PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.

146745-55

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :
Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXXIII

Intégration des équations différentielles ordinaires par la méthode de Drach

Par Georges HEILBRONN

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1956

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES PAR LA MÉTHODE DE DRACH

Par Georges HEILBRONN.

INTRODUCTION.

Nous présentons aujourd'hui au public mathématique l'application de la théorie d' « intégration logique » de Drach aux équations différentielles. C'est le travail que nous annoncions lors de la parution du fascicule consacré aux équations aux dérivées partielles et nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à M. Villat, qui rendant hommage au génie de Drach, a bien voulu, une fois encore, nous encourager à rédiger notre modeste Ouvrage et lui réserver une place dans la présente Collection.

Nous pensons donner ici une vue plus juste de la profondeur de la pensée de Drach, en montrant la puissance d'une méthode appliquée à des problèmes d'une grande variété, qui, tous, avaient arrêté les plus éminents analystes. C'est la raison pour laquelle nous avons insisté surtout sur les applications, de façon que le lecteur se rende compte qu'il ne s'agit pas ici de théories stériles, si harmonieuses en elles-mêmes, si séduisantes à l'esprit qu'elles puissent paraître.

Dans ce sens, nous tenons à souligner la finesse de l'analyse de l'équation des géodésiques, qui l'a conduit à la solution d'un problème que tant de géomètres avaient en vain tenté de résoudre; l'élégance de la méthode qui lui a permis de déterminer les intégrales algébriques de l'équation de Riccati, épuisant ainsi totalement la question. Le lecteur y trouvera, outre des résultats originaux, une synthèse des travaux d'une pléiade d'illustres analystes.

Enfin, nous tenons à rappeler les propres termes de Drach, qui montrent clairement le but qu'il visait : « Tendance à la généralisation et à la simplification de la Science », « en reprenant tout à pied-d'œuvre, les éléments étudiés étant caractérisés dès le début par un petit nombre de propriétés, choisies en raison même des applications possibles. »

CHAPITRE I.

L'intégration logique.

I. — L'intégration logique [1].

1. Le problème de l'intégration logique consiste à déterminer la nature de la transcendante définie par une équation différentielle ou un système complètement intégrable. Ce problème s'oppose, dans sa nature intime, au problème de Cauchy et à tout problème d'intégration avec conditions aux limites.

La première question qui se pose, est la suivante : étant donné un domaine de rationalité [Δ], reconnaître si l'équation (ou le système) admet des solutions rationnelles dans ce domaine et les déterminer, si elles existent. Ce problème préliminaire devra être résolu dans chaque cas particulier. Ayant résolu ce problème et, éventuellement, écarté ces solutions, nous obtenons une équation (ou un système) irréductible S, définissant une fonction z.

2. Considérons maintenant une transcendante ζ définie par un système Σ. Deux cas sont possibles.

1° Le système $S+\Sigma$, aux inconnues z, ζ est *irréductible*, c'est-à-dire que toutes les relations rationnelles entre z, ζ et leurs dérivées sont des conséquences nécessaires des équations du système $S+\Sigma$. Dans ce cas, les transcendantes z et ζ sont étrangères l'une à l'autre. L'adjonction de ζ et du système Σ est inutile.

Dès maintenant, il est nécessaire d'introduire la distinction entre

dérivées principales et paramétriques. Les premières se calculent à l'aide des secondes dans les équations $S+\Sigma$.

Soit un système (Φ) de relations

$$\varphi_i(z, \zeta)=0 \qquad (i=1, \ldots, n),$$

les φ_i étant rationnelles et ne portant que sur les dérivées paramétriques et les variables z et ζ elles-mêmes, que nous adjoignons au système $S+\Sigma$. Il conviendra de former alors les conditions d'intégrabilité du système $S+\Sigma+\Phi$, qui seront les conditions que doivent vérifier les φ_i et de s'assurer s'il y a des solutions rationnelles. Si ce problème n'a pas de solution, le système est irréductible et les transcendantes z et ζ sont étrangères.

2° Dans le cas contraire, le système $S+\Sigma$ est réductible ; nous dirons que le système S est *imprimitif* [1]. Le système $S+\Sigma$ doit être remplacé par $S+\Sigma+\Phi$.

La méthode que nous venons d'exposer, peut être appliquée à nouveau par adjonction d'une nouvelle transcendante ζ_1 définie par un système Σ_1. Le nombre des dérivées principales, qui est fini, augmente par chaque adjonction aux dépens des dérivées paramétriques. Le nombre d'adjonctions utiles est donc fini.

Il est bien entendu que, pour que la méthode présente un intérêt, il faut que les transcendantes ζ, ζ_1, ... soient connues. Il convient donc d'étudier au préalable des transcendantes dont les propriétés soient simples. C'est en l'adjonction successive de ces transcendantes que consiste l' « intégration logique ». Il est clair que ce problème est en général inabordable. On devra se contenter de solutions aussi étendues que possible, dépendant de constantes ou de fonctions arbitraires.

II. — Le groupe de rationalité.

3. Pour plus de clarté, nous supposerons que le système se réduit à une seule équation aux dérivées partielles et que, de plus, cette

(1) Cette expression, empruntée à la théorie des groupes, sera justifiée par la considération du *groupe de rationalité* du système.

équation est linéaire ([2]) :

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

et soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ un système fondamental de solutions. Toute transformation à n variables sur les z_i conduit à un nouveau système de solutions, également fondamental :

$$Z_i = f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Considérons maintenant les déterminants fonctionnels

$$\left\{ \begin{aligned} &D = \frac{D(z_1, \ldots, z_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}, \qquad D_1 = \frac{D(z, z_2, \ldots, z_n)}{D(x, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad \ldots, \\ &D_n = \frac{D(z, z_1, \ldots, z_{n-1})}{D(x, x_1, \ldots, x_{n-1})} \end{aligned} \right. \tag{3}$$

et la relation évidente

$$\frac{D(z, z_1, \ldots, z_n)}{D(x, x_1, \ldots, x_n)} = 0. \tag{4}$$

En développant celle-ci par rapport à la première ligne, il vient

$$D\frac{\partial z}{\partial x} + D_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + D_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{5}$$

(5) doit être identique à (1) ; donc

$$\frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \ldots = \frac{D_n}{A_n}, \tag{6}$$

où D est essentiellement différent de zéro.

Les expressions $\frac{D_1}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}$ sont donc des invariants différentiels de la transformation opérée sur les z_i. Cette transformation n'est autre qu'une transformation du *groupe ponctuel général* à n variables Γ_n, dont nous venons de construire les n invariants différentiels indépendants. Il est facile de voir qu'il n'y en a pas d'autre. Soit en effet,

$$\Phi\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right)$$

un nouvel invariant. Le système

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

([2]) On sait que toute équation différentielle ordinaire peut se ramener à cette forme.

permet de calculer les $\frac{\partial z_i}{\partial x}$ à l'aide des A_k et des $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$. Φ devient

$$\Psi\left(A_i, \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, z_j, \frac{\partial z_j}{\partial x_k}\right),$$

Ψ est évidemment indépendant des z_i, car il est invariant pour une transformation des z_i en $z_i + a_i$. Soit maintenant une transformation arbitraire (2). On doit avoir

$$\Psi\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) = \Psi\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_k}\right),$$

(où les indices i et k prennent toutes les valeurs de 1 à n), quelles que soient les f_i.

Supposons que les x_i dépendent d'un paramètre t. Ψ étant invariant, on doit avoir

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0.$$

Or,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_i \sum_k \frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}} \frac{\partial \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0.$$

Cette égalité devant être identiquement vérifiée, il en résulte que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n).$$

4. Si l'équation (1) est générale, le système (6) est irréductible et ce système est invariant pour toute transformation du groupe ponctuel général Γ_n.

Si l'équation (1) est spéciale, on peut adjoindre au système (6) des relations rationnelles compatibles qui n'en sont pas des conséquences nécessaires. Le système (6) est alors réductible. En lui adjoignant des relations convenablement choisies, nous formerons un nouveau système que nous rendrons irréductible.

Ce nouveau système sera le plus simple possible, si nous choisissons le plus grand nombre possible de relations d'ordre zéro (entre les z_i mêmes), puis le plus grand nombre possible de relations du premier ordre et ainsi de suite. Ces opérations ne se continuent d'ailleurs pas indéfiniment, car on sait qu'à partir d'un certain ordre, toutes les équations sont des conséquences d'équations d'ordre inférieur. Nous verrons plus loin (chap. IV, § 3) comment on peut donner à ces *systèmes irréductibles réguliers* une forme normale.

Ces systèmes étant mis sous forme canonique :

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right) = \alpha_i(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

mettent en évidence les invariants différentiels du nouveau système (Σ).

A ces systèmes, on peut attacher un groupe Γ, dont les transformations sont définies par

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right) = \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial Z_n}{\partial x_n}\right)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ce groupe Γ est le groupe de rationalité attaché à l'équation spéciale (1). Les transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ sont des fonctions des $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$ attachées dans le domaine $[\Delta]$ au groupe Γ.

Il est clair que le groupe Γ n'est défini que par son *type*. Soit F une transformation de Γ, la transformée F' de F par une transformation Φ :

$$F' = \Phi F \Phi^{-1}$$

fait partie d'un groupe Γ', de même type que Γ. La définition de Γ est donc établie à la transformation arbitraire Φ près, assujettie seulement à conserver la rationalité des équations de (Σ) qui sont rationnelles.

Nous sommes ainsi amenés à étudier la suite de composition du groupe Γ_n, qui nous fournira les différents types possibles de groupes Γ; mais nous n'aborderons cette étude, qui est d'ailleurs un pur problème de théorie des groupes, qu'après avoir étudié les applications de la présente théorie au cas d'une équation unique du premier ou du second ordre.

Avant de laisser de côté ces généralités, nous tenons à souligner que l'idée directrice qui semble avoir guidé Drach, est l'analogie avec la théorie de Galois pour les équations algébriques, le groupe de rationalité possédant les deux mêmes propriétés fondamentales que le groupe attaché à une équation algébrique, à savoir :

1° Tout invariant du groupe est une fonction des variables x, $x_1, \ldots, x_n$ rationnelle dans $[\Delta]$.

2° Toute fonction rationnelle de $z_1, \ldots, z_n$ et de leurs dérivées est une fonction rationnelle des invariants.

CHAPITRE II.

Équations du premier ordre.

I. — Généralités [2].

5. Soit l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = A(x, y),$$

dont l'intégrale générale est

$$z(x, y) = \text{const.}$$

z vérifie l'équation

$$(2) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Cette équation (2) permet de calculer par dérivation successive toutes les dérivées $\frac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^k}$, telles que $i + k = n$, $i \geq 1$, au moyen des dérivées $\frac{\partial^p z}{\partial y^p}$ $(p = 1, \ldots, n)$ et de variables x et y. Les dérivées par rapport à y seul sont donc seules paramétriques.

Il est facile de classer les équations (1) d'après les différents types de sous-groupes du groupe ponctuel général à une variable, qui sont :

1° Transformation identique : $F = f$.

2° Groupe linéaire homogène ou groupe des translations : $F = af$ ou $F = f + a$.

3° Groupe linéaire spécial : $F = \varepsilon f + a (\varepsilon^n = 1)$.

4° Groupe linéaire général : $F = af + b$.

5° Groupe projectif : $F = \dfrac{af + b}{cf + d}$.

Nous savons que, si le groupe est le groupe ponctuel général lui-même, aucune réduction n'est possible. Sinon, conformément à la théorie générale, il existe une relation

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0 \tag{3}$$

compatible avec (2), sans en être une conséquence nécessaire.

1° L'équation admet une solution rationnelle en x et y :

$$z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

On la choisira de façon que le polynome $P - zQ$ ne soit pas décomposable, quel que soit z. La relation (3) est ici d'ordre zéro.

2° L'équation de définition du groupe est ici :

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 1.$$

L'invariant est

$$\frac{\partial z}{\partial y} = L(x, y);$$

il vérifie la relation

$$X(L) + L\frac{\partial A}{\partial y} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(AL) = 0. \tag{4}$$

En effet, de la définition de L et de (2) on déduit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -AL,$$

puis

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(AL) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

D'où l'on déduit immédiatement l'équation (4), qui constitue la *résolvante* pour L. La relation de définition de L est ici la relation (3) du premier ordre. D'autre part l'équation (4) exprime que L est un multiplicateur ou facteur intégrant de (1) : celle-ci admet donc un multiplicateur rationnel. Dans ce cas, z est obtenu par une quadrature

$$z = \int L(dy - A\,dx).$$

3° L'équation de définition du groupe est

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^n = 1$$

et l'invariant caractéristique :

$$K = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n.$$

Cette relation de définition de K, rationnel en x et y est la forme, dans le présent cas, de la relation (3). K vérifie l'équation

$$X(K) + nK\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

on obtient par un calcul à peu près identique au précédent cette résolvante pour K. z est encore donné par une quadrature

$$z = \int \sqrt[n]{K}(dy - A\,dx).$$

4° L'équation de définition du groupe est du second ordre :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = 0,$$

la relation de définition de l'invariant s'écrit

$$J(x, y) = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}.$$

C'est donc ici la dérivée logarithmique d'un multiplicateur qui est rationnelle. Cherchons la résolvante pour J.

De la relation de définition de J et de (2), on déduit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + A\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + A\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Multiplions (6) par $-J$ et additionnons à (7) ; il vient, après simplification par $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$X(J) + J\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

C'est la résolvante cherchée. Elle s'écrit aussi

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(AJ + \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0. \tag{8'}$$

On obtient $\operatorname{Log}\frac{\partial z}{\partial y}$ par une première quadrature

$$\operatorname{Log}\frac{\partial z}{\partial y} = \int \mathrm{J}\,dy - \left(\mathrm{AJ} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)dx,$$

la valeur de $\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Log}\frac{\partial z}{\partial y}$ étant donnée par l'équation (8') intégrée par rapport à y.

z est donné maintenant par une deuxième quadrature

$$z = \int e^{\int \mathrm{J}\,dy - \left(\mathrm{AJ} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\right)dx}(dy - \mathrm{A}\,dx).$$

5° L'équation de définition du groupe est du troisième ordre. On prendra comme forme type de la relation (3) l'invariant de Cayley-Schwarz :

$$\mathrm{I} = \{z, y\}, \qquad \text{où} \quad \{z, y\} = \frac{\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right)^2.$$

Pour déterminer la résolvante pour I, nous adjoindrons aux équations (6) et (7), l'équation obtenue en dérivant une fois de plus par rapport à y :

$$(9) \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} + \mathrm{A}\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + 3\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 3\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial y^3}\frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

On additionne (9), (7) multipliée par $-3\mathrm{J}$, (6) multipliée par $-\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} + 2\mathrm{J}^2$; on obtient alors

$$\mathrm{X}(\mathrm{I}) + 2\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} - \frac{1}{2}\mathrm{J}^2\right) + \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial y^3} = 0,$$

mais I vérifie l'équation

$$(10) \qquad \mathrm{I} = \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} - \frac{1}{2}\mathrm{J}^2.$$

La résolvante s'écrit donc

$$(11) \qquad \mathrm{X}(\mathrm{I}) + 2\mathrm{I}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + \frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial y^3} = 0.$$

Remarquons que l'équation de Riccati est en général de ce type, puisque, pour une telle équation, la dérivée troisième de A est nulle et $\mathrm{I} = 0$ est solution de l'équation (11).

z ne se détermine plus ici par quadratures mais sa détermination nécessite l'intégration de deux équations de Riccati, J étant déterminé par les équations (8) et (10), ce qui revient à un système de deux équations de Riccati. J étant ainsi déterminé, z est déterminé par les deux quadratures indiquées au 4°.

Remarquons encore que la relation (3) devant être d'ordre minimum, ne peut être d'ordre supérieur à *trois*, sinon les relations déduites de (2) par dérivation permettraient d'en abaisser le degré. C'est une confirmation, par une voie analytique directe, du résultat obtenu par la théorie des groupes et relatif à la formation des divers sous-groupes du groupe ponctuel général.

6° Il n'est pas nécessaire de supposer $\mathrm{A}(x, y)$ rationnel. On peut le supposer algébrique, en adjoignant une relation algébrique entière

$$f(x, y, p) = 0$$

à l'équation proposée. C'est la méthode que nous emploierons pour étudier les équations $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, que nous remplacerons par le système $\frac{dy}{dx} = p$:

$$f(x, y, p) = 0.$$

A peut même être transcendant. Il suffira d'adjoindre des relations différentielles, définissant la transcendante, à l'équation proposée, après s'être assuré de la compatibilité du système (*voir* chap. I).

De la même manière, une équation de Riccati, dont on connaît une solution particulière $\mathrm{X}(x)$ donne pour la résolvante J une solution rationnelle : $\mathrm{J} = \frac{-2}{y - \mathrm{X}}$. Il y a donc une réduction dans le domaine de rationalité, obtenue en lui adjoignant $\mathrm{X}(x)$.

Nous nous contenterons de noter, en terminant ces généralités qu'une nouvelle classification des points singuliers, essentiellement logique, est possible en utilisant la théorie précédente. Il conviendrait de revoir à la lumière de ces principes, les résultats classiques de Picard, Poincaré, etc., l'étude de l'équation *au voisinage* du point singulier se faisant en utilisant la méthode ci-dessus.

II. — Applications [3].

A. — Lignes de longueur nulle des quadriques.

7. Cette intégration est classique. Nous montrerons sur cet exemple élémentaire, comment on peut appliquer les méthodes d'intégration logique.

Soit donc

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2 \tag{1}$$

le ds^2 d'une quadrique et

$$dy = m\,dx \tag{2}$$

une des deux familles de lignes de longueur nulle. Il s'agit d'intégrer (2), où m est racine de

$$(1 + q^2)m^2 + 2pqm + (1 + p^2) = 0 \tag{3}$$

ou

$$1 + m^2 + (p + qm)^2 = 0. \tag{3'}$$

Calculons $\frac{\partial m}{\partial y}$. Pour cela, différentions totalement (3), en y remplaçant dy, par $m\,dx$:

$$m\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right) + (p + qm)\left[r + 2sm + tm^2 + q\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right)[pq + (1 + q^2)m] + (p + qm)(r + 2sm + tm^2) = 0. \tag{4}$$

Dérivons (3) par rapport à y :

$$m\frac{\partial m}{\partial y} + (p + qm)\left(s + tm + q\frac{\partial m}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}[pq + (1 + q^2)m] + (p + qm)(s + tm) = 0. \tag{5}$$

De (4) et (5) on déduit

$$\frac{\frac{\partial m}{\partial y}}{s + tm} = \frac{\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}}{r + 2sm + tm^2}. \tag{6}$$

Soit, d'autre part, $\Omega(x, y, z) = 0$ l'équation de la quadrique.

Différentions totalement trois fois cette équation ; il vient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy\right)^{(2)} + 2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z}dx + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z}dy\right)(p\,dx + q\,dy)$$
$$+ \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(p\,dx + q\,dy)^2 + \frac{\partial\Omega}{\partial z}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy\right)^{(3)}$$
$$+ 3\left(\frac{\partial^3\Omega}{\partial x^2\,\partial z}dx^2 + 2\frac{\partial^3\Omega}{\partial x\,\partial y\,\partial z}dx\,dy + \frac{\partial^3\Omega}{\partial y^2\,\partial z}dy^2\right)(p\,dx + q\,dy)$$
$$+ 3\left(\frac{\partial\Omega^3}{\partial x\,\partial z^2}dx + \frac{\partial^3\Omega}{\partial y\,\partial z^2}dy\right)(p\,dx + q\,dy)^2 + \frac{\partial^3\Omega}{\partial z^3}(p\,dx + q\,dy)^3$$
$$+ 3\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z}dx + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z}dy + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(p\,dx + q\,dy)\right](r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2)$$
$$+ \frac{\partial\Omega}{\partial z}(\alpha\,dx^3 + 3\beta\,dx^2\,dy + 3\gamma\,dx\,dy^2 + \delta\,dy^3) = 0\,;$$

où

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \qquad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

En remplaçant dans cette différentielle totale troisième dy par $m\,dx$, il vient, compte tenu de ce que toutes les dérivées troisièmes de Ω sont nulles :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}(\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3)$$
$$+ 3\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + m\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z} + q\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)\right](r + 2sm + tm^2) = 0. \tag{7}$$

D'autre part, si l'on écrit la condition pour que $\sigma_2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-\frac{3}{2}}$, où on a posé $\sigma_2 = r + 2sm + tm^2$, soit un facteur intégrant pour $dy - m\,dx$, on obtient

$$2\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 + 2(s + tm)\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right)}{\sigma_2}$$
$$+ 3\,\frac{\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + m\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z} + q\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)}{\frac{\partial\Omega}{\partial z}} = 0,$$

ce qui est identique à (7), compte tenu de (6).

D'où il résulte que le carré d'un multiplicateur est rationnel : le groupe de rationalité attaché à l'équation (2) est donc

$$F = \pm f + a,$$

où l'on a adjoint au domaine de rationalité $i\sqrt{1+p^2+q^2}$, nécessité pour le calcul de m dans l'équation (3).

Enfin, les lignes cherchées sont données par la quadrature

$$\int \frac{dy - m\,dx}{\sqrt{\sigma_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^3}} = C.$$

On retrouve ici bien entendu, une quadrature elliptique, comme par la méthode classique, où la surface est rapportée à ses lignes de courbure.

B. — Lignes asymptotiques des surfaces du troisième degré.

8. Il convient au préalable, par une transformation projective, de mettre l'équation de la surface sous la forme

$$(1)\qquad \Omega(x, y, z) = a_0 z^3 + \varphi_1(x, y) z + \varphi_3(x, y) = 0$$

de manière à annuler les dérivées

$$\frac{\partial^3\Omega}{\partial x\,\partial z^2},\quad \frac{\partial^3\Omega}{\partial y\,\partial z^2},\quad \frac{\partial^3\Omega}{\partial z^3},\quad \frac{\partial^3\Omega}{\partial x^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3\Omega}{\partial y^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3\Omega}{\partial y\,\partial z}.$$

En différentiant totalement trois fois Ω, compte tenu des calculs du numéro précédent et de l'annulation des dérivées indiquée ci-dessus, il vient

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + m\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^{(3)} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\sigma_3 + 3\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + m\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(p+qm)\right]\sigma_2 = 0,$$

où on a posé

$$\sigma_3 = \alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3.$$

D'autre part, l'équation d'une famille de lignes asymptotiques s'écrit

$$(2)\qquad dy - m\,dx = 0.$$

où m est racine de

$$(3)\qquad \sigma_2 = r + 2sm + tm^2 = 0.$$

En différentiant totalement une quatrième fois, compte tenu de (3) et de $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x} + m\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^{(4)} = 0$, on obtient simplement

$$(4)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial z}\sigma_4 + 4\sigma_3\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + m\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(p+qm)\right] = 0,$$

où

$$\sigma_4 = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4m\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y} + 6m^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + 4m^3\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} + m^4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}.$$

Comme au numéro précédent, nous allons différentier (3) totalement :

$$(5)\qquad \sigma_3 + 2\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right)\sigma'_2 = 0, \qquad \text{où} \quad \sigma'_2 = s + mt,$$

puis dériver cette même équation par rapport à y :

$$(6)\qquad \sigma'_3 = 2\sigma'_2\frac{\partial m}{\partial y} = 0, \qquad \text{où} \quad \sigma'_3 = \beta + 2\gamma m + \delta m^2.$$

De (5) et de (6) ont déduit

$$(7)\qquad \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\sigma'_3}{\sigma_3}\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right).$$

D'autre part, si l'on écrit que $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-\frac{4}{3}}\sigma_3^{-\frac{1}{3}}$ est un multiplicateur pour $dy - m\,dx$, on obtient

$$\frac{4}{\frac{\partial\Omega}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial z} + m\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(p+qm)\right] + \frac{\sigma_4}{\sigma_3} - 3\frac{\sigma'_3}{\sigma_3}\left(\frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y}\right) + 3\frac{\partial m}{\partial y} = 0$$

qui, compte tenu de (7), se réduit à (4).

On peut donc conclure que le cube d'un multiplicateur est rationnel : le groupe de rationalité attaché à l'équation (2) est donc

$$F = jf + a, \qquad \text{où} \quad j^3 = 1.$$

Il convient d'adjoindre au domaine de rationalité $\sqrt{s^2 - rt}$ nécessaire au calcul de m.

Remarquons encore que les surfaces réglées sont exclues du présent calcul, mais la solution du problème est alors élémentaire.

Si le groupe se réduit, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

admet une solution rationnelle dans le domaine de rationalité envisagé, donc algébrique et toutes les asymptotiques sont alors algébriques.

C. — Lignes de courbure de la surface des ondes.

9. La méthode consiste à généraliser le résultat classique [11], qui avait permis l'intégration dans le cas où la fonction qui intervient dans l'équation est du second degré.

Soit donc

$$(1) \qquad \Phi\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 - \Phi' u\frac{du}{d\alpha} + u\Phi + \frac{u^2}{2}\Phi'' + \frac{u^3}{24}\Phi^{\mathrm{IV}} = 0,$$

l'équation différentielle de ces lignes de courbure, où

$$\Phi(\alpha) = \alpha(\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c) = \alpha f(\alpha).$$

1° *Cas particulier : $f(\alpha)$ est du second degré.* — Nous poserons

$$(2) \qquad \frac{du}{d\alpha} = \varpi$$

et nous prendrons comme variable indépendante $\alpha + \frac{u}{\varpi}$ au lieu de α dans Φ. L'équation (1) prend alors la forme

$$(3) \qquad u^3(1 - \varpi) = \varpi^3\Phi\left(\alpha + \frac{u}{\varpi}\right)$$

comme on le voit en appliquant la formule de Taylor à la fonction Φ. Suivant la méthode générale pour les équations de degré supérieur au premier, nous remplacerons l'équation (1) par le système (2), (3).

Soit maintenant l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation (2) :

$$-\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \varpi\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

La résolvante en $K = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3$ s'écrit

$$(4) \qquad -\frac{\partial K}{\partial \alpha} + \varpi\frac{\partial K}{\partial u} + 3K\frac{\partial \varpi}{\partial u} = 0,$$

et elle admet la solution rationnelle

$$K = \frac{1}{u^3(1 - \varpi)} = \frac{1}{\varpi^3\Phi\left(\alpha + \frac{u}{\varpi}\right)}.$$

La transcendante z est alors définie aux transformations près du groupe linéaire spécial

$$Z = jz + a \qquad (j^3 = 1)$$

et est donnée par la quadrature

$$z = \int \sqrt[3]{\frac{1}{\Phi}}\left(\frac{du}{\varpi} + d\alpha\right).$$

Nous retrouvons le résultat classique : $\frac{1}{\varpi\sqrt[3]{\Phi}}$ est un multiplicateur pour $du + \varpi\, d\alpha$.

10. 2° *Cas général : $f(\alpha)$ est du troisième degré.* — C'est ce cas, qui, jusqu'à Drach, avait défié les efforts des géomètres. Le calcul, tel que nous l'avons présenté, se généralise sans trop de peines. On sait que l'équation (1) se conserve par la transformation $u = \frac{\Phi}{t}$, comme on le vérifie facilement en remarquant que $\frac{\Phi^{\mathrm{IV}}}{24} = 1$.

En résolvant l'équation (1) en $\frac{du}{d\alpha}$, on trouve

$$(5) \qquad \frac{du}{d\alpha} = \frac{u\Phi' + \omega}{2},$$

avec

$$(6) \qquad \omega^2 = -4\Phi u^3 + u^2(\Phi'^2 - 2\Phi\Phi'') - 4\Phi^2 u,$$

où ω n'est autre que le discriminant de l'équation (1), du second degré en $\frac{du}{d\alpha}$.

L'équation aux dérivées partielles correspondante s'écrit

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{u\Phi' + \omega}{2\Phi}\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

et la résolvante en $K = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3$ s'écrit

$$(7) \qquad \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{u\Phi' + \omega}{2\Phi}\frac{\partial K}{\partial u} + 3K\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u\Phi' + \omega}{2\Phi}\right) = 0.$$

Elle admet la solution rationnelle

$$K = \frac{\Phi}{u(K_0 - \omega K_1)},$$

avec

$$K_0 = u[\Phi'(u^2+\Phi) + u\Phi(2\alpha + f'')], \qquad K_1 = u^2 - \Phi.$$

Le groupe de rationalité est le même que dans le cas particulier précédent. Il convient de remarquer que K n'est rationnel que dans le domaine de rationalité, complété par l'adjonction de ω, ω et Φ étant liées par la relation (6), du neuvième degré entre les trois variables ω, α, u.

III. — Équation de la balistique extérieure [4].

11. Le problème consiste à étudier les cas de réduction de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_3(y)}{P_1(y)}, \tag{1}$$

où P_1 et P_3, fonctions quelconques de x, sont des polynomes en y de degré égal à l'indice. Le but visé étant de trouver les cas où l'intégration de l'équation (1) se ramène aux quadratures, nous nous contenterons de quelques indications sur le cas où I est rationnel, puisque ce cas se ramène à un système de deux équations de Riccati irréductibles.

Soit donc l'équation

$$\frac{d(V\cos\alpha)}{d\alpha} = \frac{cVF(V)}{g},$$

où V est la vitesse du projectile et α l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon.

Nous poserons

$$\sin\alpha = v, \qquad V = \operatorname{Log} u, \qquad \frac{cF(V)}{g} = \rho(u);$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{v+\rho}. \tag{2}$$

C'est une des formes canoniques de l'équation (1), dans le cas où on connaît trois solutions particulières $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, qu'une transformation projective a transformées en $v=1$, $v=-1$, $v=\infty$.

12. 1. *Solution rationnelle.* — Soit z la solution rationnelle en v de l'équation aux dérivées partielle correspondante :

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1-v^2}{v+\rho}\frac{\partial z}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Nous poserons $z = \frac{f(v)}{g(v)}$, où les facteurs de f et g sont simples et en nombre égal :

$$z = \sigma\frac{\prod_{i=1}^{k}(v-a_i)}{\prod_{i=1}^{k}(v-b_i)},$$

que nous écrirons

$$z = \sigma + \sum_{i=1}^{k}\frac{B_i}{v-b_i}. \tag{4}$$

En substituant cette valeur (4) dans l'équation (3), il vient

$$\sigma' = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k}(B_i + B_i') = 0, \qquad \frac{B_i'}{B_i} = 1 + \frac{1-\rho^2}{(b_i+\rho)^2}, \qquad b_i' = \frac{1-b_i^2}{b_i+\rho}$$

et l'équation (3) prend la forme

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial z}{\partial b_i}\frac{1-b_i^2}{b_i+\rho} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial z}{\partial B_i}\left[1+\frac{1-\rho^2}{(b_i+\rho)^2}\right] = 0. \tag{5}$$

D'autre part, on sait que $K = \frac{\partial z}{\partial v}$ est un multiplicateur de $dv - \frac{1-v^2}{v+\rho}du$. En dérivant (4), on trouve

$$-K = \sum_{i=1}^{k}\frac{B_i}{(v-b_i)^2}. \tag{6}$$

K est donc une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré $2k-2$ et admet la racine $v=-\rho$ (correspondant à la solution $K=\infty$). Soient c_j ($j=1, 2, \ldots, 2k-3$) les autres racines. Les valeurs correspondantes de z sont $2k-3$ intégrales distinctes, si les racines de K sont distinctes. Soient

$$C_j = \sum_{i=1}^{k}\frac{B_i}{c_j - b_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2k-3) \tag{7}$$

ces intégrales. Les racines $v = 1$ et $v = -1$ donnent deux autres intégrales

(8) $$C_{2k-2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{1-b_i}, \qquad C_{2k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{1+b_i}$$

Enfin l'équation (5) admet l'intégrale

(9) $$C_{2k} = e^u \sum_{i=1}^{k} B_i$$

obtenue en intégrant l'expression

$$\sum_{i=1}^{k} (B_i + B_i') = 0.$$

Les intégrales (7), (8), (9) donnent $2k$ relations qui définissent les $2k$ fonctions b_i et B_i en fonction des $2k$ constantes arbitraires C_1, C_2, ..., C_{2k}. Les b_i et les B_i étant ainsi déterminées, z est donc connu.

Enfin, pour déterminer l'équation, il faut calculer ρ. On y parvient en déterminant une fonction symétrique des racines de K, donné par la relation (6). Si l'on utilise la somme, on trouve

(10) $$-\rho + \sum_{i=1}^{2k-2} c_i = 2\,\frac{\sum_j B_j(b_1 + \ldots + b_{j-1} + b_{j+1} + \ldots + b_k)}{\sum_{i=1}^{k} B_i}.$$

Dans le cas où toutes les racines ne sont pas distinctes, il est facile d'obtenir par dérivation de nouvelles intégrales de façon que leur nombre total soit précisément encore $2k$.

13. II. *Un multiplicateur* K *est rationnel.* — Pour abréger, nous n'étudierons que le cas où K ne possède que des pôles simples, parmi lesquels nous avons vu que doivent figurer $+1$ et -1 :

(11) $$K = \frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \sum \frac{A_i}{v-a_i} + L.$$

On sait que K vérifie l'équation résolvante

(12) $$\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{1-v^2}{v+\rho}\frac{\partial K}{\partial v} - K\left[\frac{1-\rho^2}{(v+\rho)^2} + 1\right] = 0.$$

où l'on a écrit

$$\frac{1-v^2}{v+\rho} = \frac{1-\rho^2}{v+\rho} + \rho - v.$$

En substituant la valeur (11) dans l'équation (12), il vient

$$(v+\rho)^2\left[\frac{P'}{v-1} + \frac{Q'}{v+1} + \sum\frac{A_i'}{v-a_i} + \sum\frac{a_i' A_i}{(v-a_i)^2} + L'\right]$$
$$-(1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{P}{(v-1)^2} + \frac{Q}{(v+1)^2} + \sum\frac{A_i}{(v-a_i)^2}\right]$$
$$-[1-\rho^2+(v+\rho)^2]\left(\frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \sum\frac{A_i}{v-a_i} + L\right) = 0.$$

Les termes en $\frac{1}{(v-a_i)^2}$ sont $(v+\rho)A_i[a_i'(v+\rho) - (1-v^2)]$ qui se réduiront avec ceux en $\frac{1}{v-a_i}$, si $a_i' = \frac{1-a_i^2}{a_i+\rho}$, c'est-à-dire si a_i est une solution particulière de l'équation (2).

Après réduction avec le terme en $\frac{1}{v-a_i}$, on obtient le terme entier : $(1-\rho^2)\sum\frac{A_i}{a_i+\rho}$.

De même, les termes en $\frac{1}{v-1}$ et $\frac{1}{v+1}$ donnent les quotients $P(1-\rho)$ et $Q(1+\rho)$. D'où les équations

(13) $$P' = Q' = A_1' = \ldots = A_k' = 0; \qquad L' = L;$$

(14) $$\left\{\begin{array}{l} a_i' = \dfrac{1-a_i^2}{a_i+\rho} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ P(1-\rho) + Q(1-\rho) + \rho^2 L' - L + (1-\rho^2)\sum\dfrac{A_i}{a_i+\rho} = 0. \end{array}\right.$$

Cette dernière condition, compte tenu de $L' = L$, s'écrit

(15) $$\frac{P}{\rho+1} + \frac{Q}{\rho-1} + L + \sum\frac{A_i}{a_i+\rho} = 0.$$

(15) exprime simplement que $v = -\rho$ est une racine de $K = 0$.

Les intégrales $P = \text{const.}$, $Q = \text{const.}$, $A_i = \text{const.}$ $(i = 1, \ldots, k)$ expriment que les périodes de K relatives aux pôles simples -1, $+1$, a_i sont indépendantes de u.

Il s'agit maintenant de déterminer z :

$$z = \int K\,dv + \Phi(u)$$
$$= P\,\mathrm{Log}(v-1) + Q\,\mathrm{Log}(v+1) + \sum A_i\,\mathrm{Log}(v-a_i) + Lv + \Phi(u).$$

On peut calculer $\frac{\partial z}{\partial u}$ en dérivant l'équation précédente et, d'autre part, en utilisant l'équation (3) :

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\int_{v_0}^{v}\frac{\partial K}{\partial u}\,dv+\Phi'(u)=-K\,\frac{1-v^2}{v+\rho},$$

$$\Phi'(u)+\int_{v_0}^{v}\left[\frac{A_i a_i'}{(v-a_i)^2}+L'\right]dv=-\frac{1-v^2}{v+\rho}\left(\frac{P}{v-1}+\frac{Q}{v+1}+\sum\frac{A_i}{v-a_i}+L\right).$$

En tenant compte de (13) :

$$\Phi'(u)-\sum\frac{A_i a_i'}{v-a_i}+L'v=-\frac{1-v^2}{v+\rho}\left(\frac{P}{v-1}+\frac{Q}{v+1}+\sum\frac{A_i}{v-a_i}+L\right).$$

En tenant compte de (14), les termes en A_i s'écrivent

$$A_i\,\frac{1+a_i(v+\rho)+v\rho}{(a_i+\rho)(v+\rho)}=A_i\left[1+\frac{1-\rho^2}{(a_i+\rho)(v+\rho)}\right]$$

et l'équation précédente devient

$$\Phi'(u)+L'\,\frac{v\rho+1}{v+\rho}=P\,\frac{v+1}{v+\rho}+Q\,\frac{v-1}{v+\rho}+\sum A_i\left[1+\frac{1-\rho^2}{(a_i+\rho)(v+\rho)}\right].$$

Si v augmente indéfiniment, on obtient

$$\Phi'(u)+L'\rho=P+Q+\sum A_i$$

et Φ, donc z, sera donné par quadratures, lorsqu'on aura choisi les constantes P, Q, $A_1, \ldots, A_k$ et la fonction $L=L_0e^u$.

Enfin, les c_i, racines de $K=0$, sont d'après le théorème d'Euler, des intégrales particulières de (2). Elles sont en nombre $m+1$, puisque l'une d'entre elles est $-\rho$.

En intégrant (11), il vient

$$z=P\,\mathrm{Log}(v-1)+Q\,\mathrm{Log}(v+1)+\sum A_i\,\mathrm{Log}(v-a_i)+Lv+\Phi(u).$$

En y faisant $v=c_i$ ($i=1, \ldots, m+1$), il vient

$$z_i=P\,\mathrm{Log}(c_i-1)+Q\,\mathrm{Log}(c_i+1)+\sum_j A_j\,\mathrm{Log}(c_i-a_j)+Lc_i+\Phi(u)$$

et les m différences z_i-z_1 sont des intégrales de (3).

Une autre intégrale nous est fournie par l'intégration de $L'=L$,

que nous écrirons : $C=u-\mathrm{Log}\,L$. C'est la seule intégrale qui contienne u.

Dans le cas exceptionnel où $L=0$, K n'a que $m+1$ racines et il n'y a plus que $m-1$ intégrales, qui, jointes à

$$K(-\rho)=0$$

définissent les a_i et ρ en fonction de l'un des a_i : a. Celui-ci est donné par

$$\frac{da}{du}=\frac{1-a^2}{a+\rho}.$$

14. III. *La puissance $p^{\text{ième}}$ d'un multiplicateur est rationnelle.* — Soit $\sqrt[p]{K}$ le multiplicateur. Nous poserons

$$K=\sigma(v+\rho)^p(v-1)^\lambda(v+1)^\mu\prod_{i=1}^{k}(v-a_i)^{\alpha_i}.$$

Les calculs sont à peu près identiques à ceux du numéro précédent. Les périodes de l'intégrale $\int\sqrt[p]{K}\,dv$ sont des intégrales (3). On les obtient par la méthode classique en considérant des chemins fermés Γ, formant des doubles contours autour de deux des points critiques $+1$, -1, $a_1, \ldots, a_k$.

Une dernière intégrale est fournie par

$$\frac{\sigma'}{\sigma}=\sum\alpha_i+\lambda+\mu+2p=s$$

ou, en intégrant :

$$C=u-\frac{1}{s}\,\mathrm{Log}\,\sigma.$$

Dans le cas particulier où $s=0$, $\sigma=$ const.

15. IV. *La dérivée logarithmique d'un multiplicateur est rationnelle.* — Nous supposerons essentiellement qu'il n'y a qu'une solution rationnelle, sinon on serait ramené au cas II ou III. Soit J cette dérivée logarithmique. Son équation résolvante s'écrit

$$(16)\qquad \frac{\partial J}{\partial u}+\frac{1-v^2}{v+\rho}\,\frac{\partial J}{\partial v}-\left[\frac{1-\rho^2}{(\rho+v)^2}+1\right]J+2\,\frac{1-\rho^2}{(\rho+v)^3}=0.$$

Nous pouvons poser

$$J = \frac{1}{v+\rho} + J_1,$$

où J_1 n'admet plus le pôle $-\rho$ et nous nous bornerons ici encore, pour abréger l'exposé, au cas où tous les pôles de J_1 sont simples.

J_1 vérifie l'équation

$$(17)\quad (v+\rho)^2\frac{\partial J_1}{\partial u} + (1-v^2)(v+\rho)\frac{\partial J_1}{\partial v} - J_1(1+v^2+2v\rho) = 2\rho + \rho';$$

J_1 admettant les pôles $+1$ et -1, nous poserons encore

$$J = \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2$$

et l'équation (17) devient

$$\begin{aligned}&(v+\rho)^2\left(\frac{\lambda'}{v-1} + \frac{\mu'}{v+1} + \frac{\partial J_2}{\partial u}\right)\\ &+(1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{-\lambda}{(v-1)^2} - \frac{\mu}{(v+1)^2} + \frac{\partial J_2}{\partial v}\right]\\ &-\left(\frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2\right)(1+v^2+2v\rho) = 2\rho + \rho'.\end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{1}{v-1}$ est $[(v+\rho)(v+1)-(1+v^2+2v\rho)]\lambda$ qui se réduit à $(1-\rho)(v-1)$. Donc le facteur $v-1$ s'élimine. Il en résulte que λ' est nécessairement nul. De même, $\mu'=0$. J_2 vérifie simplement l'équation

$$\begin{aligned}(18)\quad &(v+\rho)^2\frac{\partial J_2}{\partial u} + (1-v^2)(v+\rho)\frac{\partial J_2}{\partial v}\\ &-(1+v^2+2v\rho)J_2 = (\lambda+\mu+2)\rho + \rho' + \mu - \lambda.\end{aligned}$$

Soit enfin,

$$J_2 = \sum \frac{A_i}{v-a_i} + L.$$

On démontre, comme au n° 13, que a_i est une solution particulière de (2). Comme plus haut, le coefficient de A_i est divisible par $v-a_i$; il en résulte que $A_i' = 0$ et les A_i sont des constantes. Enfin, $L' = L$.

Comme $\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial v} = J$,

$$K = \Phi(u)(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}\prod(v-a_i)^{A_i}e^{Lv},$$

où K satisfait à l'équation (12). En substituant la valeur précédente de K dans cette équation, on trouve

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \lambda + \mu + 2 + \sum A_i - \rho L$$

qui donne Φ par une quadrature, si ρ et L sont connues.

Enfin,

$$z = \int_{v_0}^{v} K\,dv + \Psi(u),$$

où

$$\Psi(u) = -\left[\frac{1-v^2}{v+\rho}K\right]_{v=v_0},$$

comme on le voit en substituant cette valeur de z dans (3), compte tenu de (12), qui s'écrit

$$\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1-v^2}{v+\rho}K\right] = 0$$

Les diverses déterminations de z s'obtiendront à partir des périodes de $\int_{v_0}^{v} K\,dv$ ou

$$\int_{v_0}^{v}(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}\prod_{i=1}^{m}(v-a_i)^{A_i}e^{Lv}\,dv.$$

On obtiendra $m+2$ périodes distinctes en utilisant les contours doubles définis plus haut. Une nouvelle intégrale est

$$C = u - \operatorname{Log} L.$$

Une dernière intégrale est obtenue en utilisant un contour passant par $v=\infty$, d'où la condition.

$$|e^{Lv}| \to 0 \quad \text{pour } v \text{ infini}.$$

16. V. *Formes de d'Alembert.* — Avant d'aborder l'étude du cas où l'invariant I de Cayley-Schwarz est rationnel et qui ne conduit, on le sait, à aucun cas d'intégrabilité, nous allons indiquer rapidement comment l'étude précédente permet de retrouver les formes de la fonction ρ découvertes par d'Alembert, pour lesquelles l'équation est intégrable.

a. Supposons que K est de la forme

$$K = \sigma(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu},$$

où nous supposerons λ et μ quelconques. Alors, J est rationnel :

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1}.$$

On a vu que σ, ρ, λ, μ, sont liés par

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \lambda+\mu+2; \qquad \rho' + \rho(\lambda+\mu+2) + \mu - \lambda = 0.$$

D'où, les deux cas :

1° $\lambda + \mu \neq -2$:

$$\sigma = C e^{(\lambda+\mu+2)u}, \qquad \rho = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+2} + C_1 e^{-(\lambda+\mu+2)u}$$

et z est donné par la quadrature

$$z = \int \sigma e^{\lambda \operatorname{Log}(v-1)+\mu \operatorname{Log}(v+1)}[(v+\rho)\,dv - (1-v^2)\,du].$$

C'est la première forme de d'Alembert.

2° $\lambda + \mu = -2$:

$$\sigma = C; \qquad \rho = (\lambda-\mu)u + C_1;$$

$$z = C\int e^{\lambda \operatorname{Log}(v-1)-(\lambda+2)\operatorname{Log}(v+1)}[(v+\rho)\,dv - (1-v^2)\,du].$$

b. 1° $K = \sigma(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{-2}$. On sait que

$$a' = \frac{1-a^2}{a+\rho} \qquad \text{et} \qquad \rho' = -(\lambda+\mu+2)\rho + \lambda - \mu - 2\frac{1-\rho^2}{a+\rho}.$$

En divisant membre à membre :

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{[(\lambda-\mu)-(\lambda+\mu+2)\rho](a+\rho) - 2(1-\rho^2)}{1-a^2}.$$

C'est une équation de Riccati. Mais d'Alembert, au lieu d'intégrer cette équation ([3]), a envisagé la relation

$$a' = \frac{1-a^2}{a+\rho} = \lambda(a+1) + \mu(a-1).$$

([3]) On pourrait appliquer la méthode générale en cherchant les périodes des intégrales dans le plan complexe.

D'où

$$a = A\, e^{(\lambda+\mu)u} + \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$$

et l'on en déduit la forme de ρ : $\rho = \dfrac{1-a^2-aa'}{a'}$, λ et μ restant arbitraires. On peut aussi dire que ρ est de la forme

$$\rho = A\, e^{nu} + B\, e^{-nu} + C,$$

où A, B, C sont liés par la relation

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{n+1} = \frac{C^2}{(n+1)^2}$$

obtenue en éliminant λ et μ.

2° Si dans la relation précédente, on suppose $\lambda+\mu=0$, on en déduit

$$a' = 2\lambda; \qquad a = 2\lambda u + c,$$

puis

$$\rho = \frac{1-a^2-2a\lambda}{2\lambda} = -2\lambda u^2 - 2(c+\lambda)u - \left(c + \frac{c^2-1}{2\lambda}\right).$$

On peut aussi écrire

$$\rho = A u^2 + B u + C,$$

où A, B, C sont liés par la relation

$$B^2 = A^2 + 4AC + 4.$$

L'équation proposée, résolue en $\dfrac{du}{dv}$ est une équation de Riccati qui admet une solution linéaire en v.

Nous espérons avoir montré sur ces exemples classiques, comment on peut construire des équations intégrables du type étudié.

17. VI. *L'invariant de Cayley-Schwarz est rationnel.* — On sait que, dans ce cas, l'équation n'est plus intégrable mais dépend de la résolution d'un système de deux équations de Riccati.

Pour débarrasser I du pôle $v=-\rho$, nous poserons

$$I = -\frac{3}{2(v+\rho)^2} + \frac{\Lambda}{v+\rho} + I_1,$$

I_1 vérifie l'équation

$$(19)\qquad (v+\rho)^2\frac{\partial I_1}{\partial u}+(1-v^2)(v+\rho)\frac{\partial I_1}{\partial v} \\ -2(1+2v\rho+v^2)I_1 = \Lambda(v+\rho'+3\rho)-\Lambda'(v+\rho),$$

où l'on a posé :

$$\Lambda = \frac{\rho'+2\rho}{1-\rho^2}.$$

Nous savons aussi que I admet le pôle $+1$. Nous poserons

$$I_1 = \frac{\lambda}{(v-1)^2}+\frac{\lambda_1}{v-1}+I_2$$

et I_2 vérifie l'équation

$$(20)\qquad (v+\rho)^2\left[\frac{\lambda'}{(v-1)^2}+\frac{\lambda'_1}{v-1}+\frac{\partial I_2}{\partial u}\right] \\ -(v+\rho)(v^2-1)\left[\frac{-2\lambda}{(v-1)^3}-\frac{\lambda_1}{(v-1)^2}+\frac{\partial I_2}{\partial v}\right] \\ -(v^2+2v\rho+1)\left[\frac{2\lambda}{(v-1)^2}+\frac{2\lambda_1}{v-1}+2I_2\right] \\ = v(\Lambda'-\Lambda)+\Lambda\rho'-\Lambda'\rho+3\Lambda\rho.$$

Le terme en $\frac{1}{(v-1)^2}$ donne $\lambda'=0$; λ est une constante. Puis le terme en $\frac{1}{v-1}$ donne

$$\lambda'_1(v+\rho)^2-2(\rho-1)\lambda+\lambda_1(v+\rho)(v+1)-2\lambda_1(v^2+2v\rho+1).$$

Ce terme doit être divisible par $v-1$; d'où la condition

$$(21)\qquad \lambda'_1(\rho+1)-2\lambda_1 = 2\lambda\frac{\rho-1}{\rho+1}.$$

De même, nous poserons

$$I_2 = \frac{\mu}{(v+1)^2}+\frac{\mu_1}{v+1}+I_3.$$

On trouve encore que μ est une constante et que μ_1 doit vérifier la condition

$$(22)\qquad \mu'_1(\rho-1)+2\mu_1 = 2\mu\frac{\rho+1}{\rho-1}$$

et I_3 vérifie l'équation

$$(23)\qquad (v+\rho)^2\frac{\partial I_3}{\partial u}-(v+\rho)(v^2-1)\frac{\partial I_3}{\partial v}-2(v^2+2v\rho+1)I_3 = Bv+C.$$

où

$$B = \Lambda-\Lambda'+\lambda'_1+\mu'_1-\lambda_1-\mu_1,$$
$$C = \Lambda\rho'-\Lambda'\rho+3\Lambda\rho+\rho[2(\lambda'_1+\mu'_1)-3(\lambda_1+\mu_1)]+\lambda'_1-\mu'_1 ;$$

les fonctions λ_1 et μ_1 vérifiant les conditions (21) et (22) et λ et μ étant des constantes.

Ces équations permettent de construire divers types d'équations répondant à la question : par exemple, en supposant $I_3=0$, les fonctions ρ, λ_1, μ_1 doivent vérifier le système formé des conditions (21), (22) et des équations $B=0$, $C=0$.

Si I_3 est fonction de u seul, on voit qu'il est de la forme $K\,e^{2u}$, où K est une constante; les autres équations ne sont pas modifiées, sauf $C=0$, à laquelle il convient d'ajouter $2K\,e^{2u}(\rho^2-1)$.

Supposons enfin que I_3 admette le pôle a :

$$I_3 = \frac{\alpha}{(v-a)^2}+\frac{\alpha_1}{v-a}+I_4.$$

On trouve, par un calcul analogue au précédent :

1° a est une solution particulière de l'équation (2) :

$$a' = \frac{1-a^2}{a+\rho}.$$

2° $\alpha'=0$, donc α est une constante.

3° α_1 vérifie l'équation

$$\alpha'_1(a+\rho)^2-\alpha_1(a^2+2a+1) = 2\alpha\frac{\rho^2-1}{a+\rho}.$$

4° Il convient d'ajouter au second membre l'expression

$$(v+a)(\alpha_i-\alpha_1)+(2\alpha'_1-3\alpha_1)+\alpha_1\frac{a\rho+1}{\alpha+\rho}.$$

IV. — Équation $\frac{dy}{dx}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ [5].

18. On peut étudier bien d'autres formes réduites de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_2(x,y)}{P_1(x,y)},$$

telles que :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(x-\lambda)}{x(x-1)(y-\lambda)},$$

où la fonction $\lambda(x)$ joue le rôle de la fonction φ du paragraphe précédent. On traitera de la même manière l'équation d'Appell :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \varphi(x).$$

Nous allons examiner le cas où l'équation plus générale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

où A et B sont des polynomes de degré m en x et y, admet une intégrale algébrique

$$P(x, y) + z Q(x, y) = 0$$

non décomposable quel que soit z. Or, z vérifie l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation proposée

$$X(z) = B\frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ou, en remplaçant z par sa valeur :

$$B\left(P\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial x}\right) + A\left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

On pose alors :

$$(1) \qquad P\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial x} = LA,$$

$$(2) \qquad P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y} = -LB.$$

En multipliant ces deux égalités respectivement par B et A puis en additionnant, il vient

$$Q\,X(P) = P\,X(Q).$$

Nous poserons donc

$$(3) \qquad X(P) = MP,$$

$$(4) \qquad X(Q) = MQ.$$

En multipliant (1) par $-\frac{\partial P}{\partial y}$ et (2) par $\frac{\partial P}{\partial x}$, il vient

$$P\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + L\,X(P) = 0$$

ou

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} = LM.$$

Enfin, en dérivant (1) par rapport à y et (2) par rapport à x puis en retranchant, on obtient

$$(6) \qquad X(L) = L\left(2M - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right).$$

Les polynomes P et Q étant supposés de degré p, les égalités (1) et (2) montrent que L est de degré $2p - (m+1)$. Nous allons voir que L n'est autre que le facteur de Darboux [12]. D'autre part, si pour $z = \zeta$, $P + \zeta Q$ admet le facteur multiple Φ à l'ordre de multiplicité a, L l'admet à l'ordre $a - 1$.

Supposons qu'il n'y ait que *deux* valeurs exceptionnelles, que nous supposerons être zéro et l'infini, où P et Q admettent des facteurs multiples :

$$P = \prod_{i=1}^{h} \Phi_i^{a_i}. \qquad Q = \prod_{i=1}^{k} \Psi_i^{b_i}.$$

Le polynome $\Omega = \frac{PQ}{L}$ n'admet que des facteurs simples :

$$\Omega = \Phi_1\Phi_2\ldots\Phi_h\Psi_1\Psi_2\ldots\Psi_k$$

et il est de degré $m + 1 = 2p - [2p - (m+1)]$. Enfin

$$\frac{1}{\Omega}X(\Omega) = \frac{1}{P}X(P) + \frac{1}{Q}X(Q) - \frac{1}{L}X(L)$$
$$= \quad M \quad + \quad M \quad - 2M + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x},$$

ce qui exprime que $\frac{1}{\Omega}$ est un multiplicateur de $B\,dy - A\,dx$, comme on le vérifie facilement. D'où la méthode :

1° Recherche du polynome Ω, de degré $m + 1$.
2° Décomposition de Ω en facteurs : $\Phi_1\ldots\Phi_h\Psi_1\ldots\Psi_k$.
3° L'identité

$$\frac{1}{\Omega}(B\,dy - A\,dx) = \sum a_i \frac{d\Phi_i}{\Phi_i} - \sum b_j \frac{d\psi_j}{\psi_j}$$

détermine les a_i et b_j, puisque $z = -\frac{P}{Q}$ est l'intégrale générale.

La méthode s'applique encore sans modifications importantes dans le cas où il y a trois valeurs exceptionnelles; mais s'il y en a quatre, seulement si les facteurs sont doubles.

V. — Réduction de l'équation de Riccati.

19. La méthode d'intégration logique [6] a permis ici de systématiser les résultats de Jordan, Gordan, Schwarz, Fuchs, Halphen et Klein et d'en donner en quelque sorte, une vue synthétique. Il nous a semblé intéressant d'en donner ici un exposé plus détaillé, quoique A. Buhl y ait consacré un chapitre de son Cours d'Analyse.

L'introduction d'une transformation qui laisse invariante la forme de l'équation, permet de ramener celle-ci, dans le cas où toutes ses solutions sont algébriques, à des formes canoniques très simples, la recherche de l'intégrale générale se faisant à l'aide de procédés réguliers, indiqués par Drach dès 1912 [2].

20. I. *Généralités.* — Nous rappellerons d'abord les résultats classiques, qui seront utilisés dans la suite.

Soit l'équation

$$y'' + py' + qy = 0,$$

si l'on pose

$$y = e^{-\frac{p}{2}} z$$

l'équation prend la forme réduite

$$z'' + qz = 0.$$

C'est cette forme que nous adopterons comme forme canonique de l'équation linéaire homogène du second ordre. Nous l'écrirons, en revenant aux notations primitives :

$$\text{(B)} \qquad y'' = qy.$$

Posant $u = \frac{y'}{y}$, nous obtenons la forme réduite de l'équation de Riccati :

$$\text{(A)} \qquad \frac{du}{dx} + u^2 = q(x).$$

Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (B), linéairement

indépendantes, $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ satisfait à l'équation

$$\text{(C)} \qquad [\eta, x] = -2q,$$

où $[\eta, x]$, est l'invariant de Cayley-Schwarz.

En effet, en dérivant logarithmiquement η, il vient

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2},$$

puis

$$\frac{\eta''}{\eta} - \frac{\eta'^2}{\eta^2} = -\frac{y_1'^2}{y_1^2} + \frac{y_2'^2}{y_2^2}.$$

Donc

$$\frac{\eta''}{\eta'} - \frac{\eta'}{\eta} = -\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2}.$$

En dérivant cette dernière égalité, on obtient le résultat annoncé. D'autre part, les égalités précédentes, résolues en y_1 et y_2, donnent

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{\eta'}{\eta} - \frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta}, \qquad \frac{y_2'}{y_2} = -\frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta'}.$$

En les intégrant, on obtient y_1 et y_2 en fonction de η. Nous n'ajouterons pas de constantes d'intégration, car il s'agit de solutions particulières :

$$y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\eta'}}, \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta'}}.$$

D'autre part, l'intégrale générale de l'équation (B) s'écrit

$$y = y_1 - Cy_2,$$

où C est la constante d'intégration. Nous en déduirons l'intégrale générale de l'équation (A) :

$$u = \frac{y'}{y} = \frac{y_1' - Cy_2'}{y_1 - Cy_2} = \frac{\frac{y_1'}{y_1 y_2} - \frac{Cy_2'}{y_1 y_2}}{\frac{1}{y_2} - \frac{C}{y_1}}.$$

En utilisant les valeurs précédentes de y_1, y_2 et de leurs dérivée logarithmiques, on obtient l'intégrale générale de l'équation (A) :

$$u = \frac{\eta'}{\eta - C} - \frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta'}.$$

Notons enfin pour terminer ces généralités, que l'équation (A) garde sa forme par la transformation $S_{t,x}$:

$$t = \theta(x), \qquad v = \frac{u}{\theta'} + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'^2}.$$

qui transforme l'équation (A') :

$$\frac{dv}{dt} + v^2 = Q(t)$$

en l'équation (A), à condition de poser

$$q(x) = Q(\theta)\theta'^2 - \frac{1}{2}[\theta, x].$$

Il est clair que, si θ appartient à un domaine de rationalité $[\Delta]$, q appartient à ce même domaine.

La transformation projective (T), portant sur la seule fonction, conserve aussi la forme de l'équation (A), mais elle n'aura pas la même importance dans la suite.

Soit $\frac{dw}{dx} + w^2 = R(x)$ l'équation.

Si l'on pose

$$w = \lambda - \frac{\nu}{u - \mu} \qquad \text{ou} \qquad u = \mu - \frac{\nu}{w - \lambda}.$$

La condition d'invariance est

$$\lambda' + \lambda^2 - R(x) = \nu.$$

D'où l'on tire $\lambda + \mu = -\frac{\nu'}{2\nu}$; enfin q est donné par

$$q = \mu' + \mu^2 - \nu.$$

Si l'on prend λ arbitraire dans $[\Delta]$, les formules précédentes donnent ν puis μ.

Si l'on pose $\lambda - \mu = \alpha$, comme $\lambda' + \lambda^2 = \mu' + \mu^2$, il en résulte que $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\nu'}{2\nu}$ ou, en intégrant :

$$\alpha = c\sqrt{\nu}, \qquad \text{puis} \quad \lambda' + \mu' + \lambda^2 + \mu^2 = 2q + 2\nu$$

et enfin,

$$4q = -\frac{\nu''}{\nu} + \frac{5}{4}\frac{\nu'^2}{\nu^2} + (c^2 - 4)\nu.$$

Il faut donc que q puisse se mettre sous la forme précédente.

21. II. *Réduction*. — *a*. Si l'équation (A) n'a pas de solution algébrique dans $[\Delta]$, elle est générale dans $[\Delta]$.

b. Si elle admet *une* solution algébrique R, unique dans $[\Delta]$, R est rationnelle dans $[\Delta]$ et q vérifie l'équation évidente

$$q = R' + R^2.$$

L'intégration se fait par quadrature à partir de

$$R = -\frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta'},$$

la solution générale étant, on l'a vu,

$$u = \frac{\eta'}{\eta - C} - \frac{\eta''}{2\eta'}.$$

c. Si elle admet *deux* solutions algébriques dans $[\Delta]$ et deux seulement, elles s'écrivent

$$u_1 = \alpha + \sqrt{\delta}, \qquad u_2 = \alpha - \sqrt{\delta}.$$

En reprenant les expressions de u_1 et de u_2 en fonction de η et de ses dérivées, on obtient deux équations entre lesquelles on peut éliminer η, d'où on déduit une relation entre α et δ :

$$\alpha = -\frac{\delta'}{4\delta}.$$

On peut alors calculer $[\eta, x]$ et donc q en fonction de δ. On trouve

$$q = -\frac{\delta''}{4\delta} + \frac{5}{16}\frac{\delta'^2}{\delta^2} + \delta.$$

Il faut donc s'assurer que q puisse s'écrire de cette manière. L'intégration de l'équation (A) est alors donnée par la quadrature

$$\eta = C e^{\int 2\sqrt{\delta}\,dx}$$

et η est une *transcendante*.

Si δ est un carré parfait, l'équation admet deux solutions rationnelles et $\sigma = \frac{u - u_2}{u - u_1}$ est rationnelle. Dans ce cas, en posant $\delta = \beta^2$, q s'écrit

$$q = -\frac{\beta''}{2\beta} + \frac{3}{4}\frac{\beta'^2}{\beta^2} + \beta^2.$$

d. Si elle admet plus de deux solutions algébriques, la solution générale est aussi algébrique, puisque le birapport de quatre solutions est constant.

Dans le cas où il y a trois solutions rationnelles, on a

$$\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}=\frac{\eta-C_3}{\eta-C_2}\,\frac{C_1-C_2}{C_1-C_3}.$$

Il en résulte que η est rationnel et q est donné par

$$2q=-[\eta, x].$$

Reprenons le cas où les solutions sont algébriques et soit

$$\Phi(u)=u^n+\frac{n}{1}a_1u^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

l'équation de degré minimum, dont les coefficients appartiennent à $[\Delta]$, vérifiée par une solution u de (A). Soit encore

$$X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}(q-u^2)=0$$

l'équation aux dérivées partielles correspondant à l'équation (A). Φ est invariante pour l'opérateur $X(f)$. On sait d'ailleurs que (*voir* [**12**] et chap. II, § 4)

$$X(\Phi)=+M\Phi;$$

$$\frac{n}{1}\frac{\partial a_1}{\partial x}u^{n-1}+\ldots+[nu^{n-1}+n(n-1)a_1u^{n-2}+\ldots](q-u^2)=M(u^n+\ldots+a_n).$$

En procédant par identification, on voit que M est linéaire en u et a pour valeur

$$M=n(a_1-u).$$

En poursuivant l'identification, on obtient un système différentiel pour déterminer les a_i, où figure q.

Si l'on dérive l'équation $X(\Phi)=M\Phi$ par rapport à u, on obtient, en indiquant les dérivées par rapport à u par des accents :

$$X(\Phi')=[na_1-(n-2)u]\Phi'-n\Phi,$$
$$X(\Phi'')=[na_1-(n-4)u]\Phi''-2(n-1)\Phi'.$$

Si $H=n\Phi\Phi''-(n-1)\Phi'^2$ est le hessien de Φ, on trouve

$$X(H)=n\Phi X(\Phi'')+n\Phi''X(\Phi)-2(n-1)\Phi'X(\Phi')$$
$$=2[na_1-(n-2)u]H$$

et cette relation n'est pas identiquement vérifiée, car si $H=0$, on en déduit

$$\Phi=(u+a_1)^n.$$

Remarquons encore que H est de degré $2(n-2)$, les termes de plus haut degré s'éliminant. On calculera de même :

$$X(H')=2[na_1-(n-3)u]H'-2(n-2)H.$$

Soit encore Ω le jacobien des formes Φ et H; il est de degré $3(n-2)$ et a pour expression (¹) :

$$\Omega=n\Phi H'-2(n-2)H\Phi'$$
$$X(\Omega)=n\Phi X(H')+nH'X(\Phi)-2(n-2)\Phi'X(H)+HX(\Phi')$$
$$=3[na_1-(n-2)u]\Omega.$$

Cette relation n'est pas non plus, identiquement vérifiée, car de $\Omega=0$, on déduit

$$\Phi^{2(n-2)}=K(x)H^n.$$

Si $n>2(n-2)$, H divise Φ, qui est irréductible.

Si $n<2(n-2)$, Φ divise H, donc Φ'^2, ce qui est exclu.

Si $n=4$, Φ et H sont identiques à $K(x)$ près, mais Φ est alors un carré.

D'autre part, on sait que, si f et g sont deux fonctions telles que

$$X(f)=Mf,\qquad X(g)=Mg,$$

(¹) Montrons comment on peut calculer H; le calcul de Ω et Ω_1 se fera d'une manière en tous points analogue.

En coordonnées homogènes, suivant un procédé indiqué par Hilbert [17], Φ s'écrit

$$\Phi=u_2^n\Phi\left(\frac{u_1}{u_2}\right).$$

Nous désignerons les dérivées par rapport à u_1 par des accents; calculons les dérivées par rapport à u_2 en utilisant l'identité d'Euler :

$$n\Phi=u\Phi'+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2},\qquad (n-1)\Phi'=u\Phi''+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2},$$
$$n(n-1)\Phi=u^2\Phi''+2u\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_2^2}.$$

D'autre part,

$$H=\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_2^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_1\partial u_2}\right)^2.$$

En remplaçant les deux dérivées rapport à u_2 par les valeurs précédentes, après division par $n-1$, on trouve la valeur de H.

avec le *même* coefficient M, $\frac{f}{g}$ est une intégrale de l'équation différentielle correspondant à l'opérateur linéaire X. En outre, si f vérifie la relation $X(f) = Mf$, f^p vérifiera

$$X(f^p) = \frac{M}{p} f.$$

Des deux relations vérifiées par H et Ω, on conclut donc que H^3 et Ω^2 correspondent au même coefficient M et, par suite, $\frac{\Omega^2}{H^3} = \Gamma$, où Γ est une constante, est une expression de l'intégrale générale de (A). Remarquons que ce résultat n'est qu'un cas particulier du théorème : le quotient de deux multiplicateurs est une forme de l'intégrale générale de l'équation.

Formons enfin le jacobien Ω_1 de Φ et de Ω. Cette fonction de degré $4(n-2)$, s'écrit

$$\Omega_1 = n\Phi\Omega' - 3(n-2)\Omega\Phi', \qquad X(\Omega_1) = 4[na_1 - (n-2)u]\Omega_1.$$

Comme plus haut, on en conclut que $\frac{\Omega_1}{H^2} = 6a$ (où a est une constante arbitraire) est aussi une forme de l'intégrale générale.

Ces deux formes de l'intégrale générale n'étant pas identiques, Φ doit vérifier une condition. Nous obtiendrons celle-ci, en déterminant a. En effet, si l'on écrit

$$\Omega_1 - 6aH^2 = 0,$$

on trouve, en remplaçant Ω_1 et H par leur valeur en fonction de Φ, et en remarquant que Φ' est premier avec Φ (Φ n'a pas de racine multiple, puisqu'il est de degré minimum) :

$$a = \frac{(n-2)^2}{n-1}.$$

L'équation $\Omega_1 - 6aH^2 = 0$, où a a la valeur précédente, donne la condition que doit vérifier Φ. Elle s'écrit, après suppression du facteur Φ^2 :

$$\Sigma(\Phi) = n(n-1)\Phi\Phi^{\text{iv}} - 4(n-1)(n-3)\Phi'\Phi''' + 3(n-2)(n-3)\Phi''^2 = 0.$$

$\Sigma(\Phi)$ est un covariant; c'est, d'après les notations des algébristes allemands, le quatrième « rejet » (Überschiebung) de la forme Φ avec elle-même. Gordan le désigne par $(\Phi, \Phi)_4$.

L'identité $\Sigma(\Phi) = 0$ donne entre les coefficients de Φ des relations quadratiques, constituant un système invariant, qui s'ajoute aux n équations différentielles déduites de

$$X(\Phi) = n(a_1 - u)\Phi.$$

22. A l'aide du facteur de Darboux, nous allons pouvoir déterminer une nouvelle forme de l'intégrale générale, qui nous permettra de déterminer les valeurs acceptables de n.

$\frac{\Omega^2}{H^3}$ étant une intégrale de $X(f) = 0$, le facteur de Darboux est défini par

$$L = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Omega^2}{H^3}\right) H^6 = H^2(2\Omega' H - 3\Omega H') = \Omega H^2 \Theta.$$

Calculons Θ :

$$\Theta\Phi = 2H\Phi\Omega' - 3\Phi\Omega H'.$$

Or,

$$\Phi H' = \frac{1}{n}[\Omega + 2(n-2)H\Phi'].$$

Donc

$$-\frac{n}{3}\Theta\Phi = -\frac{2n}{3}H\Phi\Omega' + \Omega[\Omega + 2(n-2)H\Phi'] = \Omega^2 - \frac{2}{3}H\Omega_1.$$

Or, $\Omega_1 = aH^2$, où a a la valeur précédemment trouvée.

Donc

$$-\frac{n}{3}\Theta\Phi = \Omega^2 - \alpha H^3, \qquad \text{avec} \quad \alpha = -4\frac{(n-2)^2}{n-1}.$$

Remarquons que pour cette valeur particulière α de la constante Γ, $\Omega^2 - \Gamma H^3$ admet le facteur Φ^3.

Dérivons l'équation précédente par rapport à u :

$$-\frac{n}{3}(\Theta\Phi' + \Phi\Theta') = 2\Omega\Omega' - 3\alpha H^2 H'.$$

Or,

$$\Omega' = \frac{\Theta + 3\Omega H'}{2H}.$$

D'où, enfin,

$$\Phi\Theta' = \left(5 - \frac{12}{n}\right)\Theta\Phi'.$$

Puisque Φ et Θ font partie du même domaine de rationalité $[\Delta]$, $5 - \frac{12}{n}$ est un entier $k-1$ et $\Theta = \Phi^{k-1}.\text{const}$.

L'égalité $-\frac{n}{3}\Theta\Phi = \Omega^2 - \alpha H^3$ s'écrit maintenant

$$\Omega^2 = \alpha H^3 + \beta\Phi_k; \tag{I}$$

où β est une constante. C'est une *identité* entre les trois fonctions Φ, H, Ω.

D'après l'égalité $6 - \frac{12}{n} = k$, n, qui est supérieur à 2, ne peut prendre que les valeurs : 3, 4, 6 ou 12.

Pour $n = 3$ ou 4, $\frac{\Omega^2}{H^3} = \Gamma$ n'est pas l'intégrale irréductible. D'après l'identité (I), c'est $\frac{\Phi}{H} = \gamma$ qui est cette intégrale.

Quel que soit k, l'identité (I) nous permet de donner à l'intégrale générale une troisième forme remarquable : il suffit de remplacer dans (I) Ω^2 par ΓH^3; pour obtenir cette forme :

$$\frac{\Phi^k}{H} = \frac{\Gamma - \alpha}{\beta}.$$

De cette forme de l'intégrale générale et des deux équations donnant $X(\Phi)$ et $X(H)$, on déduit l'égalité

$$kn(a_1 - u) = 6[na_1 - (n-2)u]$$

et comme $k \neq 6$, nous en concluons que a_1 est nul.

23. III. *Formes canoniques.* — Φ peut donc être de degré 3, 4, 6 ou 12 et doit vérifier les deux équations

$$X(\Phi) = -nu\Phi \qquad (\text{puisque } a_1 = 0)$$

et

$$\Sigma(\Phi) = 0.$$

Cherchons l'équation que doit vérifier q, en éliminant Φ entre ces deux équations. Nous poserons

$$\Phi = u^n + a_2u^{n-2} + a_3u^{n-3} + \ldots + a_n.$$

Par identification, la première relation donne les valeurs des a_i en

fonction de q :

$$a_2 = -\frac{nq}{2}, \qquad a_3 = -\frac{nq'}{6}, \qquad a_4 = \frac{nq''}{24} - \frac{n(n-2)q^2}{8}, \qquad \ldots.$$

En portant ces valeurs dans la deuxième relation, le coefficient du terme de degré $2n - 8$ conduit à l'équation

$$q'' = 6aq^2$$

et l'on vérifie que pour les valeurs de n considérées, cette condition est suffisante.

On parvient plus élégamment au résultat précédent en utilisant la *théorie des formes*. Rappelons-en les résultats nécessaires pour la suite du calcul. Un covariant d'une forme Φ s'écrit

$$J(f) = n\Phi\frac{\partial f}{\partial\Phi'} + 2(n-1)\Phi'\frac{\partial f}{\partial\Phi''} + \ldots = 0.$$

Si l'on remplace Φ par a_0, Φ' par na_1, Φ'' par $n(n-1)a_2$, ..., on obtient le coefficient du terme de degré le plus élevé en u du covariant. Ce premier terme A_0 (*source* de Michael Roberts) permet de former tous les autres par application de l'opérateur :

$$K(f) = na_1\frac{\partial f}{\partial a_0} + (n-1)a_2\frac{\partial f}{\partial a_1} + (n-2)a_3\frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots.$$

Le covariant s'écrira

$$J(f) = A_0u^p + \frac{p}{1}A_1u^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!}A_2u^{p-2} + \ldots,$$

où

$$A_1 = K(A_0); \qquad A_2 = K(A_1) = K_2(A_0), \qquad \ldots$$

Ici, les a_i vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{da_1}{dx} + q + (n-1)a_2 - na_1^2 = 0, \\ \dfrac{da_2}{dx} + 2qa_1 + (n-2)a_3 - na_1a_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \dfrac{da_n}{dx} + nqa_{n-1} - na_1a_n = 0. \end{array}\right.$$

Déterminons maintenant $\Sigma(\Phi)$. Pour cela nous déterminerons d'abord les coefficients de H et de Ω.

Il a pour source : $na_0 n(n-1)a_2 - (n-1)n^2 a_1^2$, par application de la relation de définition de H. D'où

$$H = n^2(n-1) \times [(a_0 a_2 - a_1^2)u^{2n-4} + (n-2)(a_0 a_3 - a_1 a_2)u^{2n-5} + \ldots + a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2].$$

Ω se détermine par un calcul analogue. On trouve enfin,

$$\Sigma(\Phi) = n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)[(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)u^{2n-6} + (n-4) \times (a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3)u^{2n-7} + \ldots].$$

D'où les identités

$$a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = 0,$$
$$a_0 a_5 - 3a_1 a_4 + 2a_2 a_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Étudions maintenant les cas $n = 3, 4, 6, 12$, avec la condition supplémentaire, démontrée précédemment : $a_1 = 0$.

1° *Cas* $n = 3$. — Il convient de faire une étude directe, car H est du second degré et Φ n'est pas de degré minimum :

$$\Phi = u^3 + 3a_2 u + a_3, \qquad H = 18(a_2 u^2 + a_3 u - a_2^2);$$
$$\Omega = 54(a_3 u^3 + 2a_2^2 u^2 + 3a_2 a_3 u + a_3^2 + 2a_2^3).$$

L'identité $\Sigma(\Phi) = 0$ disparait. Le système différentiel s'écrit

$$\begin{cases} 2a_2 + q = 0, \\ a_2' + a_3 = 0, \\ a_3' + 3a_2 q = 0. \end{cases}$$

Il se résoud : $a_2 = -\frac{1}{2}q$, $a_3 = \frac{1}{2}q'$, avec la condition $q'' = 3q^2$. L'identité (I) est une intégrale première de cette dernière équation : $q'^2 - 2q^3 = \delta$.

L'intégrale générale est ici $\frac{\Omega}{\Phi} =$ const.

2° *Cas* $n = 4$. — H et Φ sont tous deux du quatrième degré. $\frac{H}{\Phi} =$ const. sera la forme la plus simple de l'intégrale générale. Le système différentiel s'écrit

$$\begin{cases} 3a_2 + q = 0, \\ a_2' + 2a_3 = 0, \\ a_3' + a_4 + 3a_2 q = 0, \\ a_4' + 4a_3 q = 0. \end{cases}$$

D'où

$$a_2 = -\frac{q}{3}, \qquad a_3 = \frac{1}{6}q', \qquad a_4 = -\frac{1}{6}q'' + q^2, \qquad \text{avec} \quad q''' = 16qq' :$$

$\Sigma(\Phi) = 0$ donne

$$a_4 + 3a_2^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad q'' = 8q^2.$$

L'identité (I) donne encore une intégrale première de cette dernière équation, qui, ici aussi, est une condition suffisante.

3° *Cas* $n = 6$ *et* $n = 12$. — Le système différentiel permet encore de calculer les a_i en fonction de q. On trouve

$$a_2 = -\frac{q}{n-1}, \qquad a_3 = \frac{q'}{(n-1)(n-2)}, \qquad \ldots.$$

L'identité (I) donne

$$a_3^2 + 4a_2^3 = \delta$$

ou

$$q'^2 - 4\frac{(n-2)^2}{n-1}q^3 = (n-1)^2(n-2)^2\delta$$

qui est une intégrale première de

$$q'' = 6\frac{(n-2)^2}{n-1}q^2.$$

En poursuivant le calcul des a_i, on vérifie que cette dernière condition est suffisante.

24. L'équation

$$q'' = 6aq^2, \qquad \text{où} \quad a = \frac{(n-2)^2}{n-1}$$

s'intègre à l'aide de la fonction $p(x)$ de Weierstrass, sous la forme

$$q = \frac{1}{a}p(x), \qquad \text{où} \quad g_2 = 0;$$

g_3 est une constante d'intégration.

En multipliant x par une constante λ, g_3 est divisé par λ^3 ce qui permet de donner à g_3 une valeur arbitraire, par exemple : $g = 4$. Nous obtiendrons la forme canonique de l'équation en lui appliquant la transformation $S_{x,\xi}$ avec $\xi = p(x)$.

L'équation

$$\frac{du}{dx} + u^2 = q(x)$$

devient

$$\frac{dv}{d\xi} + v^2 = r(\xi),$$

avec

$$q = a \qquad \text{et} \qquad r = q\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}[x, \xi].$$

D'ailleurs

$$\frac{d\xi}{dx} = 2\sqrt{\xi^3 - 1} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi^3 - 1}}$$

qui permet de calculer les dérivées successives de x par rapport à ξ. On obtient alors

$$r = \frac{\xi}{16}\,\frac{C_0\xi^3 - 4C_1}{(\xi^3 - 1)^2}, \qquad \text{avec} \quad C_0 = \frac{4}{a} - 3, \qquad C_1 = \frac{1}{a} + 6.$$

Une nouvelle transformation $S_{\xi,t}$ où $\xi^3 = \frac{-t}{1-2t}$, transforme l'équation

$$\frac{dv}{d\xi} + v^2 = r(\xi)$$

en

$$\frac{dw}{dt} + w^2 = Q(t),$$

où

$$Q(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{1-\lambda^2}{t^2} + \frac{1-\nu^2}{(1-t)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{t(1-t)}\right],$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{2}, \qquad \nu = \frac{n}{6(n-2)} = \frac{1}{k}.$$

Cette équation n'est autre que celle que Schwarz a déduite de l'équation de Gauss et correspondant aux polyèdres réguliers :

$n = 3$: trièdre équifacial à face de $\frac{\pi}{3}$;
$n = 4$: tétraèdre ;
$n = 6$: cube ou octaèdre ;
$n = 12$: dodécaèdre ou icosaèdre.

La fonction $w(t)$ est la fonction polyédrique, qui demeure invariante par les $2N$ substitutions linéaires du groupe, correspondant au groupe de rotation dn polyèdre. Les valeurs de N se déduisant facilement de celles de n.

La transformation directe $S_{x,t}$ permet de construire les formes Φ à partir de $Q(t)$. On déduit en effet par cette transformation, q de Q, puis Φ de q, comme il a été indiqué au numéro précédent.

25. On obtient une nouvelle forme canonique de l'équation (A), en prenant comme variable η au lieu de x et en appliquant à l'équation (A) la transformation $S_{x,\eta}$. D'après l'équation (C), le second membre de l'équation transformée est nul :

$$\frac{dw}{d\eta} + w^2 = 0, \qquad \text{où} \quad w = \frac{1}{\eta - C}.$$

On retrouve pour u la forme connue

$$u = w\eta' - \frac{\eta''}{2\eta'}.$$

Nous sommes donc amené ici à considérer u comme une fonction de C puis à effectuer une transformation homographique sur η :

$$\eta_i = \alpha + \frac{\beta}{\eta - \gamma},$$

à laquelle correspond la même transformation sur C :

$$C_i = \alpha + \frac{\beta}{C - \gamma}.$$

Enfin,

$$\Phi(u) = \prod (u - u_i) = M\,\frac{(C - C_i)}{(\eta - C)^n}$$

et nous poserons

$$\varphi(c) = \prod (c - c_i).$$

D'où la conclusion : les opérations qui ont conduit à H et Ω à partir de Φ mènent à partir de $\varphi(c)$, *dont les coefficients sont constants* à $h(c)$ et $\omega(c)$, les trois polynomes étant toujours liés par l'identité (I) :

$$\omega^2 = \alpha h^3 + \beta\varphi^k.$$

Les expressions étant les mêmes pour η que pour C et u, l'invariant $\frac{\omega^2(\eta)}{h^3(\eta)}$ est donc rationnel dans $[\Delta]$ et η est défini par

$$\frac{\omega^2(\eta)}{h^3(\eta)} = \mathrm{R}(x),$$

où R est une expression rationnelle quelconque dans $[\Delta]$.

Nous prendrons donc la variable canonique : $t = \frac{\omega^2(\eta)}{\alpha h^3(\eta)}$ au lieu de x. Calculons $\frac{d\eta}{dt}$.

Pour cela, différentions l'égalité précédente :

$$\alpha\, dt = \frac{\omega}{h^4}(2\omega' h - 3\omega h')\, d\eta.$$

Or,

$$2\omega' h - 3\omega h' = \theta, \qquad \text{avec} \quad \theta = \beta\varphi^{k-1}.$$

Nous obtenons donc

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{h^4\varphi^{1-k}}{\omega}.$$

Or $t = \frac{\omega^2}{\alpha h^3}$ et, d'après l'identité (I) :

$$t - 1 = \frac{\omega^2 - \alpha h^3}{\alpha h^3} = \frac{\beta\varphi^k}{\alpha h^3}.$$

Nous tirerons d'abord ω de la première :

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{2}} \varphi^{1-k}.$$

Nous tirerons maintenant h de la deuxième :

$$\frac{d\eta}{dt} = \alpha^{-\frac{1}{3}}\beta^{-\frac{1}{6}} t^{-\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{5}{6}}\varphi^{1-\frac{k}{6}}.$$

D'ailleurs $1 - \frac{k}{6} = \frac{2}{n}$,

$$\varphi = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^{\frac{n}{2}} \alpha^{\frac{n}{6}} \beta^{\frac{n}{12}} t^{\frac{n}{4}} (t-1)^{\frac{5n}{12}}$$

qui donne la solution complète du problème pour les valeurs de n considérées.

Si l'on calcule $[\eta, t]$ à partir de la valeur précédente de $\frac{d\eta}{dt}$, on retrouve $[\eta, t] = -2Q(t)$, Q étant le même que plus haut.

Enfin, une transformation $S_{t,x}$, où $t = \mathrm{R}(x)$, R étant une expression rationnelle quelconque dans $[\Delta]$, donne toutes les solutions du problème à partir des valeurs de Φ déduites de celles de φ.

VI. — Équation $y' = \varphi\,\mathrm{A}(x, y)$, les caractéristiques d'Ampère [7].

26. Il est facile de montrer que l'équation $\frac{dy}{dx} = \varphi\mathrm{A} + \mathrm{B}$, où φ est un paramètre et A et B des fonctions de x et y, se ramène à la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi\mathrm{A},$$

à condition de poser

$$y = u + \int \mathrm{B}\, dx.$$

Nous obtiendrons les différents cas de réduction, lorsque l'un des éléments

$$z, \quad \mathrm{K} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^p, \qquad \mathrm{J} = \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{Log}\,\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \mathrm{I} = [z, y],$$

où z est solution de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi\mathrm{A}\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

est rationnel en φ.

I. *z est un polynome en φ.* — Nous poserons

$$z = \beta_0\varphi^m + \ldots + \beta_m.$$

En substituant cette valeur dans (2), il vient

$$(\Sigma) \qquad \frac{\partial\beta_0}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial\beta_0}{\partial x} + \mathrm{A}\,\frac{\partial\beta_1}{\partial y} = 0; \qquad \ldots; \qquad \frac{\partial\beta_m}{\partial x} = 0.$$

C'est par l'utilisation des caractéristiques d'Ampère du système que Drach a pu intégrer (Σ). Nous verrons, sur le présent exemple, qui est l'illustration la plus schématique de la méthode, comment celle-ci doit être utilisée.

La première et la dernière équation de (Σ) permettent de poser $\beta_0 = x$ et $\beta_m = y$; puis $\mathrm{A}\,\frac{\partial\beta_1}{\partial y} = -1$, qui détermine A.

Considérons le multiplicateur $\frac{\partial z}{\partial y}$ de l'équation (1) : c'est un polynome de degré $m-1$, parce que $\beta_0 = x$; son premier terme est $-\frac{1}{A}\varphi^{m-1}$. Si $\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}$ sont ses racines, il s'écrira

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{A}\prod_{i=1}^{m-1}(\varphi - \omega_i)$$

et

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y}(dy - \varphi A\, dx) = d\beta_0 \varphi_m + \ldots + d\beta_m.$$

Nous allons établir la propriété suivante, qui est fondamentale : les expressions $\omega_i =$ const. sont les intégrales générales de

$$dy - \omega_i A\, dx = 0.$$

Autrement dit, les ω_i sont les variables caractéristiques d'Ampère de (Σ). En prenant comme inconnue $\beta_{m-1} = \lambda$, on peut remplacer le système (Σ) par une équation unique (E) aux dérivées partielles à deux variables x et y d'ordre $m-1$, où les ω_i sont les combinaisons intégrables des caractéristiques de Cauchy de cette équation (E).

Pour établir la propriété énoncée, il suffit d'écrire la résolvante en K :

$$(4) \qquad \frac{\partial K}{\partial x} + \varphi A \frac{\partial K}{\partial y} + \varphi K \frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

où K a l'expression (3).

Si dans l'équation (4) on fait $\varphi = \omega_i$, $\frac{\partial K}{\partial x}$ et $\frac{\partial K}{\partial y}$ se réduisent à

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x}\prod_k{}'(\omega_i - \omega_k), \qquad \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial \omega_i}{\partial y}\prod_k{}'(\omega_i - \omega_k);$$

où le symbole $\prod'$ indique que l'on donne à k toutes les valeurs de 1 à $m-1$ sauf la valeur i.

L'équation (4) prend donc pour cette valeur de φ la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + A\omega_i \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = 0$$

et la propriété est démontrée.

D'autre part $z(\omega_i)$ est aussi l'intégrale de cette même équation : $dy - A\omega_i dx = 0$. Donc $z(\omega_i)$ est une fonction arbitraire de ω_i. Les ω_i vérifient donc le système

$$(S_1) \qquad x\omega_i^m + \beta_1\omega_i^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}\omega_i + y = f_i(\omega_i) \qquad (i = 1, \ldots, m-1),$$

où les f_i sont arbitraires.

Enfin, les ω_i sont racines de (3); donc, puisque

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \sum_i \frac{\partial z}{\partial \omega_i}d\omega_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -A\omega_i\frac{\partial z}{\partial y},$$

on en conclut $\frac{\partial z}{\partial \omega_i} = 0$. Les ω_i vérifient aussi le système

$$(S_2) \qquad mx\omega_i^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1} = f_i'(\omega_i) \qquad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Les systèmes (S_1) et (S_2) comprennent donc $2m-2$ équations aux $2m-2$ inconnues ω_i, β_i, dont les expressions dépendent de $m-1$ fonctions arbitraires des $m-1$ variables caractéristiques ω_i.

Dans le cas ou une racine ω_k est double, on adjoint au système (S_2) l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega_k^2} = f_k''(\omega_k)$$

qui remplace l'équation en ω_{m-1}.

27. II. *z est rationnel en φ.* — Nous supposerons que tous les pôles sont simples :

$$z(\varphi) = A_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{\varphi - a_i}.$$

Le multiplicateur K possède ici $2n-1$ racines ω_i, qui sont encore les variables d'Ampère, $\omega_i =$ const. étant l'intégrale de $dy - \omega_i A\, dx = 0$. Une transformation ponctuelle permet de poser

$$A_0 = x, \qquad z(0) = x - \sum \frac{A_i}{a_i} = y.$$

Les systèmes (S_1) et (S_2) s'écrivent

$$(S_1) \qquad x + \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\omega_i - a_k} = f_i(\omega_i) \qquad (i = 1, \ldots, 2n-1),$$

$$(S_2) \qquad -\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(\omega_i - a_k)^2} = f_i'(\omega_i) \qquad (i = 1, \ldots, 2n-1).$$

Ils comprennent $2n-1$ fonctions arbitraires des $2n-1$ variables caractéristiques. A est donné comme précédemment par

$$-1 = A\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_k}{\partial y}.$$

28. III. *Le multiplicateur K est rationnel en φ.* — Supposons encore les pôles simples :

$$K = B_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{\varphi - b_i}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la résolvante en K :

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \varphi A\frac{\partial K}{\partial y} + \varphi K\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

et qu'on identifie à zéro l'expression en φ obtenue, on trouve

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial b_i}{\partial x} + b_i A\dfrac{\partial b_i}{\partial y} = 0; \qquad \dfrac{\partial B_i}{\partial x} + b_i A\dfrac{\partial B_i}{\partial y} + B_i\dfrac{\partial(b_i A)}{\partial y} = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n); \\ \dfrac{\partial(AB_0)}{\partial y} = 0; \qquad \dfrac{\partial B_0}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}[A(B_1 + \ldots + B_n)] = 0. \end{cases}$$

Un changement de variable permet de poser $AB_0 = 1$. D'autre part si $\varphi = 0$, $\frac{\partial K}{\partial x} = 0$. Nous poserons donc

$$B_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{b_i} = g(y).$$

De la première équation (Σ), il résulte que b_i est une solution de (2), où $\varphi = b_i$. D'après le raisonnement du n° **26**, on en conclut que $b_i =$ const. est l'intégrale générale de $dy - b_i A\,dx = 0$ et que les b_i sont des variables d'Ampère. La deuxième équation (Σ) montre que B_i est un multiplicateur de cette même équation :

$$dy - b_i A\,dx = 0.$$

On peut donc poser

$$B_i = f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y},$$

où f_i est une fonction arbitraire de l'argument indiqué.

On peut alors obtenir z par des intégrales dans le plan complexe, où les points b_i sont supposés fixés.

En effet,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = K = B_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y}}{\varphi - b_i},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\varphi A\frac{\partial z}{\partial y} = -\varphi - \frac{\varphi}{B_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y}}{\varphi - b_i}.$$

Mais [1^re^ équation (Σ)] :

$$\frac{1}{B_0}\frac{\partial b_i}{\partial y} = -\frac{1}{b_i}\frac{\partial b_i}{\partial x}.$$

Donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\varphi + \varphi\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial x}}{b_i(\varphi - b_i)}.$$

Enfin, pour $\varphi = 0$, on a posé $K(0) = g(y)$. Donc

$$z = -\varphi x + \int g(y)\,dy + \varphi\int^{b_i}\frac{f(b)\,db}{b(\varphi - b)}.$$

Par un raisonnement analogue à celui du n° **26**, on conclut que, si ω_k est une racine de $K = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, $\omega_k =$ const. est l'intégrale de $dy - \omega_k A\,dx = 0$. Les ω_k sont donc aussi des variables caractéristiques. En écrivant que $z(\omega_k)$ est une fonction arbitraire de ω_k, on obtient le système

$$(S_1)\qquad -x\omega_k + \int g(y)\,dy + \omega_k\sum_{i=1}^{n}\int^{b_i}\frac{f(b)\,db}{b(\omega_k - b)} = F_k(\omega_k) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

où les F_k sont arbitraires.

Puis, en écrivant que $\frac{\partial z}{\partial \omega_k} = 0$, après avoir remarqué que

$$\omega_k\sum_{i=1}^{n}\int^{b_i}\frac{f(b)\,db}{b(\omega_k - b)} = \sum_{i=1}^{n}\left|\int^{b_i}\frac{f(b)}{b}\,db + \int^{b_i}\frac{f(b)}{\omega_k - b}\,db\right|,$$

on obtient le système

$$(S_2)\qquad -x - \sum_{i=1}^{n}\int^{b_i}\frac{f(b)\,db}{(\omega_k - b)^2} = F'_k(\omega_k) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ces $2n$ relations définissent les $2n$ variables caractéristiques d'Ampère $\omega_k (k = 1, \ldots, n)$ et $b_i (i = 1, \ldots, n)$ au moyen de x et y.

Il reste à déterminer $A(x, y)$ pour déterminer l'équation

$$A = \frac{1}{B_0} \quad \text{et} \quad B_0 = g(y) + \sum \frac{B_i}{b_i}.$$

Or,

$$B_i = f_i(b_i) \frac{\partial b_i}{\partial y}.$$

Donc

$$\frac{1}{A} = g(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(b_i)}{b_i} \frac{\partial b_i}{\partial y}.$$

Comme précédemment, dans le cas des racines multiples d'ordre α, le système (S_2) est formé des dérivées jusqu'à l'ordre α de la racine multiple considérée, ce qui diminue d'autant d'unités le nombre des ω_k distincts, mais le système (S_2) comprend toujours le même nombre n de relations.

29. IV. *La dérivée logarithmique du multiplicateur est rationnelle.* — Nous poserons

$$J = \frac{\sigma'}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\varphi - b_i}$$

et nous nous bornerons d'abord au cas où les m_i sont constants. Dans ces conditions, K sera algébrique et nous pourrons encore utiliser la résolvante de K et non celle de J.

K et z seront définis par

$$K = \sigma \prod_{i=1}^{n} (\varphi - b_i)^{m_i},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = K(dy - \varphi A \, dx),$$

d'après l'équation (2).

En formant la résolvante en K et en y substituant la valeur précédente de K, l'identification de l'expression en φ obtenue donne le système

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma} \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = A \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \dfrac{\partial b_i}{\partial y}; \qquad \dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{Log}(A\sigma) = 0; \\ \dfrac{\partial b_i}{\partial x} + A\, b_i \dfrac{\partial b_i}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Les b_i sont donc ici encore des variables caractéristiques. Nous poserons ensuite $A\sigma = 1$.

Enfin, la première équation (Σ) devient, compte tenu de la troisième :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{b_i} \frac{\partial b_i}{\partial x} = 0.$$

Donc $\operatorname{Log}\left(\sigma \prod b_i^{m_i}\right)$ est une fonction de y seul, que nous pouvons supposer égale à 1. Alors dz devient

$$dz = \frac{\prod (\varphi - b_i)^{m_i}}{\prod b_i^{m_i}} \left(dy - \varphi \prod b_i^{m_i} dx \right).$$

Il s'agit de déterminer les b_i en fonction de x et y, de façon que dz soit une différentielle exacte, quel que soit φ.

Pour y parvenir, Drach pose *a priori* :

$$dz = \prod_{i=1}^{n} (\varphi - b_i)^{m_i+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i \, db_i}{\varphi - b_i}.$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité de cette forme, on trouve :

1° $$\lambda_i = \frac{\partial \theta}{\partial b_i} \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

2° la fonction unique θ des n variables b_i doit satisfaire au système

$$(T) \qquad (b_k - b_i) \frac{\partial^2 \theta}{\partial b_i \partial b_k} - \frac{\partial \theta}{\partial b_k}(m_i + 1) + \frac{\partial \theta}{\partial b_i}(m_k + 1) = 0.$$

Ce système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations est la généralisation de l'équation d'Euler et Poisson rencontrée par Darboux [13]. Voici comment on le résoud. On obtient des solutions particulières en posant

$$\prod(\sigma - b_i) = \varphi,$$

où φ est un paramètre. Les racines $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont les solutio[ns]
particulières cherchées.

La solution générale est alors

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int \sigma_i F_i(\varphi)\, d\varphi,$$

les intégrales étant prises entre des limites constantes ou le long [de]
contours fermés et les F_i étant arbitraires.

Enfin, il faut identifier les deux formes de dz, ce qui don[ne]
l'identité en φ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\, db_i}{\varphi - b_i} = \frac{dy - \varphi \prod b_i^{m_i}\, dx}{\prod b_i^{m_i}(\varphi - b_i)}.$$

De la théorie élémentaire de la décomposition des fractio[ns]
rationnelles, on en déduit le système

$$(\mathrm{S}) \qquad \lambda_k\, db_k = \frac{dy - b_k \prod b_i^{m_i}\, dx}{\prod b_i^{m_i} \prod_i{}' (b_k - b_i)}, \qquad \text{où} \quad \lambda_k = \frac{\partial\theta}{\partial b_k} \qquad (k = 1, \ldots, [n])$$

Il résulte de ce qui précède que le système (S) est complèteme[nt]
intégrable. On obtient n intégrales, qui donnent $n-2$ relatio[ns]
entre les b_k et deux équations définissant x et y en fonction des [b].

Exemple. — 1° $n = 2$. Le système (S) s'écrit

$$\frac{\partial\theta}{\partial b_1} db_1 = \frac{dy - b_1^{m_1+1} b_2^{m_2}\, dx}{b_1^{m_1} b_2^{m_2}(b_1 - b_2)},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial b_2} db_2 = \frac{dy - b_1^{m_1} b_2^{m_2+1}\, dx}{b_1^{m_1} b_2^{m_2}(b_2 - b_1)};$$

θ vérifie l'équation

$$(\mathrm{T}) \qquad (b_1 - b_2)\frac{\partial^2\theta}{\partial b_1 \partial b_2} - (m_2+1)\frac{\partial\theta}{\partial b_1} + (m_1+1)\frac{\partial\theta}{\partial b_2} = 0.$$

Les combinaisons intégrables du système (S) sont

$$dx = -d\theta,$$

$$dy = -b_1^{m_1+1} b_2^{m_2+1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial b_1}\frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial\theta}{\partial b_2}\frac{db_2}{b_2}\right).$$

2° $n = 3$: On obtient sans peine les combinaisons intégrables :

$$d\theta = 0,$$

$$dy = -b_1^{m_1+1} b_2^{m_2+1} b_3^{m_3+1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial b_1}\frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial\theta}{\partial b_2}\frac{db_2}{b_2} + \frac{\partial\theta}{\partial b_3}\frac{db_3}{b_3}\right),$$

$$dx = -\mathfrak{S}(b_2 + b_3)\frac{\partial\theta}{\partial b_1} db_1,$$

$\mathfrak{S}$ désignant le signe de sommation de Lamé.

θ, bien entendu, vérifie le système (T).

30. V. *L'invariant* J *est rationnel.* — Nous poserons

$$J = \frac{\partial \operatorname{Log}\sigma}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\varphi - b_i},$$

mais, maintenant, les m_i ne sont plus des constantes. En formant
la résolvante en J :

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \varphi A \frac{\partial J}{\partial y} + \varphi J \frac{\partial A}{\partial y} + \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0,$$

en y substituant la valeur précédente de J et en identifiant à zéro
l'expression en φ obtenue, on trouve le système

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} (1) & \dfrac{\partial^2 \operatorname{Log}\sigma}{\partial x\, \partial y} + \sum \dfrac{\partial(m_i A)}{\partial y} = 0; \\ (2) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(A \dfrac{\partial \operatorname{Log}\sigma}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0; \\ (3) & \dfrac{\partial m_i}{\partial x} + A \dfrac{\partial}{\partial y}(b_i m_i) + m_i b_i \dfrac{\partial A}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n); \\ (4) & \dfrac{\partial b_i}{\partial x} + A b_i \dfrac{\partial b_i}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

De (4), nous déduisons que les b_i sont encore des variables
d'Ampère; d'après (3), m_i est aussi un multiplicateur de

$$dy - b_i A\, dx = 0.$$

Nous poserons donc

$$m_i = f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y} \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

où les f_i sont arbitraires.

D'autre part, en intégrant (1), nous obtenons

$$\frac{\partial \operatorname{Log} \sigma}{\partial x} + \mathrm{A}\sum m_i = 0$$

en faisant une transformation ponctuelle, de façon à annuler la fonction arbitraire.

En remplaçant m_i par la valeur précédente :

$$\frac{\partial \operatorname{Log} \sigma}{\partial x} + \sum \mathrm{A} f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y} = 0$$

qui, en utilisant (4), devient

$$\frac{\partial \operatorname{Log} \sigma}{\partial x} - \sum \frac{f_i(b_i)}{b_i}\frac{\partial b_i}{\partial x} = 0;$$

que l'on peut intégrer, en posant

$$f_i(b_i) = b_i \mathrm{F}'_i(b_i).$$

D'où

$$\operatorname{Log} \sigma = g(y) + \sum \mathrm{F}_i(b_i).$$

Enfin A est donné par l'équation (2), qui s'intègre une première fois :

$$\mathrm{A}\left(g' + \sum \mathrm{F}'_i \frac{\partial b_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} = f(x).$$

Si $f(x)$ n'est pas nulle, on ne peut intégrer cette équation linéaire sans conserver des signes de quadrature :

$$\mathrm{A} = \left[f_1(x) + f(x)\int \sigma\, dy\right]\frac{1}{\sigma}.$$

K est donné par

$$\operatorname{Log} \mathrm{K} = \int \mathrm{J}\, dy,$$

puis z par

$$dz = \mathrm{K}(dy - \varphi \mathrm{A}\, dx).$$

Dans le cas où I est rationnel en φ, les intégrales ne permettent plus de représenter la solution, le système (Σ) n'étant pas intégrable.

Nous tenons à souligner le caractère profondément original de la méthode d'intégration du système (Σ) ou de l'équation unique aux dérivées partielles d'ordre n ou $2n$ et à deux variables x et y. Nous pensons que c'est ici que se trouve en puissance, la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont l'exposé est l'objet du fascicule n° 129, que nous avons consacré à cette question.

VII. — Équation $y' = f(x, y, \varphi)$.

31. Pour ne pas nous entraîner à des redites, nous n'étudierons que le cas où les équations de la forme indiquée admettent pour intégrale un polynome en φ. Nous supposerons l'équation réduite de manière à admettre la solution

$$y = \text{const.} \quad \text{pour} \quad \varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \text{const.} \quad \text{pour} \quad \varphi = \infty.$$

Soit donc l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \sigma\varphi \frac{\prod_{i=1}^{m}(\varphi - c_i)}{\prod_{i=1}^{m}(\varphi - b_i)} = \sigma\varphi\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}.$$

L'équation aux dérivées partielles correspondante est

$$(2) \qquad \mathrm{P}\frac{\partial z}{\partial x} + \sigma\varphi \mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

et nous cherchons les conditions, pour qu'elle admette la solution

$$(3) \qquad z = \mathrm{B}_0 + \varphi \mathrm{B}_1 + \ldots + \varphi^n \mathrm{B}_n.$$

Par identification dans (2) du polynome en φ obtenu, il vient

$$\frac{\partial \mathrm{B}_0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{B}_n}{\partial y} = 0,$$

ce qui permet de poser

$$\mathrm{B}_0 = y, \qquad \mathrm{B}_n = x.$$

Puis

(4) $$P\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\varphi\frac{\partial B_2}{\partial x}+\ldots+\varphi^{n-1}\right)+\sigma Q\left(1+\varphi\frac{\partial B_1}{\partial y}+\ldots+\varphi^{n-1}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y}\right)=$$

Cette identité n'est possible que si

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}+\ldots+\varphi^{n-1}=QR;\quad 1+\varphi\frac{\partial B_1}{\partial y}+\ldots+\varphi^{n-1}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y}=-\frac{PR}{\sigma}.$$

D'où il résulte que $n-1\geqq m$ et R est de degré $r=n-1-m$.
Nous poserons

$$R=\prod_{i=1}^{r}(\varphi-a_i).$$

Un raisonnement très simple va nous montrer que les a_i so
les variables d'Ampère. En effet, elles annulent à la fois $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ do
rendent z constant. D'autre part, $a_i=$ const. est l'intégrale de

(5) $$P(a_i)\,dy-\sigma a_i Q(a_i)\,dx=0.$$

On démontre cette proposition comme au paragraphe précéde
en formant la résolvante en K :

$$\frac{\partial K}{\partial x}+\sigma\varphi\frac{Q}{P}\frac{\partial K}{\partial y}+\varphi K\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{Q}{P}\right)=0.$$

où

$$K=\frac{z}{y}=1+\varphi\frac{\partial B_1}{\partial y}+\ldots+\varphi^{n-1}\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y}=-\frac{PR}{\sigma}.$$

Si, dans cette équation, on fait $\varphi=a_i$, K s'annule et $\frac{\partial K}{\partial x}$ se réd
à $\frac{\partial a_i}{\partial x}$ multiplié par $\frac{P}{\sigma}\prod_k{}'(a_i-a_k)$. De même $\frac{\partial K}{\partial y}$ se réduit à $\frac{\partial a_i}{\partial y}$ m
tiplié par le même facteur. Après suppression de ce facteur, il re
donc

$$\frac{\partial a_i}{\partial x}+\sigma a_i\frac{Q}{P}\frac{\partial a_i}{\partial y}=0$$

qui démontre la propriété énoncée.

Les a_i sont les variables d'Ampère du système aux inconnues
a_i, b_j, c_k. Comme plus haut, on forme les deux systèmes

$$(S_1)\quad z(a_i)=y+a_iB_1+\ldots+\quad a_i^n\quad x=f_i(a_i)\qquad(i=1,\ldots,r),$$
$$(S_2)\quad z'(a_i)=\qquad B_1+\ldots+na_i^{n-1}x=f_i'(a_i)\qquad(i=1,\ldots,r):$$

où les f_i sont arbitraires.

En exprimant que les b_i sont racines de $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ et les c_i de $\frac{\partial z}{\partial x}=0$,
n obtient le système

$$(T)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial B_1}{\partial x}+c_i\dfrac{\partial B_2}{\partial x}+\ldots+c_i^{n-1}\quad=0 & (i=1,\ldots,m),\\[2mm] 1+b_i\dfrac{\partial B_1}{\partial y}+\ldots+b_i^{n-1}\dfrac{\partial B_{n-1}}{\partial y}=0 & (i=1,\ldots,m)\end{cases}$$

ui détermine les b_i et les c_i, les B_i ayant été déterminés par les
ystèmes (S_1) et (S_2). Enfin, dans l'équation (4), les termes de
egré $m+n-1$ donnent σ :

$$\sigma\frac{\partial B_{n-1}}{\partial y}+1=0.$$

Discussion. — 1° $n=m+1$, $r=0$: il n'y a pas de variables
'Ampère; le système (T) subsiste seul. Les B_i sont arbitraires.

2° $m+1<n<2m+1$: les $2r$ relations (S_1) et (S_2) déterminent
$(n-m-1)$ des B_i au moyen des autres, qui demeurent arbitraires
t des $n-m-1$ variables d'Ampère.

3° $n>2m+1$: Tous les B_i sont déterminés; il reste $r-m$
elations permettant d'exprimer $r-m$ des a_i au moyen des m autres,
ui demeurent arbitraires.

32. *Exemple* : $\frac{dy}{dx}=\sigma\varphi\frac{\varphi-c}{\varphi-b}$.

1° Soit l'intégrale

$$z=y+\varphi B+x\varphi^2.$$

n a aussitôt

$$C=-\frac{\partial B}{\partial x},\qquad\text{puis}\quad\sigma\frac{\partial B}{\partial y}=-1,\qquad b=\sigma=-\frac{1}{\frac{\partial B}{\partial y}}.$$

n'y a pas de variable d'Ampère. B est arbitraire. C'est le cas 1° de
discussion précédente.

2° Soit l'intégrale

$$z=y+\varphi B_1+\varphi^2B_2+x\varphi^3.$$

Il y a une variable d'Ampère a. Les équations (S_1) et (S_2) :

$$(S_1)\qquad y+aB_1+a^2B_2+\quad xa^3=f(a),$$
$$(S_2)\qquad B_1+2aB_2+3xa^2=f'(a)$$

éfinissent B_1 et B_2 au moyen de a et de la fonction arbitraire $f(a)$.

Puis b, c et σ sont donnés par le système (T) :

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}+\varphi\frac{\partial B_2}{\partial x}+\varphi^2=(\varphi-c)(\varphi-a),$$

$$\sigma\left(1+\varphi\frac{\partial B_1}{\partial y}-\varphi^2\frac{\partial B_2}{\partial y}\right)=-(\varphi-b)(\varphi-a).$$

D'où

$$\sigma=-\frac{1}{\dfrac{\partial B_2}{\partial y}};\qquad c+a=-\frac{\partial B_2}{\partial x};\qquad b+a=\sigma\frac{\partial B_1}{\partial y}.$$

La solution admet donc, en définitive, comme arbitraires a et $f(a)$.

3° Quand l'ordre du polynome ϖ augmente d'une unité, les B_i et les a_i augmentent d'une unité et le nombre des équations de deux unités. Il y a donc toujours un seul a_i arbitraire.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

I. — Généralités.

33. Soit l'équation

$$y''=f(x,y,y'),\tag{1}$$

où f est rationnelle par rapport à tous ses arguments.

L'intégrale générale sera définie par

$$\varphi_1(x,y,y')=C_1,\qquad \varphi_2(x,y,y')=C_2;$$

où φ_1 et φ_2 forment un système fondamental de l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}f=0.\tag{2}$$

Les cas de réduction sont obtenus par l'étude des sous-groupes du groupe ponctuel à deux variables Γ_2. Le nombre de ces groupes est considérable mais le nombre des groupes *primitifs* n'est que de six. Les groupes finis sont linéaires ou projectifs et n'auront pas à notre point de vue de conséquences intéressantes.

Les deux groupes primitifs infinis sont :

1° Le groupe défini par

$$d\left[\frac{D(F_1,F_2)}{D(f_1,f_2)}\right]=0.$$

Les dérivées logarithmiques d'un multiplicateur sont rationnelles.

2° Le groupe défini par

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(f_1,f_2)}=1.$$

Un multiplicateur et un seul est rationnel.

Parmi les groupes imprimitifs et infinis, nous citerons :

1° $F_1=\Phi(f_1)$, où Φ est arbitraire, avec

$$F_2=\frac{1}{\dfrac{\partial F_1}{\partial f_1}}\left(f_2+\frac{\dfrac{\partial^2F_1}{\partial f_1^2}}{\dfrac{\partial F_1}{\partial f_1}}\right),$$

où on pourra déterminer successivement f_1 et f_2,

2° $F_1=\Phi(f_1)$, où Φ est arbitraire avec

$$F_2=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial f_1}\right)^2}(f_2+[F_1,f_1]),$$

où $[F_1,f_1]$ est l'invariant de Cayley-Schwarz.

Dans les deux cas, f_1 sera une solution de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+A(x,y,y')\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\tag{3}$$

où A vérifie

$$f\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}y'+\frac{\partial A}{\partial y'}f\right)=(A-y')\left(\frac{\partial f}{\partial x}+A\frac{\partial f}{\partial y}\right)\tag{4}$$

comme on le voit en formant le crochet des équations (2) et (3), compte tenu de

$$(y'-A)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+f\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=0.$$

f_2 sera alors déterminé à partir des résolvantes en J ou I, qui devront admettre des solutions rationnelles, avec

$$J = f_2\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} \qquad \text{et} \qquad I = f_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 - [f_1, y].$$

D'une façon générale, si $\Lambda(x, y, y') = \text{const.}$ est une intégrale première de (1), il conviendra pour cette nouvelle équation, d'étudier tous les cas de réduction rencontrés au premier ordre.

Réservant pour un dernier chapitre l'étude des équations linéaires, où la théorie classsique de Picard est éclairée d'un jour nouveau, nous allons aborder aussitôt l'équation $y'' = f(x, y)$ dont l'étude s'est montrée particulièrement féconde.

II. — Équation $y'' = F(x, y)$ admettant une intégrale première rationnelle en y' [8].

34. Soit

$$y'' = F(x, y) \tag{1}$$

l'équation à étudier, et

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}F(x, y) = 0 \tag{2}$$

l'équation aux dérivées partielles correspondante.

Cette équation doit être identique à

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, y')} = 0, \tag{3}$$

où φ et ψ sont deux intégrales premières.

D'où il résulte

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, y')} = M, \qquad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(y', x)} = My', \qquad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = MF;$$

M est le multiplicateur de Jacobi. Il vérifie l'équation

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial (My')}{\partial y} + \frac{\partial (MF)}{\partial y'} = 0 \tag{4}$$

qui n'est autre que $X(M) = 0$ et admet la solution évidente $M = 1$.

Il est clair que, dans ces conditions, $\iint dx\,dy$ est un invariant intégral de l'équation (2). Donc, si φ et ψ sont deux solutions fondamentales de (2) : $X(\varphi) = 0$, $X(\psi) = 0$, elles doivent vérifier en outre :

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = 1$$

et ces solutions fondamentales sont définies aux transformations près du groupe défini par

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(\varphi, \psi)} = 1.$$

Si $\varphi(x, y, y') = C$ est une intégrale première, une deuxième est donnée par

$$\psi = \int \frac{dy - y'\,dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}},$$

où y' est remplacée par sa valeur en x, y, C. Démontrons que $\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}$ est un multiplicateur de $dy - y'\,dx$. Pour cela, résolvons φ en y' : $y = \chi(x, y, C)$ et montrons que $\frac{\partial \chi}{\partial C}$, qui est l'inverse de $\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$ est un multiplicateur de $dy - y'\,dx$.

Dérivons y', il vient

$$F = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\chi$$

puis dérivons par rapport à C :

$$0 = \frac{\partial^2 \chi}{\partial C\,\partial x} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial C\,\partial y}\chi + \frac{\partial \chi}{\partial C}\frac{\partial \chi}{\partial y},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

35. Nous n'étudierons ici que le cas où φ est un polynome en y', de degré n. La méthode apparaîtra clairement sur ce cas simple. Soit

$$\varphi = a_0 y'^n + \frac{n}{1} a_1 y'^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{5}$$

En écrivant que $X(\varphi) = 0$ est une identité en y', on obtient le système

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_0}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial a_0}{\partial x} + n\dfrac{\partial a_1}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{n-1}{2}\dfrac{\partial a_2}{\partial y} + a_0 F = 0, \qquad \ldots; \\ n\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial x} + \dfrac{\partial a_n}{\partial y} + n(n-1)a_{n-2}F = 0, \qquad \dfrac{\partial a_n}{\partial x} + a_{n-1}F = 0. \end{cases}$$

On peut remplacer ce système de n équations par une équation unique (E) d'ordre $n-1$, à une seule inconnue a_{n-1}, fonction des deux variables x et y. On obtient cette équation (E), en éliminant successivement les autres a_i dans les équations (Σ).

Une transformation ponctuelle sur x : $X = \alpha(x)$, et linéaire sur y : $Y = \beta(x)y + \gamma(x)$, permet de poser

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 0.$$

Pour intégrer (Σ), nous allons le remplacer par un système (S), où figureront les variables caractéristiques d'Ampère du système (Σ) ou de l'équation (E) équivalente.

Soit

$$(6)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = n\prod_{i=1}^{n-1}(y' - \omega_i)$$

et posons $\varphi_i = \varphi(\omega_i)$. L'équation $X(\varphi_i) = 0$ se réduit à

$$(S)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\omega_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Le système (S) exprime, conformément à la théorie générale, que $\varphi_i =$ const. est l'intégrale générale de $dy - \omega_i\, dx = 0$. Les φ_i sont donc les variables caractéristiques d'Ampère de l'équation (E) ou du système (Σ). L'intégration de (E) ou de (Σ) est donc bien équivalente à celle de (S).

36. Intégration du système (S). — L'idée directrice consiste à prendre les φ_i comme variables indépendantes. Voici comment nous procéderons : nous décomposerons $d\psi$ en éléments simples, ψ étant l'intégrale première déduite de φ par le procédé, d'ailleurs classique, du n° 34. Soit donc

$$d\psi = \frac{dy - y'\,dx}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y'}} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{d\varphi_i}{y' - \omega_i}.$$

La méthode élémentaire de décomposition des fractions rationnelles permet de calculer les A_i :

$$A_i = \frac{1}{\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y'}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}{}'(\omega_i - \omega_k)}.$$

Posons encore

$$\varphi = \prod_{j=1}^{n}(y' - \mu_j)$$

et nous désignerons par ψ_j les valeurs de ψ pour $y' = \mu_j$.

Les ψ_j vérifient le système

$$(S_1)\qquad d\psi_j = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{d\varphi_i}{\mu_j - \omega_i} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Ce système aux différentielles totales sera intégrable, si nous déterminons les A_i de façon que les seconds membres soient des différentielles exactes. Dans ces conditions, le système

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'} = \frac{1}{A_i\displaystyle\prod{}'(\omega_i - \omega_k)} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

est compatible.

Pour faire le changement des n variables μ_j aux n variables φ_i et Φ, où l'on a posé

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\mu_i,$$

il est commode de remarquer que les n coordonnées :

$$\varphi_i = \text{const.} \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \qquad \text{et} \qquad \Phi - \sum_{j=1}^{n}\mu_j = \text{const.}$$

forment un système orthogonal à n variables. En effet, Φ est orthogonal à chacun des φ_i :

$$\sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = 0$$

puisque

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_j} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\varphi_i}\sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = -\sum_j \frac{1}{\omega_i - \mu_j} = 0,$$

cette dernière égalité résultant de

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \sum_j \frac{1}{\omega - \mu_j} = 0$$

d'après la définition même des ω.

De même, φ_i et φ_k sont orthogonales :

$$\sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j}\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mu_j} = \varphi_i\varphi_k \sum_j \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)(\omega_k - \mu_j)}$$
$$= \frac{\varphi_i\varphi_k}{\omega_k - \omega_i}\sum_j \left(\frac{1}{\omega_i - \mu_j} - \frac{1}{\omega_k - \mu_j}\right)$$

et chacune des deux sommes est séparément nulle.

D'après les résultats classiques [14] :

$$\frac{1}{H_i^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_k}\right)^2 \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$\frac{1}{H_n^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_k}\right)^2 = n.$$

Donc

$$\sum_{j=1}^{n} d\mu_j^2 = \sum_{i=1}^{n-1} H_i^2\, d\varphi_i^2 + \frac{1}{n}\, d\Phi^2.$$

D'autre part,

$$X_j^i = H_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_i}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

Or,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = \frac{-1}{\varphi_i}\frac{1}{\omega_i - \mu_j} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_k} = 1.$$

Donc

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_i} = H_i^2\varphi_i \frac{1}{\mu_j - \omega_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mu_j}{\partial \Phi} = \frac{1}{n}.$$

Calculons enfin,

$$\frac{1}{H_i^2} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j}\right)^2.$$

Or,

$$\sum_j \frac{1}{\varphi_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu_j} = -\sum_j \frac{1}{\omega_i - \mu_j} = -\frac{\varphi'(\omega_i)}{\varphi_i}, \qquad \text{où} \quad \varphi'(\omega_i) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_i}.$$

Dérivons cette égalité par rapport à ω_i :

$$\sum \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2} = -\frac{\varphi''(\omega_i)}{\varphi_i} + \frac{\varphi'^2(\omega_i)}{\varphi_i^2}.$$

On sait que

$$\frac{\varphi'(\omega_i)}{\varphi_i} = 0$$

et

$$\sum \frac{1}{(\omega_i - \mu_j)^2} = \frac{1}{\varphi_i^2 H_i^2} = -\frac{\varphi''(\omega_i)}{\varphi_i} \qquad \text{ou} \qquad H_i^2\varphi_i = -\frac{1}{\varphi''(\omega_i)}$$

et, enfin,

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_i} = \frac{-1}{\varphi''(\omega_i)}\frac{1}{\mu_j - \omega_i}.$$

En faisant $\Phi = 0$, c'est-à-dire $a_1 = 0$, avec les notations primitives, hypothèse que nous avons été amené à faire, on obtient un système de détermination des A_i.

37. Nous pouvons aussi déterminer les A_i par un calcul direct. En effet, les conditions d'intégrabilité du système (S_1) s'écrivent

$$(S_2) \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(\frac{A_i}{\mu_j - \omega_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\frac{A_k}{\mu_j - \omega_k}\right),$$

où j prend toutes les valeurs de 1 à n, alors que i et k forment toutes les combinaisons deux à deux des $n-1$ expressions ω.

Pour expliciter les équations qui forment le système (S_2), il est nécessaire de calculer $\frac{\partial \mu_j}{\partial \varphi_k}$ et $\frac{\partial \omega_i}{\partial \varphi_k}$. La première expression a été calculée au numéro précédent par application de la méthode des substitutions orthogonales. Nous allons refaire ce calcul directement. De

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \sum_j \frac{1}{\omega - \mu_j},$$

on tire, en dérivant par rapport à ω :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = \left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right)^2 - \sum_j \frac{1}{(\omega - \mu_j)^2},$$

donc

$$\frac{1}{\varphi_i}\varphi''(\omega_i) = -\sum \frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2}.$$

D'autre part, si l'on dérive logarithmiquement par rapport à φ_i :

$$\varphi_i = \prod_j (\omega_i - \mu_j),$$

on obtient

$$\frac{1}{\varphi_i} = \sum_j \frac{\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_i}}{\omega_i-\mu_j} - \sum_j \frac{\frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi_i}}{\omega_i-\mu_j},$$

où le premier terme est nul, parce que

$$\sum_j \frac{1}{\omega_i-\mu_j} = 0.$$

En reportant cette valeur de $\frac{1}{\varphi_i}$ dans l'expression précédente :

$$-\sum_j \frac{\frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi_i}}{\omega_i-\mu_j}\varphi''(\omega_i) = -\sum_j \frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2}$$

ce qui donne la valeur de

$$\frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi_i} = \frac{1}{\varphi''(\omega_i)}\,\frac{1}{\omega_i-\mu_j},$$

résultat identique à celui qui avait été précédemment trouvé.

Calculons de même $\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_k}$. On dérive par rapport à φ_k l'égalité $\sum_j \frac{1}{\omega_i-\mu_j} = 0$:

$$\sum_j \frac{\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_k} - \frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi_k}}{(\omega_i-\mu_j)^2} = 0.$$

Remplaçons $\frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi_k}$ par sa valeur

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_k}\sum_j \frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2} = \frac{1}{\varphi''(\omega_k)}\sum_j \frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2(\omega_k-\mu_j)}.$$

Décomposons cette dernière fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2(\omega_k-\mu_j)} = \frac{1}{(\omega_i-\omega_k)^2}\left(\frac{1}{\omega_k-\mu_j} - \frac{1}{\omega_i-\mu_j}\right) - \frac{1}{(\omega_i-\omega_k)(\omega_i-\mu_j)^2},$$

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_k}\sum_j \frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2} = \frac{1}{\varphi''(\omega_k)(\omega_i-\omega_k)^2}\left(\sum_j\left[\frac{1}{\omega_k-\mu_j} - \frac{1}{\omega_i-\mu_j}\right]\right) - \frac{1}{\varphi''(\omega_k)(\omega_i-\omega_k)}\sum_j \frac{1}{(\omega_i-\mu_j)^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_k} = -\frac{1}{\varphi''(\omega_k)(\omega_i-\omega_k)}.$$

En remplaçant dans le système (S_2) $\frac{\partial\omega_i}{\partial\varphi_k}$ et $\frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi_k}$ par les valeurs précédentes, on trouve sans difficulté, le système

$$(T) \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\omega_i\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(\omega_k\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k}\right),$$

où l'on a posé

$$\Lambda_i = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}.$$

Les Λ_i sont donc les dérivées partielles d'une même fonction θ, celle-ci devant être une solution du système (T) à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations. Le système (T) est la généralisation due à Darboux de l'équation d'Euler et Poisson. C'est le même que celui que nous avons rencontré au chapitre **II** (§ 6, n° **29**). Nous l'intégrerons ici aussi en considérant l'équation

$$\prod_j (\sigma-\mu_j) = \varphi,$$

où φ est un paramètre.

On a vu comment on déduit la solution générale de ces solutions particulières.

38. Calcul des φ_i en fonction de x et y. — Il reste à identifier les deux formes de $d\psi$:

$$d\psi = \frac{dy - y'\,dx}{\frac{d\varphi}{dy'}} - \sum_{i=1} \Lambda_i \frac{d\varphi_i}{y'-\omega_i}, \qquad \text{où} \quad \frac{d\varphi}{dy'} = \prod_i (y'-\omega_i).$$

En chassant le dénominateur :

$$dy - y'\,dx = \sum_i \mathrm{A}_i {\prod_k}' (y' - \omega_k)\, d\varphi_i.$$

Cette égalité est une identité en y' : le terme de degré $n-1$ donne

$$(1)\qquad \sum_i \mathrm{A}_i\, d\varphi_i = 0.$$

Cherchons le terme de degré $n-2$. Soient $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_{n-1}$ les fonctions symétriques élémentaires des ω_i. On trouve

$$\sum_i \mathrm{A}_i(\mathrm{S}_1 - \omega_i)\, d\varphi_i = 0$$

ou, compte tenu de (1) :

$$(2)\qquad \sum_i \mathrm{A}_i \omega_i\, d\varphi_i = 0.$$

Terme de degré $n-3$:

$$\sum \mathrm{A}_i(\mathrm{S}_2 - \omega_i \mathrm{S}_1 + \omega_i^2)\, d\varphi_i = 0$$

ou, compte tenu de (1) et (2) :

$$(3)\qquad \sum \mathrm{A}_i \omega_i^2\, d\varphi_i = 0.$$

Ce procédé est évidemment un procédé de récurrence et conduit au système

$$(\Omega)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_i \mathrm{A}_i\, \omega_i^k\, d\varphi_i = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-4),\\ &\sum_i \mathrm{A}_i \omega_i^{n-3}\, d\varphi_i = -\,dx,\\ &\sum_i \mathrm{A}_i \omega_i^{n-2}\, d\varphi_i = dy. \end{aligned}\right.$$

Ce système (Ω) détermine les φ_i en x et y. Il est complètement intégrable, puisque les A_i vérifient le système (T).

Nous allons former les combinaisons intégrables de (Ω). La première équation (Ω) est évidemment intégrable :

$$\sum_i \mathrm{A}_i\, d\varphi_i = d\theta.$$

La deuxième l'est également, ses conditions d'intégrabilité étant (T) :

$$\sum_i \mathrm{A}_i \omega_i\, d\varphi_i = d\theta_1.$$

Les suivantes sont obtenues en ajoutant à la $k^{\text{ième}}$, affectée du coefficient $+1$, les équations correspondant à des valeurs de l'exposant inférieur à k, dont les multiplicateurs sont des combinaisons isobariques des a_i (le poids d'un a_i étant égal à son indice) et de poids k, multipliées éventuellement par des coefficients numériques.

Pour établir cette propriété, il faut calculer $\dfrac{\partial a_k}{\partial \varphi_i}$. On y parvient en utilisant les sommes de puissances semblables des racines de $\varphi = 0$.

Nous avons posé

$$n a_1 = \sum \mu_k = 0,$$

puis

$$\frac{n(n-1)}{2}\quad a_2 = -\frac{1}{2}\left[\left(\sum \mu_k\right)^2 - \sum \mu_k^2\right],$$

$$a_2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum \mu_k^2.$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_k \mu_k \frac{\partial \mu_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-2}{n(n-1)} \sum_k \frac{\mu_k}{\varphi''(\omega_i)(\mu_k - \omega_i)}$$

$$= \frac{-2}{n(n-1)\varphi''(\omega_i)} \sum_k \left(\frac{\mu_k - \omega_i}{\mu_k - \omega_i} + \frac{\omega_i}{\mu_k - \omega_i}\right) = \frac{-2}{(n-1)\varphi''(\omega_i)}.$$

On établit ainsi la troisième combinaison intégrable :

$$\sum_i \mathrm{A}_i\left(\omega_i^2 + \frac{n-1}{2\,!}\, a_2\right) d\varphi_i = d\theta_2.$$

De même,

$$a_3 = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_k \mu_k^3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial a_3}{\partial \varphi_i} = \frac{-6}{(n-1)(n-2)}\, \frac{\omega_i}{\varphi''(\omega_i)}\,;$$

D'où la quatrième combinaison

$$\sum_i \mathrm{A}_i\left[\omega_i^3 + (n-1)a_2\omega_i + \frac{(n-1)(n-2)}{3\,!}\, a_3\right] d\varphi_i = d\theta_3$$

et ainsi de suite, les combinaisons θ_{n-3} et θ_{n-2} donnant x et y :

$$\theta = \text{const.},\qquad \theta_1 = \text{const.},\qquad \ldots,\qquad \theta_{n-3} = -x + \text{const.},\qquad \theta_{n-2} = y + \text{const.}$$

Les φ_i sont ainsi connus en x et y, ce qui permet de déterminer ψ en fonction de x et y également. On connaît donc deux intégrales premières et le problème est résolu.

39. *Exemples.* — 1° Si φ est du second degré en y', on voit immédiatement qu'il n'y a pas de variable d'Ampère. Si l'on pose

$$\varphi = y'^2 - a_2,$$

où a_2 est fonction de y seul. Alors

$$d\psi = \frac{dy - y'\,dx}{y'} = \frac{dy}{y'} - dx, \qquad \text{où} \quad y' = \sqrt{\varphi + a_2}$$

et l'intégration est immédiate, puisque a_2 ne dépend que de y. Enfin, F est donné par

$$\frac{da_2}{dy} + \mathrm{F} = 0.$$

2° φ est du troisième degré en y' :

$$\varphi = y'^3 - 3a_2 y' + a_3;$$

$$\frac{1}{3}\frac{d\varphi}{dy'} = y'^2 - a_2, \qquad \omega_1 = \sqrt{a_2}, \qquad \omega_2 = -\sqrt{a_2};$$

$$d\psi = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\,\frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\,\frac{d\varphi_2}{y' - \omega_2};$$

où θ vérifie l'équation

$$\text{(T)} \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\,\omega_2\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\,\omega_1\right).$$

Il s'agit maintenant de prendre φ_1 et φ_2 comme variables indépendantes. Ils sont définis par

$$\varphi_1 = -2a_2^{\frac{3}{2}} + a_3 = -2\omega_1^3 + a_3,$$

$$\varphi_2 = +2a_2^{\frac{3}{2}} + a_3 = -2\omega_2^3 + a_3.$$

On en déduit

$$a_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{4}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

L'équation (T) s'écrit alors

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_1\,\partial\varphi_2} + \frac{8}{3(\varphi_1 - \varphi_2)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\right) = 0,$$

dont l'intégrale générale s'écrit [15] :

$$\theta = (\varphi_2 - \varphi_1)^{-1}\int_0^1 f[\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)t]\,t^{-\frac{11}{3}}(1-t)^{\frac{5}{3}}\,dt$$
$$+ \int_0^1 g[\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)t]\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{8}{3}} dt,$$

où f et g sont des fonctions arbitraires de l'argument indiqué.

La fonction θ étant ainsi choisie, $\theta = \mathrm{C}_1$ est une première intégrale du système, les deux autres donnant x et y :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\,\omega_1\,d\varphi_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\,\omega_2\,d\varphi_2 = -\,dx$$

et

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\,\omega_1^2\,d\varphi_1 + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\,\omega_2^2\,d\varphi_2 = \quad dy.$$

Il reste à calculer ψ par

$$d\psi = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_1}\,\frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_2}\,\frac{d\varphi_2}{y' - \omega_2},$$

où y' est exprimée en fonction de φ, φ_1 et φ_2 et où φ est un paramètre :

$$y'^3 - 3\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4}\right)^{\frac{2}{3}} y' + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \varphi = 0.$$

Enfin,

$$\mathrm{F}(x, y) = -\frac{1}{a_2}\,\frac{\partial a_3}{\partial x}.$$

III. — Intégration de l'équation des lignes géodésiques, dans le cas où elle admet une intégrale première rationnelle en v' [9].

40. Le ds^2 étant exprimé en fonction des paramètres des lignes de longueur nulle :

$$ds^2 = 4\lambda\,du\,dv,$$

il s'agit de déterminer ce ds^2, c'est-à-dire la fonction $\lambda(u, v)$, de façon que l'équation des lignes géodésiques admette une intégrale première rationnelle en v'.

En variables u, v, l'équation différentielle des géodésiques s'écrit

$$(1)\qquad v'' = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}v' - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}v'^2.$$

Nous ferons le changement de variables, $w = \lambda v'$:

$$w' = \lambda v'' + v'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}v'\right).$$

Donc

$$v'' = \frac{w'}{\lambda} - \frac{v'}{\lambda}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}v'\right).$$

Portant cette valeur de v'' dans (1) :

$$(2)\qquad w' = \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}w = \mathrm{F}(u, v, w).$$

A cette équation différentielle, correspond l'équation aux dérivées partielles :

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}v' + \frac{\partial f}{\partial w}\mathrm{F} = 0,$$

que nous écrirons

$$\mathrm{A}(f) = \lambda\frac{\partial f}{\partial u} + w\frac{\partial f}{\partial v} + 2w\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial w} = 0.$$

A une intégrale première $\varphi(u, v, w) = \mathrm{C}$, on peut en faire correspondre une deuxième par la quadrature

$$d\psi = \frac{dv - v'\,du}{v'\sqrt{w}\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}} = \frac{\lambda\,dv - w\,du}{w^{\frac{3}{2}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}}.$$

En effet [16] si l'on cherche un multiplicateur de $\lambda\,dv - w\,du$ de façon que l'intégrale $z = \text{const.}$ vérifie l'équation

$$(4)\qquad \mathrm{F} = pq - \lambda = 0, \qquad \text{où} \quad p = \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial v},$$

on trouve pour ce multiplicateur : $w^{-\frac{1}{2}}$.

La fonction z, donnée par la quadrature précédente, où w est remplacé par sa valeur, tirée de $\varphi(u, v, w) = \mathrm{C}$ contiendra la constante C. La fonction ψ ne sera autre que $\dfrac{\partial z}{\partial \mathrm{C}}$: on l'obtient donc en

dérivant z sous le signe d'intégration :

$$\psi = \int \frac{dv - w\,du}{w^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial w}{\partial \mathrm{C}}.$$

Mais

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{C}}\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 1$$

et l'on obtient la valeur de ψ annoncée.

D'après les résultats classiques, on sait que l'intégration de (1) ou de (4) sont des problèmes équivalents.

Le problème a été traité, dans le cas où l'on connaît une intégrale $\varphi(p, q) = \text{const.}$ de

$$(5)\qquad (\mathrm{F}, \varphi) = \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial q} - \frac{\partial\mathrm{F}}{\partial q}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

dans les cas où φ est : *a.* homogène; *b.* linéaire; *c.* quadratique; *d.* fractionnaire et du premier degré en p et q.

Enfin, puisque p et q vérifient la relation évidente :

$$p\,du + q\,dv = 0,$$

on en déduit

$$p = \sqrt{\lambda v'}, \qquad q = \sqrt{\frac{\lambda}{v'}}$$

ou encore

$$p = w^{\frac{1}{2}}, \qquad q = \lambda w^{-\frac{1}{2}}.$$

41. Intégrales entières d'ordre impair. — φ est ici un polynome d'ordre $m = 2n + 1$ en p et q :

$$\varphi = a_0 p^m + \ldots + a_m q^m.$$

Nous obtiendrons une forme type à l'aide d'une transformation ponctuelle sur les u et v, en posant

$$a_0 = a_m = 1.$$

En utilisant la variable w, on écrira

$$\varphi = w^{\frac{m}{2}} + \ldots + \lambda^m w^{-\frac{m}{2}} = w^{-\frac{m}{2}}(w^m + \ldots + \lambda^m,)$$

que nous écrirons, en mettant en évidence les racines $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

$$\varphi = w^{-\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^{m} (w - \gamma_i).$$

D'où

$$\lambda^m = -\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m,$$

avec le signe —, puisque m est impair.

De même,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = \frac{m}{2} w^{-\frac{m}{2}-1}(w^m + \ldots - \lambda^m),$$

que nous écrirons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = \frac{m}{2} w^{-\frac{m}{2}-1} \prod_{k=1}^{m} (w - \zeta_k).$$

Nous remarquons que les γ_i et les ζ_k correspondent aux μ_j et ω_i du paragraphe précédent, la seule différence provenant de ce que le nombre des γ_i et des ζ_k est le même.

Le système (Σ) est obtenu en identifiant à zéro le polynome en w : $\Lambda(\varphi) = 0$, où les inconnues sont les coefficients $a_1, \ldots, a_{m-1}$ du polynome φ. On peut ici remplacer le système (Σ) par une équation unique (E) d'ordre m, à une inconnue a_{m-1}, et à deux variables u et v. Nous allons remplacer le système (Σ) par le système (S) :

$$\Lambda(\varphi_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m), \qquad \text{où} \quad \varphi_i = \varphi(\zeta_i).$$

L'équation $\Lambda(\varphi_i) = 0$ se simplifie, parce que $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)_{w=\zeta_i} = 0$ et le système (S) se réduit à

$$\text{(S)} \qquad \lambda\frac{\partial\varphi_i}{\partial u} + \zeta_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial v} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

L'équation précédente exprime que $\varphi_i = \text{const.}$ est l'intégrale générale de $\lambda\, dv - \zeta_i\, du = 0$.

Les φ_i sont donc les variables caractéristiques d'Ampère de l'équation (E) ou du système (Σ).

Pour intégrer le système (S), on peut employer encore la méthode des substitutions orthogonales, qui permet de remplacer les variables γ_i par les φ_i.

Le système des φ_i est orthogonal, ainsi que celui des x_i, à condition de poser $\gamma_i = x_i^2$.

A cette modification près, le calcul est en tous points analogue à celui du paragraphe précédent.

Nous allons reprendre en détail le calcul direct, pour mettre en évidence les quelques modifications dues à la nouvelle forme de φ.

1° *Calcul de* $\frac{\partial\gamma_k}{\partial\varphi_i}$. — On part de

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\frac{m}{2w} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{w - \gamma_k}$$

qui, dérivé par rapport à w, donne

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} - \left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 = \frac{m}{2w^2} - \sum_k \frac{1}{(w - \gamma_k)^2}.$$

Faisons $w = \zeta_i$ dans l'égalité précédente :

$$\frac{1}{\varphi_i}\varphi''(\zeta_i) = \frac{m}{2\zeta_i^2} - \sum_k \frac{1}{(\zeta_i - \gamma_k)^2}.$$

Mais

$$\frac{m}{2\zeta_i} = \sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

Donc

$$\frac{1}{\varphi_i}\varphi''(\zeta_i) = \frac{1}{\zeta_i}\sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k} - \sum_k \frac{1}{(\zeta_i - \gamma_k)^2}.$$

D'autre part, dérivons

$$\varphi_i = \zeta_i^{-\frac{m}{2}} \prod_k (\zeta_i - \gamma_k)$$

logarithmiquement par rapport à φ_i :

$$\frac{1}{\varphi_i} = \left(-\frac{m}{2\zeta_i} + \sum \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}\right)\frac{\partial\zeta_i}{\partial\varphi_i} - \frac{\partial\gamma_k}{\partial\varphi_i}\sum \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

En portant cette valeur de $\frac{1}{\varphi_i}$ dans l'égalité précédente et en égalant les coefficients de $\frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}$ dans les deux membres, il vient

$$-\varphi''(\zeta_i)\frac{\partial\gamma_k}{\partial\varphi_i} = \frac{1}{\zeta_i} - \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

D'où

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-\gamma_k}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)(\zeta_i - \gamma_k)}.$$

2° *Calcul de* $\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i}$. — On dérive par rapport à φ_i l'égalité

$$-\frac{m}{2\zeta_k} + \sum_j \frac{1}{\zeta_k - \gamma_j} = 0,$$

$$\left[\frac{m}{2\zeta_k^2} - \sum_j \frac{1}{(\zeta_k - \gamma_j)^2}\right]\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i} + \sum_j \frac{1}{(\zeta_k - \gamma_j)^2}\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = 0,$$

$$\left[\frac{1}{\zeta_k}\sum_j \frac{1}{\zeta_k - \gamma_j} - \sum_j \frac{1}{(\zeta_k - \gamma_j)^2}\right]\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum_j \frac{\gamma_j}{(\zeta_i - \gamma_j)(\zeta_k - \gamma_j)^2}.$$

Décomposons en éléments simples la fraction du second membre :

$$\frac{1}{(\zeta_i - \gamma_j)(\zeta_k - \gamma_j)^2} = \frac{1}{(\zeta_i - \zeta_k)^2}\left[\frac{1}{\zeta_i - \gamma_j} - \frac{1}{\zeta_k - \gamma_j}\right] - \frac{1}{(\zeta_i - \zeta_k)(\zeta_k - \gamma_j)^2}.$$

Après multiplication par γ_j et sommation par rapport à l'indice j, chacun des termes entre crochets a pour somme $-\frac{m}{2}$. Ce terme entre crochets est donc nul. Il ne reste que

$$-\frac{1}{\zeta_k}\sum_j \frac{\gamma_j}{(\zeta_k - \gamma_j)^2}\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)(\zeta_i - \zeta_k)}\sum_j \frac{\gamma_j}{(\zeta_k - \gamma_j)^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i} = \frac{\zeta_k}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)(\zeta_i - \zeta_k)}.$$

42. Intégration du système (S). — Nous allons remplacer le système (S) par le système (S_1) :

$$(S_1) \qquad d\psi_j = \sum_{h=1}^{m} \frac{A_h \, d\varphi_h}{\gamma_j - \zeta_h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Ce système devra être complètement intégrable; nous remplacerons donc le système (S_1) par le système

$$(S_2) \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(\frac{A_h}{\gamma_j - \zeta_h}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_h}\left(\frac{A_k}{\gamma_j - \zeta_k}\right).$$

En effectuant les calculs, $\frac{\partial \gamma_j}{\partial \varphi_k}$ et $\frac{\partial \zeta_h}{\partial \varphi_k}$ ayant les valeurs calculées au

numéro précédent, on obtient

$$(\zeta_k - \zeta_h)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_h \partial \varphi_k} - \frac{1}{\varphi''(\zeta_k)}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_h} - \frac{1}{\varphi''(\zeta_h)}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} = 0,$$

où l'on a posé

$$A_h = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_h}.$$

Ce système de $\frac{m(m-1)}{2}$ équations, peut s'écrire

$$(T) \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(\frac{1}{\zeta_h}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_h}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_h}\left(\frac{1}{\zeta_k}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k}\right).$$

Le système (T) s'intègre encore par la méthode qu'Appell a su appliquer aux systèmes de la forme précédente, qui constituent, on l'a vu, une généralisation de l'équation d'Euler et Poisson.

Si l'on pose

$$\varphi = \prod_j (w - \gamma_j),$$

où φ est un paramètre et si l'on désigne les racines de cette équation en w par $w_1, w_2, \ldots, w_m$, l'intégrale générale s'écrit

$$\theta = \sum_i \int w_i F_i(\varphi)\, d\varphi,$$

où les F_i sont arbitraires.

43. Calcul des φ_i **en** u **et** v. — Calculons au préalable $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i}$. Pour cela, nous dériverons la relation $\lambda^m = -\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_m$:

$$\frac{m}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} = \sum_k \frac{1}{\gamma_k}\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{-1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)}\sum_k \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

Or,

$$\sum \frac{1}{\zeta_i - \gamma_k} = \frac{m}{2\zeta_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{2\zeta_i^2 \varphi''(\zeta_i)}.$$

Nous devons identifier les deux valeurs obtenues pour $d\psi$:

$$d\psi = \frac{\lambda\, dv - w\, du}{w^{\frac{m}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial w}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i \, d\varphi_i}{w - \zeta_i}.$$

Or

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = w^{-\frac{m}{2}-1}\prod_i (w-\zeta_i).$$

Donc

$$(\lambda\, dv - w\, du)\, w^n = \sum_i \mathrm{A}_i \prod_k{}' (w-\zeta_k)\, d\varphi_i,$$

où $n = \frac{m-1}{2}$ et $\prod'$ signifie que k prend toutes les valeurs de 1 à m, sauf la valeur i.

Soient $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_{2n}$ les fonctions symétriques élémentaires des ζ_k; l'expression précédente s'écrit

$$(\lambda\, dv - w\, du)\, w^n = \sum_i \mathrm{A}_i\big[w^{2n} - (\mathrm{S}_1-\zeta_i)\, w^{2n-1} + (\mathrm{S}_2 - \zeta_i \mathrm{S}_1 + \zeta_i^2)\, w^{2n-2} + \ldots$$
$$+ (\mathrm{S}_{2n} - \zeta_i \mathrm{S}_{2n-1} + \ldots + \zeta_i^{2n})\big]\, d\varphi_i.$$

L'identification des termes de degré $2n$ donne immédiatement :

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_i\, d\varphi_i = 0.$$

Le terme de degré $2n-1$, compte tenu de l'égalité précédente, donne

$$\sum \mathrm{A}_i \zeta_i\, d\varphi_i = 0.$$

D'une façon générale, nous en déduisons

$$(\mathrm{U}) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_i \mathrm{A}_i \zeta_i^k \;\; d\varphi_i = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \\ \displaystyle\sum_i \mathrm{A}_i \zeta_i^{n-1}\, d\varphi_i = -\, du. \end{cases}$$

Au lieu de poursuivre l'identification, pour obtenir les $n+1$ relations restantes, ce qui nous donnerait

$$\sum_i \mathrm{A}_i \zeta_i^n\, d\varphi_i = \lambda\, dv,$$
$$\sum_i \mathrm{A}_i \zeta_i^k\, d\varphi_i = 0 \qquad (k = n+1, \ldots, 2n).$$

nous remarquerons que $d\psi$ est invariant, si l'on remplace u par v et $\sqrt{w}$ par $\frac{\lambda}{\sqrt{w}}$.

Les $n+1$ dernières relations s'écrivent alors

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum \mathrm{A}_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^k \;\; d\varphi_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n), \\ \displaystyle\lambda^{2n} \sum \mathrm{A}_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^{n-1} d\varphi_i = dv. \end{cases}$$

Ce système (U), (V) de $2n+1 = m$ relations entre les m variables φ_i et les deux variables u et v, est complètement intégrable. Il possède m combinaisons intégrables, formées comme au paragraphe précédent, par des combinaisons isobariques et de poids k des k premières relations (U), le coefficient de w^{m-k} étant de poids k :

$$\varphi = w^{\frac{m}{2}}\,(w^m + a_1 w^{m-1} + \ldots + a_m).$$

De chaque combinaison intégrable déduite du système (U), on déduit une combinaison relative au système (V), en utilisant la transformation, qui a permis d'obtenir le système (V).

Pour former ces combinaisons intégrables, il faut calculer les dérivées $\frac{\partial a_k}{\partial \varphi_i}$. Nous allons calculer les deux premières :

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_i} = \sum_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum_k \frac{-\gamma_k}{\zeta_i - \gamma_k}.$$

Nous savons (n° 41) que cette dernière somme a pour valeur $-\frac{m}{2}$. Donc

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_i} = \frac{m}{2\zeta_i \varphi''(\zeta_i)}.$$

Calculons de même $\frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i}$.

$$a_2 = -\frac{1}{2}\left[\Big(\sum \gamma_k\Big)^2 - \sum \gamma_k^2\right] = -\frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2}\sum \gamma_k^2,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i} = -\, a_1 \frac{\partial a_1}{\partial \varphi_i} + \sum \gamma_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i}$$
$$= \frac{-m}{2\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum \gamma_k + \sum \frac{-\gamma_k^2}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)(\zeta_i - \gamma_k)}$$
$$= \frac{-m}{2\zeta_i \varphi''(\zeta_i)} \sum \gamma_k + \frac{1}{\zeta_i \varphi''(\zeta_i)}\left[\sum \gamma_k + m\zeta_i - \frac{m}{2}\zeta_i\right],$$

où l'on a remplacé $-\gamma_k^2$ par $\zeta_i^2 - \gamma_k^2 - \zeta_i^2$.

D'où, enfin,

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varphi_i} = \frac{m\zeta_i + (m-2)a_1}{2\zeta_i \varphi''(\zeta_i)}.$$

On obtient ainsi les premières combinaisons intégrables :

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} d\varphi_i = d\theta,$$

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}\left(a_1 + \frac{m}{2}\zeta_i\right) d\varphi_i = d\theta_1,$$

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}\left(a_2 - \frac{m-6}{2m}a_1^2 + 2a_1\zeta_i + \frac{m}{2}\zeta_i^2\right) d\varphi_i = d\theta_2,$$

....

Ce procédé nous donne n combinaisons intégrables relatives au système (U). On obtient les autres en changeant u en v et $\sqrt{w}$ en $\frac{\lambda}{\sqrt{w}}$. Dans ces conditions, a_k est transformé en $\frac{\lambda^{2k} a_{m-k}}{a_m}$.

La première combinaison intégrable est une conséquence du système (T) lui-même :

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \frac{1}{\zeta_i} d\varphi_i = d\theta_{-1}.$$

La deuxième s'écrit

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}\left(\frac{\lambda^2 a_{m-1}}{a_m} + \frac{m}{2}\frac{\lambda^2}{\zeta_i^2}\right)\frac{1}{\zeta_i} d\varphi_i = d\theta_{-2}.$$

La $n^{\text{ième}}$ intégrale du système (U) donne u en fonction des φ_i et la $(n+1)^{\text{ième}}$ du système (V) donne v. θ est une solution du système (T). Enfin, λ donc le ds^2, est donné par la relation

$$\lambda^m = -\gamma_1 \ldots \gamma_m = \zeta_1 \ldots \zeta_m.$$

L'équation des géodésiques est donnée enfin par la quadrature de $d\psi$.

44. *Exemple : $m = 3$, $n = 1$:*

$$\varphi = w^{-\frac{3}{2}}(w-\gamma_1)(w-\gamma_2)(w-\gamma_3) = w^{-\frac{3}{2}}(w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + \lambda^3),$$

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{3}{2} w^{-\frac{5}{2}}\left(w^3 + \frac{a_1}{3}w^2 - \frac{a_2}{3}w - \lambda^3\right) = \frac{3}{2} w^{-\frac{5}{2}}(w-\zeta_1)(w-\zeta_2)(w-\zeta_3),$$

$$\varphi''(\zeta_i) = \frac{3}{2}\zeta_i^{-\frac{5}{2}}(\zeta_i - \zeta_h)(\zeta_i - \zeta_k);$$

où i prend les valeurs 1, 2, 3, h et k prenant les deux autres valeurs parmi ces trois nombres.

Le système (T) s'écrit

$$\text{(T)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} - \frac{2}{3(\zeta_i - \zeta_k)^2}\left(\frac{\zeta_i^{\frac{5}{2}}}{\zeta_i - \zeta_h}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k} + \frac{\zeta_k^{\frac{5}{2}}}{\zeta_k - \zeta_h}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}\right) = 0,$$

où i et k sont deux des nombres 1, 2, 3, h étant le troisième.

Les combinaisons intégrables sont

$$\theta + u = u_0; \qquad \theta_{-1} = C; \qquad v - \theta_{-2} = v_0.$$

Il ne semble pas possible de pousser les calculs plus loin sans particulariser les données, les relations entre les φ_i et les ζ_k :

$$\varphi_i = \zeta_i^{-\frac{3}{2}} \prod_{k=1}^{3} (\zeta_i - \gamma_k) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ne permettant pas le calcul explicite des uns en fonction des autres, même ici où la relation n'est que du troisième degré.

45. Intégrales entières d'ordre pair : $m = 2n$. — Nous écrirons, comme dans le cas où $m = 2n+1$:

$$\varphi = w^{-\frac{m}{2}}(w^m + \ldots + \lambda_m) = w^{-n}(w^{2n} + \ldots + \lambda^{2n}) = w^{-n}\prod_{i=1}^{2n}(w - \gamma_i).$$

Les variables caractéristiques sont les $2n$ expressions

$$\varphi_i = \varphi(\zeta_i)$$

où les ζ_i sont les racines de $\frac{d\varphi}{dw} = 0$.

On peut encore opérer directement ou en utilisant les propriétés des substitutions orthogonales, les valeurs des dérivées $\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_i}$ et $\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi_i}$ restant valables.

Considérons

$$d\psi = \frac{\lambda\, dv - w\, du}{w^{\frac{3}{2}}\frac{d\varphi}{dw}} = \frac{2}{n}\frac{(\lambda\, dv - w\, du)w^{n-\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^{2n}(w - \zeta_i)}$$

$$= \sqrt{w}\sum_{i=1}^{2n}\frac{A_i\, d\varphi_i}{w - \zeta_i}.$$

C'est ce facteur $\sqrt{w}$ qui modifie les équations.

Nous obtenons maintenant le système

$$(\mathrm{S}_1) \qquad d\psi_j = \sqrt{\gamma_j}\sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathrm{A}_i\, d\varphi_i}{\gamma_j - \zeta_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

et ses $n(2n-1)$ conditions d'intégrabilité; qui s'écrivent, après avoir posé $\mathrm{A}_i = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}$,

$$2(\zeta_k - \zeta_i)^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_i\,\partial\varphi_k} - (\zeta_i + \zeta_k)\left[\frac{1}{\zeta_k\varphi''(\zeta_k)}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i} + \frac{1}{\zeta_i\varphi''(\zeta_i)}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k}\right] = 0,$$

que l'on peut écrire aussi :

$$(\mathrm{T}') \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\frac{\lambda}{\zeta_i}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(\frac{\lambda}{\zeta_k}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k}\right).$$

Ce système (T′) remplace le système (T).

Si l'on considère encore l'équation

$$\prod_i (w - \gamma_i) = \varphi,$$

dont les racines sont $w_1, w_2, \ldots, w_{2n}$, $\sqrt{w_i}$ est une solution particulière de (T′). Donc la solution générale s'écrira

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n} \int \sqrt{w_i}\,\mathrm{F}_i(\varphi)\, d\varphi,$$

où les F_i sont arbitraires.

L'identification des deux formes de $d\psi$ se fait sans modifications :

$$d\psi = \frac{(\lambda\, dv - w\, du)w^{n-1}\sqrt{w}}{\prod_{i=1}^{2n}(w - \zeta_i)} = \sqrt{w}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\mathrm{A}_i\, d\varphi_i}{w - \zeta_i}.$$

D'où les deux systèmes

$$(\mathrm{U}) \quad \begin{cases} \sum_i \mathrm{A}_i\zeta_i^k \quad d\varphi_i = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \\ \sum_i \mathrm{A}_i\zeta_i^{n-1}\, d\varphi_i = -du; \end{cases}$$

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} \lambda^{2k-1}\sum_i \mathrm{A}_i\left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^k d\varphi_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \lambda^{2n-1}\sum_i \mathrm{A}_i\left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^n d\varphi_i = dv. \end{cases}$$

Mais les combinaisons intégrables sont différentes, car le système (T′) est différent du système (T). La formation des combinaisons intégrables se fait suivant la même méthode, les dérivées $\frac{\partial a_k}{\partial\varphi_i}$ ayant les mêmes expressions. On obtient ainsi pour les ystème (U) :

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\, d\varphi_i = d\theta,$$

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\left(n\zeta_i + \frac{a_1}{2}\right) d\varphi_i = d\theta_1.$$

Puis, pour le système (V) :

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\frac{\lambda}{\zeta_i}\, d\varphi_i = d\theta_{-1},$$

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\lambda\left[\frac{\lambda^2}{\zeta_i^2} + \frac{\lambda^2}{\zeta_i}\frac{a_{2n-1}}{2na_{2n}}\right] d\varphi_i = d\theta_{-2},$$

. . . .

Nous rappelons que le passage des combinaisons intégrables relatives au système (V) se déduisent de celles qui sont relatives au système (U) par le changement de w en $\frac{\lambda^2}{w}$, a_k devant être remplacé par $\frac{\lambda^{2k}a_{2n-k}}{a_{2n}}$, où $a_{2n} = \lambda^{2n}$. Enfin $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\, d\varphi_i$ doit être remplacé par $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\frac{\lambda}{\zeta_i}\, d\varphi_i$.

46. *Exemples.* — 1° $n = 1$:

$$\varphi = w^{-1}(w^2 + a_1 w - \lambda^2),$$

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{w^2 + \lambda^2}{w^2} = \frac{(w - \zeta_1)(w - \zeta_2)}{w^2}.$$

Donc

$$\zeta_1 = i\lambda, \qquad \zeta_2 = -i\lambda;$$

$$\varphi_1 = a_1 + 2i\lambda, \qquad \varphi_2 = a_1 - 2i\lambda.$$

On peut calculer ζ_1, ζ_2 et a_1 en fonction de φ_1 et φ_2.

L'équation (T) se réduit à

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_1\,\partial\varphi_2} = 0.$$

Donc

$$\theta = \Phi_1 + \Phi_2,$$

où Φ_1 est une fonction de φ_1 et Φ_2, une fonction de φ_2. D'où

$$\Phi_1+\Phi_2=u_0-u, \qquad i(\Phi_1-\Phi_2)=v-v_0.$$

Ces résultats ne diffèrent que par la forme des résultats classiques du ds^2 de Liouville.

2° $n=2$:

$$\varphi = w^2+a_1 w+a_2+\frac{a_3}{w}-\frac{\lambda^4}{w^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dw}=2w+a_1-\frac{a_3}{w^2}+\frac{2\lambda^4}{w^3}=\frac{2}{w^3}(w-\zeta_1)\ldots(w-\zeta_4),$$

$$\frac{d^2\varphi}{dw^2}=\frac{d\varphi}{dw}\left(-\frac{3}{w}+\frac{1}{w-\zeta_1}+\ldots+\frac{1}{w-\zeta_4}\right),$$

$$\varphi''(\zeta_i)=\frac{2}{\zeta_i^3}(\zeta_i-\zeta_h)(\zeta_i-\zeta_k)(\zeta_i-\zeta_l).$$

Le système (T) comprendra $C_4^2=6$ équations :

$$4(\zeta_k-\zeta_i)^3\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k} -(\zeta_i+\zeta_k)\left[\frac{\zeta_k^2}{(\zeta_k-\zeta_h)(\zeta_k-\zeta_l)}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}-\frac{\zeta_i^2}{(\zeta_i-\zeta_h)(\zeta_i-\zeta_l)}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_k}\right]=0,$$

en désignant par i, k, h, l une des permutations circulaires des nombres 1, 2, 3, 4.

Les combinaisons intégrables sont

$$\sum\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}d\varphi_i=d\theta=0, \qquad \sum\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\frac{\lambda}{\zeta_i}d\varphi_i=d\theta_{-1}=0.$$

$$\sum\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\left(2\zeta_i+\frac{a_1}{2}\right)d\varphi_i=d\theta_1=-du\sum\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}\left(\frac{\lambda^3}{\zeta_i^2}+\frac{a_3}{4\lambda\zeta_i}\right)d\varphi_i=d\theta_{-2}=dv.$$

On détermine enfin ψ par quadratures.

17. Intégrales de la forme $\varphi=\sigma w^{m_0}\prod_{i=1}^{n}(w-\gamma_i)^{m_i}$. — Nous supposerons que les m_i sont des constantes. En variables p, q, φ s'écrit

$$\varphi=\sigma p^{2m_0+\sum m_i}\prod_{i=1}^{n}\left(p-\frac{\gamma_i}{\lambda}q\right)^{m_i}$$

et nous supposerons que

$$\prod\gamma_i^{m_i}=\lambda^{\sum m_i}.$$

En revenant à la variable w, on retrouve la forme indiquée.

Si l'on calcule $\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dw}$:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dw}=\frac{m_0}{w}+\sum\frac{m_i}{w-\gamma_i}=\frac{\left(m_0+\sum m_i\right)\prod(w-\zeta_i)}{w\prod(w-\gamma_k)},$$

équation de degré m, dont les racines sont les ζ_i.

u et v ne sont pas caractéristiques, si cette équation n'a pas de racine nulle (auquel cas v serait caractéristique), ni infinie (auquel cas u serait caractéristique), c'est-à-dire : si 1° $m_0\neq 0$; 2° $\sum m_i+m_0\neq 0$.

Si l'on pose encore $\varphi_i=\varphi(\zeta_i)$, $\varphi_i=$ const. est intégrale générale de $\lambda\, dv-\zeta_i\, du=0$ et les φ_i sont les caractéristiques d'Ampère.

Avant de poursuivre l'intégration du système (S) :

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial u}+\zeta_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

remarquons que le calcul antérieur des dérivées $\frac{\partial\gamma_k}{\partial\varphi_i}$ et $\frac{\partial\zeta_k}{\partial\varphi_i}$ reste entièrement valable, la présence des coefficients m_j ne changeant rien au calcul. On trouve donc

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\varphi_i}=\frac{-\gamma_k}{\zeta_i\varphi''(\zeta_i)(\zeta_i-\gamma_k)}; \qquad \frac{\partial\zeta_k}{\partial\varphi_i}=\frac{\zeta_k}{\zeta_i\varphi''(\zeta_i)(\zeta_i-\zeta_k)}.$$

La différentielle $d\psi$ sera modifiée du fait que $\frac{d\varphi}{dw}$ n'étant pas rationnel, φ devra être remplacé par $\operatorname{Log}\varphi$ dont la dérivée est rationnelle et $d\psi$ se trouvera remplacé par $\varphi\, d\psi$:

$$\varphi\, d\psi=\frac{(\lambda\, dv-w\, du)}{w^{\frac{3}{2}}\frac{d\varphi}{\varphi w}}=\frac{(\lambda\, dv-w\, du)\prod(w-\gamma_k)}{w^{\frac{1}{2}}\prod(w-\zeta_k)}$$

et nous décomposerons en éléments simples $w^{-\frac{1}{2}}\varphi\, d\psi$:

$$w^{-\frac{1}{2}}\varphi\, d\psi=\frac{A}{w}+B+\sum\frac{A_i\, d\varphi_i}{w-\zeta_i}.$$

On trouve, en faisant $w=0$,

$$A=\lambda\, dv\frac{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}{\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n}.$$

Or, si l'on compare les deux valeurs de $\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dw}$, en identifiant les termes constants, il vient

$$m_0\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n=\left(m_0+\sum m_i\right)\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n.$$

Donc

$$\Lambda=\lambda\,dv\,\frac{m_0+\sum m_i}{m_0}.$$

Puis on trouve immédiatement : $B=-du$,

$$\varphi\,d\psi=\frac{m_0+\sum m_i}{m_0}\,\frac{\lambda\,dv}{\sqrt{w}}-\sqrt{w}\,du+\sum\frac{\sqrt{w}\,A_i\,d\varphi_i}{w-\zeta_i}.$$

En posant

$$\theta=\frac{m_0+\sum m_i}{m_0}\lambda v-u+\omega,$$

A_i est encore égal à $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_i}$ et ω vérifie le même système (T') que θ dans le cas des intégrales d'ordre pair (*voir* n° 45) :

$$(\Omega)\qquad \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\frac{\lambda}{\zeta_i}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi_i}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(\frac{\lambda}{\zeta_k}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi_k}\right)$$

et l'on formera les combinaisons intégrables en considérant le polynome

$$\prod(w-\gamma_i)=w^p+a_1w^{p-1}+\ldots+a_p.$$

CHAPITRE IV.

Équations linéaires [10].

I. — Le groupe ponctuel et ses sous-groupes.

48. Nous nous contenterons de rappeler les résultats classiques de Lie et ses successeurs, auxquels E. Cartan a su donner une forme définitive, les sous-groupes du groupe ponctuel général sont :

1° *Groupes infinis à n variables :*

a. Groupe V_n des transformations, qui conservent les volumes, c'est-à-dire l'intégrale $\int\cdots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n$. L'équation du groupe est

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=1.$$

b. Groupe W_n des transformations de contact, qui conservent l'équation

$$dz-\sum p_i\,dx_i=0,$$

c'est-à-dire

$$dZ-\sum_{i=1}^{m}P_i\,dX_i=\left(dz-\sum_{i=1}^{m}p_i\,dx_i\right)\rho$$

dans le cas où le nombre des variables $n=2m+1$ est *impair*.

c. Groupe qui conserve l'intégrale de surface :

$$\iint\sum_{i=1}^{m}dx_i\,dy_i$$

dans le cas où le nombre des variables $n=2m$ est *pair*.

2° Groupes finis :

a. *Groupe projectif* à $(n+1)^2-1=n(n+2)$ paramètres. Nous le désignerons par $G_{n(n+2)}$. Une transformation du groupe s'écrit

$$x'_k=\frac{\sum a^i_k x_i+a^{n+1}_k}{\sum a^i_{n+1}x_i+a^{n+1}_{n+1}}.$$

On sait d'ailleurs que ce groupe est primitif.

b. *Groupe linéaire* : Si l'on écrit les équations précédentes :

$$x'_k=\frac{X_k}{D},$$

on obtient le groupe linéaire général $\Gamma_{n(n+1)}$ dans le cas où $D=1$.

c. Groupe linéaire spécial : Si l'on suppose en outre que $|a_k^i| = 1$ (cette notation représentant le déterminant des a_k^i) le groupe linéaire est alors *spécial* $\Gamma_{n(n+1)-1}$.

Si des deux groupes précédents on écarte les translations, on obtient :

d. Groupe linéaire et homogène : Γ_{n^2}.

e. Groupe linéaire et homogène spécial : Γ_{n^2-1}.

f. Groupe linéaire et homogène qui conservent la quadrique $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ que nous désignerons par $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$.

g. Si n est pair, il existe encore le groupe qui laisse invariante la forme $\sum_{i=1}^{m} x_i dy_i - y_i dx_i$, où on a posé $n = 2m$.

Remarquons enfin que, pour les petites valeurs de n, il se présente des singularités sur lesquelles nous n'insisterons pas.

II. — Le groupe de Picard.

49. Soit l'équation linéaire

$$f(u) = au + a_1 \frac{du}{dx} + \ldots + a_n \frac{d^n u}{dx^n} = 0. \tag{1}$$

Cherchons les relations

$$\varphi(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = \text{const.}, \tag{2}$$

où

$$u' = \frac{du}{dx}, \qquad \ldots, \qquad u^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}},$$

qui soient compatibles avec (1).

En dérivant (2) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u' + \ldots + \frac{\partial^{(n-1)} \varphi}{\partial u^{(n-1)}} u^{(n)} = 0, \tag{3}$$

où $u^{(n)}$ doit être remplacé par sa valeur (1).

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ représentent un système fondamental de solutions de (2) :

$$\varphi_i(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = \varphi_i(x_0, u_0, u'_0, \ldots, u_0^{(n-1)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

représentent la solution générale de (1), puisqu'elles dépendent de n constantes arbitraires.

Nous définirons un système fondamental de (2) à l'aide de l'équation adjointe de Lagrange. Soit donc v une fonction de x, telle que $v f(u)$ soit une dérivée exacte. La formule d'intégration par parties généralisée donne aussitôt :

$$\begin{aligned} v f(u) = {} & \frac{d}{dx}[u^{(n-1)} a_n v - u^{(n-2)}(a_n v)' + \ldots + (-1)^{n-1} u (a_n v)^{(n-1)}] \\ & + \frac{d}{dx}[u^{(n-2)} a_{n-1} v - u^{(n-3)}(a_{n-1} v)' + \ldots + (-1)^{n-2} u (a_{n-1} v)^{(n-2)}] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{d}{dx}(u a_1 v) + u g(v), \end{aligned}$$

où

$$g(v) = (-1)^n \frac{d^n(a_n v)}{dx^n} + \ldots - \frac{d(a_1 v)}{dx} + a v,$$

que nous écrirons

$$v f(u) - u g(v) = \frac{d\Phi}{dx}.$$

Il suffit de prendre pour v une solution particulière de

$$g(v) = 0 \tag{4}$$

pour obtenir une solution $\Phi(u, v) = \text{const.}$ de (2).

La détermination des φ_i est ramenée à celle des v_i, c'est-à-dire à celle de n solutions particulières de (4).

Cette équation (4) est l'adjointe de Lagrange de (1).

Les équations

$$v_i f(u) = \frac{d\Phi_i}{dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

montrent que le groupe de rationalité de (2) est identique au groupe de Picard de (3). Ce groupe est toujours *linéaire*.

Nous allons démontrer cette proposition : Soit donc $u_1, u_2, \ldots, u_n$

un système fondamental :

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous remplacerons l'équation (1) par le système

$$F(u_i) = a_n u_i^{(n)} + \dots + a u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qui, résolu par rapport aux a_k, s'écrit

$$(\Sigma) \qquad \frac{D}{a_n} = \frac{D'}{a_{n-1}} = \dots = \frac{D^{(n)}}{a}.$$

Toute autre solution s'écrira

$$U_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k u_k,$$

où i prend les valeurs de 1 à n. Les $D^{(j)}$ sont multipliés par $|\alpha_i^k|$.

Les transformations sont donc bien celles du groupe *linéaire homogène général* Γ_n, et les quotients

$$\frac{D'}{D}, \quad \dots, \quad \frac{D^{(n)}}{D}$$

en sont les *invariants différentiels*.

Le système (Σ) peut être réductible ou irréductible :

1° **(Σ) *est irréductible :*** Les transcendantes u sont attachées dans le domaine $[\Delta]$ des coefficients au groupe Γ_n. Nous pouvons ramener ce groupe au groupe spécial Γ_{n^2-1}. En effet

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} D.$$

Donc

$$D = C e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}.$$

L'*adjonction* de cette transcendante réduit Γ_n à Γ_{n^2-1}.

2° **(Σ) *est réductible :*** Il existe des relations

$$(\Phi) \quad \begin{cases} \Phi_j(x, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n, \dots, u_1^{(n-1)}, \dots u_n^{(n-1)}) = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

compatibles avec (Σ). Le système (Σ) (Φ) est irréductible. Nous définirons le système irréductible régulier de la manière suivante : on prendra, parmi les systèmes, ceux qui renferment le plus grand nombre d'équations d'ordre zéro en u_i, puis, parmi ceux-ci, ceux qui renferment le plus grand nombre d'équations du premier ordre et ainsi de suite.

III. — Systèmes irréductibles réguliers.

50. Chacune des relations Φ_j est un polynome. Considérons le nouveau polynome

$$P(x, u) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i(x) \Phi_i(x, U) = 0,$$

où les μ_i sont des fonctions arbitraires de x et où l'on a écrit $P(x, u)$ pour $P(x, u_1, \dots, u_n, \dots, u_1^{(n-1)}, \dots, u_n^{(n-1)})$.

Considérons la dérivée de P :

$$P_1 = \frac{dP}{dx} = X(P) = \frac{\partial P}{\partial x} + \sum \frac{\partial P}{\partial U_i} U'_i + \dots + \sum \frac{\partial P}{\partial U_i^{(n-1)}} U_i^{(n)} = 0$$

où l'on remplace $U_i^{(n)}$ par $-\dfrac{a_{n-1} U_i^{(n-1)} + \dots + a U_i}{a_n}$.

En répétant cette opération, on voit que le système $P = 0$, $P_1 = 0$, ..., $P_{k-1} = 0$ est équivalent au système (Φ).

Si l'on fait sur les U_i une transformation linéaire (T) d'ailleurs arbitraire :

$$U_i = \sum \alpha_i^j u_j,$$

les u_j sont alors arbitraires et P s'écrit

$$P(x, u) = \sum_{i=1}^{\rho} l_i(\alpha) \xi_i(x, u),$$

où les l_i sont des polynomes en α_j^k et où ρ est le plus petit possible, c'est-à-dire que les l_i sont linéairement indépendants, ainsi que les ξ_i.

Les dérivées de P s'écriront

$$P_1(x, U) = \sum_{i=1}^{\rho} l_i(\alpha) X(\xi_i) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{k-1}(x, u) = \sum_{i=1}^{\rho} l_i(\alpha) X_{k-1}(\xi_i) = 0,$$

P_k étant une conséquence des relations précédentes.

Les l_i sont les coordonnées du polynome P. En effet, si l'on fait une deuxième transformation : $U_i = \sum \beta_i^j v_j$,

$$P = \sum l_i(\alpha)\xi_i(x, u) = \sum l_i(\beta)\xi_i(x, v).$$

D'autre part,

$$u_k = \sum \gamma_k^j v_j.$$

Donc

$$\beta_i^j = \sum \alpha_i^k \gamma_k^j$$

et

$$l_i(\beta) = \sum \lambda_i^k(\gamma) l_k(\alpha), \qquad \text{avec} \quad |\lambda_i^k| \neq 0.$$

De même,

$$\sum l_i(\alpha)\xi_i(x, u) = \sum \lambda_j^k(\gamma) l_k(\alpha) \xi_j(x, v)$$

et, en identifiant :

$$\xi_i(x, u) = \sum \lambda_i^k \xi_k(x, v).$$

Ainsi, les l_i et les ξ_i ne sont déterminés qu'à une transformation linéaire et homogène près.

Exemples. — 1° D n'a qu'une coordonnée : $|\alpha_i^k|$.

2° Un polynome $A_0 U + \ldots + A_{n-1} U^{(n-1)}$ a n coordonnées.

51. Théorème. — *Le nombre de coordonnées de* P *est égal au nombre de relations de* (Φ) *augmenté d'une unité.*

En effet, 1° si $\rho \leq k$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{k-1}(\xi_1) & \ldots & X_{k-1}(\xi_k) \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est impossible, les ξ_i étant linéairement indépendants.

2° Si $\rho = k + m$, avec $m > 1$, en résolvant (Φ) par rapport à $l_1, \ldots, l_k$:

$$l_i = l_{k+1}\Omega_{i,1}(x, u) + \ldots + l_{k+m}\Omega_{i,m}(x, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

En appliquant à ces relations l'opérateur X, il vient

$$0 = l_{k+1} X(\Omega_{i,1}) + \ldots + l_{k+m} X(\Omega_{i,m}) \, 0.$$

Donc

$$X(\Omega_{i,1}) = 0, \quad \ldots, \quad X(\Omega_{i,m}) = 0.$$

Or, on a choisi les $\Omega_{i,j}$ algébriquement distincts. On obtient donc les mk équations :

$$\Omega_{i,j}(x, u) = \Omega_{i,j}(x_0, u_0).$$

Si ces mk relations se réduisent à k seulement, c'est qu'il y a des relations entre elles, donc entre les ξ, ce qui est impossible. Il ne reste donc plus qu'une hypothèse : $m = 1$.

Nous écrirons alors le système (Φ) sous la forme canonique

$$(\Phi) \qquad \frac{l_i(\alpha)}{l_0(\alpha)} = \Omega_i(x, u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

le système (Φ) comprenant $k + 1$ inconnues homogènes, on peut le résoudre par rapport aux quotients de k d'entre elles par la dernière.

Considérons la transformation identique $\alpha_i^k = \varepsilon_{ik}$, où $\varepsilon_{ik} = 0$, pour $i \neq k$ et $\varepsilon_{ii} = 1$; $l_i(\alpha)$ se réduit à un nombre L_i et U est déterminé par

$$(\Phi_0) \qquad \frac{L_i}{L_0} = \Omega_i(x, U), \qquad L_0 \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Les u sont solutions du même système. Donc les l_i vérifient le système

$$(\Gamma) \qquad \frac{l_i(\alpha)}{l_0(\alpha)} = \frac{L_i}{L_0},$$

chacune des équations étant invariante, le système (Γ) constitue le système d'invariants d'un groupe : le groupe de rationalité Γ.

52. Invariants différentiels du groupe de rationalité. — Si nous supposons maintenant les u constants, nous déterminons les α à l'aide des U.

Soit $u_j^{(k-1)} = \varepsilon_{jk}$, on obtient alors

$$\alpha_i = U_i^{(j-1)}.$$

Le système (Φ) s'écrit

$$\frac{l_i(U)}{l_0(U)} = \Omega_i(x, \varepsilon_{ik}) = \omega_i(x).$$

Nous désignerons ce système par (Φ_1), où les ω_i sont les invariants différentiels du groupe Γ, dans lequel les U sont fonctions de x.

Équations résolvantes. — Soit la transformation

$$l_i(\beta) = \sum \lambda_i^j(\gamma)\, l_j(\alpha)$$

et où

$$\beta_i^k = \alpha_i^k + \varepsilon X(\alpha_i^k) = \alpha_i^k + \varepsilon \theta_i^k.$$

Mais $\alpha_i^k = U_i^{(k-1)}$, donc $\theta_i^k = \alpha_i^{k+1}$, si $k \leqq n-1$; pour $k = n$, on remplace $U_i^{(n)}$ par sa valeur tirée de l'équation (1).

L'égalité précédente devient

$$l_i(\beta) = l_i(\alpha) + \varepsilon X[l_i(\alpha)] = l_i(\alpha) + \varepsilon \sum \lambda_i^j(\gamma)\, l_j(\alpha)$$

puisque

$$\lambda_i^i = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \lambda_i^j = \varepsilon.$$

Donc

$$X[l_i(\alpha)] = \sum \lambda_i^j(\gamma)\, l_j(\alpha).$$

C'est le système résolvant pour les l_i.

Pour les invariants absolus : $\Lambda_i = \dfrac{l_i}{l_0}$,

où on suppose $l_0 = D = |\alpha_i^k|$. On peut écrire immédiatement :

$$X(\Lambda_i) = \frac{X(l_i)}{l_0} - \frac{l_i}{l_0^2} X(l_0).$$

Mais

$$X(l_0) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\, l_0.$$

Donc

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}\Lambda_i + X(\Lambda_i) = \sum \lambda_i^j(\gamma)\, \Lambda_j.$$

C'est le système résolvant des invariants absolus. C'est aussi celui des ω_i, puisque d'après (Φ_1) : $\Lambda_i = \omega_i$.

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}\omega_i + X(\omega_i) = \sum \lambda_i^j(\gamma)\, \omega_j.$$

Pour les ξ_i, il suffit d'éliminer les l_i entre $P = 0$, $P_1 = 0, \ldots, P_{k-1} = 0$, auxquelles on adjoint $P_k = 0$. On obtient

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_k(\xi_1) & \ldots & X_k(\xi_{k+1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les ξ_i sont indépendants, ils vérifient une même relation

$$X_k(\xi_i) = R_1 X_{k-1}(\xi_i) + \ldots + R_k \xi_i,$$

où les R_j sont rationnels, puisqu'ils sont invariants par une transformation linéaire sur les u.

Enfin, les ξ_i sont linéairement indépendants mais non fonctionnellement distincts. Ils sont liés par des relations,

$$\sum C_{m_0,\ldots,m_k}\, l_0^{m_0} \ldots l_k^{m_k} = 0$$

qui ne sont autres que les syzygies de Sylvester.

IV. — Applications.

53. 1° La méthode précédente n'ajoute rien de nouveau à la théorie de Picard; on retrouve également les résultats de Fuchs et de Darboux sur les intégrales algébriques. Nous nous contenterons d'indiquer la liaison entre la théorie précédente et celle de Picard.

Si l'on pose

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \eta^i U_i,$$

où les η^i sont des fonctions rationnelles de x et que l'on fasse la transformation

$$U_i = \sum \alpha_i^k u_k,$$

Z devient

$$Z = \sum_i \sum_k \eta^i \alpha_i^k u_k.$$

Elle prend n^2 valeurs et n'est autre que la fonction sensible de Schlesing.

Elle vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre n^2 dont les coefficients sont fonctions des a_i et de leurs dérivées.

Mais on peut aussi résoudre en u_k :

$$u_k = A_{k,1} Z + \ldots + A_{k,n^2-1} \frac{d^{n^2-1} Z}{dx^{n^2-1}}.$$

En remplaçant dans le système, les u_k par ces valeurs, on obtient un système en Z, qui n'est autre que le système résolvant de Picard.

54. 2° Soit à former l'équation la plus générale correspondant au groupe infini V_n qui conserve les volumes : l'équation de définition est

$$\frac{D(X_1, \ldots, X_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 1$$

et soit $X(f)$ l'équation cherchée, où les x_i sont fonctions de $t, u_1, \ldots, u_n$:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum A_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$$

L'invariant différentiel unique est

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} = D.$$

En calculant ses dérivées en t et u_i, on voit que tous les termes se détruisent, sauf $X(D)$ et $-D \sum \frac{\partial A_i}{\partial u_i}$.

La résolvante en D est donc

$$X(D) + D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial u_i} = 0.$$

Nous résoudrons cette équation, qui n'est autre que celle du multiplicateur de Jacobi, en posant

$$D . A_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

avec

$$D + \sum \frac{\partial \omega_i}{\partial u_i} = 0,$$

où les ω_i sont des fonctions arbitraires des arguments $u_1, \ldots, u_n$ et t, dans le domaine de rationalité [Δ].

En remplaçant A_i et D par les valeurs précédentes daus l'équation proposée, celle-ci s'écrit

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{D(\omega_i, f)}{D(t, u_i)} = 0.$$

Ainsi, dans le cas simple de deux variables, toute équation admettant le groupe de rationalité V_2, qui conserve les aires, s'écrira $\frac{D(\omega, f)}{D(t, u)} = 0$, où ω est une fonction arbitraire et f, la fonction inconnue. Il s'ensuit que f est une fonction arbitraire de ω.

55. 3° *Équations aux dérivées partielles du premier ordre.* — On sait qu'une intégrale complète de l'équation [18] :

$$(1) \qquad Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a, \qquad \text{où} \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

est définie par

$$(2) \qquad X_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

les Z et les X_i satisfaisant à

$$(3) \qquad dz - \sum P_i dx_i = \rho(dz - \sum p_i dx_i).$$

Les Z, X_i, P_i vérifient le système

$$[Z, X_i] = [X_i, X_k] = [P_i, P_k] = [P_i, X_k] = 0;$$
$$[P_i, X_i] = \rho; \qquad [P_i, Z] = \rho P_i;$$
$$[Z, \rho] = \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2; \qquad [X_i, \rho] = \rho \frac{\partial X_i}{\partial z}; \qquad [P_i, \rho] = \rho \frac{\partial P_i}{\partial z};$$

où l'on a posé

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \frac{\partial g}{\partial p_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right].$$

Les X_i et les P_i sont, d'après (3), définis à une transformation de contact près, qui conserve Z. Toute transformation de contact, admettant parmi les équations directrices, $Z = z$ répondra à la question.

Soit le cas simple :

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

l'équation proposée, que nous pourrons supposer résolue en q :

$$q = f(x, y, z, p).$$

La méthode de Lagrange consiste à déterminer $\varphi(x, y, z, p)$ telle que

$$dz = p\,dx + f\,dy,$$

où p est donné par

$$\varphi(x, y, z, p) = a$$

soit intégrable.

p est donc solution de $[q - f, \varphi] = 0$, c'est-à-dire

$$A(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(f - p\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0.$$

Soit $\psi(x, y, z, p) = b$ une solution de cette équation. Pour qu'elle soit compatible avec $\varphi(x, y, z, p) = a$, il est nécessaire que

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\psi}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}.$$

D'où l'on déduit

$$dz - p\,dx - f\,dy = \lambda(d\varphi - \omega\,d\psi), \qquad \text{où} \quad \omega = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}},$$

les trois éléments ω, φ, ψ étant définis à une transformation de contact près.

Il conviendrait d'étudier tous les cas de réduction. On voit, par exemple, que, si z disparaît de l'équation proposée :

$$q = f(x, y, p)$$

on cherche

$$\varphi(x, y, p) = a.$$

Le crochet $[q - f, \varphi]$ se simplifie :

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

et admet le multiplicateur 1. Le groupe de rationalité est alors défini par

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(\varphi, \psi)} = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE.

J. Drach :

[1] *Thèse*, chap. III, Paris, 1898.
[2] *Intégration logique des équations différentielles oridnaires* (*Int. Congress of Math.*, Cambridge, 1912, p. 2 à 11).
[3] *Ibid.*, p. 19-22.
[4] *Équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 38, 1920, p. 1-94).
[5] *Intégration logique des équations différentielles ordinaires* (*Int. Congress of Math.*, Cambridge, 1912, p. 14).
[6] *Sur la réduction de l'équation générale de Riccati* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 205, 1937, p. 700-705).
[7] *Sur quelques applications de l'intégration logique des équations différentielles* (*C. R. Congrès Int. des Math.*, Strasbourg, 1920, p. 10-19).
[8] *Ibid.*, p. 19-25.
[9] *Sur l'intégration logique des équations différentielles : applications au équations de la Géométrie et de la Mécanique* (*Proc. Int. Math. Congress* Toronto, 1924, p. 484-494).
[10] *Intégration logique des équations différentielles ordinaires* (*Int. Congress of Math.*, Cambridge, 1912, p. 26-60).

Darboux :

[11] *Théorie des surfaces*, t. IV, note VIII, p. 484.
[12] *Bull. Sc. Math.*, t. II, 1878, p. 60-96.
[13] *Théorie des surfaces*, t. IV, nos 1039-1046.
[14] *Systèmes orthogonaux et coordonnées curvilignes*, livre I, chap. VI et livre II, chap. I.
[15] *Théorie des surfaces*, t. II, chap. III.
[16] *Ibid.*, p. 431.

D. Hilbert :

[17] *Math. Ann.*, Band 27, 1886, p. 158.

E. Goursat :

[18] *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 201.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

L'intégration logique.

CHAPITRE II.

Équations du premier ordre.

CHAPITRE III.

Équations du second ordre.

CHAPITRE IV.

Équations linéaires.