

*Archiv der Mathematik
und Physik (Grünert)
1869 Bd. 50*

XX.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Par

V. G. Imshenetsky,
professeur à l'Université Impériale de Kazan.

*Traduit du russe par J. Hoüel, professeur à la Faculté des Sciences
de Bordeaux, membre honoraire de l'Université de Kazan.*

Introduction.

La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme la plus générale, créée par les travaux des plus grands géomètres des temps modernes, forme actuellement la partie la mieux approfondie et la plus achevée du Calcul intégral. Dans l'histoire du développement de cette théorie, on rencontre ce fait remarquable, que les successeurs immédiats de Lagrange, son véritable fondateur (1772), considèrent comme impossible de suivre la voie qu'il avait tracée; tandis qu'au contraire les derniers progrès de cette théorie l'ont ramené de nouveau aux principes de Lagrange. Pfaff, le premier, se plaçant à un nouveau point de vue, est parvenu (1814) à la solution complète du problème. Mais sa méthode, théoriquement exacte, s'est trouvée peu commode dans la pratique, par suite des difficultés que présente l'intégration successive de plusieurs systèmes d'équations différentielles. Cauchy (1819) et

Jacobi (1837), par des procédés différents, et sans que le second eût aucune connaissance des travaux du premier, montrèrent que le but auquel conduisait la méthode de Pfaff pouvait être atteint plus simplement, par la seule intégration complète du premier des systèmes d'équations différentielles qui se rencontrent dans cette méthode. La question paraissait dès lors complètement épuisée. Néanmoins l'infatigable et fécond génie de Jacobi n'abandonna pas ses investigations sur ce problème, auquel il avait déjà fait faire de si grands pas, et auquel s'attachait un nouvel intérêt, depuis que les recherches d'Hamilton avaient mis en évidence la liaison qui existe entre cette théorie et l'intégration des équations différentielles de la Dynamique. Pendant que Jacobi se livrait à ses nouvelles études sur cette double question, la théorie continuait ses progrès, grâce aux remarquables publications d'autres analystes, Liouville, Bertrand, Donkin, Bour, etc., qui se sont occupés du même objet, et dont les découvertes devaient laisser moins à faire au géomètre allemand, quoique souvent aussi elles dussent coïncider avec les résultats qu'il obtenait de son côté. Nous ne pouvons émettre ici que de simples conjectures, puisque le travail de Jacobi n'a paru qu'après sa mort, rédigé par Clebsch d'après les matériaux trouvés dans ses papiers. Ces détails expliquent les réclamations de priorité auxquelles cette publication a donné lieu de la part de plusieurs auteurs, relativement soit aux théorèmes fondamentaux de la „nouvelle méthode“ de Jacobi, soit à son principe général. Mais sans aucun doute le nom du grand géomètre restera attaché à cette théorie, fondée sur ses conceptions et constituée par lui-même sous une forme systématique complète, lors même que des parties isolées et secondaires de cet ensemble appartiendraient à d'autres inventeurs.

En me bornant, pour le moment, à cette courte esquisse du développement successif de ce problème, je me réserve de revenir plus longuement sur les détails historiques dans les Notes qui accompagnent le texte, et je vais donner maintenant un aperçu général du contenu de ce Mémoire.

Dans le Chapitre I^{er}, j'examine les différentes formes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre; et, de l'intégrale complète, je déduis l'intégrale singulière et l'intégrale générale, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, en me fondant sur les propriétés des déterminants fonctionnels.

Dans le Chapitre II, je considère la forme particulière d'inté-

grale générale qui conduit à des équations linéaires par rapport aux dérivées partielles, et je donne un abrégé de la théorie de ces dernières, d'après Lagrange et Jacobi.

Dans le Chapitre III, j'expose l'état général de la question, conformément aux vues indiquées dans le dernier travail de Jacobi, et j'y introduis les conditions d'intégrabilité de Liouville et de Donkin. Après avoir montré que, dans le cas particulier de deux variables indépendantes, la méthode de Jacobi revient identiquement à celle de Lagrange et de Charpit, je reprends la question générale, et j'effectue une première simplification des équations, par l'élimination de la fonction inconnue, en tant qu'elle y entrerait explicitement; je signale, en outre, le défaut du procédé employé par Jacobi.

On voit, par le contenu des chapitres précédents, que l'objet principal de mon étude est la „nouvelle méthode“ de Jacobi. Après l'avoir exposée, j'ai fait remarquer, d'accord avec l'opinion exprimée par Bour dans un Mémoire imprimé, et par Bertrand dans ses leçons publiques, que Jacobi n'a pas donné à la construction analytique de sa théorie toute la simplicité possible. En suivant les indications de ces deux géomètres, conformes aux résultats de mes propres recherches, j'ai essayé, dans le Chapitre IV, d'établir le théorème fondamental de la méthode de Jacobi sur les principes les plus simples.

Dans le Chapitre V, j'expose avec détail la marche des intégrations qu'exige la méthode de Jacobi. D'abord, pour présenter le procédé fondamental sous la forme la plus simple, je n'ai pas réduit, dans les équations, les variables à leur nombre minimum; en outre, j'ai indiqué les difficultés qui pourraient se rencontrer, et j'ai examiné des cas où le procédé s'applique très simplement. Enfin, par l'élimination des variables superflues, j'ai établi la théorie de la méthode dans tout son développement, et j'ai donné des exemples pour bien faire comprendre la marche du calcul.

Le Chapitre VI est consacré à l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Après avoir montré que la solution de cette question plus générale peut se faire par les procédés qui ont servi à résoudre le problème traité dans les Chapitres précédents, j'applique cette théorie à des problèmes déterminés et indéterminés aux dérivées partielles du premier ordre, conduisant à l'intégration d'équations simultanées, linéaires ou non linéaires. Pour terminer, je considère à un nouveau point de vue la question générale, intéressante d'ailleurs par

elle-même, des conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression aux différentielles ordinaires d'ordre quelconque.

Dans le Chapitre VII, j'expose la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires de la forme canonique; j'explique la liaison qui existe entre le théorème de Poisson relatif aux intégrales de ces équations et le théorème fondamental de la méthode de Jacobi, et je démontre le procédé de Bertrand pour l'intégration des équations de la Dynamique au moyen du théorème de Poisson. J'applique à un même exemple les deux théories.

Enfin, dans le Chapitre VIII, pour compléter l'aperçu des méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'ajouter un exposé général de la méthode de Cauchy.

J'ai profité, dans ce travail, des secours que m'ont offerts les publications académiques, les journaux mathématiques et les ouvrages spéciaux, et j'ai indiqué les sources aux endroits correspondants du texte. Je me suis efforcé, dans ma rédaction, d'unir à la clarté et à la rigueur la plus grande généralité possible. Mais je ne puis m'empêcher de craindre que l'oeil pénétrant de la critique ne trouve que j'ai manqué plus d'une fois à cette triple condition, et n'aperçoive encore d'autres défauts dans mon travail. Dans ce cas, mon excuse sera qu'en général, dans un premier essai, on n'atteint qu'imparfaitement le but.

Chapitre I^{er}.

§. 1.

1. Une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre est une relation donnée entre un certain nombre de variables indépendantes, une fonction inconnue de ces variables, et les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction.

Désignons par

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

les n variables indépendantes; par z la fonction inconnue de ces variables, et par

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction, de sorte qu'on ait

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

D'après ces notations, le type général des équations dont il s'agit se présentera sous la forme

$$(1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

la caractéristique F désignant une fonction donnée.

Le problème de l'intégration de l'équation (1) consiste à déterminer l'expression la plus générale de la fonction z , telle qu'en la substituant avec ses dérivées partielles dans l'équation (1), celle-ci se change en identité. Mais, avant d'exposer les différentes méthodes d'intégration, il n'est pas inutile d'examiner les différentes formes de relations primitives entre $x_1, \dots, x_n, z$, qui, par des différentiations et des éliminations algébriques, peuvent donner naissance à une même équation de la forme (1).

2. La forme la plus simple d'une telle relation est une expression de z en fonction explicite des variables indépendantes,

$$(2) \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

dans laquelle entrent, en outre, n constantes arbitraires $a_1, a_2, \dots, a_n$. En différentiant la valeur de z par rapport à chacune des variables indépendantes, on obtiendra n équations de la forme

$$(3) \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et entre ces équations, jointes à l'équation (2), on pourra éliminer les n quantités $a_1, \dots, a_n$. Si l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est l'équation donnée (1), alors l'équation (2) représentera l'intégrale de (1). Une telle intégrale, renfermant dans son expression autant de constantes arbitraires que l'équation donnée contient de variables indépendantes, a été nommée par Lagrange une intégrale complète.

§. 2.

3. Il est aisé de voir cependant que l'intégrale complète (2) ne représente pas encore l'expression la plus générale de la fonction z qui puisse satisfaire à l'équation (1). En effet, cette équation (1) se déduit de (2) au moyen des équations (3), et si ces

dernières ne changent pas de forme, l'équation (2) continuera à représenter l'intégrale de (1), de quelque manière que l'on ait généralisé la signification des symboles $a_1, \dots, a_n$. Supposons donc que $a_1, \dots, a_n$ désignent des fonctions des variables $x_1, \dots, x_n$, et voyons quelles conditions ces fonctions doivent remplir pour que les expressions des dérivées partielles $p_1, \dots, p_n$ conservent leur forme primitive (3).

4. En différentiant l'équation (2) par rapport à chacune des variables, conformément aux nouvelles suppositions, on obtiendra n équations de la forme

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_i},$$

lesquelles se réduisent à l'ancienne forme (3), si les fonctions $a_1, \dots, a_n$ remplissent la condition

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0,$$

pour toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n . Ces n conditions se présentent sous la forme d'un système d'équations linéaires par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_n}$. En éliminant toutes celles-ci à l'exception d'une seule, nous trouverons des équations de la forme

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} \cdot R = 0,$$

pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n de l'indice i .

Les conditions (5) peuvent être satisfaites de deux manières:

1°. En posant

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} = 0,$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$. On obtient ainsi n équations, suffisantes pour la détermination des fonctions $a_1, \dots, a_n$; les valeurs trouvées étant substituées dans l'équation (2), la fonction z ne renfermera plus dans son expression rien d'arbitraire. L'intégrale formée par la combinaison des équations (2) et (6) est ce que Lagrange appelle l'intégrale singulière.

2°. On peut satisfaire aux conditions (5) d'une manière générale, en posant

$$(C) \begin{cases} 1, & 0, & 0, \dots, 0, \\ -\frac{\partial \psi_2}{\partial a_1}, & 1, & 0, \dots, 0, \\ -\frac{\partial \psi_3}{\partial a_1}, & -\frac{\partial \psi_2}{\partial a_2}, & 1, \dots, 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial \psi_n}{\partial a_1}, & -\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial a_2}, & \dots, 1. \end{cases}$$

En effet, la formule (M) fait voir que la somme des produits des éléments appartenant à la j ème ligne horizontale du système (C) et à la k ème ligne horizontale du système (A) forme l'élément du système (B) situé à l'intersection de la j ème ligne horizontale avec la k ème ligne verticale. Mais, dans chacun des systèmes (B) et (C) les éléments situés de l'un des côtés de la diagonale principale sont nuls; donc les déterminants de ces systèmes sont égaux aux produits des éléments de leurs diagonales principales respectives. Par conséquent

$$(7) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \dots \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} = R.$$

6. Si le déterminant R est identiquement égal à zéro il faut alors qu'un des facteurs du produit, dans le premier membre de (7), soit égal à zéro. Mais les $n-1$ premiers facteurs de ce produit sont, en général, différents de zéro, puisque, d'après ce qu'on a supposé, la fonction ψ_1 contient x_1 , la fonction ψ_2 contient $x_2, \dots$, la fonction ψ_{n-1} , contient x_{n-1} . Par conséquent, le dernier facteur $\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}$ doit être identiquement nul; c'est-à-dire que, par suite des substitutions successives que l'on a opérées, la fonction a_n ne doit plus contenir x_n explicitement, et peut s'exprimer au moyen des seules quantités $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Cependant il peut se faire aussi que, par suite des substitutions en question, aucune des fonctions $\psi_n, \psi_{n-1}, \dots, \psi_{n-k}$ ne contienne explicitement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$; il est évident alors que l'on aura identiquement

$$(7) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \psi_{n-k}}{\partial x_{n-k}} = 0,$$

et chacune des fonctions $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$ s'exprimera au moyen des seules quantités $a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}$.

7. La proposition réciproque est évidente. Si les fonctions $a_1, a_2, \dots, a_n$ ne sont pas indépendantes les unes des autres,

mais qu'au contraire l'une d'entre elles a_n , ou plusieurs d'entre elles $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$ puissent s'exprimer au moyen des seules fonctions restantes $a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}$, alors la première des égalités (7) ou toutes les égalités (7) auront lieu, d'où il résultera que le déterminant R sera identiquement nul.

§. 4.

8. Ainsi on peut satisfaire à la condition $R = 0$ de la manière la plus générale, en prenant une des fonctions $a_1, a_2, \dots, a_n$ égale à une fonction entièrement arbitraire de toutes les autres, en posant, par exemple,

$$(8) \quad a_n = \pi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1});$$

ou d'une manière moins générale, en égalant quelques-unes de ces fonctions à des fonctions arbitraires des autres, par exemple, en faisant

$$(9) \quad \begin{cases} a_n = \pi_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}), \\ a_{n-1} = \pi_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}), \\ \dots \\ a_{n-k} = \pi_{n-k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}). \end{cases}$$

En introduisant cette dernière hypothèse dans les conditions (4), et remarquant, de plus, que, pour toute valeur de l'indice $m < n$ et $\sum_{i=1}^m n-i$, on a

$$\frac{\partial a_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \pi_m}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \pi_m}{\partial a_{n-k-1}} \frac{\partial a_{n-k-1}}{\partial x_i},$$

nous réduisons ces conditions à la forme suivante.

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}} \frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \pi_n} \frac{\partial \pi_n}{\partial a_1} \right) \frac{\partial a_1}{\partial x_i} \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}} + \frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}} \frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \pi_n} \frac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-1}} \right) \frac{\partial a_{n-k-1}}{\partial x_i} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} = 0$$

Multiplicons cette équation par dx_i , et faisons ensuite la somme de toutes les équations analogues, obtenues en donnant à i toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n ; il viendra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}} \frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \pi_n} \frac{\partial \pi_n}{\partial a_1} \right) da_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}} + \frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}} \frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \pi_n} \frac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-1}} \right) da_{n-k-1} = 0.$$

Les fonctions $a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}$ étant, par hypothèse, complètement indépendantes entre elles, il faut alors, pour que l'équation précédente ait lieu quelles que soient les valeurs de $da_1, \dots, da_{n-k-1}$, que l'on pose

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}} \frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \pi_n} \frac{\partial \pi_n}{\partial a_i} = 0,$$

en attribuant à i successivement toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à $n-k-1$.

9. Pour une forme donnée des fonctions arbitraires $\pi_{n-k}, \dots, \pi_n$, on peut tirer des équations (10) les valeurs des quantités $a_1, \dots, a_{n-k-1}$; puis, au moyen des équations (9), les valeurs des quantités $a_{n-k}, \dots, a_n$; après quoi l'équation (2) donnera la détermination complète de la fonction z au moyen des variables $x_1, \dots, x_n$. De cette manière, le système des équations (2), (9) et (10) représente une intégrale de l'équation (1). Dans cette intégrale, l'expression (2) de z renferme $k+1$ fonctions arbitraires de $n-k-1$ fonctions données, et plus le nombre k est petit, plus l'expression de z est générale. Pour $k=0$, elle atteint la plus grande généralité possible. Dans ce dernier cas, les équations (9) sont remplacées par la seule équation (8), et les équations (10) par les équations

$$(11) \quad \frac{\partial f}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0,$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs de i , depuis 1 jusqu'à $n-1$.

L'intégrale qui résulte de la combinaison des équations (2), (8) et (11) a été appelée par Lagrange l'intégrale générale.

§. 5.

10. Pour compléter l'étude de la forme des fonctions qui peuvent être des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, démontrons que toute fonction donnée z des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, satisfaisant à l'équation (1), est renfermée comme cas particulier dans le système des solutions de cette

équation, qui se compose de l'intégrale complète, et des intégrales singulières et générales qui s'en déduisent.

Soit, en effet,

$$(12) \quad z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

la fonction donnée, satisfaisant à l'équation

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

et soit

$$(2) \quad z = f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$$

l'intégrale complète de cette équation.

En écrivant le système des n équations

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

on pourra, en général, déterminer les valeurs, constantes ou variables, des n quantités $a_1, \dots, a_n$, qui vérifient ces équations. Ces valeurs satisfont nécessairement aussi à l'équation

$$(14) \quad f = \varphi.$$

En effet, mettons l'équation (1) sous la forme

$$z = F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n);$$

en substituant pour z les expressions (12) et (2), nous obtiendrons les deux identités

$$(15) \quad \varphi = F(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}),$$

$$(16) \quad f = F(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

La dernière de ces identités a lieu pour des valeurs arbitraires quelconques de $a_1, \dots, a_n$, et par conséquent aussi pour les valeurs de ces quantités tirées des équations (13). Mais, par la substitution de ces dernières valeurs, le second membre de (16) devient complètement identique avec le second membre de (15). D'après cela, les premiers membres de ces égalités deviennent identiquement égaux, c'est-à-dire que l'on a $f = \varphi$. On démontrera absolument de la même manière qu'en général, si les valeurs trouvées pour $a_1, \dots, a_n$ vérifient n équations quelconques du système (13) et (14), elles satisfont aussi à la $(n+1)^{\text{ième}}$.

11. Si l'on différentie l'égalité (14) par rapport à chacune des variables indépendantes, en observant que $a_1, \dots, a_n$, qui entrent dans le premier membre de cette équation et qui sont déterminées par les équations (13), doivent être considérées comme des fonctions des variables; on trouve n égalités de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

lesquelles, en ayant égard à (13), se réduisent aux suivantes,

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0.$$

Mais ces dernières ont la forme des équations (4); par conséquent, les valeurs de $a_1, \dots, a_n$, tirées des équations (13) et ramenant l'intégrale complète (2) à la forme (12), sont renfermées dans le système des valeurs générales de $a_1, \dots, a_n$ qui transforment l'intégrale complète dans l'intégrale singulière ou dans l'intégrale générale.

Si les valeurs de $a_1, \dots, a_n$, tirées des équations (13) et (14), sont toutes constantes, alors l'intégrale (12) est un cas particulier de l'intégrale complète. Si les valeurs sont des fonctions des variables, satisfaisant à une ou à plusieurs relations nécessaires, de la forme

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

alors l'intégrale (12) sera un cas particulier de l'intégrale générale. Enfin, si ni l'un ni l'autre de ces deux cas n'a lieu, l'intégrale (12) est l'intégrale singulière.

§. 6.

12. Nous avons considéré l'intégrale complète de l'équation (1) sous la forme d'une fonction explicite z des variables $x_1, \dots, x_n$. Mais si cette intégrale est donnée sous la forme d'une fonction implicite, déterminée par l'équation

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, z, a_1, \dots, a_n) = 0,$$

la méthode de la variation des constantes arbitraires s'applique dans ce cas absolument comme dans le précédent. En effet, en considérant $a_1, \dots, a_n$ comme des fonctions des variables $x_1, \dots, x_n, z$, nous pourrions les déterminer d'abord au moyen des équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0,$$

dans lesquelles nous donnerons à i toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à n . Nous obtiendrons ainsi l'intégrale singulière.

En second lieu, en supposant que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k}$ soient des fonctions entièrement arbitraires de $a_1, a_2, \dots, a_{n-k-1}$, on peut déterminer ces dernières quantités en fonction des variables par les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-k}} \frac{\partial a_{n-k}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial a_1} = 0,$$

où l'on suppose $i = 1, 2, \dots, n-k-1$. L'intégrale obtenue de cette manière est une intégrale générale, et elle a sa plus grande généralité pour $k = 0$.

En effet, il est facile de voir que, dans chacun des trois modes de détermination précédents des quantités $a_1, \dots, a_n$, on obtient, en différentiant l'équation $\varphi = 0$ par rapport à chacune des variables indépendantes, n équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p_i = 0,$$

d'une seule et même forme dans les trois cas. Par conséquent, la détermination de $a_1, \dots, a_n$ au moyen de ces équations et de $\varphi = 0$ conduit dans ces trois cas à une seule et même équation aux dérivées partielles, puisque le résultat de l'élimination ne dépend pas des valeurs attribuées aux quantités éliminées.

13. Remarquons que, si l'équation aux dérivées partielles ne renferme que deux variables indépendantes, avec une fonction de ces variables, ces trois variables pourront être considérées comme les coordonnées d'un point de l'espace. Alors l'intégrale complète représentera l'équation d'une surface, renfermant deux paramètres arbitraires. La méthode même qui sert à trouver l'intégrale générale et l'intégrale singulière au moyen de la variation des constantes arbitraires devient, dans ce cas, complètement identique avec le procédé employé en Géométrie pour déterminer les surfaces-enveloppes, savoir: dans le cas de l'intégrale singulière, en faisant varier indépendamment les deux paramètres; dans le cas de l'intégrale générale, en établissant entre ces paramètres une dépendance arbitraire.

Chapitre II.

§. 7.

14. Nous avons vu (§. 4, art. 9) que la forme la plus générale de la fonction explicite z satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0,$$

est la suivante,

$$z = f[x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}, \pi(a_1, \dots, a_{n-1})],$$

qui renferme dans son expression les n variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$, puis $n-1$ fonctions données indépendantes entre elles, $a_1, \dots, a_{n-1}$ de ces variables, et enfin une fonction arbitraire π de ces fonctions données.

Considérons un cas particulier de cette forme générale, celui où f ne contient explicitement ni $x_1, \dots, x_n$, ni $a_1, \dots, a_{n-1}$; nous aurons alors

$$(1) \quad z = f[\pi(a_1, \dots, a_{n-1})], \text{ ou simplement } z = \pi(a_1, \dots, a_{n-1}),$$

puisque π est une fonction arbitraire.

L'équation aux dérivées partielles du premier ordre correspondante à cette forme d'intégrale s'obtient très-simplement, en s'appuyant sur le théorème du §. 3., en vertu duquel le déterminant fonctionnel des fonctions $z, a_1, \dots, a_{n-1}$ est égal à zéro, lorsqu'on a entre ces fonctions la relation (1). Il vient, d'après cela,

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant le déterminant de degré n , qui forme le premier membre de cette équation, suivant les déterminants partiels de degré $n-1$, qui ne renferment pas les éléments de la première ligne horizontale,

$$(3) \quad R_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + R_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

les coefficients $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ étant les déterminants de degré $n-1$ formés avec les éléments du déterminant (2), en supprimant constamment la première ligne horizontale, et successivement la 1^{re}, la 2^e, ..., la n ^{ième} ligne verticale, de sorte que

$$R_i = (-1)^{(n-1)(i-1)} \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_{i-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i-1}} \end{vmatrix}$$

L'équation (3) est de forme linéaire par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$; elle n'a pas de terme qui ne contienne aucune dérivée partielle, et ses coefficients ne contiennent pas la fonction z .

15. Prenons maintenant la seconde forme de l'intégrale générale (§. 6.),

$$\varphi[x_1, \dots, x_n, z, a_1, \dots, a_{n-1}, \pi(a_1, \dots, a_{n-1})] = 0,$$

par laquelle l'inconnue z est déterminée comme fonction implicite des variables indépendantes. Ici φ désigne une fonction donnée, π une fonction arbitraire, et les fonctions données $a_1, \dots, a_{n-1}$ contiennent, outre les variables indépendantes, la fonction z elle-même.

Considérons le cas particulier où $a_1, \dots, a_{n-1}$ n'entrent pas directement dans φ , mais seulement par la fonction π ; alors l'équation précédente est de la forme

$$\varphi[x_1, \dots, x_n, z, \pi(a_1, \dots, a_{n-1})] = 0;$$

en résolvant cette équation par rapport à π , il vient

$$\pi(a_1, \dots, a_{n-1}) = \chi(x_1, \dots, x_n, z),$$

χ désignant une fonction connue. Si l'on pose, pour l'uniformité, $\chi = a_n$, et qu'on profite de ce que la fonction π est arbitraire, on peut remplacer la relation précédente par celle-ci qui lui est équivalente,

$$(4) \quad \pi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = 0.$$

Voyons de quelle forme est l'équation aux dérivées partielles

de la fonction z qui correspond à la forme d'intégrale (4). Pour ramener ce cas au précédent, prenons d'abord l'équation

$$(5) \quad \gamma = \pi(a_1, \dots, a_n);$$

en vertu de cette relation entre les fonctions $\gamma, a_1, \dots, a_n$, il s'ensuit que leur déterminant fonctionnel est nul, c'est-à-dire que l'on a

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \gamma}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial z} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \frac{\partial a_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(7) \quad R^{(1)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + R^{(2)} \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \dots + R^{(n+1)} \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

$R^{(i)}$ étant un déterminant de degré n , formé d'une manière analogue aux R_i de l'art. précédent.

Mais si, entre les fonctions $a_1, \dots, a_n$, on établit la relation (4), alors on a

$$\gamma = 0,$$

et z peut être considéré comme une fonction de $x_1, \dots, x_n$. En différenciant dans cette hypothèse la dernière équation par rapport à chacune des variables indépendantes, nous obtenons les n équations

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

au moyen desquelles l'équation (7) se change dans la suivante

$$(8) \quad R^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_1} + R^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + R^{(n)} \frac{\partial z}{\partial x_n} = R^{(n+1)}.$$

Cette dernière équation est encore linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction z ; mais elle est d'une forme plus générale que l'équation (3), puisqu'elle a un terme $R^{(n+1)}$ qui ne renferme pas les dérivées partielles de z , et que la fonction z elle-même entre dans les coefficients avec les variables indépendantes.

16. Ainsi se trouve établie la forme la plus générale d'une relation primitive entre les variables indépendantes et une fonction de ces variables, conduisant à une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles. Cette équation linéaire peut être, par conséquent, de l'une des deux formes générales (3) ou (8); mais l'analyse précédente fait voir que de l'équation (8) on peut remonter à l'équation (7), qui est de la même forme que (3), si ce n'est qu'elle contient une variable indépendante de plus. L'équation (6), équivalente à (7), est vérifiée identiquement, si l'on substitue à la fonction γ une quelconque des fonctions $a_1, \dots, a_n$, puisque le déterminant qui forme le premier membre de cette équation a dans ce cas deux de ses lignes horizontales identiques entre elles. Par suite, $a_1, \dots, a_n$ sont n solutions ou intégrales particulières de l'équation (7), et l'expression la plus générale de la fonction γ est, comme l'indique la formule (5), une fonction arbitraire de ces intégrales particulières. Enfin, cette fonction arbitraire, étant égale à zéro (ou à une constante arbitraire, ce qui n'augmente en rien la généralité), donne, comme le montre la formule (4), l'intégrale générale de l'équation (8).

D'après cela, on peut déjà prévoir la marche générale de l'intégration d'une équation linéaire de la forme (8), lorsque les coefficients $R^{(i)}$ sont des fonctions données quelconques de $x_1, \dots, x_n, z$. On la ramènera à la forme (7), puis on déterminera n fonctions indépendantes vérifiant cette équation (7). Alors, en égalant à zéro une fonction arbitraire de ces n fonctions, on aura l'intégrale générale de l'équation considérée.

Cette prévision est pleinement confirmée par la théorie exposée dans les deux paragraphes suivants.

§. 8.

17. Lagrange, après avoir établi une première théorie de l'intégration des équations linéaires, l'a présentée finalement sous la forme suivante.

Prenons une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles, de la forme générale

$$(9) \quad A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = A,$$

dans laquelle $A, A_1, \dots, A_n$ désignent des fonctions données de $x_1, \dots, x_n$ et de z .

Représentons son intégrale par l'équation

$$(10) \quad \gamma(x_1, \dots, x_n, z) = 0,$$

au moyen de laquelle on pourra déterminer z en fonction de $x_1, \dots, x_n$. En la différentiant dans cette hypothèse par rapport à chacune des variables indépendantes, nous aurons les n égalités

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Par conséquent, en multipliant l'équation donnée par $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$, et transposant tous les termes dans le second membre, on obtient l'égalité

$$(11) \quad 0 = A \frac{\partial \gamma}{\partial z} + A_1 \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

D'autre part, en considérant z comme une fonction déterminée par l'équation (10), et prenant la différentielle complète de γ dans cette supposition, nous aurons identiquement

$$d\gamma = 0.$$

Or

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z} dz + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \gamma}{\partial x_n} dx_n;$$

donc, en substituant ici la valeur d'une des dérivées partielles de γ , de $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ par exemple, tirée de l'égalité (11), il viendra

$$d\gamma = (dx_1 - \frac{A_1}{A} dz) \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + \dots + (dx_n - \frac{A_n}{A} dz) \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

Cette expression montre que $d\gamma$ deviendra identiquement nul, si entre les variables $x_1, \dots, x_n, z$ on établit des relations satisfaisant aux équations

$$(12) \quad dx_1 - \frac{A_1}{A} dz = 0, \dots, dx_n - \frac{A_n}{A} dz = 0.$$

Mais pour les n équations simultanées aux différentielles ordinaires (12) du premier ordre entre $n+1$ variables, on peut déterminer n intégrales distinctes, renfermant n constantes arbitraires $a_1, \dots, a_n$. Supposons que ces intégrales, résolues par rapport aux constantes arbitraires, soient

$$(13) \quad \varphi_1(x_1, \dots, x_n, z) = a_1, \varphi_2(x_1, \dots, x_n, z) = a_2, \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, z) = a_n.$$

Au moyen de ces n équations, représentant les intégrales des équations (12), on peut aussi exprimer n des variables $x_1, \dots, x_n, z$ en fonctions de la variable restante et des constantes arbitraires. En substituant ces expressions dans la fonction $\gamma(x_1, \dots, x_n, z)$, la variable restante, en fonctions de laquelle sont exprimées toutes les autres, devra disparaître d'elle-même, puisque $d\gamma$ doit être nul. Par conséquent, après la substitution, γ ne contiendra plus que les constantes arbitraires $a_1, \dots, a_n$.

De là il s'ensuit évidemment que la forme la plus générale que puisse avoir la fonction γ pour satisfaire à la condition précédente, est la forme

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

π désignant une fonction complètement arbitraire, et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ étant les fonctions qui forment les premiers membres des équations (13). En effet, si l'on résout les équations (13) par rapport à n quelconques des quantités $x_1, \dots, x_n, z$, et que l'on substitue de nouveau les valeurs obtenues dans les équations d'où elles ont été tirées, celles-ci devront se réduire à des identités, φ_1 se changeant en a_1 , φ_2 en a_2 , etc. Par suite, l'intégrale générale de l'équation (9) est

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0.$$

C'est à peu près sous cette forme que la théorie des équations linéaires a été exposée dans la Leçon XX du Calcul des Fonctions (édition de 1806). Lagrange, après avoir développé cette théorie pour le cas de deux et de trois variables indépendantes, ajoute: „L'analyse précédente est plus simple et plus directe que celle que j'ai donnée dans la Théorie des Fonctions (n°. 101); c'est ce qui m'a engagé à la mettre ici, d'autant qu'elle s'applique avec la même facilité aux équations semblables entre un plus grand nombre de variables. Dans les Mémoires de Berlin de 1779, je m'étais contenté de prouver, a posteriori, la légitimité et la généralité de la méthode.”

§. 9.

18. D'après la théorie de Lagrange, l'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles (9) se ramène à l'intégration du système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires (12). Mais, comme la fait voir Jacobi (Journal de Crelle, T. II), les solutions de ces deux questions sont liées par une dépendance mutuelle. La démonstration de cette proposition

complète et éclaircit la théorie de Lagrange, et nous fournit en même temps l'occasion de présenter une esquisse générale de la théorie de l'intégration des équations simultanées de la forme (12).

Les équations (12) peuvent s'écrire sous forme de proportions,

$$\frac{dz}{A} = \frac{dx_1}{A_1} = \dots = \frac{dx_n}{A_n},$$

lesquelles sont l'expression de ce problème: Etablir entre les variables $z, x_1, \dots, x_n$ des relations telles, que les différentielles de ces variables soient proportionnelles aux fonctions données $A, A_1, \dots, A_n$. En prenant une des variables, z par exemple, pour variable indépendante, on peut considérer toutes les autres $x_1, \dots, x_n$ comme des fonctions de z , et les équations précédentes, écrites sous la forme

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A}, \dots, \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A},$$

donneront les expressions des dérivées premières de ces fonctions au moyen de $z, x_1, \dots, x_n$. Il est facile d'en déduire des expressions semblables pour les dérivées d'ordres plus élevés de ces mêmes fonctions. Pour cela, en différentiant, par exemple, l'équation

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{A_i}{A}$$

plusieurs fois consécutivement par rapport à z , considéré comme la variable indépendante, dont $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions, et, à mesure que $\frac{dx_1}{dz}, \dots, \frac{dx_n}{dz}$ s'introduisent dans les seconds membres,

les remplaçant par leurs valeurs respectives $\frac{A_1}{A}, \dots, \frac{A_n}{A}$, on obtiendra les expressions demandées, qui seront de la forme

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dz} = \frac{A_i}{A} = \psi_i(z, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{d^2x_i}{dz^2} = \psi_2(z, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{d^nx_i}{dz^n} = \psi_n(z, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \end{cases}$$

On trouvera de cette manière les expressions des dérivées d'ordres supérieurs de toutes les fonctions $x_1, \dots, x_n$.

Supposons maintenant qu'à une valeur particulière donnée z^0 de la variable indépendante z correspondent des valeurs $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, choisies arbitrairement pour les fonctions $x_1, x_2, \dots, x_n$. On pourra développer alors chacune des fonctions $x_1, \dots, x_n$ en série infinie par la formule de Taylor. On aura de cette manière

$$x_i = x_i^0 + \psi_1(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0) \frac{z - z^0}{1} + \dots + \psi_2(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0) \frac{(z - z^0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Ainsi se trouve démontrée l'existence des n fonctions cherchées, remplissant les conditions voulues, et nous voyons en même temps que toutes ces expressions renferment les mêmes constantes arbitraires $x_1^0, \dots, x_n^0$. Pour ce qui est de la quantité z^0 , elle doit être considérée comme une constante donnée, par exemple comme un nombre donné. Remarquons encore que, au lieu des constantes arbitraires $x_1^0, \dots, x_n^0$, on peut en introduire d'autres, liées avec les premières par des relations arbitraires, pourvu que les nouvelles constantes arbitraires puissent être déterminées de telle manière que, pour une valeur donnée quelconque de z , les fonctions $x_1, \dots, x_n$ puissent prendre des valeurs choisies à volonté.

19. Pour déterminer les expressions finies des n fonctions cherchées $x_1, \dots, x_n$, il faut, en général, trouver n équations, nommées intégrales, entre ces fonctions, la variable indépendante z , et n constantes arbitraires. Ce problème peut être résolu dans certains cas, sans élever l'ordre différentiel des équations (12), et le succès dépend finalement de la forme des fonctions données $A, A_1, \dots, A_n$.

Il existe encore un autre procédé: l'élimination de $n-1$ des fonctions inconnues, et la réduction du problème à l'intégration d'une seule équation différentielle ordinaire du $n^{\text{ième}}$ ordre. Pour cela, prenons, par exemple les n premières équations (14), et éliminons entre elles les $n-1$ quantités $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Nous obtiendrons de cette manière une seule équation entre z , la fonction x_i de z et les dérivées de cette fonction jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre, et cette équation sera de la forme

$$f(z, x_i, \frac{dx_i}{dz}, \dots, \frac{d^nx_i}{dz^n}) = 0.$$

Une équation de l'ordre n entre deux variables z , comme on sait, n intégrales premières, qui se présentent sous la forme d'équations différentielles de l'ordre $n-1$, renfermant chacune une con-

et l'équation

$$\pi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$$

sera l'intégrale complète de ces équations aux dérivées partielles.

Ces conclusions sont complètement conformes à la théorie de Lagrange, et, en les prenant pour bases, on pourra considérer la méthode d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles comme une simple addition aux propriétés démontrées plus haut, des intégrales des équations simultanées de la forme (12).

21. Pour achever de mettre en lumière la liaison intime et la dépendance réciproque des deux problèmes de l'intégration de l'équation (11) et de celle des équations (12), démontrons encore le théorème suivant:

Toute fonction ψ des variables $z, x_1, \dots, x_n$, satisfaisant à l'équation linéaire aux dérivées partielles (11), conserve une valeur constante, lorsqu'on fait varier simultanément la quantité z et les quantités $x_1, \dots, x_n$, considérées comme des fonctions de z déterminées par les équations (12); et par conséquent

$$\psi = \text{const.}$$

est une des intégrales du système d'équations simultanées (12).

En effet, en prenant la différentielle de ψ dans l'hypothèse de $x_1, \dots, x_n$ fonctions de z , on a

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dz} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dz} \right) dz;$$

or, en vertu des équations (12),

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A}, \dots, \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A};$$

donc

$$d\psi = A(\psi) \cdot \frac{dz}{A}.$$

D'après les conditions du théorème, $A(\psi)$ est identiquement égal à zéro. Partant,

$$d\psi = 0, \text{ d'où } \psi = \text{const.};$$

ce qu'il fallait démontrer.

De là résulte: 1°. Qu'ayant déterminé d'une manière quelconque n fonctions distinctes ou indépendantes entre elles $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ satisfaisant à l'équations (11), nous aurons un système complet d'intégrales des équations (12), sous la forme

$$\varphi_1 = \text{const.} = c_1, \quad \varphi_2 = \text{const.} = c_2, \dots, \quad \varphi_n = \text{const.} = c_n;$$

2°. Que, connaissant un système d'intégrales des équations (12), tel que le précédent, on peut former un nombre infini d'autres systèmes, de la forme

$$\pi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{const.} = c^{(1)},$$

$$\pi_2(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{const.} = c^{(2)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\pi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{const.} = c^{(n)}.$$

Il est clair que ce passage d'un système d'intégrales à un autre revient à remplacer les constantes arbitraires primitives par de nouvelles constantes, liées avec elles par des relations choisies arbitrairement,

$$\pi_1(c_1, \dots, c_n) = c^{(1)}, \dots, \pi_n(c_1, \dots, c_n) = c^{(n)}.$$

22. Parmi les différents systèmes d'intégrales des équations (12), celui qui, dans beaucoup de cas, mérite la préférence est le système dans lequel entrent, comme constantes arbitraires, des valeurs arbitraires $x_1^0, \dots, x_n^0$ des fonctions $x_1, \dots, x_n$, correspondantes à une valeur quelconque z^0 de la variable indépendante z . Il est facile de déduire ce système d'intégrales d'un autre système donné quelconque, par exemple, du système (16). En supposant que, pour $z = z^0$, on ait, pour valeurs correspondantes, $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$, nous aurons, entre les anciennes constantes et les nouvelles, les relations

$$\varphi_1(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0) = c_1, \dots, \varphi_n(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0) = c_n,$$

ou, en résolvant ces équations par rapport à $x_1^0, \dots, x_n^0$,

$$x_1^0 = \psi_1(c_1, \dots, c_n), \dots, x_n^0 = \psi_n(c_1, \dots, c_n).$$

Si l'on substitue ici les valeurs de $c_1, \dots, c_n$ tirées des équations (16), nous aurons le système demandé d'intégrales, sous la forme

$$\varphi_1(z, x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_n(z, x_1, \dots, x_n) = \varphi_n(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0).$$

ou encore sous celle-ci

$$\psi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = x_1^0, \dots, \psi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = x_n^0.$$

Chapitre III.

§. 10.

23. Nous allons maintenant considérer le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme la plus générale, c'est-à-dire, sans restriction relative au nombre des variables indépendantes ou à la forme de l'équation.

En conservant les notations adoptées au §. 1, représentons encore le type général de ces équations sous la forme

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0.$$

La détermination immédiate de l'intégrale générale de l'équation (1) constituerait un problème trop complexe; à cause de cela, on cherchera d'abord son intégrale complète, renfermant n constantes arbitraires, de laquelle, comme on l'a démontré plus haut (Chap. I, §§. 2.—6.), on déduira ensuite, par la variation des constantes arbitraires, les intégrales générales et l'intégrale singulière. Une autre manière de traiter le problème consiste, au lieu de déterminer immédiatement l'intégrale complète, représentée par une équation entre les variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$, la fonction z et n constantes arbitraires, à chercher d'abord les expressions des dérivées partielles $p_1, \dots, p_n$ de la fonction z . En substituant ces expressions dans l'équation

$$(2) \quad dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n,$$

qui donne la différentielle totale de la fonction z , et intégrant cette équation, on obtient l'intégrale complète cherchée. Si l'on met cette dernière sous la forme d'une équation résolue par rapport à une des constantes $a_1, \dots, a_n$, on a

$$(3) \quad f(x_1, \dots, x_n, z, a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n;$$

d'où, en différentiant par rapport à chacune des variables indépendantes, on tire

$$p_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \dots, p_n = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Par suite, $p_1, \dots, p_n$ doivent être des fonctions de $x_1, \dots, x_n, z$, et renfermer dans leurs expressions $n-1$ constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{n-1}$.

De plus, pour que l'équation (2) admette une intégrale, telle que (3), il est nécessaire que les fonctions $p_1, \dots, p_n$ remplissent les conditions d'intégrabilité, lesquelles sont de la forme

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_k}{\partial z} p_i = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_i}{\partial z} p_k,$$

i et k représentant tour à tour toutes les combinaisons différentes des nombres $1, 2, \dots, n$, pris deux à deux. Par suite, ces conditions sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, et on les écrira toutes, sans omissions ni répétitions, en donnant à l'indice i les valeurs successives $1, 2, \dots, n-1$, et, pour chaque valeur de i , donnant à l'indice k successivement toutes les valeurs plus grandes que i , jusqu'à n inclusivement.

Introduisons, pour abréger, la notation suivante: u étant une fonction quelconque, qui renferme, outre les variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$, la fonction z de ces variables, nous représenterons la dérivée partielle de u par rapport à l'une des variables indépendantes x_i , par le symbole $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, au lieu d'écrire $\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} p_i$. D'après cette convention, le type général des conditions d'intégrabilité prendra la forme

$$(4) \quad \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right).$$

§. 11.

24. Pour déterminer les n fonctions $p_1, \dots, p_n$, qui conduisent, par l'intégration de l'équation (2), à l'intégrale complète de (1), il faut en général trouver n équations entre ces fonctions, les variables $x_1, \dots, x_n, z$ et $n-1$ constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{n-1}$. Nous avons déjà une de ces n équations, savoir, l'équation aux dérivées partielles donnée (1); il reste à déterminer les $n-1$

autres. En supposant ces dernières résolues par rapport aux constantes arbitraires, représentons le système considéré des n équations comme il suit,

$$(5) \quad F = 0, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \dots, \quad F_{n-1} = a_{n-1},$$

$F_1, \dots, F_{n-1}$ désignant, comme le premier membre F de l'équation donnée (1), des fonctions de $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$, qui ne renferment pas de constantes arbitraires.

De cette manière, au lieu de déterminer n fonctions $p_1, \dots, p_n$ renfermant, avec les $n+1$ variables, $n-1$ constantes arbitraires, le problème se ramène à la recherche de $n-1$ fonctions $F_1, \dots, F_{n-1}$, de $2n+1$ variables chacune, mais ne renfermant pas de constantes arbitraires. Pour la détermination des fonctions $p_1, \dots, p_n$, on donne les équations de condition (4). Voyons quelles conditions doivent remplir les fonctions $F_1, \dots, F_{n-1}$, en supposant que les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (5), satisfassent aux conditions (4). Pour cela, prenons deux quelconques des équations (5), par exemple, les équations

$$F_1 = a_1, \quad F_k = a_k,$$

et différencions-les successivement par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$. On trouve, en différenciant par rapport à x_1 ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1} \right) \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1} + \frac{\partial F_k}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1} \right) \right) &= 0; \end{aligned}$$

en différenciant par rapport à x_2 ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2} \right) \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2} + \frac{\partial F_k}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right) + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2} \right) \right) &= 0; \end{aligned}$$

et ainsi de suite; enfin, en différenciant par rapport à x_n ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n} \right) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right) \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n} + \frac{\partial F_k}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial F_k}{\partial p_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n} \right) + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Éliminons, entre les deux premières équations précédentes, $\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \right)$;

entre les deux suivantes, $\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right)$; ...; enfin, entre les deux dernières, $\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right)$. Nous obtiendrons ainsi les n équations

$$\begin{aligned} (6) \quad & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right\} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right) \\ & + \dots + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \right\} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1} \right) = 0, \\ & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \right\} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right) \\ & + \dots + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \right\} \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2} \right) = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right) \frac{\partial F_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right) + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \right\} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \right) \\ & + \dots + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial p_{n-1}} \frac{\partial F_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \frac{\partial F_1}{\partial p_{n-1}} \right\} \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \right) = 0. \end{aligned}$$

25. Introduisons maintenant les conditions d'intégrabilité (4), et remarquons que, dans les équations (6), les coefficients des quantités $\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right)$ et $\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right)$, qui doivent être égales en vertu de ces conditions, sont eux-mêmes égaux en grandeur, mais de signe contraire. Si nous faisons la somme de toutes les équations (6), tous les termes, à l'exception des deux premiers de chaque équation, se détruiront deux à deux, et nous obtiendrons l'équation,

$$(7) \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) + \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right) \frac{\partial F_1}{\partial p_n} - \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right) = 0,$$

qui devra être satisfaite par toutes les combinaisons deux à deux des fonctions qui forment les premiers membres des équations (5).

La loi de composition du premier membre de l'équation (7) au moyen des dérivées partielles des fonctions F_i et F_k est évidente; nous adopterons, pour le désigner, le signe conventionnel $[F_i, F_k]$. D'après cela, le type général des conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $F, F_1, \dots, F_{n-1}$, sera

$$(8) \quad [F_i, F_k] = 0,$$

i et k représentant toutes les combinaisons différentes des indices 0, 1, 2, ..., $n-1$, pris deux à deux, avec la supposition de

$F_0 = F$. Par suite, les conditions (8) sont en même nombre que les conditions (4), savoir, au nombre de

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarquons de plus que, si dans l'équation (7) une des deux fonctions F_i , F_k est donnée, cette équation sera de forme linéaire par rapport aux dérivées partielles de l'autre fonction, qui est inconnue. Ainsi, par exemple, en faisant, dans l'équation (7), $F_k = F$, et écrivant, par suite, l'équation sous la forme

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \\ & + \left\{ p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n} \right\} \frac{\partial F_i}{\partial z} \\ & - \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \frac{\partial F_i}{\partial p_1} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \frac{\partial F_i}{\partial p_2} \\ & - \dots - \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \frac{\partial F_i}{\partial p_n} = 0, \end{aligned} \right.$$

nous avons une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de F_i , dont l'intégration (Chap. II, §§. 8 et 9) se ramène à l'intégration du système suivant d'équations simultanées aux différentielles ordinaires,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial x_1}{\partial F} = \frac{\partial x_2}{\partial F} = \dots = \frac{\partial x_n}{\partial F} \\ & \frac{\partial p_1}{\partial F} = \frac{\partial p_2}{\partial F} = \dots = \frac{\partial p_n}{\partial F} \\ & \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial z}} = \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}. \end{aligned} \right.$$

§. 12.

26. En considérant le nombre et la forme des équations (8), à l'intégration desquelles se ramène notre problème, il est aisé de remarquer que le cas de deux variables indépendantes se distingue des autres par sa plus grande simplicité. En effet, lorsque $n=2$, alors, pour compléter l'équation donnée

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0,$$

il suffit de former une autre équation

$$F_1(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = a_1,$$

dont le premier membre F_1 vérifie la condition unique

$$[F, F_1] = 0.$$

Cette équation est, comme nous l'avons vu, une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction F_1 , dont l'intégration se ramène à l'intégration du système (10) d'équations simultanées aux différentielles ordinaires, lequel prend, dans le cas actuel, la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2}} \\ = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial F}{\partial z}}. \end{aligned}$$

En outre, il est évident qu'il suffit de déterminer seulement une intégrale $F_1 = a_1$ de ce système, qui renferme au moins une des quantités p_1 , p_2 , et une constante arbitraire a_1 . À l'aide de cette intégrale et de l'équation donnée, on déterminera les expressions de p_1 et de p_2 . En substituant ces expressions dans l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0,$$

l'intégration de cette équation, multipliée, s'il est nécessaire, par un facteur d'intégrabilité, fera connaître l'intégrale complète cherchée.

27. Pour éclaircir cette méthode, appliquons-la à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 + 1 \right] + (a-z) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

ou

$$p_1(p_2^2 + 1) + (a-z)p_2 = 0.$$

Le système correspondant d'équations différentielles simultanées prend ici la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{p_2^2 + 1} = \frac{dx_2}{2p_1 p_2 + a - z} = \frac{dz}{2p_1 p_2^2 + (a-z)p_2 + p_1} \\ = \frac{dp_1}{p_1 p_2} = \frac{dp_2}{p_2^2}. \end{aligned}$$

L'équation formée en égalant le premier et le dernier de ces rapports donne, en l'intégrant,

$$a_1 + x_1 = p_2 - \frac{1}{p_2}.$$

On tire de là, au moyen de l'équation donnée,

$$p_1 = \frac{z-a}{\pm 2 \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1}},$$

$$p_2 = \frac{x_1+a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1}.$$

En substituant ces valeurs de p_1 et de p_2 dans l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0,$$

il vient

$$dz - \frac{z-a}{\pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1}} dx - \left(\frac{x_1+a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1}\right) dx_2 = 0.$$

Cette équation, multipliée par

$$\pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1} - \frac{x_1+a_1}{2}$$

se ramène à la forme

$$d\left\{(z-a)\left(\pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1} - \frac{x_1+a_1}{2}\right) - x_2\right\} = 0.$$

Par suite, l'intégrale complète de l'équation donnée sera

$$(z-a)\left(\pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1} - \frac{x_1+a_1}{2}\right) - x_2 = a_2,$$

ou

$$z-a = \left(\pm \sqrt{\left(\frac{x_1+a_1}{2}\right)^2 + 1} + \frac{x_1+a_1}{2}\right)(x_2 + a_2).$$

Si l'on prend, dans le système d'équations simultanées, l'équation formée en égalant les deux derniers rapports, l'intégration donne

$$p_1 = a_1 p_2,$$

a_1 désignant une nouvelle constante arbitraire. Au moyen de cette équation et de l'équation donnée, on trouve

$$p_1 = a_1 \sqrt{\frac{z-a}{a_1} - 1}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{z-a}{a_1} - 1};$$

par conséquent,

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = dz - (a_1 dx_1 + dx_2) \sqrt{\frac{z-a}{a_1} - 1} = 0.$$

En divisant cette équation par $\sqrt{\frac{z-a}{a_1} - 1}$, et intégrant, on obtient l'intégrale complète de l'équation donnée, sous cette autre forme,

$$2\sqrt{a_1} \sqrt{z-a-a_1} - (a_1 x_1 + x_2) = a_3,$$

ou

$$z-a = \frac{(a_1 x_1 + x_2 + a_3)^2}{4a_1} + a_1,$$

a_3 étant une nouvelle constante arbitraire.

28. La méthode précédente pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes a été établie par Lagrange dès l'année 1772.

L'équation linéaire à l'intégration de laquelle il ramène le problème n'a pas la forme symétrique de l'équation $[F, F_1] = 0$; mais elle renferme moins de variables. Exposons en quelques mots le procédé de Lagrange.

Les dérivées partielles p_1, p_2 doivent être considérées comme des fonctions de x_1, x_2, z , dont il suffit de déterminer une seule, la valeur de l'autre se déduisant de l'équation donnée

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = 0.$$

Si l'on substitue, réciproquement, ces deux valeurs dans cette même équation, elle se changera en une identité: par conséquent, on pourra la différentier, non-seulement par rapport à x_1 , mais encore par rapport à z , considéré aussi comme une variable indépendante. Nous aurons, de cette manière,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0.$$

En y joignant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_1}{\partial z} p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z} p_1,$$

et éliminant entre les trois équations précédentes les dérivées partielles de p_2 , on obtient une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction p_1 ,

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \left(p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} \right) \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

dans les coefficients de laquelle p_2 doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation donnée $F=0$. Par cette équation, p_1 est déterminé en fonction de x_1, x_2, z ; puis la valeur de la fonction p_2 se déduit de l'équation donnée. Les deux fonctions satisfont à la condition d'intégrabilité, que l'on a prise pour base de leur détermination. Donc, par la substitution de leurs valeurs, l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = 0$$

devient intégrable, et son intégration fait connaître la solution cherchée.

Remarquons que l'équation linéaire précédente conduit au système d'équations simultanées

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_2}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}},$$

qui est évidemment le même que celui de l'art. 26, à cela près que l'on y supprime le dernier rapport, et que l'on y remplace p_2 par sa valeur tirée de l'équation $F=0$. Les deux procédés sont donc au fond complètement identiques, et conduisent à une seule et même solution, si l'on se borne à déduire du système précédent d'équations simultanées une intégrale renfermant p_1 et une constante arbitraire. Mais Lagrange avait cru d'abord que, pour avoir l'expression de p_1 , il fallait déterminer l'intégrale générale de l'équation linéaire, laquelle doit être de la forme

$$\varphi_2 = \pi(\varphi_1, \varphi_2),$$

en désignant les intégrales du système correspondant d'équations simultanées, résolues par rapport aux constantes arbitraires, par

$$\varphi_1(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const.} = \alpha,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const.} = \beta,$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, z, p_1) = \text{const.} = \gamma,$$

et représentant par la caractéristique π une fonction arbitraire.

Si l'on suppose que de l'équation qui représente l'intégrale générale on puisse tirer la valeur de p_1 sans donner une forme particulière à la fonction π , nous aurons aussi cette fonction dans l'expression de p_2 . Cependant il est évident que, entre une relation primitive qui lierait x_1, x_2, z , et qui serait de la forme

$$f[x_1, x_2, z, \pi(\varphi_1, \varphi_2)] = 0$$

(f étant une fonction donnée, et π une fonction arbitraire), et les deux équations obtenues par la différentiation de la précédente par rapport à x_1 et à x_2 , il n'est pas possible d'éliminer les trois fonctions $\pi, \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \pi}{\partial \varphi_2}$.

Dans le Calcul des Fonctions (p. 390), Lagrange propose un moyen pour concilier cette contradiction. Mais il faut remarquer qu'elle ne se rencontre pas d'autout, si, conformément à la remarque très-juste de Charpit*), au lieu de l'intégrale générale de l'équation linéaire, on prend une intégrale particulière renfermant la variable p_1 . Ce dernier procédé, au lieu de conduire à l'intégrale générale, conduit à l'intégrale complète de l'équation donnée $F=0$, et a de plus l'avantage de ne pas exiger l'intégration complète du système d'équations simultanées. Lagrange, en terminant son exposition, l'établit aussi par cette méthode, sans citer d'ailleurs le nom de Charpit, à qui elle appartient.

§. 13

29. Si le nombre des variables indépendantes, dans l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, est plus grand que 2, alors le problème de l'intégration présente un caractère plus compliqué. En effet, déjà dans le cas de trois variables indépendantes, il faut (§§. 10 et 11), étant donnée la fonction F des variables $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$, qui forme le premier membre de

*) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences par Charpit, le 30 juin 1784.

l'équation proposée $F=0$, déterminer deux fonctions F_1, F_2 de ces mêmes variables, satisfaisant aux conditions

$$[F, F_1]=0, \quad \begin{cases} [F, F_2]=0, \\ [F_1, F_2]=0. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction F_1 peut être déterminée, de même que dans le cas précédent de deux variables indépendantes, comme intégrale particulière d'une équation linéaire du premier ordre; mais, pour déterminer la fonction F_2 , il faut trouver une intégrale particulière, satisfaisant à la fois aux deux autres équations simultanées linéaires aux dérivées partielles.

Si le nombre des variables indépendantes est n , alors, étant donnée la fonction F des variables $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$, qui forme le premier membre de l'équation proposée $F=0$, il faut déterminer $n-1$ fonctions $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ des mêmes variables, qui satisfassent aux conditions

$$[F, F_1]=0, \quad \begin{cases} [F, F_2]=0, \\ [F_1, F_2]=0, \end{cases} \quad \begin{cases} [F, F_3]=0, \\ [F_1, F_3]=0, \\ [F_2, F_3]=0, \end{cases} \quad \begin{cases} [F, F_{n-1}]=0, \\ [F_1, F_{n-1}]=0, \\ [F_2, F_{n-1}]=0, \\ \dots \dots \dots \\ [F_{n-2}, F_{n-1}]=0. \end{cases}$$

La fonction F_1 se détermine comme une intégrale particulière de la première des équations précédentes; la fonction F_2 comme une intégrale particulière satisfaisant simultanément à la 2^e et à la 3^e équation, etc.; et enfin F_{n-1} doit être une intégrale particulière satisfaisant simultanément aux $n-1$ dernières équations.

C'est de cette manière qu'a été présenté le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le Mémoire de Jacob: intitulé: *Nova methodus*, etc. (*Journal de Creille-Borchardt*, t. LX). Quoique ce nouveau procédé de solution soit, par l'époque de sa découverte, postérieur aux autres, cependant il forme par sa nature la continuation directe des premiers pas faits par Lagrange et Charpit dans la théorie du problème qui nous occupe. C'est pour cela que j'exposerai ce procédé avant de parler d'une autre méthode de solution, proposée par Pfaff, et perfectionnée par Jacobi lui-même et par Cauchy.

§. 14.

30. Jacobi commence par transformer l'équation donnée

$$(a) \quad F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0$$

en une autre, également aux dérivées partielles du premier ordre, mais dans laquelle la fonction inconnue n'entre pas elle-même explicitement, et où le nombre des variables indépendantes est plus grand d'une unité.

Mais dans cette transformation s'est glissée une inadvertance, signalée par Bertrand, et qui consiste en ce que Jacobi lie la nouvelle fonction inconnue à l'ancienne par une relation de forme particulière, d'où il résulte que le passage de l'intégrale de l'équation transformée à celle de l'équation proposée conduit dans la plupart des cas à des impossibilités.

En effet, Jacobi, en introduisant une nouvelle variable indépendante t , et désignant la nouvelle fonction inconnue par γ , pose

$$\gamma = zt.$$

On tire de là, en différentiant par rapport à chacune des variables indépendantes,

$$z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{t} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{1}{t} \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

En substituant dans l'équation proposée les valeurs précédentes de la fonction z et de ses dérivées partielles, on la transforme dans la suivante,

$$F(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{1}{t} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{t} \frac{\partial \gamma}{\partial x_n}) = 0.$$

Dans cette équation les variables indépendantes $x_1, \dots, x_n, t$ sont en nombre plus grand d'une unité que dans la proposée, et la fonction inconnue γ y entre seulement par ses dérivées partielles du premier ordre.

Mais, pour que de l'intégrale de l'équation ainsi transformée on puisse tirer l'intégrale de l'équation donnée, il faut, en vertu de la dépendance que l'on a supposée entre ces intégrales, que, dans la première, la variable indépendante t n'entre qu'en facteur commun, ce qui évidemment ne peut avoir lieu que dans des cas particuliers. Par conséquent, la transformation précédente n'atteint pas, la plupart du temps, le but proposé. Il vaut mieux, d'après cela, ne pas choisir d'avance arbitrairement la forme de la relation qui doit exister entre les deux intégrales, mais employer pour la transformation le même procédé général qui nous a servi dans l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.

31. Si l'on représente, en effet, l'intégrale de l'équation donnée sous la forme

$$\gamma(x_1, \dots, x_n, z) = 0,$$

et qu'on la différentie par rapport à chacune des variables indépendantes, on trouve, par chacune des valeurs $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} p_i = 0, \text{ d'où } p_i = -\frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}}.$$

En portant ces valeurs de p_i dans l'équation donnée, elle prend la forme

$$(b) \quad F\left(x_1, \dots, x_n, z, -\frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}}, \dots, -\frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}}{\frac{\partial \gamma}{\partial z}}\right) = 0.$$

Dans cette dernière équation, on devra considérer $x_1, \dots, x_n, z$ comme variables indépendantes. La méthode de Jacobi, ainsi que nous le verrons plus loin, fournit l'intégrale complète γ de l'équation précédente sous la forme d'une fonction explicite,

$$(c) \quad \gamma = f(x_1, \dots, x_n, z, a_1, \dots, a_n) + a_{n+1},$$

$a_1, \dots, a_n$, a_{n+1} désignant des constantes arbitraires. Par conséquent, en retranchant du second membre de l'égalité (c) la constante arbitraire a_{n+1} , qui y entre par simple addition, et égalant ce second membre à zéro, nous obtiendrons l'intégrale de l'équation donnée, sous la forme d'une fonction implicite z , déterminée par l'équation

$$(d) \quad \gamma - a_{n+1} = 0, \text{ ou } f(x_1, \dots, x_n, z, a_1, \dots, a_n) = 0.$$

En effet, puisque l'équation (c) représente l'intégrale de l'équation (b), en substituant dans celle-ci la fonction f au lieu de γ , on aura l'identité

$$(f) \quad F\left(x_1, \dots, x_n, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \dots, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = 0,$$

qui a lieu pour des valeurs quelconques de $x_1, \dots, x_n, z$. Supposons maintenant la dernière de ces variables déterminée en

fonction de toutes les autres au moyen de l'équation (d); elle sera alors l'intégrale de l'équation (a); car de l'équation (d) on tire

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

et, en substituant ces valeurs des dérivées partielles de z dans l'équation (a), on retombe sur l'identité (f), qui a lieu pour une valeur quelconque de z , et par suite aussi pour celle qui est tirée de l'équation (d).

Il est ainsi démontré que l'intégration d'une équation dans laquelle la fonction inconnue entre non-seulement par ses dérivées partielles du premier ordre, mais encore explicitement par elle-même, peut toujours se ramener à l'intégration d'une autre équation, dans laquelle le nombre des variables indépendantes est plus grand d'une unité, et où la fonction inconnue n'entre que par ses dérivées partielles du premier ordre.

§. 15.

32. Si, dans l'équation proposée, la fonction inconnue n'entre que par ses dérivées partielles du premier ordre, alors son type général pourra être représenté sous la forme

$$H(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = a,$$

ou

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a,$$

en faisant généralement

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

Ici H désigne une fonction donnée, a une constante déterminée, qui peut être aussi égale à zéro.

Le problème de l'intégration complète de l'équation précédente peut être réduit à la détermination de $n-1$ équations,

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \dots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

dans lesquelles $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ désignent des constantes arbitraires, et $H_1, \dots, H_{n-1}$, de même que H , des fonctions des varia-

bles $x_1, \dots, x_n$ et des dérivées partielles $p_1, \dots, p_n$ indépendantes entre elles par rapport à ces dérivées^{*)}, et ne contenant pas les constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{n-1}$. Si les fonctions $H_1, \dots, H_{n-1}$ sont déterminées de telle manière que les valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n$ tirées des équations

$$(1) \quad H = a, \quad H_1 = a_1, \dots, H_{n-1} = a_{n-1},$$

transforment le second membre de l'équation

$$(2) \quad dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

en une différentielle exacte, alors l'intégrale complète cherchée s'obtiendra par l'intégration de cette dernière équation, et sera de la forme

$$z = f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

Par hypothèse, les fonctions $H, H_1, \dots, H_{n-1}$ ne contiennent pas z ; par suite, les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (1), seront exprimées au moyen des seules variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$ et les conditions d'intégrabilité du second membre de l'équation (2) seront, dans le cas actuel, de la forme

$$(3) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}.$$

En supposant que les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (1), satisfassent aux conditions (3), on pourra trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire dans ce cas les fonctions $H, H_1, \dots, H_{n-1}$, exactement de la même manière que nous avons trouvé, au § 11, les conditions analogues pour les fonctions $F_1, \dots, F_{n-1}$. D'après cela, pour éviter les répétitions, nous nous bornerons à dire que les résultats du § 12, s'appliqueront au cas actuel, si nous y remplaçons $F, F_1, \dots, F_{n-1}$ respectivement par $H, H_1, \dots, H_{n-1}$, en effaçant les parenthèses qui entouraient les dérivées partielles, et qui sont maintenant inutiles, puisque les fonctions considérées ne contiennent plus z .

^{*)} C'est-à-dire qu'entre les fonctions $H, H_1, \dots, H_{n-1}$ il ne doit exister aucune relation nécessaire de la forme

$$\Phi(H, H_1, \dots, H_n, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

dans laquelle les variables $p_1, \dots, p_n$ n'entrent pas explicitement. En vertu du théorème du § 3, cette condition est remplie, lorsque le déterminant fonctionnel de $H, H_1, \dots, H_{n-1}$, considérées comme fonctions de $p_1, \dots, p_n$, n'est pas identiquement nul.

33. Il s'ensuit de ce qui précède qu'entre les fonctions $H, H_1, \dots, H_{n-1}$, prises deux à deux, on doit avoir des relations de la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial H_k}{\partial p_1} - \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_k}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{\partial H_k}{\partial p_2} - \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \frac{\partial H_k}{\partial x_2} \\ + \dots + \frac{\partial H_1}{\partial x_n} \frac{\partial H_k}{\partial p_n} - \frac{\partial H_1}{\partial p_n} \frac{\partial H_k}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

que nous représenterons sous la forme abrégée

$$(5) \quad (H_i, H_k) = 0.$$

En faisant successivement, dans l'équation (5),

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

(H_0 étant considéré comme $= H$), et, pour chaque valeur de i , donnant successivement à l'indice k toutes les valeurs $> i$, jusqu'à $n-1$ inclusivement, nous aurons toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions qui découlent de la formule (5), et que l'on peut disposer dans l'ordre suivant:

$$(6) \quad \begin{cases} (H, H_1) = 0; (H, H_2) = 0, \dots, (H, H_{n-1}) = 0, \\ (H_1, H_2) = 0; (H_1, H_3) = 0, \dots, (H_1, H_{n-1}) = 0, \\ (H_2, H_3) = 0; \dots, (H_2, H_{n-1}) = 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ (H_{n-2}, H_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

Si l'on considère ces conditions comme des équations afférentielles servant à la détermination des fonctions cherchées, on pourra trouver H_1 par l'intégration de la première équation; en substituant la valeur de H_1 dans les équations de la seconde ligne de chaque groupe, on devra déterminer la fonction H_2 comme une intégrale satisfaisant simultanément aux deux équations du second groupe; en substituant la valeur de H_2 dans les équations de la troisième ligne de chaque groupe, on devra déterminer la fonction H_3 comme une intégrale satisfaisant simultanément aux trois équations du troisième groupe; et ainsi de suite.

34. Mais, pour réaliser ce plan de solution, il faut trouver une méthode d'intégration simultanée pour les deux équations du 2^e groupe, pour les trois équations du 3^e groupe, ..., et enfin pour les $n-1$ équations du $(n-1)$ ^{ème} groupe.

Outre cela, toutes les équations (5) sont de forme identique, et contiennent chacune $2n$ variables indépendantes; mais il est clair que l'on peut se servir de l'équation donnée $H = a$ et des équations que l'on détermine successivement, $H_1 = a_1, H_2 = a_2, \dots$ pour diminuer au fur et à mesure le nombre primitif $2n$ des variables indépendantes, en passant d'une groupe d'équations simulées au suivant.

Enfin, remarquons aussi que nous avons démontré que, si les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (1), vérifient les conditions (3), alors les fonctions $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ satisfont aux équations (5). Mais, pour avoir le droit de prendre celles-ci comme moyen de détermination des fonctions $H_1, \dots, H_{n-1}$, il faut s'assurer encore que la conclusion réciproque a lieu; c'est-à-dire qu'il faut démontrer que, si les fonctions indépendantes entre elles (dans le même sens qui a été expliqué plus haut) $H_1, \dots, H_{n-1}$ vérifient les conditions (5), alors, en les égalant à des constantes arbitraires, on obtient des équations d'où l'on peut tirer des valeurs de $p_1, \dots, p_n$ satisfaisant aux conditions (3).

L'étude plus approfondie des propriétés des expressions (H_i, H_k) , exposée dans les deux paragraphes suivants, donne les moyens d'atteindre le but indiqué ci-dessus, et permet en outre de déduire encore d'autres conclusions utiles par leurs applications à l'intégration des équations simultanées soit aux différentielles ordinaires, soit aux dérivées partielles du premier ordre.

Chapitre IV.

§. 16.

35. Soient φ et ψ deux fonctions quelconques des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Prenons les dérivées partielles de ces deux fonctions, d'abord par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$, puis par rapport aux variables $p_1, \dots, p_n$, et écrivons les premières au-dessus des secondes dans l'ordre suivant,

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_n}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_n}. \end{array}$$

Divisons ces deux lignes de termes en groupes composés le premier des deux premiers termes de chaque ligne, le second des deux suivants, et ainsi de suite; multiplions en croix les termes de chaque groupe, en prenant avec le signe + les termes qui forment une des diagonales, et avec le signe - les termes qui forment l'autre diagonale. Nous obtiendrons de cette manière une suite de déterminants du second degré, dont la somme forme l'expression

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} & \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} & \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} & \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

que nous conviendrons de désigner par la notation

$$(\varphi, \psi).$$

On a ainsi, d'après cette définition,

$$(1) \quad (\varphi, \psi) = \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right),$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n .

Lorsqu'on examine les changements de forme de l'expression (φ, ψ) pour différentes hypothèses faites sur les valeurs de φ et de ψ , on obtient d'abord les formules évidentes

$$(2) \quad (\varphi, \varphi) = 0, \quad (\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi), \quad (-\varphi, \psi) = -(\varphi, \psi),$$

$$(3) \quad \begin{cases} (x_i, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, & (p_i, \psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, & (a = \text{const.}, \psi) = 0, \\ (x_i, p_i) = -(p_i, x_i) = 1, \\ (x_i, x_k) = (p_i, p_k) = (x_i, p_k) = 0. \end{cases}$$

36. Relativement au mode de dépendance qui existe entre les fonctions φ, ψ et les variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, nous ne ferons aucune espèce de restriction; nous supposons d'après cela que ces variables entrent dans les fonctions considérées tant explicitement qu'implicitement.

Soit, par exemple,

Thell I.

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} + \sum_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial p_i \partial u} \end{vmatrix},$$

ou

$$(9) \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right).$$

Quoique, dans la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous n'ayons pas occasion de rencontrer les dérivées d'ordres supérieurs de (φ, ψ) , remarquons cependant, en passant, la forme très-simple de leur expression, semblable à celle que Leibniz a donnée pour la valeur de

$$\frac{d^n \varphi(x) \psi(x)}{dx^n}.$$

La formule (9) donne, en effet,

$$\frac{\partial^2(\varphi, \psi)}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \psi \right) + 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\varphi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right).$$

On conclut de là, par la méthode ordinaire de démonstration des propositions trouvées par analogie, que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n(\varphi, \psi)}{\partial u^n} &= \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial u^n}, \psi \right) + n \left(\frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial u^{n-2}}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial u^{n-2}} \right) \\ &+ n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial^{n-1} \psi}{\partial u^{n-1}} \right) + \left(\varphi, \frac{\partial^n \psi}{\partial u^n} \right). \end{aligned}$$

§. 17.

Les formules générales du paragraphe précédent s'appliquent d'une manière très-simple à la démonstration de tous les théo-

rèmes sur lesquels est fondée la nouvelle méthode pour l'intégration des équations aux dérivées partielles de Jacobi.

Théorème I.

39. Soient A, B, C trois fonctions des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$; désignons, pour abrégier, leurs dérivées partielles par les lettres correspondantes affectées des variables comme indices inférieurs, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_i} &= A_{x_i}, & \frac{\partial B}{\partial x_i} &= B_{x_i}, & \frac{\partial C}{\partial x_i} &= C_{x_i}, \\ \frac{\partial A}{\partial p_i} &= A_{p_i}, & \frac{\partial B}{\partial p_i} &= B_{p_i}, & \frac{\partial C}{\partial p_i} &= C_{p_i}. \end{aligned}$$

En faisant, dans la formule (8),

$$F = A,$$

$$f = (B, C) = B_{x_1} C_{p_1} - B_{p_1} C_{x_1} + \dots + B_{x_n} C_{p_n} - B_{p_n} C_{x_n},$$

il vient

$$\begin{aligned} [A, (B, C)] &= (A, B_{x_1}) C_{p_1} - (A, B_{p_1}) C_{x_1} \\ &+ \dots + (A, B_{x_n}) C_{p_n} - (A, B_{p_n}) C_{x_n} \\ &+ (A, C_{p_1}) B_{x_1} - (A, C_{x_1}) B_{p_1} \\ &+ \dots + (A, C_{p_n}) B_{x_n} - (A, C_{x_n}) B_{p_n}, \end{aligned}$$

ou

$$(a) \quad [A, (B, C)] = \sum_i \begin{vmatrix} (A, B_{x_i}) & C_{x_i} \\ (A, B_{p_i}) & C_{p_i} \end{vmatrix} - \sum_i \begin{vmatrix} (A, C_{x_i}) & B_{x_i} \\ (A, C_{p_i}) & B_{p_i} \end{vmatrix}.$$

En permutant circulairement les lettres A, B, C , on trouve

$$(b) \quad [B, (C, A)] = \sum_i \begin{vmatrix} (B, C_{x_i}) & A_{x_i} \\ (B, C_{p_i}) & A_{p_i} \end{vmatrix} - \sum_i \begin{vmatrix} (B, A_{x_i}) & C_{x_i} \\ (B, A_{p_i}) & C_{p_i} \end{vmatrix}.$$

On pourrait obtenir de la même manière l'expression de $[C, (A, B)]$; mais il vaut mieux employer pour cela un autre moyen. En vertu des formules (1), (9) et (4), on trouve

$$(c) [C, (A, B)] = \sum_i \left| \frac{\partial C}{\partial x_i}, \frac{\partial(A, B)}{\partial p_i} \right|$$

$$= \sum_i \left| \begin{array}{cc} C_{x_i}, (A_{x_i}, B) \\ C_{p_i}, (A_{p_i}, B) \end{array} \right| + \sum^i \left| \begin{array}{cc} C_{x_i}, (A, B_{x_i}) \\ C_{p_i}, (A, B_{p_i}) \end{array} \right|.$$

En ajoutant les égalités (a), (b), (c), on remarque immédiatement que dans la somme totale des seconds membres, il se produit des réductions. En effet, la première somme du second membre de (a) détruit la seconde somme du second membre de (c), et la seconde somme du second membre de (b) la première somme du second membre de (c). On a, d'après cela,

$$(a') [A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)]$$

$$= \sum_i \left| \begin{array}{cc} (B, C_{x_i}), A_{x_i} \\ (B, C_{p_i}), A_{p_i} \end{array} \right| - \sum_i \left| \begin{array}{cc} (A, C_{x_i}), B_{x_i} \\ (A, C_{p_i}), B_{p_i} \end{array} \right|.$$

On en tire, en permutant circulairement les lettres,

$$(b') [B, (C, A)] + [C, (A, B)] + [A, (B, C)]$$

$$= \sum_i \left| \begin{array}{cc} (C, A_{x_i}), B_{x_i} \\ (C, A_{p_i}), B_{p_i} \end{array} \right| - \sum_i \left| \begin{array}{cc} (B, A_{x_i}), C_{x_i} \\ (B, A_{p_i}), C_{p_i} \end{array} \right|,$$

$$(c') [C, (A, B)] + [A, (B, C)] + [B, (C, A)]$$

$$= \sum_i \left| \begin{array}{cc} (A, B_{x_i}), C_{x_i} \\ (A, B_{p_i}), C_{p_i} \end{array} \right| - \sum_i \left| \begin{array}{cc} (C, B_{x_i}), A_{x_i} \\ (C, B_{p_i}), A_{p_i} \end{array} \right|.$$

Ajoutons les égalités (a'), (b'), (c'), en remarquant que leurs premiers membres sont identiques; que dans les seconds membres, en vertu de la première formule (4), les sommes se réduisent deux à deux à une, et qu'en vertu des formules (9) et (1),

La 1^{re} somme de (a') + la 2^e de (c') donnent l'expression de $-[A, (B, C)]$;

La 1^{re} somme de (b') + la 2^e de (a') donnent $-[B, (C, A)]$;

La 1^{re} somme de (c') + la 2^e de (b') donnent $-[C, (A, B)]$.

Il vient alors

$$3\{[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)]\} \\ = -\{[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)]\},$$

et par suite

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0.$$

Nous voyons par là que le théorème exprimé par l'identité précédente, et qui forme le principe fondamental de la nouvelle méthode de Jacobi, se tire immédiatement et très-simplement des propriétés élémentaires de l'expression (φ, ψ).

Passons à la démonstration d'autres théorèmes.

Théorème II.

40. Soient n équations

$$(h) \quad H = a, \quad H_1 = a_1, \dots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

$a, a_1, \dots, a_{n-1}$ désignant des constantes arbitraires, et $H, H_1, \dots, H_{n-1}$ des fonctions des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, vérifiant identiquement les conditions

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs des indices i et k , prises dans la série $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Nous allons démontrer qu'en tirant du système des équations précédentes les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, ces valeurs satisfont identiquement aux conditions

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs des indices i et k , prises dans la série $1, 2, \dots, n$.

Supposons qu'au moyen des équations (h) on ait obtenu les valeurs

$$p_i = F(x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-1}),$$

$$p_k = f(x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Si l'on considère $a, a_1, \dots, a_{n-1}$ comme des fonctions des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ déterminées par les équations (h), on trouve, d'après la formule (6),

$$[F, f] = (F, f) + \sum_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} + \sum_{i,k} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_i} \right\} (a_i, a_k).$$

Mais, en substituant les valeurs $a = H, \dots, a_{n-1} = H_{n-1}$, la fonction F se change en p_i , la fonction f en p_k , et le premier membre de l'égalité précédente prend la forme $[p_i, p_k]$; par suite, il est identiquement égal à zéro. Le premier terme du second membre est aussi nul, puisque l'expression (F, f) est formée en considérant $a, \dots, a_{n-1}$ comme des constantes, et que les fonctions F et f ne contiennent pas explicitement les variables $p_1, \dots, p_n$. Le troisième terme du second membre est nul, par suite des conditions

$$(a_i, a_k) = (H_i, H_k) = 0.$$

Donc le second terme du second membre doit être aussi nul, c'est à-dire qu'on aura identiquement

$$\sum_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} = 0.$$

Le premier membre de cette inégalité peut se mettre sous une forme plus simple, en substituant les valeurs de (F, a_i) et de (f, a_i) . En effet, on a

$$(F, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial a}{\partial p_k} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n},$$

$$(F, a_{n-1}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n}.$$

Ajoutant ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial f}{\partial a}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}$, il vient

$$\sum_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1} \right) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k} \right) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n} \right).$$

Mais si, dans l'équation

$$p_k = f(x_1, \dots, x_n, a, \dots, a_{n-1}),$$

nous avons égard aux égalités

$$a = H, \quad a_1 = H_1, \dots, \quad a_{n-1} = H_{n-1},$$

cette équation devient alors identique. En la différentiant par rapport à l'une quelconque p des quantités $p_1, \dots, p_n$, on trouve

$$\frac{\partial p_k}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial p},$$

et il est clair, d'après cela, que le second membre se réduira à l'unité si $p = p_k$, tandis que dans tous les autres cas il se réduira à zéro. Par conséquent

$$\sum_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

On démontrera de même que

$$\sum_i (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial f}{\partial a_i}.$$

On a donc l'identité

$$\sum_i \left\{ (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right\} = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En vertu de ce qui a été établi (§§. 11 et 15) et du théorème précédent, on doit considérer les équations

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad (H_i, H_k) = 0$$

comme des conséquences réciproques les unes des autres, et l'on peut prendre les secondes aussi bien que les premières pour conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n.$$

Jacobi donne encore deux autres formules pour les conditions d'intégrabilité, que nous allons établir par le même moyen que la précédente.

Théorème III.

41. En conservant les hypothèses du Théorème précédent,

imaginons que, à l'aide des systèmes d'équations (b), chacune des n premières quantités de la série

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

soit exprimée en fonction de toutes les variables qui la suivent dans cette série, et du nombre nécessaire de constantes prises dans la suite $a, a_1, \dots, a_{n-1}$; et supposons qu'on ait ainsi trouvé

$$\begin{aligned} p_i - F(p_{i+1}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{i-1}) &= 0, \\ p_k - f(p_{k+1}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{k-1}) &= 0, \end{aligned}$$

pour $i < k$.

Nous allons démontrer que les premiers membres de ces équations satisfont identiquement à la condition

$$(p_i - F, p_k - f) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i et de k comprises dans la suite des nombres $1, 2, \dots, n$.

En considérant $a, a_1, \dots, a_{n-1}$ comme des fonctions des variables, déterminées par les équations (b), nous aurons, en vertu de la formule (5),

$$\begin{aligned} [F, f] &= (F, f) + \sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{m=i-1} \sum_{l=k-1}^{l=i-1} \frac{\partial F}{\partial a_m} \frac{\partial f}{\partial a_l} (a_m, a_l). \end{aligned}$$

En substituant les valeurs $a \equiv H, a_1 \equiv H_1, \dots$, la fonction F se changera en p_i , la fonction f en p_k , et le premier membre de la dernière égalité prendra la forme $[p_i, p_k]$; il sera, par conséquent, identiquement nul. Le dernier terme du second membre est nul, en vertu de la condition

$$(a_m, a_l) \equiv (H_m, H_l) = 0.$$

On a, par suite, identiquement

$$0 = (F, f) + \sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m}.$$

Les deux sommes du second membre de cette égalité peuvent se ramener à une forme plus simple. Pour cela, prenons les égalités

$$(F, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial a}{\partial x_1} - \dots - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial a}{\partial x_n},$$

$$\dots \dots \dots (F, a_{k-1}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_1} - \dots - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n};$$

multiplions les respectivement par $\frac{\partial f}{\partial a}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}$, et ajoutons-les, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1} \right) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n} \right) \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial p_{k+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{k+1}} \right) \\ &\quad \dots \dots \dots - \frac{\partial F}{\partial p_n} \left(\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Mais si l'on fait $a \equiv H, a_1 \equiv H_1, \dots$, l'équation $f = p_k$ se changera en identité, et en la différentiant, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1} &= 0, \\ \dots \dots \dots \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_{k-1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k-1}} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_k} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k+1}} &= -\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n} &= -\frac{\partial f}{\partial p_n}, \\ \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial a_{k+1}} &= -\frac{\partial f}{\partial a_{k+1}}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n} &= -\frac{\partial f}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

D'après cela, on peut donner à l'égalité précédente la forme

$$\sum_{m=0}^{m=i-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} = \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial a_m} \frac{\partial f}{\partial p_{k+1}} - \dots - \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} + \frac{\partial F}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

En changeant F en f , k en i , et vice versa, il vient

$$\sum_{m=0}^{m=k-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial a_m} \frac{\partial F}{\partial p_{k+1}} - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} + \frac{\partial f}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial F}{\partial x_{k+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

On tire de là, par soustraction,

$$\sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} - 2(F, f).$$

On aura donc identiquement

$$(F, f) + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} - 2(F, f) = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} - (F, f) = - \left[(F, f) - \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$(F - p_i, f - p_k) = 0.$$

Nous démontrerons absolument de la même manière cet autre théorème, également nécessaire pour ce qui doit suivre:

Théorème IV.

42. En conservant les conditions des deux théorèmes précédents, supposons que, parmi les équations (h) , on prenne m équations quelconques, par exemple les m premières,

aux dérivées partielles du premier ordre.

Ch. IV, §. 17. 333

$$H = a, H_1 = a_1, \dots, H_{m-1} = a_{m-1},$$

(en supposant naturellement $m < n$). Au moyen de ces équations, nous pourrions exprimer m quelconques des quantités $p_1, p_2, \dots, p_n$ en fonction des $n-m$ autres, des variables $x_1, \dots, x_n$ et des constantes $a, a_1, \dots, a_{m-1}$. Concevons qu'on ait déterminé de cette manière $p_1, p_2, \dots, p_m$ et soient i et k deux nombres quelconques, non plus grands que m . Supposons que l'on ait

$$p_i - \varphi(x_1, \dots, x_n, p_{m+1}, \dots, p_n, a, a_1, \dots, a_{m-1}) = 0,$$

$$p_k - \psi(x_1, \dots, x_n, p_{m+1}, \dots, p_n, a, a_1, \dots, a_{m-1}) = 0.$$

Nous allons démontrer que les premiers membres de ces équations satisfont à la condition

$$(p_i - \varphi, p_k - \psi) = 0.$$

En effet, en faisant

$$a \equiv H, a_1 \equiv H_1, \dots, a_{m-1} \equiv H_{m-1},$$

on a, par la formule (6),

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi] &= (\varphi, \psi) + \sum_{r=0}^{r=m-1} \left\{ (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right\} \\ &\quad + \sum_{r,s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \frac{\partial \psi}{\partial a_s} - \frac{\partial \psi}{\partial a_s} \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right) (a_r, a_s). \end{aligned}$$

Mais, par la substitution des valeurs de $a, \dots, a_{m-1}$, le premier membre et le dernier terme du second membre de cette égalité se réduisent à zéro; donc

$$(\alpha) \quad (\varphi, \psi) + \sum_{r=0}^{r=m-1} \left\{ (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right\} = 0.$$

On a, de plus,

$$\begin{aligned} (\varphi, a) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial a}{\partial p_n} \\ &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial a}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+2}} \frac{\partial a}{\partial x_{m+2}} - \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial a}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi, a_{m-1}) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_n} \\ &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+2}} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+2}} - \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

En ajoutant ces égalités, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial \psi}{\partial a}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial a_{m-1}}$, et mettant en facteurs communs, dans le second membre, les dérivées partielles de φ , on verra, absolument comme dans la démonstration du théorème précédent, que les multiplicateurs de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ sont nuls, à l'exception du multiplicateur de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, qui est égal à l'unité. Les multiplicateurs de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

deviennent respectivement

$$-\frac{\partial \psi}{\partial p_{m+1}}, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial p_n}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_{m+1}}, \dots, -\frac{\partial \psi}{\partial x_n},$$

ce qui donne

$$\sum_{r=0}^{r=m-1} (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{m+1}} - \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \psi}{\partial p_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial \psi}{\partial x_{m+1}} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}.$$

En changeant φ en ψ , k en i , et vice versa, il vient

$$\sum_{r=0}^{r=m-1} (\psi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{m+1}} - \dots - \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial \psi}{\partial p_n} + \frac{\partial \psi}{\partial p_{m+1}} \frac{\partial \psi}{\partial x_{m+1}} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}.$$

Si l'on retranche ces égalités l'une de l'autre, on trouve

$$\sum_{r=0}^{r=m-1} \left\{ (\varphi, a_r) \frac{\partial \psi}{\partial a_r} - (\psi, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} \right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - 2(\varphi, \psi).$$

En substituant le second membre de cette égalité au premier dans l'équation (a), nous aurons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - (\varphi, \psi) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(p_i - \varphi, p_i - \psi) = 0.$$

Chapitre V.

§. 18.

43. Les propositions démontrées dans les deux paragraphes précédents peuvent être considérées comme des lemmes auxiliaires. Ces lemmes étant établis, nous pourrions maintenant exposer, sans faire de digressions, la méthode de Jacobi pour l'intégration du système des équations (6) du §. 15, à la résolution duquel nous avons ramené notre problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Nous exposerons d'abord cette méthode, en nous servant seulement des théorèmes I et II du §. 17; puis nous ferons voir comment, à l'aide des théorèmes III et IV, on peut simplifier et compléter la théorie de ce problème.

44. En vertu de l'équation donnée aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a,$$

il faut d'abord déterminer une équation de forme analogue

$$H_1(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a_1,$$

dans laquelle a_1 désigne une constante arbitraire, et H_1 une fonction inconnue. Cette fonction doit être déterminée de manière à satisfaire à l'équation linéaire

$$(1) \left\{ \begin{aligned} (H_1, H) &= \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \dots \\ &+ \frac{\partial H_1}{\partial x_n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial H_1}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

D'après cela, en prenant le système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires

$$(a) \quad \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = -\frac{dH}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = -\frac{dH}{\frac{\partial H}{\partial x_n}},$$

et déterminant une de leurs intégrales

$$f_1(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const.},$$

nous pourrions poser $H_1 = f_1$; et, en désignant par a_1 la constante arbitraire, nous aurons

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1.$$

45. On devra ensuite déterminer l'équation

$$H_2(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a_2,$$

dans laquelle a_2 représente une constante arbitraire, et H_2 une fonction inconnue, qu'il faudra choisir de manière à satisfaire aux deux équations linéaires

$$(2) \quad (H_2, H) = 0, \quad (H_2, f_1) = 0,$$

dont l'une est identique avec l'équation (1), et l'autre se déduit de (1) par le changement de H en f_1 .

En s'appuyant sur le Théorème I (§. 17), Jacobi a démontré que, si l'on connaît l'intégrale de l'une des équations (2), on peut trouver la solution commune de ces deux équations, par l'intégration d'une équation linéaire auxiliaire où le nombre des variables est moindre que $2n$.

On commencera donc par déterminer une intégrale de l'une des équations (2). Si l'on prend une intégrale de la première, cette intégrale devra être différente des deux intégrales déjà connues $H = a$ et $f_1 = a_1$. Supposons que cette troisième intégrale soit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const.}$$

Par des substitutions successives dans le premier membre de la seconde des équations (2), on obtient les fonctions

$$(\beta) \quad \begin{cases} (\varphi, f_1) = \varphi_1, & (\varphi_1, f_1) = \varphi_2, & (\varphi_2, f_1) = \varphi_3, \dots \\ \dots, & (\varphi_{i-1}, f_1) = \varphi_i, \dots \end{cases}$$

Cette suite peut, en général, se prolonger indéfiniment; mais si le résultat d'une de ces substitutions, φ_i par exemple, est égal à une constante, la suite s'arrêtera à ce terme.

Nous allons démontrer que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ satisfont toutes à la première des équations (2). Pour cela, prenons l'identité donnée par le Théorème I,

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

et posons $A = H, B = f_1$. Alors cette identité prendra la forme

$$[H, (f_1, C)] + [f_1, (C, H)] = 0.$$

En faisant maintenant tour à tour

$$C = \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots,$$

on trouve successivement les identités

$$[H, (f_1, \varphi)] = (H, \varphi_1) = 0,$$

$$[H, (f_1, \varphi_1)] = (H, \varphi_2) = 0,$$

$$[H, (f_1, \varphi_2)] = (H, \varphi_3) = 0,$$

.....

qui démontrent le théorème.

46. De là résulte, comme conséquence évidente, une conclusion très-importante, relative aux intégrales du système des équations (α), et qui est connue sous le nom de théorème de Poisson.

Si l'on pose, en effet,

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \varphi_2 = \text{const.}, \quad \varphi_3 = \text{const.}, \dots,$$

on obtiendra des intégrales des équations (α) (§. 9). Par suite, connaissant deux intégrales de ces équations,

$$f_1 = \text{const.}, \quad \varphi = \text{const.},$$

distinctes de $H = \text{const.}$, nous en obtiendrons une troisième en posant

$$(f_1, \varphi) = \text{const.},$$

puis une quatrième en posant

$$[f_1, (f_1, \varphi)] = \text{const.},$$

et ainsi de suite.

Pour ne pas nous écarter de notre objet principal, nous nous bornerons ici à ces remarques, nous réservant de revenir plus tard sur le théorème de Poisson.

47. Comme les équations (α) n'ont que $2n - 1$ intégrales distinctes, il s'ensuit de là qu'en prolongeant indéfiniment la suite (β), on ne pourra obtenir toujours des fonctions distinctes, et qu'on devra nécessairement finir par rencontrer une fonction qui soit elle-même une fonction des intégrales déjà trouvées. Soit φ_i la première fonction qui soit dans ce cas, i devant être $\leq 2n$. Posons

$$\varphi_i = F(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}).$$

Il serait inutile de prolonger la suite (β) au delà de la fonction φ_i puisque de cette manière on n'obtiendrait pas de nouvelles intégrales. En effet, par la formule (8) du §. 16 (art. 37), on a

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= [F, f_1] \\ &= (H, f_1) \frac{\partial F}{\partial H} + (f_1, f_1) \frac{\partial F}{\partial f_1} + (\varphi, f_1) \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \dots \\ &\quad + (\varphi_{i-1}, f_1) \frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}} \\ &= 0 + 0 + \varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \dots + F(H, f_1, \varphi, \dots, \varphi_{i-1}) \frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}},\end{aligned}$$

d'où il résulte évidemment que φ_{i+1} s'exprime au moyen des seules variables $H, f_1, \varphi, \dots, \varphi_{i-1}$.

48. Proposons-nous maintenant de trouver, s'il est possible, une fonction des intégrales déjà obtenues $H, f_1, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$, telle que, substituée à la place de H_2 , elle satisfasse aux équations (2). En désignant par f_2 la fonction cherchée, et posant

$$H_2 = f_2(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}),$$

on trouve que, en vertu de la formule (8) du §. 16. (art. 37), les premiers membres des équations (2) prennent la forme

$$\begin{aligned}(f_2, H) &= (H, H) \frac{\partial f_2}{\partial H} + (f_1, H) \frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (\varphi, H) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ &\quad + (\varphi_1, H) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \dots + (\varphi_{i-1}, H) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}}, \\ (f_2, f_1) &= (H, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial H} + (f_1, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial f_1} + (\varphi, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ &\quad + (\varphi_1, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \dots + (\varphi_{i-1}, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}},\end{aligned}$$

et, comme on a identiquement

$$\begin{aligned}(H, H) &= 0, (f_1, H) = 0, (\varphi, H) = 0, \\ (\varphi_1, H) &= 0, \dots, (\varphi_{i-1}, H) = 0, \\ (H, f_1) &= 0, (f_1, f_1) = 0, (\varphi, f_1) = \varphi_1, \\ (\varphi_1, f_1) &= \varphi_2, \dots, (\varphi_{i-1}, f_1) = \varphi_i\end{aligned}$$

l'équation $(H_2, H) = 0$ sera satisfaite pour $H_2 = f_2$, quelle que soit la fonction f_2 , comme on pouvait d'ailleurs le prévoir.

L'équation $(H_2, f_1) = 0$ se transforme, par ces substitutions, en cette autre équation linéaire

$$(y) \quad \begin{cases} \varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} + \dots + \varphi_{i-1} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} \\ + F(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}} = 0, \end{cases}$$

renfermant seulement les nouvelles variables $H, f_1, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$, et d'où les anciennes variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ sont éliminées.

Dans l'équation (y), H et f_1 pourront être considérées comme des constantes, puisque cette équation ne contient pas les dérivées partielles prises par rapport à ces variables. On peut donc, dans la fonction F , remplacer H et f_1 respectivement par a et a_1 .

Il nous suffira de déterminer une intégrale particulière de l'équation (y), ou une des intégrales du système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \dots = \frac{d\varphi_{i-2}}{d\tau} = \frac{d\varphi_{i-1}}{d\tau} = F(a, a_1, \varphi, \dots, \varphi_{i-1}),$$

que l'on peut remplacer par une seule équation aux différentielles ordinaires d'ordre $i-1$. Si l'on introduit une nouvelle variable auxiliaire τ , en égalant à $d\tau$ la valeur commune des rapports précédents, ce système pourra être remplacé par une équation différentielle ordinaire d'ordre i , mais d'une forme comparativement plus simple.

En effet, si l'on pose

$$d\tau = \frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \dots = \frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{F},$$

il vient

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\tau} &= \varphi_1, & \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \varphi_2, & \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \frac{d^3\varphi}{d\tau^3} = \varphi_3, \\ & \dots, & \frac{d\varphi_{i-2}}{d\tau} &= \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}, \\ \frac{d\varphi_{i-1}}{d\tau} &= \frac{d^i\varphi}{d\tau^i} = F(a, a_1, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}),\end{aligned}$$

d'où, en substituant, dans la dernière équation, à $\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}$ leurs valeurs tirées des précédentes, on tire l'équation aux différentielles ordinaires, d'ordre i , que nous avons annoncée plus haut,

$$\frac{d^i \varphi}{dt^i} = F\left(u, a_1, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \dots, \frac{d^{i-1}\varphi}{dt^{i-1}}\right).$$

Supposons qu'une des intégrales premières de cette dernière équation soit

$$\Phi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \dots, \frac{d^{i-1}\varphi}{dt^{i-1}}\right) = \text{const.}$$

Si l'on y substitue pour $\frac{d\varphi}{dt}, \dots, \frac{d^{i-1}\varphi}{dt^{i-1}}$ leurs valeurs, il vient

$$\Phi(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}) = \text{const.},$$

et l'on pourra poser $f_2 = \Phi$. En désignant maintenant par a_2 la constante arbitraire, on aura déjà les trois équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$H = u, \quad H_1 = f_1 = a_1, \quad H_2 = f_2 = a_2,$$

satisfaisant aux conditions voulues.

49. **Remarque 1.** Si dans la série des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{i-1}$, φ_i , la dernière φ_i est $= 0$, il est évident que l'avant dernière φ_{i-1} sera l'intégrale cherchée, commune aux équations (2).

Si φ_i est égale à une constante K , alors la solution se simplifie, puisqu'on a, dans ce cas,

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{d\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{K},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$2K\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}^2 = \text{const.},$$

et par suite

$$f_2 = 2K\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}^2 = a_2.$$

Mais dans ce cas il faut que i soit plus grand que 1; car autrement la méthode précédente pour déterminer f_2 ne serait plus applicable. Supposons, en effet, $\varphi_1 = K$, K étant une constante donnée ou une fonction de φ ; alors l'équation (2) prend la forme

$$K \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0,$$

ce qui montre qu'aucune fonction de la seule quantité φ ne peut être une intégrale commune des deux équations simultanées (2).

En pareil cas, il faut commencer par déterminer une intégrale de la seconde des équations (2),

$$(H_2, f_1) = 0;$$

ou bien déterminer une intégrale

$$\theta(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = \text{const.}$$

de la première équation (2), différente des intégrales $H = a$, $f_1 = a_1$ et $\varphi = \text{const.}$; ou encore suivre la méthode que nous exposerons plus bas.

Si l'intégrale $\theta = \text{const.}$ se trouvait dans le même cas que l'intégrale $\varphi = \text{const.}$, c'est-à-dire, si l'on avait les deux identités

$$(\varphi, f_1) = K, \quad (\theta, f_1) = L,$$

K et L étant des constantes, ou des fonctions quelconques de φ et de θ respectivement, alors la valeur de H_2 s'obtiendrait très-simplement. Si l'on pose, en effet,

$$H_2 = f_2(\varphi, \theta),$$

on trouve que les premiers membres des équations (2) prennent la forme

$$[f_2, H] = (\varphi, H) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, H) \frac{\partial f_2}{\partial \theta},$$

$$[f_2, f_1] = (\varphi, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + (\theta, f_1) \frac{\partial f_2}{\partial \theta};$$

mais, comme on a les identités

$$(\varphi, H) = 0, \quad (\theta, H) = 0, \quad (\varphi, f_1) = K, \quad (\theta, f_1) = L,$$

la première des équations (2) est alors satisfaite par une forme quelconque de la fonction f_2 , et la seconde de ces équations prend la forme

$$K \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + L \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0,$$

d'où l'on tire

$$f_2 = \pi \left(\int \frac{u \varphi}{K} - \int \frac{u \theta}{L} \right),$$

π désignant une fonction arbitraire.

50. Au moyen des trois équations connues

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1, \quad H_2 = f_2 = a_2,$$

on en déterminera une quatrième $H_3 = a_3$, a_3 désignant une constante arbitraire, et la fonction H_3 devant être calculée de manière à satisfaire aux trois équations linéaires simultanées

$$(3) \quad (H_3, H) = 0, \quad (H_3, f_1) = 0, \quad (H_3, f_2) = 0.$$

Cherchons, d'après la méthode que nous venons d'exposer, une intégrale commune à deux de ces équations, aux deux premières, par exemple. Il suffira pour cela de déterminer une autre intégrale première de l'équation $\frac{d\psi}{dt} = F$, différente de $\Phi = \text{const.}$ Représentons cette intégrale par

$$H_3 = \psi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n);$$

il s'agit d'en déduire une intégrale commune du système des trois équations (3).

Pour cela, par des substitutions successives dans le premier membre de l'équation $(H_3, f_2) = 0$, formons les expressions

$$(\psi, f_2) = \psi_1, \quad (\psi_1, f_2) = \psi_2, \quad (\psi_2, f_2) = \psi_3, \dots, \quad (\psi_{k-1}, f_2) = \psi_k, \dots$$

Dans la suite des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_k, \dots$, on devra finir par en rencontrer une qui s'exprime au moyen des précédentes. Soit

$$\psi_k = f(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k-1})$$

la première des fonctions qui soit dans ce cas.

On verra, absolument comme on l'a fait plus haut, que $\psi_1, \psi_2, \dots$ sont des intégrales des deux premières équations (3). Car si, dans l'identité

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

on prend d'abord $A = H$, $B = f_2$ puis $A = f_1$, $B = f_2$, on aura les deux autres identités

$$\begin{aligned} [H, (f_2, C)] + [f_2, (C, H)] &= 0, \\ [f_1, (f_2, C)] + [f_2, (C, f_1)] &= 0. \end{aligned}$$

En y faisant successivement

$$C = \psi, \quad \psi_1, \quad \psi_2, \dots, \quad \psi_{k-1},$$

on obtient les deux suites d'identités

$$[H, (f_2, \psi)] = (\psi_1, H) = 0, \quad [H, (f_2, \psi_1)] = (\psi_2, H) = 0, \dots$$

$$[f_1, (f_2, \psi)] = (\psi_1, f_1) = 0, \quad [f_1, (f_2, \psi_1)] = (\psi_2, f_1) = 0, \dots$$

qui démontrent le théorème.

Il faut ensuite chercher une fonction f_3 des variables $H, f_1, f_2, \psi, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}$, qui, mise à la place de H_3 , satisfasse à toutes les trois équations (3).

Or on vérifie aisément, comme au n° 48, que les deux premières de ces équations sont satisfaites, quelle que soit la forme de la fonction f_3 . Quant à la troisième équation (3), en y faisant $H_3 = f_3$, elle se change dans l'équation linéaire suivante.

$$\frac{\partial f_3}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1} + \dots + f(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}) \frac{\partial f_3}{\partial \psi_{k-1}} = 0,$$

qui ne renferme que les variables $\psi, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}$. Si la fonction f renfermait les variables H, f_1, f_2 , on pourrait les remplacer respectivement par les constantes a, a_1, a_2 , puisque l'équation ne contient pas de dérivées partielles prises par rapport à H, f_1 ou f_2 .

Ainsi la fonction f_3 doit être déterminée comme une intégrale particulière de l'équation linéaire précédente, ou comme une des intégrales du système d'équations simultanées

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{d\psi_1}{\psi_1} = \dots = \frac{d\psi_{k-1}}{f},$$

σ désignant une variable auxiliaire: ce qui conduit finalement à la recherche d'une des intégrales premières de l'équation d'ordre k , à deux variables,

$$\frac{d^k \psi}{d\sigma^k} = f\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, \dots, \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}\right).$$

Si cette intégrale est

$$\Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, \dots, \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}\right) = \text{const.},$$

en y substituant les valeurs $\frac{d\psi}{d\sigma} = \psi_1, \dots, \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}} = \psi_{k-1}$, nous pourrions poser

$$f_3 = \Psi(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}) = \text{const.} = a_3.$$

Ainsi, nous connaissons déjà quatre équations

$$H = a, \quad H_1 = f_1 = a_1, \quad H_2 = f_2 = a_2, \quad H_3 = f_3 = a_3,$$

satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3).

51. **Remarque 2.** Il faut observer ici que, si le résultat de la première substitution (ψ, f_1) ou ψ_1 est une fonction de ψ ou une constante quelconque différente de zéro, la méthode précédente pour la détermination de f_3 se trouvera en défaut, comme dans le cas dont il a été question dans la Remarque 1 (n° 4^b), relativement à la détermination de la fonction f_2 .

52. Nous avons maintenant suffisamment expliqué la marche à suivre pour déterminer successivement, au moyen de la fonction donnée H , les fonctions $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$, satisfaisant aux conditions $(H_i, H_k) = 0$. Ces fonctions étant obtenues, il ne reste plus qu'à tirer algébriquement des équations

$$H = a, \quad H_1 = a_1, \dots, \quad H_{n-1} = a_{n-1}$$

les valeurs de $p_1, \dots, p_n$. En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

on pourra toujours intégrer cette équation, puisque les fonctions $p_1, \dots, p_n$ doivent remplir, en vertu du Théorème II, les conditions d'intégrabilité, et l'on obtiendra l'intégrale complète du problème sous la forme

$$z = f(x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

53. Voulant présenter l'essence de la méthode de Jacobi sous la forme la plus simple, nous l'avons développée en prenant pour base les Théorèmes I et II. Mais, dans ce mode d'exposition, nous avons rencontré des cas où la méthode est en défaut, et que nous avons signalés dans les Remarques 1 et 2. En outre, les équations dont l'intégration fait connaître les fonctions cherchées ne sont pas encore ramenées à leur forme la plus simple, par l'élimination des variables superflues. Nous montrerons, dans la suite, qu'en faisant usage des Théorèmes III et IV, nous ne rencontrerons plus de cas où la méthode soit en défaut, et que les équations à intégrer pourront être ramenées à ne plus contenir que le nombre minimum de variables. Mais auparavant nous pensons qu'il ne sera pas inutile d'appliquer la méthode de Jacobi, sous la forme que nous venons d'exposer, à quelques exemples d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de forme facilement intégrable.

§. 19.

54. On voit par ce qui précède que l'essence et la principale difficulté du problème de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a$$

consistent dans la détermination de $n-1$ intégrales particulières distinctes,

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \dots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

de l'équation linéaire $(H, \psi) = 0$, lesquelles, prises deux à deux, doivent, en outre, satisfaire à la condition

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la suite des nombres $0, 1, \dots, n-1$.

En conséquence, les formes plus ou moins faciles à intégrer de l'équation $H = a$ sont celles d'où l'on peut tirer immédiatement, c'est-à-dire sans aucune intégration, la totalité ou seulement une partie du système des équations $H_1 = a_1, \dots, H_{n-1} = a_{n-1}$, qui satisfont à la proposée.

D'après les considérations générales que nous avons présentées plus haut, il est aisé de voir que, sous le rapport de la facilité de l'intégration, l'avantage appartient, dans le cas des équations aux dérivées partielles du premier ordre comme dans celui des équations différentielles ordinaires, aux formes dans lesquelles les variables peuvent être séparées. Mais il est clair que, pour les équations aux dérivées partielles, l'expression „séparation des variables“ doit avoir une signification autre et plus générale que pour les équations à une seule variable indépendante.

55. Supposons que l'équation aux dérivées partielles du premier ordre proposée soit de la forme

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = a,$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_m$ désignant des fonctions des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, qui satisfont à la condition

$$(a) \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0,$$

pour toutes les valeurs de r, s prises dans la suite des nombres $1, 2, \dots, m$.

Examinons à quelles conditions, outre celle-là, doivent satisfaire les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, pour que, dans l'intégration de l'équation donnée, on puisse les considérer comme des constantes. Pour cela, concevons que, en appliquant la méthode de Jacobi, nous ayons trouvé une partie du système des équations qui satisfait à la proposée,

$$H_l = a_l, \quad H_2 = a_2, \dots, \quad H_l = a_l, \quad (l < n)$$

les fonctions $H_1, \dots, H_l$ ne renfermant pas les constantes arbitraires $a_1, \dots, a_l$, mais pouvant contenir $\varphi_1, \dots, \varphi_m$; et que, en considérant ces dernières quantités comme des constantes, les fonctions $H_1, \dots, H_l$ soient supposées satisfaire à la condition

$$(H_l, H_l) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i et de k , prises dans la suite 0, 1, 2, ..., l .

En considérant maintenant de nouveau $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ comme des fonctions de $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, on trouve que le premier membre de l'équation qui exprime la condition précédente prend, en vertu de la formule (5) du § 16. (Chap. IV, art. 36), la forme

$$\begin{aligned} [H_i, H_k] = & (H_i, H_k) + \sum_{r=1}^m \left\{ (H_i, \varphi_r) \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} - (H_k, \varphi_r) \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \right\} \\ & + \sum_{r,s} \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_r} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_s} \frac{\partial H_k}{\partial \varphi_r} \right\} (\varphi_r, \varphi_s). \end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme du second membre de cette égalité sont nuls, en vertu des conditions précédentes. Pour que le second terme se réduise aussi à zéro, il est évident que les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ doivent encore satisfaire à la condition

$$(\beta) \quad (H_i, \varphi_r) = 0$$

pour toutes les valeurs des indices

$$i = 0, 1, 2, \dots, l, \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

56. Remarquons maintenant que, si dans l'équation donnée on reconnaît la présence de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, remplissant les conditions (α) et celles des conditions (β) qui correspondent à l'indice $i = 0$, c'est-à-dire les conditions

$$(H, \varphi_1) = 0, \quad (H, \varphi_2) = 0, \dots, \quad (H, \varphi_m) = 0,$$

alors, pour satisfaire au reste des conditions (β) il suffira de prendre

$H_1 = \psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = a_1, \dots, H_l = \psi_l(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = a_l$, $\psi_1, \dots, \psi_l$ désignant des fonctions assujetties à cette seule condition, que du système des équations précédentes on ne puisse tirer aucune relation entre les seules quantités $H_1, \dots, H_l$, ou, ce qui est la même chose, entre $a_1, \dots, a_l$. Mais il est évident que cela sera toujours possible, si $l < m$. Par conséquent, le nombre des équations satisfaisant à l'équation donnée, qui peuvent être déterminées de cette manière doit être égal ou inférieur à m .

Si m n'est pas plus grand que $n-1$, et que toutes les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ contiennent réellement les variables $p_1, \dots, p_n$, et avec cela soient distinctes et indépendantes par rapport à ces variables, alors, il est beaucoup plus simple de poser

$$H_1 = \varphi_1 = a_1, \dots, \quad H_m = \varphi_m = a_m.$$

57. Quant au moyen de découvrir, pour une équation donnée, l'existence de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus, on ne peut donner pour cela de règle générale. Toutefois il y a un cas où l'existence de ces fonctions devient évidente, et où par conséquent la méthode précédente peut s'appliquer sans difficulté.

Supposons l'équation donnée mise sous la forme

$$H(x_1, \dots, x_{i-1}, p_1, \dots, p_{i-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_m) = 0,$$

la fonction H ne contenant explicitement que les variables $x_1, p_1, \dots, x_{i-1}, p_{i-1}$; la fonction φ_1 ne contenant que les variables $x_i, p_i, \dots, x_{i+k-1}, p_{i+k-1}, \dots$; la fonction φ_m ne contenant que les variables $x_{i+k+1}, p_{i+k+1}, \dots, x_n, p_n$. On peut dire alors que dans cette équation les variables sont séparées. Dans ce cas, il est évident que les conditions

$$(H, \varphi_r) = 0, \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0$$

sont satisfaites pour toutes les valeurs 1, 2, ..., m des indices r et s . D'après cela, en vertu des conclusions précédentes, au lieu de l'équation donnée, on peut intégrer séparément chacune des équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, \dots, x_{i-1}, p_1, \dots, p_{i-1}, a_1, \dots, a_m) = a,$$

$$\varphi_1 = a_1, \dots, \varphi_m = a_m,$$

$a_1, \dots, a_m$ désignant des constantes arbitraires. Si les intégrales complètes de ces équations sont respectivement

$$z_0 + a_0, z_1 + a_1, \dots, z_m + a_m,$$

$$z_0 + z_1 + \dots + z_m + \alpha = z + \alpha,$$

α étant la somme des constantes arbitraires $a_0, a_1, \dots, a_m$, introduites par simple addition. En effet, il est facile de s'assurer que cette intégrale satisfait à l'équation proposée, et qu'elle renferme n constantes arbitraires.

58. Remarquons que, si une des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ ne renferme qu'une couple de variables correspondantes, telles que x_i et p_i , en égalant alors cette fonction à une constante arbitraire a_i , et tirant de cette équation la valeur de p_i en x_i et a_i , on en déduira l'intégrale z_i au moyen d'une quadrature.

Si une des variables, x_k par exemple, n'entre pas explicitement dans l'équation donnée, on a alors l'équation $p_k = a_k$, à laquelle correspond l'intégrale

$$z_k = a_k x_k.$$

D'après cela, les intégrales complètes des équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right),$$

et

$$\varphi_n\left(x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = F\left\{\varphi_1\left(x_1, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right), \varphi_2\left(x_2, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right), \dots, \varphi_{n-1}\left(x_{n-1}, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right)\right\}$$

peuvent s'obtenir sans particulariser la forme des fonctions f et F , et il est évident qu'elles sont respectivement

$$z + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + f(a_1, \dots, a_{n-1}), x_n,$$

et

$$z + \beta = f\psi_1(a_1, x_1)dx_1 + f\psi_2(a_2, x_2)dx_2 + \dots + f\psi_{n-1}(a_{n-1}, x_{n-1})dx_{n-1} + f\psi_n[F(a_1, \dots, a_{n-1}), x_n]dx_n,$$

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ étant les valeurs respectives de $p_1, p_2, \dots, p_n$, tirées des équations

$$\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2, \dots, \varphi_n = F(a_1, \dots, a_{n-1}).$$

59. Soit l'équation

$$z = F\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

Si l'on représente son intégrale par l'équation

$$v(x_1, \dots, x_n, z) = 0,$$

on en tirera

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{p_1}{p_{n+1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{p_n}{p_{n+1}},$$

en posant

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = p_{n+1}.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation donnée prend la forme

$$z = F\left(-\frac{p_1}{p_{n+1}}, -\frac{p_2}{p_{n+1}}, \dots, -\frac{p_n}{p_{n+1}}\right).$$

dans laquelle les variables sont maintenant séparées. Par conséquent, l'intégrale de l'équation transformée sera donnée par la somme des intégrales des équations aux différentielles ordinaires

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2, \dots, \quad p_n = a_n, \quad z = F\left(-\frac{a_1}{p_{n+1}}, \dots, -\frac{a_n}{p_{n+1}}\right).$$

La dernière équation, en particulier, s'intègre simplement, lorsque la fonction F est homogène du degré μ par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$; elle prend alors la forme

$$z = \frac{(-1)^\mu}{p_{n+1}^\mu} F(a_1, \dots, a_n),$$

d'où

$$p_{n+1} = -[F(a_1, \dots, a_n)]^{\frac{1}{\mu}} \cdot z^{-\frac{1}{\mu}}.$$

Par suite, l'intégrale complète de l'équation transformée devient

$$v + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - \frac{\mu}{\mu-1} [F(a_1, \dots, a_n)]^{\frac{1}{\mu}} \cdot z^{-\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

En égalant le second membre à zéro, on en tire, pour la valeur de z qui satisfait à l'équation proposée,

$$z = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \cdot \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{[F(a_1, a_2, \dots, a_n)]^{\frac{\mu}{\mu-1}}}.$$

60. Considérons un cas plus général. Soit l'équation

$$z = F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

F désignant une fonction homogène du degré μ par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$. A l'aide de la transformation précédente, et en conservant les mêmes notations, l'équation donnée prend la forme

$$zp_{n+1}^\mu = (-1)^\mu F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n).$$

Le problème se ramène donc à l'intégration des deux équations

$$zp_{n+1}^\mu = (-1)^\mu A, \quad F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = A.$$

L'intégrale de la première de ces deux équations est

$$v' + \alpha' = -\frac{\mu}{\mu-1} A^{\frac{1}{\mu}} z^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Désignons l'intégrale de la seconde par

$$v'' + \alpha'' = F(x_1, \dots, x_n, A, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

L'intégrale de l'équation transformée sera, d'après cela,

$$v + \alpha = F(x_1, \dots, x_n, A, a_1, \dots, a_{n-1}) - \frac{\mu}{\mu-1} A^{\frac{1}{\mu}} z^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

d'où l'on tire enfin l'intégrale de l'équation proposée,

$$z = \frac{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{A^{\frac{1}{\mu-1}}} \cdot [F(x_1, \dots, x_n, A, a_1, \dots, a_{n-1})]^{\frac{\mu}{\mu-1}}.$$

Comme exemple de ce cas, prenons l'équation

$$z = \frac{1}{x_1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) + x_2^2 x_3 \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2,$$

qui, après la transformation, prend la forme

$$zp_4^2 = \frac{p_1^2}{x_1} + x_2 p_2 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_3 \right) + x_2^2 x_3 p_2^2.$$

Ici nous remarquons d'abord que les couples de variables correspondantes z et p_4 , x_2 et p_2 sont séparés; le problème se ramène donc à l'intégration des équations

$$zp_4^2 = u, \quad x_2 p_2 = b, \quad \frac{p_1^2}{x_1} + \frac{b}{x_1} p_1 + b p_3 + b^2 x_3 = u.$$

Or il est évident que, dans la dernière équation, les variables x_1 et p_1 , x_3 et p_3 sont également séparées. Nous avons donc à intégrer les quatre équations différentielles ordinaires

$$zp_4^2 = u, \quad x_2 p_2 = b, \quad \frac{p_1^2}{x_1} + \frac{b}{x_1} p_1 = c, \quad b p_3 + b^2 x_3 = u - c,$$

dont les intégrales sont respectivement

$$v' + \alpha' = \pm 2a^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}},$$

$$v'' + \alpha'' = b \log x_2,$$

$$v''' + \alpha''' = -\frac{b x_1}{2} \pm \frac{2}{3c} \left(\frac{b^2}{4} + c x_1 \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$v'''' + \alpha'''' = \frac{(a-c)x_3}{b} - \frac{b x_3^2}{2}.$$

Par conséquent, l'intégrale complète de l'équation transformée sera

$$v + \alpha = -\frac{b x_1}{2} \pm \frac{2}{3c} \left(\frac{b^2}{4} + c x_1 \right)^{\frac{3}{2}} + b \log x_2 + \frac{(a-c)x_3}{b} - \frac{b x_3^2}{2} \pm 2a^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, en égalant à zéro le second membre de cette équation, nous aurons l'intégrale complète de l'équation proposée.

61. Dans les exemples précédents, la solution complète s'obtenait au moyen de la seule séparation des variables. Maintenant il ne sera pas inutile de traiter un cas dans lequel l'application de ce procédé, quoique simplifiant le problème et donnant une partie de sa solution, ne dispense pas toutefois, si l'on veut obtenir l'intégrale complète, de recourir nécessairement à la méthode de Jacobi.

Soit donnée l'équation

$$H = \left(x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \frac{\partial z}{\partial x_3} \left(\frac{\partial z}{\partial x_4} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x_5} + x_4 \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x_5} + x_6 \right) \frac{\partial z}{\partial x_3} \frac{\partial z}{\partial x_6} = u.$$

Cette équation renferme six variables indépendantes $x_1, \dots, x_6$, et ne contient pas la fonction inconnue z elle-même, mais seulement ses dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_6}$. En désignant celles-ci respectivement par $p_1, \dots, p_6$, et y introduisant pas d'autre changement dans la forme de l'équation proposée, cette équation deviendra

$$(x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + p_3 (p_1 - p_2) [p_4^2 + (p_5 + x_6)(p_6 + x_6) p_6] = u.$$

Maintenant il est évident que les variables $x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3$, d'une part, et d'autre part $x_4, p_4, x_5, p_5, x_6, p_6$ sont séparées. En égalant à une constante arbitraire α l'expression entre crochets, qui est formée avec le second groupe de variables, on ramène le problème à l'intégration des deux équations

$$p_4^2 + (p_5 + x_6)(p_6 + x_6) p_6 = \alpha, \\ (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = u.$$

La première de ces équations s'intègre très-simplement au moyen de la séparation des variables. En effet, remarquons d'abord que la variable indépendante x_6 n'y entre pas explicitement; posons par conséquent

$$p_5 = \beta;$$

l'équation prendra la forme

$$p_4^2 + (\beta + x_6)(\beta + x_6) p_6 = \alpha.$$

Il est évident maintenant que les deux couples de variables x_4 et p_4, x_6 et p_6 sont séparées. En posant donc

$$(\beta + x_6) p_6 = \gamma,$$

il vient

$$p_4^2 + \gamma(\beta + x_6) = \alpha,$$

et l'on en tire

$$p_6 = \frac{\gamma}{\beta + x_6}, \quad p_4 = \sqrt{\alpha - \beta\gamma - \gamma x_6};$$

par suite,

$$p_4 dx_4 + p_6 dx_6 + p_6 dx_6 = \sqrt{\alpha - \beta\gamma - \gamma x_6} \cdot dx_4 + \beta dx_6 + \frac{\gamma dx_6}{\beta + x_6},$$

d'où l'on tire, par l'intégration, la fonction cherchée

$$z' + A' = \frac{2}{3\gamma} (\alpha - \beta\gamma - \gamma x_6)^{3/2} + \beta x_6 + \log(\beta + x_6)^{\gamma}.$$

62. Passons à l'intégration de la seconde des équations précédentes,

$$H = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = u.$$

Ici l'on n'aperçoit pas la possibilité de séparer les variables. Nous prendrons donc la méthode générale de Jacoby, pour trouver deux fonctions H_1, H_2 des variables $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$.

D'abord nous chercherons une fonction H_1 satisfaisant à l'équation linéaire

$$(H, H_1) = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ + \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial H_1}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0;$$

puis une autre fonction H_2 satisfaisant aux deux équations simultanées, de même forme que la précédente,

$$(n) \quad (H, H_2) = 0, \quad (H_1, H_2) = 0.$$

D'après cela, la fonction H_1 devra être déterminée comme une des intégrales du système d'équations simultanées

$$(n) \quad \frac{dp_1}{\partial H} = \frac{dp_2}{\partial H} = \frac{dp_3}{\partial H} = \frac{-dx_1}{\partial H} = \frac{-dx_2}{\partial H} = \frac{-dx_3}{\partial H}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial p_1}{\partial p_1} \quad \frac{\partial p_2}{\partial p_2} \quad \frac{\partial p_3}{\partial p_3}$$

lesquelles, par la substitution de la valeur donnée de H , prennent la forme

$$\frac{dp_1}{x_3 p_2} = \frac{dp_2}{x_3 p_1} = \frac{dp_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2} \\ = \frac{-dx_1}{x_2 x_3 + \alpha p_3} = \frac{-dx_2}{x_1 x_3 - \alpha p_3} = \frac{-dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)}.$$

D'après une propriété connue des rapports égaux, le premier et le second, le quatrième et le cinquième rapport du système précédent donnent l'équation

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} = -\frac{d(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2},$$

dont l'intégrale est

$$(x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = \text{const.}$$

On peut donc poser

$$H_1 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2).$$

63. Il faut ensuite déterminer la fonction H_2 satisfaisant simultanément aux deux équations (n). Pour ce calcul, il est commode de s'aider du tableau suivant:

Théor. L.

H	H_1	φ	ψ	θ	θ'
$\frac{\partial}{\partial x_1} p_2 x_3$	$p_1 + p_2$	0	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial x_1} x_2 x_3 + \alpha p_3$	$x_1 + x_2$	p_1	α	1	$-x_3$
$\frac{\partial}{\partial p_1} p_1 x_3$	$p_1 + p_2$	0	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial x_2} x_1 x_3 - \alpha p_3$	$x_1 + x_2$	$-p_2$	$-\alpha$	-1	x_3
$\frac{\partial}{\partial p_2} x_2 p_1 + x_1 p_2$	0	0	$-x_3$	0	$p_2 - p_1$
$\frac{\partial}{\partial p_3} \alpha(p_1 - p_2)$	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned}
 (H, H_1) &= (H, \varphi) = 0, (H, \psi) = 0, (H_1, \theta) = 0, (H_1, \theta') = 0, \\
 &= 0, (H_1, \varphi) = (H_1, \psi) = 0, (H, \theta) = (H, \theta') = \theta'' \\
 &= p_1^2 - p_2^2 \\
 &= 2\varphi, \\
 &= (p_2 - p_1)x_3 = (p_1 - p_2)x_3 \\
 &= -x_3\theta + \alpha(p_1 - p_2)x_3 \\
 &= \theta', \\
 &= \frac{\theta''}{\theta} + \alpha\theta^2
 \end{aligned}$$

Dans ce tableau sont inscrits, en tête des différentes colonnes, les symboles des fonctions qui entrent dans le calcul, et dans les colonnes elles-mêmes se trouvent les dérivées partielles de ces fonctions. Les notations $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots$, inscrites à gauche du tableau, indiquent la variable par rapport à laquelle est prise chaque dérivée. Enfin, au bas de chaque colonne, nous avons placé les valeurs des combinaisons de la forme (A, B) de la fonction correspondante à cette colonne avec les fonctions précédentes. C'est principalement pour le calcul de ces combinaisons que notre tableau est commode.

D'après la théorie, il faut commencer le calcul de H_2 par déterminer une intégrale de l'une des deux équations (m) . Si l'on prend pour cela la première de ces équations, il faudra déterminer une des intégrales du système (n) , autre que $H_1 = \text{const.}$ Le premier et le second rapport de ce système fournissent l'équation

$$\frac{dp_1}{p_2} = \frac{dp_2}{p_1},$$

dont l'intégrale est

$$\varphi = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2^2}{2} = \text{const.}$$

Au moyen du premier, du second et du dernier rapport du système (n) , nous avons l'équation

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{-x_3(p_1 - p_2)} = -\frac{dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)},$$

ou

$$\alpha d(p_1 - p_2) = x_3 dx_3,$$

dont l'intégrale est

$$\psi = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2} = \text{const.}$$

64. Le tableau précédent montre que l'intégrale φ ne peut fournir la valeur de H_2 , parce que le résultat de la substitution dans (H_1, φ) n'est pas égal à zéro, et que, ce résultat étant une fonction de φ , alors en vertu de la Remarque J du §. 18 (art. 49), la fonction φ ne peut servir pour le calcul de H_2 , lorsqu'on a déjà choisi la valeur de H_1 .

On voit par le même tableau que l'intégrale ψ satisfait aux deux équations simultanées (m) ; on peut donc prendre $H_2 = \psi$.

En égalant les valeurs trouvées pour H_1 et pour H_2 respectivement à des constantes arbitraires b et c , on aura, au lieu de l'équation donnée, les trois équations

$$H = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + \alpha p_3 (p_1 - p_2) = a,$$

$$H_1 = (x_1 + x_2)(p_1 + p_2) = b,$$

$$H_2 = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2} = c,$$

d'où l'on tire algébriquement

$$p_1 = \frac{b}{2(x_1 + x_2)} + \frac{c}{2\alpha} + \frac{x_3^2}{4\alpha},$$

$$p_2 = \frac{b}{2(x_1 + x_2)} - \frac{c}{2\alpha} - \frac{x_3^2}{4\alpha},$$

$$p_3 = \frac{2a - bx_3}{2c - x_3^2} + \frac{1}{2\alpha} (x_1 - x_2) x_3;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
& p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \\
&= \frac{b}{2} \frac{d(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{1}{2a} (dx_1 - dx_2) \left(c + \frac{x_3^2}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) x_3 dx_3 + \frac{2a - bx_3}{2c + x_3^2} dx_3.
\end{aligned}$$

En intégrant cette expression, nous obtiendrons la seconde partie de l'intégrale cherchée,

$$\begin{aligned}
z'' + A'' &= \frac{b}{2} \log(x_1 + x_2) + \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) \left(c + \frac{x_3^2}{2}\right) \\
&+ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c}} \operatorname{arctang} \frac{x_3}{\sqrt{2c}} - \frac{b}{2} \log(2c + x_3^2).
\end{aligned}$$

Par conséquent l'intégrale complète du problème sera

$$\begin{aligned}
z + A &= z' + z'' + (A' + A'') \\
&= \log \frac{(x_1 + x_2)^{\frac{b}{2}} (\beta + x_3)^{\gamma}}{(2c + x_3^2)^{\frac{b}{2}}} + \frac{1}{2a} (x_1 - x_2) \left(c + \frac{x_3^2}{2}\right) \\
&+ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c}} \operatorname{arctang} \frac{x_3}{\sqrt{2c}} + \frac{2}{3\gamma} (\alpha - \beta\gamma - \gamma x_3)^{\frac{1}{3}} + \beta x_3.
\end{aligned}$$

$A = A' + A''$, b , c , α , β , γ désignant six constantes arbitraires distinctes.

66. Voyons s'il n'est pas possible d'obtenir la solution du problème, en commençant le calcul de la fonction H_2 par la détermination d'une intégrale de la seconde des équations (m).

L'intégration de l'équation

$$\begin{aligned}
(H_1, H_2) &= (p_1 + p_2) \frac{\partial H_2}{\partial p_1} - (x_1 + x_2) \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + (p_1 + p_2) \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \\
&- (x_1 + x_2) \frac{\partial H_2}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}$$

se ramène à celle du système d'équations

$$\frac{dp_1}{p_1 + p_2} = \frac{dp_2}{p_1 + p_2} = \frac{-dx_1}{x_1 + x_2} = \frac{-dx_2}{x_1 + x_2},$$

dont les intégrales sont évidemment

$$p_1 - p_2 = \text{const.}, \quad p_1 - p_2 + x_1 - x_2 = \text{const.}$$

Prenons la première de ces intégrales, comme étant la plus simple, et posons

$$\theta = p_1 - p_2.$$

Le tableau ci-dessus nous fait voir que le résultat de la substitution de θ à la place de H_2 dans la première des équations (m) est $-x_3\theta$, et cette fonction, que nous désignerons par θ' , sera, d'après la théorie, une nouvelle intégrale de la seconde équation (m). Le résultat de la substitution de θ' à la place de H_2 dans la première équation (m) sera

$$\theta'' = \frac{\theta'^2}{\theta} + c\theta^2.$$

La fonction θ'' est évidemment une nouvelle intégrale de la seconde équation (m); mais elle s'exprime en fonction des deux précédentes θ et θ' . Nous arrêtons donc là les substitutions, et nous chercherons une fonction F des deux intégrales distinctes θ et θ' , qui satisfasse aux deux équations (m). Pour cela, formons les équations

$$\begin{aligned}
[H_1, F(\theta, \theta')] &= (H_1, \theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} + (H_1, \theta') \frac{\partial F}{\partial \theta'} \\
&= 0. \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} + 0. \frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H, F(\theta, \theta')] &= (H, \theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} + (H, \theta') \frac{\partial F}{\partial \theta'} \\
&= \theta' \frac{\partial F}{\partial \theta} + \left(\frac{\theta'^2}{\theta} + c\theta^2\right) \frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0.
\end{aligned}$$

La première de ces équations est satisfaite par une forme quelconque de la fonction F ; la seconde sera satisfaite, si l'on détermine F comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\theta}{\theta'} = \frac{d\theta'}{\frac{\theta'^2}{\theta} + c\theta^2}.$$

En exposant la théorie générale, nous avons introduit dans un pareil système d'équations une nouvelle variable τ , en égalant la valeur commune des rapports précédents à la différentielle $d\tau$. Mais dans le cas actuel il sera aussi simple de se passer de variable auxiliaire. En effet, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\theta'}{\theta} + \alpha \frac{\theta^2}{\theta'}.$$

En posant

$$\theta' = u\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta'}{d\theta} = u + \theta \frac{du}{d\theta},$$

il vient

$$u + \theta \frac{du}{d\theta} = u + \alpha \frac{\theta}{u}, \quad \text{ou} \quad udu = \alpha d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$\alpha\theta = \text{const.} + \frac{u^2}{2},$$

et par suite

$$F(\theta, \theta') = \alpha\theta - \frac{\theta'^2}{2\theta^2} = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Cette intégrale de la première équation (m) avait déjà été tirée immédiatement du système (n), et nous l'avons désignée par ψ . Par suite, la nouvelle voie conduit à la même intégrale complète; cependant, quoique plus longue, elle est plus intéressante que la précédente, en ce qu'elle présente une application plus complète de la théorie de Jacobi.

§. 20.

66. Nous allons maintenant introduire, dans l'exposition de la méthode de Jacobi, les simplifications et les compléments dont il a été question à la fin de l'avant-dernier paragraphe (art. 53).

Représentons encore l'équation donnée par

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a,$$

la fonction inconnue z des variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$ n'y entrant que par ses dérivées partielles $p_1, \dots, p_n$; et le système des $n-1$ équations cherchées qui doivent la compléter par

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \dots, \quad H_{n-1} = a_{n-1},$$

les premiers membres devant être des fonctions des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ qui ne contiennent pas les constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Ce système de n équations peut évidemment être remplacé par tout autre système équivalent. Par exemple, par la première de ces équations, on peut exprimer p_1 en fonction des autres va-

riables et de a ; en substituant cette valeur de p_1 dans la seconde équation, on pourra en tirer la valeur de p_2 en fonction de toutes les variables restantes, hormis p_1 et p_2 , et des constantes a, a_1 . En continuant ainsi, il est clair que l'on pourra généralement exprimer chacune des n premières quantités de la série

$$p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-1}$$

en fonction des $2n$ quantités qui les suivent dans cette série. Si l'on désigne ces expressions respectivement par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, nous aurons, au lieu du système d'équations précédent, cet autre système équivalent, composé aussi de n équations,

$$p_1 - \omega_1 = 0, \quad p_2 - \omega_2 = 0, \dots, \quad p_n - \omega_n = 0.$$

67. Comme nous avons sous-entendu, dans ce qui précède, que les premiers membres des équations $H = a$, $H_1 = a_1, \dots$ satisfaisaient identiquement à la condition

$$(a) \quad (H_1, H_2) = 0,$$

pour toutes les valeurs des indices i et k prises dans la suite des nombres $0, 1, \dots, n-1$; alors, en vertu du Théorème III du §. 17 (art. 41), les premiers membres des équations $p_1 - \omega_1 = 0$, $p_2 - \omega_2 = 0, \dots$ devront satisfaire identiquement à la condition

$$(b) \quad (p_{i+1} - \omega_{i+1}, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

pour les mêmes valeurs des indices i et k . Et de même que les équations (a) nous ont servi pour la détermination successive des fonctions $H_1, \dots, H_{n-1}$ au moyen de la fonction donnée H ; de même les équations (b) pourront servir à déterminer les fonctions $\omega_2, \dots, \omega_n$ au moyen de la fonction donnée ω_1 . Mais il est facile de voir que les équations (b) sont plus simples que les équations (a) correspondantes.

En effet, ces dernières sont toutes de la même forme,

$$(H_i, H_k) = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_m} \frac{\partial H_k}{\partial p_m} - \frac{\partial H_i}{\partial p_m} \frac{\partial H_k}{\partial x_m} \right) = 0,$$

et, comme chacune des fonctions H_i, H_k contient toutes les $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, chacune de ces équations aura $2n$ termes. L'équation correspondante du système (b), formée d'après la même loi, sera

$$= \sum_{m=1}^{m=n} \left\{ \frac{\partial(p_{i+1} - \omega_{i+1})}{\partial x_m} \frac{\partial(p_{k+1} - \omega_{k+1})}{\partial p_m} - \frac{\partial(p_{i+1} - \omega_{i+1})}{\partial p_m} \frac{\partial(p_{k+1} - \omega_{k+1})}{\partial x_m} \right\} = 0.$$

Mais si l'on observe que les fonctions ω_{i+1} , ω_{k+1} , qui peuvent renfermer toutes les variables $x_1, \dots, x_n$, ne doivent contenir, parmi les variables $p_1, \dots, p_n$, que celles dont les indices sont respectivement plus grands que les indices $i+1$, $k+1$ de ces fonctions; il est facile de s'assurer que l'équation précédente aura d'autant moins de termes que les nombres $i+1$, $k+1$ seront plus grands. D'après cette remarque, et en supposant $i < k$, on pourra développer comme il suit la somme qui forme le premier membre de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} & \left(m=1 \right) \quad \left(m=2 \right) \quad \left(m=i \right) \\ & \left| \begin{array}{ccc} -\frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_1} & + \left| \begin{array}{ccc} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{ccc} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array} \right| \\ & + \left| \begin{array}{ccc} * & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} & + \left| \begin{array}{ccc} * & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+2}} & + \dots \end{array} \right| \end{array} \right| \quad \left(m=i+1 \right) \quad \left(m=i+2 \right) \\ & + \left| \begin{array}{ccc} * & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} & + \left| \begin{array}{ccc} * & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+2}} & + \dots \end{array} \right| \end{array} \right| \quad \left(m=k \right) \quad \left(m=k+1 \right) \\ & + \left| \begin{array}{ccc} * & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_k} & + \left| \begin{array}{ccc} * & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \end{array} \right| \end{array} \right| \quad \left(m=k+2 \right) \quad \left(m=n \right) \\ & + \left| \begin{array}{ccc} -\frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_{k+2}} & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+2}} & + \dots + \left| \begin{array}{ccc} -\frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_n} & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_n} & -\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_n} \end{array} \right| \end{array} \right| \end{aligned}$$

Dans ce développement, nous avons remplacé par des astérisques (*) les éléments de chaque déterminant qui devaient être multipliés par zéro. Il est évident, d'après cela, que l'équation précédente peut s'écrire comme il suit,

aux dérivées partielles du premier ordre. Ch. V, §. 20. 361

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_{i+1} - \omega_{i+1}, p_{k+1} - \omega_{k+1}) \\ = \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \sum_{m=i+2}^{m=k+1} \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \\ + \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0, \end{array} \right.$$

et que le nombre de ses termes est égal à $2n - k - i$. Ainsi, par exemple, dans la première équation du système (b), pour laquelle $i=0$, $k=1$, il y a $2n-1$ termes; dans la dernière, où $i=n-2$, $k=n-1$, il y a seulement 3 termes.

68. D'après cela, la fonction ω_2 des variables $p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$ devra être déterminée au moyen de la fonction donnée ω_1 , par l'intégration de l'équation linéaire

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_1 - \omega_1, p_2 - \omega_2) = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \\ + \sum_{m=2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \right) = 0, \end{array} \right.$$

dans laquelle la fonction cherchée $p_2 = \omega_2$ entre non-seulement par ses dérivées partielles, mais encore explicitement dans les coefficients. Le nombre des termes est $2n-1$, et l'un d'entre eux ne contient pas les dérivées partielles de la fonction cherchée.

La fonction ω_3 des variables $p_4, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$ devra être déterminée au moyen des fonctions connues ω_1, ω_2 , de manière à satisfaire simultanément aux deux équations linéaires

$$\begin{aligned} (p_1 - \omega_1, p_3 - \omega_3) &= -\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\ &+ \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \right) = 0, \\ (p_2 - \omega_2, p_3 - \omega_3) &= -\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\ &+ \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \right) = 0, \end{aligned}$$

dont les coefficients contiennent pareillement la fonction cherchée $p_3 = \omega_3$, et le nombre des termes est égal pour la première à $2n-2$, pour la seconde à $2n-3$.

En général, lorsqu'on aura déjà déterminé les fonctions

$\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k$, alors, au moyen de ces fonctions et de la fonction donnée ω_1 , on devra déterminer ω_{k+1} en fonction de $p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$ de manière à satisfaire simultanément au système des k équations linéaires

$$(k) \quad (p_1 - \omega_1, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0, \dots, \\ (p_k - \omega_k, p_{k+1} - \omega_{k+1}) = 0,$$

lesquelles sont de la forme de l'équation (c), et s'obtiennent en faisant successivement dans celle-ci

$$i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Relativement à leur forme, nous n'aurons qu'à répéter les remarques faites plus haut sur les équations des systèmes précédents, et les nombres de leurs termes seront respectivement

$$(k) \quad 2n-k, \quad 2n-k-1, \quad 2n-k-2, \dots, \quad 2n-2k+1.$$

On peut écrire de cette manière chacun des n systèmes d'équations qui servent à la détermination successive des fonctions $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$. Mais on voit par ce qui précède que, dans les différentes équations d'un même système, le nombre des variables n'est pas le même, non plus que celui des termes. Ainsi, dans les équations (k), les nombres des variables forment évidemment la série

$$2n-1, \quad 2n-2, \quad 2n-3, \dots, \quad 2n-k,$$

les nombres de termes étant exprimés par la série (k').

En conséquence, il faut transformer les équations ci-dessus, de manière à rendre le nombre des variables, ainsi que celui des termes, identiques dans toutes les équations d'un même système, et respectivement égaux aux nombres des variables et des termes dans la dernière équation du système. Ainsi, dans chacune des équations (k), on réduira le nombre des variables à $2n-k$, et celui des termes à $2n-2k+1$.

69. Commençons par appliquer cette transformation aux équations (2). La première de ces équations peut s'obtenir immédiatement, puisque la fonction ω_1 des variables $p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$ se tire algébriquement de l'équation donnée; mais on ne peut former la seconde qu'après avoir déterminé une intégrale $p_2 = \omega_2$ de l'équation (1). Dès que l'on connaîtra cette intégrale, où ω_2 désigne une fonction de $p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, on pourra alors évidemment substituer dans ω_1 la valeur de p_2 , et exprimer ainsi ω_1 au moyen des mêmes variables que ω_2 , d'où il devra résulter

une simplification de la première des équations (2). En désignant par ω_1' ce que devient la fonction ω_1 après la substitution, et par t une quelconque des variables $p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, il est clair qu'on aura

$$\frac{\partial \omega_1'}{\partial t} = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial t}.$$

Cette formule indique d'elle-même de quelle manière s'opérera la transformation demandée. Pour cela, il est aisé de voir qu'il faut ajouter à la première des équations (2) le produit de la seconde par $\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}$, ce qui donne

$$0 = -\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \\ - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right) - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}\right) \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\ + \sum_{m=4}^{m=n} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_m}\right) \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m}\right) \frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \right\}.$$

ou, en remarquant que

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} = 0,$$

et ayant égard à la formule précédente,

$$0 = -\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1'}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\ + \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1'}{\partial p_m} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \right).$$

On remplacera par cette équation la première des équations (2), après quoi ces deux équations ne renfermeront plus l'une et l'autre que les mêmes variables $p_3, p_4, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, et auront le même nombre de termes $2n-3$; de sorte que l'une des équations se transformera dans l'autre, lorsqu'on changera ω_1 en ω_2 et vice versa.

Il est évident aussi que ces deux équations peuvent être représentées symboliquement sous la forme

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_1 - \omega_1', p_3 - \omega_3) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, p_3 - \omega_3) = 0, \\ \text{et que leur combinaison donne encore une troisième} \\ \text{identité,} \end{array} \right. \quad (p_1 - \omega_1', p_2 - \omega_2) = 0,$$

transformé toutes les équations du système (k) , à l'exception de la première; alors, pour transformer aussi celle-ci, on formera l'équation

$$(k_1) + (k_2) \frac{\partial w_1}{\partial p_2} + \dots + (k_{l-1}) \frac{\partial w_1}{\partial p_{l-1}} + (k_l) \frac{\partial w_1}{\partial p_l} = 0,$$

laquelle, en vertu de la dernière des formules (d) , prendra la forme

$$(k_1) \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\partial w_1'}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1'}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ & + \sum_{m=k+2}^n \left(\frac{\partial w_1'}{\partial x_m} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial w_1'}{\partial p_m} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

et c'est par cette équation qu'on remplacera l'équation (k_1) .

72. Ainsi le système transformé se composera des équations

$$(k_1'), \dots, (k_{l-1}'), (k_l).$$

Dans chacune de ces équations entrent les seules et mêmes variables $p_{k+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, et elles contiennent toutes le même nombre de termes $2n - 2k + 1$.

Il est évident que ces équations se transforment les unes dans les autres par l'échange des fonctions $w_1', w_2', \dots, w_{k-1}', w_k$; on pourra donc les représenter toutes par la même formule générale

$$(e) \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\partial w_l'}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_l} - \frac{\partial w_l'}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ & + \sum_{m=k+2}^n \left(\frac{\partial w_l'}{\partial x_m} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial p_m} - \frac{\partial w_l'}{\partial p_m} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial x_m} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou l'on fera successivement $l = 1, 2, \dots, k$.

Cette même formule peut servir à représenter les équations de tous les autres systèmes, qui s'en déduisent toutes en donnant successivement à l'indice k les valeurs $1, 2, \dots, n-1$, et attribuant, pour chacune de ces valeurs, à l'indice l toutes les valeurs non plus grandes que k .

Enfin, remarquons encore que le système (k) transformé peut s'écrire symboliquement sous la forme

$$(p_1 - w_1', p_{k+1} - w_{k+1}) = 0, \quad (p_2 - w_2', p_{k+1} - w_{k+1}) = 0, \dots, \\ (p_k - w_k, p_{k+1} - w_{k+1}) = 0,$$

$w_1', w_2', \dots, w_k$ désignant des fonctions des seules variables $p_{k+1}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$.

A ces équations on peut encore joindre les identités

$$(p_1 - w_1', p_1 - w_1') = 0.$$

qui ont lieu, en vertu du Théorème IV du §. 17, pour toutes les valeurs de l et de l' prises dans la suite des nombres $1, 2, \dots, k$.

§. 21.

73. Avant de traiter de l'intégration des systèmes d'équations obtenus dans le paragraphe précédent, faisons-leur subir encore une dernière transformation, d'ailleurs très-simple et uniforme, et qu'il suffira, en conséquence, d'expliquer sur l'équation (e) , qui représente le type général de toutes les autres.

Dans l'équation (e) , $p_{k+1} = w_{k+1}$ désigne la fonction cherchée des variables $p_{k+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$; et w_l' est une fonction donnée, dans laquelle entre, outre les variables précédentes, la fonction elle-même $p_{k+1} = w_{k+1}$ qu'il s'agit de déterminer. D'après cela, suivant le procédé ordinaire, on transformera cette équation en une autre, pareillement linéaire, dans laquelle la variable p_{k+1} se joindra aux précédentes comme variable indépendante, et où la nouvelle fonction inconnue n'entrera plus dans les coefficients de l'équation.

Supposons, en effet, que

$$f_k(p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n) = \text{const} = a_k$$

soit l'équation d'où l'on doit tirer la valeur

$$p_{k+1} = w_{k+1},$$

satisfaisant à l'équation (e) . L'équation $f_k = a_k$, par la substitution de la valeur w_{k+1} de p_{k+1} , se changera en identité; par suite, en la différentiant par rapport à l'une quelconque l des variables $p_{k+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, nous aurons encore une identité,

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial t} = 0, \\ - \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial t} = \frac{\partial f_k}{\partial t},$$

ou

En multipliant donc l'équation (e) par $-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, il viendra

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega'_k}{\partial p_{k+1}} \left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \right) + \sum_{m=k+2}^{m=n} \left\{ \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_m} \left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m} \right) - \frac{\partial \omega'_k}{\partial p_m} \left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m} \right) \right\} = 0,$$

ou, en vertu de l'égalité précédentes

$$(g) \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_1} + \sum_{m=k+2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega'_k}{\partial x_m} \frac{\partial f_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega'_k}{\partial p_m} \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \right) = 0.$$

Enfin, cette équation peut encore se mettre sous la forme symbolique

$$(p_1 - \omega'_1, f_k) = 0,$$

ω'_1 et f_k représentant des fonctions des seules et mêmes variables $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$.

74. Toutes les équations étant finalement ramenées à la forme convenable, nous pouvons maintenant exposer la méthode pour les intégrer. Le plan général et l'essence du procédé nécessaire pour le succès de cette intégration sont, dans le cas actuel, analogues à ce que nous avons développé au §. 18, en traitant de l'intégration des équations correspondantes, de forme non encore simplifiée. La différence de détail provient principalement, dans le cas présent, de l'élimination graduelle des variables superflues dans les équations qu'il faut intégrer pour la détermination successive des $n-1$ fonctions inconnues. De cette manière, nous aurons encore ici $n-1$ systèmes à intégrer, lesquels se composeront des mêmes nombres d'équations que précédemment; mais, chaque fois qu'on passe à la détermination d'une nouvelle fonction, le nombre des variables est diminué de deux unités, par suite de l'élimination effectuée à l'aide de la fonction que l'on vient de déterminer immédiatement avant celle que l'on cherche. En même temps que la théorie se trouve simplifiée par ce procédé, elle est encore perfectionnée sous un autre rapport: les équations d'un même système contiennent maintenant un égal nombre de variables; mais les variables ne sont pas toutes identiques dans les diverses équations, et cette circonstance a pour effet, comme nous le verrons bientôt, de délivrer la théorie de l'imperfection que nous avons signalée dans la Remarque I du §. 18 (art. 49), et qui diminuait la sûreté des applications de la méthode.

76. La détermination successive des $n-1$ fonctions inconnues, nécessaires pour la solution de notre problème, peut être présentée comme il suit sous une forme générale.

De l'équation donnée aux dérivées partielles du premier ordre

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a,$$

on tirera algébriquement la valeur de l'une des dérivées partielles p_1 , en fonction des autres et des variables $x_1, \dots, x_n$; soit

$$p_1 = \omega_1(p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a)$$

cette valeur. Pour déterminer l'équation

$$f_1(p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a) = \text{const.} = a_1,$$

d'où l'on tirera l'expression de p_2 en fonction de $p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1$, on prendra l'équation linéaire

$$(p_1 - \omega_1, f_1) = 0,$$

qui, en vertu de la formule (g), est de la forme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{m=2}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} \frac{\partial f_1}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1}{\partial p_m} \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \right) = 0,$$

et l'on déterminera une de ses intégrales particulières, renfermant p_2 , ce qui se ramène à la détermination de l'une des intégrales du système des $2n-2$ équations simultanées aux différentielles ordinaires entre $2n-1$ variables,

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial \omega_1}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_n}}.$$

Si l'on représente cette intégrale par

$$\varphi(p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a) = \text{const.},$$

on pourra prendre $f_1 = \varphi$, et de l'équation $f_1 = a_1$ on tirera la valeur cherchée de p_2 , savoir

$$p_2 = \omega_2(p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1).$$

En portant dans la fonction ω_1 la valeur que l'on vient de trouver pour p_2 , et désignant par ω'_1 ce que devient ω_1 après cette substitution, on aura

$$p_1 = \omega'_1$$

pour la valeur de p_1 exprimée au moyen des mêmes variables que p_2 .

76. Pour déterminer ensuite l'équation

$$f_2(p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1) = \text{const.} = a_2$$

qui doit fournir l'expression de p_3 en fonction de $p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, a_2$, on posera les deux équations linéaires simultanées

$$(\alpha) \quad (p_1 - \omega_1', f_2) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_2) = 0,$$

qui, en vertu de la formule (g), sont de la forme

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \sum_{m=3}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_m} \frac{\partial f_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1'}{\partial p_m} \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right) = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \sum_{m=3}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m} \frac{\partial f_2}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_2}{\partial p_m} \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \right) = 0, \end{cases}$$

et l'on en déterminera une solution commune. A ces équations on pourra encore joindre l'identité

$$(\alpha') \quad (p_1 - \omega_1', p_2 - \omega_2) = 0,$$

qui a lieu en vertu du Théorème IV du §. 17.

La détermination de la fonction f_2 satisfaisant aux équations simultanées linéaires aux dérivées partielles (α), s'effectue en s'appuyant sur le Théorème I du §. 17, et s'aidant de l'identité (α').

On cherchera d'abord une intégrale particulière de l'une des équations (α), intégrale qui renferme p_3 ; ce qui se ramènera à la recherche de l'une des intégrales du système des $2n-4$ équations simultanées aux différentielles ordinaires entre $2n-3$ variables

$$(\beta) \quad \frac{dx_1}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_3}} = \dots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1'}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_3}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1'}{\partial x_n}},$$

si l'on veut obtenir une intégrale de la première des équations (α); ou du système

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}} = \dots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_n}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_n}},$$

si l'on veut obtenir une intégrale de la seconde des équations (α).

Supposons, par exemple, que nous ayons déterminé une intégrale du premier de ces systèmes,

$$\psi(p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1) = \text{const.}$$

dans laquelle x_2 pourra entrer en jouant le rôle de constante.

Cette fonction ψ , qui représente une intégrale particulière de la première équation (α), substituons-la dans la seconde de ces équations à la place de f_2 ; substituons le résultat ψ_1 de cette substitution dans la même équation à la place de f_2 , et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi la série de fonctions

$$(p_2 - \omega_2, \psi) = \psi_1, \quad (p_2 - \omega_2, \psi_1) = \psi_2, \dots, \quad (p_2 - \omega_2, \psi_{i-1}) = \psi_i, \dots$$

On prouve aisément, au moyen du Théorème I du §. 17, que les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots$ sont des intégrales de la première équation (α). En effet, en prenant l'identité qui exprime ce théorème,

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0,$$

si l'on y fait $A = p_1 - \omega_1'$, $B = p_2 - \omega_2$, et que l'on ait égard à l'identité (α'), on trouve

$$[p_1 - \omega_1', (p_2 - \omega_2, C)] + [p_2 - \omega_2, (C, p_1 - \omega_1')] = 0,$$

identité qui a lieu pour toute fonction C des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$.

En faisant maintenant tour à tour

$$C = \psi, \psi_1, \dots, \psi_i, \dots$$

on obtient successivement les identités

$$\begin{aligned} [p_1 - \omega_1', (p_2 - \omega_2, \psi)] &= 0, \text{ ou } (p_1 - \omega_1', \psi) = 0, \\ [p_1 - \omega_1', (p_2 - \omega_2, \psi_1)] &= 0, \text{ ou } (p_1 - \omega_1', \psi_2) = 0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

qui démontrent le théorème.

Puisque $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots$ représentent des intégrales de la première des équations (α), il s'ensuit de là que

$$\psi = \text{const.}, \quad \psi_1 = \text{const.}, \quad \psi_2 = \text{const.}, \dots$$

sont des intégrales du système des $2n-4$ équations différentielles ordinaires simultanées (β). Mais ce système n'admet que $2n-4$ intégrales distinctes ou indépendantes entre elles, et toutes les autres intégrales du même système en sont des fonctions. Donc si, dans le calcul de la série $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots$ on ne rencontre

pas de terme qui se réduise à une constante quelconque ou à zéro, on devra alors parvenir nécessairement à un terme ψ_i qui s'exprime en fonction des précédents, et qui pourra, en outre, renfermer x_2 en qualité de constante. Supposons que l'on ait ainsi

$$\psi_i = F(x_2, \psi, \psi_1, \dots, \psi_{i-1}),$$

l'indice i ne devant pas, évidemment, dépasser $2n-4$.

Il serait inutile de pousser plus loin le calcul de la série précédente, puisque les nouveaux termes ajoutés seraient bien des intégrales de la première équation (α), mais s'exprimeraient tous en fonction des intégrales déjà trouvées; et nous savons a priori qu'une fonction arbitraire d'une ou de plusieurs intégrales d'une équation linéaire aux dérivées partielles est aussi une intégrale de cette équation. En profitant de ce qu'on peut choisir arbitrairement la forme de la fonction des variables $x_2, \psi, \psi_1, \dots, \psi_{i-1}$ qui satisfait à la première équation (α), on pourra déterminer cette forme de manière qu'elle satisfasse en outre à la seconde équation (α).

Soit $\theta(x_2, \psi, \psi_1, \dots, \psi_{i-1})$ la fonction cherchée; en la substituant à la place de f_2 dans la seconde équation (α), on voit qu'en vertu de la formule (8) du §. 16 (art. 37), cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} & (p_2 - w_2, \theta) \\ &= (p_2 - w_2, x_2) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + (p_2 - w_2, \psi) \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + (p_2 - w_2, \psi_1) \frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} \\ &+ \dots + (p_2 - w_2, \psi_{i-1}) \frac{\partial \theta}{\partial \psi_{i-1}} = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \psi_1 \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} + \dots + F(x_2, \psi, \dots, \psi_{i-1}) \frac{\partial \theta}{\partial \psi_{i-1}} = 0.$$

L'intégration de cette équation linéaire se ramène à celle du système d'équations différentielles ordinaires simultanées

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \dots = \frac{d\psi_{i-1}}{F(x_2, \psi, \dots, \psi_{i-1})},$$

qui se réduisent très-simplement à une seule équation différentielle ordinaire de l'ordre i , entre les variables x_2 et ψ ,

$$\frac{d^i \psi}{dx_2^i} = F(x_2, \psi, \frac{d\psi}{dx_2}, \dots, \frac{d^{i-1} \psi}{dx_2^{i-1}}).$$

Si l'on détermine une des intégrales premières de cette équation

$$\chi(x_2, \psi, \frac{d\psi}{dx_2}, \dots, \frac{d^{i-1} \psi}{dx_2^{i-1}}) = \text{const.},$$

et qu'on y substitue les valeurs

$$\frac{d\psi}{dx_2} = \psi_1, \quad \frac{d^2 \psi}{dx_2^2} = \psi_2, \dots,$$

on aura une intégrale du système précédent d'équations simultanées,

$$\chi(x_2, \psi, \psi_1, \dots, \psi_{i-1}) = \text{const.}$$

Par conséquent, $f_2 = \theta = \chi$ sera une intégrale commune des équations (α). En posant

$$f_2 = \chi = \text{const.} = a_2,$$

on en déduira la valeur cherchée de p_2 en fonction de $p_4, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2$, valeur que nous représenterons par

$$p_2 = w_2(p_4, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2).$$

Si, dans le calcul de la suite $\psi_1, \psi_2, \dots$, on rencontre un terme qui se réduise à une constante, alors la détermination de l'intégrale commune des équations (α) se fera très-simplement. Soit, en effet, $\psi_i = k$, k étant une constante; nous aurons

$$\frac{d^i \psi}{dx_2^i} = k,$$

d'où l'on tire, en intégrant

$$\frac{d^{i-1} \psi}{dx_2^{i-1}} - kx_2 = \text{const.},$$

et par suite

$$f_2 = \psi_{i-1} - kx_2.$$

Si $k=0$, alors $f_2 = \psi_{i-1}$.

77. La méthode que nous venons d'exposer pour la détermination de l'intégrale commune des équations (α) ne présente plus les imperfections de détail dont nous avons parlé dans la Remarque I du §. 18. Cela tient à ce que dans la seconde des équations (α) se trouve la variable x_2 , qui entre comme constante dans la première de ces équations. Si nous échangeons les rôles des deux équations (α), on parviendrait encore aux mêmes conséquences, parce que la première équation contient la variable x_1 , qui entre comme constante dans la seconde. En effet, si ψ_1 est

une fonction de x_2 et de ψ , que nous désignerons par $F(x_2, \psi)$, on pourra alors prendre pour l'intégrale commune aux équations (a) une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + F(x_2, \psi) \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0,$$

ou une intégrale de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$\frac{d\psi}{dx_2} = F(x_2, \psi).$$

Lorsqu'une des variables x_2, ψ , ou toutes les deux manquent dans F , il est clair qu'il n'en peut résulter qu'une simplification dans l'intégration de l'équation précédente.

78. En substituant la valeur trouvée $p_3 = \omega_3$ dans les fonctions ω_1' et ω_2 , on obtiendra de nouvelles expressions de p_1, p_2 que nous désignerons par

$$p_1 = \omega_1'', \quad p_2 = \omega_2',$$

ces expressions ne contenant plus que les variables qui entrent dans la valeur ω_3 de p_3 .

Pour trouver ensuite l'équation

$$f_3(p_4, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2) = \text{const} = a_3,$$

d'où se déduira la valeur de p_4 en fonction de $p_5, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, a_3$, on prendra les trois équations simultanées aux dérivées partielles

$$(y) \quad (p_1 - \omega_1'', f_3) = 0, \quad (p_2 - \omega_2', f_3) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f_3) = 0,$$

qui, d'après la formule (g), sont de la forme

$$(y) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_1''}{\partial x_m} \frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_1''}{\partial p_m} \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \right) = 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_2'}{\partial x_m} \frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_2'}{\partial p_m} \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \right) = 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \sum_{m=4}^{m=n} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_m} \frac{\partial f_3}{\partial p_m} - \frac{\partial \omega_3}{\partial p_m} \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \right) = 0, \end{cases}$$

et l'on en déterminera une intégrale commune f_3 .

A ces équations il faut encore joindre les identités

$$(y') \quad (p_1 - \omega_1'', p_2 - \omega_2') = 0, \quad (p_2 - \omega_2', p_3 - \omega_3) = 0, \\ (p_3 - \omega_3, p_1 - \omega_1'') = 0,$$

qui ont lieu en vertu du Théorème IV du §. 17.

Les équations (y) sont de même forme que les équations (a), à cela près qu'elles renferment un moindre nombre de variables; on pourra donc, par la méthode exposée ci-dessus, déterminer une intégrale commune à deux quelconques d'entre elles. Supposons que l'on ait ainsi trouvé une fonction

$$\Phi(p_4, \dots, p_n, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

qui, mise à la place de f_3 , satisfasse, par exemple, aux deux premières équations (y). Quoique la quantité x_3 n'entre pas comme variable dans ces deux équations, elle est toutefois renfermée dans leurs coefficients; nous pouvons donc admettre sa présence dans la fonction Φ .

Substituons Φ à f_3 dans la troisième équation (y); substituons de nouveau le résultat de cette substitution à la place de f_3 dans la même équation, et ainsi de suite. Nous obtiendrons de cette manière la suite des fonctions

$$(p_3 - \omega_3, \Phi) = \Phi_1, \quad (p_3 - \omega_3, \Phi_1) = \Phi_2, \dots, \quad (p_3 - \omega_3, \Phi_{k-1}) = \Phi_k, \dots,$$

qui seront des intégrales de la première et de la seconde des équations (y).

En effet, d'après le Théorème I du §. 17, en faisant d'abord $A = p_1 - \omega_1''$, $B = p_3 - \omega_3$, puis $A = p_2 - \omega_2'$, $B = p_3 - \omega_3$, et ayant égard à la seconde et à la troisième des identités (y'), il vient

$$[p_1 - \omega_1'', (p_3 - \omega_3, C)] + [p_3 - \omega_3, (C, p_1 - \omega_1'')] = 0, \\ [p_2 - \omega_2', (p_3 - \omega_3, C)] + [p_3 - \omega_3, (C, p_2 - \omega_2')] = 0,$$

identités qui ont lieu pour toute fonction C des variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. En y faisant successivement

$$C = \Phi, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \dots,$$

et se rappelant que Φ est une intégrale commune des deux premières équations (y), on obtient cette double série d'identités,

$$\begin{cases} [p_1 - \omega_1'', (p_2 - \omega_2, \Phi)] = 0, \text{ ou } (p_1 - \omega_1'', \Phi_1) = 0, \\ [p_2 - \omega_2', (p_3 - \omega_3, \Phi)] = 0, \text{ ou } (p_2 - \omega_2', \Phi_1) = 0; \\ \begin{cases} [p_1 - \omega_1'', (p_3 - \omega_3, \Phi_1)] = 0, \text{ ou } (p_1 - \omega_1'', \Phi_2) = 0, \\ [p_2 - \omega_2', (p_3 - \omega_3, \Phi_1)] = 0, \text{ ou } (p_2 - \omega_2', \Phi_2) = 0; \end{cases} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

qui démontrent la proposition énoncée.

Si la série $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ ne se clot pas par un terme égal à une constante on à zéro, on devra alors finir par obtenir un terme qui s'exprime en fonction des précédents, puisque chacune des deux premières équations (γ) ne peut être satisfaite que par $2n-6$ intégrales particulières distinctes. Soit Φ_k ce terme, dans l'expression duquel, outre les quantités $\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$, pourra entrer aussi la variable x_3 . Posons donc

$$\Phi_k = F(x_3, \Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}),$$

k n'étant pas plus grand que $2n-6$.

Puisqu'une fonction arbitraire des variables $x_3, \Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$ satisfait aux deux premières équations (γ), il suffit de déterminer sa forme de manière à satisfaire à la troisième équation (γ); elle satisfera encore également aux deux premières. Si l'on désigne la fonction cherchée par π , on trouve, pour la déterminer, l'équation linéaire

$$(p_3 - \omega_3, \pi) = \frac{\partial \pi}{\partial x_3} + \Phi_1 \frac{\partial \pi}{\partial \Phi} + \Phi_2 \frac{\partial \pi}{\partial \Phi_1} + \dots + F \frac{\partial \pi}{\partial \Phi_{k-1}} = 0,$$

dont l'intégration se ramène au système d'équations simultanées

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{d\Phi}{\Phi_1} = \frac{d\Phi_1}{\Phi_2} = \dots = \frac{d\Phi_{k-1}}{F},$$

ou à l'équation d'ordre k à deux variables

$$\frac{d^k \Phi}{dx_3^k} = F(x_3, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_3}, \dots, \frac{d^{k-1} \Phi}{dx_3^{k-1}}).$$

En déterminant une de ses intégrales premières

$$\mathcal{U}(x_3, \Phi, \frac{d\Phi}{dx_3}, \dots, \frac{d^{k-1} \Phi}{dx_3^{k-1}}) = \text{const.},$$

et y substituant les valeurs

$$\frac{d\Phi}{dx_3} = \Phi_1, \frac{d^2 \Phi}{dx_3^2} = \Phi_2, \dots,$$

on obtiendra la valeur cherchée

$$f_3 = \pi = \mathcal{U}(x_3, \Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1})$$

de la fonction f_3 qui satisfait à l'ensemble des équations (γ).

Si dans l'égalité $\Phi_k = F$, l'indice $k=1$, la fonction F sera de l'une des formes

$$F(x_3, \Phi), F(\Phi), F(x_3), F = \text{const.}, F = 0.$$

Dans tous ces cas, comme nous l'avons montré dans l'art. 77, la méthode précédente pour la détermination de l'intégrale commune des équations (γ) ne tombe pas en défaut; au contraire, son application se trouve simplifiée.

79. En posant $f_3 = \mathcal{U} = \text{const.} = a_3$, on tirera de cette équation une expression de p_4 en fonction de $p_3, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, u, u_1, u_2, u_3$, soit

$$p_4 = \omega_4.$$

Par la substitution de cette valeur de p_4 dans les fonctions $\omega_1'', \omega_2', \omega_3$, si l'on désigne par $\omega_1''', \omega_2'', \omega_3'$ ce que deviennent ces fonctions respectivement, on aura les valeurs

$$p_1 = \omega_1''', p_2 = \omega_2'', p_3 = \omega_3'$$

de p_1, p_2, p_3 exprimées au moyen des mêmes variables que p_4 .

Pour trouver maintenant l'équation $f_4 = \text{const.} = a_4$ qui doit donner l'expression de p_5 en fonction de $p_6, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, il faudra intégrer le système des quatre équations simultanées linéaires aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} (p_1 - \omega_1''', f_4) &= 0, & (p_2 - \omega_2'', f_4) &= 0, \\ (p_3 - \omega_3', f_4) &= 0, & (p_4 - \omega_4, f_4) &= 0. \end{aligned}$$

80. Mais l'essence de la méthode a été déjà suffisamment expliquée par les développements que nous avons donnés sur la marche générale de l'intégration des deux systèmes (α) et (γ); de sorte qu'il est maintenant très-facile d'étendre l'application de cette méthode au système des quatre équations que nous venons d'écrire, ainsi qu'aux systèmes d'équations suivants. Supposons que de cette manière on ait déjà intégré $n-2$ systèmes, et qu'il ne reste plus à intégrer que le $(n-1)^{\text{ième}}$ et dernier. Soient

$$H(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n) = a,$$

$$f_1(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a) = a_1,$$

$$f_2(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1) = a_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_{n-2}(p_{n-1}, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-3}) = a_{n-2}$$

l'équation donnée et les intégrales des n systèmes déjà intégrés.

D'après la méthode d'intégration précédente, on devra tirer de chacune de ces équations les expressions de chacune des $n-1$ premières quantités de la suite

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-2}$$

en fonction des $2n$ qui la suivent. En conservant les notations précédentes, représentons ces expressions par

$$p_1 = \omega_1, \quad p_2 = \omega_2, \dots, \quad p_{n-1} = \omega_{n-1}.$$

Il faudra ensuite porter les valeurs de $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_2$, fournies par les équations du système précédent, en remontant depuis la dernière, dans toutes ces équations jusqu'à la première. En conservant le mode de notation déjà employé, marquons le nombre des substitutions successives, effectuées dans chacune des fonctions $\omega_1, \omega_2, \dots$ en affectant ces fonctions d'un indice supérieur correspondant. On aura de cette manière

$$p_1 = \omega_1^{(n-2)}, \quad p_2 = \omega_2^{(n-3)}, \dots, \quad p_{n-2} = \omega_{n-2}, \quad p_{n-1} = \omega_{n-1},$$

pour les expressions de $p_1, \dots, p_{n-1}$ au moyen de $p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-2}$.

Passons maintenant à la détermination de l'équation

$$f_{n-1}(p_n, x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-2}) = \text{const.} = a_{n-1},$$

d'où l'on doit tirer p_n en fonction de $x_1, \dots, x_n, a, a_1, \dots, a_{n-1}$. Pour cela, prenons le système des équations aux dérivées partielles

$$(p_1 - \omega_1^{(n-2)}, f_{n-1}) = 0,$$

$$(p_2 - \omega_2^{(n-3)}, f_{n-1}) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(p_{n-1} - \omega_{n-1}, f_{n-1}) = 0,$$

lesquelles, en vertu de la formule (g), sont de la forme

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_2^{(n-3)}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \omega_2^{(n-3)}}{\partial p_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n} - \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial p_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \right.$$

et déterminons leur intégrale commune f_{n-1} . Les principes de la méthode d'intégration de ces sortes de systèmes d'équations ont été exposés ci-dessus avec détail; c'est pourquoi, dans le cas présent, nous nous bornerons à de courtes explications.

81. On commencera par déterminer une intégrale particulière de l'une des équations (b). Si l'on choisit la première, on devra chercher une des deux intégrales du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{dx_n}{\frac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}} = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}}.$$

Soit $\xi = \text{const.}$ cette intégrale, ξ étant une fonction des variables p_n, x_1, x_n , et pouvant contenir $x_2, \dots, x_{n-1}$ comme constantes. Substituons cette fonction à la place de f_{n-1} dans une des autres équations (b), dans la seconde, par exemple, et substituons de nouveau le résultat à la place de f_{n-1} dans la même équation. Nous aurons de cette manière

$$(p_2 - \omega_2^{(n-3)}, \xi) = \xi', \quad (p_2 - \omega_2^{(n-3)}, \xi') = \xi''.$$

Si ξ' s'exprime en fonction de $\xi, x_2, x_3, \dots, x_n$, l'intégrale commune des deux premières équations (b) sera déterminée comme intégrale de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$(b') \quad \frac{d\xi}{dx_2} = \xi',$$

entre les deux variables ξ et x_2 , les quantités $x_3, \dots, x_n$ pouvant y être considérées comme des constantes. Dans le cas contraire, ξ'' s'exprimera nécessairement en fonction de ξ, ξ' et de $x_2, x_3, \dots, x_n$; alors l'intégrale commune cherchée des deux premières équations (b) sera une des deux intégrales premières de l'équation du second ordre

$$(b'') \quad \frac{d^2 \xi}{dx_2^2} = \xi'',$$

entre les deux variables ξ et x_2 , puisque l'on doit considérer $x_3, \dots, x_n$ comme des constantes. En outre, dans le second membre de l'équation, on devra remplacer ξ' par $\frac{d\xi}{dx_2}$.

Soit

$$\xi_1 = \text{const.}$$

une intégrale de l'une ou de l'autre des deux équations précédentes, et par suite une intégrale commune des deux premières équations (6). Si elle est tirée de l'équation du premier ordre (ξ'), ξ_1 sera une fonction de $\xi, x_2, x_3, \dots, x_n$; si elle est tirée de l'équation du second ordre (ξ''), ξ_1 contiendra en plus la dérivée $\frac{d\xi}{dx_2}$, qu'il faudra remplacer par la fonction ξ' .

Ensuite, pour déterminer une intégrale commune des trois premières équations (6), formons les fonctions

$$(p_3 - w_3^{(n-4)}, \xi_1) = \xi_1', \quad (p_3 - w_3^{(n-4)}, \xi_1') = \xi_1''.$$

Actuellement, on ξ_1' s'exprimera en fonction de $\xi_1, x_2, \dots, x_n$; ou, si non, ξ_1'' s'exprimera nécessairement au moyen de $\xi_1, \xi_1', x_2, \dots, x_n$. Dans le premier cas, on déterminera l'intégrale de l'équation du premier ordre, entre les variables ξ_1 et x_2 ,

$$\frac{d\xi_1}{dx_2} = \xi_1';$$

dans le second cas, on déterminera une des intégrales premières de l'équation du second ordre, entre les mêmes variables,

$$\frac{d^2\xi_1}{dx_2^2} = \xi_1'',$$

dans le second membre de laquelle on aura remplacé ξ_1' par $\frac{d\xi_1}{dx_2}$. Soit

$$\xi_2 = \text{const.}$$

une intégrale de l'une ou de l'autre de ces deux équations, et par suite une intégrale commune des trois premières équations (6). Si elle est tirée de l'équation du second ordre, alors dans la fonction ξ_2 on substituera ξ_1' à la place de $\frac{d\xi_1}{dx_2}$.

De même, au moyen de ξ_2 , on déterminera une intégrale commune ξ_3 des quatre premières équations (6); et ainsi de suite. Supposons que, en continuant ce calcul, nous ayons déterminé

une intégrale commune ξ_{n-3} des $n-2$ premières équations (6); pour déterminer enfin une intégrale commune de toutes les équations de ce système, calculons les fonctions

$$(p_{n-1} - w_{n-1}, \xi_{n-3}) = \xi_{n-3}', \quad (p_{n-1} - w_{n-1}, \xi_{n-3}') = \xi_{n-3}''.$$

L'intégrale commune cherchée du système d'équations (6) se trouvera par l'intégration de l'équation du premier ordre

$$\frac{d\xi_{n-3}}{dx_{n-1}} = \xi_{n-3}',$$

si ξ_{n-3}' est une fonction de ξ_{n-3}, x_{n-1}, x_n ; dans le cas contraire, ce sera l'une des deux intégrales premières de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\xi_{n-3}}{dx_{n-1}^2} = \xi_{n-3}'',$$

où ξ_{n-3}'' sera nécessairement une fonction de $\xi_{n-3}, \xi_{n-3}', x_{n-1}, x_n$, dans laquelle on remplacera ξ_{n-3}' par $\frac{d\xi_{n-3}}{dx_{n-1}}$. Il est clair, en outre, que x_n devra être considéré comme une constante dans les deux équations. Soit donc

$$f_{n-1} = \text{const.} = a_{n-1}$$

une intégrale de l'une ou de l'autre des deux équations précédentes, et par suite une intégrale commune des équations (6). Si elle est tirée de l'équation du second ordre, on devra alors y remplacer de nouveau $\frac{d\xi_{n-3}}{dx_{n-1}}$ par ξ_{n-3}' .

82. Après la détermination de l'équation $f_{n-1} = a_{n-1}$, le problème s'achève de la manière suivante. Tirons de cette équation la valeur de p_n en fonction de $x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}$, et soit

$$p_n = w_n$$

cette valeur. En la substituant dans les fonctions $w_1^{(n-2)}, \dots, w_{n-1}$, que nous désignerons, après la substitution, par $w_1^{(n-1)}, \dots, w_{n-1}$, nous aurons

$$(p) \quad p_1 = w_1^{(n-1)}, \quad p_2 = w_2^{(n-2)}, \dots, \quad p_{n-1} = w_{n-1}', \quad p_n = w_n,$$

pour les expressions des dérivées partielles de la fonction cherchée z au moyen des variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$ et des $n-1$ constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{n-1}$. Ces expressions, d'après la méthode même qui a servi à les déterminer, doivent remplir nécessairement les conditions d'intégrabilité de la forme

dernière n'est autre chose que l'équation (b) écrite sous une autre forme. En effet, si l'on met dans l'équation $\hat{f}_i = a_i$ la valeur $p_{i+1} = w_{i+1}$, et dans l'équation $\hat{f}_k = a_k$ la valeur $p_{k+1} = w_{k+1}$, on changera ces équations en identités. En désignant donc par t une des variables qui entrent dans w_{i+1} et dans w_{k+1} , et différenciant les identités en question par rapport à cette variable, il vient

$$\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial t} = - \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial p_{k+1}} \frac{\partial w_{k+1}}{\partial t} = - \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial t}.$$

Si donc on multiplie l'égalité (c) par $\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial p_{k+1}}$, on trouve

$$- \sum_{m=i+1}^{m=k} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial p_m} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_m} + \sum_{m=k+1}^{m=n} \left(\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_m} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial p_m} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_m} \right) = 0.$$

Or cette dernière équation n'est autre chose que le développement de la condition qui était écrite symboliquement sous la forme (b).

85. Enfin, pour démontrer que les conditions (a) sont satisfaites dès que les conditions (b) le sont, il suffit de remarquer que les premières s'expriment sous forme linéaire au moyen des secondes. En effet, d'après ce que nous avons expliqué plus haut sur le passage des équations ($\hat{f}$) aux équations (b), on a

$$H_i = \hat{f}_i(x_1, \dots, x_n, p_{i+1}, \dots, p_n, H_1, \dots, H_{i-1}), \\ H_k = \hat{f}_k(x_1, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n, H_1, \dots, H_{k-1}).$$

Cette remarque faite, démontrons d'abord qu'une expression de la forme $(\hat{f}_i, H_k)$ s'exprime sous forme linéaire au moyen des fonctions qui forment les premiers membres des équations (b). Car, d'après la formule (8) du §. 16, on a

$$[\hat{f}_i, H_k] = (\hat{f}_i, \hat{f}_k) + \sum_{k'=0}^{k'-1} (\hat{f}_i, H_{k'}) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial H_{k'}}.$$

où l'on suppose évidemment $k' < k$.

En appliquant la même formule au développement de $(\hat{f}_i, H_{k'})$, nous l'exprimerons au moyen de $(\hat{f}_i, \hat{f}_{k'})$ et de $(\hat{f}_i, H_{k''})$, où $k'' < k'$. En continuant de la sorte, nous exprimerons finalement $[\hat{f}_i, H_k]$ sous forme linéaire, au moyen de

$$(\hat{f}_i, \hat{f}_k), (\hat{f}_i, \hat{f}_{k'}), (\hat{f}_i, \hat{f}_{k''}), \dots, (\hat{f}_i, \hat{f}_0) = (\hat{f}_i, H_0), \dots$$

et comme, en vertu de (b), ces dernières quantités sont identiquement nulles, il s'ensuit de là que

$$(d) \quad [\hat{f}_i, H_k] = 0,$$

pour toutes les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$ des indices i et k .

De plus, en vertu de la formule (6) du §. 16, on a

$$(H_i, H_k) = (\hat{f}_i, \hat{f}_k) + \sum_{k'=0}^{k'-1} (\hat{f}_i, H_{k'}) \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial H_{k'}} \\ + \sum_{i'=0}^{i'-1} (H_{i'}, \hat{f}_k) \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial H_{i'}} + \sum_{i'=0}^{i'-1} \sum_{k'=1}^{k'-1} (H_{i'}, H_{k'}) \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial H_{i'}} \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial H_{k'}}.$$

Or, en vertu des équations (b) et (d), les trois premiers termes du second membre de l'équation précédente se réduisent à zéro; par conséquent, (H_i, H_k) s'exprime linéairement au moyen des symboles $(H_{i'}, H_{k'})$, dans lesquels $i' < i$, $k' < k$. En continuant ainsi, on exprimera finalement (H_i, H_k) sous forme linéaire au moyen des expressions qui forment les premiers membres des égalités (b) et (d), et qui sont identiquement nulles. On a, par conséquent,

$$(H_i, H_k) = 0$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la suite des nombres $0, 1, 2, \dots, n-1$.

86. Le mode de démonstration qui vient de nous servir pour établir le théorème précédent, peut s'employer absolument de même pour faire voir que, si toutes les fonctions qui forment les premiers membres des équations ($\hat{f}$), prises deux à deux, vérifient l'identité

$$(\hat{f}_i, \hat{f}_k) = 0,$$

cette identité subsistera lorsqu'on remplacera, dans l'une des fonctions $\hat{f}_i, \hat{f}_k$, ou dans toutes les deux, une ou plusieurs des constantes arbitraires qui y entrent par les fonctions qui leur sont égales en vertu des équations ($\hat{f}$); ou, plus généralement, cette identité subsistera, quelque transformation que l'on ait fait subir aux fonctions $\hat{f}_i, \hat{f}_k$ en vertu des équations ($\hat{f}$).

§. 22.

87. Pour apprécier la valeur théorique de la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre que nous venons d'exposer, on ne peut pas se dispenser de prendre

en considération la question suivante: Combien y a-t-il, en tout d'intégrations à effectuer pour obtenir l'intégrale complète, dans le cas de n variables indépendantes, quand la fonction inconnue, qui en dépend, n'entre dans l'équation donnée que par ses dérivées partielles du premier ordre?

La méthode de Jacobi conduit successivement à différents systèmes d'équations simultanées de la forme

$$(a) \quad \frac{dx}{F(x, y, \dots, u)} = \frac{dy}{f(x, y, \dots, u)} = \dots = \frac{du}{\varphi(x, y, \dots, u)},$$

dans lesquels le nombre des variables $x, y, \dots, u$ s'abaisse graduellement; et elle n'exige pas l'intégration complète de ces équations, mais seulement la détermination d'une intégrale de chaque système. En général, la difficulté de satisfaire à cette condition dépend de l'ordre de l'équation à intégrer, lequel se détermine d'après le nombre des constantes arbitraires introduites par l'intégration complète d'un système de la forme (a), et par suite est égal au nombre des variables $x, y, \dots, u$, diminué d'une unité. Les systèmes de la forme (a), qui se rencontrent dans la méthode de Jacobi, se divisent en principaux et auxiliaires. Les premiers sont chacun d'un ordre complètement déterminé. Les premiers sont chacun d'un ordre complètement déterminé, et non susceptible d'abaissement, tandis que, pour les seconds, on ne peut indiquer d'avance que la limite supérieure à laquelle leur ordre peut s'élever.

Pour faire comprendre la distinction entre les systèmes principaux et les systèmes auxiliaires, il suffit de montrer un système appartenant à chacune de ces deux classes. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu, par exemple, que, pour déterminer la fonction f_2 , qui devait satisfaire simultanément aux deux équations

$$(a) \quad (p_1 - \omega_1, f_2) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_2) = 0,$$

il fallait trouver une des intégrales de l'un des systèmes d'équations

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{1} &= \frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_n}}, \\ \frac{dx_3}{1} &= \frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_n}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_n}}, \end{aligned}$$

qui sont chacun de l'ordre $n-4$, cet ordre ne pouvant être

abaissé. Ce système et les systèmes analogues sont dits principaux.

Lorsqu'on a trouvé une intégrale $\varphi = \text{const.}$ de l'un des systèmes (b), du premier par exemple, on obtient alors, en substituant cette intégrale dans la seconde équation (a), une série d'intégrales du premier système (b),

$$\varphi = \text{const.}, \quad \varphi_1 = \text{const.}, \dots, \quad \varphi_i = \text{const.}, \dots$$

Mais comme le nombre des intégrales distinctes qu'admet ce système est égal à son ordre $2n-4$, il faudra nécessairement que, dans la série $\varphi, \varphi_1, \dots$, on rencontre une fonction qui s'exprime au moyen des précédentes. Supposons que φ_i soit la première qui soit dans ce cas; son indice i ne devra pas surpasser $2n-4$. Nous pourrions alors écrire immédiatement le système d'équations

$$(c) \quad \frac{dx_2}{1} = \frac{d\varphi}{\varphi_1} = \dots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i},$$

qui sera de l'ordre i , et dont une des intégrales sera la valeur cherchée de f_2 .

Le système (c) est dit auxiliaire; tout ce que l'on sait sur ce système, c'est que son ordre i ne peut pas être plus élevé que l'ordre $2n-4$ des équations principales correspondantes (b). Mais il est clair que l'ordre de ce système peut être inférieur à cette limite, et qu'il doit varier généralement, quand, au lieu de l'intégrale $\varphi = \text{const.}$, on prend une autre intégrale du premier système (b), ou bien une intégrale du second système (b).

88. D'après ce que nous venons d'expliquer, il est maintenant facile de répondre à la question posée au commencement de l'art. précédent, en nous plaçant dans le cas le plus désavantageux, c'est-à-dire dans celui où tous les systèmes auxiliaires sont de l'ordre le plus élevé possible.

Dans ce cas, d'après ce qui a été vu au paragraphe précédent, la méthode de Jacobi exige la détermination d'une seule intégrale de chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes d'équations, dont il y a

1	de l'ordre	$2n-2$,	servant à déterminer la fonction f_1 ,
2		$2n-4$,	 f_2 ,
3		$2n-6$,	 f_3 ,
.....			
i		$2n-2i$,	 f_i ,
.....			
$n-1$		2 ,	 f_{n-1} .

Remarquons d'ailleurs que le cas le plus défavorable, supposé dans ce tableau, ne se rencontre pas d'ordinaire dans les applications, l'ordre des équations auxiliaires étant le plus souvent moindre que la limite supérieure. Pour ce qui est du nombre total $\frac{n(n-1)}{2}$ des intégrales exigées, lequel, étant un nombre triangulaire, croît assez rapidement avec le nombre n des variables indépendantes, on peut faire à ce sujet les remarques suivantes. Le problème qui nous occupe est, par sa nature même, indéterminé, et la théorie de Jacobi présente, à chaque phase du développement du calcul, une latitude considérable dans le choix de l'équation dont on doit déterminer une intégrale, pour faire faire au calcul du problème un pas en avant. D'après cela, dans un grand nombre de cas, on peut choisir des équations dont les intégrales se présentent d'une manière évidente; de sorte que le total général $\frac{n(n-1)}{2}$ des intégrations se réduit à un nombre beaucoup moindre d'intégrations à effectuer réellement.

89. Pour montrer une application de la méthode de Jacobi sous la forme exposée dans le paragraphe précédent, et pour donner en même temps un exemple des simplifications que nous venons d'indiquer, traitons encore un cas particulier.

Soit l'équation du premier ordre

$$t \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \left\{ \left[u + t \left(\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] \frac{\partial z}{\partial t} + (4w + 5v) \frac{\partial z}{\partial w} + (3w + 2v) \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = 0,$$

aux dérivées partielles de la fonction z des variables indépendantes t, u, v, w, y .

Introduisons les notations

$$\begin{aligned} y &= x_1, & w &= x_2, & v &= x_3, & u &= x_4, & t &= x_5, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= p_1, & \frac{\partial z}{\partial w} &= p_2, & \frac{\partial z}{\partial v} &= p_3, & \frac{\partial z}{\partial u} &= p_4, & \frac{\partial z}{\partial t} &= p_5. \end{aligned}$$

et tirons de l'équation proposée la valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$ ou p_1 , que nous représenterons par w_1 . Nous aurons

$$p_1 = -(3x_2 + 2x_3)p_2 - (4x_2 + 5x_3)p_3 - [x_4 + x_5(p_2 - p_3)]p_5 - \frac{x_5 p_5^2}{p_4} = w_1.$$

Pour obtenir les quatre équations

$$\begin{aligned} f_1(p_2, p_3, p_4, p_5, x_1, \dots, x_5) &= a_1, \\ f_2(p_2, p_3, p_4, p_5, x_1, \dots, x_5, a_1) &= a_2, \\ f_3(p_4, p_5, x_1, \dots, x_5, a_1, a_2) &= a_3, \\ f_4(p_5, x_1, \dots, x_5, a_1, a_2, a_3) &= a_4, \end{aligned}$$

($a_1, \dots, a_4$ désignant des constantes arbitraires), qui, jointes à la proposée, doivent fournir les valeurs de $p_1, \dots, p_5$ pour lesquelles $p_1 dx_1 + \dots + p_5 dx_5$ deviendra une différentielle exacte, il faut, d'après la théorie que nous avons exposée précédemment comme il suit:

On déterminera la fonction f_1 comme intégrale particulière de l'équation linéaire

$$(p_1 - w_1, f_1) = 0,$$

c'est-à-dire comme intégrale du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\frac{\partial w_1}{\partial w_1}} = \dots = \frac{dx_5}{\frac{\partial w_1}{\partial p_5}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial w_1}{\partial w_1}} = \dots = \frac{dp_5}{\frac{\partial w_1}{\partial x_5}},$$

au moyen desquelles on trouve

$$dx_1 = \frac{d(p_2 - p_3)}{\frac{\partial w_1}{\partial w_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_3}} = \frac{d(p_2 - p_3)}{-(p_2 - p_3)},$$

ce qui donne immédiatement, en intégrant,

$$f_1 = (p_2 - p_3) e^{-x_1} = a_1.$$

En tirant de là la valeur de p_2 , que nous désignerons par w_2 , et la portant dans l'expression de w_1 , qui devient après la substitution w_1 , il viendra

$$p_2 = p_3 + a_1 e^{-x_1} = w_2, \quad p_4 = w_1.$$

La fonction f_2 devra être déterminée comme intégrale particulière des équations linéaires simultanées

$$(p_2 - w_2, f_2) = 0, \quad (p_1 - w_1, f_2) = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations se déduit du système d'équations

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{dx_3}{\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}} = \frac{dx_4}{\frac{\partial \omega_2}{\partial p_4}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_4}}.$$

L'équation

$$\frac{dp_3}{dx_3} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = 0$$

donne l'intégrale

$$\varphi = p_3 = \text{const.}$$

En la substituant à f_2 dans la seconde des équations linéaires précédentes, il vient

$$(p_1 - \omega_1, \varphi) = \varphi_1 = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p_3} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}.$$

Or $\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = 0$; donc

$$\varphi_1 = -2p_3 - 5p_4 = -7\varphi - 2a_1 e^{-x_1}.$$

Donc, en vertu du paragraphe précédent, la valeur cherchée de la fonction f_3 s'obtiendra comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + 7\varphi + 2a_1 e^{-x_1} = 0,$$

et l'on aura

$$f_3 = (\varphi + \frac{1}{7}a_1 e^{-x_1})e^{7x_1} = a_3.$$

Tirant de là l'expression de $p_3 = \omega_3$, et la substituant dans ω_1 , que nous désignerons, après la substitution, par ω_1'' , nous aurons

$$p_3 = a_3 e^{-7x_1} - \frac{1}{7}a_1 e^{-x_1} = \omega_3, \quad p_2 = \omega_2, \quad p_1 = \omega_1''.$$

La fonction f_3 devra être déterminée comme intégrale des équations linéaires simultanées

$$(p_3 - \omega_3, f_3) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_3) = 0, \quad (p_1 - \omega_1'', f_3) = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations se ramène à celle du système d'équations

$$\frac{dx_3}{1} = \frac{dx_4}{\frac{\partial \omega_3}{\partial p_3}} = \frac{dx_5}{\frac{\partial \omega_3}{\partial p_4}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial \omega_3}{\partial x_4}}.$$

L'équation $\frac{dp_4}{dx_3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = 0$ donne l'intégrale

$$\psi = p_4 = \text{const.}$$

En la substituant dans la seconde des équations linéaires précédentes, on trouve identiquement

$$(p_2 - \omega_2, \psi) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_4} = 0.$$

En substituant ψ au lieu de f_3 dans la troisième de ces mêmes équations, il vient

$$(p_1 - \omega_1'', \psi) = \psi_1 = \frac{\partial \omega_1''}{\partial x_4} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_4},$$

à cause de $\frac{\partial \omega_2}{\partial x_4} = 0$, $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_4} = 0$; d'où $\psi_1 = -p_5$. En substituant maintenant ψ_1 à f_3 dans la même équation, il vient

$$(p_1 - \omega_1, \psi_1) = \psi_2 = -\frac{\partial \omega_1''}{\partial x_5} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x_5} = (p_2 - p_3)p_5 + \frac{p_5^2}{2} \\ = -a_1 e^{-x_1} \psi_1 + \frac{\psi_1^2}{2}.$$

Par conséquent, la fonction cherchée f_3 s'obtient comme intégrale première de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 \psi}{dx_1^2} + a_1 e^{-x_1} \frac{d\psi}{dx_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dx_1} \right)^2 = 0.$$

Si l'on multiplie le premier membre de cette équation par le facteur $\frac{d\psi}{dx_1}$, on le transforme en une différentielle exacte, dont l'intégrale donne une intégrale première de l'équation, et par suite on a la valeur

$$f_3 = \log \frac{d\psi}{dx_1} - a_1 e^{-x_1} = \text{const.}$$

En y remplaçant $\frac{d\psi}{dx_1}$ par ψ_1 , on trouve

$$f_3 = \log \frac{\psi_1}{\psi} - a_1 e^{-x_1} = \log \left(-\frac{p_5}{p_2} \right) - a_1 e^{-x_1} = \text{const.}$$

Tirons de la valeur $p_4 = \omega_4$, et substituons-la dans ω_1'' , qui devient alors ω_1''' . On a

$$p_4 = e^{-\cos x_1} p_1 e^{-x_1}, p_2 = a_2 e^{-a_1 x_1}, p_3 = \omega_4.$$

$$p_3 = \omega_3, p_2 = \omega_2, p_1 = \omega_1''.$$

On déterminera la fonction f_4 comme intégrale commune des équations linéaires simultanées

$$(p_4 - \omega_4, f_4) = 0, (p_3 - \omega_3, f_4) = 0,$$

$$(p_2 - \omega_2, f_4) = 0, (p_1 - \omega_1'', f_4) = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations dépend du système

$$\frac{dx_4}{1} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial p_4}{\partial p_3}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial p_4}{\partial x_3}},$$

dont une des équations

$$\frac{dp_3}{dx_4} = \frac{\partial \omega_4}{\partial x_3} = 0$$

a pour intégrale

$$\theta = p_3 = \text{const.}$$

Substituant cette expression au lieu de f_4 dans les autres équations linéaires, les résultats de la substitution dans la seconde et dans la troisième se réduisent identiquement à zéro, et la quatrième donne

$$(p_1 - \omega_1'', \theta) = \frac{\partial \omega_1''}{\partial x_2} = - (p_2 - \omega_2) p_3 - \frac{p_3^2}{p_4} \\ = - a_1 e^{-x_1} \theta - \frac{1}{a_2} e^{a_1 x_1} \theta = \theta_1.$$

Donc la valeur de f_4 sera déterminée comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\theta}{dx_1} + (a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_2} e^{a_1 x_1}) \theta = 0,$$

d'où l'on conclut

$$f_4 = \log \theta - a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_2} \int e^{a_1 x_1} dx_1 = \text{const.}$$

De là résulte

$$p_6 = a_4 \left(e^{a_1 x_1} - \frac{1}{a_2} \int e^{a_1 x_1} dx_1 \right),$$

et par suite

$$p_4 = a_2 a_3 e^{-\frac{1}{a_3} \int e^{a_1 x_1} dx_1};$$

on a, de plus,

$$p_3 = a_3 e^{-x_1}, -\frac{1}{3} a_1 e^{-x_1},$$

$$p_2 = a_2 e^{-x_1} + \frac{2}{3} a_1 e^{-x_1},$$

et enfin

$$p_1 = -7(x_2 + x_3) a_2 e^{-x_1} - \frac{a_1}{3} (2x_2 - x_3) e^{-x_1},$$

$$-a_4 \left\{ x_4 + \left(a_1 e^{-x_1} + \frac{1}{a_2} e^{a_1 x_1} \right) x_3 \right\} e^{a_1 x_1} - \frac{1}{a_3} \int e^{a_1 x_1} dx_1.$$

En substituant ces valeurs de $p_1, \dots, p_6$ dans l'expression $p_1 dx_1 + \dots + p_6 dx_6$, on devra obtenir une différentielle exacte; et en effet, en intégrant cette expression, on trouve l'intégrale complète du problème sous la forme

$$z = \frac{a_1}{3} (2x_2 - x_3) e^{-x_1} + a_2 (x_2 + x_3) e^{-x_1}, \\ + a_4 \left(a_3 x_4 + x_3 e^{a_1 x_1} \right) e^{-\frac{1}{a_3} \int e^{a_1 x_1} dx_1} + \text{const.}$$

Nous nous bornerons ici à cet exemple simple, d'autant que, dans ce qui va suivre, nous considérerons l'application des principes contenus dans la théorie de Jacobi à des questions plus générales, dont les exemples particuliers conduiront à employer les mêmes méthodes d'intégration.

Chapitre VI.

Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

§. 23.

90. La méthode que nous avons exposée ramène le problème de l'intégration d'une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre à l'intégration de plusieurs systèmes,

de forme particulière, d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, compatibles entre elles. Jacobi ne s'est pas occupé de la question générale de l'intégration de plusieurs équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre et de forme quelconque; mais il s'est borné au cas particulier qu'il a rencontré, et dans lequel, suivant la remarque qu'il a faite (Nova methodus, § 18), on peut employer pour les intégrations une méthode artificielle, fondée principalement sur le Théorème I du § 17. Et cependant il ne restait que peu de chose à ajouter pour arriver à la solution complète de la question générale. Bour a montré, en effet, dans son Mémoire „Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre“ (Journal de l'École Polytechnique, 39^e Cahier), que l'intégration des équations simultanées de forme quelconque aux dérivées partielles du premier ordre se ramène très-simplement à l'intégration d'équations simultanées de la forme de celles auxquelles Jacobi a limité ses recherches.

Pour envisager d'un point de vue commun les questions de l'intégration d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre, revenons en quelques mots sur la signification primitive du premier de ces deux problèmes, lequel, d'après son étendue, forme un cas particulier du second, tandis que, d'après la méthode de résolution, le second est renfermé comme cas plus simple dans le premier.

91. Une fonction inconnue z des variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$ peut être déterminée, lorsqu'on donne les expressions de toutes ses dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

en fonction des variables indépendantes $x_1, \dots, x_n$. Pour cela, il faut seulement s'assurer que les expressions données de $p_1, \dots, p_n$ conviennent aux dérivées partielles d'une même fonction, c'est-à-dire qu'elles satisfont aux conditions

$$(1) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i et de k prises dans la série 1, 2, ..., n .

Dans le cas où ces conditions sont satisfaites, la fonction z s'obtient en intégrant l'expression de sa différentielle

$$(2) \quad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n.$$

92. Si, au lieu des valeurs explicites de $p_1, \dots, p_n$, en fonction des variables indépendantes, on donne n équations

$$(3) \quad H = 0, \quad H_1 = 0, \dots, \quad H_{n-1} = 0,$$

dont les premiers membres sont des fonctions de $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, il existe alors des caractères analytiques généraux pour reconnaître si l'on peut résoudre algébriquement ces équations par rapport aux n inconnues $p_1, \dots, p_n$, et si les expressions de ces quantités vérifient les conditions (1).

Si une ou plusieurs des fonctions $H, H_1, \dots, H_{n-1}$ sont exprimables au moyen des autres et des variables $x_1, \dots, x_n$, alors ou les équations (3) sont insuffisantes pour la détermination des inconnues $p_1, \dots, p_n$, ou elles sont contradictoires. Supposons, en effet, que l'on ait

$$H_i = \varphi(x_1, \dots, x_n, H, H_1, \dots).$$

En vertu des équations données, nous aurons

$$H_i = \varphi(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = 0.$$

Si cette relation est identique, il faudra alors supprimer une unité du nombre des équations données, qui deviennent alors insuffisantes pour la détermination des n inconnues $p_1, \dots, p_n$. Si la relation $\varphi = 0$ n'est pas identique, alors elle contredit l'hypothèse de l'indépendance des variables $x_1, \dots, x_n$.

Nous avons établi plus haut (§ 3) le caractère analytique indiqué par Jacobi, et d'après lequel on peut toujours juger si parmi les fonctions $H, \dots, H_{n-1}$ il s'en trouve quelque une qui soit dans le cas de celle que nous désignons tout à l'heure par H_i . Pour cela, en considérant $H, \dots, H_{n-1}$ comme des fonctions des seules variables $p_1, \dots, p_n$, on formera le déterminant fonctionnel

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Si Δ se réduit identiquement à zéro, alors une ou plusieurs des équations $H = 0, \dots, H_{n-1} = 0$ sont contradictoires avec les autres, ou bien identiques avec les autres.

93. Mais supposons que Δ ne soit pas nul; alors se présente

cette seconde question: les expressions de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (3), satisfaisent-elles aux conditions (1)?

Supposons que les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (3), vérifient les conditions (1). En remettant ces valeurs à la place de $p_1, \dots, p_n$ dans les équations (3), on changera celles-ci en identités. Si l'on prend deux des identités ainsi obtenues,

$$H_i = 0, \quad H_k = 0,$$

et qu'on les traite exactement comme nous avons traité, au §. 11, les identités

$$F_i = a_i, \quad F_k = a_k,$$

nous en concluons de la même manière que les fonctions H_i, H_k doivent satisfaire à la condition

$$(5) \quad (H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $0, 1, \dots, n-1$ des indices i et k .

Réciproquement, si les conditions (5) sont satisfaites, alors, en vertu du Théorème II du §. 17, nous en concluons que les expressions de $p_1, \dots, p_n$, tirées des équations (3), satisfont à la condition (1); par conséquent, il n'y aura qu'à les substituer dans l'expression (2), dont l'intégration donnera la fonction z *).

94. Remarquons que les conditions (5) peuvent être satisfaites ou identiquement, ou en vertu de quelques-unes des équations données (3): Dans le premier cas, il est évident qu'au lieu des équations données (3) on aurait pu prendre des équations plus générales, en écrivant dans leurs seconds membres des constantes arbitraires à la place de zéro. Dans le second cas, on ne pourra généraliser de cette manière que celles des équations (3) qui n'auront pas été prises en considération pour la vérification des équations (5).

95. La question précédente, qui est entièrement déterminée,

devient indéterminée si, au lieu du système complet des n équations (3), on n'a qu'un système incomplet de m équations entre les dérivées partielles du premier ordre, en supposant $m < n$. Le cas de $m = 1$ constitue le problème de l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre. Nous avons vu plus haut que la solution de ce problème, considéré au point de vue théorique, est toujours possible, c'est-à-dire que, étant donnée l'équation

$$H = 0,$$

entre les variables $x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_n$, on peut toujours déterminer $n-1$ autres équations entre les mêmes variables,

$$H_1 = \text{const.} = a_1, \dots, \quad H_{n-1} = \text{const.} = a_{n-1},$$

dont les premiers membres satisfassent à la condition

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $0, 1, \dots, n-1$ des indices i et k .

Si l'on suppose maintenant que le nombre m des équations données aux dérivées partielles du premier ordre soit plus grand que l'unité, on arrive alors à la question de l'intégration simultanée de plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il est facile de voir que, pour un même nombre de variables indépendantes, non-seulement ce nouveau problème n'est pas plus compliqué que le premier, mais encore il est plus simple; et que la théorie de la résolution du second problème découle tout naturellement de la méthode de résolution du premier.

96. La différence essentielle entre les deux questions consiste en ce que, dans le cas d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, l'intégration est toujours possible, et que la théorie générale de cette intégration ne limite en rien le choix de l'équation proposée; tandis que, dans le cas où l'on donne plusieurs équations aux dérivées partielles du premier ordre, elles n'admettent une intégrale commune que lorsqu'elles remplissent certaines conditions.

En effet, si l'on choisit arbitrairement m équations

$$(6) \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \dots, \quad H_m = 0,$$

entre les variables $x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_n$, il pourra exister entre elles deux sortes de cas d'incompatibilité: incompatibilité algébrique et incompatibilité d'intégration. Le premier cas a lieu,

*) Bour, dans son Mémoire cité plus haut, donne constamment à la condition (5) le nom de Théorème de Lioville, et ajoute même que ce géomètre a démontré ce théorème dans le cours qu'il a professé en 1853 au Collège de France. D'autre part, dans le Mémoire de Dunkin: „On a class of differential Equations, etc“, publié dans les Philosophical Transactions (1854, Part I), nous trouvons ce même théorème (Theorem 12, p. 83) mentionné (p. 71) parmi les résultats nouveaux obtenus par l'Auteur.

lorsqu'une ou plusieurs des fonctions $H_1, \dots, H_m$ s'expriment en fonction des autres et des variables $x_1, \dots, x_n$; alors une ou plusieurs des équations (6) ou seront des identités, ou seront contradictoires avec les autres.

Si les équations données ne sont pas affectées de cette cause d'incompatibilité, il faut encore s'assurer si elles appartiennent à un système de n équations d'où l'on puisse tirer pour $p_1, \dots, p_n$ des valeurs vérifiant les conditions (1); c'est-à-dire s'assurer s'il est possible d'obtenir une intégrale satisfaisant simultanément aux équations données. Pour cela, il n'y aura qu'à examiner si, pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, m$ des indices i et k , les conditions

$$(7) \quad (H_i, H_k) = 0$$

peuvent être satisfaites et de quelle manière elles peuvent l'être.

97. Si les équations (7) sont satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations données (6), alors l'intégrale qui satisfait à chacune de ces dernières, et qui renferme dans son expression, outre les variables indépendantes, $n-m+1$ constantes arbitraires, se trouvera par les procédés que nous avons exposés en traitant de l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, pour résoudre le problème de cette manière, il suffira de compléter le système donné par $n-m$ équations

$$(8) \quad H_{m+1} = \text{const.} = a_1, \quad H_{m+2} = \text{const.} = a_2, \dots, \\ H_n = \text{const.} = a_{n-m},$$

dont les premiers membres représentent des fonctions indépendantes entre elles de $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, lesquelles devront être déterminées de manière à satisfaire à la condition

$$(H_i, H_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $i=1, 2, \dots, n$, et $k=m+1, m+2, \dots, n$.

D'après cela, la fonction H_{m+1} peut être déterminée par la méthode exposée au §. 18, comme intégrale commune du système des m équations linéaires

$$(H_1, H_{m+1}) = 0, \quad (H_2, H_{m+1}) = 0, \dots, \quad (H_m, H_{m+1}) = 0.$$

On déterminera de la même manière les premiers membres des autres équations (8); et ces équations, jointes aux équations données, feront connaître les valeurs de $p_1, \dots, p_n$, lesquelles renfermeront $n-m$ constantes arbitraires. Par suite, l'intégrale cherchée z contiendra $n-m+1$ constantes arbitraires.

98. Si la méthode précédente se trouve inapplicable (dans les circonstances indiquées dans les Remarques du §. 18, art. 49 et 51), ou si, pour d'autres motifs, on veut ramener les équations qu'il faut intégrer à contenir le moindre nombre possible de variables; on exprimera alors, à l'aide des équations (6), $p_1, \dots, p_m$ en fonction de $p_{m+1}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$. Soient

$$p_1 = \omega_1, \quad p_2 = \omega_2, \dots, \quad p_m = \omega_m$$

les expressions trouvées.

Observerons qu'en vertu du Théorème III (§. 17) on doit avoir les identités

$$(9) \quad (p_i - \omega_i, p_i - \omega_i) = 0,$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, m$ des indices i et k .

Pour déterminer ensuite l'équation

$$f_1(p_{m+1}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n) = \text{const.} = a_1,$$

qui doit fournir la valeur $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, (ω_{m+1} représentant une fonction de $p_{m+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a_1$), formons le système des m équations linéaires simultanées

$$(p_1 - \omega_1, f_1) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f_1) = 0, \dots, \quad (p_m - \omega_m, f_1) = 0,$$

où le nombre des variables est $2(n-m)+1$. Leur intégrale commune pourra se trouver, à l'aide des identités (9), par la méthode exposée au §. 21.

Ayant déterminé la valeur $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, substituons-la dans les fonctions $\omega_1, \dots, \omega_m$; en désignant par $\omega'_1, \dots, \omega'_m$ ce que deviendront ces fonctions après la substitution, nous formerons le système des $m+1$ équations linéaires simultanées

$$(p_1 - \omega'_1, f_2) = 0, \quad (p_2 - \omega'_2, f_2) = 0, \dots, \\ (p_m - \omega'_m, f_2) = 0, \quad (p_{m+1} - \omega_{m+1}, f_2) = 0,$$

entre $2(n-m)-1$ variables. Leur intégrale commune f_2 donnera l'équation

$$f_2(p_{m+2}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, a_1) = \text{const.} = a_2,$$

d'où l'on tirera la valeur de p_{m+2} . Et ainsi de suite.

99. De cette manière, dans la détermination successive des $n-m$ intégrales demandées

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \dots, \quad f_{n-m} = a_{n-m},$$

le nombre des équations linéaires simultanées va en augmentant chaque fois d'une unité, tandis que le nombre des variables qui y entrent va en diminuant de deux unités. Il est évident qu'en procédant ainsi, l'intégrale commune des équations (6) que l'on obtiendra renfermera dans son expression un nombre de constantes arbitraires égal au nombre des variables indépendantes, moins le nombre des équations données diminué de l'unité, c'est-à-dire égal à $n-m+1$.

Une telle intégrale commune des équations (6) peut être appelée l'intégrale complète. On peut former par son moyen l'intégrale la plus générale, renfermant une fonction arbitraire de $n-m$ quantités variables, en se servant de la variation des constantes arbitraires (§§. 2-4).

On voit, par ce qui précède, que l'intégration des m équations simultanées (6), qui satisfont aux conditions (7), se fait en opérant exactement comme lorsqu'on veut achever l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$H_1 = 0,$$

après avoir déjà trouvé, au moyen de cette équation, les $n-1$ équations

$$H_2 = 0, H_3 = 0, \dots, H_m = 0,$$

satisfaisant aux conditions (7), et qu'on demande de déterminer encore les $n-m$ équations restantes

$$H_{m+1} = a_1, \dots, H_n = a_{n-m}.$$

A ce point de vue, il est clair que le problème de l'intégration simultanée de plusieurs équations est plus simple que le problème de l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, pour un même nombre de variables indépendantes, puisque le premier n'exige qu'une partie des calculs nécessaires pour la solution du second.

100. Examinons maintenant dans quels cas les équations proposées (6) sont incompatibles au point de vue de l'intégration, c'est-à-dire n'admettent pas d'intégrale commune; dans quelles circonstances il peut rester de l'incertitude sur leur compatibilité, et comment on doit procéder alors pour obtenir la solution la plus complète (c'est-à-dire renfermant le plus grand nombre possible de constantes arbitraires), si cette solution est possible.

Les équations (6) sont incompatibles, si les conditions (7) ne

peuvent être satisfaites ni identiquement, ni en vertu des équations données, ni en vertu des $n-m$ équations qui sont encore inconnues et qu'il faudrait trouver pour compléter le système donné (6). Ce cas aura lieu évidemment lorsqu'une ou plusieurs des expressions (H_i, H_k) , qui entrent dans les conditions (7), se réduisent à des constantes quelconques différentes de zéro, ou à des fonctions de $x_1, \dots, x_n, H_1, \dots, H_m$, ne s'annulant pas en vertu des équations données.

Mais si quelques-unes des expressions qui entrent dans les conditions (7) sont de la forme

$$(H_i, H_k) = H_{m+1}, \dots, (H_i, H_k) = H_{m+l},$$

$H_{m+1}, \dots, H_{m+l}$ désignant des fonctions qui renferment non-seulement $x_1, \dots, x_n, H_1, \dots, H_m$, mais encore $p_1, \dots, p_n$, et qui ne s'annulent pas en vertu des équations données (6); alors on n'a plus le droit d'affirmer que les équations données soient incompatibles; car les fonctions $H_{m+1}, \dots, H_{m+l}$ peuvent s'annuler en vertu de quelques-unes des $n-m$ équations, encore inconnues, qui doivent compléter le système donné (6).

Pour qu'il en soit effectivement ainsi, il suffit d'admettre que les équations

$$H_{m+1} = 0, \dots, H_{m+l} = 0$$

fassent partie des $n-m$ équations inconnues. Or, en ajoutant de cette manière au système donné (6) l nouvelles équations, il faudra soumettre celles-ci à la même épreuve à laquelle on a dû soumettre les premières, c'est-à-dire examiner de quelle manière on peut satisfaire aux conditions

$$(H_i, H_k) = 0$$

pour les indices $i=1, 2, \dots, m+l$, et $k=m+1, \dots, m+l$.

101. Le calcul des expressions qui entrent dans ces conditions forme la partie laborieuse de la méthode que nous exposons; par conséquent, il n'est pas inutile de remarquer que le Théorème I du §. 17 peut épargner une partie notable de ce calcul. Si l'on désigne par j un des nombres $1, 2, \dots, m$, on a, en vertu de ce théorème,

$$(H_j, H_{m+1}) = [H_j, (H_i, H_k)] = -[H_i, (H_j, H_j)] - [H_i, (H_j, H_k)];$$

par conséquent, si, dans la vérification des conditions (7), on a déjà trouvé $(H_i, H_j) = 0$, $(H_j, H_i) = 0$, il est évident, sans nouveau calcul, que l'on aura aussi

$$(H_j, H_{n+1}) = 0.$$

102. Supposons qu'en appliquant une ou plusieurs fois le procédé que nous venons d'indiquer, on ait ajouté au système donné (6) un certain nombre r d'équations. On devra se trouver alors dans un des trois cas suivants:

1°. Le nombre $m+r$ est égal à n , et les conditions $(H_i, H_k) = 0$ ne sont pas encore satisfaites pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, m+r$ des indices i et k . Alors les équations proposées (6) ne pourront avoir une intégrale commune.

2°. Le nombre $m+r$ est moindre que n ; mais une ou plusieurs des expressions qui entrent dans les conditions précédentes se réduisent à des constantes ou à des fonctions de $x_1, \dots, x_n, H_1, \dots, H_{m+r}$, différentes de zéro. Alors les équations proposées sont encore incompatibles.

3°. Le nombre $m+r$ n'est pas plus grand que n , et toutes les conditions précédentes sont satisfaites. Alors, par la méthode exposée plus haut, on pourra déterminer une intégrale commune des équations (6), renfermant $n-m-r+1$ constantes arbitraires.

103. Après l'aperçu que nous venons de donner et qui renferme la théorie générale de la résolution des problèmes déterminés et indéterminés aux dérivées partielles du premier ordre, il reste encore à compléter cette théorie par quelques remarques et à l'éclaircir par des exemples.

Nous avons considéré les équations aux dérivées partielles du premier ordre avec une certaine restriction dans leur forme, savoir, en supposant que la fonction inconnue z n'entrait pas dans ces équations par elle-même, mais seulement par ses dérivées partielles $p_1, \dots, p_n$. Si la fonction z entre elle-même dans les équations proposées, ce cas pourra se ramener au précédent, au moyen de la transformation indiquée au §. 14. En effet, si l'on met l'intégrale z sous la forme d'une fonction implicite donnée par l'équation

$$(a) \quad Y(x_1, \dots, x_n, z) = 0,$$

et qu'on différencie cette équation, il vient

$$(b) \quad p_m = -\frac{\frac{\partial Y}{\partial x_m}}{\frac{\partial Y}{\partial z}} = -\frac{q_m}{q_{n+1}}, \text{ en posant } q_m = \frac{\partial Y}{\partial x_m}, q_{n+1} = \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

La substitution des valeurs de p_m , pour $m = 1, 2, \dots, n$, dans les équations données ramènera celles-ci à une forme telle, qu'elles renfermeront les $n+1$ variables indépendantes $x_1, \dots, x_n, z$, et les dérivées partielles $q_1, \dots, q_n, q_{n+1}$ de la fonction Y , laquelle n'entra pas elle-même dans ces équations. Lorsqu'on aura obtenu une intégrale des équations transformées, alors, en rejetant la constante qui y entre par simple addition et égalant cette intégrale à zéro, on aura une équation qui donnera une valeur de z satisfaisant aux équations non transformées, d'après ce qui a été démontré à la fin du §. 14.

104. Comme exemple d'application du théorème de Liouville ou de Donkin à des problèmes déterminés aux dérivées partielles du premier ordre, prenons la question géométrique suivante:

Considérons la ligne dont l'équation en coordonnées polaires est

$$(1) \quad r = F(\sin \theta, \cos \theta),$$

θ étant l'angle polaire et r le rayon vecteur, et en chaque point de cette ligne élevons une perpendiculaire au rayon vecteur correspondant. On demande de trouver la trajectoire orthogonale de ces perpendiculaires, c'est-à-dire la courbe à laquelle ces perpendiculaires sont normales.

En prenant le pôle pour origine des coordonnées rectangulaires x, y , et l'axe polaire pour axe des x , l'équation d'une de ces perpendiculaires sera

$$(2) \quad x \cos \theta + y \sin \theta = F(\sin \theta, \cos \theta).$$

L'équation de la trajectoire cherchée donnera y en fonction de x , ou vice versa. Les tangentes des angles que font avec l'axe des x la normale à la courbe cherchée et la droite (2) ont respectivement pour expressions

$$-\frac{dx}{dy}, \quad -\frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

ces tangentes devant être égales, l'équation différentielle du problème sera

$$(3) \quad \sin \theta \cdot dx - \cos \theta \cdot dy = 0.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à exprimer $\sin \theta$ et $\cos \theta$ en x et y , au moyen de l'équation (2), et à intégrer l'équation à deux variables (3). Mais il est aisé de voir que, quelle que soit la

fonction F , $\sin \theta$ et $-\cos \theta$ doivent s'exprimer en x et y de telle manière que la condition

$$\frac{\partial \sin \theta}{\partial y} + \frac{\partial \cos \theta}{\partial x} = 0$$

soit satisfaite, d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (3) forme une différentielle exacte. En effet, en faisant, pour abréger,

$$\sin \theta = p, \quad \cos \theta = -q,$$

écrivons l'équation (2) sous la forme

$$-qx + py - F(p, -q) = 0,$$

équation à laquelle nous pourrions joindre encore la suivante,

$$p^2 + q^2 - 1 = 0.$$

En désignant respectivement par φ et ψ les premiers membres de ces équations, il est aisé de s'assurer que la condition

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

est identiquement satisfaite. Par conséquent,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Prenons le cas particulier où la fonction F se réduit à une constante a ; alors l'équation de la courbe donnée, $r = a$, représente un cercle. Le système des perpendiculaires est celui des tangentes au cercle, et leur trajectoire orthogonale est la développante du cercle. Les équations qui déterminent p et q sont

$$-qx + py - a = 0, \quad p^2 + q^2 - 1 = 0;$$

en les résolvant, on trouve

$$p = \frac{ay \pm x\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 + y^2}, \quad q = \frac{-ax \pm y\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 + y^2}.$$

Partant, l'équation (3) prend la forme

$$\frac{ay \pm x\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 + y^2} dx + \frac{-ax \pm y\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 + y^2} dy = 0,$$

et le premier membre de cette équation doit être une différentielle exacte. En effet, on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{y dx - y dy}{x^2 + y^2} \pm \frac{(x dx + y dy) \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 + y^2} = a \cdot d \arctang \frac{x}{y} \pm \frac{d \cdot (x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} = 0,$$

ou, en posant

$$\arctang \frac{x}{y} = v, \quad x^2 + y^2 - a^2 = u^2,$$

$$u dv \pm \frac{u^2 du}{u^2 + a^2} = 0.$$

Or

$$\int \frac{u^2 du}{u^2 + a^2} = u - a \arctang \frac{u}{a}.$$

Donc l'intégrale de l'équation précédente est

$$av \pm u \mp a \arctang \frac{u}{a} = \text{const.},$$

ou

$$a \arctang \frac{x}{y} \pm \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \mp a \arctang \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a} = \text{const.}$$

106. Prenons maintenant un problème indéterminé aux dérivées partielles du premier ordre. Supposons que l'on demande de déterminer l'intégrale commune des deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_2 x_4, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_4} = x_1 x_3.$$

En posant

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = p_3, \quad \frac{\partial z}{\partial x_4} = p_4,$$

nous écrivons les équations de cette manière,

$$H_1 = p_1 p_3 - x_2 x_4 = 0, \quad H_2 = p_2 p_4 - x_1 x_3 = 0.$$

Pour essayer leur compatibilité, formons l'expression

$$(H_1, H_2) = \begin{vmatrix} 0, & -x_3 \\ p_3, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_4, & 0 \\ 0, & p_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -x_1 \\ p_1, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2, & 0 \\ 0, & p_2 \end{vmatrix} = x_3 p_3 - x_4 p_4 + x_1 p_1 - x_2 p_2.$$

Cette expression ne se réduit pas à zéro en vertu des équations données; mais elle peut s'annuler en vertu des équations encore

inconnues. Pour qu'il en soit réellement ainsi, supposons qu'une des deux équations encore inconnues soit

$$H_3 = x_1 p_1 - x_2 p_2 + x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

La condition (H_1, H_2) est maintenant remplie, et il reste à examiner si les expressions

$$(H_1, H_3) = \begin{vmatrix} 0, & p_1 \\ p_3, & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_2, & -p_2 \\ 0, & -x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & p_3 \\ p_1, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_3, & -p_4 \\ 0, & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$= -p_1 p_3 + x_2 x_4 - p_1 p_3 + x_2 x_4 = -2H_1,$$

$$(H_2, H_3) = \begin{vmatrix} -x_3, & p_1 \\ 0, & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -p_2 \\ p_4, & -x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1, & p_3 \\ 0, & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & -p_4 \\ p_3, & -x_4 \end{vmatrix}$$

$$= -x_1 x_3 + p_3 p_4 - x_1 x_3 + p_3 p_4 = 2H_2,$$

peuvent se réduire à zéro.

Or, il est évident qu'elles s'annulent en vertu des équations données; donc les équations

$$H_1 = 0, H_2 = 0, H_3 = 0$$

sont compatibles et admettent une intégrale commune, qui contiendra dans son expression la plus complète $4-3+1=2$ constantes arbitraires. Passons à la détermination de cette intégrale.

Pour ramener au plus petit nombre possible de variables les équations à intégrer, résolvons les équations précédentes par rapport à p_1, p_2, p_3 . Des équations $H_1 = 0, H_2 = 0$ on tire

$$p_1 = \frac{x_2 x_4}{p_3}, \quad p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $H_3 = 0$, on obtient, pour la détermination de p_4 , une équation du second degré un peu compliquée. Par suite, il est préférable de calculer une de ses racines (ce qui nous suffira), de la manière suivante. Multipliant entre elles les équations données

$$p_1 p_3 = x_2 x_4, \quad x_1 x_3 = p_2 p_4,$$

il vient

$$p_1 x_1 \cdot p_3 x_3 = p_2 x_2 \cdot p_4 x_4$$

d'où l'on tire

$$\frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{p_4 x_4}{p_3 x_3} = \frac{p_1 x_1 - p_2 x_2}{p_2 x_2 - p_3 x_3}.$$

Or, d'après l'équation $H_3 = 0$, on a

$$p_2 x_2 - p_3 x_3 = p_1 x_1 - p_4 x_4;$$

donc

$$p_3 = \frac{p_4 x_4}{x_3} = \omega_3.$$

Mettant cette valeur dans l'expression de p_1 , il vient

$$p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4} = \omega_1;$$

on a, de plus,

$$p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_4} = \omega_2.$$

Pour déterminer ensuite l'équation

$$f(p_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{const.},$$

qui doit fournir l'expression de p_4 au moyen des variables indépendantes, il faudra intégrer simultanément les trois équations linéaires

$$(p_1 - \omega_1, f) = 0, \quad (p_2 - \omega_2, f) = 0, \quad (p_3 - \omega_3, f) = 0.$$

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires correspondants aux deux premières de ces équations linéaires sont

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_4}{x_2 x_3} = \frac{dp_4}{p_4^2}, \quad \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{x_1 x_3} = \frac{dp_4}{p_4^2}.$$

Par suite, l'intégrale $\varphi = p_4 = \text{const.}$ sera commune aux deux premières équations linéaires. En la mettant dans la troisième à la place de f , on aura.

$$(p_3 - \omega_3, \varphi) = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_4} = \frac{p_4}{x_3} = \frac{\varphi}{x_3} = \varphi_1.$$

Donc l'intégrale commune aux trois équations linéaires s'obtiendra par l'intégration de l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx_3} - \frac{1}{x_3} \varphi = 0,$$

et sera

$$\log \varphi - \log x_3 = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{p_4}{x_3} = \text{const.} = \alpha.$$

Par conséquent,

nérale, renfermant une fonction arbitraire de $n-m-r$ fonctions données.

108. La marche du calcul de l'intégrale complète a été exposée précédemment dans un cas plus général celui des équations simultanées non linéaires, et elle s'applique ici sans modification. Pour montrer seulement l'application de la nouvelle forme des conditions d'intégrabilité, prenons un exemple particulier: Trouver, s'il est possible, une intégrale satisfaisant simultanément aux deux équations linéaires

$$H_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + (t + xy + xu) \frac{\partial z}{\partial u} + (y + u - 3x) \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

$$H_2 = \frac{\partial z}{\partial y} + (xut + y - xy) \frac{\partial z}{\partial u} + (ut - y) \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Pour essayer leur compatibilité, représentons par $A(z)$ et $B(z)$ les premiers membres de ces équations, et formons l'expression

$$\begin{aligned} (H_2, H_1) = & [A(0) - B(1)] \frac{\partial z}{\partial x} + [A(1) - B(0)] \frac{\partial z}{\partial y} \\ & + [A(xut + y - xy) - B(t + xy + xu)] \frac{\partial z}{\partial u} \\ & + [A(ut - y) - B(y + u - 3x)] \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont nuls; pour calculer les autres, on trouve

$$A(xut - y - xy) = ut - y + (t + xy + xu)xt + (y + u - 3x)xu,$$

$$B(t + xy + xu) = x + (xut + y - xy)x + ut - y,$$

$$A(ut - y) = (t + xy + xu)t + (y + u - 3x)u,$$

$$B(y + u - 3x) = 1 + (xut + y - xy).$$

En portant ces valeurs dans les coefficients de l'expression précédente, on la ramène à la forme

$$(xyt + t^2 + u^2 + yu - 3xu + xy - y - 1)(x \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t}).$$

Il est clair, d'après cela, que la condition $(H_2, H_1) = 0$ sera satisfaite, si l'on pose

$$H_3 = x \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

En représentant le premier membre de cette dernière équation par $C(z)$, il vient

$$(H_3, H_1) = [A(0) - C(1)] \frac{\partial z}{\partial x} + [A(0) - C(0)] \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ [A(x) - C(t + xy + xu)] \frac{\partial z}{\partial u} + [A(1) - C(y + u - 3x)] \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$(H_3, H_2) = [B(0) - C(0)] \frac{\partial z}{\partial x} + [B(0) - C(1)] \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ [B(x) - C(xut + y - xy)] \frac{\partial z}{\partial u} + [B(1) - C(ut - y)] \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Or on a

$$A(x) = 1, \quad C(t + xy + xu) = x^2 + 1, \quad C(y + u - 3x) = x,$$

$$B(x) = 0, \quad C(xut + y - xy) = x^2t + xu, \quad C(ut - y) = xt + u.$$

Donc

$$(H_3, H_1) = -x^2 \frac{\partial z}{\partial u} - x \frac{\partial z}{\partial t} = -xH_3,$$

$$(H_3, H_2) = -(x^2t + xu) \frac{\partial z}{\partial u} - (xt + u) \frac{\partial z}{\partial t} = -(xt + u)H_3.$$

Partant, les conditions $(H_3, H_1) = 0$, $(H_3, H_2) = 0$ sont satisfaites en vertu de l'équation $H_3 = 0$.

Ainsi les trois équations linéaires

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

remplissent toutes les conditions d'intégrabilité. Donc, conformément aux conclusions de la théorie générale, l'intégrale qui conviendra simultanément à ces trois équations devra contenir dans son expression complète deux constantes arbitraires (dont une par simple addition). De cette intégrale complète on déduira l'intégrale la plus générale, exprimée au moyen d'une fonction arbitraire d'une certaine fonction donnée.

Cherchons d'abord l'intégrale complète. En posant, pour abréger,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = p_3, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p_4,$$

déterminons, à l'aide des équations précédentes, les expressions des trois premières de ces quantités en fonction de la quatrième et des variables indépendantes. Si l'on désigne, pour abréger, ces expressions par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, on aura

$p_1 = -(3x^2 + t)p_2 = \omega_1$, $p_2 = -yp_3 = \omega_2$, $p_3 = -xp_4 = \omega_3$.
D'après cela, pour déterminer l'équation

$$f(p_4, x, y, t, u) = \text{const.},$$

qui donnera la valeur de p_4 , cherchons une intégrale commune des trois équations linéaires

$$(p_1 - \omega_1, f) = 0, (p_2 - \omega_2, f) = 0, (p_3 - \omega_3, f) = 0.$$

Les systèmes d'équations simultanées aux différentielles ordinaires correspondantes aux équations précédentes seront

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1} &= \frac{du}{\frac{\partial \omega_1}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x}}, & \frac{dy}{1} &= \frac{du}{\frac{\partial \omega_2}{\partial y}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial \omega_2}{\partial y}}, \\ \frac{dt}{1} &= \frac{du}{\frac{\partial \omega_3}{\partial p_4}} = \frac{dp_4}{\frac{\partial \omega_3}{\partial t}}. \end{aligned}$$

Or, comme on a $\frac{\partial \omega_1}{\partial u} = \frac{\partial \omega_2}{\partial u} = \frac{\partial \omega_3}{\partial u} = 0$, l'intégrale

$$f = p_4 = \text{const.} = \alpha$$

conviendra à chacun des trois systèmes d'équations simultanées et à chacune des trois équations linéaires précédentes. Par suite, les expressions des dérivées partielles de la fonction cherchée z seront

$$p_1 = -(3x^2 + t)\alpha, \quad p_2 = -y\alpha, \quad p_3 = -x\alpha, \quad p_4 = \alpha.$$

Donc

$$dz = -\alpha[(3x^2 + t)dx + ydy + xdt - du],$$

d'où l'on tire, en intégrant, l'expression de l'intégrale complète

$$z = \alpha(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}) + \text{const.}$$

Enfin, l'expression de l'intégrale la plus générale peut être donnée sous deux formes: soit au moyen des équations

$$z = \alpha(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}) + \pi(\alpha),$$

$$0 = u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2} + \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha},$$

soit au moyen de l'équation unique

$$z = \pi(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}),$$

π désignant dans les deux cas une fonction entièrement arbitraire. Il est évident que ces deux expressions de l'intégrale générale sont équivalentes entre elles.

§. 25.

109. Dans le problème précédent, nous avons fait usage de la forme particulière que prennent les conditions d'intégrabilité des équations simultanées linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Il est à-propos de signaler encore ici une autre forme de ces mêmes conditions, dont Jacobi s'est servi pour établir le Théorème fondamental I du §. 17.

Prenons deux expressions linéaires par rapport aux dérivées partielles de la fonction z ,

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n}, \\ b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ désignant des fonctions de $x_1, \dots, x_n$, et représentons la première de ces expressions par $A(z)$, la seconde par $B(z)$.

On peut considérer A et B comme des signes d'opérations complètement déterminées, et nommer la première de ces opérations l'opération A , la seconde l'opération B . En soumettant à l'opération A une fonction quelconque z des variables $x_1, \dots, x_n$, nous obtiendrons pour résultat une nouvelle fonction des mêmes variables, sur laquelle nous pourrions effectuer l'opération B . Représentons symboliquement par

$$B[A(z)]$$

le résultat de ces deux opérations successives. Si l'on exécute les mêmes opérations dans l'ordre inverse, on pourra représenter le nouveau résultat par

$$A[B(z)].$$

Voyons quelle sera, en général, la différence de ces deux résultats.

On a

$$B[A(z)] = b_1 \frac{\partial A(z)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial A(z)}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial A(z)}{\partial x_n}$$

$$= b_1 \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_n} \right. \\ \left. + a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \right\} \\ + b_2 \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_n} \right. \\ \left. + a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \right\} \\ \dots \dots \dots \\ + b_n \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \frac{\partial z}{\partial x_n} \right. \\ \left. + a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} + \dots + a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \right\}$$

no

$$B[A(z)] = B(a_1) \frac{\partial z}{\partial x_1} + B(a_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + B(a_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ + b_1 a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + b_2 a_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + b_n a_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \\ + (b_1 a_2 + b_2 a_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots + (b_1 a_n + b_n a_1) \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ + \dots + (b_{n-1} a_n + b_n a_{n-1}) \frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1} \partial x_n}.$$

En vertu de la formule démontrée plus haut (art. 109), on a

$$(a) \quad B[A(z)] - A[B(z)] \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial z}{\partial p_i} - \left[B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right) - A \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) \right] \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\}.$$

Or $A(z) = (\varphi, z)$, $B(z) = (\psi, z)$; donc

$$B[A(z)] = [\psi, (\varphi, z)], \quad A[B(z)] = [\varphi, (\psi, z)],$$

et

$$B[A(z)] - A[B(z)] = [\psi, (\varphi, z)] - [\varphi, (\psi, z)] \\ = [\psi, (\varphi, z)] + [\varphi, (z, \psi)].$$

De plus,

$$B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right), \quad -A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \varphi \right),$$

$$B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right) = \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right), \quad -A \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \varphi \right);$$

par conséquent, en vertu de la formule (4) du §. 16,

$$B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = \left(\psi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \varphi \right) = \frac{\partial (\psi, \varphi)}{\partial x_i};$$

de même

$$B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right) - A \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial (\psi, \varphi)}{\partial p_i}.$$

D'après cela, l'égalité (a) prend la forme

$$[\psi, (\varphi, z)] + [\varphi, (z, \psi)]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial (\psi, \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial p_i} - \frac{\partial (\psi, \varphi)}{\partial p_i} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\} = -[z, (\psi, \varphi)],$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$[\psi, (\varphi, z)] + [\varphi, (z, \psi)] + [z, (\psi, \varphi)] = 0.$$

112. Telle est, en substance, la démonstration que Jacobi a donnée de cette proposition (Nova Methodus, §§. 23.—26.). Mais, comme cette démonstration est étroitement liée à la théorie de l'intégration des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, j'ai cru préférable de la présenter en même temps que l'exposition de cette partie de la méthode, et j'ai donné plus haut (§. 17) une autre démonstration, qui m'a semblé n'être pas plus compliquée et se déduire immédiatement des propriétés fondamentales des expressions de la forme (φ, ψ) .

Remarquons que ce Théorème était déjà connu avant la publication de la „Nouvelle méthode“ de Jacobi. En effet, dans le Mémoire cité plus haut (§. 22) de Donkin, „On a Class of Differential Equations, etc.“, on trouve ce Théorème (page 92, Section II, §. 21), et au bas de la page 71, il est mentionné parmi les résultats trouvés pour la première fois ou démontrés d'une manière nouvelle par l'auteur.

La démonstration de Donkin pourrait plutôt être considérée comme une vérification du Théorème en question. Du reste, à cause de sa brièveté, elle peut être utile pour une exposition abrégée de la théorie de Jacobi; c'est pourquoi je pense qu'il ne sera pas superflu de la rapporter ici.

113. „Théorème. Si p, q, r sont des fonctions quelconques des $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, on a

$$(a) \quad [p, q, r] + [q, r, p] + [r, p, q] = 0.$$

„Si l'on développe cette expression, il est évident que chacun de ses termes se compose du produit d'une dérivée du second ordre de l'une des fonctions p, q, r , par des dérivées du premier ordre de chacune des deux autres fonctions.

„Considérons les termes contenant des dérivées du second ordre de p ; ils seront de l'une des formes

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial y_j} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial q}{\partial y_i} \frac{\partial r}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j},$$

i pouvant être égal à j , et chacun d'eux proviendra du premier ou du troisième terme de l'équation (a).

„En examinant maintenant chacune de ces formes, il est aisé de voir que, pour chaque terme provenant du premier terme de l'équation (a), il se trouve un terme semblable, mais affecté d'un signe contraire, provenant du troisième terme de cette équation; et comme la même chose est vraie pour les termes où entrent les dérivées secondes de q ou de r , il s'ensuit que le premier membre de l'équation (a) tout entier se réduit identiquement à zéro. Donc le Théorème est démontré.”

§. 20.

114. Considérons encore l'application de la méthode d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à la détermination des conditions d'intégrabilité immédiate

d'une expression différentielle contenant une variable indépendante, et des fonctions de cette variable avec leurs dérivées d'ordres quelconques.

Cette question, qui a été, comme on sait, résolue par Euler et par Condorcet, et dont L'exel, Lagrange, Poisson, Sarrus, Bertrand, Binet et d'autres géomètres ont fait l'objet de leurs recherches, présente une application facile et intéressante de la théorie qui nous occupe. La nouvelle méthode de solution peut être comparée, sous le rapport de la simplicité élémentaire, à celle qui a été donnée par Condorcet *) et perfectionnée par Sarrus **); et tandis qu'elle fournit absolument de la même manière les expressions des dérivées partielles du premier ordre de la fonction cherchée par rapport à toutes les variables qui y entrent, elle ramène la détermination de cette fonction à l'intégration d'une différentielle totale. Mais, avec cela, on obtient l'une après l'autre toutes les conditions qui doivent être nécessairement remplies par la fonction donnée pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une autre fonction. Si, dans le cas donné, l'existence de cette dernière fonction est démontrée impossible, on s'en aperçoit, en général, avant d'arriver à la condition connue d'Euler, laquelle s'obtient la dernière dans notre méthode. Il est à propos d'observer que cette condition est donnée, ici sous une nouvelle forme symbolique, doublement remarquable.

Pour compléter la solution d'après cette méthode, il ne resterait plus qu'à trouver un moyen simple pour démontrer que toutes les conditions nécessaires sont remplies, dès que la condition unique d'Euler est satisfaite. En l'absence d'une telle démonstration, on doit en attendant donner la préférence, pour la solution du problème proposé, aux méthodes moins directes et moins simples du Calcul des variations.

Le procédé indiqué ci-dessus est dû à Boole ***), qui présente ce problème comme exemple de l'application de la méthode

*) Dans son *Calcul intégral*. Voyez aussi **MACROIX**, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, tome II, pag. 298—249.

) *Annales de Mathématiques de GERGONNE*, tome XIV. Voyez aussi **TODHUNTER, *History of the Progress of the Calculus of Variations*, p. 523—529.

***) Dans son *Mémoire: On simultaneous Differential Equations of the first Order, etc.* (*Philosophical Transactions*, 1862, Part I, p. 453).

donnée par lui pour l'intégration des équations simultanées du premier ordre aux différentielles ordinaires, dans lesquelles le nombre des variables surpasse de plus d'une unité le nombre des équations. Mais on voit, d'après ses recherches, que cette question générale est étroitement liée avec le problème de l'intégration des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. L'Auteur, ne considérant pas ce dernier problème à ce point de vue commun, que Boole a indiqué*), applique les conditions de compatibilité des deux équations linéaires

$$H = A(z) = 0, \quad G = B(z) = 0,$$

exclusivement sous la forme

$$B[A(z)] = A[B(z)],$$

ou, suivant son mode de notation,

$$(AB - BA)z = 0.$$

A la suite de cela, dans l'application au problème considéré, il introduit toute une série de symboles, qui, tout en permettant d'exprimer la solution sous une forme très-condensée, lui ôtent cependant l'avantage de la clarté et de la simplicité désirables.

J'adopterais, en conséquence, le mode d'exposition de Bertrand, qui, dans une de ses leçons professées au Collège de France, en 1863, a remarqué que, dans l'application au problème actuel, il vaut mieux faire usage de la condition de compatibilité des équations linéaires sous la forme $(H, G) = 0$, et a fait voir comment on déduit la condition d'Euler dans le cas particulier où l'expression différentielle donnée contient une variable indépendante, une fonction de cette variable et les dérivées de cette fonction jusqu'au second ordre. Je traiterai la solution de la question sous sa forme générale, parce que, dans le cas particulier considéré par Bertrand, on n'aperçoit pas certains côtés de la question qui ne sont pas sans intérêt.

115. En représentant par x la variable indépendante, par y une fonction de cette variable, et par

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

*) Dans le *Mémoire*, cité plus haut (art. 90). Ce *Mémoire* ayant paru au même moment que le travail de Boole, il est probable que celui-ci n'en avait pas eu connaissance.

les n premières dérivées de cette fonction, soit

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

l'expression donnée, et proposons-nous ce problème:

Déterminer, s'il est possible, une fonction V des variables $x, y, y', \dots, y^{(n)}$, qui, étant différenciée par rapport à x , non-seulement en tant que x y entre explicitement, mais aussi en tant que x entre dans les fonctions $y, y', \dots, y^{(n)}$, reproduise l'expression F .

Employons la notation $\frac{dV}{dx}$ pour désigner cette dérivée totale; nous aurons

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)},$$

et l'équation fondamentale du problème sera

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Remarquons, en outre, que:

1°. Si la fonction V était déjà connue, l'équation (1) deviendrait identique, la fonction y restant complètement indéterminée. Or F ne contient pas $y^{(n+1)}$; donc le terme $\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}$, n'ayant aucun terme semblable à lui ni dans le premier, ni dans le second membre de l'équation (1), doit s'annuler de lui-même. On doit donc avoir nécessairement

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

2°. Il est évident que, si la fonction donnée F provient effectivement de la différentiation complète d'une autre fonction V par rapport à x , F doit être de forme linéaire par rapport à $y^{(n)}$, puisque cette forme est celle du premier membre de l'équation (1). Par suite, il faut que l'on ait

$$(a) \quad F = A + B y^{(n)},$$

A et B étant des fonctions de $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$; et, pour que l'équation (1) soit vérifiée identiquement pour toute valeur de y , on devra poser encore la condition

$$\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} = B,$$

B pouvant facilement s'exprimer au moyen de F . En effet, en différenciant partiellement les deux membres de l'égalité (a) par rapport à $y^{(n)}$, il vient

$$B = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}.$$

Par suite, si l'on représente, pour plus de simplicité, par

$V_x, V_y, V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n-1)}, V_{(n)}$
les dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial y'}, \frac{\partial V}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}, \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}},$$

et que l'on adopte pour les dérivées partielles de F une notation analogue; les trois équations du problème, exprimées au moyen des dérivées partielles de la fonction V , seront

$$(1) \quad H = V_x + V_y y' + V_{(1)} y'' + \dots + V_{(n-1)} y^{(n)} + V_{(n)} y^{(n+1)} - F = 0,$$

$$(2) \quad G = V_{(n)} = 0,$$

$$(3) \quad H_1 = V_{(n-1)} - F_{(n)} = 0.$$

116. Ayant ainsi trois équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, il faudra, pour les intégrer, appliquer la méthode exposée dans les paragraphes précédents. Pour cela, considérant H, G, H_1 comme des fonctions des $2(n+2)$ variables $x, V_x, y, V_y, y', V_{(1)}, \dots, y^{(n)}, V_{(n)}$, formons les expressions

$$(H, G) = V_{(n-1)} - F_{(n)},$$

$$(G, H_1) = \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H, H_1) = V_{(n-2)} + \left(\frac{\partial F_{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} \right) - F_{(n-1)}.$$

La première se réduit à zéro, en vertu de l'équation $H_1 = 0$. La seconde est identiquement égale à zéro, puisque $F_{(n)} = B$, et que B ne contient pas $y^{(n)}$, d'où il s'ensuit que

$$\frac{\partial F_{(n)}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial B}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

La troisième expression ne s'annule ni identiquement, ni en vertu des équations données; mais elle contient la dérivée partielle $V_{(n-2)}$ de la fonction cherchée. En la posant donc égale à zéro, on ajoutera aux équations données une quatrième équation

$$(H, H_1) = H_3 = 0.$$

Si l'on remarque que, dans cette équation, on a

$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = \frac{dF^{(n)}}{dx},$$

on pourra écrire cette équation sous la forme

$$H_2 = V_{(n-2)} + \frac{dF^{(n)}}{dx} - F_{(n-1)} = 0,$$

ou

$$H_2 = V_{(n-2)} - \omega_{n-2} = 0,$$

en faisant, pour abréger

$$\omega_{n-2} = F_{(n-1)} - \frac{dF^{(n)}}{dx}.$$

117. On trouve ensuite

$$(G, H) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial (F_{(n-1)} - \frac{dF^{(n)}}{dx})}{\partial y^{(n)}}.$$

$$(H_1, H_2) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n-2)}},$$

$$(H, H_2) = V_{(n-3)} + \left(\frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} \right) - F_{(n-2)}.$$

La première de ces expressions est identiquement nulle, comme on peut le démontrer, soit en se fondant sur l'égalité (a), soit, ce qui est préférable, par une autre méthode, qui s'appliquera plus tard à d'autres cas analogues, pour lesquels l'emploi de la première méthode présenterait des difficultés. En effet, par le Théorème I du §. 17, on a

$$(G, H_2) = [G, (H, H_1)] = -[H, (H_2, G)] - [H_2, (G, H)].$$

Or on a $(G, H_1) = 0$, $(H, G) = H_1$; donc

$$(G, H_2) = (H_1, H_1) = 0.$$

De plus, la valeur de (H_1, H_2) trouvée plus haut est ex-

aux dérivées partielles du premier ordre.

Ch. VI, §. 26. 423

primée en fonction des seules variables $x, y, \dots, y^{(n)}$; elle doit donc se réduire identiquement à zéro, sans quoi la solution du problème serait impossible. Ainsi nous supposons que la fonction F satisfasse à la condition

$$(H_1, H_2) = 0,$$

dont la nécessité s'aperçoit encore plus clairement, si l'on remarque qu'elle conduit à l'égalité

$$\frac{\partial V_{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{(n-1)}}{\partial y^{(n-2)}}.$$

Enfin, la valeur de (H, H_2) peut être égale à zéro, puisqu'elle renferme la dérivée partielle $V_{(n-3)}$. De cette manière, aux quatre équations précédentes nous en ajouterons une cinquième

$$H_3 = (H, H_2) = V_{(n-3)} + \frac{d\omega_{n-2}}{dx} - F_{(n-2)} \\ = V_{(n-3)} - \frac{d^2 F^{(n)}}{dx^2} + \frac{dF_{(n-1)}}{dx} - F_{(n-2)} = 0,$$

ou

$$H_3 = V_{(n-3)} - \omega_{n-3} = 0,$$

en posant

$$\omega_{n-3} = F_{(n-2)} - \frac{dF_{(n-1)}}{dx} + \frac{d^2 F^{(n)}}{dx^2}.$$

118. On obtient ensuite facilement les expressions

$$(G, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial (F_{(n-2)} - \frac{dF_{(n-1)}}{dx} + \frac{d^2 F^{(n)}}{dx^2})}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n-2)}},$$

$$(H_2, H_3) = \frac{\partial \omega_{n-3}}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-3)}},$$

$$(H, H_3) = V_{(n-4)} + \frac{d\omega_{n-3}}{dx} - F_{(n-3)}.$$

La première de ces expressions est nulle en vertu des équations établies précédemment. En effet, le Théorème I du §. 17 donne

$$(G, H_3) = [G, (H, H_2)] = -[H, (H_3, G)] - [H_3, (G, H)];$$

or $(G, H_2) = 0$, $(G, H) = -H_1$; par conséquent

$$(G, H_0) = (H_0, H_1) = 0.$$

Ensuite les valeurs de (H_1, H_0) et de (H_2, H_1) , s'exprimant au moyen des seules variables $x, y, \dots, y^{(n)}$, doivent se réduire identiquement à zéro, si la fonction cherchée V existe; et, en effet, les conditions $(H_1, H_2) = 0$, $(H_2, H_3) = 0$ n'expriment pas autre chose que les relations nécessaires pour qu'on ait les égalités

$$\frac{\partial V^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial y^{(n-3)}}, \quad \frac{\partial V^{(n-2)}}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V^{(n-2)}}{\partial y^{(n-2)}}.$$

Enfin, en égalant à zéro, l'expression (H, H_0) , on obtient une nouvelle équation, qui devient, en remplaçant ω_{n-3} par sa valeur,

$$H_0 = (H, H_0) = V^{(n-4)} - F^{(n-3)} + \frac{dF^{(n-3)}}{dx} - \frac{d^2F^{(n-1)}}{dx^2} + \frac{d^3F^{(n)}}{dx^3} = 0.$$

119. On voit maintenant comment on devra continuer à procéder pour la solution du problème qui nous occupe. Si la fonction F satisfait à toutes les conditions nécessaires, lesquelles se réduiront finalement à ce que les valeurs déterminées successivement pour les dérivées partielles satisfassent aux conditions

$$\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}};$$

on obtiendra alors, outre les équations précédentes, les équations

$$H_0 = 0, \dots, H_1 = 0, \dots, H_n = 0,$$

qui seront généralement de la forme

$$H_i = V^{(n-i)} - F^{(n-i+1)} + \frac{dF^{(n-i+2)}}{dx} - \dots - (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}F^{(n)}}{dx^{i-1}} = 0,$$

ce qui devient, pour $i = n$,

$$H_n = V - F^{(n)} + \frac{dF^{(n)}}{dx} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}F^{(n)}}{dx^{n-1}} = 0.$$

Pour décider de la compatibilité de la dernière équation avec les précédentes, posons

$$\omega_0 = F^{(1)} - \frac{dF^{(2)}}{dx} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}F^{(n)}}{dx^{n-1}},$$

et formons les expressions

$$(G, H_0) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1, H_0) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y},$$

$$(H_2, H_0) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y},$$

$$(H, H_0) = -F_y + \frac{d\omega_0}{dx}$$

$$= -F_y + \frac{dF^{(1)}}{dx} - \frac{d^2F^{(2)}}{dx^2} + \dots + (-1)^n \frac{d^n F^{(n)}}{dx^n}.$$

Toutes ces expressions sont des fonctions des seules variables $x, y, y', \dots, y^{(n)}$, et par suite doivent se réduire identiquement à zéro. Mais l'expression (G, H_0) se réduit déjà à zéro en vertu des conditions dont on a reconnu précédemment la nécessité. On a, en effet, d'après le Théorème I du §. 17,

$$(G, H_0) = [G, (H, H_{n-1})] = -[H, (H_{n-1}, G)] - [H_{n-1}, (H, G)] = [H, (G, H_{n-1})] + (H_1, H_{n-1}).$$

Donc (G, H_0) est nul, puisqu'on a $(G, H_{n-1}) = 0$, $(H_1, H_{n-1}) = 0$.

De plus, les conditions

$$(H_1, H_0) = 0, \quad (H_2, H_0) = 0, \dots, (H_{n-1}, H_0) = 0$$

sont nécessaires, pour que l'on ait les égalités

$$\frac{\partial F_y}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V^{(n-2)}}{\partial y}, \dots, \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y}.$$

120. La série précédente de toutes les conditions nécessaires, que doit remplir la fonction différentielle donnée F , est renfermée dans la condition

$$E = (H, H_0) = F_y - \frac{dF^{(1)}}{dx} + \frac{d^2F^{(2)}}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n F^{(n)}}{dx^n} = 0,$$

trouvée, comme on sait, à l'aide du Calcul des variations par Euler*, qui a démontré que cette condition était non-seulement nécessaire, mais encore suffisante*).

*) Bertrand a fait voir (Journal de l'École Polytechnique, XXXVIII Cahier, p. 250-251) que Lagrange, Poisson et d'autres géomètres se sont trompés en avançant qu'Euler n'avait pas démontré que sa condition était suffisante.

On a, en vertu de ce qui précède,

$$H_n = (H, H_{n-1}), H_{n-1} = (H, H_{n-2}), \dots, H_1 = (H, G).$$

Donc, par des substitutions très-simples, on pourra écrire la condition d'Euler sous la forme

$$[H, (H, (\dots, (H, G) \dots))] = 0,$$

H et G ayant les valeurs données dans l'art. 115.

En supposant que la fonction F remplisse toutes les conditions nécessaires, on pourra déterminer très-simplement son intégrale V . En effet, les équations

$$G = 0, H_1 = 0, \dots, H_n = 0$$

fournissent des expressions de toutes les dérivées partielles de la fonction cherchée, à l'exception d'une seule, savoir

$$V^{(n)} = 0, V^{(n-1)} = F^{(n-2)}, V^{(n-2)} = \omega_{n-2}, \dots, V_y = \omega_0.$$

En les substituant dans l'équation $H = 0$, il vient

$$V_z = F - \omega_0 y' - \dots - \omega_{n-2} y^{(n-1)} + F^{(n)} y^{(n)}.$$

Pourtant, la fonction V sera déterminée par l'intégration de la différentielle exacte

$$dV = (F - \omega_0 y' - \dots - \omega_{n-2} y^{(n-1)} - F^{(n)} y^{(n)}) dx + \omega_0 dy + \dots + \omega_{n-2} dy^{(n-2)} + F^{(n)} dy^{(n-1)}.$$

Dans les applications à des cas particuliers, il est très-commode de disposer les calculs comme l'indique le tableau suivant:

$F^{(n)},$	$\omega_{n-2}, \dots, \omega_0,$	$E,$
$F^{(n-1)}, \dots, F^{(1)},$	$F_y,$	
$-\frac{dF^{(n)}}{dx}, \dots, -\frac{dF^{(2)}}{dx},$	$-\frac{dF^{(1)}}{dx},$	
$\dots, \dots, \dots$	$\dots, \dots, \dots$	
$(-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} F^{(n)}}{dx^{n-1}}, (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} F^{(n-1)}}{dx^{n-1}},$	$(-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} F^{(n)}}{dx^{n-1}},$	

où l'on peut calculer les uns après les autres les lignes horizontales, en allant de haut en bas, ou les lignes verticales, en allant de gauche à droite. La somme des termes de la dernière

colonne à droite donne la valeur de l'expression E . Si elle est égale à zéro, alors les sommes des termes de chacune des colonnes à précédentes en remontant vers la gauche, seront respectivement les valeurs des dérivées partielles $V_y, V^{(1)}, \dots, V^{(n-1)}$.

Exemple. Soit

$$F = \varphi(x) + y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' + x^2y''.$$

En formant le tableau (A), on trouve

$x^2,$	$2xy - 1,$	$2y + 2xy',$
$-2x,$	$-1,$	$-2y - 2xy',$
$+2,$	$0,$	$0,$
0	0	0

$$V^{(2)} = x^2, V^{(1)} = -x, V_y = 2xy, E = 0.$$

Par suite,

$$V_z = F - x^2y'' + xy'' - 2xyy' = 2xyy' - y' + y^2 + \varphi(x).$$

Donc

$$dV = [2xyy' - y' + y^2 + \varphi(x)] dx + x^2dy'' - xdy' + 2xydy,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = x^2yy'' - xy' + y^2x + \int \varphi(x) dx + \text{const.}$$

121. Quoiqu'il suffise de former la seule expression E , qui entre dans la condition d'Euler, pour juger de l'intégrabilité immédiate de la fonction différentielle donnée F , cependant, comme elle est plus compliquée, que les expressions qui entrent dans toutes les autres conditions nécessaires, il est généralement plus commode d'employer ces dernières. Eclaircissons cela par un exemple.

Soit la fonction

$$F = xy'''y'V + (x + yy')y'' + \sqrt{xy'} + y.$$

Ici la première condition nécessaire, en vertu de laquelle F doit être une fonction linéaire par rapport à la dérivée la plus élevée, est remplie. Examinons si F satisfait à la condition qui vient immédiatement après. Formons, pour cela, les deux premières colonnes du tableau (A); il vient

$$xy'', \quad xy^{IV} + y'y'' + x, \\ -y''' - xy^{IV},$$

$$F^{(4)} = xy'', \quad \omega_2 = -y''' + y'y'' + x.$$

La condition nécessaire

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y''} = \frac{\partial F^{(4)}}{\partial y''} = 0$$

n'est pas remplie évidemment dans le cas actuel. Cela nous fait voir très-simplement que la fonction donnée F n'est pas immédiatement intégrable, tandis que, pour obtenir l'expression E , il aurait fallu un calcul beaucoup plus compliqué.

Remarquons, en terminant, que la méthode précédente pour obtenir la condition d'intégrabilité immédiate, peut s'étendre très-facilement au cas où la fonction différentielle donnée contient plusieurs fonctions indéterminées $y, z, u, \dots$ de la variable indépendante x , avec leurs dérivées de divers ordres. Mais cette généralisation est si simple, que je crois inutile de m'y arrêter.

Chapitre VII.

De l'intégration des systèmes canoniques d'équations simultanées aux différentielles ordinaires du premier ordre.

§. 27.

122. Un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre entre une variable indépendante t et $2n$ fonctions inconnues $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ de cette variable, peut se mettre, en général, sous la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = A_2, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = A_n, \\ \frac{dy_1}{dt} = B_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = B_2, \dots, \quad \frac{dy_n}{dt} = B_n,$$

$A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ étant des fonctions données de la variable indépendante t et des variables dépendantes $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$.

On appelle système canonique le cas particulier de la

forme générale précédente, dans lequel les coefficients $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ sont formés avec les dérivées partielles d'une même fonction

$$H = F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

prises par rapport aux variables dépendantes, en sorte que l'on ait généralement

$$A_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

i désignant successivement chacun des nombres $1, 2, \dots, n$.

D'après cela, un système canonique d'équations simultanées aura pour forme générale

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, \quad \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}.$$

Dans le cas particulier où la fonction donnée H est de la forme

$$H = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

c'est-à-dire ne contient pas explicitement la variable indépendante t , les équations (1) sont dites de forme hamiltonienne.

123. Cette dénomination vient du nom du célèbre géomètre anglais W. R. Hamilton, qui a ramené à la forme en question les équations générales du mouvement d'un système de points matériels soumis à la seule action des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles^{*)}. En d'autres termes, un système hamiltonien représente sous la forme la plus simple les équations de tout problème de Dynamique auquel s'applique le principe des forces vives; par conséquent, deux problèmes de cette classe ne se distinguent l'un de l'autre que par le nombre des variables et par la forme de la fonction $H = f$. En se rappelant cette remarque, on comprendra facilement toute l'importance de ce problème: "Trouver une méthode générale d'intégration pour les équations de la forme des équations (1)."

Hamilton a commencé la série des découvertes qui con-

^{*)} Voy. Philosoph. Transact., 1835, P. I. "Second Essay on a General Method in Dynamics. By W. R. Hamilton" (pag. 96-98).

duisent à ce but, en démontrant, dans ses recherches mentionnées ci-dessus, que les m intégrales distinctes qui appartiennent aux équations (1), dans le cas de $H = f$, s'expriment au moyen des dérivées partielles d'une même fonction, nommée par lui fonction principale. Il ramène la détermination de la fonction principale à l'intégration de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La découverte de Hamilton, l'époque où elle a été faite, ne pouvait pas encore faire un pas en avant à la solution même du problème, puisque, d'après les méthodes alors connues, l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre se ramenait à son tour à l'intégration complète du système d'équations simultanées (1). Elle mit cependant en évidence une liaison encore plus étroite entre les deux questions, et elle appela sur ce sujet l'attention de Jacobi. Celui-ci démontra, en premier lieu, que, pour déterminer la fonction principale, il suffit de trouver une intégrale complète d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, et que le théorème de Hamilton s'étend aux équations de la forme (1), dans lesquelles $H = F$, c'est-à-dire dans lesquelles la variable indépendante t entre explicitement. En second lieu, ne connaissant pas encore à cette époque la méthode de Cauchy^{*)}, et considérant celle de Pfaff comme la seule méthode générale qui existât pour un nombre de variables indépendantes supérieur à deux, Jacobi apporta à cette dernière méthode une simplification importante, coïncidant pour le fond avec la méthode donnée par Cauchy dès l'année 1819^{**)}.

Mais, comme nous l'avons remarqué plus haut, la méthode de Cauchy, ou la méthode de Pfaff perfectionnée par Jacobi exigeaient, pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle se ramenait l'intégration des équations (1), que l'on opérât, au contraire, l'intégration de ces équations (1); de sorte que, suivant l'expression de Bour^{*)}, "on était seulement parvenu à ramener les difficultés les unes aux autres, sans sortir du cercle vicieux." Aussi Jacobi a-t-il commencé, dès l'époque de ses recherches mentionnées plus haut, à s'occuper de trouver une méthode d'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque de variables

indépendantes, en poursuivant la voie indiquée par Lagrange pour la solution de ce problème dans le cas de deux variables indépendantes, voie dans laquelle Charpit avait rencontré des difficultés insurmontables, et que pour cette raison Pfaff avait abandonnée. Pour généraliser la méthode de Lagrange, Jacobi dut s'appuyer sur les propriétés des intégrales des équations de la forme dynamique (1). Il découvrit la plus importante de ces propriétés dans un théorème démontré par Poisson dans son premier Mémoire „Sur la variation des constantes arbitraires“ (Journal de l'Ecole Polytechnique, 15^e Cahier); ce qui explique l'enthousiasme avec lequel Jacobi s'exprimait au sujet de ce théorème, dans une lettre écrite à l'Académie des Sciences de Paris, peu de temps après la mort de Poisson (Comptes rendus, 1840, p. 529).

Les découvertes de Hamilton et de Jacobi ont servi de base aux recherches de plusieurs autres géomètres, et les travaux de Liouville, de Bertrand, de Donkin et de Bour ont considérablement élucidé la théorie de l'intégration des équations de forme canonique, et élargi le cercle de ses applications. Le Traité complet de Jacobi sur cet objet, dont la publication avait été annoncée dès l'année 1840, n'a paru que longtemps après la mort de l'auteur, en 1861^{*)}. Dans ce travail, Jacobi expose la nouvelle méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, et, comme application de cette méthode, la théorie de l'intégration des équations de la forme (1), avec les exemples les plus importants. Ce Mémoire renferme l'exposition systématique tant des propres découvertes de Jacobi dans cette branche de l'Analyse, que des résultats obtenus par les autres mathématiciens, dont les travaux ont le plus contribué à la perfectionner. L'ensemble des recherches que nous venons de mentionner constitue l'addition la plus importante qui ait été faite de nos jours à la théorie générale des équations différentielles.

Ayant exposé, dans les premiers chapitres de ce travail, la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, je vais, pour terminer, présenter les théorèmes les plus importants sur lesquels repose la théorie de l'intégration des équations de forme canonique.

124. Prenons le système canonique des équations

^{*)} Voy. Cauchy, Exerc. d'Anal. et de Phys. math., t. II, pag. 239.

^{**)} Crelle's Journal, 1837, Bd. XVII: „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen,“ par Jacobi.

^{*)} Crelle's Journal, Bd. LX, Heft 1 und 2 (1861—62): „Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis, etc. Auctore C. G. J. Jacobi.“

$$(1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \dots, & \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, & \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, & \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}, \end{cases}$$

où l'on suppose

$$H = F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),$$

F désignant une fonction donnée de $t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

On appelle intégrale des équations différentielles (1) une équation

$$U = \alpha,$$

dans laquelle α est une constante arbitraire, et U une fonction de $t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, ne renfermant point α , et telle, de plus, que sa dérivée totale par rapport à t se réduise identiquement à zéro, lorsqu'on élimine, au moyen des équations données (1), les dérivées des fonctions $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, prises par rapport à cette variable t .

125. La dérivée totale de la fonction U par rapport à t a pour expression

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dt}.$$

Si l'on y substitue les valeurs de $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dy_n}{dt}$ tirées des équations (1), on devra avoir identiquement

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial H}{\partial y_1} - \frac{\partial U}{\partial y_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{\partial H}{\partial y_n} - \frac{\partial U}{\partial y_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0.$$

Identité qui peut encore s'écrire, au moyen de la notation de Poisson, sous la forme

$$(2) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + (U, H) = 0.$$

Donc l'équation (2) fournit le critérium d'après lequel on peut juger si une fonction donnée U , égale à une constante arbitraire, représente ou non une intégrale des équations (1). Si l'on substitue, par exemple, H à la place de U dans l'équation (2), on voit que le second terme du premier membre prend la forme (H, H) , et par suite se réduit à zéro; il reste alors le terme

$\frac{\partial H}{\partial t}$, qui est aussi égal à zéro, lorsque H ne contient pas t explicitement. C'est ce qui a lieu effectivement pour les équations de la Dynamique de la forme hamiltonienne, dans le cas où l'on peut appliquer le principe des forces vives. Alors

$$H = \text{const.}$$

est une des intégrales des équations (1), et s'appelle l'intégrale des forces vives. Mais il n'en est plus ainsi dans le cas plus général que nous considérons actuellement, et dans lequel on suppose que H contient t explicitement.

126. La solution complète des équations (1) se compose de $2n$ intégrales distinctes, renfermant $2n$ constantes arbitraires. En résolvant les équations intégrales par rapport à ces constantes, on pourra les ramener à la forme

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \dots, \quad \varphi_n = a_n,$$

$$\psi_1 = b_1, \quad \psi_2 = b_2, \dots, \quad \psi_n = b_n,$$

$a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ représentant des constantes arbitraires, et $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n$ des fonctions de $t, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$, ne renfermant point ces constantes, et satisfaisant chacune à la condition (2).

Démontrons maintenant la proposition qui sert de base à la théorie de l'intégration des équations (1).

Théorème I. Si l'on connaît n intégrales des équations (1),

$$(3) \quad \varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \dots, \quad \varphi_n = a_n,$$

telles que la condition

$$(4) \quad (\varphi_i, \varphi_k) = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m} \right) = 0$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n des indices i et k ; les n autres intégrales, qu'il faut joindre aux intégrales données (3) pour obtenir le système complet des équations qui contiennent la solution des équations (1), s'obtiendront:

1°. En intégrant la différentielle exacte

$$y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n - F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dt,$$

où l'on aura remplacé $y_1, \dots, y_n$ par leurs valeurs tirées des équations (3);

2°. En

20. En égalant à de nouvelles constantes arbitraires $b_1, \dots, b_n$ les dérivées partielles de l'intégrale de la différentielle précédente, prises par rapport à $a_1, \dots, a_n$.

127. Les conditions données (4) font voir, en vertu du Théorème II du §. 17, que les valeurs de $y_1, \dots, y_n$, tirées des équations (3), satisfont aux conditions

$$(5) \quad \frac{\partial y_i}{\partial x} = \frac{\partial y_i}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n des indices i et k ; par conséquent, l'expression $y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n$ est une différentielle exacte par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$. De plus, si l'on désigne par (H) le résultat de la substitution des valeurs de $y_1, \dots, y_n$ dans la fonction $F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = H$, nous allons démontrer que l'expression

$$(6) \quad y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n - (H) dt$$

est aussi une différentielle exacte, par rapport à $x_1, \dots, x_n, t$. Pour cela, il suffit de vérifier que les conditions

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i} = - \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

sont satisfaites pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n$.

Or on a

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i},$$

ou, en vertu de l'égalité (5) et des équations données (1),

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i} = - \frac{dy_i}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \dots + \frac{dx_n}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial x_n}.$$

Nous avons supposé, de plus, qu'au moyen des équations (3), y_i est exprimé en fonction de $t, x_1, \dots, x_n$; par suite

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{dy_i}{dt}$ dans l'égalité précédente, il vient, après réduction,

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i} = - \frac{\partial y_i}{\partial t},$$

et cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n$; ce qu'il fallait démontrer.

En intégrant, par la méthode connue, la différentielle exacte (6), on détermine son intégrale V en fonction des variables $t, x_1, \dots, x_n$ et des constantes $a_1, \dots, a_n$, et en outre, d'une constante qui y entre par simple addition. On aura, par conséquent,

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = y_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = y_2, \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = y_n$$

et

$$(a) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -(H).$$

Les n premières de ces équations représentent évidemment les équations (3), résolues par rapport à $y_1, \dots, y_n$; la dernière est une identité.

128. Passons maintenant à la seconde partie du théorème, et démontrons que les équations

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n$$

sont des intégrales des équations (1). Pour cela, il suffira de vérifier, d'après ce qui a été établi tout à l'heure, que les différentielles totales par rapport à t des premiers membres des équations (8) se réduisent à zéro par l'élimination des dérivées $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ au moyen des équations (1). En effet, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a_i} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_n} \frac{dx_n}{dt},$$

ou, en intervertissant l'ordre des différentiations partielles de la fonction V ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a_i} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial a_i} + \frac{\partial V}{\partial a_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Ensuite, en ayant égard aux équations (7) et (a), et éliminant, à l'aide des équations (1), les dérivées $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$, il vient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial(H)}{\partial a_i} \frac{\partial y_i}{\partial a_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i} \frac{\partial H}{\partial y_n}.$$

Mais, d'après la manière dont nous avons défini la quantité (H) , on a

$$\frac{\partial(H)}{\partial a_i} = \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial a_i} + \dots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial a_i}.$$

Donc le second membre de l'équation précédente se réduit identiquement à zéro, et par suite il en est de même du premier, de sorte qu'on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0,$$

pour toutes les valeurs de $i=1, 2, \dots, n$. Le théorème est donc démontré.

129. La démonstration précédente conduit à des conclusions importantes, savoir, que:

1°. Le problème de l'intégration des équations (1) est résolu dès que l'on connaît la fonction V , puisqu'alors les équations (7) et (8) fournissent le système complet des $2n$ intégrales des équations données.

2°. La fonction V peut être déterminée immédiatement de la manière suivante. L'équation

$$(a) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + (H) = 0,$$

comme nous l'avons déjà remarqué, doit avoir lieu identiquement. Or son second terme (H) représente le résultat de la substitution dans la fonction $F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des valeurs de $y_1, \dots, y_n$ tirées des équations (3), et ces valeurs sont les mêmes que celles que donnent les équations (7). Par conséquent, la fonction V doit changer en identité, c'est-à-dire vérifier l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + F(t, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}) = 0.$$

Comme la fonction V , outre les variables $t, x_1, \dots, x_n$, doit contenir n constantes arbitraires $a_1, \dots, a_n$ (sans compter celle qui y entre par simple addition), il s'ensuit de là qu'elle doit être déterminée comme une des intégrales complètes de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (9).

130. Les conclusions précédentes, déduites comme conséquences du Théorème I, ont une telle importance pour la théorie de l'intégration des équations (1), qu'il ne sera pas inutile de les démontrer, ou, pour mieux dire, de les vérifier directement.

Théorème II. Si V représente une des intégrales complètes de l'équation (9) [c'est-à-dire une intégrale renfermant, outre la constante qui y entre par simple addition, n constantes arbitraires $a_1, \dots, a_n$, de telle manière que ces dernières ne puissent être toutes éliminées qu'en faisant usage de toutes les $n+1$ équations qui donnent les valeurs des dérivées partielles de la fonction V par rapport à $x_1, \dots, x_n, t$], cette intégrale complète jouira des propriétés de la fonction principale de Hamilton, c'est-à-dire qu'elle donnera le système complet des $2n$ intégrales des équations (1), sous la forme des équations (7) et (8), parce que les équations différentielles (1) sont une conséquence directe de ces intégrales.

En prenant une des équations (8),

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

et la différentiant totalement par rapport à t , on trouve

$$(b) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = 0.$$

Si l'on différentie, d'autre part, l'équation (9) par rapport à a_i , et qu'on ait égard en même temps aux équations (7), il vient

$$(c) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_i} = 0.$$

En faisant successivement, dans les équations (b) et (c), $i=1, 2, \dots, n$, on obtiendra deux systèmes d'équations, par la comparaison desquels on voit aisément que les valeurs de $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$, tirées du premier, sont identiques respectivement avec les valeurs $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n}$, tirées du second. Par suite, n des équations (1), de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i},$$

sont une conséquence nécessaire des équations intégrales (7) et (8), c'est-à-dire qu'elles sont satisfaites par ces intégrales.

131. On peut donner à la conclusion précédente une plus grande rigueur, et en même temps montrer plus clairement la nécessité de la condition, que V soit une intégrale complète de l'équation (9).

En retranchant les équations (c) des équations (b), on obtient n équations de la forme

$$(d) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_1} \right) + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n} \left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_n} \right) = 0,$$

pour les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n$. Si l'on considère dans ces équations les quantités

$$\frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{dx_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_n}$$

comme des inconnues, il en résulte alors de deux choses l'une: 1° ou chacune de ces inconnues est égale à zéro, 2° ou le déterminant formé avec les coefficients des équations (d) est nul. Or ce déterminant peut se mettre sous la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_n} \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial a_n} \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial a_n} \end{vmatrix},$$

et l'hypothèse de $\Delta = 0$ entraînerait comme conséquence la possibilité d'éliminer toutes les constantes $a_1, \dots, a_n$, en ne faisant usage que des n premières équations du système

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \omega_1(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} = \omega_n(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -F(t, x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n),$$

qui donne les valeurs des dérivées partielles de la fonction V par rapport à $x_1, \dots, x_n, t$; ce qui est contraire à la condition que V soit une intégrale complète de l'équation (9). Donc, etc.

Des comparaisons analogues font voir également que les valeurs

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \Delta_1, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_n} = \Delta_n,$$

tirées des équations (b) et (c), sont complètement déterminées, puisque $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ne peuvent s'annuler, non plus que Δ , et par la même raison.

132. Démontrons maintenant que la seconde moitié des équations (1) est satisfaite par les équations intégrales (7) et (8). En différentiant l'équation (9) par rapport à x_i , et ayant égard à la condition $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$, ainsi qu'aux équations (7), il vient

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0.$$

En différentiant ensuite par rapport à t l'équation $y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$, on trouve

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Ajoutons cette équation à la précédente, après avoir transposé dans le second membre de celle-ci tous les termes, à l'exception de $\frac{\partial F}{\partial x_i}$; il vient

$$\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_1} \right) + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial y_n} \right);$$

mais, d'après ce qui a été démontré,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_n};$$

par conséquent,

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

et des égalités semblables auront lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n$. Donc le théorème est démontré.

133. La démonstration de la proposition précédente peut encore se présenter sous cette autre forme.

En appliquant la méthode de Jacobi à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(9) \quad f = y + F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0,$$

où l'on pose, pour abréger, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = y_i$, et généralement $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ obtient les n équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = a_1, \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n, a_1) = a_2, \\ \vdots \\ f_m(t, x_1, \dots, x_n, y_m, a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m \end{array} \right.$$

$a_1, \dots, a_n$ étant des constantes arbitraires, et les fonctions $f_1, \dots, f_n$ étant déterminées de manière à satisfaire aux conditions

$(f, f_i) = 0$, et $(f_i, f_k) = 0$,

pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n des indices i et k .

En éliminant les constantes $a_1, \dots, a_{n-1}$ des premiers membres des équations (10), au moyen de ces équations elles-mêmes, on réduira ces équations à la forme

$$(11) \quad H_1 = a_1, H_2 = a_2, \dots, H_n = a_n,$$

$H_1, \dots, H_n$ étant des fonctions de $t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ne contenant par la variable y , et telles qu'on ait, en général,

$$H_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, f_1, H_2, \dots, H_{i-1})$$

En vertu de ce qui a été démontré au §. 21, les premiers membres des équations (11) doivent satisfaire aux conditions

$(f, H_i) = 0$, et $(H_i, H_k) = 0$,

pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$ des indices i et k .

La première série de ces conditions démontre que les équations (11) sont des intégrales des équations (1). En effet,

$$(f, H_i) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial t}, & \frac{\partial H_i}{\partial t} \\ 1, & 0 \end{array} \right| + \sum_{m=1}^m \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F}{\partial y_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial y_m} \end{array} \right| = - \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial t} + (H_i, F) \right\} = 0;$$

ce qui démontre, d'après la condition (2), que l'équation $H_i = a_i$ est une intégrale des équations (1).

Les conditions $(H_i, H_k) = 0$ sont celles-là mêmes qui, d'après

le Théorème I (art. 126), doivent être satisfaites par les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Par suite, l'intégrale de l'expression

$$y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n - F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dt,$$

ou $y_1, \dots, y_n$ doivent être remplacés par leurs valeurs tirées des équations (10), jouit des mêmes propriétés que la fonction V du Théorème 1.

134. Remarque. Dans la démonstration du Théorème 1, nous avons vu que l'expression (6) doit être une différentielle exacte. On peut démontrer de la même manière que l'expression

$$x_1 dy_1 + \dots + x_n dy_n + F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dt$$

doit être une différentielle exacte, si l'on y remplace $x_1, \dots, x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (3). Il est facile de voir, d'après cela, que, si l'on désigne par W l'intégrale de la différentielle précédente, ou une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(12) \quad \frac{\partial W}{\partial t} - F(t, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_n}, y_1, \dots, y_n) = 0,$$

on pourra mettre le système complet des $2n$ intégrales des équations (1) sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = x_1, \quad \frac{\partial W}{\partial y_2} = x_2, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial y_n} = x_n,$$

§. 28.

135. La Remarque précédente nous offre un exemple de la manière dont le même problème de l'intégration des équations (1) peut être ramené à l'intégration d'équations aux dérivées partielles de formes différentes, (9) ou (12), suivant le choix que l'on a fait des variables indépendantes. Cela nous donne l'occasion d'exposer la méthode tout à fait générale, indiquée par Jacobi (Nova methodus, p. 122, §. 57), pour le changement de variables tant dans une équation aux dérivées partielles du premier ordre, que dans le système d'équations canoniques qui lui correspond; méthode qui fournit des équations transformées du même type que les équations primitives.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être représentée par

$$(A) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + F(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0,$$

ou, en posant généralement $y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Le système canonique correspondant, dont l'intégration complète dépend de la détermination d'une intégrale complète de l'équation (A), se composera des $2n$ équations

$$(B) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

i désignant successivement chacun des nombres $1, 2, \dots, n$.

L'équation (A) donne l'expression de l'une des dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial t}$ en fonction des autres dérivées partielles $y_1, \dots, y_n$ et des variables indépendantes $t, x_1, \dots, x_n$; donc elle est équivalente à l'équation

$$(C) \quad dV = -F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dt + y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n,$$

et, si nous exprimons l'équation (C) au moyen des nouvelles variables, nous transformerons en même temps l'équation (A), et par suite aussi les équations (B).

136. Conservons la variable t sans changement, et introduisons, au lieu de $x_1, \dots, x_n$, de nouvelles variables $q_1, \dots, q_n$. Pour cela, entre les anciennes variables et les nouvelles on devra donner n équations. En supposant l'existence de ces équations, sans toutefois spécialiser leur forme, prenons une fonction entièrement arbitraire U des anciennes variables $t, x_1, \dots, x_n$, et des nouvelles $q_1, \dots, q_n$. En faisant subir des accroissements infiniment petits aux variables de l'un des systèmes, celles de l'autre système prendront des accroissements infiniment petits correspondants, et la différentielle totale de la fonction U aura pour expression

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n} dq_n.$$

Si l'on retranche de cette équation l'équation (C), il vient

$$d(U - V) = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \right] dt + \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - y_1 \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} - y_n \right) dx_n + \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n} dq_n.$$

Comme la dépendance entre les anciennes variables et les nouvelles n'est pas encore fixée, déterminons-la de telle manière que l'on ait

$$(D) \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} = y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

En désignant, de plus, par W la différence des deux fonctions U et V , nous donnerons à l'équation précédente la forme

$$dW = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \right] dt + \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n} dq_n.$$

Dans le second membre de cette dernière équation, le coefficient de dt représente évidemment la dérivée partielle par rapport à t de la fonction $W = U - V$; voyons comment s'expriment les dérivées partielles de cette fonction par rapport à $q_1, \dots, q_n$.

Pour cela, en différentiant W par rapport à q_i , et considérant $x_1, \dots, x_n$ comme des fonctions de cette variable, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q_i} &= \frac{\partial (U - V)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_i} - \dots - \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial U}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial q_i} + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} - \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \frac{\partial x_n}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

ou, en vertu des équations (D),

$$(E) \quad \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Des équations semblables auront lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n$. Donc

$$dW = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \right] dt + \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à exprimer le coefficient de dt au moyen des dérivées partielles de la fonction W et des variables $q_1, \dots, q_n$. Pour cela, en ayant égard aux équations (D), nous le ramènerons à la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F(t, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}),$$

sous laquelle il ne contient que les variables $t, x_1, \dots, x_n$ et $q_1, \dots, q_n$. Si ensuite, à l'aide des équations (E), on exprime $x_1, \dots, x_n$ en fonction de $t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}$, on ramènera le coefficient considéré à la forme demandée. En représentant cette forme par

$$-\varphi(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}),$$

on aura ainsi

$$dW = -\varphi(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) dt + \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n.$$

De cette manière, l'équation (C) se trouve exprimée au moyen des nouvelles variables, et comme elle est maintenant équivalente à celle-ci

$$(A') \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \varphi(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = 0,$$

cette dernière équation représente la transformée de l'équation (A). Enfin, si l'on pose généralement $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, on pourra écrire immédiatement le système canonique correspondant à l'équation (A'), et composé des $2n$ équations

$$(B') \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i},$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$; et ce système représente le système (B) exprimé au moyen des nouvelles variables.

137. Dès que l'on connaîtra l'intégrale complète de l'une des équations (A) ou (A'), l'intégrale complète de l'autre pourra se déterminer au moyen de la relation

$$W + V = U.$$

En effet, supposons connue l'intégrale complète de l'équation (A'),

$$W = \chi(t, q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n) + \text{const.},$$

$a_1, \dots, a_n$ étant des constantes arbitraires. Au moyen de la relation précédente, on aura

$$V = U - \chi - \text{const.},$$

et les variables $q_1, \dots, q_n$, qui entrent dans les fonctions U et χ , pourront être exprimées en $t, x_1, \dots, x_n$, au moyen des n équations (E).

Si, au contraire, on connaît l'intégrale complète de l'équation (A),

$$V = \psi(t, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) + \text{const.},$$

on aura alors

$$W = U - \psi - \text{const.},$$

et, dans l'expression de W , les variables $x_1, \dots, x_n$ pourront être éliminées au moyen des n équations (D).

Si l'on fait, en particulier,

$$U = x_1 q_1 + \dots + x_n q_n,$$

on trouvera que les équations (D) et (E) prendront la forme

$$q_i = y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = x_i.$$

Par conséquent, les équations (C), (A) et (B) se transformeront dans les suivantes,

$$(C_1) \quad dW = F(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n) dt + \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial q_n} dq_n,$$

$$(A_1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} - F(t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n) = 0,$$

$$(B_1) \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i},$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Les équations (A) et (A') ont évidemment entre elles la même corrélation que les équations (9) et (12) du paragraphe précédent; donc la dépendance entre les intégrales des deux premières équations ou entre les intégrales des deux dernières s'exprimera de la manière suivante,

$$W + V = x_1 q_1 + \dots + x_n q_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

§. 23.

138. Les conclusions générales relatives à la théorie de l'intégrations des équations canoniques de la forme générale (1) s'appliquent aussi au cas particulier, qui représente les équations du mouvement dans les questions où le principe des forces vives a lieu, et pour lequel la fonction donnée H ne contient pas t explicitement; c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$H = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Les équations différentielles conservent leur type primitif

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$; mais maintenant la variable t n'y entre que par sa différentielle dt . En éliminant celle-ci, on a les $2n - 1$ équations

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial y_n}} = \frac{dy_1}{-\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \dots = \frac{dy_n}{-\frac{\partial H}{\partial x_n}},$$

entre les seules variables $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. L'intégration complète de ce système d'équations donnera les expressions de toutes les variables en fonction de l'une d'entre elles, de x_1 , par exemple, et de $2n - 1$ constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{2n-1}$. Si l'on porte ces expressions dans l'équation $\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}$, on obtiendra la dernière intégrale du système (1), la seule qui renfermera t explicitement, au moyen d'une quadrature,

$$t + a_{2n} = \int \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}.$$

Cela fait voir que le système complet des intégrales des équations (1), résolues par rapport aux constantes arbitraires, peut être représenté par $2n - 1$ équations de la forme

$$a_i = q_i,$$

et par une $(2n)$ ième équation de la forme

$$a_{2n} = q_{2n} - t,$$

q_i et q_{2n} désignant des fonctions qui ne contiennent pas t explicitement. La méthode générale du §. 27 donne les intégrales des équations (1) précisément sous cette forme, mais par une voie plus simple.

139. D'après la remarque que nous avons faite au commencement du §. 27, en posant

$$(2) \quad H = \text{const.} = h,$$

nous aurons immédiatement une des intégrales ne contenant pas t des équations (1). Supposons qu'avec cela on connaisse encore $n - 1$ autres intégrales de ces équations,

$$(3) \quad \varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \dots, \quad \varphi_{n-1} = a_{n-1},$$

$a_1, \dots, a_{n-1}$ étant des constantes arbitraires, et $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ des fonctions de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, ne contenant pas t explicitement, et satisfaisant aux conditions

$$(4) \quad (\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, n - 1$ des indices i et k .

Sous ces conditions, il est facile, à l'aide du Théorème I du §. 27, de déterminer les intégrales restantes des équations (1). La démonstration de ce Théorème se trouve même simplifiée. En effet, l'expression

$$y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n - f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dt,$$

en y substituant les valeurs de $y_1, \dots, y_n$ tirées des équations (2) et (3), devient une différentielle exacte, puisque les égalités $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ auront lieu pour toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$ des indices i et k , en vertu des conditions (4) et de la supposition que les équations (3) représentent des intégrales indépendantes de t des équations (1).

Ensuite, les égalités $\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial(H)}{\partial x_i}$ [H] représentant ce que

devient f lorsqu'on y substitue les valeurs de $y_1, \dots, y_n$] sont satisfaites pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n$, parce que y_i ne contiennent pas explicitement t , et que, l'équation (2) étant du nombre de celles qui ont servi à déterminer les valeurs de $y_1, \dots, y_n$, la substitution de ces valeurs réduit identiquement son premier membre à la constante h .

L'intégrale de la différentielle exacte précédente a pour expression

$$U = \dot{y} - ht,$$

V désignant l'intégrale de la différentielle exacte

$$y_1 dx_1 + \dots + y_n dx_n$$

En vertu du Théorème I du §. 27, les n intégrales cherchées des équations (1) s'obtiendront en posant

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a_1} = \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial a_{n-1}} = \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1} \\ \frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial h} - t = g, \end{cases}$$

$b_1, \dots, b_{n-1}$, g désignant de nouvelles constantes arbitraires. En effet, si l'on représente par a une des constantes arbitraires $a_1, \dots, a_{n-1}$, h , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a} &= \frac{\partial V}{\partial a} \frac{da_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial y_n} \frac{\partial H}{\partial y_n} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial a} + \dots + \frac{\partial H}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial a}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial(H)}{\partial a}.$$

Or l'expression (H) est identiquement égale à h ; donc, pour $a = a_1, \dots, a_{n-1}$, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a} = 0,$$

et, pour $a = h$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial h} = 1.$$

Donc on a identiquement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial a} = 0$$

pour toutes les valeurs de $a = a_1, \dots, a_{n-1}$, h .

140. Remarquons que l'égalité $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ n'est pas détruite, lorsqu'on prend les dérivées partielles de ses deux membres par rapport à a . On aura donc, pour toutes les valeurs 1, 2, ..., n des indices i et k ,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial y_i}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial a}.$$

Donc le système des intégrales (5) peut s'obtenir sans déterminer la fonction V , et en intégrant une suite de différentielles exactes; et il pourra se mettre sous la forme générale

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial y_1}{\partial a_i} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i} dx_n \right) &= b_i, \\ \int \left(\frac{\partial y_1}{\partial h} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial h} dx_n \right) &= g + t, \end{aligned}$$

en faisant successivement $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Quant à la détermination immédiate de la fonction V , il est clair que les valeurs $y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}$ doivent être identiques avec celles que l'on tire des équations (2) et (3); donc la fonction V doit nécessairement changer en identité l'équation

$$f(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}) = h,$$

et il suffit qu'elle soit déterminée comme intégrale complète de cette équation.

141. La méthode que nous venons d'exposer ne s'applique pas, il est vrai, avec le même avantage à la résolution des différentes questions de Dynamique, de nature plus ou moins compliquée. Ayant seulement en vue d'éclaircir par des exemples particuliers la théorie précédente de l'intégration des équations de forme canonique, je vais traiter une des questions les plus simples, à la solution de laquelle elle s'applique sans aucune difficulté.

Considérons le problème du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force exprimée en fonction de la distance.

Prenons le plan dans lequel doit s'effectuer le mouvement pour plan des coordonnées rectangulaires x, y , dont l'origine est au centre d'attraction; désignons par r le rayon vecteur du point mobile, et par $\varphi(r)$ la force accélératrice qui agit sur ce point dans la direction du centre d'attraction. En considérant les coordonnées x et y du mobile comme des fonctions du temps t , on a, pour les expressions générales des composantes de la force accélératrice parallèles aux axes coordonnés, $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. D'un autre côté, ces mêmes composantes, dans le cas actuel, ont pour valeurs respectives $-\frac{x}{r}\varphi(r)$ et $-\frac{y}{r}\varphi(r)$. Donc les équations du mouvement sont

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}\varphi(r), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}\varphi(r),$$

en faisant $r^2 = x^2 + y^2$.

Pour obtenir l'intégrale des forces vives, ajoutons les équations (1), après les avoir multipliées respectivement par dx, dy , ce qui donne

$$\frac{xdx d^2x + ydy d^2y}{dt^2} = -\varphi(r) \frac{xdx + ydy}{r},$$

ou

$$\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\varphi(r) dr,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(2) \quad H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int \varphi(r) dr = \text{const.} = h,$$

x', y' étant les composantes de la vitesse du mobile parallèlement aux axes des x et des y , savoir

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y'.$$

Si l'on remarque maintenant que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x'} &= x', & \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi(r) dr}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi(r) \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial H}{\partial y'} &= y', & \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi(r) dr}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \varphi(r) \frac{y}{r}, \end{aligned}$$

on pourra ramener les équations du mouvement (3) et (1) à la forme canonique ordinaire

Comme il n'entre dans ces équations que quatre fonctions inconnues de la variable t , il suffit de connaître, outre l'intégrale (2), une autre intégrale qui ne renferme pas le temps explicitement. Le principe des aires fournit l'intégrale demandée. Si l'on élimine, en effet, entre les équations (1), les termes qui contiennent r , il vient

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})}{dt} = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(4) \quad \varphi = xy' - yx' = \text{const.} = u.$$

La condition $(H, \varphi) = 0$ doit être évidemment satisfaite, ce qu'il est, du reste, aisé de vérifier directement, puisque

$$(H, \varphi) = -\varphi(r) \frac{x}{r} \cdot y - x' \cdot y' + \varphi(r) \frac{y}{r} \cdot x + y' \cdot x'.$$

Ensuite il faut tirer des équations (2) et (4) les valeurs de x' et de y' , qui rendent $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte. Pour cela, en éliminant y' de l'équation (2) à l'aide de (4), on obtient une équation du second degré en x' ,

$$(x^2 + y^2)x'^2 + 2xy \cdot x' = 2[h - \int \varphi(r) dr]x^2 - a^2,$$

d'où, à cause de $x^2 + y^2 = r^2$, et en faisant, pour abréger,

$$R = \sqrt{2[h - \int \varphi(r) dr]r^2 - a^2},$$

on tire

$$x' = \frac{-ay \pm xR}{r^2}.$$

On trouve de même

$$y' = \frac{ax \pm yR}{r^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} dV &= a \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \pm \frac{xdx + ydy}{r^2} \cdot R \\ &= a \cdot d \arctang \frac{y}{x} \pm \frac{dr}{r} R, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = a \cdot \arctang \frac{y}{x} \pm \int \frac{dr}{r} \cdot R.$$

Maintenant les deux intégrales du problème qui restent à trouver s'exprimeront comme il suit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= \arctang \frac{y}{x} \mp \int \frac{dr}{rR} = b = \text{const.}, \\ \frac{\partial V}{\partial h} - t &= \pm \int \frac{r dr}{R} - t = y = \text{const.} \end{aligned}$$

La première de ces intégrales donne l'équation de la trajectoire du point mobile; la seconde donne le temps en fonction du rayon vecteur. Les quadratures qui y entrent pourront généralement être déterminées, lorsqu'on donnera la forme de la fonction $\varphi(r)$. En supposant, par exemple, $\varphi(r) = \frac{\mu}{r^2}$, μ étant une constante, on obtiendra des résultats conformes à ceux que les *Traité de Mécanique* établissent ordinairement par une autre voie.

Remarquons encore que la fonction V représente une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = 2[h - f\varphi(r)dr],$$

que l'on tire de l'équation (2), en y remplaçant x' et y' par leurs valeurs $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$.

§ 30.

142. Pour terminer cette esquisse de la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires de forme canonique, considérons une propriété très-remarquable de leurs intégrales, qui constitue le *Théorème de Poisson*, et que nous avons déjà établie d'une manière indirecte au §. 18, après avoir indiqué au commencement de ce paragraphe (art. 46) sa haute importance dans la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La démonstration la plus directe et la plus simple de ce théorème, que nous allons exposer tout à l'heure, montre effectivement qu'il est une conséquence immédiate de l'égalité trinôme qui exprime le *Théorème I* du §. 17. De là il est facile de voir que l'existence de cette

identité pouvait être conclue en s'appuyant seulement sur le *théorème de Poisson*.

Reprenons le système canonique de $2n$ équations de la forme

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

en supposant $H = F(t, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, et donnant à l'indice i toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$. Soient

$$(2) \quad \varphi(t, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \text{const.}, \quad \psi(t, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \text{const.}$$

deux intégrales de ce système, φ et ψ étant des fonctions données. Le *théorème de Poisson* consiste en ce que l'expression

$$\sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \psi}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \right), \quad \text{ou } (\varphi, \psi),$$

égale à une constante arbitraire, est aussi une intégrale des équations (1).

Comme les équations (2) représentent des intégrales de (1), les fonctions φ et ψ , en vertu de ce qui a été démontré au §. 27, doivent vérifier identiquement les conditions

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi, H) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0.$$

Si l'équation $(\varphi, \psi) = \text{const.}$ et aussi une intégrale des équations (1), la fonction (φ, ψ) devra vérifier identiquement la condition

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} + [(\varphi, \psi), H] = 0.$$

Or, en vertu de la formule (9) du §. 16, on a

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right).$$

En substituant ici les valeurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (H, \varphi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H, \psi),$$

il vient

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = [(H, \varphi), \psi] + [\varphi, (H, \psi)].$$

Donc la condition relative à la fonction (φ, ψ) prend la forme de l'équation

$$[(H, \varphi), \psi] + [\varphi, (H, \psi)] + [\varphi, \psi], H] = 0,$$

ou

$$[(H, \varphi), \psi] + [(\varphi, \psi), H] + [(\psi, H), \varphi] = 0,$$

dont le premier membre, en vertu du Théorème I du §. 17, est identiquement égal à zéro, quelles que soient les fonctions, H, φ, ψ . Ainsi le théorème est démontré.

La démonstration compliquée que Poisson avait donnée de son théorème était considérée comme un tour de force analytique. Hamilton, en ramenant les équations de la Dynamique à une forme plus simple, a simplifié en même temps la démonstration de Poisson. La démonstration précédente, qui s'applique aux équations canoniques de la forme générale, est due à Donkin.

143. Jacobi, le premier, a attiré l'attention sur l'importance du théorème de Poisson. Les applications indirectes qu'il en a faites plus tard aux questions générales de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des équations de la Dynamique ont pleinement mis en lumière l'utilité théorique du théorème de Poisson. Pour ce qui est de ses applications directes et pratiques, c'est-à-dire de la possibilité, étant données deux intégrales d'un système d'équations canoniques, de calculer par leur moyen, à l'aide de simples différentiations, une troisième intégrale, puis une quatrième, et ainsi de suite; l'examen approfondi de cette question a montré à Bertrand *) que la méthode d'intégration fondée de cette manière sur le théorème de Poisson était loin d'avoir l'importance qu'on lui avait attribuée d'abord. En effet, les cas où ce théorème conduit réellement à une nouvelle intégrale se rencontrent beaucoup plus rarement que ceux où il n'atteint pas ce but. Quelquefois, aucune des combinaisons de deux à deux, par le théorème de Poisson, des intégrales qui forment la solution complète ne donne une intégrale nouvelle; dans d'autres cas, la plupart d'entre elles jouissent de cette même propriété. Bertrand, profitant de cette circonstance, qui exclut évidemment la possibilité d'appliquer le théorème de Poisson au but proposé, a fondé là-dessus une méthode spéciale d'intégration des équations de la Dynamique de forme hamiltonienne. L'établissement théorique de cette méthode est fort simple; c'est pourquoi je vais l'exposer sommairement, et l'éclaircir en l'appli-

aux dettes partielles du premier ordre. Ch. VII, §. 30. 455

quant à l'exemple même qui a été traité dans le paragraphe précédent, afin qu'on puisse facilement comparer les résultats.

144. Examinons d'abord les cas où les deux intégrales données, $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, ne conduisent pas à une nouvelle intégrale. Cette circonstance se produit: 1^o quand l'expression (φ, ψ) se réduit identiquement à une constante déterminée quelconque; 2^o quand cette expression se réduit à une fonction de φ et de ψ , en sorte que l'équation $(\varphi, \psi) = \text{const.}$ ne donne pas une nouvelle intégrale, mais une combinaison algébrique des intégrales déjà connues.

Par exemple, si l'on suppose que, dans les équations (1), la fonction H ne contienne pas t explicitement, on a l'intégrale

$$H = \text{const.}$$

En la combinant avec une autre intégrale quelconque

$$\varphi = \text{const.},$$

φ ne contenant pas t explicitement, on a l'identité

$$(\varphi, H) = 0.$$

Si l'on prend une intégrale

$$\psi - t = \text{const.},$$

ψ ne contenant pas t explicitement, on obtient alors l'identité

$$(\psi, H) = 1.$$

En général, on peut démontrer que, si $\varphi = \text{const.}$ et $\psi = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), il existe une ou plusieurs intégrales de la forme $\omega = \text{const.}$, pour lesquelles l'expression (φ, ω) se réduit identiquement à zéro ou à l'unité. En effet, effectuons les substitutions indiquées par les formules

$$(\varphi, \psi) = \psi_1, \quad (\varphi, \psi_1) = \psi_2, \dots, \quad (\varphi, \psi_{m-1}) = \psi_m, \dots$$

En prolongeant cette suite indéfiniment, elle ne peut continuer constamment à donner des fonctions distinctes $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots$, puisque les équations (1) n'ont que $2n$ intégrales distinctes. Supposons que ψ_m soit le premier terme qui soit égal à une constante déterminée, ou qui s'exprime en fonction des termes précédents, en sorte que l'on ait

$$\psi_m = F(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}).$$

*) Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, par J. Bertrand (Journal de Mathém. de Liouville, 1852, t. XVII)

En prenant une fonction arbitraire ω des variables $\psi, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$, on a

$$(\varphi, \omega) = \psi_1 \frac{\partial \omega}{\partial \psi_1} + \psi_2 \frac{\partial \omega}{\partial \psi_2} + \dots + F(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}) \frac{\partial \omega}{\partial \psi_{m-1}}.$$

Donc, si nous voulons déterminer ω de manière que (φ, ω) soit identiquement égal à 1 ou à 0, on devra intégrer l'équation linéaire

$$\psi_1 \frac{\partial \omega}{\partial \psi_1} + \psi_2 \frac{\partial \omega}{\partial \psi_2} + \dots + F(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}) \frac{\partial \omega}{\partial \psi_{m-1}} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ ou } 0.$$

Donc les intégrales du système d'équations simultanées

$$\frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \dots = \frac{d\psi_{m-1}}{F} = \frac{d\omega}{1 \text{ (ou } 0)}$$

donnent les valeurs de la fonction ω au moyen desquelles on formera son expression la plus générale, qui sera l'intégrale générale de l'équation linéaire précédente.

La méthode de Bertrand pour l'intégration des équations de la Dynamique de forme hamiltonienne (1), où $H = f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, consiste dans ce qui suit. On déterminera une intégrale des équations (1),

$$\varphi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \text{const.},$$

différente de l'intégrale des forces vives, et l'on cherchera une autre intégrale

$$\psi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \text{const.}$$

par la condition que la fonction ψ donne l'identité

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ ou } 1.$$

145. Comme application, prenons le problème du mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force fonction de la distance.

Sous les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent, les équations du mouvement seront

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x', & \frac{dy}{dt} = y', \\ \frac{dx'}{dt} = -\frac{x}{r} \varphi(r), & \frac{dy'}{dt} = -\frac{y}{r} \varphi(r). \end{cases}$$

Le principe des aires donne l'intégrale

$$(2) \quad f = xy' - yx' = \text{const.}$$

Supposons que

$$(3) \quad \psi(x, y, x', y', t) = \text{const.}$$

soit une seconde intégrale. En exprimant la condition que cette intégrale, combinée avec la première, donne identiquement (ψ, f) égal à zéro ou à l'unité, on a les deux équations linéaires

$$(4) \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} y - \frac{\partial \psi}{\partial x'} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y} x + \frac{\partial \psi}{\partial y'} x' = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

L'intégration de la première de ces équations conduit au système d'équations simultanées

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\psi}{0},$$

dont une des intégrales est

$$\psi = c_1,$$

et il est facile de trouver les trois autres

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad x'^2 + y'^2 = c_3, \quad xx' + yy' = c_4,$$

c_1, c_2, c_3, c_4 étant des constantes arbitraires.

Par suite, en posant, pour abrégier,

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x'^2 + y'^2, \quad w = xx' + yy',$$

on aura, pour la valeur la plus générale de la fonction ψ qui satisfasse à la première équation (4),

$$(a) \quad \psi = \pi(u, v, w),$$

π désignant une fonction arbitraire. Si t devait entrer explicitement dans l'intégrale (3), on poserait alors

$$(a') \quad \psi = t + \pi(u, v, w).$$

Si l'on prend, pour déterminer ψ , la seconde des équations linéaires (4), on devra intégrer le système des équations

$$\text{ou} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dx'}{-y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\psi}{1},$$

$$\frac{dx}{d\psi} = -y, \quad \frac{dy}{d\psi} = x, \quad \frac{dx'}{d\psi} = -y', \quad \frac{dy'}{d\psi} = x',$$

dont les intégrales sont exprimées par les équations

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\psi + \alpha), & y &= A \sin(\psi + \alpha), \\x' &= B \cos(\psi + \beta), & y' &= B \sin(\psi + \beta),\end{aligned}$$

α, β, A, B désignant des constantes arbitraires. De ces équations on tire aisément les suivantes,

$$(b) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = C', & x'^2 + y'^2 = C'', \\ xx' + yy' = C''', & \arctang \frac{y}{x} + \psi = C^{IV}, \end{cases}$$

C', C'', C''', C^{IV} étant des constantes arbitraires. Donc l'expression générale de la fonction ψ satisfaisant à la seconde des équations (4), sera

$$\psi = \arctang \frac{y}{x} + \omega(u, v, w),$$

ω étant une fonction entièrement arbitraire.

146. Il faut maintenant compléter la détermination des expressions trouvées (a), (a'), (b) de la fonction ψ par la condition que chacune d'elles, étant égale à une constante arbitraire, représente une intégrale des équations (1). Pour cela, il faut exprimer que les dérivées totales de ces fonctions par rapport à t se réduisent identiquement à zéro, par l'élimination des dérivées de x, y, x', y' prises par rapport à t . En commençant par l'expression (a), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'} \frac{dy'}{dt}; \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial\pi}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial\pi}{\partial w} \cdot x', & \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{\partial\pi}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial\pi}{\partial w} \cdot y', \\ \frac{\partial\psi}{\partial x'} &= \frac{\partial\pi}{\partial v} \cdot 2x' + \frac{\partial\pi}{\partial w} \cdot x, & \frac{\partial\psi}{\partial y'} &= \frac{\partial\pi}{\partial v} \cdot 2y' + \frac{\partial\pi}{\partial w} \cdot y;\end{aligned}$$

et, en posant, pour abréger, $-\frac{\Phi(r)}{r} = \Phi(u)$, on a, en vertu des équations (1),

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = x \Phi(u), \quad \frac{dy'}{dt} = y \Phi(u).$$

Donc la condition $\frac{d\psi}{dt} = 0$ s'exprimera de la manière suivante,

aux dérivées partielles du premier ordre. *Ch. VII, §. 30. 459*

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial\pi}{\partial u} (xx' + yy') + 2 \frac{\partial\pi}{\partial v} (xx' + yy') \Phi(u) \\ + \frac{\partial\pi}{\partial w} [x'^2 + y'^2 + (x^2 + y^2) \Phi(u)] = 0,\end{aligned}$$

ou

$$2 \frac{\partial\pi}{\partial u} w + 2 \frac{\partial\pi}{\partial v} w \Phi(u) + \frac{\partial\pi}{\partial w} [v + u \Phi(u)] = 0.$$

Cette équation, linéaire par rapport aux dérivées partielles de π , permet de déterminer la forme de cette fonction conformément au but proposé, au moyen de l'intégration des équations

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w \Phi(u)} = \frac{dw}{v + u \Phi(u)} = \frac{d\pi}{0}.$$

Une des intégrales de ces équations sera $\pi = c_1$; une autre s'obtiendra au moyen de l'équation

$$du = \frac{dv}{\Phi(u)}, \quad \text{d'où} \quad v - \int \Phi(u) du = c_2.$$

Enfin, en écrivant les équations données sous la forme

$$\frac{v du}{v} = \frac{u dv}{u \Phi(u)} = \frac{2w dv}{v + u \Phi(u)} = \frac{v du + u dv}{v + u \Phi(u)},$$

on obtient l'équation

$$2w dv = v du + u dv,$$

d'où l'on tire la troisième intégrale

$$w^2 - uv = c_3.$$

Donc l'expression de la fonction π doit être

$$\pi = II[v - \int \Phi(u) du, \quad uv - w^2],$$

II désignant une fonction arbitraire; ou, en remplaçant u, v, w et $\Phi(u)$ par leurs valeurs, et remarquant que $du = 2r dr$, et que

$$uv - w^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2 = (xy' - yx')^2,$$

$$\psi = \pi = II[x'^2 + y'^2 + 2 \int \varphi(r) dr, \quad (xy' - yx')^2];$$

c'est-à-dire que l'intégrale des équations (1), $\psi = \text{const.}$, obtenue de cette manière, représentera une combinaison algébrique arbitraire des équations des forces vives et des aires, laquelle ne peut constituer une nouvelle intégrale.

147. En prenant maintenant la forme (a') pour représenter

la fonction ψ , et exprimant la condition que $\psi = \text{const.}$ doit être une intégrale des équations (1), on a la condition

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} = 0,$$

ou, en mettant pour les dérivées de ψ et de x, x', y, y' les valeurs données plus haut,

$$2w \frac{\partial\pi}{\partial u} + 2w \Phi(u) \frac{\partial\pi}{\partial v} + [v + u \Phi(u)] \frac{\partial\pi}{\partial w} = -1.$$

Pour déterminer la fonction π , il faut intégrer les équations

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w \Phi(u)} = \frac{dw}{v + u \Phi(u)} = -d\pi,$$

dont deux des intégrales sont les mêmes que dans le cas de l'art. précédent, savoir,

$$v - \int \Phi(u) du = c_1, \quad w^2 - uv = c_2.$$

Au moyen de ces deux équations, on trouve

$$w = \sqrt{c_2 + uv} = \sqrt{c_2 + u[c_1 + \int \Phi(u) du]};$$

par suite,

$$d\pi = -\frac{du}{2w} = -\frac{du}{2\sqrt{c_2 + u[c_1 + \int \Phi(u) du]}},$$

d'où l'on tire la troisième intégrale

$$\pi + \int \frac{du}{2\sqrt{c_2 + u[c_1 + \int \Phi(u) du]}} = c_3.$$

Donc l'expression générale de ψ sera

$$\psi = t - \int \frac{u}{2\sqrt{c_2 + u[c_1 + \int \Phi(u) du]}} + \Pi[v - \int \Phi(u) du, uv - w^2],$$

Π désignant une fonction arbitraire. Donc, en égalant cette fonction Π à zéro, et posant

$$(5) \quad \psi = \text{const.},$$

on obtiendra une nouvelle intégrale du problème, exprimant le temps en fonction du rayon vecteur, et de la même forme que nous avons obtenue par une autre méthode dans le paragraphe précédent.

148. Pour compléter la solution du problème, examinons encore si les équations (1) admettent des intégrales de la forme

$$\psi = \arctang \frac{y}{x} + \omega(u, v, w) = \text{const.}$$

Pour cela, on a la condition

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'} \frac{dy'}{dt},$$

où l'on substituera les valeurs

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\frac{y}{u} + \frac{\partial\omega}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial\omega}{\partial v} \cdot x', & \frac{\partial\psi}{\partial x'} &= \frac{\partial\omega}{\partial v} \cdot 2x' + \frac{\partial\omega}{\partial w} x, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \frac{x}{u} + \frac{\partial\omega}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial\omega}{\partial v} \cdot y', & \frac{\partial\psi}{\partial y'} &= \frac{\partial\omega}{\partial v} \cdot 2y' + \frac{\partial\omega}{\partial w} y'. \end{aligned}$$

en remplaçant les dérivées de x, y, x', y' par leurs valeurs données plus haut (art. 146); après quoi la condition considérée prendra la forme d'une équation linéaire

$$2w \frac{\partial\omega}{\partial u} + 2w \Phi(u) \frac{\partial\omega}{\partial v} + [v + u \Phi(u)] \frac{\partial\omega}{\partial w} = -\frac{\sqrt{uv - w^2}}{u},$$

à cause de $xy' - yx' = \sqrt{uv - w^2}$. Pour déterminer la fonction ω , on intégrera les équations

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w \Phi(u)} = \frac{dw}{v + u \Phi(u)} = -\frac{u dw}{\sqrt{uv - w^2}},$$

qui ont deux intégrales communes avec les équations des art. précédents, savoir,

$$v - \int \Phi(u) du = c_1, \quad uv - w^2 = c_2.$$

Par leur moyen, on trouve

$$w = \sqrt{[c_1 + \int \Phi(u) du] u - c_2};$$

donc

$$dw = -\frac{du \sqrt{uv - w^2}}{2uw} = -\frac{\sqrt{c_2} \cdot du}{2u \sqrt{[c_1 + \int \Phi(u) du] u - c_2}},$$

d'où l'on tire la troisième intégrale

$$\omega + \int \frac{\sqrt{c_2} \cdot du}{2u \sqrt{[c_1 + \int \Phi(u) du] u - c_2}} = c_3.$$

Par conséquent,

$$\omega = - \int \frac{2u \sqrt{c_1 + \int \Phi(u) du} \sqrt{c_2}}{c_1 + \int \Phi(u) du} + \Omega[v - \int \Phi(u) du, uv - w^2].$$

Substituant cette expression de ω dans la formule (b), on trouve, pour la valeur la plus générale de ψ ,

$$\psi = \arctang \frac{y}{x} - \int \frac{2u \sqrt{c_1 + \int \Phi(u) du} \sqrt{c_2}}{c_1 + \int \Phi(u) du} + \Omega[v - \int \Phi(u) du, uv - w^2].$$

La fonction Ω est complètement arbitraire; en la faisant donc égale à zéro, et posant

$$(b) \quad \psi = \arctang \frac{y}{x} - \int \frac{2u \sqrt{c_1 + \int \Phi(u) du} \sqrt{c_2}}{c_1 + \int \Phi(u) du} = \text{const.},$$

on obtient encore une nouvelle intégrale du problème, laquelle fait connaître l'équation de la trajectoire du point mobile, entièrement identique avec celle que nous avons obtenue dans le paragraphe précédent.

Si aux intégrales (2), (5), (6) on joint l'intégrale des forces

$$H = (x'^2 + y'^2) - \int \varphi(r) dr = \text{const.},$$

nous aurons alors la solution complète du problème.

149. En considérant la marche de la solution du problème précédent, on voit qu'elle consiste en ceci: Après avoir déterminé une intégrale différente de celle des forces vives, nous en avons trouvé une autre renfermant le temps, d'après la condition que, dans la combinaison de cette intégrale avec la première, elle réduise la parenthèse de Poisson à zéro. La troisième intégrale, dominant la trajectoire, s'obtient par la condition que, combinée avec la première, elle réduise la parenthèse de Poisson à l'unité. L'intégrale des forces vives complète la solution. Bertrand a démontré que le succès de ce mode de solution n'est pas accidentel, et que cette méthode doit réussir dans tous les problèmes qui concernent le mouvement dans un plan, ou, plus généralement, lorsque les coordonnées des points du système peuvent s'exprimer au moyen de deux variables indépendantes. La démonstration de cette proposition est très-simple. Mais, ayant exposé l'essence du procédé, je crois inutile d'entrer dans de plus longs détails.

Chapitre VIII.

Méthode de Cauchy pour l'intégration de l'équation générale aux dérivées partielles du premier ordre.

§. 31.

150. La méthode d'intégration d'une équation ou de plusieurs équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, et, comme conséquence de cette méthode, la théorie de l'intégration des équations de forme canonique, ont formé l'objet principal des chapitres précédents de ce Mémoire. Mais avant que cette méthode eût reçu son développement complet dans les travaux de Jacobi et d'autres géomètres, le problème de l'intégration de l'équation générale aux dérivées partielles du premier ordre avait été déjà complètement résolu par Pfaff, Cauchy et Jacobi lui-même. Les méthodes proposées par ces auteurs, tout en différant par le point de départ et par la forme, ont cependant un but commun: ramener le problème à l'intégration complète d'un système d'équations simultanées ordinaires de la forme des équations (10) (§. 11). La nouvelle méthode de Jacobi, exposée ci-dessus, se distingue des méthodes qui l'ont précédée en ce qu'elle se borne à la détermination de la moitié du nombre total des intégrales satisfaisant aux conditions connues du système en question d'équations simultanées. La recherche de ces intégrales conduit à plusieurs systèmes d'équations simultanées ordinaires, dont l'intégration complète n'est jamais nécessaire; il suffit toujours de déterminer une quelconque des intégrales de chaque système.

Pfaff a trouvé la solution théorique du problème de l'intégration de l'équation générale aux dérivées partielles du premier ordre, comme cas particulier d'un autre problème résolu par lui *), celui de l'intégration d'une équation de la forme

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0,$$

dans laquelle $X_1, \dots, X_n$ représentent $2n$ fonctions d'un pareil nombre de variables $x_1, \dots, x_n$, lesquelles ne satisfont pas aux conditions connues de Fontaine ou d'Euler. La méthode de Pfaff conduit à l'intégration complète de plusieurs systèmes d'équations simultanées ordinaires, dont le premier seulement se tire

*) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1814—1815.

immédiatement des données du problème, chacun des suivants ne pouvant être formé qu'après l'intégration complète du système précédent. Cauchy, qui a fait choix d'un autre procédé, et Jacoby, qui s'est occupé de simplifier la méthode de Pfaff, ont démontré l'un et l'autre que, pour obtenir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, il suffit d'intégrer complètement le premier des systèmes d'équations simultanées de la méthode de Pfaff. Considérant la parfaite conformité des conclusions finales des méthodes de Cauchy et de Jacoby, je me bornerai à exposer seulement la première de ces méthodes sous la forme la plus générale.

151. Soient $x_1, \dots, x_n$, n variables indépendantes; z une fonction inconnue de ces variables;

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n,$$

les dérivées partielles de cette fonction.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être représentée par

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0.$$

La détermination de la fonction z qui satisfait à l'équation (1) constitue un problème indéterminé de sa nature; et, en effet, l'expression la plus générale de z doit renfermer une fonction arbitraire. Mais Cauchy rend la question tout à fait déterminée, en y ajoutant cette condition complémentaire, que, pour une valeur particulière donnée de l'une des variables indépendantes, soit pour

$$x_n = a,$$

la fonction z et ses dérivées partielles $p_1, \dots, p_n$ prennent respectivement les valeurs $\xi, \omega_1, \dots, \omega_n$; ξ désignant une fonction de $x_1, \dots, x_{n-1}$ donnée arbitrairement, soit

$$f(x_1, \dots, x_{n-1});$$

$\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ étant les dérivées partielles de cette fonction, de sorte que, en général,

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

enfin, ω_n étant la valeur tirée de l'équation

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, a, \xi, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) = 0.$$

152. Pour déterminer la fonction z satisfaisant à toutes ces conditions, Cauchy applique la méthode du échangeement de variables indépendantes, employée pour la première fois par Ampère pour la résolution du problème actuel, dans le cas particulier de deux variables indépendantes.

Concevons les $n-1$ variables $x_1, \dots, x_{n-1}$ exprimées par un même nombre de fonctions distinctes de $n-1$ nouvelles variables $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ et de l'ancienne variable x_n . Par suite de cela, z et p_i deviendront des fonctions de x_n et des ξ_i . En différenciant à ce point de vue, nous aurons les équations

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + p_n$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}.$$

En vertu de l'égalité

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial \xi_i} = 0,$$

on tirera des équations précédentes les relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \right) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_n} \right). \end{aligned} \right.$$

Ensuite, les expressions de $x_1, \dots, x_{n-1}$, z , $p_1, \dots, p_n$ au moyen des variables $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, x_n sont supposées telles que, en les substituant dans l'équation (1), celle-ci devienne une identité. Donc, en la différenciant par rapport à chacune des variables x_n et ξ_i , il viendra

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \\ + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} \\ + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = 0. \end{aligned} \right. \quad (5')$$

Prenons d'abord la dernière de ces deux équations, laquelle doit avoir lieu pour $i = 1, \dots, n-1$, et substituons-y les valeurs (3)

et (4) de $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ et de $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$; il viendra

$$(6) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + p_{n-1} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} \end{cases} = 0.$$

153. Les fonctions de $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n$, qui représentent les valeurs de $x_1, \dots, x_{n-1}$, sont restées jusqu'à présent indéterminées. Nous pourrions profiter de cette circonstance, en choisissant pour ces fonctions des expressions telles, qu'elles satisfassent aux conditions

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0;$$

et, pour compléter la détermination de ces $n-1$ fonctions, joignons-y la condition que, pour la valeur particulière $x_n = a$, les fonctions $x_1, \dots, x_{n-1}$ prennent respectivement les valeurs $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$.

D'après ces conditions, l'équation (6) prend la forme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + p_{n-1} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} = 0,$$

et pour les diverses valeurs de $i = 1, 2, \dots, n-1$, nous aurons $n-1$ équations semblables. Le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, \dots, \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} \end{vmatrix}$$

ne doit pas être égal à zéro; car, s'il l'était, alors (en vertu du Théorème du §. 3), il existerait entre les variables $x_1, \dots, x_{n-1}$ une ou plusieurs équations. Donc, comme conséquence nécessaire des équations précédentes, on aura des équations de la forme

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0,$$

qui auront lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n-1$.

154. Nous avons maintenant toutes les équations nécessaires pour la solution de la question. En considérant toutes les conditions introduites successivement, on trouve que le problème consiste en ceci: "Déterminer $2n$ fonctions inconnues $x_1, \dots, x_{n-1}, z, p_1, \dots, p_n$ des variables $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n$, de telle manière l'o que pour la valeur particulière $x_n = a$, elles prennent respectivement les valeurs $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, en supposant $\xi = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, et généralement $\omega_i = \frac{\partial f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{\partial \xi_i}$, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$; et enfin la valeur de ω_n se tirant de l'équation

$$F'(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a, \xi, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n) = 0;$$

2° que ces fonctions satisfassent aux $3n-1$ équations (1), (2), (3), (7) et (8)."

Nous ne faisons pas entrer en ligne de compte les équations (4), qui sont des conséquences des équations (2) et (3), ni l'équation (5), qui est équivalente à (1).

Mais, pour déterminer $2n$ fonctions inconnues, il suffit, en général, de $2n$ équations; donc, dans le système précédent de $3n-1$ équations, il doit y en avoir $n-1$ de superflues. On peut démontrer, en effet, 1° que le système de $2n$ équations, composé de (1), (2), (7) et (8), suffit pour déterminer les valeurs demandées des fonctions inconnues; 2° que ces équations réduisent à des identités les $n-1$ équations restantes (3).

155. Occupons-nous d'abord de la première partie de la démonstration. Les équations (2), (7) et (8) peuvent s'écrire sous la forme

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \quad - \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \end{cases}$$

les deux dernières équations ayant lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \dots, n-1$.

$p_1, \dots, p_n$, et avec cette condition, pour trouver les n premières intégrales du système (12), il suffit évidemment de faire usage des n premières équations (11), savoir,

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

Ainsi la théorie de Cauchy embrasse dans le même procédé général la solution des équations linéaires et celle des équations non linéaires.

156. Il reste à faire voir que les expressions (12) des fonctions $z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_n$, substituées dans les $n-1$ équations (3), changent celles-ci en identités. Admettons pour un instant que ces substitutions ne rendent pas identiques les deux membres de chacune des équations (3), et représentons par $J^{(0)}$ leur différence, $J^{(0)}$ étant une fonction inconnue de $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n$; c'est-à-dire que nous posons

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + J^{(0)}.$$

En joignant à cette égalité l'équation (2), qui devient identique lorsqu'on y substitue les valeurs (12), et la combinant avec la précédente par la même procédé qui a servi à obtenir les équations (4), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \dots \\ + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + \frac{\partial J^{(0)}}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Si l'on porte les valeurs précédentes de $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ et de $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ dans l'équation (5'), nous aurons

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial p_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + p_{n-1} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} \\ + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial J^{(0)}}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} J^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Mais, en vertu des équations (7) et (8), qui sont satisfaites par les valeurs (12), tous les termes de l'équation précédente, à l'exception des deux derniers, sont identiquement nuls. Donc, pour déterminer $J^{(0)}$, nous aurons l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial J^{(0)}}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} J^{(0)} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \log J^{(0)}}{\partial x_n} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par dx_n , et intégrant depuis a jusqu'à x_n , il vient

$$\log J_{a^{(0)}}^{(0)} = - \int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n, \quad \text{d'où} \quad J^{(0)} = J_{a^{(0)}}^{(0)} e^{- \int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n},$$

$J_{a^{(0)}}^{(0)}$ étant la valeur de $J^{(0)}$ pour $x_n = a$; or il est facile de voir que cette valeur est nulle.

En effet, en faisant $x_n = a$, rappelons-nous qu'en même temps les fonctions $z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}$, doivent prendre respectivement les valeurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Donc l'équation (3) prend la forme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} = \omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_i} + \dots + \omega_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_i} + \dots + \omega_{n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial \xi_i} + J_{a^{(0)}},$$

d'où

$$J_{a^{(0)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_i} - \omega_i = 0.$$

Il est évident alors que l'on a aussi, en général, $J^{(0)} = 0$; c'est-à-dire que les équations (3) sont satisfaites par les intégrales (12), lesquelles, remplissant ainsi toutes les conditions voulues, donneront la solution la plus générale du problème.

157. Bertrand a fait contre la conclusion précédente une objection^{*)}, qui consiste en ce que cette conclusion est vraie seulement à la condition que l'intégrale

^{*)} Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. XLV, p. 617.

$$(14) \quad - \int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n$$

ne prenne pas une valeur indéterminée ou infinie; et que, d'un autre côté, on peut toujours attribuer à la fonction arbitraire $\xi = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ une forme telle que l'un de ces deux cas ait lieu.

A l'occasion de cette remarque, Serret a entrepris l'examen de ces cas exceptionnels, et a démontré*) que, si l'intégrale (14) n'a pas une valeur finie et déterminée pour la forme assignée à la fonction $f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, il arrive alors, en même temps, que les équations (12) sont impropres à fournir la solution générale du problème. Cette solution s'obtient, dans ce cas, au moyen de l'intégrale complète, c'est-à-dire de l'intégrale qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation donnée. Je crois inutile, d'ailleurs, d'exposer en détail les recherches de Serret, d'autant qu'elles ont été reproduites, d'après les articles des Comptes rendus, avec beaucoup d'explications et d'exemples, dans la *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral de Lacroix*, 6^e édition augmentée de Notes par MM. **Hermite** et **Serret**, (Note II, T. II, p. 237—282)*).

*) Comptes rendus, t. LIII, séances des 7 et 28 octobre 1861.

) Voyez encore **Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral, t. II, p. 624—649, et le Mémoire du même Auteur inséré dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, t. III (Note du trad.).

Table des matières.

Introduction	Page.
Chapitre I. — Des différentes formes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre	278
§. 1. Intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre	281
§. 2. Intégrale singulière	281
§. 3. Théorème de Jacobi sur le caractère d'indépendance des fonctions	282
§. 4. Intégrales générales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre	284
§. 5. Les systèmes précédents renferment toutes les solutions possibles d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre	287
§. 6. Cas où la solution est donnée sous forme implicite	288
Chapitre II. — Des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre	290
§. 7. Formation d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par l'élimination d'une fonction arbitraire	292
§. 8. Méthode d'intégration de Lagrange	295
§. 9. Dépendance mutuelle entre le problème de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, et celui de l'intégration d'un système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires	297
Chapitre III. — Des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre	304
§. 10. L'intégration d'une équation aux dérivées partielles se ramène à la recherche des conditions d'intégrabilité d'une différentielle totale du premier ordre	304
§. 11. Expression des conditions d'intégrabilité par des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre	305
§. 12. Application au cas de deux variables indépendantes	308
§. 13. Réduction du cas général à l'intégration de plusieurs systèmes d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre	313

	Page.
§. 14. Réduction de l'équation au cas où la fonction cherchée n'entre que par ses dérivées	314
§. 15. Transformation des systèmes d'équations linéaires simultanées correspondants	317
Chapitre IV. — Théorèmes sur lesquels est fondée la nouvelle méthode de Jacobi	320
§. 16. Propriétés des fonctions alternées (φ, ψ)	320
§. 17. Quatre théorèmes fondamentaux	324
Chapitre V. — Intégration des systèmes d'équations simultanées qui se présentent dans la méthode de Jacobi	333
§. 18. Intégration dans le cas où l'on n'a pas réduit le nombre des variables	335
§. 19. Simplifications du calcul. Applications à des exemples particuliers	345
§. 20. Réduction des équations au nombre minimum de variables	358
§. 21. Intégration des équations réduites	367
§. 22. Application à un exemple particulier	385
Chapitre VI. — Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre	393
§. 23. Conditions d'intégrabilité d'un système d'équations simultanées. Exemples d'intégration	393
§. 24. Cas des équations simultanées linéaires	408
§. 25. Autres démonstrations du Théorème I du §. 17.	413
§. 26. Conditions d'intégrabilité d'une différentielle d'ordre quelconque à une seule variable indépendante	417
Chapitre VII. — Sur l'intégration des systèmes canoniques d'équations simultanées aux différentielles ordinaires du premier ordre	428
§. 27. Propriétés des intégrales d'un système canonique. Théorèmes de Hamilton et de Jacobi	428
§. 28. Changement de variables dans un système canonique	441
§. 29. Intégration d'un système canonique de la forme hamiltonienne	446
§. 30. Théorème de Poisson. Méthode d'intégration de Bertrand, fondée sur les cas où ce théorème est en défaut	452
Chapitre VIII. — Méthode de Cauchy pour l'intégration de l'équation générale aux dérivées partielles du premier ordre	463
§. 31.	463

F i n.

Die harmonischen Polarcurren.

Von

Herrn Professor C. A. Breitscheider
in Gotha.

(Figuren s. Taf. XI.)

Bedarf der Lehrer der Mathematik bei dem Unterrichte in der analytischen Geometrie zweckmässiger Beispiele, um den Schülern in Untersuchung von Curven zu üben, so sieht er sich, wenn er nicht die bis zum Ueberdruß gebrauchten Kegelschnitte dazu verwenden will, vergebens nach literarischen Hülfsmitteln um. Die Lehrbücher der analytischen Geometrie beschränken sich natürlich darauf, die Regeln zu entwickeln, nach denen man aus der Gleichung der krummen Linie die Ausdrücke für ihre Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale u. s. w. findet, und erläutern dieselben höchstens durch ein Paar einfache Beispiele. Der Versuch, die der Curve eigenthümlichen geometrischen Eigenschaften aufzufinden, wird nirgends gemacht, so wichtig eine solche Untersuchung in besonderen Fällen auch sein kann. Monographien über specielle Curven sind in der deutschen mathematischen Literatur kaum einige vorhanden, und auch von diesen folgt die Mehrzahl ganz dem Vorgange der allgemeinen Lehrbücher, indem ihre Verfasser genug gethan zu haben meinen, wenn sie die allgemeinen Theoreme der höheren Curvenlehre für den gewählten einzelnen Fall specialisiren.

Unter diesen Umständen schon seit lange genöthigt, mich um höhere Curven zu bemühen, die eine ausgleichende geometrische Behandlung gestatten, bin ich unter andern auch auf die beiden nachfolgenden gekommen, die ich harmonische Polarcurren