Proceedings of the International Mathematical Congress, v. I, The Univ. Press. Toronto, (1928), 473-510.

*

SUR L'*INTÉGRATION LOGIQUE* DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES: APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DE LA GÉOMÉTRIE ET DE LA MÉCANIQUE

PAR M. JULES DRACH,

Professeur à la Sarbonne, Paris, France.

GÉNÉRALITÉS

Groupe de rationalité. Je rappellerai d'abord ce qu'il faut entendre par «*intégration logique*» d'une équation différentielle ordinaire:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \ldots,\, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1}$$

dont le second membre est une fonction de $(n+1)$ arguments appartenant à un certain domaine de rationalité (Δ) qui sera précisé plus tard.* L'équation (1) étant remplacée par

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}y'+\ldots+\frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}}f=0 \tag{2}$$

où $y'=\frac{dy}{dx}$, ..., qui en définit les intégrales premières, sa solution générale peut être donnée par les relations implicites,

$$z_i(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)})=C_i, \quad (i=1,\, \ldots,\, n),$$

où les z_i sont un système fondamental de solutions de (2) et les C_i des constantes arbitraires. Or à l'égard d'une équation quelconque à $(n+1)$ variables $x,\ x_1, \ldots, x_n$

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \tag{3}$$

dont les coefficients A_i sont des fonctions de $x,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$ d'un domaine (Δ), deux circonstances peuvent se présenter:

1° Quel que soit le système fondamental particulier (z_i) choisi, il n'y a pas d'équations rationnelles en $z_i, \frac{\partial z_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_h dx_k}, \ldots$ (les dérivées des $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont donc

*Un exposé sommaire des points essentiels de la théorie, qui remonte à 1893, a été donné au Congrès International de Cambridge, 1912 (voir Proceedings, I, p. 438-497, II, p. 145-159); d'autres applications ont été indiquées au Congrès International de Strasbourg, 1920 (voir Comptes Rendus du Congrès, p. 356-380). Les références s'y rapportant seront indiquées simplement par les lettres C et S.

exclues) à coefficients rationnels dans (Δ), vérifiées par ce système. L'équation (3) est dite *générale*: les fonctions $z_1, \ldots, z_n$ sont définies par les relations: $X(z_i)=0$, à une transformation ponctuelle quelconque près. Ce sont des transcendantes, fonctions des $(n+1)$ arguments x, x_i, *attachées dans le domaine* (Δ) *au groupe ponctuel général* Γ_n.

2° Pour certains systèmes fondamentaux (z_i), il existe des relations de la forme indiquée plus haut. L'équation (3) est *spéciale*. On peut donner à ces relations—lorsqu'on veut définir les transcendantes (z_i) *les plus simples*—la forme:

$$\Omega_i\left(z_1,\, \ldots,\, z_n,\, \frac{\partial z_1}{\partial x_1},\, \ldots,\, \frac{\partial z_n}{\partial x_n},\, \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2},\, \ldots\right)=a_i\,(x,\, x_1,\, \ldots,\, x_n), \quad (i=1,\, \ldots, k), \tag{Σ}$$

où les Ω_i sont des fonctions rationnelles de leurs arguments qui constituent *l'ensemble des invariants différentiels caractéristiques* d'un certain groupe continu (fini ou infini) de transformations en $z_1, \ldots, z_n$—groupe Γ—quand on regarde les z_i comme fonctions des x_k, *non transformés.*

Ces invariants Ω_i sont *rationnellemdent* distincts mais non fonctionnellement distincts: ils peuvent être liés par des relations, nécessairement algébriques. Tout autre invariant de Γ, rationnel par rapport aux mêmes éléments, est fonction rationnelle des Ω_i. Le système (Σ) est *irréductible*—c'est-à-dire que toute relation de même nature, compatible avec les équations (Σ), donc vérifiée par *un* système fondamental au moins—est une conséquence nécessaire des équations (Σ). Il est aussi *primitif*, c'est-à-dire qu'aucune transformation: $z_i=\phi_i(Z_1,\ldots,Z_n)$, qui conserve aux premiers membres de (Σ) leur caractère rationnel, ne permet d'abaisser l'ordre différentiel minimum de (Σ) ou d'augmenter le nombre des équations d'un ordre donné ou même d'abaisser le degré d'une certaine résolvante algébrique qui définit les dérivées *principales* au moyen des dérivées *paramétriques.*

Dans ces conditions, le groupe Γ est dit *groupe de rationalité* de (3); les transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ sont des fonctions des $(n+1)$ arguments x, x_i *attachées au groupe* Γ *dans le domaine* (Δ).

Elles sont définies par (Σ) à *des transformations* près de Γ, donc, en général inséparables.

On peut prendre pour Γ l'un des *types* de groupes ponctuels en $z_1, \ldots, z_n$ déterminés *a priori* par S. Lie. On peut d'ailleurs trouver ces types directement, par voie algébrique.

Enfin Γ peut-être remplacé par Γ', pourvu que la transformation $(z,\, z')$ change tout invariant rationnel Ω_i en un invariant rationnel Ω'_i.

Faire l'*intégration logique* de (1) c'est *d'abord* déterminer le groupe de rationalité de l'équation (2) correspondante.

Pour cette détermination il y a lieu d'envisager les divers types de groupes possibles et d'établir pour chacun d'eux un ensemble d'invariants caractéristiques Ω_i. J'ai montré (C, p. 27-37) qu'on peut choisir les Ω_i de manière qu'ils subissent, pour toute transformation de Γ_n, une transformation projective—qu'on peut même ramener à la forme linéaire par *adjonction* d'un certain déterminant fonctionnel—et indiqué la formation du *système résolvant* qui définit les Ω_i en partant des invariants du groupe ponctuel général Γ_n, c'est-à dire des A_i. Si Γ est le groupe de rationalité de (2), le *système résolvant* pour les Ω_i possède une *solution rationnelle dans* (Δ) *et une seulement.*

Réduction du groupe de rationalité. Une fois fixé le groupe Γ de rationalité, sa *structure* permet de ramener la détermination des z_i à une succession *théorique* d'opérations, dans le cas où Γ possède des sous-groupes invariants. En fait, ces opérations, dont l'ensemble seul est déterminé, donnent une *décomposition théorique* du problème d'intégration de (Σ) qui est le cadre naturel de l'étude, au point de vue de la théorie des fonctions, des transformations subies par les fonctions z_i lorsque les variables complexes x, x_i décrivent respectivement dans leur plan des contours fermés. Ces transformations forment le *groupe de monodromie* de (Σ). On peut encore dire que les z_i s'obtiennent en partant des a_i choisis dans (Δ) par des *adjonctions successives* de transcendantes *attachées* à des groupes *simples* (qui ne possèdent pas de sous-groupe invariant) dans un domaine de rationalité convenable (D).

Il reste pour terminer à étudier par les méthodes de la théorie des fonctions, les systèmes auxiliaires successifs, à groupe simple, que l'on a dû former (Cf. plus loin, *Etude fonctionnelle*).

Remarques. I. Parmi les solutions z_i de (3), il peut y en avoir de rationnelles; on peut les englober dans la théorie générale et écrire tout de suite les relations $z_i = R_i(x, x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, \ldots, k)$ correspondantes [qui sont des équations de (Σ)] auquel cas les transformations de Γ seront de la forme

$$Z_i = z_i, \quad (i=1, \ldots, k);\ Z_{k+l} = \phi_l(z_1, \ldots, z_n), \quad (l=1, \ldots, n-k),$$

ou bien *adjoindre* les z_i, ce qui donne dans un champ algébrique (D), une équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_{n-k} \frac{\partial z}{\partial x_{n-k}} = 0, \tag{4}$$

à $(n-k+1)$ variables seulement, dépendant des paramètres $z_1, \ldots, z_k$. Le groupe Γ correspond au groupe de (4) quand les z_i $(i=1, \ldots, k)$ sont des paramètres arbitraires; si l'on fixe certaines de ces constantes, il peut y avoir réduction.

II. La distinction la plus importante relative aux groupes Γ est cette relative à la *primitivité.* Une équation (3) est *imprimitive* si certaines des solutions $z_1, \ldots, z_n$, par exemple les k premières seules, peuvent vérifier un système (Σ). Dans ce cas il existe un système de $(n-k)$ équations linéaires, (B) qu'on peut écrire:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x_1} + B_{11} \frac{\partial z}{\partial x_{k+1}} + \ldots + B_{1, n-k} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial z}{\partial x_k} + B_{k1} \frac{\partial z}{\partial x_{k+1}} + \ldots + B_{k, n-k} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}$$

dont les coefficients sont rationnels—ou *algébriques* dans (Δ)—qui forment avec (3) un système jacobien dont les solutions sont $z_1, \ldots, z_k$. Les B_{ij} sont rationnels

quand un seul groupe de solutions $z_1, \ldots, z_k$ peut être ainsi *isolé*, ils sont algébriques s'il y en a plusieurs. En commençant la recherche par celles des systèmes (B) à une équation, on voit aisément que les B_{ij} ne peuvent dépendre de constantes arbitraires que si les z sont en tout ou en partie, des transcendantes *attachées* à des groupes *linéaires*. Dans certains cas, l'essentiel de la théorie d'intégration logique peut se retrouver dans la théorie donnée par M. Émile Picard pour les équations différentielles linéaires. Les transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ dépendant de $(n+1)$ arguments peuvent s'obtenir par des opérations successives portant sur des fonctions où un seul argument varie. Il en est également ainsi pour tout groupe de rationalité *fini.*

Quand l'équation (3) est *primitive*, $z_1, \ldots, z_n$ sont *inséparables*. La décomposition de Γ en une suite de groupes dont chacun est invariant maximum dans le précédent, donne la seule décomposition *théorique* du problème de l'intégration de (Σ).

Extension du domaine de rationalité. Le domaine (Δ) peut d'abord être le domaine *absolu*, ensemble des fonctions rationnelles à coefficients rationnels numériques (puis algébriques) de x, x_i; on peut l'étendre en y ajoutant des paramètres constants, puis des fonctions algébriques de x, x_i.

D'une manière générale on peut *adjoindre* à (Δ) tout élément u fonction de $x, x_1, \ldots, x_n$ satisfaisant à un système (S) de relations d'ordre quelconque:

$$F_i\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \middle| x, x_1, \ldots, x_n\right) = 0, \quad (i=1, \ldots, h), \tag{S}$$

dont les premiers membres sont des polynomes entiers en $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots$ à coefficients rationnels dans (Δ), pourvu que ces relations, compatibles, déterminent *d'une manière unique* le calcul (addition, multiplication, dérivation) des fonctions rationnelles du nouveau domaine. Si le système (S) n'est pas *irréductible* (c'est-à-dire s'il existe des relations de même nature, compatibles avec (S) sans en être des conséquences nécessaires), il faudra donc ajouter à (S) des *inégalités* pour exclure ces relations. Je dis alors que u est *bien défini.* Par exemple, on peut adjoindre l'exponentielle Ce^x, bien définie par $\frac{\partial u}{\partial x} = u$, avec $u \neq 0$.

Les fonctions *arbitraires* de moins de $(n+1)$ arguments figurent parmi les fonctions bien définies.

Un système complet de $(n+1-k)$ équations linéaires par rapport aux dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ dont les coefficients appartiennent à (Δ) donne naturellement pour ses solutions *les plus simples* $z_1, \ldots, z_k$, des transcendantes *attachées* au groupe ponctuel général à k arguments, Γ_k, ou à l'un de ses sous-groupes *types* Γ. La théorie s'étend donc aux systèmes complets linéaires. Il suit de là qu'elle s'applique à la détermination des *intégrales complètes* des systèmes d'équations non linéaires à une inconnue (C, p. 54).

Les groupes de rationalité correspondants peuvent être pris parmi les types des groupes de *transformations de contact*, mais les sous-groupes de groupes semblables aux groupes de contact sont parfois plus commodes.

Étude fonctionnelle. Enfin, il est clair que l'on peut répéter les raisonnements qui conduisent aux conclusions précédentes *en se bornant au voisinage d'un point ou d'un domaine singulier* pour l'équation (3), pourvu que les coefficients se comportent *dans ce voisinage* comme des fonctions rationnelles de (Δ), c'est-à-dire soient méromorphes. On déduit de là une classification rationnelle des domaines singuliers de (3), basée sur l'existence d'un groupe Γ *au voisinage* du domaine singulier (C, p. 22). L'étude, au point de vue de la théorie des fonctions, des transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ *attachées* à un groupe G, même simple, et en par-ticulier au groupe général Γ_n dans le domaine (Δ), comportera donc la déter-mination des groupes Γ pour les divers domaines singuliers et celle des trans-formations subies par $z_1, \ldots, z_n$ quand on passe du voisinage d'un domaine singulier à celui d'un autre domaine singulier.

Observons, en passant, que la recherche, par le moyen d'équations différentielles rationnelles, de transcendantes *uniformes qui ne se ramènent pas à celles définies par des équations linéaires*, doit conduire nécessairement à des transcendantes *attachées à un groupe infini* dans le domaine absolu (Δ). Si ces transcendantes ne s'obtiennent pas par des quadratures successives, ce groupe infini est *primitif*. C'est essentiellement parce que le groupe de rationalité de l'équation de M. Painlevé: $y''=6y^2+\alpha x$ est le groupe *infini* à 2 arguments, *primitif* et même *simple*, donné par $\dfrac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\phi, \psi)}=1$ où ϕ, ψ sont les deux intégrales de

$$X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\,y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\,(6y^2+\alpha x)=0$$

que les transcendantes y, y' sont *nouvelles*. Il en est de même, *a fortiori*, pour les autres équations de M. Painlevé. (Cf. Bulletin des Sciences Math., juillet 1915).

Équation du Premier Ordre

L'application de la théorie aux équations du premier ordre

$$\frac{dy}{dx}=A(x, y), \tag{1}$$

donne des résultats très simples.

L'équation

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{2}$$

lorsqu'elle est *spéciale*, peut posséder:

(α) une solution rationnelle dans (Δ) : $z=R(x, y)$,

(β) une solution z pour laquelle $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^n$, (où n est entier positif), est rationnel.

Si l'on a $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^n=K(x, y)$ la fonction K rationnelle dans (Δ) satisfait à la résolvante:

$$X(K)+nK\frac{\partial A}{\partial y}=0,$$

qui n'a qu'une seule solution rationnelle.

La transcendante z est définie aux transformations près $(Z=\epsilon z+a)$, $\epsilon^n=1$, a est constant, qui forment le groupe Γ.

(γ) une solution z pour laquelle $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} : \dfrac{\partial z}{\partial y}$ est rationnel.

Si l'on pose $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=J\dfrac{\partial z}{\partial y}$, J est la seule solution rationnelle de la résolvante:

$$X(J)+J\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=0.$$

La transcendante z est *attachée* au groupe Γ linéaire $(Z=az+b)$. Elle s'obtient par deux quadratures superposées, avec *adjonction* de l'exponentielle.

(δ) Une solution z pour laquelle l'invariant *projectif* de *Cayley-Schwarz*

$$I=\frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\right)^2$$

est rationnel dans (Δ)

La résolvante en I, avec une seule solution rationnelle, est:

$$X(I)+2I\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial^3 A}{\partial y^3}=0.$$

Dans ce cas z est défini aux transformations projectives près $\left(Z=\dfrac{az+b}{cz+d}\right)$ où a, b, c, d sont des constantes, qui forment Γ.

Le système différentiel qui définit z peut-être remplacé par un système de deux équations de Riccati définissant J, et des quadratures définissant z, mais cette procédure ne décompose pas le problème; le groupe projectif Γ est *simple*. On peut aussi remplacer le système de Riccati par un système linéaire à deux inconnues, dont le groupe est le groupe linéaire spécial.

Ainsi, en dehors de ces cas bien précis, l'équation est *générale*. On doit l'étudier par les méthodes de la théorie des fonctions (domaines singuliers et groupes Γ correspondants, etc.).

J'ai montré en détail (C. p. 6) quel intérêt il y a, lorsque l'équation (1) est spéciale, à définir implicitement y au moyen de x et de la constante z par la méthode précédente. Si l'on envisage la relation $y=f(x, x_0, y_0)$ qui donne la solution y se réduisant à y_0 pour $x=x_0$, y est une fonction de *trois arguments* et la solution *principale* en x_0 pour (2) est: $u=f(x_0, x, y)$. Or déjà dans le cas simple où $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n$ est rationnel, u est défini par les équations

$$X(u)=0,\ K(x_0, u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n=K(x, y)$$

aux transformations (u, v) près déterminées par:

$$K(x_0, u)\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^n=K(x_0, v)$$

qui dépendent de x_0 *et aussi de la forme de* K, et sont en général transcendantes.

Détermination du groupe de rationalité. La détermination effective, pour une équation entièrement déterminée dans un domaine (Δ), du groupe de rationalité Γ, se ramène essentiellement à celle des polynomes irréductibles, P, formés avec les arguments de (Δ), qui satisfont à une identité:

$$X(P)=\frac{\partial P}{\partial x}+A_1\frac{\partial P}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial P}{\partial x_n}=MP$$

où M est également un polynome de (Δ), c'est-à-dire à la recherche des équations: $P=0$, *invariantes* par l'opération $X(f)$. C'est là un problème difficile qui relève en général de recherches arithmétiques.

J'ai indiqué en particulier (C, p. 13) comment dans le cas le plus simple d'une équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$$

où α et β sont des polynomes en x et y, on peut—s'il n'existe que deux *valeurs remarquables* de z, pour lesquelles $P-zQ$, indécomposable en général, possède un facteur multiple—*reconnaître si l'équation admet une solution rationnelle:* $z=\frac{P}{Q}$. On y fait voir aussi que la méthode s'applique encore dans le cas de 3 et 4 valeurs remarquables, pour certaines valeurs particulières des exposants des facteurs multiples. Les recherches classiques de Darboux (Bulletin des Sciences Math. 1878) et celles de H. Poincaré et P. Painlevé (Cf. *Leçons de Stockholm*), où l'on se préoccupe de limiter le degré de P et Q par l'étude des intégrales de (1) au voisinage des points singuliers, montrent la difficulté de la question.

La *recherche du groupe de rationalité* d'une équation

$$\text{(1)} \qquad X dy - Y dx = 0$$

c'est-à-dire d'abord celle de toutes les intégrales particulières algébriques de l'équation ou de tous les polynomes irréductibles $f(x, y)$ qui satisfont à une identité

$$\Omega(f)=X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=Mf,$$

où M est un polynome de degré $m-1$, quand X et Y sont de degré m, m'a conduit (Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, 27 janvier 1919) aux conclusions suivantes:

Supposons, avec H. Poincaré, que les points communs aux courbes $X=0$, $Y=0$ soient simples et à distance finie. Si l'on désigne par μ et μ' les racines de l'équation en M, au point singulier x, y:

$$S=\left(\frac{\partial X}{\partial x}-M\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}-M\right)-\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}=0,$$

lorsque la courbe $f=0$ a en ce point un point multiple d'ordre n, le polynome M y prend une valeur $p\mu+p'\mu'$ où p et p' sont des entiers positifs tels que $p+p'=n$. On déduit de là, en éliminant les coefficients de M dans les équations:

$$M(\xi_i, \eta_i)=p_i\mu_i+p_i'\mu_i'$$

relatives aux m^2 points singuliers, $\frac{m(m-1)}{2}$ relations linéaires

$$(\Delta) \qquad \Sigma\theta_i(p_i\mu_i+p'_i\mu'_i)=0$$

où les θ_i sont des déterminants formés avec les coordonnées ξ_j, η_j des divers points singuliers. Ces relations, où les p_i, p_i' seuls sont inconnus, doivent donc admettre des solutions *entières, positives ou nulles*, pour ces inconnues.* (On voit pourquoi elles avaient échappé au géomètres faisant l'étude locale des points singuliers). La courbe M ne peut passer (sauf cas exceptionnels) que par $\frac{m(m+1)}{2}-1$ points singuliers: chaque courbe $f=0$ passe au moins par $\frac{m(m-1)}{2}+1$ de ces points, pour lesquels $p_i+p_i'>0$.

En outre, comme en tous les points singuliers qui ne sont pas des *nœuds* (points où $\frac{\mu'}{\mu}$ est un nombre rationnel *positif*), il passe au plus *deux* branches d'intégrales algébroïdes, si f est *irréductible*, on a en ces points: $p+p'\leq 2$.

D'autres conseqуences des relations (Δ) résultent du fait que toutes leurs solutions entières et positives sont des combinaisons linéaires, à coefficients entiers positifs, de k *solutions fondamentales*: le polynome M le plus général possible est donc $\alpha_1M_1+\ldots+\alpha_kM_k$ où les α_i sont des entiers positifs quelconques. Lorsque f est un polynome irréductible, les α doivent être pris de façon que *pour tout point autre qu'un nœud la multiplicité soit au plus* 2. Il est clair que la limitation des α en résulte généralement. Or leur détermination donne, pour tous les points singuliers, les entiers p et p', donc aussi la multiplicité de f; on en déduit aisément le degré possible de f.

Quand l'intégrale de (1) est algébrique, on peut l'écrire $z=\frac{P}{Q}$ où P et Q sont irréductibles et ne s'annulent qu'aux nœuds. Soit M le polynome $\alpha_1M_1+\ldots+\alpha_kM_k$ correspondant; pour les valeurs remarquables z où $f=Qz-P$ passe par un

*D'autres relations, en nombre $(m+1)$, se déduisent de l'étude des points à l'infini des deux courbes: $X=0$, $Y=0$.

point singulier autre qu'un nœud, on aura en général un autre groupement $\beta_1 M_1 + \ldots + \beta_k M_k$ identique à M, donc au moins une identité:

$$\alpha_1 M_1 + \ldots + \alpha_k M_k = \beta_1 M_1 + \ldots + \beta_k M_k.$$

Enfin si (1) possède h solutions particulières algébriques, le système (Δ) admet des solutions dépendant de h entiers positifs arbitraires; on a donc $k \geq h$.

Exemples. La détermination du groupe de rationalité d'une équation donnée, rencontrée dans une question de Géométrie par exemple, n'exige pas toujours, heureusement, une discussion arithmétique. Si l'équation renferme des paramètres, en observant que pour certaines valeurs des paramètres la difficulté de l'intégration s'abaisse et permet de trouver le groupe G, on peut affirmer que Γ contiendra G comme sous-groupe; si l'on a plusieurs groupes tels que G, Γ contiendra un ensemble de groupes semblables aux différents G, quand ces sous-groupes ne correspondent pas aux mêmes intégrales.

J'ai réussi de cette manière (*C*, p. 19) à trouver le groupe de rationalité de l'équation différentielle des lignes de courbure pour la *surface des ondes* de Fresnel, c'est-à-dire, en fait, à intégrer cette équation à 3 paramètres, à l'aide d'intégrales abéliennes. Cette question avait occupé divers géomètres, dont Cayley. Peu après, j'ai pu former le groupe de rationalité de l'équation différentielle des lignes *asymptotiques*, pour la *surface générale du troisième degré.* Cette équation s'intègre encore en égalant à une constante une intégrale de différentielle algébrique. Elle dépend de quatre paramètres et j'ai pu étudier en détail sa réduction dans le cas où la surface possède des singularités.

Un autre exemple précis, emprunté à la Mécanique, sera donné à la fin de ce travail: le groupe de rationalité du système qui définit le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe.

Pour les équations de la Géométrie (j'appelle ainsi celles où figurent certains paramètres ou certaines fonctions d'un ou de plusieurs arguments, dont on ne connait pas la nature transcendante—qui sont donc *a priori* arbitraires), j'ai indiqué (C, II, p. 2) des méthodes *régulières* qui permettent d'utiliser des propriétés géométriques connues de familles de courbes ou de surfaces pour déterminer ces familles en partant de leurs équations différentielles. Ces méthodes ne sont d'ailleurs que l'application particulière d'une théorie qui conduit à *utiliser au mieux la connaissance fortuite de relations rationnelles entre les z_i, solutions d'une équation linéaire*

$$X(z) = 0, \tag{2}$$

à $(n+1)$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$, leurs dérivées de tous ordres: $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}, \dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_h \partial x_k}, \ldots,$ *et les variables*, ces dernières ne figurant que par des fonctions du domaine (Δ), *pour l'intégration logique de l'equation* (2).

En fait, on déduit toujours de ces relations la connaissance sous forme de fonction de (Δ), des invariants rationnels caractéristiques d'un certain groupe G. Ce groupe G est nécessairement un groupe qui renferme Γ; il peut être le groupe de rationalité, Γ, lui-même.

Applications

On a rangé sous cette rubrique toute une série de recherches où l'on se propose de former *a priori*, parmi les équations de catégories données, où l'une des variables *au moins* figure rationnellement, tous les *types* d'équations qui peuvent s'intégrer logiquement par des moyens fixés d'avance, en d'autres termes qui posséderont un groupe de rationalité donné, Γ, dans le domaine (Δ) auquel appartiendront les coefficients de l'équation. Les plus intéressantes sont d'abord celles où, *en dernière analyse*, on sera ramené à une intégration d'une équation du premier ordre se faisant par quadratures. Des signes de quadrature suffisent en fait à expliciter les opérations nécessaires pour définir les coefficients de l'équation à former. J'ai montré, par des exemples, ce qu'il faudrait envisager comme *opération explicite* pour traiter des cas plus étendus (S, p. 356-380).

Dans la plupart de ces recherches on a été conduit à intégrer logiquement des équations différentielles, ou aux dérivées partielles, d'ordre élevé. On a pu le faire par une analyse intime de la question, en exprimant essentiellement que les transformations des éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$ d'un système fondamental appartiennent au groupe Γ de rationalité fixé d'avance. Il a été nécessaire d'introduire explicitement et de regarder comme variables, d'abord indépendantes, les éléments qui déterminent les *singularités* des coefficients ou des intégrales de l'équation à déterminer et aussi quand la question exige l'étude d'équations aux dérivées partielles, les *caractéristiques, au sens d'Ampère*, de ces équations aux dérivées partielles. Après avoir rappelé rapidement quelques-unes des recherches antérieures et leur intérêt géométrique, nous montrerons par de nouveaux exemples, la puissance de la méthode adoptée.

I. Le premier exemple est donné par les équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(y)}{\beta(y)} \tag{A}$$

où α et β sont deux polynomes en y de degré donné, dont les coefficients sont des fonctions de x à déterminer. Les transformations qui conservent la forme de l'équation permettent d'adopter un certain *type* quand le degré n de $\alpha(y)$ est fixé et j'ai pu former méthodiquement les équations $X(z) = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\alpha(y)}{\beta(y)} \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, dont le groupe de rationalité est l'un des trois groupes α, β, γ signalés plus haut, c'est-à-dire pour lesquelles z, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^n$ ou $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} : \dfrac{\partial z}{\partial y}$ sont rationnels en y, les coefficients appartenant à un domaine (Δ) qui comprend les coefficients de $\alpha(y)$ et de $\beta(y)$ (S, p. 358). J'ai étudié en détail les équations $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P_3(y)}{P_1(y)}$ sur une de leurs formes réduites qui se trouve être *l'équation de la Balistique extérieure;* la méthode est très longuement expliquée dans les Annales de l'École Normale Supérieure, 1920. On sait que ces équations sont, en particulier, celles qui permettent de trouver les *lignes géodésiques des surfaces spirales.*

La détermination des *lignes de longueur nulle des surfaces réglées* se ramène aisément aussi à l'intégration d'une équation de la forme générale, dont on peut indiquer tous les cas de réduction aux quadratures.

II. Un autre exemple—lié à la *déformation infiniment petite des surfaces minima*—est celui des cas de réduction aux quadratures de l'équation linéaire:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=[\phi(x)+h]y$$

ou mieux de l'équation de Riccati:

$$\frac{d\rho}{dx}+\rho^2=\phi(x)+h$$

où $\phi(x)$ est à déterminer et h, paramètre, demeure arbitraire. Il nous a conduit à l'extension naturelle des recherches mémorables d'Hermite et de M. É. Picard sur l'équation de Lamé. A noter que, soit dans l'étude de cette dernière équation soit dans celle du groupe des équations: $\frac{dy}{dx}=\frac{P_3(y)}{P_1(y)}$, nous avons retrouvé pour des cas de réduction du groupe de rationalité (mais non à des groupes intégrables) les transcendantes de M. Painlevé.

III. J'ai montré sur des exemples (S, p. 365) le rôle que joue dans une équation du premier ordre, un paramètre qui demeure arbitraire et figure rationnellement, *en principe*, comment on peut établir les formes: $\frac{dy}{dx}=R(\phi)$ où R est le quotient de polynomes de degrés *donnés* en ϕ à coefficients dépendant de x, y, de manière que cette équation s'intègre par quadratures.

Dans ce dernier exemple, où il s'agit de déterminer des fonctions des deux variables x, y, interviennent, pour la première fois, des équations aux dérivées partielles à deux variables et à une fonction inconnue mais *d'ordre quelconque*. Le rôle des *variables caractéristiques d'Ampère* y apparait.

IV. Il se précise dans l'étude (S, p. 374) des équations du second ordre:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F(x, y)$$

où F est à déterminer de façon que cette équation possède une intégrale première rationnelle en $\frac{dy}{dx}$, auquel cas l'équation s'intègre complètement par quadratures.

Dans les pages suivantes, nous examinons spécialement l'équation des géodésiques—prise sous forme *type* avec des coordonnées symétriques—et aussi, sur des exemples particuliers, l'équation générale:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=R\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

où R est le quotient de deux polynomes en $\frac{dy}{dx}$, de degrés donnés, dont les coefficients seront des fonctions de x, y à déterminer.

Équation des lignes géodésiques

Je me propose la détermination des éléments linéaires $ds^2=4\lambda du dv$ pour lesquels l'équation différentielle des lignes géodésiques

$$v''=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}v'-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}v'^2 \tag{1}$$

possède une intégrale première *rationnelle* en v'.

On sait que l'intégration de (1) et celle de l'équation aux dérivées partielles:

$$F=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\lambda=0 \tag{2}$$

sont des problèmes équivalents, la correspondance entre les deux étant définie par:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\sqrt{\lambda v'}, \qquad \frac{dz}{dv}=\sqrt{\frac{\lambda}{v'}}.$$

Jacobi a d'ailleurs observé que si l'on connait une solution z de (2) dépendant d'un paramètre ϕ,

$$\frac{\partial z}{\partial\phi}=\psi$$

donne l'intégrale générale de (1).

On n'avait pu traiter le problème (2) que dans les cas où il existe une intégrale $\phi(p, q)=$const. de l'équation

$$(F, \phi)=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial\phi}{\partial v}=0$$

où $p=\frac{\partial z}{\partial u}$, $q=\frac{\partial z}{\partial v}$, intégrale qu'on peut supposer homogène, *linéaire* en p, q (ds^2 de révolution, Bour), *quadratique* en p, q (ds^2 de Liouville et de Lie) ou *fractionnaire* et du premier degré en p, q (O. Bonnet). Tout un chapitre des *Leçons sur la théorie des surfaces* de Darboux (livre VI, Chap. IV) témoigne du vain effort des géomètres: Bour, O. Bonnet, Maurice Lévy, Darboux, pour étendre ces résultats.

Intégrales entières d'ordre impair. La fonction $\phi(p, q)$, étant supposée *homogène* en p, q, nous étudions d'abord le cas où elle est d'ordre impair: $m=2n+1$.

Pour simplifier l'écriture, considérons au lieu de v' la variable $w=\lambda v'$ (c'est-à-dire p^2); l'équation (1) donne alors l'équation aux dérivées partielles:

$$A(f)=\lambda\frac{\partial f}{\partial u}+w\frac{\partial f}{\partial v}+2w\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial w}=0. \tag{3}$$

Si l'on possède une solution: $\phi=\phi(w)$ une autre solution ψ sera donnée par la quadrature

$$d\psi=\frac{\lambda dv-wdu}{w^{3/2}\dfrac{\partial\phi}{\partial w}} \tag{4}$$

où w est défini par l'équation $\phi=\phi(w)$ au moyen de u, v et du paramètre ϕ.

Dans l'hypothèse où ϕ, intégrale de $(F,\phi)=0$, est un polynome entier en p, q d'ordre $2n+1$, il est possible (en changeant au besoin u, v en de nouvelles fonctions de ces arguments, c'est-à-dire en passant à une *équation type*) de lui donner la forme:

$$\phi=w^{-\frac{m}{2}}(w-\gamma_1)\dots(w-\gamma_m). \tag{5}$$

Le système des relations que doivent vérifier les γ_i—qui exprime que les facteurs $(w-\gamma_i)$ sont invariants par l'opération $A(f)$—et l'inconnue λ, peut être remplacé par:

$$\lambda^m=-\gamma_1\dots\gamma_m=\zeta_1\dots\zeta_m \tag{6}$$

et

$$\lambda\frac{\partial\phi_i}{\partial u}+\zeta_i\frac{\partial\phi_i}{\partial v}=0,\quad (i=1,\dots,m), \tag{S}$$

où les ζ_i sont les racines de l'équation $\dfrac{\partial\phi}{\partial w}=0$, et les ϕ_i, les expressions: $\phi_i=\phi(\zeta_i)$. Ces ϕ_i sont, à un autre point de vue, les *variables caractéristiques d'Ampère* pour l'équation unique aux dérivées partielles d'ordre m à une fonction et à deux variables u, v que l'on peut former pour remplacer le système (S) (*équation formée déjà par Eour*): ce sont les combinaisons intégrables des divers systèmes de caractéristiques de Cauchy pour l'équation en question, *chaque système n'en admettant qu'une.*

L'emploi des variables indépendantes $\phi_1,\dots,\phi_m$ définies aussi par les relations: $\lambda dv-\zeta_i du=B_i d\phi_i$, va nous conduire à la détermination des multiplicateurs B_i en $\phi_1,\dots,\phi_m$.

Les γ_i et les ζ_i sont des fonctions algébriques de $\phi_1,\dots,\phi_m$. En posant $\gamma_i=x_i^2$, on reconnait sans difficulté que l'on a:

$$dx_1^2+\dots+dx_m^2=H_1^2d\phi_1^2+\dots+H_m^2d\phi_m^2$$

ce qui permet de faire usage, pour la transformation des dérivées, des formules des systèmes orthogonaux à n variables. (Cf. Darboux, *Systèmes orthogonaux*, Livre I, Ch. VI).

On trouve ainsi que w défini par: $\phi=\phi(w)$ satisfait aux équations:

$$\frac{\partial w}{\partial\phi_i}=\frac{w}{\zeta_i\phi''(\zeta_i)(\zeta_i-w)} \tag{7}$$

où l'on a posé:

$$\phi''(\zeta_i)=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial w^2}\right)_{w=\zeta_i}.$$

Les γ_h satisfont aux mêmes équations. Il en est encore de même des ζ_h pour $(h\neq i)$. Enfin on a

$$\frac{\partial\phi''(\zeta_i)}{\partial\phi_h}=\frac{-2\phi''(\zeta_i)}{\phi''(\zeta_h)(\zeta_h-\zeta_i)^2} \tag{8}$$

et

$$\frac{1}{H_i^2}=-4\phi_i\zeta_i\phi''(\zeta_i). \tag{9}$$

Envisageons maintenant la différentielle exacte en u, v:

$$d\psi=\frac{\lambda dv-wdu}{w^{3/2}\dfrac{\partial\phi}{\partial w}};$$

elle se trouve être rationnelle en w et peut être décomposée en fractions simples. Si l'on tient compte des relations $\lambda dv-\zeta_i du=B_i d\phi_i$, on peut lui donner la forme:

$$d\psi=\frac{A_1d\phi_1}{w-\zeta_1}+\dots+\frac{A_md\phi_m}{w-\zeta_m} \tag{10}$$

où les A_i sont des fonctions inconnues de $\phi_1,\dots,\phi_m$, liées simplement aux B_i.

Nous cherchons à déterminer les A_i de manière que $d\psi$ soit une différentielle exacte en $\phi_1,\dots,\phi_m$, quelle que soit la fonction w donnée par $\phi=\phi(w)$. (Cela aura lieu en particulier pour $w=\gamma_i$). On trouve ainsi $A_i=\dfrac{\partial\theta}{\partial\phi_i}$ où θ est la solution générale du système d'équations de Laplace

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{1}{\zeta_h}\frac{\partial\theta}{\partial\phi_h}\right)=\frac{\partial}{\partial\phi_h}\left(\frac{1}{\zeta_i}\frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\right) \tag{T}$$

solution qui dépend de m fonctions arbitraires d'un argument, qui est l'un des éléments $\phi_1,\dots,\phi_m$.

En observant que w est une solution de (T) qui dépend du paramètre ϕ et désignant par $w_1,\dots,w_m$ les solutions de $\phi=\phi(w)$ qui se réduisent à $\zeta_1,\dots,\zeta_m$ pour $\phi=\phi_1,\dots,\phi=\phi_m$, on peut écrire cette solution générale:

$$\theta=\int w_1F_1(\phi)d\phi+\dots+\int w_mF_m(\phi)d\phi,$$

où les $F_i(\phi)$ sont arbitraires, les intégrales étant prises entre limites constantes ou le long de contours fermés dans le plan ϕ.

Observons encore que λ considéré comme fonction de $\phi_1,\dots,\phi_m$ satisfait aux relations:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\phi_i}=\frac{\lambda}{2\zeta_i^2\phi''(\zeta_i)}.$$

Il reste à établir entre les éléments $\phi_1, \ldots, \phi_m$ et les variables u, v les relations qu'exige l'identité en w:

$$d\psi = \frac{\lambda dv - w du}{w^{3/2}\dfrac{\partial\phi}{\partial w}} = \frac{A_1 d\phi_1}{w-\zeta_1} + \ldots + \frac{A_m d\phi_m}{w-\zeta_m} \tag{11}$$

Si l'on pose $(w-\zeta_1)\ldots(w-\zeta_m) = P(w) = w^m + p_1 w^{m-1} + \ldots + p_m$, on déduit de cette identité:

$$(\lambda dv - w du)w^n = \sum A_i d\phi_i [w^{m-1} + (p_1+\zeta_i)w^{m-2} + \ldots . + (p_{m-1} + p_{m-2}\zeta_i + \ldots . + \zeta_i^{m-1})]. \tag{12}$$

On conclut de là, d'abord, de proche en proche, les relations:

$$\text{(U)} \qquad \begin{aligned} &\sum A_i \zeta_i^k d\phi_i = 0, \qquad (k=0, 1, \ldots, n-2),\\ &\sum A_i \zeta_i^{n-1} d\phi_i = -du. \end{aligned}$$

Les autres, qui se présentent sous une apparence plus compliquée, se ramènent aisément à la forme:

$$\text{(V)} \qquad \begin{aligned} &\sum A_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^k d\phi_i = 0, \qquad (k=1, \ldots, n),\\ &\lambda^{m-1} \sum A_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^{n+1} d\phi_i = dv. \end{aligned}$$

Cette forme, symétrique du premier groupe, s'en déduit aussi en remplaçant u par v et $\sqrt{w}$ par $\dfrac{\lambda}{\sqrt{w}}$.

Ce système de m relations aux différentielles totales à $(m+2)$ variables, *possède m combinaisons intégrables** que que l'on peut construire méthodiquement: Il est commode pour les obtenir de calculer les dérivées en $\phi_1, \ldots, \phi_m$ des fonctions symétriques des γ_i, c'est-à-dire des coefficients $a_1, \ldots, a_m$ définis par

$$(w-\gamma_1)\ldots(w-\gamma_m) = w^m + a_1 w^{m-1} + \ldots + a_m;$$

d'où l'on déduit aussi, simplement, les dérivées de $p_1, \ldots, p_m$ sans calculer les dérivées $\dfrac{\partial\zeta_i}{\partial\phi_i}$.

Nous avons ainsi, par exemple, les combinaisons intégrables des premiers membres:

*Ce sont évidemment des combinaisons linéaires des relations

$$d\psi_i = \sum \frac{A_k d\phi_k}{\gamma_i - \zeta_k},$$

où $d\psi_i = \dfrac{\lambda dv - \gamma_i du}{\gamma_i^{3/2}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial w}\right)_{w=\gamma_i}}$.

$$\text{(}\Sigma\text{)} \qquad \begin{aligned} &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i} d\phi_i = d\theta,\\ &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left(a_1 + \frac{m}{2}\zeta_i\right) d\phi_i = d\theta_1,\\ &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left[a_2 - \frac{1}{m}\left(\frac{m}{2}-3\right)a_1^2 + 2a_1\zeta_i + \frac{m}{2}\zeta_i^2\right] d\phi_i = d\theta_2,\\ &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left\{a_3 - \frac{2}{m}(m-4)a_1 a_2 - \frac{2}{3m}\left[\frac{2}{m}(m-2)(m-4) + \frac{(m-8))}{m}\right]a_1^3\right.\\ &\qquad \left. + \left[2a_2 - \frac{(m-8)}{m}a_1^2\right]\zeta_i + 3a_1\zeta_i^2 + \frac{m}{2}\zeta_i^3\right\} d\phi_i = d\theta_3, \end{aligned}$$

. . . .

où l'on voit apparaître, comme coefficients des $\dfrac{\partial\theta}{\partial\phi_i}$ des combinaisons linéaires à *coefficients constants* de monomes de *même poids* en $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, tels que, pour l'expression $d\theta_k$, les éléments: a_k, $a_1 a_{k-1}$, $a_2 a_{k-2}$, $a_1^2 a_{k-2}$, $\ldots$, ou les produits par ζ_i^l des éléments de poids $(k-l)$.

Ces expressions, assez compliquées, pourraient se calculer directement. Leur formation se continue jusqu'à celle de $d\theta_n$. Il n'y intervient que les n relations du premier groupe (U). (On obtient ensuite toutes les autres par le passage de u à v et de $\sqrt{w}$ à $\dfrac{\lambda}{\sqrt{w}}$, en ayant égard à l'invariance de $d\psi$).

La première, évidente, donne

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\frac{1}{\zeta_i} d\phi_i = d\theta_{-1}$$

et l'on a ensuite, par exemple:

$$\lambda^2 \sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^2 d\phi_i = d\theta_{-2}.$$

En se reportant aux équations (U), (V) on voit donc qu'elles entraînent les relations

$$(\Omega) \qquad \begin{aligned} &\theta = c, \quad \theta_1 = c_1, \ \ldots, \ \theta_{n-2} = c_{n-2}, \quad \theta_{n-1} = u_0 - u,\\ &\theta_{-1} = c_{-1}, \ \ldots, \ \theta_{-n} = c_{-n}, \qquad \theta_{-(n+1)} = v - v_0. \end{aligned}$$

où les c sont des constantes, relations qui sont en nombre m et déterminent $\phi_1, \ldots, \phi_m$ en fonction de u, v pour toute solution θ de (T).

Si l'on prend pour θ la solution générale de (T), on a donc par la formule:

$$\lambda^m = -\gamma_1 \ldots \gamma_m = \zeta_1 \ldots \zeta_m$$

l'expression *la plus générale* de λ en u, v, pour laquelle l'équation: $pq = \lambda(u, v)$, admet une intégrale $\phi(p, q) = \phi$ entière en p, q, et d'ordre $m = 2n+1$; on a d'ailleurs par la quadrature de $d\psi$ l'intégrale générale de l'équation des géodésiques.

Par exemple, dans le cas d'une intégrale du troisième ordre, il y a trois variables caractéristiques ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et les relations qui les définissent en u et v sont, sous forme intégrable:

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i} d\phi_i = d\theta = -du, \\ &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i} \frac{1}{\zeta_i} d\phi_i = d\theta_{-1} = 0, \\ \lambda^2 &\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i} \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^2 d\phi_i = d\theta_{-2} = dv, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont définis en u, v par:

$$\theta + u = u_0, \quad \theta_2 - v = -v_0, \quad \theta_{-1} = c.$$

Intégrales entières d'ordre pair. Nous nous bornerons à signaler les modifications à apporter à la méthode précédente dont le principe subsiste.

L'intégrale d'ordre $2n$ peut recevoir la forme:

$$\phi = w^{-n}(w-\gamma_1)\ldots(w-\gamma_{2n})$$

comme plus haut. Il existe encore $m = 2n$ variables caractéristiques $\phi_i = \phi(\zeta_i)$ où les ζ_i sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial w} = \frac{-n}{w} + \frac{1}{w-\gamma_1} + \ldots + \frac{1}{w-\gamma_n} = 0.$$

En posant $\gamma_i = x_i^2$, on définit toujours un système orthogonal de l'espace euclidien à $2n$ dimensions $x_1, \ldots, x_{2n}$; les formules (7), (8), (9), du paragraphe précédent subsistent.

Si l'on considère la différentielle $d\psi$, elle est ici

$$d\psi = \frac{\lambda dv - w du}{w^{\frac{3}{2}} \dfrac{\partial\phi}{\partial w}} = \frac{2}{n} \frac{(\lambda dv - w du) w^{n-\frac{1}{2}}}{(w-\zeta_1)\ldots(w-\zeta_{2n})};$$

on la rend rationnelle en remplaçant w par ω^2 et l'on peut alors décomposer en fractions simples et tenir compte des relations: $\lambda dv - \zeta_i du = B_i d\phi_i$, ϕ_i ne changeant pas quand on remplace $\sqrt{\zeta_i}$ par $-\sqrt{\zeta_i}$. Ceci nous permet encore d'écrire:

$$\frac{(\lambda dv - w du) w^{n-1}\sqrt{w}}{(w-\zeta_1)\ldots(w-\zeta_{2n})} = \sqrt{w}\left(\frac{A_1 d\phi_1}{w-\zeta_1} + \ldots + \frac{A_{2n} d\phi_{2n}}{w-\zeta_{2n}}\right)$$

et l'on déterminera les A_i en $\phi_{1n}, \ldots, \phi_{2n}$ par la condition que le second membre soit différentielle exacte pour toute fonction w de $\phi_1, \ldots, \phi_{2n}$ définie par $\phi = \phi(w)$.

On obtient ainsi $A_i = \dfrac{\partial\theta}{\partial\phi_i}$ où θ satisfait à un système d'équations de Laplace,

différent de celui obtenu pour $m = 2n+1$:

$$(T_1) \qquad \frac{\partial}{\partial\phi_h}\left(\frac{\lambda}{\zeta_i}\frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{\lambda}{\zeta_h}\frac{\partial\theta}{\partial\phi_h}\right).$$

La solution générale de (T_1) se déduit alors de ce que $\sqrt{w}$ (et par suite $\sqrt{\gamma_i}$) est une solution particulière de ce système quel que soit ϕ; on peut l'écrire:

$$\theta = \int\sqrt{w_1} F_1(\phi) d\phi + \ldots + \int\sqrt{w_{2n}} F_{2n}(\phi) d\phi$$

où les F_i sont $2n$ fonctions arbitraires et les w_i les racines de $\phi = \phi(w)$ se réduisant à ζ_i pour $\phi = \phi_i$.

Il reste à établir entre les variables caractéristiques ϕ_i et les variables u, v, les relations qu'exige l'identité:

$$d\psi = \frac{(\lambda dv - w du) w^{n-1}\sqrt{w}}{(w-\zeta_1)\ldots(w-\zeta_{2n})} = \sqrt{w}\left(\frac{A_1 d\phi_1}{w-\zeta_1} + \ldots + \frac{A_{2n} d\phi_{2n}}{w-\zeta_{2n}}\right)$$

où $A_i = \dfrac{\partial\theta}{\partial\phi_i}$, qui a lieu quel que soit w donné par $\phi = \phi(w)$.

Nous savons *d'avance* que ces relations donneront $2n$ combinaisons intégrables qui sont, par exemple, celles qu'on obtient en remplaçant w par γ_i et regardant dans la première expression de $d\psi$, λ, γ_i, ζ_h comme dépendant de u et v seuls. Les expressions des λ, γ_i, ζ_h en u, v étant pour l'instant inconnues, on écrira les identités qui résultent de:

$$(\lambda dv - w du) w^{n-1} = P(w)\left(\frac{A_1 d\phi_1}{w-\zeta_1} + \ldots + \frac{{}_{2n}A d\phi_{2n}}{w-\zeta_{2n}}\right)$$

où l'on a posé:

$$P(w) = (w-\zeta_1)\ldots(w-\zeta_{2n}) = w^{2n} + p_1 w^{2n-1} + \ldots + p_{2n}.$$

On trouve ainsi, de proche en proche, un premier groupe formé des équations:

$$(U) \qquad \begin{aligned} &\Sigma A_i \zeta_i^k d\phi_i = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2), \\ &\Sigma A_i \zeta_i^{n-1} d\phi_i = -du, \end{aligned}$$

puis, en faisant usage de la relation $P(\zeta_i) = 0$ et des équations (U), on forme le second groupe

$$(V) \qquad \begin{aligned} &\sum A_i \left(\frac{1}{\zeta}\right)^k d\phi_i = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n-1), \\ \lambda^{2n-1} &\sum A_i \left(\frac{1}{\zeta_i}\right) d\phi_i = dv. \end{aligned}$$

Ces groupes sont analogues à ceux que nous avons donné pour $m = 2n+1$. Les combinaisons intégrables peuvent se former méthodiquement, en calculant d'abord les dérivées des coefficients $a_1, \ldots, a_{2n}$ du polynome $(w-\gamma_1)\ldots(w-\gamma_{2n})$ par rapport aux ϕ_i, ou celles des p_i qui s'en déduisent aisément.

On obtient ainsi, par exemple, pour le premier groupe (V):

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\, d\phi_i = d\theta.$$

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left(n\zeta_i + \frac{a_1}{2}\right) d\phi_i = d\theta_1,$$

$$(\Sigma_1) \qquad \sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left[n\zeta_i^2 + \frac{3}{2}a_1\zeta_i + \frac{a_2}{2} - \frac{(2n-5)}{8n}a_1^2\right] d\phi_l = d\theta_2.$$

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left\{n\zeta_i^3 + \frac{5}{2}a_1\zeta_i^2 + \frac{3}{2}\left[a_2 - \frac{(2n-7)}{4n}a_1^2\right]\zeta_i + \frac{1}{2}\left[a_3 - \frac{(2n-7)}{4n}a_1a_2 + \frac{(2n-5)\ (2n-7)}{3.8n^2}a_1^3\right]\right\} d\phi_i = d\theta_3,$$

. . . .

où l'on voit apparaître, avec des coefficients constants que l'on calculera régulièrement, tous les termes de même poids par rapport à ζ_i et aux coefficients $a_1, \ldots, a_{2n}$, où a_k aura le poids k et ζ_i le poids 1.

Ces combinaisons intégrables ne sont pas les mêmes que pour $m=2n+1$; il ne faut pas s'en étonner puisque c'est $\sqrt{w}$ qui est solution du système (T_1).

Les combinaisons intégrables du second groupe peuvent se déduire des précédentes par l'échange de u en v, *mutatis mutandis.*

On a, par exemple:

$$\lambda \sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left(\frac{1}{\zeta_i}\right) d\phi_i = d\theta_{-1}$$

et

$$\lambda^3 \sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left[\left(\frac{1}{\zeta_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{\zeta_i}\right)\frac{a_{2n-1}}{2n\,a_{1n}}\right] d\phi_i = d\theta_{-2}$$

pour les deux premières.

L'ensemble des équations:

$$(\Omega_1) \qquad \begin{array}{l} \theta = c, \quad \theta_1 = c_1, \ \ldots, \ \theta_{n-1} = u_0 - u, \\ \theta_{-1} = c_{-1}, \ \ldots\ldots, \ \theta_{-n} = v - v_0 \end{array}$$

définit alors les ϕ au moyen de u et v. On en déduit λ en u, v et la question est résolue.

Par exemple dans le cas simple $n=2$ où il existe quatre caractéristiques, les combinaisons intégrables sont:

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\, d\phi_i = d\theta = 0, \qquad \sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\,\frac{\lambda}{\zeta_i}\, d\phi_i = d\theta_{-1} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\left(2\zeta_i + \frac{a_1}{2}\right) d\phi_i = d\theta_1 = -du, \qquad \sum \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\cdot\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_4}{\zeta_i^2} + \frac{a_3}{4\zeta_i}\right) d\phi_i = d\theta_{-2} = dv,$$

l'équation aux ζ étant: $\zeta^4 + \frac{a_1}{2}\zeta^3 - \frac{a_3}{2}\zeta - a_4 = 0.$

Intégrales de la forme: $\phi = \sigma w^{m_0}(w-\gamma_1)^{m_1} \ldots (w-\gamma_p)^{m_p}$.

L'étude des intégrales rationnelles en w de l'équation

$$(3) \qquad A(f) = \lambda\frac{\partial f}{\partial u} + w\frac{\partial f}{\partial v} + 2w\frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

peut se faire en suivant la même méthode: les systèmes orthogonaux peuvent y intervenir encore. Il y a lieu seulement de faire quelques modifications lorsque u et v sont des variables caractéristiques.

Nous aborderons tout de suite le cas plus général où:

$$\phi = \sigma w^{m_0}(w-\gamma_1)^{m_1} \ldots (w-\gamma_p)^{m_p}$$

est une intégrale de (3), les m_i étant des constantes quelconques. Ce cas devrait s'écrire suivant nos principes

$$\Phi = \log\phi = \log\sigma + m_0\log w + \sum m_i \log(w-\gamma_i)$$

c'est-à-dire que $\frac{\partial\Phi}{\partial w}$ est rationnel en w. Il ouvre donc la voie à une recherche plus étendue, celle de tous les cas où, pour une intégrale ϕ, $\frac{\partial\phi}{\partial w}$ est rationnel en w.

On trouve sans difficulté que les relations $w-\gamma_i=0$, sont invariantes par $A(f)$ et qu'aux racines ζ_i, en nombre p, correspondent des fonctions $\phi_i=\phi(\zeta_i)$, variables caractéristiques, intégrales des équations $\lambda\frac{\partial f}{\partial u} + \zeta_i\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$

Dans l'hypothèse où m_0 et $m_0+m_1+\ldots+m_p$ sont différents de zéro, u et v ne sont pas caractéristiques et l'on peut prendre: $\sigma=1$ et $\lambda^{-2m_0} = \gamma_1^{m_1} \ldots \gamma_p^{m_p}$.

On a les variables euclidiennes x_i du système orthogonal en posant $\gamma_i = \frac{x_i^2}{m_i}$.

Toute fonction w définie par $\phi=\phi(w)$ satisfait encore aux équations:

$$\frac{\partial w}{\partial\phi_h} = \frac{w}{\zeta_h\phi''(\zeta_h)\ (\zeta_h - w)}$$

et l'on aura aussi

$$\frac{\partial\phi''(\zeta_i)}{\partial\phi_h} = \frac{-2\phi''(\zeta_i)}{\phi''(\zeta_h)\ (\zeta_h-\zeta_i)^2},$$

mais, bien entendu, les expressions des γ et des ζ en $\phi_1, \ldots, \phi_p$ dépendent de $m_0, m_1, \ldots, m_p$.

La différentielle

$$d\psi = \frac{\lambda du - w dv}{w^{3/2}\frac{\partial\phi}{\partial w}}$$

sera ici remplacée par $\phi d\psi$, ce qui revient à changer ϕ en Φ et l'on aura encore pour cette différentielle une expression rationnelle en $\sqrt{w}$:

$$\phi d\psi = \frac{(\lambda dv - wdu)(w-\gamma_1)\dots(w-\gamma_p)}{\sqrt{w}(w-\zeta_1)\dots(w-\zeta_p)}$$

qui, décomposée en fractions simples, donne simplement, eu égard aux valeurs des coefficients:

$$\phi d\psi = A\frac{\lambda dv}{\sqrt{w}} - \mu\sqrt{w}du + \sum \frac{\sqrt{w}A_i d\phi_i}{w-\zeta_i}$$

où $A = \dfrac{m_0+m_1+\dots+m_p}{m_0}$, et μ est une fonction déterminée de $\phi_1, \dots, \phi_p$:

$$\mu = -\frac{\Sigma m_i\gamma_i}{2(m_0+\dots+m_p)}.$$

Si l'on écrit que $\phi d\psi$ (où ϕ peut être regardé comme une constante) est une différentielle exacte en $\phi_1, \dots, \phi_p, u, v$, on trouve en dernière analyse que l'on peut poser:

$$A_i = \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}$$

avec, pour θ, l'expression:

$$\theta = A\lambda v - \mu u + \omega.$$

ω désignant la solution générale du système en $\phi_1, \dots, \phi_p$:

$$(\Omega) \qquad \frac{\partial}{\partial\phi_h}\left(\frac{\lambda}{\zeta_i}\frac{\partial\omega}{\partial\phi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{\lambda}{\zeta_h}\frac{\partial\omega}{\partial\phi_h}\right),$$

entièrement analogue à celui trouvé pour les intégrales d'ordre pair. La fonction λ est une solution de ce système et il en est de même de μ (donc aussi de θ). On a, en outre, par exemple:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\phi_i} = \frac{\lambda}{2\zeta_i^2\phi''(\zeta_i)}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\phi_i} = \frac{1}{2\zeta_i\phi''(\zeta_i)}.$$

Toutes les fonctions $\sqrt{w}$ verifiant la relation $\phi = \phi(w)$ où ϕ est une constante satisfont à (Ω); on déduit encore de là, par quadratures, la solution générale de (Ω).

Il reste à établir entre les caractéristiques $\phi_1, \dots, \phi_p$ et les variables u, v, les relations (en nombre p) qui détermineront tout en u, v et qui résultent de l'identité en w:

$$\frac{(\lambda dv - wdu)\ (w-\gamma_1)\dots(w-\gamma_p)}{(w-\zeta_1)\dots(w-\zeta_p)} = \lambda A dv - \mu w du + \sum\frac{wA_i d\phi_i}{w-\zeta_i}.$$

On y remplacera A_i par son expression

$$A_i = \frac{\partial\theta}{\partial\phi_i} = A\frac{\partial\lambda}{\partial\phi_i}v - \frac{\partial\mu}{\partial\phi_i}u + \frac{\lambda\omega}{\partial\phi_i}$$

et l'on obtiendra un système complètement intégrable, en $d\phi_1, \dots, d\phi_p, du, dv$ dépendant linéairement des $\dfrac{\partial\omega}{\partial\phi_i}$. Les combinaisons intégrables peuvent toujours

être formées méthodiquement. Il sera commode pour le calcul de considérer les polynomes:

$$P(w) = (w-\zeta_1)\dots(w-\zeta_p) = w^p + P_1w^{p-1} + \dots + P_p,$$

et

$$(w-\gamma_1)\dots(w-\gamma_p) = w^p + a_1w^{p-1} + \dots + a_p$$

et de former les dérivées des P_i et des a_k, (liés simplement) en $\phi_1, \dots, \phi_p$.

En égalant à des constantes les intégrales du système, on a les p relations qui définissent $\phi_1, \dots, \phi_p$ en u, v. La fonction $\lambda(u, v)$ est alors connue; tout est fini.

On voit avec quelle simplicité se détermine la forme la plus générale d'élément linéaire: $ds^2 = 4\lambda(u, v)dudv$ pour laquelle le problème des lignes géodésiques admet une intégrale du type considéré et le rôle essentiel des caractéristiques d'Ampère. Il convient d'ajouter qu'aucune trace de ces caractéristiques n'apparaît dans les recherches antérieures sur ce sujet (O. Bonnet, Maurice Lévy, Laguerre) bornées à des cas *extrêmement* particuliers.

Toute solution particulière ω de (Ω) conduit à un élément linéaire; quand on ne veut pas l'élément *le plus général*, qui possède la propriété indiquée, la fonction $\lambda(u, v)$ peut donc être de nature plus simple.

Remarques sur l'équation des géodésiques. La puissance de la méthode adoptée est loin d'être bornée aux problèmes précédents. Elle s'appliquera par exemple à la recherche des éléments linéaires: $ds^2 = 4\lambda dudv$, pour lesquels l'équation des géodésiques admet *deux* intégrales premières rationnelles en $\dfrac{dv}{du}$ ou w, problème *beaucoup plus simple* que ceux que l'on vient de traiter. Nous indiquerons, à propos d'un exemple plus général, la voie à suivre pour le résoudre.

D'une manière générale le groupe de rationalité étant sous-groupe type de celui qui est défini par: $\dfrac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\phi, \psi)} = 1$, on voit que si l'équation est *imprimitive*—et s'il existe une seule équation: $\dfrac{\partial f}{\partial v} + \mu\dfrac{\partial f}{\partial w} = 0$, formant avec $A(f) = 0$ un système complet, auquel cas μ est *rationnel* en w—la solution ϕ peut être obtenue isolément par ces deux équations. On a donc nécessairement: $\Phi = F(\phi)$ et par suite $\Psi = \dfrac{\psi}{F'(\phi)} + F(\phi)$ pour les transformations du groupe de rationalité.

Il en résulte que si $F = \epsilon\phi + a$ avec $\epsilon^n = 1$, ou bien si $F = a\phi + b$, ϕ et ψ s'obtiendront par des quadratures. Nous pourrons déterminer $\lambda(u, v)$ *de la manière la plus générale* pour que ces circonstances se présentent: les dérivées de ϕ ou celles de log ϕ sont alors rationnelles en w.

Si l'on suppose que la détermination de ϕ exige l'intégration d'un système de Riccati, il n'en sera plus de même, du moins avec l'emploi de signes de quadrature. *L'inversion* d'une équation de Riccati entre en jeu. Il restera encore à examiner le cas de deux familles d'intégrales définies séparément: μ est quadratique en w et les transformations du groupe de rationalité étant: $\Phi = F(\phi)$ $\Psi = G(\psi)$ on a nécessairement $F'(\phi) = a$, $G'(\psi) = \frac{1}{a}$, c'est-à-dire que les dérivées de $\log \phi$ et de $\log \psi$ sont rationnelles en w. On pourra former tous les cas où il en est ainsi.

Le dernier cas—où il existe plus de deux familles d'intégrales qu'on peut isoler—conduit aussi à des transformations linéaires des intégrales qui s'obtiennent encore par des quadratures.

Lorsque l'équation est *primitive*, le seul cas de réduction donnerait l'équivalent d'une équation différentielle linéaire, *primitive aussi*. *L'inversion* d'une telle équation à coefficients rationnels peut être nécessaire pour obtenir $\lambda(u, v)$ de la manière la plus générale. Tout ceci sera développé ailleurs.

Ajoutons enfin que l'on peut traiter de la même manière toute équation du second ordre: $y'' = F(x, y, y')$ où F est *rationnel* en y' et qui provient d'un *problème de variations*. Jacobi a en effet montré que lorsque l'équation précédente se présente dans la recherche d'une valeur extrême de l'intégrale $\int f(x, y, y')dx$, l'expression $M = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ est un dernier multiplicateur pour l'équation:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial y'} F = 0,$$

c'est-à-dire que le groupe de rationalité relatif aux solutions fondamentales de cette équation ϕ, ψ, est en général déterminé par:

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\phi, \psi)} = 1.$$

Il suffira donc, par exemple, que les dérivées de f ou de $\log f$ soient rationnelles en y', pour que l'on puisse déterminer f de la manière la plus générale, dans une catégorie donnée, de façon à permettre par quadratures l'intégration de l'équation de Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Équations du second ordre: $y'' = R(y')$ ou R est rationnel en la dérivée première y'

Nous avons étudié jusqu'à présent la réduction de certaines équations du second ordre: [$y'' = F(x, y)$, équation des géodésiques] où l'expression de la dérivée seconde y'' est rationnelle en y' et où *de plus* la connaissance d'un multiplicateur réduit le groupe de rationalité au groupe primitif donné par: $\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\phi, \psi)} = 1$. On peut traiter sans beaucoup plus de difficulté la question tout à fait générale de la réduction aux quadratures de l'équation

(1) $$y'' = R(y'),$$

où R est le quotient de deux polynomes en y' de *degrés donnés*, dont les coefficients sont des fonctions de x, y *à déterminer*.

Les cas les plus simples sont ceux où l'équation (1) possède une intégrale algébrique (par suite une intégrale rationnelle) en y', soit $\phi = R_1(y')$ et où l'équation $dy - y'dx = 0$ correspondante est réductible aux quadratures quel que soit ϕ. Cela exige que pour l'équation aux dérivées partielles: $X(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + y' \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, l'un des éléments: ψ, $K = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^n$ ou $J = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} : \frac{\partial \psi}{\partial y}$, soit rationnel en y'.

D'autres cas de réduction: celui où $I = \{\psi, y\}$ est rationnel en y', qui conduit pour J à un système de Riccati—et celui où l'on peut ajouter une relation $\frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ où ρ est rationnel (ou algébrique à deux valeurs) en y', sont également intéressants—mais on ne peut les traiter *en général* par le simple emploi de signes de quadrature. Une classe d'équations particulièrement importante est $y'' = P_3(y')$, où P est un polynome du troisième degré en y'; on sait qu'elle conserve sa forme par une transformation ponctuelle quelconque exécutée sur x et y; cela nous permettrait d'adopter un *type réduit* comme point de départ; nous l'étudierons ailleurs.

Nous nous bornerons ici, *à titre d'exemple*, à traiter deux cas simples. Il convient d'observer que, par des transformations n'exigeant que des quadratures, l'on passera toujours à des équations *types*, de manière à avoir des problèmes sans indétermination.

On supposera que l'équation

(1) $$y'' = R(y')$$

possède une intégrale première *entière* en y' et de degré n:

(2) $$\phi = a_0 y'^n + a_1 y'^{n-1} + \ldots + a_n = \phi(y')$$

et l'on cherchera, en fait, les cas de réduction aux quadratures de l'équation (2).

Si l'on suppose dans l'identité en y'

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial y'} R(y') = 0$$

que $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'$ n'aient pas de diviseur commun en y' les deux termes de $R(y')$ se déduiront de la connaissance de $\phi(y')$ et leur degré en résultera. Si ces degrés sont donnés d'avance il y aura un plus grand commun diviseur, de degré donné, aux polynomes $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'$. On peut donc envisager d'abord la réduction de (2) sans faire intervenir (1)—cette dernière n'influant que par la valeur réduite imposée au quotient $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'\right) : \frac{\partial \phi}{\partial y'}$ quand $\phi(y')$ est rationnel en y'.

I. *Intégrale Rationnelle en y', pour l'équation* (2).

(*a*) Supposons donc $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'$ sans diviseur commun en y' et cherchons si (1) et par suite (2) peut posséder une autre intégrale rationnelle en y': $\psi = \psi(y')$. Pour fixer les idées on admettra ici qu'elle est *entière* et d'ordre m:

$$\psi = b_0 y'^m + b_1 y'^{m-1} + \ldots + b_m.$$

La condition nécessaire et suffisante est l'identité en y':

$$(\phi, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y'}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'\right) = 0$$

qui donne entre les a_i et les b_k un système (Σ) d'équations aux dérivées partielles en nombre $(n+m+1)$ seulement. Nous rendons ce système déterminé en remplaçant y par une nouvelle inconnue, donnée par une quadrature partielle, de manière à avoir $a_0 = 1$. Un changement de la variable x donne alors $b_0 = x$ (ou exceptionnellement $b_0 = 1$).

On obtient immédiatement l'intégrale première: $mxa_1 - n(y + b_1) = X(x)$, où $X(x)$ est essentiel.

Les autres intégrales du système (Σ) sont données comme suit:

Le polynome $\frac{\partial \psi}{\partial y'}$ doit être divisible par $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$; en écrivant l'identité $\frac{\partial \psi}{\partial y'} = \Lambda(y') \frac{\partial \phi}{\partial y'}$, on a $(n-1)$ conditions algébriques entières en a_i, b_k.

La différentielle $d\psi$ peut s'écrire, en regardant y' comme donné en x, y par $\phi = \phi(y')$, sous la forme:

$$d\psi = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} - \Lambda(y') \frac{\partial \phi}{\partial y}\right](dy - y'dx) = K(dy - y'dx)$$

où K est en y' de degré $(m-1)$. Si l'on désigne par u_i l'une des $(m-1)$ racines de $K(y') = 0$, l'équation $y' = u_i$ a pour intégrale, indifféremment $\psi(u_i)$ et $\phi_i = \phi(u_i)$. On exprime que u_i, inconnu, satisfait à $K(u_i) = 0$ par l'ensemble d'équations

$$\psi(u_i) = F_i(\phi_i), \quad \phi_i = \phi(u_i),$$
$$\Lambda(u_i) = \frac{\partial F_i}{\partial \phi_i}.$$

Les variables auxiliaires ϕ_i sont les caractéristiques d'Ampère du système(Σ). Il s'y ajoute x.

On a ainsi $(m-1)$ relations nouvelles avec autant de fonctions arbitraires d'un argument.

Il ne manque plus qu'une intégrale. Elle s'écrit:

$$n(u_1 + \ldots + u_{m-1}) + ma_1 = f(x).$$

On la trouve en exprimant l'intégrabilité de $d\psi$ quand les racines de $K(y') = 0$ sont en évidence. Elle dépend, en fait, de a_1, b_1, a_2, b_2 et des équations qui lient ces éléments.

Il est d'ailleurs possible, en remplaçant y par $y + \mu(x) = Y$, d'annuler $f(x)$, c'est-à-dire de choisir l'équation *type* (2) de manière que: $n\Sigma u_i + ma_1 = 0$.

(*b*) Comment tout ceci se modifie-t-il quand $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'$ ont un plus grand commun diviseur de degré donné, M?

Si l'on pose $M = (y' - \omega_1) \ldots (y' - \omega_k)$, pour tout ω_i, l'équation $y' - \omega_i = 0$ a pour intégrale

$$\phi_i = \phi(\omega_i) = \text{const.}$$

mais cela ne nous conduit pas à la solution. (On pourrait cependant partir de l'expression explicite de $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$, c'est-à-dire de MB pour présenter les résultats qui suivent). Nous observerons qu'en posant

$$\frac{\partial \phi}{\partial y'} = MB, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = MA$$

où A et B sont premiers entre eux, on aura nécessairement pour l'intégrale ψ, entière en y',

$$\frac{\partial \psi}{\partial y'} = \Lambda(y').B \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' = \Lambda(y')A$$

et

$$d\psi = \frac{\left[M \frac{\partial \psi}{\partial y} - \Lambda(y') \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]}{M}(dy - y'dx) = K(dy - y'dx)$$

lorsque $\phi = \phi(y')$ définit y'.

On a donc entre $\frac{\partial \psi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$ un plus grand commun diviseur $B(y')$ de degré $n-1-k$ et ceci entraîne entre les a_i et les b_k, $(n-1-k)$ relations algébriques entières.

Le multiplicateur $K(y')$ admet $(m+k-1)$ racines u_i, qui conduisent à autant de systèmes:

$$\psi(u_i) = F_i(\phi_i), \quad \Lambda(u_i) = \frac{\partial F_i}{\partial \phi_i}, \quad \phi_i = \phi(u_i),$$

et par suite à autant d'intégrales de (Σ) avec les fonctions arbitraires $F_i(\phi_i)$.

On a donc toujours ainsi $(m+n-2)$ intégrales, auxquelles il suffira d'ajouter: $mxa_1 - n(y + b_1) = X(x)$ et $n(\Sigma u_i - \Sigma \omega_i) + ma_1 = f(x)$ [où $f(x)$ peut d'ailleurs être annulé] pour obtenir un système de $(m+n)$ équations définissant les a_i et les b_k en x, y.

On observera que $B(y')$, plus grand commun diviseur de $\frac{\partial \psi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y'}$, a ses coefficients entiers en a_i, b_k et que par suite les coefficients de M, donc $\Sigma\omega_i$, sont rationnels en ces éléments.

On n'a traité ici que le cas général, où les racines de $K(y')=0$ sont distinctes; il n'y a aucune difficulté à étendre la solution au cas de racines multiples.

Remarque. Les deux exemples précédents donnent en principe la *détermination des transformations de contact du plan*

$$d\phi-\lambda d\psi=\rho(dy-y'dx)$$

pour lesquelles ϕ et ψ sont rationnels en y'. Cette détermination est faite en fixant arbitrairement les degrés des deux termes de $\phi(y')$ [dans le cas actuel, le degré n de $\phi(y')$].

II. *Multiplicateur K, rationnel en y', pour l'équation* (2).

Nous allons, *à titre d'exemple*, traiter le cas où, pour une équation du second ordre:

(1) $$y''=\lambda(y'-\mu),$$

linéaire en y', il existe une intégrale

(2) $$\phi=a_0y'^n+a_1y'^{n-1}+\ldots+a_n$$

et de telle sorte que l'équation (2) puisse s'intégrer par la quadrature:

(3) $$d\psi=K(dy-y'dx),$$

où K est rationnel en y'.

Le multiplicateur K est susceptible de diverses formes; nous ne discuterons pas leur ensemble, nous bornant à la plus simple: $K=P(y'):\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}$ où le *polynome $P(y')$ n'a pas de racines multiples.*

Faisons l'hypothèse $a_0=1$, qui conduit à une équation (1) *type.*

L'identité en y':

(4) $$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'+\lambda(y'-\mu)\frac{\partial\phi}{\partial y'}=0$$

exprime essentiellement que pour toute racine ω_i de $\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}=0$, l'équation $y'=\omega_i$ a pour intégrale $\phi_i=\phi(\omega_i)=\text{const.}$ Ces conditions étant vérifiées, la division de $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}y'$ par $\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}$ donne λ et μ sans ambiguité. On a donc ici le cas extrême où le plus grand commun diviseur de $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}y'$ et $\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}$ est d'ordre $(n-1)$ en y'.

Supposons $P(y')=\rho(y'-u_1)\ldots(y'-u_p)$, la résolvante en K (condition d'intégrabilité de $d\psi$) nous donne:

$$\frac{1}{K}\left(\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}y'\right)\frac{\partial\phi}{\partial y'}-\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'\right)-\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,$$

c'est-à-dire, ici,

$$\frac{1}{K}\left(\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}y'\right)+\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y'}\lambda(y'-\mu)-\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}}=0.$$

On en conclut d'abord: $\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=0$, ce qui, en modifiant x, permet de prendre pour ρ une constante; nous poserons $\rho=1$ de façon à écrire

$$K=\frac{(y'-u_1)\ldots(y'-u_p)}{n(y'-\omega_1)\ldots(y'-\omega_{n-1})}.$$

En observant que l'on a:

$$\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}}=\frac{1}{n}\frac{\partial a_1}{\partial y}+\sum\frac{A_i}{y'-\omega_i}\quad \text{où } A_i=\left|\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2\phi}{dy'^2}}\right|_{y'=\omega_i}$$

on trouve:

1° que les ω_i satisfont aux conditions:

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x}+\omega_i\frac{\partial\omega_i}{\partial y}-\lambda(\omega_i-\mu)-A_i=0;$$

les équations $y'=\omega_i$ ne sont pas des intégrales particulières de (1): on a vu que leur solution est $\phi_i=\phi(\omega_i)=\text{const.}$

2° que les u_i satisfont aux conditions:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+u_i\frac{\partial u_i}{\partial y}-\lambda(u_i-\mu)=0,$$

qui expriment que $y'-u_i=0$ est une intégrale particulière de (1).

Sa solution est donc donnée par $\phi(u_i)=\phi_i=\text{const.}$ Il reste une seule équation:

$$-\sum\frac{\partial u_i}{\partial y}+\sum\frac{\partial\omega_i}{\partial y}+\lambda(p-n+1)-\frac{1}{n}\frac{\partial a_1}{\partial y}=0,$$

qui s'intégre, sous la forme:

$$\Sigma u_i-\Sigma\omega_i+\frac{(p-n+2)}{n}a_1=f(x),$$

en raison de

$$\lambda=-\frac{1}{n}\frac{\partial a_1}{\partial y}.$$

On observera encore que le changement de y en $y+g(x)$ permettrait de prendre $f(x)=0$, et que $\Sigma\omega_i=-\dfrac{(n-1)}{n}a_1$, ce qui donne simplement:

$$u_1+\ldots+u_p=-\frac{(p+1)}{n}a_1.$$

Il s'agit de trouver les intégrales du système de $(n+p)$ relations ainsi formé en $a_1, \ldots, a_n, u_1, \ldots u_p$, où les variables auxiliaires $\Phi_i=\phi(\omega_i)$, $\phi_i=\phi(u_i)$ sont les caractéristiques d'Ampère, provenant de deux sources distinctes.

Les relations qui définissent les a_i, u_k par rapport à ces caractéristique gagnent en netteté si l'on introduit explicitement les racines γ_i de $\phi(y')=0$.
Posons:

$$\phi(y')=(y'-\gamma_1)\ldots(y'-\gamma_n);$$

les ω_i sont donnés par

$$\frac{1}{\omega_i-\gamma}+\ldots+\frac{1}{\omega_i-\gamma_n}=0$$

et, si l'on ajoute aux relations

$$\Phi_i=\phi(\omega_i), \quad (i=1, \ldots, n-1),$$

la condition: $\gamma_1+\ldots+\gamma_n=\Phi$, où ϕ est une variable auxiliaire, les γ et les ω sont fonctions de $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ et Φ, (la variable Φ n'est autre que $-a_1$). Les relations $\phi(u_i)=\phi_i$ déterminent alors les u_i au moyen des ϕ_i et de $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Phi$; enfin la relation $n(u_1+\ldots+u_p)=(p+1)\Phi$ définira Φ en $\phi_1, \ldots, \phi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$.

Si l'on regarde les γ_i $(i=1, \ldots, n)$ comme des coordonnées cartésiennes d'un espace euclidien à n dimensions, les surfaces $\Phi_i=$const., $\Phi=$const. sont deux à deux orthogonales.

On en déduit:

$$d\gamma_1^2+\ldots+d\gamma_n^2=H_1^2d\Phi_1^2+\ldots+H^2_{n-1}\,d\Phi^2_{n-1}+\frac{1}{n}d\Phi^2$$

avec

$$\frac{1}{H_i^2}=-\Phi_i\phi''(\omega_i)$$

et les formules classiques des systèmes orthogonaux donnent:

$$\frac{\partial\gamma_k}{\partial\Phi_i}=\frac{1}{\phi''(\omega_i)\,(\omega_i-\gamma_k)}, \quad \frac{\partial\gamma_k}{\partial\Phi}=\frac{1}{n}.$$

Toute fonction y', donnée par $\phi=\phi(y')$, où le premier membre est constant, satisfait aux mêmes relations:

$$\frac{\partial y'}{\partial\Phi_i}=\frac{1}{\phi''(\omega_i)\quad(\omega_i-y')}, \quad \frac{\partial y'}{\partial\Phi}=\frac{1}{n}.$$

La dérivée $\frac{\partial\omega_k}{\partial\Phi_i}$, où $(k\neq i)$, s'exprime de même, et $\frac{\partial\omega}{\partial\Phi}=\frac{1}{n}$.

Le calcul des dérivées des u_i résultera des formules:

$$\frac{d\phi_i}{\phi_i}=\frac{du_i-d\gamma_1}{u_i-\gamma_1}+\ldots+\frac{du_i-d\gamma_n}{u_i-\gamma_n}$$

ou encore:

$$\frac{\phi'(u_i)}{\phi_i}du_i=\frac{d\phi_i}{\phi_i}+\sum\frac{d\gamma_k}{u_i-\gamma_k};$$

on obtient ainsi

$$\frac{\partial u_i}{\partial\Phi_h}=\frac{1}{\phi''(\omega_h)\,(\omega_h-u_i)}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial\Phi}=\frac{1}{n},$$

[c'est-à-dire que les u_i satisfont aux mêmes équations que y'; on a vu en effet que la solution de $y'=u_i$ est $\phi(u_i)=$const.] et en outre:

$$\frac{\partial u_i}{\partial\phi_i}=\frac{1}{\phi'(u_i)}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial\phi_k}=0 \qquad (i\neq k).$$

Employons maintenant la dernière relation pour calculer $d\phi$. On trouve sans difficulté, en posant $B_h=\sum_i\frac{1}{\omega_h-u_i}$,

$$\frac{1}{n}d\Phi=\sum_h\frac{B_h}{\phi''(\omega_h)}d\Phi_h+\sum_i\frac{1}{\phi'(u_i)}d\phi_i$$

et l'on remarquera que le coefficient de $d\Phi$ n'est jamais nul.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder, dans le domaine des caractéristiques $\phi_1, \ldots, \phi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ la recherche des *conditions sous lesquelles* $d\psi$, que nous écrirons:

$$d\psi=\Omega\left(\frac{M_1d\Phi_1}{y'-\omega_1}+\ldots+\frac{N_1d\phi_1}{y'-u_1}+\ldots\right)$$

avec:

$$\Omega=K(y'-u_1)\ldots(y'-u_p)\,(y'-\omega_1)\ldots(y'-\omega_{n-1})$$

c'est-à-dire ici: $\Omega=(y'-u_1)^2\ldots(y'-u_p)^2$ *est une différentielle exacte pour tout* y' *donné par* $\phi=\phi(y')$, *où* ϕ *est constant.*

Le calcul des dérivées de log Ω est simplifié, et celui des conditions d'intégrabilité aussi, par l'observation que $\frac{\partial}{\partial\Phi}(y'-u_i)=0$, c'est-à-dire que les différences $(y'-u_i)$ sont indépendantes de la variable auxiliaire Φ. On a simplement

$$\frac{\partial(y'-u_i)}{\partial\Phi_h}=\frac{(y'-u_i)}{\phi''(\omega_h)\,(\omega_h-y')\,(\omega_h-u_i)}, \quad \frac{\partial(y'-u_i)}{\partial\phi_i}=\frac{-1}{\phi'(u_i)}, \quad \frac{\partial(y'-u_i)}{\partial\phi_k}=0\ (i\neq k)$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\frac{1}{2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi_h}=\frac{B_h}{\phi''(\omega_h)\,(\omega_h-y')}, \quad \frac{1}{2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\phi_k}=\frac{1}{\phi'(u_k)\,(u_k-y')}.$$

On aura de même pour $(h\neq i)$:

$$\frac{\partial(y'-\omega_i)}{\partial\Phi_h}=\frac{(y'-\omega_i)}{\phi''(\omega_h)\,(\omega_h-y')\,(\omega_h-\omega_i)}, \quad \frac{\partial(y'-\omega_i)}{\partial\phi_k}=0.$$

Si l'on écrit les conditions d'intégrabilité de $d\psi$, on trouve alors que l'on a:

$$M_h=\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_h}, \quad N_k=\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}$$

où la fonction θ des $(n+p-1)$ arguments satisfait à l'ensemble (T) des trois groupes d'équations de Laplace:

$$\text{(I)} \qquad (\omega_i-\omega_h)\frac{\partial^2\theta}{\partial\Phi_i\partial\Phi_h}-\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}\frac{\left(2B_h-\dfrac{1}{\omega_h-u_i}\right)}{\phi''(\omega_h)}+\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_h}\frac{\left(2B_i-\dfrac{1}{\omega_i-\omega_h}\right)}{\phi''(\omega_i)}=0,$$

$$\text{(II)} \qquad (u_i-\omega_h)\frac{\partial^2\theta}{\partial\phi_i\partial\Phi_h}-\frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\frac{\left(2B_h-\dfrac{1}{\omega_h-u_i}\right)}{\phi''(\omega_h)}+\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_h}\frac{2}{\phi'(u_i)}=0,$$

$$\text{(III)} \qquad (u_i-u_h)\frac{\partial^2\theta}{\partial\phi_i\partial\phi_k}-\frac{\partial\theta}{\partial\phi_i}\frac{2}{\phi'(u_k)}+\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}\frac{2}{\phi'(u_i)}=0.$$

Ce système ne dépend que des différences γ_i-u_k, ω_i-u_k, u_i-u_k, $\omega_i-\omega_h$; il est donc indépendant de la variable auxiliaire Φ. En particulier chacune des équations (III) ne dépend que des deux variables ϕ_i, ϕ_k, en dehors des Φ_i. Nous signalerons la solution particulière $\theta=-\frac{3\Phi}{n}=\frac{3a_1}{n}$ que nous désignons par σ; son introduction explicite, montre aisément que (T) *exprime simplement* que

$$\Sigma(\omega_i+\sigma)\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}d\Phi_i+\Sigma(u_k+\sigma)\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}d\phi_k=d\tau$$

est une différentielle exacte. On déduira de là et des remarques antérieures l'existence de solutions θ de la forme: $\theta=F_1(\phi_1)\dots F_p(\phi_p)$, où les F_i dépendent aussi de $\Phi_1,\dots,\Phi_{x-1}$. Ces solutions peuvent renfermer un paramètre et conduisent par quadratures à la solution générale.

Il s'agit maintenant de former les conditions sous lesquelles on a l'identité en y'

$$d\psi=\frac{(y'-u_1)\dots(y'-u_p)}{n(y'-\omega_1)\dots(y'-\omega_{n-1})}(dy-y'dx)=\Omega\left(\frac{M_1d\Phi_1}{y'-\omega_1}+\dots+\frac{N_1d\phi_1}{y'-u_1}+\dots\right),$$

c'est-à-dire simplement

$$dy-y'dx=R(y')\left(\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial\Phi_1}d\Phi_1}{y'-\omega_1}+\dots+\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial\phi_1}d\phi_1}{y'-u_1}+\dots\right)$$

où l'on a posé

$$R(y')P=(y').A(y'),$$
$$P(y')=(y'-u_1)\dots(y'-u_p)=y'^p+P_1y'^{p-1}+\dots+P_p,$$
$$A(y')=ny'^{n-1}+(n-1)a_1y'^{n-2}+\dots+a_{n-1}.$$

Écrivons pour un instant le polynome $R(y')$ sous la forme:

$$R(y')=n(y'^{n+p-1}+R_1y'^{n+p-2}+\dots+R_{n+p-1})$$

où l'on a, par exemple:

$$nR_1=nP_1+(n-1)a_1,$$
$$nR_2=nP_2+(n-1)a_1P_1+(n-2)a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et remarquons que $R(y')$ est divisible par $(y'-\omega_i)$ et aussi par $(y'-u_i)$. Nous aurons, en faisant la division:

$$\frac{1}{n}(dy-y'dx)$$

$$=\sum_i\left[y'^{n+p-2}+(R_1+\omega_i)y'^{n+p-3}+\dots+R_{n+p-2}+R_{n+p-3}\omega_i+\dots+\omega_i^{n+p-2}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}d\Phi_i$$

$$+\sum\left[y'^{n+p-2}+(R_1+u_k)y'^{n+p-3}+\dots+R_{n+p-2}+R_{n+p-3}u_k+\dots+u_k^{n+p-2}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\phi_p}d\phi_k$$

et l'on voit que l'identité, donne de proche en proche, les conditions:

$$(\Sigma)\qquad\begin{aligned}
&\sum\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}d\Phi_i+\sum\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}d\phi_k=0,\\
&\sum\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}\omega_id\Phi_i+\sum\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}u_kd\phi_k=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}\omega_i^{n+p-4}d\Phi_i+\sum\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}u_k^{n+p-4}d\phi_k=0,\\
&\sum\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}\omega_i^{n+p-3}d\Phi_i+\sum\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}u_k^{n+p-3}d\phi_k=-\frac{1}{n}dx,\\
&\sum\frac{\partial\theta}{\partial\Phi_i}\omega_i^{n+p-2}d\Phi_i+\sum\frac{\partial\theta}{\partial\phi_k}u_k^{n+p-2}d\phi_k=\frac{1}{n}dy.
\end{aligned}$$

Ce système possède $(n+p-1)$ combinaisons intégrables que l'on peut former régulièrement. Il sera commode dans ce but de calculer d'abord, en partant des expressions des dérivées *complètes*

$$\frac{\partial\gamma_i}{\partial\Phi_h}=\frac{B_h+\dfrac{1}{\omega_h-\gamma_i}}{\phi''(\omega_h)},\qquad\frac{\partial\gamma_i}{\partial\phi_k}=\frac{1}{\phi'(u_k)},$$

les dérivées de $a_1,\dots,a_n$ regardés comme donnés par

$$(y'-\gamma_1)\dots(y'-\gamma_n)=y'^n+a_1y'^{n-1}+\dots+a_n$$

$\left(\text{ceci pour éviter les dérivées } \frac{\partial\omega_i}{\partial\Phi_i}\right)$. On trouve aisément ces dérivées, en prenant comme fonctions intermédiaires les sommes de puissances: $\Sigma\gamma_i$, $\Sigma\gamma_i^2$, ...

Nous avons, par exemple:

$$\frac{\partial a_1}{\partial \Phi_h} = \frac{-nB_h}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial \phi_k} = \frac{-n}{\phi'(u_k)},$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \Phi_h} = \frac{-(n-1)a_1B_h+n}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial a_2}{\partial \phi_k} = \frac{-(n-1)a_1}{\phi'(u_k)},$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \Phi_h} = \frac{-(n-2)a_2B_h+(n-1)a_1+n\omega_h}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial a_3}{\partial \phi_k} = \frac{-(n-2)a_2}{\phi'(u_k)},$$

. . . .

De même, en partant des formules *complètes:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial \Phi_h} = \frac{B_h + \dfrac{1}{\omega_h - u_i}}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \phi_i} = \frac{2}{\phi'(u_i)}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \phi_k} = \frac{1}{\phi'(u_k)} \qquad (i \neq k),$$

on peut calculer les dérivées de $P_1, \ldots, P_p$ en passant encore par l'intermédiaire des sommes $\sum u_i$, $\sum u_i^2$, ... On trouve ainsi par exemple:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \Phi_h} = \frac{-(p+1)B_h}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial \phi_k} = \frac{-(p+1)}{\phi'(u_k)},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \Phi_h} = \frac{-pP_1B_h+p-\omega_hB_h}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial \phi_k} = \frac{-(pP_1+u_k)}{\phi'(u_k)},$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \Phi_h} = \frac{-(p-1)P_2B_h+P_1(p-1-\omega B_h)+p\omega_h-\omega_h^2B_h}{\phi''(\omega_h)}, \qquad \frac{\partial P_3}{\partial \phi_k} = \frac{-((p-1)P_2+u_kP_1+u_k^2)}{\phi'(u_k)},$$

. . . .

Ces résultats établis, nous formons les combinaisons intégrales du système (Σ), de proche en proche, en combinant chacune des équations avec les précédentes, le coefficient de celle de rang le plus élevé étant l'unité. Les autres coefficients sont des combinaisons linéaires des groupements en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de même poids, à coefficients constants* et des groupements analogues en $P_1, P_2, \ldots, P_p$. On attribue le poids 1 aux γ_i et ω_i et aussi aux u_k.

On a, par exemple, pour les premières combinaisons intégrables:

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \Phi_h} d\Phi_h + \sum \frac{\partial \theta}{\partial \phi_k} d\phi_k = d\theta,$$

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \Phi_h}\left(\omega_h + \frac{3a_1}{n}\right) d\Phi_h + \sum \frac{\partial \theta}{\partial \phi_k}\left(u_k + \frac{3a_1}{n}\right) d\phi_k = d\theta_1,$$

$$\sum \frac{\partial \theta}{\partial \Phi_h}\left(\omega_h^2 + \frac{4a_1}{n}\omega_h + \alpha\right) d\Phi_h + \sum \frac{\partial \theta}{\partial \phi_k}\left(u_k^2 + \frac{4a_1}{n}u_k + \alpha\right) d\phi_k = d\theta_2,$$

avec:

$$\alpha = 2P_2 - \frac{(2p-1)}{n}a_2 + \frac{12-2p(p+1)+(2p-1)(n-1)}{2n^2}a_1^2,$$

. . . .

Une certaine indétermination apparaît dans le calcul des coefficients numériques; elle tient à ce que l'on a:

$$P_1 = \frac{(p+1)}{n} a_1$$

On la supprimera en ne faisant figurer qu'une des quantités a_1 et P_1.

On pouvait penser que les groupements isobares à envisager seraient des fonctions des seuls coefficients $R_1, R_2, \ldots$ de $R(y') = P(y')\,A(y')$; *il n'en est rien.* L'expression de α n'est pas, dans ses termes en P_2 et a_2 proportionnelle à R_2 qui est:

$$P_2 + \frac{(n-2)}{n}a_2 + \frac{(n-1)}{n}a_1P_1.$$

Il convient d'observer que dès que les exposants des ω_i et des u_k dans l'équation de rang le plus élevé, dépasseront respectivement $(n-1)$ et p, il faudra pour former les combinaisons isobares tenir compte des équations: $A(y')=0$ et $P(y')=0$. Cela entraine de légères modifications de forme.

En résumé, nous savons construire les combinaisons intégrables de (Σ): en les égalant à des constantes arbitraires, nous avons les $(n+p-1)$ relations qui définissent les caractéristiques $\phi_1, \ldots, \phi_p, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ en x et y. Tout est donc terminé.

Remarques générales. I. J'appellerai ici l'attention sur le caractère général de la méthode d'intégration qui nous a permis d'obtenir par quadratures les solutions générales des systèmes aux dérivées partielles rencontrés. On a vu que le problème avait été transformé par l'introduction explicite, comme variables indépendantes, des n caractéristiques d'Ampère (ou de Cauchy), chaque système de caractéristiques n'ayant ici *qu'une seule combinaison intégrable.* Le problème à n variables indépendantes dépend d'un système *linéaire* et la liaison entre les deux problèmes à n et à 2 variables x, y est donnée par un système complètement intégrable, qui s'intègre même ici par quadratures. Ces circonstances paraissent assez particulières et l'on pourrait caractériser les équations d'ordre n à une fonction inconnue z et à deux variables x, y qui s'intègrent ainsi. On peut construire *a priori* de tels systèmes d'équations en partant *d'un système linéaire quelconque.*

Par exemple, si l'on part d'un système d'équations de Laplace:

$$(T) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi_i \partial \phi_k} + a_{ik}\frac{\partial \theta}{\partial \phi_i} + a_{ki}\frac{\partial \theta}{\partial \phi_k} + c_{ik}\theta = 0, \qquad (i \neq k = 1, \ldots, n),$$

dont la solution générale dépend de n fonctions arbitraires d'un argument, on sait former de diverses manières (systèmes *parallèles* ou complètement conjugués, etc. . . .) des combinaisons

$$d\lambda_i = A_{i1}d\phi_1 + \ldots + A_{in}\,d\phi_n, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où les A_{ij} dépendant linéairement des dérivées (même d'ordre supérieur) de θ, qui sont différentielles exactes quelle que soit la solution θ de (T).

En écrivant des équations

$$\lambda_1+x_1=\text{const.}, \ldots, \lambda_p+x_p=\text{const.}, \lambda_{p+1}=\text{const.}, \ldots, \lambda_n=\text{const.}$$

et considérant q fonctions déterminées $z_1, \ldots, z_q$ des arguments $\phi_1, \ldots, \phi_n$, ces q fonctions dépendent par l'intermédiaire des relations précédentes de $x_1, \ldots, x_p$. L'élimination de θ donne un système (Σ) en $z_1, \ldots, z_q$ aux variables $x_1, \ldots, x_p$ dont nous avons la solution générale dès que nous connaissons la forme la plus générale de θ, c'est-à-dire que nous en avons, par exemple, des solutions dépendant de paramètres convenablement choisis. Cette méthode d'intégration va donc plus loin que les méthodes d'Ampère et de Darboux: il n'y a pour chacune des caractéristiques de Cauchy de (Σ) qu'une combinaison intégrable. Ce n'est que lorsque certaines des équations de (T) s'intègrent partiellement par la méthode de Laplace, que des fonctions arbitraires des ϕ_i apparaissent explicitement. Nous reviendrons ailleurs sur cette importante question.

II. Une dernière observation: dans la plupart des exemples traités, la forme d'équation différentielle étudiée dépend rationnellement *d'un seul* de ses arguments.

L'exemple de l'équation: $\rho'+\rho^2=\phi(x)+h$; rationnelle en ρ et en h est d'une autre nature. (Cf. Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, janvier 1919). En général quand on se donne une équation

$$y^{(n)}=F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

où F dépend rationnellement, sous une forme donnée, de *deux* de ses arguments au moins et que l'on recherche les conditions de réduction—aux quadratures par exemple—on trouve *un système surabondant d'équations*, dont la solution est *restreinte*. Il n'y a plus de caractéristiques d'Ampère pour un tel système. L'exemple le plus simple est celui du problème de Mécanique à deux degrés de liberté, réduit à l'intégration de l'équation: $pq=\lambda(U+h)$ où $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$. J'ai pu cependant conserver, dans l'étude de la détermination de λ et de U en x, y de manière que l'équation précédente s'intègre par quadratures, *quel que soit h*, l'esprit des méthodes précédentes, et introduire des *éléments caractéristiques*, en nombre beaucoup plus élevé, qui conduisent encore à la solution. Mais ceci nous entraînerait trop loin.

Mouvement d'un solide pesant qui a un point fixe

(Détermination du *groupe de rationalité* de l'équation différentielle du problème).

(A) Le problème du mouvement d'un solide pesant qui a un point fixe se résoud par des quadratures (elliptiques ou hyperelliptiques) dans les cas bien connus, dits d'Euler et Poinsot, de Lagrange et Poisson et de Mme Kowalewski, où il admet, en dehors de trois intégrales algébriques classiques, une nouvelle intégrale première algébrique. Proposons-nous de chercher le groupe de rationalité de l'équation différentielle du second ordre à laquelle il se ramène en général:

Les moments principaux d'inertie A, B, C relatifs au point fixe n'étant pas nuls, nous ferons dans les équations classiques le remplacement de Ap, Bq, Cr par de nouvelles variables p, q, r et celui de A, B, C par $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. En multipliant par une constante convenable les cosinus directeurs x, y, z de la verticale par rapport aux axes principaux d'inertie au point fixe, on peut écrire les équations du problème:

$$\text{(I)}\qquad \frac{dp}{dt}=(b-c)qr+\eta z-\zeta y, \qquad \frac{dz}{dt}=cry-bqz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

et l'on en connaît les intégrales:

$$x^2+y^2+z^2=l^2, \qquad px+qy+rz=k,$$
$$ap^2+bq^2+cr^2+2(\xi x+\eta y+\zeta z)=2h.$$

Si Δ désigne le déterminant fonctionnel de l^2, k, h en x, y, z, Δ^2 est un polynome du sixième degré en p, q, r et les variables x, y, z sont rationnelles en p, q, r, Δ. Le système (I) se ramène donc à une équation:

$$\text{(II)}\qquad U(f)=A\frac{\partial f}{\partial p}+B\frac{\partial f}{\partial q}+C\frac{\partial f}{\partial r}=0,$$

où A, B, C sont respectivement les quantités $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ exprimées en p, q, r, l^2, k, h; le temps t sera, après intégration de (II), donné par une quadrature.

L'équation (II) possède—comme toutes les équations rencontrées en Dynamique—un multiplicateur de Jacobi rationnel en p, q, r, Δ. Son groupe de rationalité (G) relatif aux solutions fondamentales ϕ, ψ est donc le groupe infini (Γ), défini par la relation $\dfrac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\phi, \psi)}=1$, ou l'un de ses sous-groupes types. Il s'agit de décider d'abord si (G) est *imprimitif*, auquel cas il existe une autre équation linéaire formant avec (II) un système complet et dont les coefficients sont rationnels ou quadratiques dans le domaine (p, q, r, Δ). Sinon le groupe primitif (G) ne pourrait se réduire qu'au groupe linéaire spécial.

(B) Remplaçons respectivement dans (I) r, p, y par ϵr, ϵp, ϵy et η par $\epsilon^2\eta$ où ϵ est un paramètre. Les expressions $\frac{dp}{dt}, \ldots, \frac{dx}{dt}, \ldots$ seront du premier ou du second degré en ϵ et si l'on fait tendre ϵ vers zéro, le système (I) tendra vers un système *réduit*

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} \frac{dp}{dt}&=(b-c)qr-\zeta y, & \frac{dx}{dt}&=-bqz,\\ \frac{dq}{dt}&=\zeta x-\xi z, & \frac{dy}{dt}&=apz-crx,\\ \frac{dr}{dt}&=(a-b)pq+\xi y, & \frac{dz}{dt}&=bqx, \end{aligned}$$

qui admet les intégrales premières:

$$x^2+z^2=l^2, \quad bq^2-2(\xi x+\zeta z)=2h, \quad px+qy+rz=k.$$

On voit que x et z s'expriment en fonction de q^2; y est alors linéaire en p et r. Le système (III) donne pour $\frac{dp}{dq}, \frac{dr}{dq}$ des fonctions linéaires de p et de r. Les deux intégrales de ce système linéaire sont donc définies *à un groupe linéaire près*, groupe de rationalité du système réduit. Ce groupe est-il *primitif*?

J'ai observé que si l'on fait $l^2=0$, c'est-à-dire si l'on étudie certaines solutions de (III) qui existent normalement—et qui ont été considérées par Hermite dans d'autres cas—on peut ramener le système (III) à *l'équation hypergéométrique de Gauss* et à des quadratures. Il suffit de poser:

$$q^2=\frac{2h}{b}u, \quad r+ip=u(1-u)^{\nu}Z, \text{ avec } \nu=-\sqrt{\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)}$$

pour obtenir la forme classique

$$u(1-u)\frac{d^2Z}{du^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)u\right]\frac{dZ}{du}-\alpha\beta Z=0$$

avec:

$$\gamma=\frac{3}{2}, \quad \alpha+\beta=\frac{3}{2}-2\nu, \quad \alpha-\beta=-2\sqrt{P+\frac{1}{4}}$$

où:

$$P=\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)+\frac{\xi\left(1-\frac{c}{b}\right)+\zeta\left(1-\frac{a}{b}\right)}{2(\zeta+i\xi)}.$$

Les constantes h, k n'y figurent plus.

Dans le cas actuel, le groupe de rationalité de l'équation de Gauss est primitif; l'équation (II) possède donc aussi un groupe de rationalité (G) primitif

(C) Il reste à décider si ce groupe (G) est infini ou fini, auquel cas il se réduirait au groupe linéaire spécial. Etudions le cas d'Euler et Poinsot: il existe alors une intégrale rationnelle nouvelle ϕ et le groupe de rationalité est formé de transformations:

$$\Phi=\phi, \quad \Psi=\psi+F(\phi),$$

l'intégrale ψ étant donnée par une quadrature elliptique; la fonction $F(\phi)$ est la période d'une telle intégrale envisagée comme fonction du module. *Un tel groupe n'est pas semblable à un groupe linéaire.*

Le groupe de rationalité (G) du système (I) est donc infini et comme il est primitif, *il ne peut être que le groupe* Γ.

Les transcendantes qui permettront la détermination du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, sont donc des fonctions ϕ, ψ de p, q, r *attachées* dans le domaine (Δ) au groupe (Γ).

Tous les cas de réduction de l'équation de Gauss sont—comme cette équation elle-même—en une certaine mesure, des cas de réduction de (I). Ils correspondent à des mouvements particuliers dans lesquels certains éléments sont infiniment petits par rapport aux autres. On devra étudier dans ces divers cas la réduction possible du système (I) en développant les intégrales suivant les puissances de ϵ. Les intégrales classiques sont des polynomes en ϵ. Il convient d'observer que le système réduit (III) contient toutes les constantes du problème non particularisées—sauf la coordonnée η qui est nulle. Ce système permettrait donc d'étudier les dernières intégrales ϕ et ψ comme fonction de ces diverses constantes, et aussi de h et k.

La recherche actuelle n'est donc qu'un début.