, dans l'expression

$$\frac{\partial z'}{\partial \alpha} = z''$$

la présence d'une fonction arbitraire de α qui ne se trouve ni dans l'intégrale générale, ni dans les expressions de y, z', z'' , ni dans leurs dérivées partielles $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}$; car, dans la différentiation par rapport à x , α est regardé comme une constante. Donc la fonction arbitraire de α dont il s'agit ne peut entrer ni dans P , ni dans Q , et le premier membre de l'équation (4) ne peut se réduire à zéro que si l'on a à la fois les deux égalités

$$(5) \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

79. Réciproquement, pour juger si les dérivées du second ordre z'', z', z'' , dans l'équation (1), sont hétérogènes à l'intégrale par rapport à α , il suffit de prendre les équations (5), et, en leur adjoignant les deux premières équations (2), d'éliminer entre ces quatre équations les trois dérivées $\frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial x}$. Si le résultat de l'élimination est identique avec l'équation proposée (1), les équations (5) lui seront équivalentes, et la supposition de l'hétérogénéité à l'intégrale, par rapport à α , des dérivées z'', z', z'' , sera légitime. Au contraire, cette

supposition se trouverait fausée, si l'on obtenait pour résultat de l'élimination une équation entre $x, y, z, z', z'', z''', z''''$, différente de (1).

80. Mais il est facile de s'assurer que, pour l'équation (1), c'est toujours le premier cas qui a lieu. Si l'on substitue, en effet, dans les équations (5) à $\frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z''}{\partial x}$ leurs valeurs respectives

$$z'' + z' \frac{\partial y}{\partial x}, \quad z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x},$$

on trouve

$$P = H \left[z'' - z'' \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] + 2K \left(z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x} \right) + M - N \left(z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

$$Q = H \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 2K \frac{\partial y}{\partial x} + L + N \left[z'' + 2z' \frac{\partial y}{\partial x} + z'' \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] = 0,$$

ou

$$H z'' + 2K z' + M - N z'^2 + 2(K - N z'') z'' - (H + N z'') z'' \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

$$L + N z'' - 2(K - N z'') \frac{\partial y}{\partial x} + (H + N z'') \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

et il est évident que, pour éliminer $\frac{\partial y}{\partial x}$, il suffit d'ajouter la première de ces deux équations à la seconde multipliée par z'' , ce qui conduit à l'équation proposée

$$H z'' + 2K z' + L z'' + M + N(z'' z'' - z'^2) = 0.$$

81. Les équations (5), auxquelles on a ramené ainsi l'intégration de l'équation proposée, sont du premier ordre, mais non du premier degré, et sous ce dernier rapport elles sont susceptibles d'une nouvelle simplification. Pour cela, résolvons par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$ l'équation $Q = 0$, ou l'équation qui lui est équivalente

$$(H + N z'') \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 2(K - N z'') \frac{\partial y}{\partial x} + L + N z'' = 0;$$

il viendra

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - N z', \pm \sqrt{(K - N z')^2 - (H + N z'')(L + N z'')}}{H + N z''},$$

$$= \frac{K - N z', \pm \sqrt{(K^2 - HL - N[H z'' + 2K z' + L z'' + N(z'' z'' - z'^2)])}}{H + N z''},$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - N z', \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + N z''}.$$

82. On obtient de cette manière, pour $\frac{\partial y}{\partial x}$, deux valeurs, ce qui

devrait être, puisque la variable indépendante α , que nous employons conjointement avec x , représente un des deux arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale générale. Si l'on désigne ces arguments par α et β , les deux valeurs différentes de $\frac{\partial y}{\partial x}$ devront correspondre aux deux systèmes différents de variables indépendantes: α, α , et α, β . En effet, il a été démontré ci-dessus (Chap. I, §. 6) que les valeurs différentes de $\frac{\partial y}{\partial x}$, correspondantes aux arguments α et β , s'obtiennent comme racines de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial z''} - \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z'} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Si l'on désigne maintenant par F le premier membre de l'équation (1), on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = H + N z'', \quad \frac{\partial F}{\partial z''} = 2(K - N z'), \quad \frac{\partial F}{\partial z''} = L + N z''.$$

Par conséquent, les deux équations du second degré en $\frac{\partial y}{\partial x}$ sont tout à fait identiques.

83. Si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \quad K^2 - HL + MN = G,$$

nous aurons, à la place de $Q = 0$, l'équation

$$(H + N z'') \frac{\partial y}{\partial x} - K + N z', \mp \sqrt{G} = 0.$$

De plus, l'équation $P = 0$ peut s'écrire ainsi,

$$H \frac{\partial z'}{\partial x} + \left(2K - H \frac{\partial y}{\partial x} - N \frac{\partial z'}{\partial x} \right) \frac{\partial z'}{\partial x} + M = 0,$$

et, par suite de l'équation précédente, elle prend la forme

$$H \frac{\partial z'}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G}) \frac{\partial z'}{\partial x} + M = 0.$$

Les signes différents de $\sqrt{G}$ correspondent aux systèmes différents de variables indépendantes: x, α , et x, β . La présence de la seconde variable indépendante α ou β ne se manifeste pas, parce que les équations ne contiennent que les dérivées partielles des fonctions y, z', z , par rapport à x seulement, tandis que α ou β n'entrent pas explicitement, même dans les coefficients. Pour indiquer laquelle des deux quantités α, β on considère, en même temps que x , comme variable indépendante, Ampère emploie, dans ce cas et généralement dans les cas analogues, la notation suivante pour les dérivées partielles,

$$\frac{\partial y}{\partial x(\alpha)}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x(\beta)}.$$

84. D'après cela, en conservant devant $\sqrt{G}$ le signe supérieur quand les variables indépendantes sont x, α , et le signe inférieur quand elles sont x, β , on pourra écrire comme il suit les équations auxquelles se ramène finalement l'intégration de (1),

$$(A) \quad \begin{cases} H \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} + N \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} - K - \sqrt{G} = 0, \\ H \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)} + (K - \sqrt{G}) \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} + M = 0, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} H \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + N \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} - K + \sqrt{G} = 0, \\ H \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} + (K + \sqrt{G}) \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + M = 0. \end{cases}$$

A chacun de ces deux systèmes on peut encore joindre l'équation

$$(C) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z' + z, \quad \frac{\partial y}{\partial x}.$$

dans laquelle, en même temps que x , il entrera pour seconde variable indépendante, soit α , soit β , suivant que l'on combinera l'équation (C) avec (A) ou avec (B).

85. Ici il est à propos d'indiquer aussi les autres méthodes, dont il a été question au commencement de ce Chapitre, pour ramener l'intégration de l'équation (1) à d'autres équations analogues à celles d'Ampère (A), (B), (C). Monge a considéré la forme générale des équations, linéaires seulement par rapport à z'', z', z , mais sa méthode s'étend facilement aux équations qui sont linéaires aussi par rapport à $z'' z, z'' z', z'' z''$, c'est-à-dire à l'équation générale

$$H z'' + 2K z' + L z'' + M + N(z'' z, - z', z) = 0.$$

Il commence par cette remarque, que l'équation proposée, représentant une relation simple (unique) entre les trois quantités z'', z', z , ne peut être suffisante pour la détermination des valeurs de chacune d'elles au moyen de x, y, z, z', z . Donc, si l'on y joint les deux équations

$$dz' = z'' dx + z' dy, \quad dz = z' dx + z'' dy,$$

lesquelles, exprimant seulement les définitions des dérivées partielles z'', z', z , ne donnent pas entre elles de nouvelles relations (ne disent rien de nouveau); et si par leur moyen on élimine de l'équation proposée deux quelconques des quantités z'', z', z , on obtiendra ainsi des équations de la forme

$$P + Qz'' = 0, \quad R + Sz' = 0, \quad T + Uz = 0,$$

qui ne devront pas déterminer les valeurs de z'', z', z . Par conséquent, les équations précédentes, ayant lieu indépendamment des valeurs des quantités z'', z', z , devront se réduire respectivement aux suivantes,

$$P = 0, \quad Q = 0; \quad R = 0, \quad S = 0; \quad T = 0, \quad U = 0.$$

Mais il est aisé de voir que, de ces six équations, deux seulement sont nécessaires, par exemple, les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

les autres étant ou identiques, ou équivalentes à celles-là. En effet, si l'on opère l'élimination en question, on trouve

$$P = H(dzdz' - dydz) + 2Kdzdz' + Mdz^2 - Ndz^2 = 0,$$

$$R = L(dydz, - dzdz') + 2Kdydz' + Mdy^2 - Ndz^2 = 0,$$

$$T = Hdydz' + Ldzdz' + Mdzdy + Ndz' dz = 0,$$

et

$$Q = S = -U = Hdy^2 - 2Kdydz + Ldz^2 + N(dzdz' + dydz) = 0.$$

Or comme

$$dzdz' + dydz, = z' dz^2 + 2z' dzdy + z'' dz^2,$$

la dernière équation prend la forme

$$(H + Nz'') dz^2 - 2(K - Nz') dzdy + (L + Nz'') dy^2 = 0.$$

En résolvant celle-ci successivement par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et à $\frac{dz}{dy}$, on trouve, au moyen de l'équation proposée,

$$dy = \frac{K - Nz', \pm \sqrt{G}}{H + Nz''} dx, \quad dz = \frac{K - Nz', \pm \sqrt{G}}{L + Nz'''} dy,$$

où

$$G = K^2 - HL + MN.$$

Chassant les dénominateurs, transportant tous les termes dans un même membre, et ayant égard aux équations

$$dz' = z'' dx + z' dy, \quad dz'' = z' dx + z'' dy,$$

on pourra écrire les équations ci-dessus de la manière suivante,

$$(a) \quad H dy + N dz, - (K \mp \sqrt{G}) dx = 0,$$

$$(a') \quad L dx + N dz' - (K \pm \sqrt{G}) dy = 0.$$

De plus, l'équation $P = 0$, écrite sous la forme

$$H dx dz' + (2K dx - H dy - N dz) dz' + M dx^2 = 0,$$

devient, en vertu de l'équation (a),

$$(b) \quad H dz' + (K \mp \sqrt{G}) dx + M dx = 0.$$

De cette manière, les équations $P = 0$ et $Q = 0$ sont remplacées par (a) et (b).

Ensuite, l'équation $R = 0$, écrite sous la forme

$$L dy dz' + (2K dy - L dx - N dz') dz' + M dy^2 = 0,$$

devient, en vertu de l'équation (a'),

$$(b') \quad L dx + (K \mp \sqrt{G}) dz' + M dy = 0.$$

Par conséquent, $S = 0$ et $R = 0$ peuvent être remplacées par les équations (a') et (b'); or l'équation (a') est équivalente à (a), et (b') s'obtient par l'élimination de dx entre (a) et (b).

Enfin, l'équation $T = 0$, écrite sous la forme

$$dz (L dx + N dz') + (H dz' + M dx) dy = 0,$$

devient, en vertu de l'équation (a'),

$$(b) \quad H dz' + M dx + (K \mp \sqrt{G}) dx = 0.$$

Donc les équations $T = 0$, $U = 0$, et $P = 0$, $R = 0$ se réduisent aux seules et mêmes équations (a) et (b).

86. Ainsi, d'après la méthode de Monge, l'intégration de l'équation (1) se ramène à l'intégration du système des équations

$$H dy + N dz, - (K \pm \sqrt{G}) dx = 0, \\ H dz' + (K \mp \sqrt{G}) dz + M dx = 0,$$

auxquelles on peut encore joindre la suivante,

$$dz = z' dx + z'' dy.$$

Les équations d'Amperè (A), (B), (C), étant multipliées par dx , deviennent identiques de forme avec les précédentes; mais ces deux systèmes d'équations se distinguent essentiellement en ce que l'un contient les différentielles des deux variables indépendantes et les différentielles totales des variables dépendantes, tandis que dans l'autre il n'y a que la différentielle d'une seule des variables indépendantes, avec les différentielles partielles des variables dépendantes par rapport à cette variable indépendante.

87. Considérons encore la méthode de Boole. Elle est fondée sur la supposition de l'existence d'une intégrale intermédiaire ou du premier ordre pour l'équation (1). L'autour de la méthode expose cette idée fondamentale sous deux formes différentes, pour atteindre un seul et même but. Mais, en raison, du défaut de généralité du fondement de cette méthode, il suffit de considérer une seule de ces formes.

Soit

$$F = 0,$$

l'intégrale du premier ordre supposée de l'équation (1). Dans sa composition, outre les variables x, y, z , il entre aussi z' et z'' ; par suite, en la différentiant par rapport à x et à y , il vient

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z'\right) = \frac{\partial F}{\partial z'} z'' + \frac{\partial F}{\partial z''} z''', \\ -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z''\right) = \frac{\partial F}{\partial z'} z' + \frac{\partial F}{\partial z''} z''.$$

Ces deux équations peuvent servir au même but pour lequel, dans la méthode de Monge, on a employé les équations

$$dz' = z'' dx + z' dy, \quad dz'' = z' dx + z'' dy.$$

Mais de cette manière on serait conduit à répéter tout ce qui a été développé dans l'exposition de la méthode de Monge; seulement, au lieu de

$$dx, \quad dy, \quad dz', \quad dz'',$$

on emploierait ici respectivement

$$\frac{\partial F}{\partial z'} \quad \frac{\partial F}{\partial z}, \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z'\right), \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z'\right).$$

On peut donc écrire directement les équations auxquelles se ramène l'intégration de (1),

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} - N\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z'\right) - (K \pm \sqrt{G}) \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ H\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z'\right) + (K \mp \sqrt{G})\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z'\right) - M \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, des deux intégrales du premier ordre possibles en général pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, l'une doit satisfaire aux équations simultanées linéaires précédentes aux dérivées partielles du premier ordre, où l'on prend $\sqrt{G}$ avec les signes supérieurs (ou inférieurs); et l'autre doit satisfaire aux mêmes équations, où l'on prend $\sqrt{G}$ avec les signes inférieurs (ou supérieurs).

88. En comparant ces trois méthodes, il est impossible de ne pas accorder la préférence à celle qu'a proposée Ampère: en premier lieu, à cause de la généralité du procédé, fondé sur la seule hypothèse de l'existence d'une intégrale finie de l'équation (1), en quoi elle a l'avantage sur la méthode de Boole, qui suppose l'existence d'une intégrale générale du premier ordre, tandis qu'une telle intégrale n'est pas toujours possible, lors même que l'intégrale finie existe; en second lieu, à cause de sa plus grande clarté, par comparaison avec la partie analogue de la méthode de Monge, dans laquelle l'équation transformée (1) se partage en deux; enfin, en troisième lieu, à cause de la forme des équations auxquelles se ramène l'intégration de (1). On est conduit par une voie naturelle aux intégrales d'Ampère par les fonctions arbitraires des arguments α ou β , nécessaires pour leur généralité; car elles ne renferment que les dérivées partielles ou les différentielles par rapport à une seule des variables indépendantes, x .

Relativement à la seconde des trois considérations précédentes, il faut encore remarquer qu'Ampère, ayant indiqué avec précision la cause pour laquelle l'équation transformée (1) peut être partagée en deux, a appliqué en même temps de quoi dépend la possibilité ou l'impossibilité de l'application de cette même méthode à d'autres équations, différentes de (1).

89. Prenons, pour cela, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F(x, y, z, z', z'', z''', z''') = 0,$$

en la supposant entière et rationnelle, du moins par rapport à z'' , z''' , z''' , et de forme différente de (1).

En admettant pour cette équation l'existence d'une intégrale générale finie, et prenant l'argument α de l'une des deux fonctions arbitraires pour variable indépendante, en même temps que x , on obtiendra pour z' , z'' , z''' les expressions (3). En les substituant dans l'équation proposée, et ordonnant le résultat suivant les puissances ascendantes de $\frac{\partial z'}{\partial \alpha}$, on obtiendra une équation transformée, de la forme

$$P + Q \frac{\partial z'}{\partial y} + R \left[\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right]^2 + \dots = 0.$$

De même que l'équation proposée sera satisfaite par les valeurs de z , z' , z'' , z''' , tirées de l'intégrale, en supposant que les variables indépendantes soient x et y ; de même l'équation transformée devra être satisfaite par les valeurs de y , z , z' , z'' , déduites des mêmes équations de l'intégrale dans l'hypothèse de x et de α variables indépendantes. Mais l'équation transformée peut se changer en identité de deux manières, selon que les dérivées du second ordre z'' , z''' , seront hétérogènes ou homogènes à l'intégrale par rapport à α .

Dans le premier cas, le rapport $\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ contiendra une fonction arbitraire de α qui n'entrera pas dans les coefficients P , Q , R , ..., et ces derniers se réduiront d'eux-mêmes à zéro. Dans le second cas, les mêmes fonctions arbitraires entreront tant dans le rapport $\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ que dans les coefficients; par suite, le premier membre de l'équation transformée pourra se réduire à zéro, sans que l'on ait les identités $P = 0$, $Q = 0$, Pour juger de la possibilité du premier cas, il faut poser les équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \dots;$$

puis y remplacer $\frac{\partial z'}{\partial x}$ et $\frac{\partial z'}{\partial y}$ par leurs valeurs respectives

$$z'' + z' \frac{\partial y}{\partial x}, \quad z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x}.$$

après quoi elles ne contiendront plus que

$$x, y, z, z', z'', z''', z''', \frac{\partial y}{\partial x}.$$

90. Si l'on obtient, comme résultats de l'élimination de $\frac{\partial y}{\partial x}$, des équations équivalentes entre elles et à l'équation proposée $F = 0$, alors l'hypothèse de z'', z', z_n hétérogènes à l'intégrale par rapport à α (quel que soit celui des deux arguments que l'on représente par α) sera vérifiée; dans le cas contraire, elle ne le sera pas. Dans cette élimination, on peut généralement, de chacune des équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad \dots,$$

déduire des valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, et les substituer dans les autres. Mais, pour se borner à la seule considération de celles d'entre elles qui correspondent réellement aux deux arguments α, β des fonctions arbitraires de l'intégrale, prises successivement pour variables indépendantes en même temps que x , il faut les égaler aux valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ obtenues comme solutions de l'équation du second degré

$$\frac{\partial F}{\partial z_n} - \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0;$$

ou bien on peut, si c'est plus simple dans le cas proposé, prendre les deux racines de cette équation pour les substituer dans

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \dots$$

91. Pour éclaircir ce qui précède, considérons, par exemple, l'équation

$$z', z'' + x(z'' z_n - z', z')^2 = 0.$$

En y substituant pour z'', z', z_n , les valeurs (3), il vient

$$x \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^4 + \left[\frac{\partial z'}{\partial x} - 2x \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial z'}{\partial x} + \left[x \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances du rapport $\frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}$ nous aurons les équations

$$P = \frac{\partial z'}{\partial x} = 0,$$

$$Q = \frac{\partial z'}{\partial x} \left[1 - 2x \frac{\partial z'}{\partial x} \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} \right) \right] = 0,$$

$$R = x \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

En vertu de la première de ces équations, la seconde est aussi satisfaite, et la troisième se simplifie, en sorte qu'il suffit de considérer les deux équations

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = 0, \quad x \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

lesquelles, par la substitution des valeurs

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = z'' + z', \quad \frac{\partial y}{\partial x} = z' + z_n \frac{\partial y}{\partial x},$$

prennent la forme

$$z' + z_n \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad x \left(z'' + z', \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Mais, en substituant dans la seconde de ces équations la valeur

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z'}{z_n},$$

tirée de la première, elle devient

$$x \left(z'' - \frac{z', z'}{z_n} \right) + \frac{z', z'}{z_n} = 0,$$

équation équivalente à la proposée. Par suite, la valeur

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z'}{z_n}$$

peut correspondre, dans l'intégrale finie supposée, à une fonction arbitraire d'un argument α , par rapport auquel les dérivées secondes z'', z', z_n , sont hétérogènes à l'intégrale.

Du reste, on doit encore pouvoir vérifier que cette valeur est racine de l'équation du second degré

$$\frac{\partial F}{\partial z_n} - \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

qui, dans le cas actuel, est de la forme

$$2xz''_u(z''_u - z'^2) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - [4xz'_u(z''_u - z'^2) - z''_u] \frac{\partial y}{\partial x} + z'_u = 0.$$

Pour cela, en divisant son premier membre par $\frac{\partial y}{\partial x} + z'_u$, on obtient pour quotient

$$2xz''_u(z''_u - z'^2) \frac{\partial y}{\partial x} + 2xz'_u(z''_u - z'^2) - z''_u,$$

et pour reste

$$\frac{2}{z''_u} [x(z''_u - z'^2)^2 + z'_u z''_u].$$

Ce dernier est égal à zéro, en vertu de l'équation proposée; par suite, la valeur $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z'}{z''}$ est effectivement une racine de l'équation du second degré ci-dessus. Son autre racine se trouve en égalant le quotient à zéro, et résolvant l'équation obtenue par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$. Il vient ainsi

$$\frac{\partial y}{\partial x}(\beta) = \frac{1}{2x(z''_u - z'^2)} - \frac{z'_u}{z''_u}.$$

Cette valeur correspond évidemment à l'argument β , qui entre sous le signe d'une fonction arbitraire dans l'intégrale générale finie supposée, de telle sorte que toutes les dérivées z', z'', z''', z'''' soient homogènes à celle-ci par rapport à β .

§ 13.

92. Dans le § précédent, nous avons vu que le problème de l'intégration de l'équation

$$(1) \quad Hx'' + 2Kz' + Lz'' + M + N(z''_u - z'^2) = 0$$

se ramène à l'intégration d'un système de plusieurs équations, que, pour abréger, nous pourrions écrire ainsi,

$$(2) \quad \begin{cases} Hdy + Ndz - (K \pm \sqrt{G})dx = 0, \\ Hdz' + (K \mp \sqrt{G})dz + Mdx = 0, \\ dz - z'dx - z'dy = 0. \end{cases}$$

Relativement à ce système, examinons d'abord la question suivante: A quelles conditions, et en quel nombre peut-il exister, pour les

équations (2), des intégrales de la forme $u = \text{const.}$, u étant supposée une fonction de x, y, z, z', z'' ?

Dans les équations (2), il faut prendre partout ou les signes supérieurs, ou les signes inférieurs devant $\sqrt{G}$; on a donc deux systèmes d'équations simultanées incomplètes, le nombre des variables x, y, z, z', z'' , qui entrent dans chacune d'elles, étant plus grand de deux unités que celui des équations. On peut appeler intégrale de ces systèmes d'équations différentielles toute fonction u des variables x, y, z, z', z'' , dont la différentielle est identiquement égale à zéro en vertu des équations (2). Or, en résolvant les équations (2) par rapport à dz, dz', dz'' , on trouve

$$dz = z'dx + z'dy,$$

$$dz' = -\frac{L}{N}dx + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}dy,$$

$$dz'' = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}dx - \frac{H}{N}dy,$$

et, en substituant ces valeurs de dz, dz', dz'' , dans l'expression de du , il vient

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z''} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + z' \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N} \frac{\partial u}{\partial z''} \right) dy.$$

Par conséquent, du se réduit à zéro, et $u = \text{const.}$ est une intégrale des équations (2), si la fonction u satisfait aux équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z''} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + z' \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N} \frac{\partial u}{\partial z''} = 0.$$

93. La théorie de l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre n'a été élucidée que dans ces derniers temps, grâce aux travaux de Jacobi, de Bouquet et de Boole (*).

(*) Une esquisse de cette théorie a été exposée dans ma dissertation „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.“ (Archiv d. Math. u. Physik, Bd. L., S. 393—416, §§. 23—25).

et la question qui nous occupe présente une occasion d'appliquer cette théorie.

Pour cela, représentons, pour abréger l'écriture, les deux systèmes d'opérations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} + z' \frac{\partial}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{H}{N} \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

respectivement par les symboles ∇_1 et ∇_2 , au moyen desquels les équations (3) prendront la forme

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0.$$

La condition nécessaire pour que ces deux équations puissent admettre une intégrale commune consiste, comme on sait, en ce que le résultat de l'opération ∇_1 , appliquée à la fonction $\nabla_2 u$, soit égal au résultat de l'opération ∇_2 , appliquée à la fonction $\nabla_1 u$, c'est-à-dire, que l'on ait

$$\nabla_1 \nabla_2 u = \nabla_2 \nabla_1 u.$$

Or, en effectuant les opérations indiquées, on trouve

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 u - \nabla_2 \nabla_1 u = & \left(\frac{K \pm \sqrt{G}}{N} - \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + \left(\nabla_1 \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} \right) \frac{\partial u}{\partial z'} - \left(\nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \right) \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

D'après cela, il est clair que cette condition nécessaire peut être remplie de deux manières: 1° lorsque, dans l'expression précédente, les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, se réduisent chacun à zéro; 2° lorsque, ces coefficients étant différents de zéro, aux deux équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$, nous en adjoignons une troisième

$$\nabla_1 \nabla_2 u - \nabla_2 \nabla_1 u = 0,$$

laquelle, évidemment, est algébriquement distincte des deux premières; car elle ne contient pas les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

94. Chacun de ces deux cas doit être examiné à part. Occupons-nous d'abord du premier, où, par hypothèse, ont lieu les égalités

$$\begin{aligned} \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} - \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} = 0, \quad \nabla_1 \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} = 0, \\ \nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} = 0, \end{aligned}$$

ou

$$G = 0, \quad \nabla_1 \frac{K}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} = 0, \quad \nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K}{N} = 0 \quad (*);$$

les équations simultanées considérées prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \nabla_1 u = \frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K}{N} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \nabla_2 u = \frac{\partial u}{\partial y} + z' \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N} \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que, dans le cas actuel, les équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$ ont trois intégrales communes, de la forme

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \quad u_3 = \text{const.},$$

et en même temps de montrer comment se trouvent ces intégrales.

Pour cela, soient v_1, v_2 les intégrales distinctes de l'équation $\nabla_1 u = 0$, lesquelles doivent être au nombre de trois. Déterminons, de plus, une fonction $F(v_1, v_2, v_3)$ de ces trois intégrales et de la variable y , qui satisfasse à la seconde des équations considérées $\nabla_2 F = 0$. Il vient, en la développant,

$$\frac{\partial F}{\partial y} \nabla_2 y + \frac{\partial F}{\partial v} \nabla_2 v + \frac{\partial F}{\partial v_1} \nabla_2 v_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2} \nabla_2 v_2 = 0.$$

Ici on a évidemment $\nabla_2 y = 1$, et il est facile de voir que les quantités $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ s'expriment au moyen de v_1, v_2 seulement. En effet, on a identiquement, pour une fonction quelconque u ,

$$\nabla_1 \nabla_2 u = \nabla_2 \nabla_1 u;$$

donc, en faisant successivement $u = v_1, v_2, v_3$, on obtient les identités

$$\begin{aligned} \nabla_1 (\nabla_2 v) = \nabla_2 (\nabla_1 v) = \nabla_2 0 = 0, \\ \nabla_1 (\nabla_2 v_1) = \nabla_2 (\nabla_1 v_1) = \nabla_2 0 = 0, \\ \nabla_1 (\nabla_2 v_2) = \nabla_2 (\nabla_1 v_2) = \nabla_2 0 = 0, \end{aligned}$$

qui démontrent que $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ sont des intégrales de l'équation $\nabla_1 u = 0$. Mais v_1, v_2 représentent toutes les intégrales distinctes de l'équation $\nabla_1 u = 0$; par suite, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ doivent s'exprimer au moyen de v_1, v_2 ; et, si ces expressions sont

$$\nabla_2 v = f(v_1, v_2), \quad \nabla_2 v_1 = f_1(v_1, v_2), \quad \nabla_2 v_2 = f_2(v_1, v_2),$$

(*) Ces conditions ont été établies par Boole. Voir les *Philosophical Transactions*, 1862, T. CLII, Part I, p. 452.

on aura alors l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} f + \frac{\partial F}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2} f_2 = 0.$$

Pour cette équation on trouve, par les méthodes connues, trois intégrales distinctes, de la forme

$$u_1 = F_1(y, v, v_1, v_2) = \text{const.}, \quad u_2 = F_2(y, v, v_1, v_2) = \text{const.}, \\ u_3 = F_3(y, v, v_1, v_2) = \text{const.},$$

lesquelles doivent évidemment être des intégrales communes des équations

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0.$$

95. Dans l'exposition précédente de la méthode d'intégration simultanée des équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$, on peut enfin échanger entre eux les rôles de ces deux équations; mais, dans tous les cas, il faut commencer par déterminer trois intégrales distinctes de l'une d'elles. Pour cela, concurremment avec les méthodes ordinaires, on peut encore faire usage du procédé que Poisson a découvert pour les équations de la Dynamique; car, en vertu de l'identité

$$\nabla_1 (\nabla_2 u) = \nabla_2 (\nabla_1 u),$$

la substitution d'une intégrale de l'une quelconque des équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$ dans le premier membre de l'autre doit donner une intégrale de la première. Le succès de cette méthode tient finalement à la condition que cette substitution donne des intégrales distinctes de celles que l'on substitue.

96. Indiquons maintenant comment, des trois intégrales obtenues ci-dessus

$$(4) \quad u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad u_3 = c,$$

où a, b, c désignent des constantes arbitraires, on peut tirer d'abord une intégrale particulière, puis l'intégrale générale de l'équation (1).

Des équations (4) on tire, pour $z, z', z'',$ des expressions de la forme

$$(5) \quad z = \omega(x, y, a, b, c), \quad z' = \omega_1(x, y, a, b, c), \quad z'' = \omega_2(x, y, a, b, c).$$

De la méthode même de calcul des intégrales (4) des équations (3) on peut déjà conclure que les expressions (5) de z, z', z'' , doivent satisfaire aux équations (2). En résolvant celles-ci par rapport à dz, dz', dz'' , et introduisant la condition $G = 0$, on les ramène à la forme

$$(6) \quad \begin{cases} dz = z' dx + z'' dy, \\ dz' = -\frac{L}{N} dx + \frac{K}{N} dy, \\ dz'' = \frac{K}{N} dx - \frac{H}{N} dy. \end{cases}$$

Mais cette conclusion est tellement importante, que nous allons chercher à en donner une démonstration directe. Remarquons, pour cela, qu'une fonction entièrement arbitraire de u_1, u_2, u_3 , que nous désignerons par $\Phi(u_1, u_2, u_3)$, doit satisfaire aux équations (3), lorsqu'on la substitue à u , puisque l'on a

$$\nabla_1 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + z' \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \frac{K}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z''} \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \nabla_1 u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \nabla_1 u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \nabla_1 u_3, \\ \nabla_2 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z'' \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{K}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} - \frac{H}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z''} \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \nabla_2 u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \nabla_2 u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \nabla_2 u_3,$$

et que les quantités

$$\nabla_1 u_1, \quad \nabla_1 u_2, \quad \nabla_1 u_3, \\ \nabla_2 u_1, \quad \nabla_2 u_2, \quad \nabla_2 u_3$$

sont égales à zéro. En prenant la différentielle de la fonction Φ , et substituant dans son expression les valeurs de $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ tirées des égalités $\nabla_1 \Phi = 0$, $\nabla_2 \Phi = 0$, nous aurons l'égalité

$$(7) \quad \begin{cases} d. \Phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} (dz - z' dx - z'' dy) + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} (dz' + \frac{L}{N} dx - \frac{K}{N} dy) \\ \quad + \frac{\partial \Phi}{\partial z''} (dz'' - \frac{K}{N} dx + \frac{H}{N} dy), \end{cases}$$

dans laquelle

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z'} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial z'} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial z'}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z''} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z''} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial z''} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial z''}.$$

Si maintenant on remplace z, z', z'' , par leurs valeurs (5), le premier membre de l'égalité (7) se réduira à zéro, puisque u_1, u_2, u_3 ,

$\Phi(u_1, u_2, u_3)$ se changeront respectivement en a, b, c , $\Phi(a, b, c)$; par conséquent, le second membre de l'égalité (7) devra aussi être égal à zéro. Mais il est facile de remarquer que les dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \frac{\partial \Phi}{\partial z''}$ ne peuvent être identiquement nulles, et il suffit de le faire voir en détail pour une de ces dérivées, par exemple, pour $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

En effet, les trois dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_3}{\partial z}$ ne peuvent être toutes nulles, puisque, si elles l'étaient, on ne pourrait des équations (4) tirer les valeurs (5); leurs multiplicateurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$, par la substitution des valeurs (5) de z, z', z'' , se changent en des constantes arbitraires. Ainsi le second membre de l'égalité (7) ne devra se réduire à zéro qu'en vertu de ce que les équations (6) se changent en identités par la substitution des valeurs de z, z', z'' .

97. D'après cela, on a l'égalité

$$d\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy,$$

en conséquence de laquelle les équations (5) peuvent être rem-
placées par les suivantes,

$$z = \omega(x, y, a, b, c), \quad z' = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad z'' = \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

En substituant ces valeurs de z, z', z'' dans les deux dernières équations (6), on a les égalités

$$d \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{L}{N} dx + \frac{K}{N} dy, \quad d \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{K}{N} dx - \frac{H}{N} dy,$$

qui conduisent encore aux trois égalités suivantes,

$$(8) \quad \begin{cases} N \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + L = 0, \\ N \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - K = 0, \\ N \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + H = 0. \end{cases}$$

Il est maintenant facile de démontrer que l'intégrale $z = \omega(x, y, a, b, c)$, satisfaisant aux trois équations précédentes, doit nécessairement satisfaire aussi à l'équation (1). Pour cela, il suffit de remarquer que, en vertu de la condition $G = K^2 - HL + MN = 0$, l'équation (1) peut s'écrire ainsi,

$$(N \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + L)(N \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + H) = (N \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - K)^2.$$

98. Ainsi nous avons déjà une intégrale particulière de l'équation (1), renfermant trois constantes arbitraires a, b, c ; cherchons à en tirer l'intégrale générale de la même équation, renfermant deux fonctions arbitraires.

Pour cela, remarquons préalablement que les arguments α et β des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale cherchée doivent être égaux; car on a en général, pour l'équation (1),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{K - N z' + \sqrt{G}}{H + N z''}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{K - N z' - \sqrt{G}}{H + N z''};$$

or, dans le cas actuel, $G = 0$; par conséquent, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \quad \text{et} \quad \alpha = \beta.$$

99. Démontrons maintenant la proposition suivante. Soient φ et ψ des fonctions arbitraires; substituons $\alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)$ à la place de a, b, c dans l'intégrale $z = \omega(x, y, a, b, c)$, et déterminons la fonction α par la condition que la dérivée de la fonction ω par rapport à α soit égale à zéro. Les deux équations ainsi obtenues

$$(9) \quad z = \omega[x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)], \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$$

représenteront l'intégrale générale de l'équation (1).

En effet, si l'on différencie les équations (9) par rapport à x et à y , il vient

$$z' = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial x} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \\ z'' = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

En différenciant encore une fois, par rapport à x et à y , les valeurs de z' et de z'' , on aura

$$z''' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2, \\ z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^3} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2.$$

Pour s'assurer de la vérité du théorème énoncé, il suffit de démontrer que, par la substitution des valeurs précédentes de z, z', z'', z', z'', z'' , on satisfait à l'équation (1). Posons, pour abrégé,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \omega'', & \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= \omega', & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \omega'', \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= -q, & \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= l, & \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= l,\end{aligned}$$

et désignons le premier membre de l'équation (1) par $F(z'', z', z'')$. Le résultat de cette substitution prend, d'après le théorème de Taylor, la forme suivante,

$$\begin{aligned}F(\omega'' + qh^2, \omega' + qhl, \omega'' + qh^2) \\ = F(\omega'', \omega', \omega'') + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega''} h^2 + \frac{\partial F}{\partial \omega'} hl + \frac{\partial F}{\partial \omega''} l^2 \right) q \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega''^2} h^4 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'' \partial \omega'} h^3 l + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'^2} h^2 l^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'' \partial \omega''} h^2 l^2 \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \omega' \partial \omega''} hl^3 + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega''^2} l^4 \right) q^2.\end{aligned}$$

Or on a

$$F(\omega'', \omega', \omega'') = (N\omega'' + L)(N\omega'' + H) - (N\omega', -K)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \omega''} &= N(H + N\omega''), & \frac{\partial F}{\partial \omega'} &= 2N(K - N\omega'), & \frac{\partial F}{\partial \omega''} &= N(L + N\omega''); \\ \frac{\partial F}{\partial \omega''} &= N(H + N\omega''), & \frac{\partial F}{\partial \omega'} &= 2N(K - N\omega'), & \frac{\partial F}{\partial \omega''} &= N(L + N\omega'');\end{aligned}$$

par conséquent, le premier et le second terme du développement précédent se réduisent à zéro, en vertu des équations (8), qui doivent avoir lieu indépendamment des valeurs de a, b, c .

Le multiplicateur de q^2 s'évanouit aussi; car toutes les dérivées du second ordre de F sont égales à zéro, à l'exception de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \omega''^2} = -2N, \text{ et de } \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'' \partial \omega''} = N,$$

qui donnent des termes égaux, mais de signes contraires.

Le théorème étant ainsi démontré, nous avons maintenant une méthode tout à fait régulière pour l'intégration de l'équation (1), sous les conditions

$$(10) \quad G = 0, \quad \nabla_1 \frac{K}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} = 0, \quad \nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K}{N} = 0.$$

100. Il reste à éclaircir cette exposition théorique par un exemple particulier. Prenons, pour cela, l'équation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \left(1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(1 - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2,$$

ou, avec d'autres notations,

$$(z' + z' + z'')(1 + z'') = (1 - z')^2.$$

Ici les conditions (10) sont évidemment satisfaites. Formons les deux équations simultanées

$$\begin{aligned}\nabla_1 u &= \frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - (z' + z'') \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial u}{\partial z''} = 0, \\ \nabla_2 u &= \frac{\partial u}{\partial y} + z' \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z''} = 0,\end{aligned}$$

et trouvons toutes les intégrales distinctes de la seconde de ces équations. En prenant, pour cela, le système d'équations

$$dy = \frac{dz}{z}, \quad dz' = -dz'',$$

on trouve les trois intégrales distinctes

$$v = z' + z'', \quad v_1 = y - z', \quad v_2 = z + \frac{z'}{2}.$$

Cherchons maintenant une fonction $F(x, v, v_1, v_2)$, qui satisfasse à l'équation $\nabla_1 F = 0$. En développant celle-ci, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial x} \nabla_1 x + \frac{\partial F}{\partial v} \nabla_1 v + \frac{\partial F}{\partial v_1} \nabla_1 v_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2} \nabla_1 v_2 = 0.$$

Or on a

$$\nabla_1 x = 1, \quad \nabla_1 v = 1 - v, \quad \nabla_1 v_1 = v, \quad \nabla_1 v_2 = v.$$

Donc l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} (1 - v) + \left(\frac{\partial F}{\partial v_1} + \frac{\partial F}{\partial v_2} \right) v = 0.$$

Ses trois intégrales distinctes s'obtiendront par l'intégration des équations

$$dx = \frac{dv}{1 - v} = \frac{dv_1}{v} = \frac{dv_2}{v},$$

et seront ainsi de la forme

$$(1 - v)^a = a, \quad v_1 - v_2 = b, \quad v_1 + v - a = c,$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires. En substituant les valeurs de v, v_1, v_2 , il vient

$$(1-z'-z)e^x = a, \quad y-z-z'-\frac{z'^2}{2} = b, \quad y-x-z_1 = c,$$

et l'on en tire

$$\begin{aligned} z_1 &= c + x - y, \\ z'_1 &= 1 - ae^{-x} - x + y - c, \\ z &= b + ae^{-x} + x + c - \frac{(c+x-y)^2}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation représente une intégrale particulière de l'équation proposée. Elle donne, en effet, par différentiation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 - ae^{-x} - x + y - c, & \frac{\partial z}{\partial y} &= c + x - y, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= ae^{-x} - 1, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 1, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -1. \end{aligned}$$

On voit par là d'abord que les valeurs trouvées pour z' et pour $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont identiques, ainsi que celles de z , et de $\frac{\partial z}{\partial y}$; en second lieu, que, par la substitution des valeurs des dérivées du premier et du second ordre de z , on réduit à zéro les expressions

$$z' + z, \quad z'', \quad 1 + z'', \quad 1 - z',$$

et par suite on satisfait à l'équation proposée. Il s'ensuit de là, en vertu de ce qui a été démontré plus haut, que si, dans l'intégrale particulière précédente, deux des constantes a, b, c sont considérées comme des fonctions arbitraires de la troisième, et qu'on égale à zéro la dérivée partielle de z par rapport à cette troisième constante, les deux équations ainsi obtenues formeront l'intégrale générale de l'équation proposée. En faisant, par exemple,

$$c = a, \quad b = \varphi(a), \quad a = \psi(a),$$

nous représenterons l'intégrale générale sous la forme des deux équations

$$\begin{cases} z = \varphi(a) + \psi(a) e^{-x} + x + a - \frac{(a+x-y)^2}{2}, \\ 0 = \varphi'(a) + \psi'(a) e^{-x} - a - x + y + 1. \end{cases}$$

Il est aisé, du reste, de vérifier le résultat précédent, en faisant voir que l'on obtient l'équation proposée en éliminant $a, \varphi(a)$ et $\psi(a)$ entre les deux équations précédentes. De la seconde de ces équations on tire

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1 + \psi'(a)e^{-x}}{\varphi''(a) + \psi''(a)e^{-x} - 1}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1}{\varphi''(a) + \psi''(a)e^{-x} - 1},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= -[1 + \psi'(a)e^{-x}]. \end{aligned}$$

En différentiant la première équation de l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 - \psi(a)e^{-x} - x + y - a, & \frac{\partial z}{\partial y} &= x - y + a, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \psi(a)e^{-x} - 1 - [1 + \psi'(a)e^{-x}] \frac{\partial a}{\partial x}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 1 + \frac{\partial a}{\partial x}, \\ & & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -1 + \frac{\partial a}{\partial y}. \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 1, & \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 1, \\ & & \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \\ & & -[1 + \psi'(a)e^{-x}] &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 1 \end{aligned}$$

D'après cela, la troisième des équations précédentes prend la forme

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 1}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 1} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 1}$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 1 \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 1 \right).$$

et cette dernière équation est identique avec la proposée.

101. *Remarque I.* — Les conditions

$$\nabla_1 \frac{K}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} = 0, \quad \nabla_3 \frac{K}{N} + \nabla_1 \frac{H}{N} = 0,$$

qui, jointes à la condition $G = 0$, assurent le succès de l'intégration de l'équation (1) d'après la méthode précédente, peuvent s'exprimer très-simplement. Pour cela, remarquons que, pour $G = 0$, l'application de la méthode précédente est encore assujettie à la condition de possibilité d'une seule et même intégrale particulière pour les trois équations

$$z' + \frac{L}{N} = 0, \quad z' - \frac{K}{N} = 0, \quad z'' + \frac{H}{N} = 0,$$

ce qui exige, relativement aux coefficients H, K, L, N , deux conditions, qui doivent nécessairement être équivalentes aux précédentes. En effet, ces équations donnent

$$z'' = -\frac{\partial \left(-\frac{L}{N}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x}, \quad z'' = -\frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{H}{N}\right)}{\partial x}$$

Nous indiquons ici par un point ($\cdot$), placé après le signe ∂ , qu'il faut différentier par rapport à x et à y , non-seulement en tant que ces variables entrent explicitement, mais encore en tant qu'elles entrent par le moyen de z, z', z'' . En effectuant ces opérations, et remplaçant z'', z', z'' , par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z} z' - \frac{L}{N} \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x} + \frac{K}{N} \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z} = \nabla_1 \frac{K}{N}$$

et de même

$$\frac{\partial \left(\frac{L}{N}\right)}{\partial y} = \nabla_2 \frac{L}{N}, \quad \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y} = \nabla_2 \frac{K}{N}, \quad \frac{\partial \left(\frac{H}{N}\right)}{\partial x} = \nabla_1 \frac{H}{N}$$

Par conséquent, les conditions (10) peuvent se représenter plus simplement comme il suit,

$$G = 0, \quad \frac{\partial \frac{K}{N}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{L}{N}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \frac{K}{N}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{H}{N}}{\partial x} = 0.$$

102. **Remarque II.** — Il a été démontré ci-dessus que l'équation (1), sous les conditions (10), a une intégrale générale de la forme

$$z = \omega[x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)], \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0.$$

La proposition réciproque est également vraie, savoir, qu'à toute intégrale de la forme précédente correspond une équation différentielle de la forme (1), satisfaisant aux conditions (10). En effet, en différentiant la première des équations précédentes, et ayant égard à la seconde, il vient

$$z' = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad z' = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$z' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Ici il convient d'introduire la transformation des expressions précédentes de z'', z', z'' , que nous avons déjà employée plus haut, mais sans explication. En ayant égard à la signification du point placé après le signe ∂ , on a

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \varphi'(\alpha) + \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi} \varphi'(\alpha) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \psi} \psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial \varphi} \varphi'(\alpha) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial \psi} \psi'(\alpha),$$

et, en différentiant par rapport à x la seconde équation de l'intégrale, il vient

$$\frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Nous aurons, d'après cela,

$$z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2, \quad z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2,$$

$$z' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

En éliminant entre ces équations $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, on trouve l'équation

$$\left(z'' - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right) \left(z'' - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = \left(z', -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Enfin, à l'aide des équations

$$z = \omega, \quad z' = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2},$$

nous pourrions exprimer α , $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ au moyen de x , y , z , z' , z'' , et substituer ces valeurs dans les fonctions

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y},$$

après quoi ces dernières prendront une forme que nous pourrions représenter par

$$-\frac{L}{N}, \quad -\frac{H}{N}, \quad \frac{K}{N},$$

et l'équation précédente s'écrira ainsi

$$\left(z'' + \frac{L}{N}\right) \left(z'' + \frac{H}{N}\right) = \left(z', -\frac{K}{N}\right)^2,$$

c'est-à-dire que nous aurons une équation de la forme (1). On voit qu'elle satisfait à la condition (10) par la raison que, en vertu de la provenance des coefficients $-\frac{L}{N}$, $-\frac{H}{N}$, $\frac{K}{N}$ ceux-ci doivent vérifier les égalités

$$\frac{\partial \left(-\frac{L}{N}\right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \left(-\frac{H}{N}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y},$$

lesquelles, comme on l'a démontré plus haut, se ramènent aux suivantes,

$$\nabla_1 \frac{K}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} = 0, \quad \nabla_2 \frac{K}{N} + \nabla_1 \frac{L}{N} = 0.$$

L'égalité $G = 0$ résulte de la forme même de l'équation.

Au point de vue géométrique, lorsque x , y , z sont les coordonnées des points d'une surface, les deux équations de l'intégrale générale

$$z = \omega[x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0,$$

représentent une surface enveloppant une série de surfaces données par l'équation intégrale particulière

$$z = \omega(x, y, a, b, c),$$

lorsqu'on y fait varier d'une manière continue les trois paramètres a , b , c , en les liant par deux relations arbitraires

$$b = \varphi(a), \quad c = \psi(a).$$

Par suite, l'équation (1), sous les conditions (10), représente l'équation différentielle commune à ces surfaces enveloppantes.

§. 14.

103. Après avoir montré de quelle manière on intègre l'équation (1) du §. précédent, lorsque les trois quantités

$$\nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} = P, \quad \nabla_2 \frac{L}{N} + \nabla_1 \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} = Q, \quad \pm \frac{2\sqrt{G}}{N} = R$$

se réduisent à zéro, passons maintenant à la considération des autres cas qui peuvent se présenter.

Si P , Q , R sont différents de zéro, alors les deux équations

$$\begin{aligned} \nabla_1 u &= \frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \nabla_2 u &= \frac{\partial u}{\partial y} + z'' \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{H}{N} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

ne peuvent admettre une intégrale commune que dans le cas où a lieu en même temps la troisième équation

$$\nabla_1 \nabla_2 u - \nabla_2 \nabla_1 u = \nabla_3 u = R \frac{\partial u}{\partial z} + Q \frac{\partial u}{\partial z'} - P \frac{\partial u}{\partial z''} = 0.$$

En admettant l'existence de cette dernière, examinons à quelles conditions et en quel nombre il peut y avoir des intégrales satisfaisant à la fois aux trois équations précédentes. Afin de résoudre ces deux questions aussi simplement que possible, ramenons au nombre minimum les dérivées partielles dans chaque équation. Pour cela, entre les deux premières équations éliminons, à l'aide de la troisième, une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z''}$. Si l'on suppose R différent de zéro,

et qu'on élimine ainsi $\frac{\partial u}{\partial z}$, on ramènera les trois équations considérées à la forme

$$\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial z} + B \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla'' u = \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial z} + D \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla''' u = \frac{\partial u}{\partial z} + E \frac{\partial u}{\partial z} + F \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

où les nouveaux symboles introduits ∇' , ∇'' , ∇''' sont déterminés par les formules

$$\nabla' = \nabla_1 - \frac{z'}{R} \nabla_3, \quad \nabla'' = \nabla_2 - \frac{z'}{R} \nabla_3, \quad \nabla''' = \frac{1}{R} \nabla_3.$$

les expressions des coefficients $A, B, \dots, F$ au moyen des coefficients des équations précédentes étant faciles à obtenir. Les conditions nécessaires pour que, aux trois équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$, appartienne une intégrale commune consistent en ce que les résultats des opérations

$$\nabla' \nabla'' u, \quad \nabla' \nabla''' u, \quad \nabla'' \nabla''' u$$

soient respectivement égaux aux suivants,

$$\nabla' \nabla' u, \quad \nabla'' \nabla' u, \quad \nabla''' \nabla' u.$$

Or chacune des expressions

$$\nabla' \nabla'' u - \nabla'' \nabla' u, \quad \nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u, \quad \nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u$$

est de la forme

$$S \frac{\partial u}{\partial z} + T \frac{\partial u}{\partial z},$$

c'est-à-dire qu'elle est linéaire et homogène par rapport seulement aux deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Par suite, ces expressions peuvent s'annuler de deux manières:

1°. Ou parce que les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial z}$ et de $\frac{\partial u}{\partial z}$ s'annulent séparément dans les trois expressions;

2°. Ou, si les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial z}$ et de $\frac{\partial u}{\partial z}$ ne sont pas nuls dans les trois expressions, parce que l'on égale à zéro des expressions qui

ne s'annulent par d'elles-mêmes, et qu'ainsi aux trois équations données on en joint de nouvelles, algébriquement différentes des équations données, puisqu'elles ne contiennent pas les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

104. Considérons à part chacun de ces deux cas, et occupons-nous d'abord du premier, dans lequel on a, par hypothèse, les trois identités

$$\nabla' \nabla'' u = \nabla'' \nabla' u, \quad \nabla' \nabla''' u = \nabla''' \nabla' u, \quad \nabla'' \nabla''' u = \nabla''' \nabla'' u$$

Il est aisé de faire voir que, dans ce cas, les trois équations simultanées

$$\nabla' u = 0, \quad \nabla'' u = 0, \quad \nabla''' u = 0$$

doivent avoir deux intégrales communes.

Pour cela, en intégrant complètement l'une d'entre elles, par exemple la première

$$\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial z} + B \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

nous trouverons seulement deux intégrales distinctes de cette équation,

$$v = \text{const.}, \quad v_1 = \text{const.}$$

Ensuite, la recherche de l'intégrale

$$F(y, v, v_1) = \text{const.},$$

satisfaisant aux deux premières équations, conduit à l'équation

$$\nabla'' F = \frac{\partial F}{\partial y} \nabla'' y + \frac{\partial F}{\partial v} \nabla'' v + \frac{\partial F}{\partial v_1} \nabla'' v_1 = 0,$$

où l'on a $\nabla'' y = 1$, et où les quantités $\nabla'' v$, $\nabla'' v_1$ s'expriment au moyen des seules variables v , v_1 , puisque, en vertu des identités

$$\nabla' \nabla'' v = \nabla'' \nabla' v = \nabla'' 0 = 0, \quad \nabla' \nabla'' v_1 = \nabla'' \nabla' v_1 = \nabla'' 0 = 0,$$

$\nabla'' v$ et $\nabla'' v_1$ sont des intégrales des l'équation $\nabla' u = 0$. En posant donc

$$\nabla'' v = f(v, v_1), \quad \nabla'' v_1 = f_1(v, v_1),$$

on aura, pour déterminer la fonctions F , l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} f(v, v_1) + \frac{\partial F}{\partial v_1} f_1(v, v_1) = 0,$$

dont l'intégration complète fournit les deux intégrales distinctes

$$w = F(y, v, v_1) = \text{const.}, \quad w_1 = F_1(y, v, v_1) = \text{const.}$$

Enfin, la recherche de l'intégrale

$$\Phi(z, w, w_1) = \text{const.},$$

satisfaisant à la fois aux trois équations données, conduit à l'équation

$$\nabla''' \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \nabla'' z + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \nabla'' w + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \nabla'' w_1 = 0,$$

dans laquelle $\nabla'' z = 1$, et les quantités $\nabla'' w$, $\nabla'' w_1$ s'expriment au moyen de w et de w_1 puisque, en vertu des identités

$$\nabla'' \nabla''' w = \nabla''' \nabla'' w = \nabla''' 0 = 0, \quad \nabla'' \nabla''' w_1 = \nabla''' \nabla'' w_1 = \nabla''' 0 = 0,$$

$\nabla''' w$ et $\nabla''' w_1$ sont des intégrales de l'équation $\nabla''' u = 0$. Donc, en posant

$$\nabla''' w = \varphi(w, w_1), \quad \nabla''' w_1 = \varphi_1(w, w_1),$$

on aura, pour déterminer la fonction Φ , l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \varphi(w, w_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \varphi_1(w, w_1) = 0,$$

dont l'intégration complète fournit les deux intégrales distinctes

$$u_1 = \Phi_1(z, w, w_1) = \text{const.}, \quad u_2 = \Phi_2(z, w, w_1) = \text{const.},$$

satisfaisant aux trois équations simultanées

$$\nabla' u = 0, \quad \nabla'' u = 0, \quad \nabla''' u = 0.$$

Il est aisé de voir que ces deux intégrales satisfont aussi aux trois équations

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0, \quad \nabla_3 u = 0,$$

puisque l'on a

$$\nabla_2 u = R \nabla''' u, \quad \nabla_3 u = \nabla'' u + z_1 \nabla''' u, \quad \nabla_1 u = \nabla' u + z' \nabla''' u,$$

et que les seconds membres de ces dernières égalités s'annulent, lorsqu'on y remplace u par u_1 ou par u_2 .

105. Ainsi, pour déterminer les deux intégrales qui satisfont aux trois équations simultanées $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$, il faut commencer par intégrer complètement l'une des trois équations, c'est-à-dire par déterminer deux intégrales distinctes de cette équation. Mais on peut quelquefois se borner à la détermination d'une de ces deux intégrales; car la substitution d'une intégrale de l'une des trois équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$ dans les

premiers membres des deux autres doit donner des intégrales de la première. En effet, si $v = \text{const.}$ est une intégrale de l'équation $\nabla' u = 0$, les identités

$$\nabla' \nabla' v = \nabla'' \nabla' v = 0, \quad \nabla' \nabla''' v = \nabla''' \nabla' v = 0$$

font voir que $\nabla'' v = \text{const.}$ et $\nabla''' v = \text{const.}$ sont aussi des intégrales de l'équation $\nabla' u = 0$, et il suffit que l'une d'elles soit distincte de l'intégrale $v = \text{const.}$, pour que cette méthode puisse suppléer la solution du problème de l'intégration simultanée des équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$.

106. D'après ce que nous avons vu, pour que l'on puisse déterminer par la méthode précédente deux intégrales satisfaisant aux trois équations simultanées

$$\nabla' u = 0, \quad \nabla'' u = 0, \quad \nabla''' u = 0,$$

trois conditions sont nécessaires, lesquelles sont exprimées par les égalités

$$\nabla' \nabla' u - \nabla'' \nabla' u = 0, \quad \nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u = 0, \\ \nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u = 0,$$

qui doivent avoir lieu pour toute fonction u . Mais il est facile de voir que deux de ces conditions sont suffisantes, la troisième étant une conséquence des deux autres, en vertu d'une relation très-simple qui existe entre les premiers membres de ces équations de condition. Cette relation est exprimée par l'égalité

$$(\nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u) + z_1 (\nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u) \\ - z' (\nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u) = 0,$$

qui a lieu pour toute fonction u .

Comme cette égalité ne dépend que des propriétés des symboles ∇' , ∇'' , ∇''' , et est complètement indépendante de la valeur de la fonction représentée par la lettre u , on pourra faire abstraction de celle-ci, et alors le théorème à démontrer s'exprimera symboliquement de la manière suivante:

$$(\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') + z_1 (\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') - z' (\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'') = 0.$$

Pour les démontrer, rappelons-nous que ∇' , ∇'' , ∇''' s'expriment au moyen de ∇_1 , ∇_2 , ∇_3 , comme il suit,

$$\nabla' = \nabla_1 - \frac{z'}{R} \nabla_3, \quad \nabla'' = \nabla_2 - \frac{z'}{R} \nabla_3, \quad \nabla''' = \frac{1}{R} \nabla_3,$$

et que, de plus,

$$\nabla_3 = \nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1.$$

En vertu de ces définitions, on obtient facilement les égalités symboliques suivantes (qu'il est d'ailleurs facile de changer en égalités ordinaires, en rétablissant sous les signes d'opérations la fonction u , qu'on a omise),

$$\begin{aligned} & \nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla' \\ &= \left[1 - \left(\nabla_1 \frac{z'}{R} \right) + \left(\nabla_2 \frac{z'}{R} \right) + \frac{z'}{R} \left(\nabla_3 \frac{z'}{R} \right) - \frac{z'}{R} \left(\nabla_3 \frac{z'}{R} \right) \right] \nabla_3 \\ & \quad - \frac{z'}{R} (\nabla_1 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_1) + \frac{z'}{R} (\nabla_2 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla' \\ &= \frac{1}{R} (\nabla_1 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_1) + \left[\left(\nabla_1 \frac{1}{R} \right) - \frac{z'}{R} \left(\nabla_3 \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left(\nabla_3 \frac{z'}{R} \right) \right] \nabla_3 \\ & \quad \nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'' \\ &= \frac{1}{R} (\nabla_2 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_2) + \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R} \right) - \frac{z'}{R} \left(\nabla_3 \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \left(\nabla_3 \frac{z'}{R} \right) \right] \nabla_3. \end{aligned}$$

Ajoutant ces trois égalités, après avoir multiplié la seconde par z , la troisième par $-z'$, et effectué des réductions évidentes, il vient

$$\begin{aligned} & (\nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla') + z (\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') - z' (\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'') \\ &= \frac{R - \nabla_1 z + \nabla_2 z'}{R}. \end{aligned}$$

Or

$$R = \frac{\pm 2\sqrt{G}}{N}, \quad \nabla_1 z = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}, \quad \nabla_2 z' = \frac{K \mp \sqrt{G}}{N};$$

donc

$$R - \nabla_1 z + \nabla_2 z' = 0,$$

et par suite

$$(\nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla') + z (\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') - z' (\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'') = 0;$$

ce qu'il fallait démontrer.

107. Passons maintenant aux autres cas qui peuvent se présenter dans l'intégration des équations

$$\nabla' u = 0, \quad \nabla'' u = 0, \quad \nabla''' u = 0.$$

Ces cas sont au nombre de deux:

(a) Lorsqu'aucune des expressions

$$\nabla' \nabla'' u - \nabla'' \nabla' u, \quad \nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u, \quad \nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u$$

ne se réduit identiquement à zéro;

(b) Lorsqu'une de ces expressions se réduit identiquement à zéro.

Comme, dans chacun de ces cas, ces trois expressions doivent être égales à zéro pour que les trois équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$ puissent admettre une intégrale commune, il suffira alors dans le cas (a), en vertu du théorème démontré, d'égaliser deux d'entre elles à zéro. Ainsi aux trois équations proposées on joindra encore ces deux-ci,

$$S \frac{\partial u}{\partial z'} + T \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad S_1 \frac{\partial u}{\partial z'} + T_1 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Si ces dernières sont algébriquement distinctes, on aura, en même temps que les équations proposées, cinq équations linéaires et homogènes par rapport aux cinq dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z''}$. De ces équations on ne peut tirer qu'une seule conclusion, savoir, que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z''} = 0,$$

ce qui montre que, aux trois équations proposées, et par suite aussi aux équations

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0, \quad \nabla_3 u = 0,$$

on ne peut satisfaire que par la substitution d'une quantité constante au lieu de u .

Si les équations

$$S \frac{\partial u}{\partial z'} + T \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad S_1 \frac{\partial u}{\partial z'} + T_1 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ne sont pas algébriquement distinctes, il suffira de joindre l'une d'entre elles aux équations proposées. Le reste de l'analyse sera identique à ce que nous allons maintenant expliquer pour le cas (b).

108. Dans ce dernier cas, une des trois expressions

$$\nabla' \nabla'' u - \nabla'' \nabla' u, \quad \nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u, \quad \nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u$$

se réduit, par hypothèse, identiquement à zéro. Par conséquent, en vertu du théorème démontré (art. 106), il suffira d'égaliser à zéro une des deux expressions qui ne s'évanouissent pas. On obtient ainsi un système d'équations de la forme

$$\begin{aligned}\nabla'u &= \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial z'} + B \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \nabla''u &= \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial z'} + D \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \nabla'''u &= \frac{\partial u}{\partial z} + E \frac{\partial u}{\partial z'} + F \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \nabla''''u &= S \frac{\partial u}{\partial z'} + T \frac{\partial u}{\partial z} = 0,\end{aligned}$$

lesquelles, par l'élimination de l'une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, entre les trois premières au moyen de la quatrième, se changent dans les suivantes,

$$\begin{aligned}\Delta_1 u &= \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial z}, = 0, \\ \Delta_2 u &= \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial z}, = 0, \\ \Delta_3 u &= \frac{\partial u}{\partial z} + c \frac{\partial u}{\partial z}, = 0, \\ \Delta_4 u &= \frac{\partial u}{\partial z} + d \frac{\partial u}{\partial z}, = 0,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \nabla' - \frac{A}{S} \nabla''', & \Delta_2 &= \nabla' - \frac{C}{S} \nabla''', & \Delta_3 &= \nabla'' - \frac{E}{S} \nabla''', \\ \Delta_4 &= \frac{1}{S} \nabla''',\end{aligned}$$

a, b, c, d s'exprimant d'une manière connue au moyen des coefficients des équations précédentes.

Le dernier système d'équations n'admet une intégrale commune que dans les cas seulement où l'on a identiquement les égalités

$$\Delta_1 \Delta_3 u = \Delta_2 \Delta_4 u,$$

pour toute fonction u , et pour toutes les valeurs différentes de i et de k , prises dans la suite des nombres 1, 2, 3, 4.

Dans le cas contraire, évidemment, il n'est possible de satisfaire simultanément ni aux quatre équations considérées, ni aux équations d'où elles sont déduites. Or toutes ces équations ont pour origine commune les deux équations primitives $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$; donc celles-ci, dans ce cas, n'admettent pas non plus d'intégrale commune.

Si la condition $\Delta_1 \Delta_3 u = \Delta_2 \Delta_4 u$ est satisfaite, comme on l'a exigé ci-dessus, la méthode pour la détermination d'une intégrale unique, commune aux quatre équations

$$\Delta_1 u = 0, \quad \Delta_2 u = 0, \quad \Delta_3 u = 0, \quad \Delta_4 u = 0$$

sera encore absolument la même que celle qui a été exposée en détail à propos de l'intégration des systèmes précédents. Il nous suffira donc d'en indiquer brièvement l'application.

109. Commençons par déterminer l'intégrale de l'une des équations précédentes, de la première, par exemple; on l'obtient au moyen de l'équation

$$adx - dz_1 = 0,$$

entre les deux variables x et z_1 ; soit $v = \text{const.}$ cette intégrale. En cherchant l'intégrale

$$w = F(y, v) = \text{const.},$$

qui satisfait à la première équation et à la seconde, on arrive à une équation de la forme

$$\Delta_3 w = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} f(v) = 0,$$

$f(v)$ étant une fonction connue. Par suite, l'intégrale cherchée s'obtient au moyen d'une quadrature,

$$w = y - \int \frac{dw}{f(v)} = \text{const.}$$

Pour trouver l'intégrale

$$z = \Phi(x, w) = \text{const.},$$

satisfaisant aux trois premières équations, on est conduit à une équation de la forme

$$\Delta_3 z = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \varphi(w) = 0,$$

$\varphi(w)$ étant une fonction connue, et l'intégrale cherchée s'exprime au moyen d'une quadrature

$$t = z - \int \frac{dw}{\varphi(w)} = \text{const.}$$

Enfin, la détermination de l'intégrale

$$u_1 = \Psi(z', t) = \text{const.},$$

satisfaisant à la fois aux quatre équations, conduit à l'équation

$$\Delta_4 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \psi(t) = 0,$$

$\psi(t)$ étant une fonction connue; et l'intégrale cherchée s'exprime encore au moyen d'une quadrature,

$$u_1 = z' - \int \frac{dt}{\psi(t)} = \text{const.}$$

Cette dernière intégrale satisfait également aux deux équations simultanées

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0,$$

puisque l'on a

$$\nabla_1 u = \nabla' u + z' \nabla'' u, \quad \nabla_2 u = \nabla'' u + z, \nabla''' u,$$

et

$$\nabla' u = \Delta_1 u + A \Delta_4 u, \quad \nabla'' u = \Delta_2 u + C \Delta_4 u, \quad \nabla''' u = \Delta_3 u + E \Delta_4 u,$$

et que les valeurs de $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$, $\Delta_3 u$, $\Delta_4 u$ doivent se réduire à zéro par la substitution de u_1 à la place de u .

§. 15.

110. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons exposé une méthode pour déterminer toutes les intégrales possibles des deux systèmes incomplets d'équations

$$\begin{aligned} Hdy + Ndz, - (K \pm \sqrt{G}) dx &= 0, \\ Hdz + K \mp \sqrt{G} dz + Mdx &= 0, \\ dz - z' dx - z, dy &= 0, \end{aligned}$$

dont l'un correspond aux signes supérieurs, l'autre aux signes inférieurs du radical $\sqrt{G}$.

Dans l'exposition de cette méthode, on a eu en vue moins les formules générales que les procédés généraux pour une telle recherche. En conséquence, on n'a pas mentionné les cas où, par exemple, les

coefficients N , R , etc., qui entrent en dénominateurs dans nos équations, se réduisent à zéro; en effet, les variables x , y , z , z' , jouent dans ces équations, des rôles identiques, et l'on peut toujours prendre l'une d'elles à la place de l'autre, pour éviter les difficultés en question.

111. Après nous être assurés, de cette manière, que le nombre des intégrales de chacun des deux systèmes d'équations ci-dessus peut varier de trois à zéro inclusivement, nous allons maintenant supposer que différentes combinaisons de ces nombres d'intégrales sont possibles en même temps pour l'un et l'autre système d'équations, et nous allons chercher comment, dans chaque cas, on peut obtenir l'intégrale générale finie de l'équation

$$(1) \quad Hx'' + 2Kx' + Lx'' + M + N(z''z, - z', z) = 0.$$

Le plus simple de ces cas, celui où les deux systèmes d'équations ont chacun trois intégrales, et où, en vertu de la condition $G = 0$, leur différence s'évanouit, a été déjà étudié complètement dans le §. précédent; nous allons passer tout à l'heure à l'examen des autres cas. Mais il est maintenant à propos de compléter la remarque faite plus haut, que, dans les deux systèmes d'équations considérés, les variables x , y , z , z' , z , jouent des rôles identiques. Pour cela, nous allons démontrer que, dans l'équation (1) elle-même, on peut, au lieu des variables indépendantes x et y , introduire successivement z' et z , x et z , y et z' , et choisir chaque fois la variable dépendante de manière que le type général de l'équation transformée ne soit pas altéré.

112. La première de ces transformations, indiquée par Legendre (*), peut se présenter comme il suit. Supposons que les expressions de z , z' , z , en fonction de x et de y soient

$$z = f(x, y), \quad z' = \varphi(x, y), \quad z = \psi(x, y);$$

les seconds membres de ces équations doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \psi.$$

Au moyen des équations $z' = \varphi$, $z = \psi$, on peut introduire comme variables indépendantes z' et z , au lieu de x et de y . De plus, au lieu de la variable dépendante z , introduisons la variable w , déterminée par l'équation

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1787. Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles, par Le Gendre, p. 314.

$$w = xz' + yz'' - z.$$

En différentiant w successivement par rapport aux variables indépendantes z', z'' , il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z'} &= x + \left(z' - \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial z'} + \left(z'' - \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial z'}, \\ \frac{\partial w}{\partial z''} &= y + \left(z' - \frac{\partial z}{\partial x}\right) \frac{\partial x}{\partial z''} + \left(z'' - \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial z''}.\end{aligned}$$

En vertu des conditions $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \psi$, les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial z'}$, $\frac{\partial x}{\partial z''}$, $\frac{\partial y}{\partial z'}$, $\frac{\partial y}{\partial z''}$ dans les seconds membres de ces équations s'annulent, et l'on a simplement

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial z''} = y.$$

De plus, en différentiant par rapport à z' et à z'' , les équations $z' = \varphi$, $z'' = \psi$, on trouve

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'}, & 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'}, \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z''} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z''}, & 1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z''} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z''}.\end{aligned}$$

Mais, en ayant égard aux relations

$$x = \frac{\partial w}{\partial z'}, \quad y = \frac{\partial w}{\partial z''}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = z', \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = z'',$$

on peut écrire les équations précédentes sous la forme

$$\begin{aligned}1 &= z' \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + z'' \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''}, & 0 &= z' \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + z'' \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''}, \\ 0 &= z' \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''} + z'' \frac{\partial^2 w}{\partial z''^2}, & 1 &= z' \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''} + z'' \frac{\partial^2 w}{\partial z''^2}.\end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} &= \frac{z''}{z' z'' - z'^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''} &= \frac{-z'}{z' z'' - z'^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial z''^2} &= \frac{z''}{z' z'' - z'^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''}\right)^2 &= \frac{1}{z' z'' - z'^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, si dans les coefficients de l'équation (1) on remplace

$$x, \quad y, \quad z$$

respectivement par

$$\frac{\partial w}{\partial z'}, \quad \frac{\partial w}{\partial z''}, \quad z' \frac{\partial w}{\partial z'} + z'' \frac{\partial w}{\partial z''} - w,$$

et qu'on la divise par $z' z'' - z'^2$, alors, en vertu des égalités précédentes, elle prendra la forme

$$L \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} - 2K \frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''} + H \frac{\partial^2 w}{\partial z''^2} + N + M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z' \partial z''} \right)^2 \right] = 0.$$

Ayant obtenu, par l'intégration de cette équation, la valeur de w en fonction de z' et de z'' , on pourra tirer des équations

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial z''} = y, \quad z = xz' + yz'' - w$$

les expressions de z' , z'' , z au moyen des variables x et y .

113. A mpère(*) a démontré la possibilité de deux autres transformations, analogues à celle de Legendre. Pour la première transformation, on peut supposer que, au moyen des trois équations

$$z = f(x, y), \quad z' = \varphi(x, y), \quad z'' = \psi(x, y),$$

on ait exprimé y en fonction de x et de z' . Introduisons, de plus, au lieu de z , la variable dépendante v , déterminée par l'équation

$$v = z - z' y.$$

En différentiant v successivement par rapport aux variables indépendantes x et z' , il vient

$$\frac{\partial v}{\partial x} = z' + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - z' \right) \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z'} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - z' \right) \frac{\partial y}{\partial z'} - y.$$

En vertu de la condition $\frac{\partial f}{\partial y} = \psi$, les coefficients de $\frac{\partial y}{\partial x}$ et de $\frac{\partial y}{\partial z'}$, dans les seconds membres des équations précédentes, s'annulent, et il vient

$$\frac{\partial v}{\partial x} = z', \quad \frac{\partial v}{\partial z'} = -y.$$

De plus, en différentiant par rapport à x et à z' , les équations $z' = \varphi$, $z'' = \psi$, nous aurons

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad 1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'}.$$

(*) Journal de l'École Polytechnique, XVIII, Cahier, p. 90.

ou

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = z'' - z', \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, \quad 0 = z', -z'', \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, \quad 1 = -z'', \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}.$$

On tire de là

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{z''}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \frac{z'}{z''}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{z'' z'' - z'^2}{z''},$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)^2 = -\frac{z''}{z''}.$$

Par conséquent, si l'on remplace, dans les coefficients de l'équation (1),

$$y, \quad z, \quad z'$$

respectivement par

$$-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad v - z, \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x},$$

et que l'on divise par z'' , alors, en vertu des égalités précédentes l'équation (1) prendra la forme

$$N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2K \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - M \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + L - H \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

Ayant obtenu, par l'intégration de cette équation, la valeur de v en fonction de x et de z , on pourra déduire des équations

$$\frac{\partial v}{\partial z} = y, \quad z = v + z, y$$

les expressions de z , et de z au moyen des variables x et y .

114. Enfin, la troisième transformation est tout à fait semblable à la précédente. Au moyen de la seconde des équations $z = f, z' = \varphi, z'' = \psi$, on peut exprimer x en fonction de y et de z' . Si, de plus, on introduit, à la place de z , la variable dépendante

$$u = z - z'x,$$

nous aurons alors, comme dans la transformation précédente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial u}{\partial z'} = -x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z'' z'' - z'^2}{z''}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z'} = -\frac{1}{z''}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} = \frac{z'}{z''},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z'} \right)^2 = -\frac{z''}{z''}.$$

Par conséquent, si, dans les coefficients de l'équation (1), on remplace

respectivement par

$$- \frac{\partial u}{\partial z'}, \quad u - z' \frac{\partial u}{\partial z'}, \quad \frac{\partial u}{\partial y};$$

et que l'on divise par z'' , alors, en vertu des égalités que l'on vient d'établir, elle prendra la forme

$$N \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2K \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z'} - M \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} + H - L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z'} \right)^2 \right] = 0.$$

Après avoir obtenu, par l'intégration de cette équation, le valeur de u en fonction de y et de z' , on pourra tirer des équations

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = -x, \quad z = u + z'x$$

les expressions de z' et de z au moyen des variables x et y .

115. Il est facile de voir que les expressions formées, au moyen des coefficients des équations transformées, d'après la même loi qui a servi à former l'expression $G = K^2 - HL + MN$ relative à l'équation (1), auront des valeurs identiques à cette dernière.

Legendre et Ampère, après avoir découvert la possibilité de ces transformations générales de l'équation (1), en ont indiqué en même temps des applications très-importantes. On trouve encore un bel exemple de la transformation de Legendre dans les recherches de Fuchs sur l'intégration de l'équation

$$(1 + z^2)z'' = (1 + z'^2)z'',$$

dont la solution a été complétée et simplifiée par Hoppé (*). Mais nous ne nous arrêterons pas ici sur ces exemples particuliers, parce que, à la fin de ce Mémoire (Chapitre IV), on démontrera la possibilité d'un nombre illimité de méthodes pour trouver des transformations de l'équation (1), et non-seulement des transformations analogues à celles de Legendre et d'Ampère, par suite desquelles l'équation transformée conserve le type primitif, mais aussi des transformations par suite desquelles, à la place de l'équation (1), on obtient une transformée plus simple, savoir, une transformée de forme linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre. En même temps, nous ferons des applications de ces sortes de transformations.

(*) Crellé's Journal für die Mathematik, 1861, Bd. LVIII, S. 80 u. 369.

§. 16.

116. Revenons maintenant à la considération des méthodes d'intégration de l'équation

$$(1) \quad Hx'' + 2Kx', + Lx'' + M + N(x', y', z') = 0,$$

dans les cas où chacun des systèmes

$$(A) \quad \begin{cases} Hdy + Ndz, -(K + \sqrt{G})dx = 0, \\ Hdx' + (K - \sqrt{G})dz, + Mdx = 0, \\ dz - z'dx - z'dy = 0, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} Hdy + Ndz, -(K - \sqrt{G})dx = 0, \\ Hdx' + (K + \sqrt{G})dz, - Mdx = 0, \\ dz - z'dx - z'dy = 0 \end{cases}$$

admet moins de trois intégrales distinctes. Supposons que nous connaissions deux intégrales distinctes

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}$$

du système (A). En vertu de ce qui a été démontré plus haut, les fonctions u_1 et u_2 , substituées à la place de u , satisfont aux deux équations

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0,$$

dans lesquelles il faut prendre G avec le signe supérieur. Une fonction arbitraire $\Phi(u_1, u_2)$ de u_1 et de u_2 y satisfait pareillement; donc l'équation

$$(2) \quad \Phi(u_1, u_2) = 0$$

sera une intégrale du système (A), et par suite devra être une intégrale de la proposée (1), cette intégrale, renfermant des dérivées du premier ordre et une fonction arbitraire, sera une intégrale générale du premier ordre.

De même, en prenant deux intégrales du système (B),

$$v_1 = \text{const.}, \quad v_2 = \text{const.},$$

on obtiendra une autre intégrale générale de premier ordre

$$(3) \quad \Psi(v_1, v_2) = 0,$$

117. La méthode proposée par Monge pour trouver l'intégrale primitive de l'équation (1) repose sur la détermination préalable

d'une intégrale générale du premier ordre de cette équation, laquelle étant connue, il ne reste plus, d'après cette méthode, qu'à intégrer comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Si l'on obtient une intégrale générale, il entrera dans son expression une fonction arbitraire, distincte de celle qui était déjà renfermée dans l'équation à intégrer; par conséquent, cette intégrale, renfermant deux fonctions arbitraires, devra être l'intégrale primitive générale de l'équation (1). Si l'on obtient une intégrale complète, il entrera dans son expression deux constantes arbitraires. En supposant l'une d'elles fonction arbitraire de l'autre, et joignant à l'équation intégrale sa dérivée prise en différentiant par rapport à la constante arbitraire restante, on aura l'intégrale primitive générale de l'équation (1) et la condition pour la détermination de l'argument de l'une des deux fonctions arbitraires qui y entrent.

Si l'on peut parvenir à deux intégrales générales du premier ordre (2) et (3), alors, en éliminant entre elles une des dérivées du premier ordre z', z_1 , on obtiendra une équation qui pourra être intégrée comme une équation différentielle ordinaire entre les deux variables z et x , ou z et y . L'intégrale doit nécessairement contenir les deux fonctions arbitraires renfermées dans l'équation à intégrer. Si l'on peut résoudre les équations (2) et (3) par rapport à z' et à z_1 , alors, en substituant ces valeurs, on pourra intégrer l'équation

$$dz - z'dx - z'dy = 0;$$

car la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} z' \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} z_1 \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z_1 \right) = 0$$

sera remplie, ce dont il est aisé de s'assurer, en ayant égard aux égalités

$$\nabla_1 \Phi = 0, \quad \nabla_2 \Phi = 0, \quad \nabla_1 \Psi = 0, \quad \nabla_2 \Psi = 0.$$

118. Mais, d'après le Mémoire dans lequel Monge a exposé sa méthode(*), on voit que, au point de vue de la généralité, il avait déjà été fait une grave objection, fondée sur ce qu'il existe des équations de la forme (1), admettant une intégrale primitive finie, mais n'ayant pas d'intégrale générale du premier ordre: par exemple, l'équation

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1773.

$$z' - z'' - \frac{2z'}{x} = 0.$$

dont l'intégrale générale finie

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y) - x[\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)]$$

a été trouvée par Euler. (Voir §. 11)

Ne voulant pas admettre un pareil fait, Monge s'est efforcé de représenter les intégrales générales du premier ordre de l'équation précédente sous la forme

$$z' + z = \varphi'(x+y) - 2x\varphi''(x+y) + \int \left[\frac{z'}{x} + \varphi''(x+y) \right] (dx - dy).$$

$$z' - z, = z, \phi' (x + y) - (y) \phi'' (x) + \int_{z'}^y \left[(y - x) \phi'' (x) + \phi''' (x) \right] dx$$

en ajoutant pour la détermination des fonctions superflues les conditions

$$\psi''(x+y) = \frac{x}{2} + \varphi''(x-y) = \psi''(x-y)$$

$$\varphi''(x+y) = \frac{z'}{x} + \psi''(x-y).$$

Mais dans ces expressions, comme on l'a remarqué avec justesse, il a été fait un usage illégitime du signe f^* . En outre, on peut ajouter encore qu'après avoir admis l'existence de l'une des intégrales de cette forme, il n'y aura pas de raisons pour rejeter l'autre; mais, dans ce cas, les conditions précédentes pour la détermination des fonctions arbitraires superflues, ayant lieu en même temps, donnent $z' = 0$, c'est-à-dire changent z en une fonction de y seulement.

119. Ainsi, en ne prenant pour les intégrales du premier ordre que la forme (2) ou (3), on peut toujours examiner si l'équation (1) admet de telles intégrales; car cette question se ramène à cette autre: les équations (A) et (B) ont-elles chacune deux intégrales distinctes? et la solution de cette dernière question a été exposée avec détail dans un des §§. précédents.

Ampère, après avoir signalé de cette manière la nécessité de borner l'application de la méthode de Monge aux seuls cas où l'équation à intégrer admet une intégrale générale du premier ordre, a fait ressortir, en outre, la difficulté d'appliquer les méthodes ordinaires d'intégration à l'intégrale générale du premier ordre, par suite de la présence d'une fonction arbitraire dans cette intégrale. Mais

(*) „On a reproché que ces expressions étoient abusives.“ (Ibid., p. 137).

la méthode d'Amperè elle-même, fondée aussi sur la détermination préalable d'une intégrale générale du premier ordre, n'écarte pas la difficulté qu'il avait lui-même remarquée, et à laquelle on ne peut évidemment échapper qu'en se servant d'intégrales particulières de l'équation (1), au lieu d'intégrales générales, comme nous le verrons plus tard.

120. Poursuivons notre étude de la méthode d'Amperé, et appelons actuellement l'attention sur une autre remarque de ce géomètre, consistant en ce que le système auxiliaire des équations différentielles ordinaires auxquelles se ramène l'intégration de l'équation (2), fournit les équations (B), et pareillement, que le système des équations auxquelles se ramène l'intégration de l'équation (3) fournit les équations (A). On peut se convaincre comme il suit de la vérité de cette remarque.

$$\Phi(u_1, u_2) = 0$$

conduit, comme on sait, au système d'équations simultanées

$$(4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dz'} = \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dz'}$$

Mais, en vertu de l'égalité $\nabla_2 \Phi = 0$ ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' = \frac{H \partial \Phi}{N \partial z} - \frac{K - V \partial \Phi}{\partial z'}$$

les équations formée par le 1^{er}, le 2^e et le dernier rapport peuvent s'écrire ainsi,

$$\frac{dx}{d\Phi} = \frac{dy}{d\Phi} = \frac{H}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{K - \sqrt{G} \frac{\partial \Phi}{\partial z'}}{N}$$

En multipliant les deux termes du premier de ces rapports par $-(K - \sqrt{G})$, ceux du second par H et ceux du troisième par N , et égalant le troisième rapport au rapport des sommes des termes des deux premiers, il vient

$$\frac{Hdy - (K - \sqrt{G}) dx}{H \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - (K - \sqrt{G}) \frac{\partial \Phi}{\partial z_1'}} = \frac{Ndz_1}{H \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - (K - \sqrt{G}) \frac{\partial \Phi}{\partial z_1'}}$$

et, en supprimant les dénominateurs, qui sont égaux, on en tire la première des équations (B).

De plus, en vertu des égalités $\nabla_1 \Phi = 0$, $\nabla_2 \Phi = 0$, dont la première donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{L}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \frac{K + \sqrt{G} \partial \Phi}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

les équations formées par le 1^{er}, le 4^e et le 5^e des rapports (4) peuvent s'écrire de la manière suivante,

$$\frac{dx}{\partial \Phi} = \frac{L}{N} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} - \frac{dx'}{\partial \Phi} = \frac{H \partial \Phi}{N \partial z} - \frac{dx}{\partial \Phi} = \frac{K - \sqrt{G} \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{N}.$$

En multipliant les deux termes du premier rapport par M , ceux du second par H , ceux du troisième par $(K + \sqrt{G})$, puis égalant le premier rapport au rapport des sommes des termes des deux autres, ajoutés terme à terme, il vient

$$\frac{M dx}{\partial \Phi} = \frac{-H dx' - (K + \sqrt{G}) dx}{N \frac{\partial \Phi}{\partial z'}}.$$

Or on a

$$G = K^2 - HL + MN,$$

et par suite

$$\frac{HL - K^2 + G}{N} = M.$$

Donc, en supprimant les dénominateurs égaux dans les deux rapports précédents, on trouvera la seconde des équations (B).

Enfin, en multipliant les deux termes du premier des rapports (4) par z' , ceux du second par z , et égalant le troisième rapport à celui de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs des deux premiers, il vient

$$\frac{z' dx + z dy}{\partial \Phi} = \frac{dx}{\partial \Phi} \frac{z' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{z' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

D'où l'on tire la troisième équation (B).

On vérifierait absolument de la même manière la seconde partie de la remarque d'Ampère.

121. Abstraction faite de l'imperfection signalée plus haut, la méthode de Monge est très-digne d'attention, comme étant le premier procédé suffisamment général qui ait été proposé pour l'intégration des équations de la forme considérée; d'autant plus que l'auteur de la méthode en a donné de belles applications dans sa célèbre "Application de l'Analyse à la Géométrie". Nous allons, dans un court extrait, emprunter à cet ouvrage un exemple, pour donner une idée plus complète des différents procédés auxiliaires dont un analyste habile peut faire usage dans le développement et l'application des idées simples qui servent de fondement à cette méthode.

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$\alpha(\beta + z)z' + [\beta(\beta + z) - \alpha(\alpha + z)z']z' - \beta(\alpha + z)z'' = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{y + zz'}{xz' - yz''} = -\alpha, \quad \frac{x + zz'}{xz' - yz''} = \beta.$$

En comparant avec l'équation (1), on a ici

$$H = \alpha(\beta + z), \quad K = \frac{1}{2}[\beta(\beta + z) - \alpha(\alpha + z')], \quad L = -\beta(\alpha + z'), \\ M = N = 0, \quad G = \frac{1}{2}[\beta(\beta + z) + \alpha(\alpha + z')]^2.$$

D'après cela, les équations (A) et (B) prennent la forme

$$(A) \quad \begin{cases} (\beta + z)dy + (\alpha + z')dx = 0, \\ \alpha dz' + \beta dz = 0, \\ dz - z'dx - z'dy = 0; \end{cases} \\ (B) \quad \begin{cases} \alpha dy - \beta dx = 0, \\ (\beta + z)dz' - (\alpha + z')dz = 0, \\ dz - z'dx - z'dy = 0. \end{cases}$$

En ajoutant la première et la troisième des équations (A), on trouve

$$\alpha dx + \beta dy + dz = 0.$$

La dernière équation, considérée en même temps que

$$\alpha dz' + \beta dz = 0,$$

peut être remplacée par deux autres. Pour cela, il suffit de remarquer que les valeurs données ci-dessus de α et de β s'obtiennent comme solutions algébriques des deux équations

$$\alpha x + \beta y + z = 0, \\ \alpha z' + \beta z, -1 = 0.$$

En concevant donc que l'on ait substitué ici à α et à β leurs valeurs, et différentiant les identités ainsi obtenues, on trouve les égalités identiques

$$\alpha dx + \beta dy + dz + x dx + y dy = 0, \\ \alpha dz' + \beta dz + z' dz + z dz = 0,$$

en vertu desquelles les deux équations à intégrer se ramènent à la forme

$$x dx + y dy = 0, \quad z' dz + z dz = 0,$$

ou

$$dx = 0, \quad dz = 0.$$

Par suite les deux intégrales distinctes du système (A) sont

$$\alpha = a, \quad \beta = b,$$

ou

$$-\frac{y + zz'}{xz' - yz''} = a, \quad \frac{x + zz'}{xz' - yz''} = b,$$

a et b désignant des constantes arbitraires.

On obtient maintenant une intégrale générale du premier ordre de l'équation proposée, en éliminant a entre les équations

$$\frac{y + xz}{xz, -y^2} = a', \quad \frac{x + xz'}{xz, -y^2} = \varphi(a),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Mais, en vertu de la remarque faite plus haut, on peut, au lieu de ces équations, prendre les deux suivantes,

$$ax + y\varphi(a) + z = 0, \\ ax' + z\varphi(a) - 1 = 0.$$

Pour en éliminer a , on peut imaginer que la valeur de cette quantité soit tirée de la première équation et substituée dans la seconde. Or, quelle que soit la fonction φ , cette valeur doit s'exprimer au moyen de x, y, z seulement. Donc la seconde équation, qui représente après la substitution l'intégrale générale du premier ordre, sera linéaire par rapport à z' et à z . Par suite, pour en déduire l'intégrale primitive de l'équation donnée, il suffira d'intégrer le système d'équations simultanées

$$(y) \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{\varphi(a)} = dz,$$

en considérant a comme une fonction de x, y, z , satisfaisant à l'équation

$$ax + y\varphi(a) + z = 0.$$

Ayant déterminé deux intégrales distinctes de ce système, avec des constantes arbitraires c, c' , et établissant entre ces dernières une relation arbitraire $c' = \psi(c)$, on n'aura plus qu'à éliminer entre les trois équations ainsi obtenues les quantités c et c' . Le résultat de l'élimination donnera l'intégrale générale primitive de l'équation proposée.

122. On peut trouver très-simplement une des intégrales du système considéré. On a, en effet, d'après ce système,

$$\frac{x dx + y dy}{ax + y\varphi(a)} = dz,$$

ou, par suite de l'équation $ax + y\varphi(a) + z = 0$,

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2,$$

c étant une constante arbitraire.

Cette intégrale peut encore s'obtenir facilement, en vertu d'une remarque d'Ampère, au moyen du système des équations (B). En effet, si l'on substitue les valeurs de a et de β dans la première de ces équations, et que, après avoir chassé le dénominateur, on l'ajoute à la troisième, il vient

$$x dx + y dy + z dz = 0.$$

En passant au calcul de l'autre intégrale du système (y), remarquons que l'on a

$$\frac{dx}{dz} = a, \quad \frac{dy}{dz} = \varphi(a),$$

et par suite

$$\frac{dy}{dz} = \varphi\left(\frac{dx}{dz}\right).$$

Or, des équations

$$x dx + y dy + z dz = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

on tire

$$dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}};$$

par suite,

$$\frac{dy \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}{x dx + y dy} = \varphi\left(\frac{dx \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}{x dx + y dy}\right).$$

L'intégration de cette dernière équation entre les deux variables x et y s'effectue de la manière suivante. En désignant par ω la quantité sous le signe φ , on aura, au lieu de l'équation précédente, ces deux-ci,

$$(a) \quad \omega x + y\varphi(\omega) = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}, \quad \omega dx - \varphi(\omega) dy = 0.$$

Si ω était une constante, l'intégrale de la dernière équation serait de la forme

$$\omega y - \varphi(\omega)x = \text{const.};$$

mais, comme ω est une quantité variable, la constante du second membre doit être remplacée par une fonction de ω , de sorte qu'on aura

$$(b) \quad \omega y - \varphi(\omega)x - f(\omega) = 0,$$

$f(\omega)$ étant déterminée de telle manière que la dérivée du premier membre de l'équation précédente, prise par rapport à ω seulement, soit égale à zéro, c'est-à-dire, de manière que l'on ait

$$(c) \quad y - \varphi'(\omega)x - f'(\omega) = 0.$$

Par l'élimination de x et de y entre les équations (a), (b), (c), on obtient une équation différentielle ordinaire entre ω , $\varphi(\omega)$, $f(\omega)$, laquelle peut servir à déterminer la forme de la fonction f . En effet, des équations (b) et (c) on tire

$$x = \frac{f - \omega f'}{\omega \varphi' - \varphi}, \quad y = \frac{\varphi' f - \varphi f'}{\omega \varphi' - \varphi}.$$

Substituant ces valeurs de x et de y dans la première équation (a), il vient

$$(\omega + \varphi \varphi')f - (\omega^2 + \varphi^2)f' \\ = \sqrt{c^2(\omega \varphi' - \varphi)^2 - (1 + \varphi'^2)f^2 + 2(\omega + \varphi \varphi')ff' - (\omega^2 + \varphi^2)f'^2}.$$

Or, en posant

$$v = \frac{f}{\sqrt{\omega^2 + \varphi^2}},$$

il vient

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{(\omega^2 + \varphi^2)f' - (\omega + \varphi \varphi')f}{(\omega^2 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'après cela, l'équation précédente s'écrit ainsi,

$$\left(\frac{d\omega}{d\omega}\right)^2 = \frac{c^2(\omega\varphi - \varphi)^2 - (1 + \varphi^2)f^2 + 2(\omega + \varphi\varphi')f\varphi' - (\omega^2 + \varphi^2)f'^2}{(\omega^2 + \varphi^2)^3};$$

en ajoutant cette dernière équation, multipliée par $\omega^2 + \varphi^2$, au carré de la précédente, il vient

$$(1 + \omega^2 + \varphi^2)\left(\frac{d\omega}{d\omega}\right)^2 = \frac{(\omega\varphi' - \varphi)^2}{(\omega^2 + \varphi^2)^2} \left(c^2 - \frac{f^2}{\omega^2 + \varphi^2}\right),$$

d'où

$$\frac{d\omega}{\sqrt{c^2 - \varphi^2}} = \frac{(\omega\varphi' - \varphi)d\omega}{(\omega^2 + \varphi^2)\sqrt{1 + \omega^2 + \varphi^2}}.$$

Les variables v et ω sont ainsi séparées. En intégrant, il vient

$$\frac{v}{c\sqrt{\omega^2 + \varphi^2}} = \sin\left[c' + \int \frac{(\omega\varphi' - \varphi)d\omega}{(\omega^2 + \varphi^2)\sqrt{1 + \omega^2 + \varphi^2}}\right].$$

En substituant la valeur de f dans l'équation (b), et posant

$$c' = \psi(c), \quad c = \sqrt{\omega^2 + \varphi^2 + z^2},$$

on obtient l'intégrale générale primitive du problème, sous la forme

$$V = \omega\varphi - x\varphi(\omega) - \sqrt{(\omega^2 + \varphi^2 + z^2)(\omega^2 + \varphi^2)} \cdot \sin[\psi(\omega^2 + \varphi^2 + z^2)] + \int \frac{(\omega\varphi' - \varphi)d\omega}{(\omega^2 + \varphi^2)\sqrt{1 + \omega^2 + \varphi^2}} = 0.$$

Pour la condition qui détermine ω , on a l'équation (c) ou

$$\frac{\partial V}{\partial \omega} = 0.$$

De même, en commençant par l'intégration du système (B), on peut obtenir encore une solution générale du problème précédent, présentant un intérêt spécial pour l'interprétation géométrique de l'équation proposée et de tous les résultats ultérieurs du calcul. Mais il ne nous est pas possible d'entrer ici dans ces détails.

§. 17.

123. La méthode d'Ampère pour l'intégration de l'équation

$$(1) \quad Hx'' + 2Kx' + Lx_u + M + N(x''u_u - x'^2) = 0,$$

dans les cas où elle admet une intégrale générale du premier ordre, constitue un changement de forme et un perfectionnement de la méthode de Monge.

Représentons les deux systèmes d'équations, auxquels se ramène l'intégration de l'équation (1), sous la forme que leur a donnée Ampère (§. 12),

(A)

$$\begin{cases} H \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} + N \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} - (K + \sqrt{G}) = 0, \\ H \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} + (K - \sqrt{G}) \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} + M = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} - z' - z, \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} = 0; \end{cases}$$

(B)

$$\begin{cases} H \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + N \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} - (K - \sqrt{G}) = 0, \\ H \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + (K + \sqrt{G}) \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + M = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} - z' - z, \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = 0. \end{cases}$$

Dans les équations (A) et (B), on prend respectivement pour variables indépendantes x et α , et x et β ; x pouvant représenter ici l'une quelconque des deux anciennes variables indépendantes, et α , β désignant les arguments des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale primitive et finie de cette équation. Il est clair que, dans les équations (A) et (B), on peut changer partout le signe du radical $\sqrt{G}$.

124. Si l'équation (1) admet une intégrale générale du premier ordre, on peut alors supposer qu'il existe deux combinaisons des équations (A), telles qu'on les intégrerait de la même manière que si, au lieu de dérivées partielles, elles contenaient des dérivées ordinaires de fonctions de la seule variable x . Pour trouver ces deux combinaisons intégrables, si elles ne se présentent pas d'elles-mêmes, on peut se servir de la méthode exposée au §. 14. Ayant obtenu leurs intégrales, dans lesquelles entrent deux constantes arbitraires, on aura le droit de remplacer une de ces dernières par α , l'autre par une fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ de α ; car, dans les équations (A), on sous-entend qu'en même temps que x il y a une autre variable indépendante α . Supposons donc que les deux intégrales distinctes des équations (A) soient

$$(2) \quad f(x, y, z, z', z'') = \alpha, \quad F(x, y, z, z', z'') = \varphi(\alpha).$$

En considérant maintenant x et β comme variables indépendantes, et différenciant, dans cette hypothèse, par rapport à x , on tire des deux équations précédentes ces deux-ci,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} + \frac{\partial f}{\partial z''} \frac{\partial z''}{\partial x(\beta)} = \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} + \frac{\partial F}{\partial z''} \frac{\partial z''}{\partial x(\beta)} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)}. \end{cases}$$

Si l'on élimine, entre les sept équations (2), (3) et (B), les quatre quantités z' , z'' , $\frac{\partial z'}{\partial x(\beta)}$, $\frac{\partial z''}{\partial x(\beta)}$, on obtient trois équations, dans les-

quelles il n'entre que les dérivées par rapport à x des variables y, z, α . On peut donc les intégrer comme un système déterminé d'équations simultanées aux différentielles ordinaires, et l'on trouve ainsi les expressions de y, z, α au moyen de x et de trois constantes arbitraires C, C', C'' . Mais, comme il est sous-entendu que β est, en même temps que x , la seconde variable indépendante, les constantes arbitraires C, C', C'' pourront être remplacées respectivement par $\beta, \psi(\beta), \chi(\beta)$, en désignant par ψ et χ des fonctions arbitraires.

Mais l'ensemble de ces trois équations, renfermant trois fonctions arbitraires φ, ψ, χ , ne représente pas encore l'intégrale générale de l'équation (1), puisque cette intégrale ne doit contenir que deux fonctions arbitraires. La présence de la fonction arbitraire superflue s'explique par la raison que nous nous sommes servis d'une partie seulement des conditions qui déterminent la fonction z , savoir, des équations dans lesquelles il n'entre que les dérivées partielles par rapport à x , tandis qu'il est nécessaire d'avoir égard aussi aux autres équations, où entrent aussi les dérivées partielles par rapport à β .

En effet, en exprimant l'équation

$$dz = z' dx + z'' dy$$

au moyen des variables indépendantes x et β , on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta = z' dx + z'' \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta \right),$$

d'où l'on tire les deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = z'' \frac{\partial y}{\partial \beta},$$

et nous n'avons pas encore tenu compte de la seconde de ces équations. En y substituant donc les valeurs trouvées pour les fonctions y, z, z' , nous obtiendrons une condition pour la détermination et l'élimination de la fonction arbitraire superflue. Pour cela, on peut se servir d'une autre équation, équivalente à la précédente, et que l'on trouve en se fondant sur ce que l'on a

$$\frac{\partial \left(z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial \beta} = \frac{\partial \left(z'' \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial z'}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial x} + z'' \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \beta} = \frac{\partial z''}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \beta} + z'' \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \beta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial z'}{\partial \beta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial z''}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

125. Appliquons cette méthode d'intégration à l'exemple particulier suivant,

$$(z' + y z'') (z' + 1) = (y z' - z' - x) z',$$

Les deux premières équations du système (A), dans lequel nous remplacerons les signes de $\sqrt{G}$ par les signes opposés, prennent la forme

$$z'' \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} + y \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)} = 0, \quad z'' \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)} + (z' + x) \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)} + z' = 0.$$

En intégrant la première de ces équations, il vient

$$z, y = \alpha.$$

Éliminant entre ces équations $\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)}$, on a la combinaison intégrable

$$y \left(\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha)} + 1 \right) - (z' + x) \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{z' + x}{y} = \varphi(\alpha).$$

Si l'on prend pour variables indépendantes x et β , et que l'on différencie dans cette hypothèse les équations

$$(1) \quad z, y = \alpha,$$

$$(2) \quad z' + x = y \varphi(\alpha),$$

on trouve

$$(3) \quad z'' \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + y \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} = \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)},$$

$$(4) \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} + 1 = \varphi(\alpha) \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + y \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)}.$$

A ces quatre équations il faut encore ajouter le système (B), qui devient, en changeant partout le signe de $\sqrt{G}$,

$$(5) \quad z'' \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + y \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} - (z' + 1) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta)} + 1 = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} = z' + z'' \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}.$$

L'équation (4) prend, en vertu de (6), la forme

$$(8) \quad \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)} = 0, \quad \text{d'où } y \varphi(\alpha) = \beta.$$

L'équation (5) prend, en vertu de (3), (2) et (8), la forme

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)} = y \varphi(\alpha) = \beta, \quad \text{d'où } \alpha = \beta x + \psi(\beta).$$

L'équation (7), en vertu de (2), (8) et (1) peut s'écrire ainsi,

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta)} = \beta - x + \frac{\alpha}{\beta} \varphi(\alpha) \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}.$$

Or on tire de (8)

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = -\frac{\beta \varphi'(\alpha)}{[\varphi(\alpha)]^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)}},$$

et par suite

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta)} = \beta - x - \alpha \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)}.$$

On en conclut, par l'intégration,

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \alpha \log \varphi(\alpha) + \int \log \varphi(\alpha) d\alpha + \chi(\beta).$$

En supposant maintenant $\log \varphi(\alpha) = \Phi'(\alpha)$, les trois équations obtenues par l'intégration peuvent s'écrire comme il suit,

$$\begin{aligned} z &= \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x + \Phi(\alpha) - \alpha \Phi'(\alpha) + \chi(\beta), \\ y &= \beta e^{-\Phi'(\alpha)}, \\ \alpha &= \beta x + \psi(\beta). \end{aligned}$$

Pour éliminer la fonction arbitraire superflue, il faut satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial \beta(x)} = z, \frac{\partial y}{\partial \beta(x)}.$$

On trouve, pour cela,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \beta(x)} &= x - \alpha \Phi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \beta(x)} + \chi'(\beta), & z &= \frac{\alpha}{y} = \frac{\alpha}{\beta} e^{\Phi'(\alpha)}, \\ \frac{\partial y}{\partial \beta(x)} &= e^{-\Phi'(\alpha)} \left[1 - \beta \Phi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial \beta(x)}\right], & x &= \frac{\alpha - \psi(\beta)}{\beta}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient la relation suivante entre les fonctions ψ et χ .

$$\psi(\beta) = \beta \chi'(\beta).$$

Par suite, l'intégrale primitive générale de l'équation proposée, après l'élimination de α , peut se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} z &= \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x + \Phi[\beta x + \chi'(\beta)] - \beta[x + \chi'(\beta)]\Phi'[\beta x + \chi'(\beta)] + \chi(\beta), \\ y &= \beta e^{-\Phi'[\beta x + \chi'(\beta)]}. \end{aligned}$$

L'intégrale primitive générale peut s'obtenir sous une forme plus simple, en mettant les intégrales du système (A) sous la forme

$$\begin{aligned} (1') & yx = \varphi(\alpha), \\ (2') & x' + x = y\alpha. \end{aligned}$$

Si l'on considère x et β comme variables indépendantes, et que l'on différentie les équations précédentes par rapport à x , il vient

$$(3') \quad y \frac{\partial x}{\partial x(\beta)} + x \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)},$$

$$(4') \quad \frac{\partial x}{\partial x(\beta)} + 1 = y \frac{\partial x}{\partial x(\beta)} + \alpha \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}.$$

Des équations (4') et (5) on tire

$$(8') \quad \alpha y = \beta.$$

L'équation (5), en vertu de (3'), (2') et (8'), devient

$$\varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)} = \beta,$$

et donne, par l'intégration,

$$\varphi(\alpha) = \beta x + \psi(\beta).$$

Enfin (7), en vertu de (2'), (8') et (1'), prend la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta)} = \beta - x + \frac{\alpha}{\beta} \varphi(\alpha) \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}.$$

Or, on tire de (8')

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = -\frac{\beta}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)},$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta)} = \beta - x - \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta)};$$

par suite, en posant $\varphi(\alpha) = \alpha \Phi'(\alpha)$, on aura

$$\begin{aligned} z &= \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \Phi(\alpha) + \chi(\beta), & y &= \frac{\beta}{\alpha}, \\ \alpha \Phi'(\alpha) &= \beta x + \psi(\beta), & z &= \frac{\alpha^2 \Phi'(\alpha)}{\beta}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, au moyen des valeurs précédentes de y , z , z' , on satisfait encore à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial \beta(x)} = z, \frac{\partial y}{\partial \beta(x)}.$$

si l'on pose, semblablement à ce qui été fait dans le cas précédent,

$$\psi(\beta) = \beta \chi'(\beta).$$

Il s'ensuit de là que, par l'élimination de α , l'intégrale générale primitive est représentée par les équations

$$\begin{aligned} z &= \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \Phi\left(\frac{\beta}{y}\right) + \chi(\beta), \\ 0 &= x - \frac{1}{y} \Phi'\left(\frac{\beta}{y}\right) + \chi'(\beta), \end{aligned}$$

dont la seconde s'obtient en différentiant partiellement la première par rapport à β .

Il est aisé de s'assurer que l'intégrale peut s'obtenir aussi très-simplement sous cette dernière forme par la méthode de Monge.

126. D'après les indications que nous venons de donner, on voit que la méthode d'Ampère consiste en réalité dans un simple changement de forme de la méthode de Monge. Dans la première, absolument comme dans la seconde, on commence par déterminer, au moyen du système (A) par exemple, une intégrale générale du premier ordre de l'équation (1). Au lieu de considérer, avec Monge, cette intégrale comme une équation aux dérivées partielles du premier

ordre, et de former, pour l'intégrer, le système auxiliaire des équations simultanées de Lagrange, Ampère fait directement usage des équations (B), qui, ainsi qu'on l'a démontré, doivent être renfermées dans le système de Lagrange. C'est précisément dans ce procédé que consiste l'avantage de la méthode d'Ampère. Mais de cette manière on ne se débarrasse pas de la fonction arbitraire de l'intégrale générale du premier ordre, laquelle se montre inévitablement dans les trois équations simultanées aux différentielles ordinaires, à l'intégration desquelles se ramène finalement la question. En outre, dans les intégrales de ces équations, il entre trois fonctions arbitraires, dont une doit être éliminée au moyen de l'une des équations

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = z, \frac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial x},$$

ce qui amène une complication du problème, que l'on ne rencontre pas dans la méthode de Monge.

Dans le Chapitre suivant, nous exposerons une méthode qui évite la présence des fonctions arbitraires dans les équations à intégrer du problème primitif. Car, dans les cas mêmes où l'équation (1) admet des intégrales générales du premier ordre, on peut, d'après notre méthode, employer, au lieu de ces dernières, des intégrales particulières où il n'entre pas de fonctions arbitraires.

Chapitre IV.

Méthode de la variation des constantes arbitraires.

§. 18.

127. Si l'équation

$$(1) \quad H_2'' + 2K_2' + L_2 z'' + M + N(z', z'', z') = 0$$

n'a pas d'intégrales générales du premier ordre, alors les méthodes d'intégration fondées, comme celle de Monge, sur la supposition de l'existence de ces intégrales ne sont plus applicables. Lagrange a cherché à fonder la théorie de l'intégration des équations comprises dans la forme générale (1) sur la détermination de leurs intégrales particulières complètes, c'est-à-dire contenant cinq constantes arbitraires, et sur l'application de la méthode, découverte par lui, de la variation des constantes arbitraires. Mais de cette manière on obtient des conditions dont la réalisation est en général si difficile, qu'il a lui-même reconnu ce procédé comme étant plus curieux qu'utile. Ampère(*) a appliqué avec bien plus de succès la méthode de la variation

(*) Journal de l'École Polytechnique, XVIIIe Cahier, §. IV.

des constantes arbitraires aux intégrales particulières du premier ordre, tirées des systèmes d'équations

$$(A) \quad \begin{cases} H \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} + N \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} - K - \sqrt{G} = 0, \\ H \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} + (K - \sqrt{G}) \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} + M = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x(\alpha)} - z' - z, \frac{\partial y}{\partial x(\alpha)} = 0, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} H \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} + N \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} - K + \sqrt{G} = 0, \\ H \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + (K + \sqrt{G}) \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} + M = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x(\beta)} - z' - z, \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = 0, \end{cases}$$

lorsque chacun de ces systèmes, ou au moins l'un d'eux n'admet qu'une seule combinaison intégrable, et que par suite il est impossible d'obtenir pour l'équation (1) une intégrale générale du premier ordre. Avant qu'Ampère eût attiré l'attention sur ces intégrales particulières, on n'en avait su tirer aucun parti pour la recherche de l'intégrale générale primitive de l'équation (1).

On ne peut cependant s'empêcher de remarquer que la théorie fondée par Ampère sur cette idée profonde et originale, ne se distingue pas par la simplicité, et que la voie même qu'il a choisie pourrait être aplanie en beaucoup de points et conduire plus directement au but. En outre, comme Bour le fait remarquer avec raison, "les cas où les équations de la caractéristique" [c'est-à-dire les équations (A) et (B)] "n'admettent pas de combinaison intégrable, ont à peu près échappé jusqu'à présent à tout essai d'une théorie générale (*)." A en juger d'après certains passages du Mémoire de Bour d'où est tirée la remarque précédente, et où il expose quelques considérations détachées sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, on peut en conclure qu'il a regardé comme possible de revenir à la méthode de Lagrange, malgré les difficultés qu'elle présente. "Je suis heureux", dit-il comme conclusion de son Mémoire, "d'avoir prouvé que ces difficultés ne sont pas toujours insurmontables; et que la belle méthode de Lagrange, après avoir si bien élucidé toutes les questions relatives aux équations du premier ordre, n'a pas encore dit son dernier mot sur la théorie beaucoup plus difficile des équations à différences partielles du second ordre (**)."

(*) Journal de l'École Polytechnique, XXXIXe Cahier, p. 189.

(**) Ibid., p. 191.

L'étude attentive des méthodes de Lagrange et d'Ampère m'a conduit à la conviction de la possibilité d'appliquer la théorie de la variation des constantes arbitraires aux intégrales particulières de l'équation (1), sous une forme plus simple et plus générale que celle sous laquelle Ampère a présenté sa méthode. En me fondant seulement sur la supposition de l'existence d'intégrales primitives particulières de l'équation (1), renfermant trois constantes arbitraires, j'ai obtenu des formules générales pour en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) au moyen de la variation des constantes arbitraires de l'intégrale particulière. La généralité de l'hypothèse fondamentale permet d'appliquer ces formules, non-seulement au cas mentionné plus haut et dont Ampère s'est occupé exclusivement, mais encore à celui où les équations (A) et (B) n'admettent aucune combinaison intégrable, ou à celui, au contraire, dans lequel ces deux systèmes d'équations admettent plus d'une combinaison intégrable. Nous avons ainsi une méthode embrassant tous les cas de l'intégration de l'équation (1) qui diffèrent par le nombre des intégrales possibles des équations (A) et (B), nombre qui peut varier depuis trois jusqu'à zéro inclusivement. Nos formules générales, considérées sous un autre point de vue, donnent un nombre illimité de méthodes pour obtenir des transformations de l'équation (1), par suite desquelles celle-ci conserve son type primitif, ou éprouve une simplification notable, en se changeant en une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre.

128. En abordant maintenant l'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires, nous commencerons par nous occuper de la solution de la question importante que voici: Comment peut-on obtenir l'intégrale générale de l'équation (1), lorsqu'on en connaît une intégrale particulière quelconque, renfermant trois constantes arbitraires?

Il est évident que le succès de la résolution de cette question comprend toute la théorie de la méthode d'intégration considérée.

Soit

$$(2) \quad z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta)$$

une intégrale particulière de l'équation (1), renfermant trois constantes arbitraires α, γ, η . En la différenciant par rapport à x et à y , on aura les expressions des cinq dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction z , que l'on pourra représenter par

$$z' = \omega', \quad z'' = \omega'', \quad z'_1 = \omega'_1, \quad z''_{11} = \omega''_{11},$$

Par la substitution de ces expressions et de l'expression donnée de z , le premier membre de l'équation (1) devra, d'après la supposition, se réduire identiquement à zéro, pour des valeurs quelconques des quantités α, γ, η .

Supposons maintenant qu'une de celles-ci, η par exemple, représente une fonction, provisoirement indéterminée, de α et de γ , et que α et γ soient déterminés en fonction de x et de y par les équations

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = 0,$$

que l'on obtient en égalant séparément à zéro les dérivées partielles de ω par rapport à α et à γ . On peut écrire ces équations plus brièvement, de la manière suivante [art. 101],

$$(3) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = 0,$$

en convenant qu'un point placé après le signe ∂ indique que la différentiation par rapport à α ou à γ est faite non-seulement en tant que ces quantités entrent explicitement, mais encore en tant qu'elles entrent par le moyen d'autres quantités, comme elles le font dans le cas présent par le moyen de η .

129. Voyons à quelles conditions les trois équations (2) et (3) pourront représenter une intégrale de (1). Pour cela, calculons de nouveau les expressions des dérivées partielles de z , en ayant égard aux suppositions que nous avons faites relativement à α, γ, η .

En vertu des équations (3), les expressions des dérivées du premier ordre conserveront leur forme primitive,

$$z' = \omega', \quad z'_1 = \omega'_1,$$

Les expressions des dérivées du second ordre changent, et deviennent

$$z'' = \omega'' + \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \omega'_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$z'_1 = \omega'_1 + \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \omega'_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \omega'_1 + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$z''_{11} = \omega''_{11} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

ou $z'' = \omega'' + h, \quad z'_1 = \omega'_1 + k = \omega'_1 + k', \quad z''_{11} = \omega''_{11} + l,$ en posant, pour abréger,

$$h = \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \omega'_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad k = \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \omega'_1}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

$$k' = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y}.$$

Aux expressions précédentes de h, k, k', l on peut donner une autre forme, après avoir déterminé les valeurs de $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial y}$, auquel cas se manifeste d'elle-même l'égalité $k = k'$. Pour cela, différencions par rapport à x la première des équations (3), ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

Mais, dans le premier terme du premier membre de cette équation, les différentiations par rapport à x et à α s'effectuent comme par rapport à deux variables indépendantes; donc

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2},$$

et par suite l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

De même, en différentiant par rapport à x la seconde des équations (3), on aura

$$\frac{\partial \omega'}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega \partial \alpha}{\partial \alpha \partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \omega \partial y}{\partial y^2 \partial x} = 0.$$

En différentiant les deux équations (3) par rapport à y , il vient

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2 \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial y} = 0,$$

Des quatre équations précédentes on tire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 \omega \partial \omega'}{\partial \alpha \partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2 \omega \partial \omega'}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 \omega \partial \omega'}{\partial \alpha \partial y} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \omega \partial \omega'}{\partial \alpha^2} \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$D = \frac{\partial^2 \omega \partial^2 \omega}{\partial \alpha^2 \partial \nu^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \nu} \right)^2;$$

et, par la substitution de ces valeurs des dérivées partielles de α et de γ dans les expressions de h, k, l , on donnera à ces dernières la forme suivante,

la forme suivante:

$$k = \frac{-1}{D} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2 \right]$$

$$k = k' = \frac{-1}{D} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \omega'}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega'}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \right) \right]$$

$$I = \frac{-1}{D} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \right)^2 \right].$$

Oùtre cela, par un calcul algébrique simple, il est facile de vérifier que, en retranchant le carré de la seconde des égalités précédentes du produit de la première par la troisième, on obtiendra le résultat simple suivant,

$$h^2 - k^2 = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} - \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \right)^2.$$

130. Maintenant on trouvera sans difficulté la condition en vertu

(1). En désignant, pour abréger, le premier membre de l'équation (1) par $F(x, y, z, z', z'', z''', z''')$, substituons-y les valeurs

$$F(x, y, z, z', z_1, z'', z'_1, z_{11}),$$

$x = \omega$, $x' = \omega'$, $x'' = \omega'' + h$, $x'_1 = \omega'_1 + h$, $x_{11} = \omega_{11} + h$,
tirées des équations (2) et (3); en égalant ensuite à zéro la somme
des termes qui ne se détruisent pas, on aura la condition cherchée.

Le résultat de la substitution peut, d'après la formule de Taylor,
s'écrire ainsi,

Le résu

$$F(x, y, w, w'', h, w' + k, w'' + l) = F(x, y, w, w', w, w', w', w), \\ + \frac{\partial F}{\partial w''} h + \frac{\partial F}{\partial w'} k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial w''^2} h^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial w' \partial w''} hl.$$

Le premier terme du second membre de cette égalité se réduit à zéro, en vertu de la supposition que la substitution des valeurs

$$z = \omega, z' = \omega', z'' = \omega'', z' = \omega', z'' = \omega''$$

De plus, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial \omega''} = H + N\omega'', \quad \frac{\partial F}{\partial \omega'} = 2(K - N\omega'), \quad \frac{\partial F}{\partial \omega''} = L + N\omega'',$$

done

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \omega' z} = \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'' \omega''} = N;$$

$$= (H + N\omega'')h + 2(K - N\omega')k + (L + N\omega'')l + N(hl - k^2)$$

On conclut de là que les équations (2) et (3) ne peuvent représenter une intégrale de (1) que dans le cas où la fonction η est déterminée de manière à réduire à zéro le second membre de l'équation précédente. En y substituant les valeurs de $h, k, l, hl - k^2$, données plus haut, égalant à zéro le résultat de la substitution, et supprimant le dénominateur commun D , on obtient une équation de la forme

$$(4) \quad R \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + 2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} + U = 0,$$

où l'on a fait, pour abrégér,

$$\left. \begin{aligned} -R &= (H + N\omega_{\mu}) \left(\frac{\partial \omega'}{\partial y} \right)^2 + 2(K - N\omega') \frac{\partial \omega' \partial \omega}{\partial y} + (L + N\omega'') \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2, \\ S &= (H + N\omega_{\mu}) \frac{\partial \omega' \partial \omega'}{\partial \alpha} + (K - N\omega') \left(\frac{\partial \omega' \partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega' \partial \omega'}{\partial y} \right) \\ &\quad + (L + N\omega'') \frac{\partial \omega \partial \omega'}{\partial \alpha}, \\ -T &= (H + N\omega_{\mu}) \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2 + 2(K - N\omega') \frac{\partial \omega' \partial \omega}{\partial \alpha} + (L + N\omega'') \left(\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \right)^2, \\ U &= N \left(\frac{\partial \omega' \partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial \omega' \partial \omega'}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \right\} (5)$$

En faisant attention à la composition de l'équation (4), il est aisé de voir qu'elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3}$$

de la fonction η , et que, dans ses coefficients, il n'entre, en définitive, que

$$\alpha, \gamma, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}.$$

En effet, les dérivées $\frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3}$ doivent entrer exclusivement,

la première seulement dans $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3}$, la seconde seulement dans $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}$,

la troisième seulement dans $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma^3}$; et avec cela, elles n'entreront pas à une autre puissance qu'à la première. En outre, dans la composition de l'équation (4), il n'entre que les variables $\alpha, \gamma, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}$,

x, y , dont les deux dernières peuvent être éliminées au moyen des équations (2) et (3).

131. Ainsi la méthode de la variation des constantes arbitraires donne la possibilité de transformer l'équation (1), non linéaire à cause de la présence de la quantité $z''z'' - z'^2$, en une équation (4) linéaire par rapport aux dérivées du second ordre de la fonction cherchée; tandis que ce but n'est pas atteint par les transformations de Legendre et d'Ampère, que nous avons indiquées plus haut (Ch. III, §. 15). On peut démontrer qu'il y a une infinité de transformations possibles, analogues à ces dernières, c'est-à-dire telles que l'équation (1) conserve après la transformation son type primitif. Pour cela, il n'y a qu'à supposer, dans la démonstration précédente, que la valeur

$$z = \omega(\alpha, \gamma, \eta)$$

(2) soit choisie tout à fait arbitrairement, et ne représente plus une intégrale particulière de l'équation (1). Alors toutes les conclusions du calcul précédent subsistent, si ce n'est que

$$F(\alpha, \gamma, \omega, \omega', \omega'', \omega''', \omega''', \omega''') = W$$

n'est plus égal à zéro. Donc, en multipliant l'équation finale par

$$D = \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma^3} - \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} \right)^2,$$

on obtiendra en plus le terme WD , et, au lieu de l'équation (4), on aura la suivante,

$$R \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3} + 2S \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma^3} + W \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma^3} - \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} \right)^2 \right] + V = 0.$$

En vertu de la remarque de l'article précédent sur la manière dont

les dérivées $\frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3}$ entrent dans $\frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma^3}$, il est clair que D sera de la forme

$$D = a \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha^3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3} - \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma} \right)^2 \right] + b \frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha^3} + c \frac{\partial^3 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma} + e \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3} + f,$$

a, b, c, e, f s'exprimant au moyen de $\alpha, \gamma, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}$. Par suite, l'équation transformée conserve le type général de l'équation (1).

§. 19.

132. La méthode de la variation des constantes arbitraires ramène le problème de l'intégration de l'équation (1) à l'intégration de l'équation (4). Les valeurs des coefficients de celle-ci dépendent de la forme de l'intégrale particulière $z = \omega$ de l'équation (1). Par conséquent toute la difficulté de l'application de cette méthode consiste à choisir, parmi les intégrales particulières de l'équation (1), celle pour laquelle (4) prend une des formes intégrables. Nous exposerons plus loin les caractères auxquels on peut recourir pour ce choix dans les cas connus. Maintenant, pour éclaircir les formules générales appliquées-les à un exemple particulier,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} z'' + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} z' + (lx + my + nxz) \left[z''z'' - z'^2 - 2 \left(\frac{z}{xy} - \frac{z'}{y} - \frac{z''}{x} \right) - \left(\frac{z}{xy} - \frac{z'}{y} - \frac{z''}{x} \right)^2 \right] = 0,$$

a, b, l, m, n désignant des constantes données.

En examinant la possibilité de satisfaire à l'équation proposée, par des valeurs de la forme générale

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

on trouve sans difficulté, pour intégrale particulière de cette équation, l'expression

$$z = ax + y - \eta xy = \omega,$$

contenant trois constantes arbitraires a, γ, η . Par suite, en considérant η comme une fonction de α et de γ , et joignant à l'équation précédente les deux suivantes,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = x \left(1 - \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = y \left(1 - \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} \right) = 0,$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation proposée, si l'on détermine la fonction η par la condition

$$R \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha^3} + 2S \frac{\partial^3 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma^3} + U = 0.$$

Pour trouver les coefficients de cette équation, calculons

$$\omega' = a - \eta y, \quad \omega'' = \gamma - \eta x, \quad \omega''' = 0, \quad \omega'' = -\eta, \quad \omega'' = 0,$$

par la différentiation de la fonction ω relativement à x et à y , considérées comme des variables indépendantes de α et de γ . En différenciant ensuite ω' et ω , par rapport à α et à γ , considérées comme indépendantes de x et de y , il vient

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} = -y \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = -x \frac{\partial \eta}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = 1 - y \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = 1 - x \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}.$$

Les seconds membres des deux dernières équations se réduisent à zéro en vertu de la deuxième et de la troisième équation de l'intégrale générale. Maintenant, par les formules générales (5) du § précédent, on trouve

$$-R = H \left(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \right)^2 = \alpha x^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \gamma} \right)^2,$$

ou, en vertu de la troisième équation de l'intégrale générale, $-R = \alpha$.

On trouve ensuite

$$S = (K + N\eta) \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0,$$

parce que le facteur $K + N\eta$, après l'élimination de η à l'aide des équations de l'intégrale et la substitution des valeurs des coefficients K et N tirées de l'équation proposée, se réduit à zéro. De plus,

$$-T = L \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2 = by^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)^2,$$

ou, en vertu de la seconde équation de l'intégrale générale, $-T = b$.

Enfin,

$$U = N \left(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \right)^2 \left(\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \right)^2 = (lx + my + nz)x^2y^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \gamma} \right)^2,$$

ou, en vertu de la seconde et de la troisième équation de l'intégrale générale,

$$U = lx + my + nz.$$

D'après cela, l'équation (4) se réduit à la forme

$$\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} - (lx + my + nz) = 0.$$

Maintenant, en différenciant la fonction ω deux fois par rapport à chacune des variables α et γ , que l'on doit considérer ici comme indépendantes entre elles et des variables x et y , on a

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} = -xy \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = -xy \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et la divisant par xy , on trouve

$$\alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} + \frac{l}{y} + \frac{m}{x} + n = 0.$$

Mais la deuxième et la troisième équation de l'intégrale générale donnent

par conséquent, pour déterminer la fonction η , nous obtenons enfin l'équation linéaire à coefficients constants

$$\alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2} + b \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} + l \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + m \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} + n = 0,$$

dont l'intégrale générale peut toujours s'obtenir soit sous forme finie, soit au moyen d'intégrales définies, par la méthode de Laplace (*). En supposant donc la fonction η connue, on pourra exprimer, à l'aide de cette fonction et de ses dérivées partielles, l'intégrale générale de l'équation proposée, sous la forme suivante,

$$z = \frac{\alpha}{\partial \eta} + \frac{\gamma}{\partial \eta} + \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}}, \quad y = \frac{1}{\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}}, \quad x = \frac{1}{\frac{\partial \eta}{\partial \gamma}}.$$

§ 20.

133. Comme on l'a déjà remarqué plus haut, Ampère a introduit un perfectionnement important dans la théorie de l'intégration de l'équation (1), en découvrant la possibilité d'appliquer la méthode de la variation des constantes arbitraires aux intégrales de cette équation, obtenues à l'aide des équations (A) et (B), lorsque chacun de ces deux systèmes n'admet qu'une combinaison intégrable. Toutefois, ayant fondé sa théorie sur cette idée vraie, mais pas assez générale, il n'a pas remarqué, en premier lieu, que la même méthode peut s'appliquer aux intégrales particulières de l'équation (1), obtenues à l'aide des systèmes (A) et (B), lorsque chacun d'eux admet plus d'une combinaison intégrable, et, en général, à toute intégrale particulière de l'équation (1) avec trois constantes arbitraires, par quelque moyen qu'elle ait été obtenue. En second lieu, les formules générales d'Ampère ont ce grave défaut, qu'elles ne permettent pas de se servir en même temps des intégrales des systèmes (A) et (B) de la manière la plus avantageuse. En troisième lieu, l'application même des formules d'Ampère pourrait être simplifiée par l'emploi de la méthode connue de Lagrange et de Charpit pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui se rencontrent dans cette théorie, au lieu de la méthode proposée par Ampère lui-même.

Nous tâcherons de démontrer ces propositions dans ce § et dans les suivants; mais nous allons auparavant examiner quelle utilité particulière présente l'application de la méthode de la variation des

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, année 1779. Mémoire sur les suites, par M. de la Place.

constantes arbitraires aux intégrales particulières, obtenues au moyen des systèmes d'équations (A) et (B).

134. Supposons que les équations (A) admettent une combinaison intégrable, dont nous représenterons l'intégrale sous la forme

$$f(x, y, z, z', z'') = \alpha;$$

ce sera, par rapport à l'équation (1), une intégrale particulière du premier ordre. Mais, en la considérant comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre, on pourra en déterminer, par la méthode de Lagrange et de Charpit, une intégrale complète

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta),$$

renfermant, outre α , deux autres constantes arbitraires γ, η , et qui sera, par rapport à l'équation (1), une intégrale particulière primitive. En lui appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on devra considérer η comme une fonction de α et de γ , et pour la déterminer nous aurons une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2}.$$

La quantité α représente, comme on sait, l'argument de l'une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale de l'équation (1), et cette dernière intégrale doit s'exprimer au moyen de η et des fonctions arbitraires que η renferme. Par conséquent, une des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale qui représente la valeur de η , doit aussi avoir pour argument α . Mais dans ce cas l'équation qui détermine la fonction η ne doit pas contenir la dérivée $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}$ comme nous l'avons démontré dans la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre (Chap. I, §. 6). Cette dérivée $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}$ doit entrer exclusivement et nécessairement dans l'équation (4) au moyen de l'expression $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}$; par suite, dans le cas considéré, on aura nécessairement $R = 0$.

En faisant usage de l'intégrale

$$F(x, y, z, z', z'') = \beta,$$

déduite d'une combinaison intégrable des équations (B), et en calculant une intégrale complète de cette équation

$$z = \omega(x, y, \beta, \gamma, \eta),$$

appliquons à celle-ci la méthode de la variation des constantes arbitraires. Si l'on considère alors η comme fonction de β et de γ , on a, pour déterminer cette fonction, une équation selon la formule (4), où l'on devra seulement écrire β à la place de γ et γ à la place de α . Par le même raisonnement que dans le cas précédent, on en conclut que maintenant on doit avoir nécessairement $T = 0$.

135. Si l'on peut obtenir, au moyen des combinaisons intégrables des équations (A) et (B), les intégrales que nous représenterons respectivement par

$$f(x, y, z, z', z'') = \alpha, \quad F(x, y, z, z', z'') = \beta,$$

les premiers membres de ces équations, qui satisfont, comme on sait (Chap. III, §. 16), à la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} z' \right) \frac{\partial F}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z' \right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z' \right) \frac{\partial F}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z' \right) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

fournissent les valeurs de z' et de z'' , par la substitution desquelles on obtient l'équation

$$dz = z' dx + z'' dy,$$

intégrable soit immédiatement, soit après la multiplication par le facteur d'intégrabilité. Comme résultat de cette intégration, on a la valeur

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta),$$

qui représente une intégrale particulière de l'équation (1). En considérant η comme une fonction de α et de β , et appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires à cette intégrale, on trouve, pour déterminer la fonction η , l'équation donnée par la formule (4), dans laquelle on écrira β au lieu de γ . L'intégrale générale qui représentera la valeur de z s'exprimera au moyen de l'intégrale générale qui représentera la valeur de η et des deux fonctions arbitraires renfermées dans cette intégrale. Or les arguments des fonctions arbitraires de la première intégrale doivent être α et β ; par conséquent, α et β doivent être aussi les arguments des fonctions arbitraires de la seconde intégrale. Donc l'équation (4) ne peut, dans le cas actuel (Chap. I, §. 6), renfermer les dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2},$$

d'où il suit nécessairement que l'on a $R = 0$ et $T = 0$.

136. Enfin, si dans l'équation (1) on a

$$G = K^2 - HL + MN = 0,$$

alors, comme on sait, les deux systèmes d'équations (A) et (B) cessent d'être distincts l'un de l'autre, et les arguments α et β deviennent égaux. Ayant, dans ce cas, une combinaison intégrable des équations (A), dont l'intégrale soit

$$f(x, y, z, z', z'') = \alpha,$$

et intégrant cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, on en obtient l'intégrale complète

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta),$$

laquelle, par rapport à l'équation (1), sera une intégrale primitive particulière. En considérant η comme une fonction de α et de γ , et

appliquant à cette intégrale la méthode de la variation des constantes arbitraires, on obtiendra, pour la détermination de η , une équation selon la formule générale (4). L'intégrale générale représentant la valeur de z doit s'exprimer au moyen de l'intégrale générale représentant la valeur de η , et des fonctions arbitraires que cette intégrale renferme. Mais les arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale en z doivent être égaux à α ; par suite, α doit être l'argument commun des fonctions arbitraires de l'intégrale en η . Donc (Chap. I, §. 6) l'équation (4), dans le cas actuel, ne peut contenir les dérivées du second ordre

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \gamma},$$

et de là il s'ensuit nécessairement que l'on a $R = 0$ et $S = 0$.

137. Ainsi l'avantage de l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires aux intégrales particulières de l'équation (1), obtenues à l'aide des équations (A) et (B), consiste en ce que l'équation générale

$$R \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + 2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} + U = 0,$$

à laquelle se ramène finalement le problème de l'intégration de l'équation (1), admet, dans les quatre cas que nous venons de considérer, respectivement les formes simplifiées suivantes,

$$2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} + U = 0,$$

$$2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta \partial \gamma} + R \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} + U = 0,$$

$$2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + U = 0,$$

$$T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} + U = 0.$$

Si, dans l'équation (1), $N = 0$, cas auquel Ampère s'est borné dans la théorie (*), alors, en vertu de la dernière des formules (5) du §. précédent, on a $U = 0$, et les équations définitives prennent les formes encore plus simples

(*) Citons le passage du Mémoire d'Ampère où il est question de cette restriction:

"Je vais appliquer la méthode que j'emploie à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lr + M = 0.$$

Cette méthode peut aussi être appliquée, avec quelques modifications, à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lr + M + N(r' - s^2) = 0,$$

et servir à la ramener à l'une des deux formes

$$t = f(x, y, z, p, q), \quad s = f(x, y, z, p, q),$$

suivant que la quantité $K^2 - HL + MN$ est nulle ou ne l'est pas. Mais, pour

$$2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = 0, \\ 2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta \partial \gamma} + R \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = 0,$$

$$S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \\ T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = 0.$$

Les deux dernières équations présentent les formes les plus simples parmi toutes celles que peut prendre l'équation (4). Ampère, à l'aide de sa méthode, obtient facilement la forme représentée par la dernière équation, dans le cas où a lieu l'égalité $G = 0$. Mais il est beaucoup plus difficile d'obtenir par cette méthode la forme que présente l'avant-dernière équation, dans le cas général où G n'est pas égal à zéro, et où les systèmes (A) et (B) fournissent chacun des combinaisons intégrables, dont nous avons représenté (art. 135) les intégrales sous la forme

$$f(x, y, z, z', z'') = \alpha, \quad F(x, y, z, z', z'') = \beta.$$

La difficulté provient de ce qu'Ampère, n'appliquant sa méthode qu'à la première des deux intégrales précédentes, ramène de cette manière le problème à l'intégration d'une équation de la forme

$$2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = 0;$$

il faut ensuite procéder avec cette équation comme avec l'équation donnée (1), et démontrer que la nouvelle équation transformée sera de la forme

$$S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 0;$$

tandis que, en employant le procédé que nous avons proposé plus haut, on ramène tout d'une fois le problème à l'intégration d'une équation de cette dernière forme.

138. Remarquons encore que le premier membre de chacune des équations

$$S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad T \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = 0$$

se compose de deux facteurs, dont chacun peut, en général, être égalé séparément à zéro. Mais l'intégrale générale qui représente la valeur de η ne peut fournir que les seconds facteurs, parce qu'il n'y a

rendre plus simple l'exposition de cette méthode et les démonstrations qui y sont relatives, j'ai cru devoir me borner à la formule

$$Hr + 2Ks + Lr + M = 0,$$

où les dérivées du second ordre ne se trouvent qu'à la première puissance." (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIIe Cahier, p. 106).

que ceux-ci qui contiennent les dérivées du second ordre de cette fonction. Les premiers facteurs S et T , séparément, peuvent donner seulement, dans certains cas, des intégrales particulières avec une seule fonction arbitraire, parce qu'ils ne renferment que des dérivées du premier ordre de η . En général, ces facteurs peuvent être négligés.

Ainsi, si $G = 0$, et que des équations (A) et (B) on tire une intégrale particulière de l'équation (1), de la forme

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta),$$

on aura son intégrale générale, en joignant à l'équation précédente les trois équations

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = 0,$$

dont la dernière sert à déterminer η en fonction de α et de γ .

Si G n'est pas égal à zéro, et qu'on moyen des équations (A) et (B) on ait trouvé une intégrale particulière de (1),

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta),$$

on trouvera son intégrale générale en joignant à l'équation précédente les trois suivantes,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

dont la dernière sert à la détermination de η en α et β .

§. 21.

139. Pour donner une application des résultats théoriques que nous venons d'obtenir, prenons d'abord les exemples qu'Amperè a traités comme éclaircissements de sa méthode. Nous constaterons ainsi que, dans tous les cas de l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires, on peut se servir des mêmes formules (5), lesquelles fournissent, en outre, les résultats d'Amperè par une voie plus directe. Mais auparavant ramenons ces formules générales à une forme plus commode pour l'application. Pour cela, remarquons que les expressions de R et de T peuvent être décomposées en facteurs, puisque chacune d'elles représente une fonction homogène du second degré. En résolvant l'équation du second degré

$$m^2 + \frac{2(K - N\omega')}{H + N\omega''}m + \frac{L + N\omega''}{H + N\omega''} = 0,$$

on trouve

$$m = \frac{-K + N\omega' \pm \sqrt{(K - N\omega')^2 - (H + N\omega'')(L + N\omega'')}}{H + N\omega''}.$$

Or, en désignant par P la quantité sous le radical, on a

$$P = K^2 - HL - N[H\omega'' + 2K\omega' + L\omega'' + N(\omega')^2 - \omega'^2],$$

et, en ajoutant l'égalité identique

$$0 = N[H\omega'' + 2K\omega' + L\omega'' + M + N(\omega')^2 - \omega'^2],$$

qui a lieu en vertu de la supposition que ω satisfait à l'équation (1), il vient

$$P = K^2 - HL + MN = G.$$

Par conséquent,

$$m = \frac{-K + N\omega' \pm \sqrt{G}}{H + N\omega''}.$$

Au moyen des deux valeurs de m que nous venons de trouver, les expressions de R , S , T pourront s'écrire comme il suit,

(6)

$$\begin{aligned} -R &= (H + N\omega'') \left\{ \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right\} \cdot \left[\frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right] \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \right)^2 \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right\} \cdot \left[\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right] \\ S &= (H + N\omega'') \left\{ \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right\} \cdot \left[\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} \cdot \left[\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} \right] + \frac{L + N\omega''}{H + N\omega''} \right\} \\ -T &= (H + N\omega'') \left\{ \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} + \frac{K + N\omega'}{H + N\omega''} + \sqrt{G} \right\} \cdot \left[\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} - \sqrt{G} \right] \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)^2 \cdot \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} + \frac{K + N\omega'}{H + N\omega''} \right\} \cdot \left[\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{K - N\omega'}{H + N\omega''} - \sqrt{G} \right] \end{aligned}$$

140. Occupons-nous maintenant des exemples d'Amperè.

$$x^2 z'' - 4x^2 z' + 4x^2 z'' + 2z' x^3 = 0.$$

I.

On a ici

$$H = x^2, \quad K = -2x^2 z', \quad L = 4x^2, \quad M = 2z' x^3, \quad N = 0;$$

par conséquent

$$G = K^2 - L + MN = 0;$$

dont les deux systèmes d'équations (A) et (B) se confondent en un seul, savoir,

$$x^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2z' = 0,$$

$$x^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2z' = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2z' x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - z' - z' \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

La seconde de ces équations, satisfaisant à la condition d'intégrabilité, donne l'intégrale

$$x^2 z' - z' = 2\alpha.$$

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode de Lagrange et de Charpit, formons le système d'équations simultanées

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-2z'} = \frac{-dz'}{2xz'} = \frac{-dz'}{0},$$

dont une des intégrales est évidemment $z, = \text{const.}$ On a, par conséquent

$$z' = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2}, \quad z_1 = \gamma,$$

et

$$dz = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2} dx + \gamma dy.$$

En intégrant cette dernière équation, on a l'intégrale particulière de l'équation proposée,

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \eta = 0,$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude. En considérant η comme une fonction de α et de γ , et joignant à l'équation précédente les trois suivantes,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = -\frac{2}{x} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = -\frac{2\gamma}{x} + \gamma + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2} = -\frac{2}{x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} = 0,$$

nous aurons l'intégrale générale, si nous déterminons la fonction η au moyen de la dernière équation. Or, si l'on en soustrait la seconde équation de l'intégrale générale, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha},$$

dont l'intégrale a été donnée par Laplace, sous la forme

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du,$$

φ désignant une fonction arbitraire. Les dérivées partielles de cette valeur de η , par rapport à α et à γ , sont

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du;$$

La valeur de la première, au moyen de l'intégration par parties, peut encore se ramener à la forme

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du.$$

En substituant ces valeurs, on obtient l'intégrale du problème, donnée par Ampère, sous la forme des trois équations

$$\begin{aligned} z &= \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du, \\ y - \frac{2\gamma}{x} + \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du &= 0, \\ \frac{2}{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du &= 0. \end{aligned}$$

Pour vérifier les conclusions de la théorie relativement aux valeurs de R, S, T , différencions la fonction ω par rapport à x et à y , en considérant α et γ comme des constantes; il viendra

$$\omega' = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2}, \quad \omega_1 = \gamma.$$

De plus, en différenciant les fonctions ω' et ω , par rapport à α et à γ , dans la supposition de x et y constantes, on trouve

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} = \frac{2\gamma}{x^3}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = 1.$$

Substituant ces valeurs dans les formules générales (§), où l'on fera $N = 0$, on trouvera, conformément à la théorie,

$$R = 0, \quad S = 0, \quad T = -1.$$

On intégrera absolument de la même manière les deux autres exemples

$$z'' + 2(z, - x)z', + (z' - x)^2 z_{11} - z_1 = 0,$$

et

$$(x + z)z'' + 2(x + z)(y + z)' + (y + z)^2 z_{11} + 2(x + z)(y + z)' = 0,$$

qui sont tous les deux de même nature que le précédent, la condition $G = 0$ ayant lieu aussi dans ces deux exemples.

141. Considérons maintenant des exemples dans lesquels cette condition n'est plus vérifiée.

$$\text{II.} \quad xz'' + 2xz' + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 z_1^2}\right) z_{11} - 2z = 0.$$

On a ici

$$H = x^3, \quad K = x^3, \quad L = x^2 - \frac{b^2}{x^2 z_1^2}, \quad M = -2z, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = \frac{b}{z_1};$$

donc les équations (A) et (B) prendront les formes respectives

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial y}{\partial x} - x^2 - \frac{b}{z_1} &= 0, & x^2 \frac{\partial y}{\partial x} (\beta) - x^2 + \frac{b}{z_1} &= 0, \\ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(x^2 - \frac{b}{z_1}\right) \frac{\partial z_1}{\partial x} - 2z &= 0, & x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta) + \left(x^2 + \frac{b}{z_1}\right) \frac{\partial z_1}{\partial x} (\beta) - 2z &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x} - z' - z_1 \frac{\partial y}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial x} (\beta) - z' - z_1 \frac{\partial y}{\partial x} (\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Aucune de ces équations, prise séparément, ne satisfait à la condition d'intégrabilité; mais Ampère a indiqué une combinaison intégrable de ces équations, qui s'obtient en multipliant, dans les deux systèmes,

la première équation par $-\frac{2z_1}{x}$, la seconde par -1 , la troisième

par $-2x$, et ajoutant ensuite séparément les équations de chaque système. Les deux sommes peuvent être représentées comme il suit,

$$\left. \begin{aligned} x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2xz' \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2xz' \frac{\partial z}{\partial x} \\ - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{b \frac{\partial z}{\partial x}}{x} + \frac{2b \frac{\partial z}{\partial x}}{x} \end{aligned} \right\} = 0,$$

en se rappelant que l'équation avec les signes supérieurs se déduit du système (A), et celle avec les signes inférieurs du système (B).

Ces deux équations contiennent des différentielles partielles par rapport à x ; mais pour la seconde variable indépendante on sous-entend dans l'une α , dans l'autre β . On a donc pour intégrales les deux équations

$$x^2 z' + x^2 z, - 2xz - b \log x, + 2b \log x = \alpha,$$

$$x^2 z' + x^2 z, - 2xz + b \log x, - 2b \log x = \beta,$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$2x^2(z' + z) - 4xz = \alpha + \beta,$$

$$2b \log \frac{z'}{x^2} = \beta - \alpha.$$

La seconde de ces équations donne

$$z, = x^2 e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}},$$

et, en substituant cette valeur de z , dans la première, on aura

$$z' = \frac{\alpha + \beta}{2x^2} + \frac{2z}{x} - \frac{\beta - \alpha}{x^2 e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}}}.$$

Par conséquent,

$$dz = \left(\frac{\alpha + \beta}{2x^2} + \frac{2z}{x} - \frac{\beta - \alpha}{x^2 e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}}} \right) dx + e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2 dy.$$

En intégrant cette dernière équation, après l'avoir multipliée par $\frac{1}{x^2}$, on obtient l'intégrale particulière

$$z = -\frac{\alpha + \beta}{6x} + e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x)x^2 - x^2 \eta = \omega$$

de l'équation donnée, comme il est facile de le vérifier a posteriori.

En considérant maintenant η comme une fonction de α et de β , et joignant à l'équation précédente les deux suivantes,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = -\frac{1}{6x} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x)x^2 - x^2 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = -\frac{1}{6x} + \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x)x^2 - x^2 \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0,$$

on obtiendra l'intégrale générale de l'équation proposée en déterminant la fonction η au moyen de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{1}{4b^2} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x)x^2 - x^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Or, en retranchant la seconde équation de l'intégrale générale, de la troisième, on trouve

$$\frac{1}{b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (y - x)x^2 + x^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) = 0,$$

Ajoutant cette dernière équation, multipliée par $\frac{1}{4b}$, à l'avant-dernière et divisant la somme par x^2 , on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{4b} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) = 0,$$

pour la détermination de la fonction η . Il est aisé de remarquer qu'elle ne s'intègre pas sous forme finie; mais son intégrale générale, d'après la méthode de Laplace, s'exprime au moyen d'intégrales définies.

Pour vérifier les valeurs de R , S , T , on trouve, en différentiant la fonction ω par rapport à x et à y , et considérant α et β comme constantes,

$$\omega' = \frac{\alpha + \beta}{6x^2} + e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (2xy - 3x^2) - 2x\eta, \quad \omega, = e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2.$$

En différentiant ω' et ω , par rapport à α et à β , et considérant x et y comme constantes, il vient

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (2xy - 3x^2) - 2x \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2,$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} (2xy - 3x^2) - 2x \frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2.$$

De la première et de la troisième de ces équations on peut éliminer $\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial \beta}$, en leur ajoutant la seconde et la troisième équation de l'intégrale générale, multipliées par $-\frac{2}{x}$. On trouve ainsi

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2.$$

Mais, en ayant égard à l'équation

$$\omega, = e^{\frac{\beta - \alpha}{2b}} x^2,$$

on peut encore écrire les équations précédentes de cette manière,

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = \frac{1}{2x^2} + \frac{\omega,}{2b}, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\omega,}{2b},$$

$$\frac{\partial \omega,}{\partial \alpha} = -\frac{\omega,}{2b}, \quad \frac{\partial \omega,}{\partial \beta} = \frac{\omega,}{2b}.$$

Ces valeurs doivent être portées dans les formules générales (6), où l'on fera $\gamma = \beta$ et $N = 0$. Pour cela, en divisant les deux premières équations précédentes respectivement par les deux dernières, il vient

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = -\frac{l}{x^2 \omega,} - 1, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = \frac{l}{x^2 \omega,} - 1,$$

$$\frac{\partial \omega,}{\partial \alpha} = -\frac{l}{x^2 \omega,}, \quad \frac{\partial \omega,}{\partial \beta} = \frac{l}{x^2 \omega,}.$$

On a d'autre part

$$\frac{K + \sqrt{G}}{H} = 1 + \frac{l}{x^2 \omega,}, \quad \frac{K - \sqrt{G}}{H} = 1 - \frac{l}{x^2 \omega,},$$

Par suite,

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = -\frac{K + \sqrt{G}}{H}, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = -\frac{K - \sqrt{G}}{H};$$

donc $R = 0$ et $T = 0$.

Multipliant et ajoutant les équations précédentes, on trouve

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = \frac{K^2 - G}{H^2} = \frac{L}{H} \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = -\frac{2K}{H};$$

par conséquent la seconde des formules (6) donne

$$S = -2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{K^2 - HL}{H} = -2 \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{G}{H}$$

Mais on a

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = -\frac{\omega^2}{4b^2}, \quad G = \frac{b^2}{\omega}, \quad H = x^2.$$

Donc

$$S = \frac{1}{2x^2}.$$

142. Nous servirons encore de cet exemple pour indiquer plus clairement la différence entre notre méthode de résolution et celle qu'a suivie Ampère. Comme on l'a déjà remarqué plus haut, au lieu de fonder la résolution à la fois sur les deux intégrales satisfaisant aux systèmes (A) et (B), Ampère n'a fait usage que de l'une d'elles

$$x^2 z' + x^2 z - 2ax - b \log z + 2b \log x = \alpha.$$

De cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, il a d'abord fallu tirer son intégrale complète avec trois constantes arbitraires α , γ , η , intégrale que nous désignerons par

$$V = 0;$$

puis son intégrale générale, que l'on obtient en considérant η comme une fonction de α et de γ , et joignant à l'équation précédente celle-ci

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0.$$

Mais, au lieu d'employer pour ce but la méthode de Lagrange et de Charpit, qui donne l'intégrale générale précisément sous la forme voulue, Ampère s'est servi de sa propre méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, laquelle ne donne pas, en général, l'intégrale sous la forme des équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0;$$

de sorte que, pour la ramener à cette forme, il faut encore une transformation spéciale. Tout en rendant pleine justice à l'idée ingénieuse sur laquelle cette transformation est fondée (*), on ne peut toutefois s'empêcher de remarquer que l'application d'un tel procédé au cas actuel complique fort inutilement le calcul. En effet, si l'on forme le système des équations simultanées de Lagrange, correspondant à l'équation proposée aux dérivées partielles des premier ordre, on a

(*) Voy. p. 20 et suiv. du *Mémoire d'Ampère*.

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{x^2 - b} = \frac{dz}{z'x^2 + z'x^2 - b} = \frac{-dz'}{2x' + x}, \quad \frac{dz'}{2x' + x} = \frac{dz'}{2x' + x},$$

et si l'on égale le premier rapport au dernier, on trouve

$$\frac{2}{x} \frac{dx}{x'} = \frac{dz'}{2x' + x}, \quad \text{d'où } z' = x^2 y.$$

A l'aide de cette équation, on tire de la proposée

$$z' = \frac{2x}{x} + \frac{\alpha + b \log \gamma}{x^2} - x^2 y.$$

Enfin, en intégrant l'équation

$$dz = z' dx + x' dy,$$

après y avoir substitué les valeurs précédentes de z' et de x' , on obtient précisément l'intégrale particulière

$$z = yx^2 y - yx^3 - \frac{\alpha + b \log \gamma}{3x} + x^2 \eta = \omega,$$

pour la détermination de laquelle la méthode d'Ampère exige des calculs plus compliqués (*).

Ensuite, Ampère applique la méthode de la variation des constantes arbitraires à l'intégrale particulière précédente. On parvient aux mêmes résultats que lui, en suivant les procédés expliqués plus haut. En considérant η comme une fonction de α et de γ , et joignant à l'équation précédente les deux suivantes,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{1}{3x} + x^2 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = x^2 y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2 \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = 0,$$

on aura l'intégrale générale de l'équation proposée, en déterminant la fonction η au moyen de l'équation (4).

Or, en différentiant ω par rapport à x et à y , et considérant α et γ comme des constantes, on trouve

$$\omega' = 2yxy - 3yx^2 + \frac{\alpha + b \log \gamma}{3x^2} + 2x\eta, \quad \omega = yx^2.$$

En différentiant maintenant ω' et ω , par rapport à α et à γ , et considérant x et y comme des constantes, il vient

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} = x^2,$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} = 2xy - 3x^2 + \frac{b}{3\gamma x^2} + 2x \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{1}{3x} + 2x \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}.$$

Les deux dernières équations, en vertu de la seconde et de la troisième équation de l'intégrale générale, prennent la forme

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \gamma} = -x^2 + \frac{b}{yx^3}, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = \frac{1}{x^2}.$$

(*) Voy. p. 145-148 de son *Mémoire*.

En appliquant alors les formules générales (5) ou (6), on trouve très-simplement.

$$R = 0, \quad S = \frac{b}{\gamma x^2}, \quad T = \frac{1}{x^2};$$

par suite, l'équation pour la détermination de la fonction η prend la forme

$$\frac{2b}{\gamma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0,$$

comme la théorie le faisait prévoir. On trouve ensuite

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = x^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{b}{3\gamma^2 x} + x^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$

et, en outre, la seconde équation de l'intégrale générale donne

$$\frac{1}{3x^2} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

Donc, pour déterminer η , on a finalement l'équation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{2b}{\gamma} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{b}{\gamma^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

sous la forme même que lui a donnée Ampère.

Il faut ensuite soumettre cette équation à deux transformations pour la ramener à la forme plus simple que nous avons ci-dessus obtenue immédiatement. Pour la première transformation, en posant

$$\log \gamma = \xi,$$

introduisons ϵ comme variable indépendante au lieu de γ ; nous obtiendrons l'équation à coefficients constants

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \epsilon^2} - 2b \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \epsilon} + b \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon} = 0.$$

Pour la seconde transformation, en posant

$$\beta = \alpha + 2b\epsilon,$$

introduisons β comme variable indépendante au lieu de ϵ ; nous ramènerons enfin l'équation à la forme demandée

$$4b \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0.$$

Ces dernières transformations s'effectuent assez simplement dans l'exemple considéré, parce que l'équation à transformer avait déjà une forme linéaire, non-seulement par rapport aux dérivées secondes, mais encore par rapport aux dérivées premières de la fonction η .

Mais la difficulté de ces transformations augmente, lorsque l'équation à transformer n'est linéaire que par rapport aux dérivées secondes de η . Il est aisé de s'en convaincre en traitant les exemples suivants,

$$\begin{aligned} z'' + 2z'z'' + (z^2 - x^2)z'' - z''_1 &= 0, \\ x^4 z'' - 4x^2 z'_1 z'' + 3z_1 z''_1 + 2x^3 z'_1 &= 0, \\ z'' + 2z'z'_1 + (z^2 - b^2)z''_1 &= 0, \end{aligned}$$

pour lesquels on peut, au contraire parvenir aux résultats définis d'Ampère, de la manière la plus simple possible, en suivant notre méthode.

§. 22.

143. Nous avons supposé plus haut, pour l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à l'intégration de l'équation (1), qu'il existait des intégrales primitives particulières de cette équation, renfermant trois constantes arbitraires. Mais on rencontre des cas particuliers dans lesquels il suffit d'avoir une intégrale particulière avec deux constantes arbitraires. Un cas semblable se présente dans les équations linéaires par rapport aux dérivées du second ordre, dans lesquelles il n'entre que z'' et z'_1 , ou que z' , et z''_1 . Il faut remarquer que, dans la théorie d'Ampère, cette forme d'équation offre une importance spéciale, puisque, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, on peut toujours ramener à ces formes les équations complètes, linéaires par rapport à z'' , z'_1 , et z''_1 . Dans notre exposition de cette méthode d'intégration, on peut regarder la forme en question comme un cas particulier; en conséquence, nous nous bornerons à la réduction d'un des exemples particuliers traités par Ampère, pour donner une idée de la méthode d'intégration employée par ce géomètre.

Prenons l'équation

$$xz'_1 + \frac{z}{z^2} z''_1 + z'_1 z''_1 = 0$$

D'après l'examen de sa forme, on en conclut (Ch. I, §. 6) que l'argument de l'une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale est égal à x . En posant $\alpha = x$; l'autre argument β devra être considéré comme une certaine fonction de x et de y . Soit

$$\beta = f(x, y);$$

on pourra, en vertu de cette équation, introduire comme variables indépendantes x et β , au lieu de x et de y .

En différenciant, dans cette hypothèse, la relation entre β , x , y , partiellement par rapport à x et en regardant la quantité β comme constante, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = 0.$$

On a, en outre,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x(\beta)} = z'_1 + z''_1 \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = z''_1 \frac{\partial y}{\partial x(\beta)}.$$

En substituant dans l'équation proposée les valeurs de z'_1 , et de z''_1 , tirées de ces deux dernières équations, il vient

$$z \frac{\partial z_1}{\partial x(\beta)} + z'_1 z_1 + z \left(\frac{1}{z^2} - \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} \right) \frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} = 0.$$

Cette dernière équation doit se partager (Ch. III, §. 12) dans les deux suivantes;

$$\begin{aligned} z \frac{\partial z_1}{\partial x(\beta)} + z'_1 z_1 &= 0, & \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{1}{z^2} &= 0, \\ \text{auxquelles on en peut encore joindre une troisième,} & & \frac{\partial z_1}{\partial x(\beta)} - z'_1 - z''_1 \frac{\partial y}{\partial x(\beta)} &= 0. \end{aligned}$$

Les trois équations précédentes ne contenant aucune dérivée de z' , on ne pourra former avec elles une combinaison intégrable autrement que par l'élimination de z'_1 . A cette fin, éliminons z'_1 entre la première et la troisième, ce qui donne

ou, en vertu de la seconde des trois mêmes équations,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta = 0,$$

En intégrant cette dernière équation, on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta - 1 = 0.$$

Si l'on considère ici β comme une quantité constante, et que l'on prenne de nouveau x et y comme variables indépendantes, l'équation précédente représentera une intégrale particulière du premier ordre de l'équation proposée. En effet, en la différentiant par rapport à x et à y , il viendra

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta - 1 = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta = 0.$$

Ajoutant la première de ces équations à la seconde, multipliée par $\frac{1}{2}$, on retrouve l'équation proposée.

De l'intégrale particulière du premier ordre, en l'intégrant comme une équation différentielle ordinaire (puisque l'on n'y entre pas de dérivées par rapport à x), on tire l'intégrale particulière primitive

$$\omega = \frac{x^2}{2} - (x + \beta)y + \eta = 0,$$

η désignant une fonction entièrement arbitraire de x . Mais, si l'on considère η comme une fonction de x et de β , la dernière équation continuera à être une intégrale de celle d'où on l'a déduite, pourvu qu'on y joigne la condition

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = -y + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0.$$

Il reste à trouver la condition qui doit être remplie pour que l'équation continue d'être une intégrale de la proposée. Pour cela, en différentiant la dernière équation par rapport à x et à y , on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \omega - 1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \omega + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \omega = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta.$$

Ajoutant la première de ces équations à la seconde, multipliée par $\frac{1}{2}$, il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \omega + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \omega = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta.$$

Par conséquent, la condition cherchée est exprimée par l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta = 0.$$

Or nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta = 0;$$

donc l'équation de condition prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \beta = 0.$$

Substituant dans cette équation les valeurs

$$y = \frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \beta},$$

et

$$z^2 = \left(\frac{x + \beta}{z} \right)^2 = \frac{(x + \beta)^2}{2(x + \beta)y - 2\eta} = \frac{(x + \beta)^2}{2(x + \beta) \frac{\partial \eta}{\partial \beta} - 2\eta}.$$

on a, pour déterminer la fonction η , l'équation

$$(x + \beta)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \beta} - 2(x + \beta) \frac{\partial \eta}{\partial \beta} + 2\eta = 0,$$

intégrable par la méthode de Laplace.

§ 23.

144. La méthode de la variation des constantes arbitraires, sous la forme que nous lui avons donnée dans ce qui précède, constitue le plus général de tous les procédés que l'on ait proposés jusqu'ici pour l'intégration de l'équation

$$(1) \quad Hx^2 + 2Kx' + Lx'' + M + N(x'' - z'^2) = 0;$$

car elle seule embrasse tous les cas qui diffèrent par le nombre des intégrales possibles des équations (A) et (B).

En effet, dans ce Chapitre, nous avons considéré son application aux cas où nous ne connaissions pas même une seule intégrale des équations (A) et (B), et à ceux où chacun de ces deux systèmes n'admettait par plus d'une intégrale. Nous avons indiqué plus haut (Chap. III, § 13) l'application de cette méthode à l'autre cas extrême, celui où les deux systèmes (A) et (B) admettent jusqu'à trois intégrales, et se confondent en un seul, en vertu de la condition $G = 0$. Mais comme nous avons fondé cette méthode sur la détermination préalable d'une intégrale particulière primitive quelconque de l'équation (1), avec trois constantes arbitraires, il est alors évident de soi-même que, si chacun des systèmes (A) et (B), ou seulement l'un d'eux admet deux intégrales, alors nous aurons même plusieurs moyens pour parvenir à l'intégrale particulière demandée de l'équation (1). Les plus avantageux de ces moyens seront évidemment ceux par lesquels on aura introduit dans l'équation (4) α et β comme variables indépendantes.

Pour éclaircir ce procédé, prenons pour exemple l'équation

$$z^2 x'' + (x' + x)z' + y(z'' - z'^2) + z = 0,$$

que nous avons déjà intégrée précédemment (Chap. III, § 17) par la méthode d'Ampère, fondée, comme celle de Monge, sur la détermination préalable d'une intégrale générale du premier ordre. On a ici

$$H = M = z, \quad L = N = y, \quad K = \sqrt{G} = \frac{z}{2} + x;$$

donc les systèmes (A) et (B) prennent la forme

$$z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} - z' - x = 0, \quad z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha + 1 = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta + (x + z') \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} + z = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha - z' - x = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta - z' - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} = 0.$$

Le premier de ces systèmes fournit l'intégrale

$$(a) \quad z' + x = \text{const.};$$

du second on tire les deux intégrales

$$(b) \quad z' + x = \text{const.},$$

$$(c) \quad z'(x' + x) = \text{const.}$$

Les équations (a) et (c), dans lesquelles on peut remplacer les constantes arbitraires respectivement par α et par β , donnent

$$z' = \alpha - x, \quad z_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

et

$$z = \alpha x - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta}{\alpha} y + \eta = \omega.$$

Si l'on considère η comme une fonction de α et de β , et que l'on joigne à l'équation précédente ces deux-ci

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = x - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{y}{\alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0,$$

on obtient l'intégrale générale de la proposée en déterminant η au moyen de l'équation

$$2S \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + U = 0.$$

Or on a

$$\omega' = \alpha - x, \quad \omega_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \omega'' = -1, \quad \omega'_1 = 0, \quad \omega_{11} = 0, \\ \frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha^2}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} = \frac{1}{\alpha}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{y}{\alpha^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

D'après cela, les formules générales (6) donnent

$$S = \frac{1}{2}, \quad U = \frac{y}{\alpha^2}.$$

Donc on a, pour déterminer la fonction η , l'équation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\eta = \varphi(\alpha) + \psi(\beta).$$

Donc l'intégrale générale de l'équation proposée s'exprime au moyen des trois équations

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2} \right) x + \frac{\beta y}{x} + \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad y = -\alpha \psi'(\beta), \quad x = \frac{\beta y}{\alpha^2} + \varphi'(\alpha).$$

De même, en nous servant de l'intégrale (a) du système (A) et de l'intégrale (b) du système (B), nous exprimerons l'intégrale générale de l'équation proposée par les trois équations

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2} \right) x + \beta \log y + \beta \log \left(\log \frac{1}{\alpha} \right) - \varphi(\alpha) - \psi(\beta),$$

$$x = \varphi'(\alpha) + \frac{\beta}{\alpha \log \alpha}, \quad y = \psi'(\beta) - \log \left(\log \frac{1}{\alpha} \right).$$

Après avoir montré l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à tous les cas, en nous fondant toujours sur les mêmes formules générales, nous avons, ce nous semble, des raisons suffisantes pour appeler une méthode générale, et une méthode en grande partie nouvelle pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, de celles du moins qui ne s'écartent pas de la forme générale, à laquelle nous avons limité le cadre de notre étude.

Page 224, ligne 3: Au lieu de „détermination“ mettre „définition“.

Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten.

XIII.

Von
dem Herausgeber.

§. 1.

Zu den merkwürdigsten Sätzen von den Kegelschnitten gehört unstreitig der folgende:

Wenn um eine Ellipse oder eine Hyperbel ein Viereck beschrieben ist, so geht die durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen dieses Vierecks gehende Gerade jederzeit durch den Mittelpunkt der Ellipse oder der Hyperbel.

Diesen merkwürdigen Satz, von welchem schon Newton in seinem unsterblichen Werke: *Philosophiae naturalis Principia mathematica* wichtige Anwendungen gemacht hat*), werde ich in dieser Abhandlung einer analytischen Untersuchung unterwerfen, welche zu verschiedenen merkwürdigen analytischen Bestimmungen und Beziehungen geführt hat.

Ich werde der Kürze wegen übrigens bloss die Ellipse betrachten, weil aus den für diese Curve gefundenen Resultaten die entsprechenden Resultate für die Hyperbel unmittelbar erhalten werden, wenn man in jenen $-b^2$ für b^2 oder $b\sqrt{-1} = bi$ für b setzt. Ausserdem werde ich eine besondere Behandlung des analogen Satzes von der Parabel beifügen.

*) M. s. L'ib. I. Sect. V. Prop. XXVII. Problema XIX.