COMPTES RENDUS

DU

CONGRÈS INTERNATIONAL

DES

MATHÉMATICIENS

(Strasbourg, 22-30 Septembre 1920).

PUBLIÉS PAR

Henri VILLAT

Professeur à l'Université de Strasbourg.

TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS (SQUARE DU MUSÉE)

—

1921

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE

L'INTÉGRATION LOGIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Par M. Jules DRACH

(PARIS).

Au dernier Congrès international des Mathématiciens (Cambridge, 1912), j'ai été heureux de présenter, avec un aperçu rapide des points essentiels de ma théorie d'*intégration logique* des équations différentielles, quelques exemples d'équations particulières, nouvelles, qui peuvent s'intégrer par quadratures : l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel et celle des lignes asymptotiques des surfaces générales du troisième degré.

En poursuivant mes recherches, j'ai réussi à obtenir méthodiquement, et dans certains cas de manière complète, la *détermination effective* des équations *d'un type donné* qui présentent, au point de vue de l'intégration, une réduction suffisante pour que l'intégrale puisse s'exprimer par des quadratures partielles.

J'ai pu former ainsi les cas de réduction d'une équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(y)}{\beta(y)},$$

où α et β sont des polynômes de degrés donnés n et $(n-2)$ en y, à coefficients *quelconques* en x — en particulier traiter en détail l'*équation de la balistique extérieure,* qui appartient à cette catégorie pour $n = 3$ [1]. On trouvera plus loin la détermination des cas de réduction d'une équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi A(x, y),$$

où φ est un paramètre et A une fonction arbitraire de deux variables. Enfin j'ai

[1] Cf. *Annales de l'École Normale Supérieure*, janvier 1920, et *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 158, p. 926, 1914.

donné explicitement le moyen de définir toutes les fonctions $F(x, y)$ pour lesquelles l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y)$$

possède une intégrale première (et une seule) rationnelle en $\frac{dy}{dx}$ [1].

La même méthode, convenablement modifiée, m'a également permis de déterminer les cas où l'équation différentielle des lignes géodésiques, écrite en *coordonnées symétriques*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

possède une intégrale première (et une seule) rationnelle en $\frac{dy}{dx}$ [2].

Enfin, j'ai étudié les cas de réduction possibles pour une équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [\varphi(x) + h]y$$

où $\varphi(x)$ est à déterminer et h un paramètre variable; dans les cas où l'intégration de l'équation se ramène aux quadratures, on peut déterminer effectivement la fonction $\varphi(x)$ [3].

Les méthodes employées ne sont, bien entendu, pas limitées à ces applications.

En donnant dans les pages qui suivent un bref résumé de quelques-unes de ces recherches (un exposé plus étendu paraîtra prochainement ailleurs), je voudrais signaler particulièrement deux points à l'attention des mathématiciens.

On verra, d'une manière générale, que les fonctions implicites à déterminer le sont par des équations où figurent des intégrales (dépendant de paramètres) prises dans le champ complexe, d'un point à un autre ou le long de certains contours fermés — c'est-à-dire des *fonctions de ligne*. Ces fonctions de ligne sont des solutions d'équations linéaires aux dérivées partielles *irréductibles*, *dont le groupe de rationalité est linéaire ou projectif*.

Elles sont le prélude aux fonctions de *surface*, ou de *volume* (comme le potentiel) qui interviendront dans les problèmes analogues relatifs aux équations d'ordre supérieur.

D'autre part, j'ai été amené à introduire *explicitement* dans le calcul — quand il s'agit d'un système différentiel quelconque — les *variables caractéristiques* d'Ampère, *lorsqu'elles sont des fonctions déterminées des arguments du système*, et à les regarder d'abord comme des variables *indépendantes*. La méthode d'intégration qui

(1) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 168, p. 497, 1919.
(2) *Ibid.*, t. 169, 1155, 1919.
(3) *Ibid.*, t. 168, p. 47 et p. 337, 1919.

en résulte pour ces équations aux dérivées partielles, qui sont d'ordre quelconque à deux variables, me paraît s'étendre à des cas très généraux que n'atteignent point les méthodes de Monge, d'Ampère ou de Darboux.

I. — *Réduction des équations* $\frac{dy}{dx} = A(y)$, *où* A *est une fonction rationnelle de* y, *à coefficients quelconques en* x.

Une équation

$$\frac{dy}{dx} = A(y) = \frac{\alpha(y)}{\beta(y)}, \tag{1}$$

où α et β sont des polynômes en y, à coefficients quelconques en x, garde sa forme par une transformation

$$x = f(x_1), \qquad y = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d}$$

où f, a, b, c, d sont des fonctions arbitraires de x_1 ($ad - bc \neq 0$).

Il est possible en partant de là, de ramener, par des opérations qui n'exigent que des quadratures, l'équation (1) à une *forme canonique* où le nombre des coefficients arbitraires est réduit à son minimum. L'équation (1) canonique, ou mieux l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

ne présente de réduction que si l'un des invariants z; $K = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n$, où n est entier :

$$J = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} : \frac{\partial z}{\partial y}; \qquad I = \{z, y\} = \frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\right)^2$$

est *rationnel* en y. Les coefficients de cet invariant rationnel et les coefficients de A appartiennent alors à un certain *domaine de rationalité* [R] que l'on pourra définir et qui comprend généralement des fonctions arbitraires.

Lorsqu'on se propose de rechercher comment on doit choisir les coefficients de A pour que la *résolvante* dont dépend la détermination de K, J ou I possède une solution rationnelle — en supposant les degrés de α et β *déterminés*, c'est-à-dire l'équation (1) *donnée de forme* — on trouve, si l'on prend par exemple l'invariant en question égal à $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes de degré p, que les coefficients de α et de β devront satisfaire à un système différentiel simultané (Σ), équivalent à une équation linéaire aux dérivées partielles, *dont l'ordre s'élève avec* p. Les coefficients de P et Q s'obtiennent immédiatement par de simples quadratures quand le système (Σ) est intégré : nous savons en effet qu'on peut toujours supposer que l'invariant *rationnel* qui correspond à une équation (1) est *unique*, à des transformations non essentielles près.

C'est ce système différentiel (Σ) dont l'ordre s'élève avec le degré p des polynômes P et Q [pour une équation (1) où le degré de α et de β en y est *fixé*] que nous avons réussi à intégrer de manière générale — par des quadratures partielles au plus dans les cas où les invariants rationnels en y sont z, ou K, ou J.

Lorsque c'est l'invariant I dont l'expression est rationnelle en y, on sait que la détermination de z se ramène à l'intégration d'un système, en général *irréductible*, de deux équations de Riccati. Il n'est alors pas possible d'expliciter, *de manière générale*, au moyen de quadratures partielles, les fonctions de plusieurs arguments qui, égalées à zéro, permettent de définir implicitement les coefficients de A et par suite ceux de P et de Q; on peut néanmoins le faire en *explicitant* les solutions de certaines équations différentielles linéaires du second ordre déterminées, dont les coefficients, *rationnels* par rapport à la variable indépendante, renferment rationnellement un certain nombre de paramètres arbitraires.

La méthode qui conduit à ces résultats peut être indiquée sommairement : Dans tous les cas où la connaissance de l'invariant rationnel (K ou J) permet à l'aide de quadratures partielles d'exprimer la solution z, cette solution n'est définie qu'à certaines transformations près :

$$Z = \lambda z + \mu$$

lorsque J est rationnel, par exemple, transformations qui constituent le *groupe de rationalité*. Les déterminations multiples des intégrales qui interviennent dans l'expression de z donnent lieu à des transformations : $Z = \lambda_i z + \mu_i$, qui peuvent être regardées comme formant le *groupe de monodromie* de z. Eh bien, les intégrales du système (Σ) s'obtiennent — sauf exceptions évidentes — en écrivant d'une manière générale que les λ_i, μ_i sont des *constantes*, indépendantes de x et y.

Lorsque I est rationnel en y, z n'est défini *dans le domaine* [R] qu'à des transformations projectives près :

$$Z = \frac{\lambda z + \mu}{\nu z + \rho} \qquad (\lambda\rho - \mu\nu = 1)$$

et les intégrales de (Σ) expriment encore, dans leur ensemble, que les valeurs particulières des λ, μ, ν, ρ correspondant aux déterminations multiples de z sont des constantes absolues.

Le développement de ces remarques ne peut trouver place ici. Nous nous bornerons à indiquer, un peu plus en détail, l'application qu'on en peut faire aux équations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P_3(y)}{P_1(y)}$$

où P_3 est du troisième degré en y, P_1 du premier degré. Observons que la détermination des équations $\frac{dy}{dx} = A(y)$ de degré donné, dont la solution générale peut s'écrire :

$$\rho(x)(y - a_1)^{m_1} \ldots (y - a_k)^{m_k} = \text{const.}$$

où les m_i sont des *constantes* réelles quelconques — cas qui correspond pour nous à :

$$K = \frac{\partial z}{\partial y} = \sum \frac{m_i}{y - a_i},$$

c'est-à-dire K rationnel à pôles simples et résidus constants — a été traitée complètement par M. Painlevé (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1894) et M. Korkine (*Math. Annalen*, t. 48).

[1] Les équations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P_3(y)}{P_1(y)}$$

[qui gardent leur forme par les transformations indiquées au début] ont donné lieu à de nombreuses recherches depuis Euler et Abel qui en ont formé des cas simples d'intégration par quadratures. Mais tous les auteurs qui s'en sont occupé : Z. Elliot, Halphen, Darboux, MM. R. Liouville et P. Appell se sont bornés, après les avoir transformées, comme on l'a dit plus haut, en des *formes canoniques* où le nombre des arbitraires est minimum, à en indiquer quelques cas nouveaux et particuliers d'intégration. Dès que l'on exprime en effet que, pour la différentielle $P_1 dy - P_3 dx$, il existe un multiplicateur de forme déterminée où interviennent des polynômes en y, on obtient, pour peu que le degré de ces polynômes s'élève (même pour les valeurs 2, 3, ...), un système différentiel (Σ) dont l'ordre est 2, 3, 4, ..., et dont l'intégration n'avait pu être abordée. C'est la théorie d'*intégration logique* des équations différentielles qui a permis de voir quelle était la difficulté de la question et comment on pouvait la résoudre.

On peut adopter pour (1) diverses formes canoniques, suivant le nombre des solutions distinctes de cette équation qui sont connues ou mises en évidence. Euler et Abel ont employé la forme

$$(A_0) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{\varphi(x)}{y}$$

qui possède la solution double $y = \infty$; M. Appell a proposé la forme

$$(A_1) \quad \frac{dy}{dx} = y^3 + \Phi(x)$$

où aucune solution ne joue de rôle particulier et qui se transforme aisément en la précédente dès qu'on en connaît une solution particulière. Nous avons observé que l'équation différentielle de la *balistique extérieure* pouvait être mise sous la forme

$$(A_2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{y + \varphi(x)}$$

qui peut aussi être regardée comme une forme *canonique* ou *réduite* des équations (1) dont on connaît trois solutions : il suffit de faire suivre la transformation projective sur y qui change ces solutions en 1, -1, ∞, d'un changement de la variable, pour obtenir la réduite (A_2). Enfin, au cours de recherches sur ce sujet, nous avons reconnu que, pour certaines applications à la théorie des fonctions, il pouvait être utile d'employer $\left(\text{même pour les équations générales } \frac{dy}{dx} = A(y)\right)$ une *réduite* où quatre solutions *isolées* ont été respectivement transformées en 0, 1, ∞ et x; cette réduite est ici :

$$(A_3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(x-\lambda)}{x(x-1)(y-\lambda)}$$

où λ est la fonction arbitraire en x.

L'étude de la réduction des *diverses* formes canoniques, lorsque l'une des quantités z, K, J, I est rationnelle en y, conduit, par des méthodes analogues, à des formes analytiques différentes, car le passage de l'une à l'autre nécessite des intégrations, souvent théoriques. Il est d'ailleurs nécessaire de posséder des formes canoniques qui dérivent *aussi simplement que possible* de la forme générale, pour permettre l'application à cette dernière des résultats établis pour la forme canonique.

Observons encore que puisque la forme canonique ne comprend qu'*une* fonction arbitraire de x, tous les cas de réduction correspondront à des équations *déterminées*, dépendant au plus de constantes arbitraires en nombre fini.

Nous avons donné en détail [1] les résultats de l'étude de la réduction de l'équation (A_2) de la *balistique extérieure* dans les cas où cette réduction conduit à l'intégration de cette équation par quadratures. Il suffira de s'y reporter pour comprendre la méthode.

[2] Indiquons, *à titre d'exemple*, pour l'équation d'Euler,

$$(A_0) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{\varphi}{y}, \quad \text{ou pour} \quad \frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \left(A = 1 + \frac{\varphi}{y}\right)$$

à quelles conditions elle possède un multiplicateur rationnel en y. Ce multiplicateur K a nécessairement la forme :

$$K = yK_1 = y \cdot \sigma \frac{(y-a_1)^{\alpha_1} \ldots (y-a_m)^{\alpha_m}}{(y-b_1)^{\beta_1} \ldots (y-b_n)^{\beta_n}}$$

et K_1 doit satisfaire identiquement à la résolvante :

$$y\frac{\partial K_1}{\partial x} + (y+\varphi)\frac{\partial K_1}{\partial y} + K_1 = 0.$$

On trouve ainsi que les a_i et les b_j sont des solutions particulières de l'équation (A_0) qui satisfont en outre à la condition

$$(\varepsilon) \quad \Sigma\alpha_i a'_i - \Sigma\beta_j b'_j = \Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1.$$

Enfin $\sigma' = 0$, ce qui permet de poser $\sigma = 1$.

La condition (ε) donne d'une part une intégrale

$$(\varepsilon_1) \quad \Sigma\alpha_i a_i - \Sigma\beta_j b_j = (\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1)x + C$$

et d'autre part, en tenant compte des expressions des a'_i, b'_j :

$$(\varepsilon_2) \quad \varphi\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{a_i} - \Sigma\frac{\beta_f}{b_j}\right) = 1,$$

qui déterminera φ quand les a et les b seront connus.

[1] Cf. *Annales de l'École Normale Supérieure*, janvier 1920.

Il reste à intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1)\qquad X(F) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\left(1 + \frac{\varphi}{a_1}\right) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial b_1}\left(1 + \frac{\varphi}{b_1}\right) + \ldots = 0$$

à $(m + n + 1)$ variables $x, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ où φ est donné par (ε_2); c'est cette équation qui constitue ici le système (Σ).

Observons que la solution z peut s'écrire

$$z = \int_{y_0}^{y} y K_1 \, dy + f(x)$$

où $f(x)$ est défini par :

$$f'(x) + [(y + \varphi) K_1]_{y=y_0} = 0.$$

Les diverses valeurs de z en un point (x, y) se déduisent de l'une d'elles en ajoutant des périodes de $f(x)$ qui sont des constantes et des périodes de $\int_{y_0}^{y} y K_1 \, dy$ qui *doivent* donc être des constantes.

Ces périodes de $\Omega = \int_{y_0}^{y} y K_1 \, dy$ sont les produits par $2i\pi$ des *résidus* de Cauchy relatifs aux divers pôles $b_1, \ldots, b_n$. Ces résidus sont donc des solutions de (1) rationnelles en a_i, b_j :

$$R(b_i) = \Gamma_i$$

en nombre égal à n. Lorsque $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1$ est positif, le point à l'infini est un pôle dont le résidu est au signe près $\Sigma R(b_i)$.

On obtient les $(m - 1)$ solutions de (1) qui manquent en remarquant que $z(x, y)$ se réduit à une constante quand on y remplace y par une solution particulière de (A_0). Si l'on pose

$$Z_{a_i} = \int_{y_0}^{a_i} y K_1 \, dy + f(x) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

on aura des constantes absolues :

$$C_i = Z_{a_i} - Z_{a_1} = \int_{a_1}^{a_i} y K_1 \, dy$$

en fixant les chemins qui vont de a_1 à a_i et la situation, dans le plan complexe, des points a_i, b_j.

Ces nouvelles solutions de (1) sont des sommes de fonctions rationnelles des a_i, b_j et de logarithmes de telles fonctions multipliés par des constantes.

Lorsque $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1$ est négatif, le point à l'infini est un zéro pour yK_1; on peut le prendre pour une des limites de l'intégrale lorsque $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i + 1 \leqslant -2$. Il y a alors entre les C_i, en nombre m, une relation linéaire à coefficients constants qui remplace celle exprimant que le résidu intégral est nul.

Enfin, dans le cas où $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + 1 = 0$, la fonction yK_1 est régulière à l'infini; la relation (ε) change de forme et donne

$$(\varepsilon_1)\qquad \Sigma\alpha_i a_i - \Sigma\beta_j b_j = C$$

avec la même expression de φ. Mais la constante C est fonction des Γ_i, car le premier membre de (ε) est le résidu relatif à l'infini pour yK_1.

La nouvelle solution C_1 qui doit remplacer C s'obtient par un procédé régulier; elle est définie par :

$$\frac{1}{2}(\Sigma\alpha_i a_i^2 - \Sigma\beta_j b_j^2) + \Sigma\Gamma_i b_i = 2x\Sigma\Gamma_i + C'.$$

Ceci suppose simplement que les Γ_i, arbitraires, n'ont pas une somme nulle. On remarquera que toutes les solutions de (1) sont des intégrales $\int_{y_0}^{y_1} y K_1 \, dy$ prises entre deux points pour lesquels yK_1 a la même valeur — points identiques (contours fermés) ou points racines de $K_1 = 0$.

[3] Nous avons dit que l'on ne pouvait *en général* déterminer par des quadratures les équations pour lesquelles I est rationnel en y — dont l'intégration se ramène par là à celle d'un système de Riccati irréductible. Il est toutefois possible de traiter complètement un grand nombre de cas particuliers. Si, par exemple, on veut que pour l'équation de M. Appell(1)

$$(A_1)\qquad \frac{dy}{dx} = y^3 + \Phi$$

ou bien

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + (y^3 + \Phi)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

l'invariant

$$I = \{z, y\}$$

soit le quotient de deux polynômes du *troisième* degré en y, on trouve simplement :

$$I = \frac{3}{2}\,\frac{9x - y\sqrt{\omega}}{y^3\sqrt{\omega} - 9xy^2 - 2}$$

(1) Des résultats analogues s'obtiennent pour l'équation d'Euler lorsque I possède un pôle double ou deux pôles simples, en dehors du point $y = 0$.

avec

$$\omega = C - 54x^3 \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Rappelons enfin qu'en prenant l'équation canonique (A_3)

$$(A_3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(x-\lambda)}{x(x-1)(y-\lambda)},$$

les cas les plus simples où I est rationnel en y, conduisent, pour déterminer λ, aux équations (rencontrées depuis par M. Richard Fuchs) qui déterminent les transcendantes uniformes découvertes par M. Painlevé.

Dans tous ces cas, z est le quotient de deux solutions de l'équation linéaire du second ordre : $\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{2} I$ et si l'on regarde tous les coefficients variables de I comme fonction de l'un d'eux, les tranformations subies par z ne dépendent pas de ce dernier.

II. — *Réduction d'une équation* $\frac{dy}{dx} = \varphi A(x, y)$, *où* φ *est un paramètre arbitraire et* A *une fonction quelconque de* x *et* y.

Soit une équation du premier ordre :

$$(E) \qquad \frac{dy}{dx} = R(x, y, \varphi)$$

qui dépend rationnellement d'un paramètre φ; l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$(1) \qquad X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} R = 0$$

peut être regardée comme une équation à trois variables x, y, φ dont nous connaissons une solution φ, et si l'on désigne par z une autre solution formant avec φ un système fondamental, le *groupe de rationalité* de (1) sera le groupe

$$Z = F(z, \varphi), \qquad \Phi = \varphi$$

où F est arbitraire, ou bien l'un de ses sous-groupes types. Les cas de réduction

principaux de (E) sont ceux où, pour un choix convenable de z, l'un des éléments z, $K = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^p$ où p est entier,

$$J = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

ou enfin

$$I = \frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\right)^2,$$

a une expression rationnelle en φ — dont les coefficients appartiennent au *domaine de rationalité* défini par les coefficients de $R(x, y, \varphi)$. Il convient d'ajouter le cas où F est indépendant de φ, l'invariant correspondant étant le quotient $\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

Si pour une équation où R est une fraction dont les deux termes sont *de degré donné* en φ, on se propose de déterminer les coefficients de R de manière que (E) offre un de ces cas de réduction, on obtiendra pour cela un système différentiel qui s'intégrera par des quadratures lorsque z peut ainsi s'obtenir — et dont l'intégration générale, lorsque z dépend d'un système d'équations de Riccati ou d'un système complet quelconque, ne peut être obtenue explicitement que par l'*explicitation* de la solution générale d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels *bien déterminés* ou d'équations du premier ordre bien déterminées à deux variables seulement.

Nous allons montrer ici, en nous bornant au cas le plus simple d'une équation où R est du premier degré en φ, cas que l'on peut amener aisément à la forme réduite :

$$(E) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi A(x, y),$$

comment l'on peut intégrer le système qui définit A pour qu'un des cas de réduction indiqués plus haut se présente.

[4] Supposons d'abord que l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi A \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

possède une solution z qui soit un *polynôme* entier en φ

$$z = \beta_0 \varphi^m + \beta_1 \varphi^{m-1} + \ldots + \beta_m,$$

ce qui entraîne les conditions :

$$(\Sigma)\qquad \frac{\partial\beta_0}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\beta_0}{\partial x}+A\frac{\partial\beta_1}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial x}+A\frac{\partial\beta_2}{\partial y}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial\beta_m}{\partial x}=0$$

Nous avons réussi à intégrer le système (Σ) en mettant en évidence les *caractéristiques d'Ampère* du problème, c'est-à-dire les variables qui peuvent figurer sous des signes de fonction arbitraire dans l'intégrale générale de (Σ). On peut toujours prendre — sauf cas singulier : $\beta_0=x$, $\beta_m=y$, et l'on a ensuite $A\frac{\partial\beta_1}{\partial y}=-1$ qui détermine A.

Si l'on désigne par ω_i les racines du multiplicateur $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui est un polynôme en φ, on a évidemment :

$$-\frac{1}{A}(\varphi-\omega_1)\ldots(\varphi-\omega_{m-1})(dy-A\varphi\,dx)=d\beta_0\varphi^m+d\beta_1\varphi^{m-1}+\ldots+d\beta_m$$

et l'on vérifie aisément en formant la *résolvante* en $K=\frac{\partial z}{\partial y}$ que $\omega_i=$ const. est l'intégrale de $dy-\omega_i A dx=0$.

On peut donc écrire :

$$(S_1)\qquad x\omega_i^m+\beta_1\omega_i^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}\omega_i+y=f_i(\omega_i)\qquad (i=1,\ldots,m-1)$$

et l'on exprime que les ω_i sont bien les racines de $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ en ajoutant

$$(S_2)\qquad mx\omega_i^{m-1}+(m-1)\beta_1\omega_i^{m-2}+\ldots+\beta_{m-1}=f_i'(\omega_i)\qquad (i=1,\ldots,m-1).$$

Ces deux groupes de $(m-1)$ équations définissent les β et les ω au moyen de x et y; les expressions obtenues dépendent de $(m-1)$ fonctions arbitraires $f_i(\omega_i)$ des arguments ω_i, qui sont les caractéristiques.

Ceci suppose que $\frac{\partial z}{\partial y}$, polynôme en φ, a toutes ses racines distinctes. Si l'on veut que la racine ω_1 soit double pour le multiplicateur, il suffit d'ajouter au groupe (S_2) l'équation dérivée :

$$m(m-1)x\omega_1^{m-2}+(m-1)(m-2)\beta_1\omega_1^{m-3}+\ldots=f_1''(\omega_1)$$

qui remplacera l'équation relative à la racine qui vient se confondre avec ω_1 ; etc...

L'étude du cas où z est *rationnel* en φ se fait en suivant les mêmes principes. Si l'on suppose que z n'a en φ que des pôles simples :

$$z=A_0+\frac{A_1}{\varphi-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{\varphi-a_n}$$

on formera

$$K=\frac{\partial z}{\partial y}$$

qui possède, en général, $(2n-1)$ racines distinctes $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_{2n-1}$, et l'on observera que $\omega_i=$ const. est l'intégrale de $dy-\omega_i A dx=0$. D'autre part, on peut prendre, sans restreindre la généralité :

$$A_0=x,\qquad x-\frac{A_1}{a_1}-\ldots-\frac{A_n}{a_n}=y.$$

Les inconnues a_i, A_i, ω_i, en nombre $(4n-1)$ sont alors déterminées par le système :

$$(S_1)\qquad x+\frac{A_1}{\omega_i-a_1}+\ldots+\frac{A_n}{\omega_i-a_n}=f_i(\omega_i)\qquad (i=1,\ldots,2n-1)$$

$$(S_2)\qquad \frac{-A_1}{(\omega_i-a_1)^2}-\ldots-\frac{A_n}{(\omega_i-a_n)^2}=f_i'(\omega_i)\qquad (i=1,\ldots,2n-1)$$

qui comprend $(2n-1)$ fonctions arbitraires des *caractéristiques* ω_i, et l'on a ensuite A par l'équation :

$$1=-A\,\Sigma\frac{\partial A_i}{\partial y}.$$

Il n'y a pas de difficulté à modifier ces résultats quand z ou $\frac{\partial z}{\partial y}$ possèdent en φ des zéros multiples.

[5] Si l'on veut que le multiplicateur K soit rationnel en φ, dans le cas où il n'a que des pôles simples,

$$K=B_0+\frac{B_1}{\varphi-b_1}+\ldots+\frac{B_n}{\varphi-b_n},$$

les éléments B_i, b_i, A doivent satisfaire aux relations

$$(\Sigma)\qquad \frac{\partial b_i}{\partial x}+b_iA\frac{\partial b_i}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial B_i}{\partial x}+b_iA\frac{\partial B_i}{\partial y}+B_i\frac{\partial b_iA}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial A B_0}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial B_0}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}A(B_1+\ldots+B_n)=0.$$

Un changement de la variable x permet de prendre

$$AB_0 = 1$$

et l'hypothèse $\varphi = 0$ donne, dans la résolvante en K :

$$B_0 - \frac{B_1}{b_1} - \dots - \frac{B_n}{b_n} = g(y)$$

où g est arbitraire.

Chaque b_i, égalé à une constante, donne l'intégrale de $dy - b_i A dx = 0$, et B_i est un multiplicateur de cette équation; on peut donc poser

$$B_i = f_i(b_i)\frac{\partial b_i}{\partial y},$$

$f_i(b_i)$ étant arbitraire.

L'expression de z est alors :

$$z = -x\varphi + \int g(y)dy + \varphi \sum_i \int^{b_i} \frac{f_i(b)db}{b(\varphi - b)},$$

la limite inférieure des intégrales étant une constante et la limite supérieure l'une des variables $b_1, \dots, b_n$ qui sont des caractéristiques d'Ampère, le chemin d'intégration évitant le point $b = \varphi$; la *configuration* de l'ensemble de tous ces points est supposée fixée.

Soit encore ω_k une racine de $K = 0$ (de degré n en φ); $\varphi_k =$ const. est toujours l'intégrale de $dy - \omega_k A dx = 0$. On conclut encore de là :

$$(S_1) \qquad -x\omega_k + \int g(y)dy + \omega_k \sum_i \int^{b_i} \frac{f_i(b)db}{b(\omega_k - b)} = F_k(\omega_k) \qquad (k = 1, \dots, n)$$

où les F_k sont des fonctions arbitraires, et l'on exprime que les ω_k sont bien les racines de $K = 0$, en ajoutant les relations :

$$(S_2) \qquad -x - \sum_i \int^{b_i} \frac{f_i(b)db}{(\omega_k - b)^2} = F'_k(\omega_k) \qquad (k = 1, \dots, n)$$

où les intégrales sont toujours prises le long de chemins évitant les points $b = \omega_k$. Ces $2n$ relations définissent les ω et les b au moyen de x et y; on a ensuite A par

$$\frac{1}{A} = g(y) + \sum_i \frac{f_i(b_i)}{b_i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial y}.$$

Les variables caractéristiques d'Ampère sont les ω_k et les b_i; on voit apparaître ici des fonctions arbitraires *engagées sous un signe de quadrature partielle.*

Il serait aisé de tenir compte des racines ou des pôles multiples de K.

[6] L'étude du cas où K a la forme

$$K = \frac{\partial z}{\partial y} = \sigma(\varphi - b_1)^{m_1} \dots (\varphi - b_n)^{m_n}$$

où les m_i sont des constantes quelconques, nous a servi à élucider le cas général où $J = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y}$ est rationnel en φ.

Disons simplement que, dans le premier cas, on trouve pour dz la forme :

$$dz = \frac{(\varphi - b_1)^{m_1} \dots (\varphi - b_n)^{m_n}}{b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n}}(dy - \varphi b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n} dx)$$

et que le problème revient à déterminer les b_i en x, y de manière que dz soit une différentielle exacte, quel que soit φ. On traite cette question en cherchant d'abord à quelles conditions

$$dz = (\varphi - b_1)^{m_1+1} \dots (\varphi - b_n)^{m_n+1}\left(\frac{\lambda_1 db_1}{\varphi - b_1} + \dots + \frac{\lambda_n db_n}{\varphi - b_n}\right)$$

où les λ_i dépendent de $b_1, \dots, b_n$, est une différentielle exacte — ce qui exige que

$$\lambda_i = \frac{\partial \theta}{\partial b_i} \qquad (i = 1, \dots, n),$$

θ satisfaisant aux équations

$$(T) \qquad (b_k - b_i)\frac{\partial^2 \theta}{\partial b_i \partial b_k} - \frac{\partial \theta}{\partial b_k}(m_i + 1) + \frac{\partial \theta}{\partial b_i}(m_k + 1) = 0.$$

Le système (T), rencontré par Darboux, est une généralisation de l'équation d'Euler et de Poisson; on sait l'intégrer par quadratures en partant de la solution

$$\theta = (\varphi - b_1)^{-(m_1+1)} \dots (\varphi - b_n)^{-(m_n+1)}.$$

Il reste à rechercher quelles sont les relations à établir entre les b et x, y pour que l'on ait, identiquement en φ :

$$\frac{\lambda_1 db_1}{\varphi - b_1} + \dots + \frac{\lambda_n db_n}{\varphi - b_n} = \frac{dy - \varphi b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n} dx}{b_1^{m_1} \dots b_n^{m_n}(\varphi - b_1) \dots (\varphi - b_n)},$$

ce qui exige simplement :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} db_i = \frac{dy - b_i . b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n} dx}{b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n}(b_i - b_1) \ldots b_i - b_n)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ce dernier système, complètement intégrable, peut être remplacé par un système d'équations immédiatement intégrables ; en les intégrant on obtient $(n-2)$ relations entre $b_1, \ldots, b_n$ et deux relations donnant x, y au moyen des mêmes éléments. Par exemple, pour $n = 2$, on a simplement :

$$-dx = \frac{\partial \theta}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial \theta}{\partial b_2} db_2, \quad \text{d'où} \quad x = -\theta(b_1, b_2),$$

$$-dy = b_1^{m_1+1} b_2^{m_2+1}\left(\frac{\partial \theta}{\partial b_1}\frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial \theta}{\partial b_2}\frac{db_2}{b_2}\right)$$

qui définissent x, y en b_1, b_2 ; pour $n = 3$, on a entre b_1, b_2, b_3 la relation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial b_1} db_1 + \frac{\partial \theta}{\partial b_2} db_2 + \frac{\partial \theta}{\partial b_3} db_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta(b_1, b_2, b_3) = \text{const.}$$

et ensuite :

$$dy = b_1^{m_1+1} b_2^{m_2+1} b_3^{m_3+1}\left(\frac{\partial \theta}{\partial b_1}\frac{db_1}{b_1} + \frac{\partial \theta}{\partial b_2}\frac{db_2}{b_2} + \frac{\partial \theta}{\partial b_3}\frac{db_3}{b_3}\right),$$

$$dx = (b_2 + b_3 + \lambda)\frac{\partial \theta}{\partial b_1} db_1 + (b_3 + b_1 + \lambda)\frac{\partial \theta}{\partial b_2} db_2 + (b_1 + b_2 + \lambda)\frac{\partial \theta}{\partial b_3} db_3$$

avec

$$\lambda = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3; \text{ etc.}$$

L'étude du cas où J est rationnel en φ amène à des conclusions analogues, avec des formules plus compliquées où figurent des fonctions arbitraires engagées sous des signes de quadrature partielle. Si les pôles de J sont simples, la difficulté essentielle du problème revient encore à l'intégration (qui se fait par quadratures partielles) d'un système

$$\text{(T)} \qquad (b_i - b_k)\frac{\partial^2 \theta}{\partial b_i \partial b_k} + \frac{\partial \theta}{\partial b_i}[f_i(b_i) - 1] - \frac{\partial \theta}{\partial b_k}[f_k(b_k) - 1] = 0$$

où figurent n fonctions arbitraires d'un argument ; les caractéristiques sont les pôles b_i de J.

Si l'on voulait enfin exprimer que I est rationnel en φ, il faudrait, comme nous l'avons dit, faire appel à d'autres représentations explicites que les intégrales définies ; nous y reviendrons ailleurs.

[**7**] Montrons encore, pour terminer, sur un exemple tout à fait simple, quelle serait la difficulté de la détermination des cas où le groupe de rationalité de l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A\varphi\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

est $Z = F(z)$, $\Phi = \varphi$, c'est-à-dire où il existe *une seule* fonction ρ, rationnelle en φ, telle que

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \rho\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

forme avec $X(z) = 0$ un système complet.

[Quand il existe deux fonctions ρ_1, ρ_2 possédant cette propriété, on peut poser $K = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}$, c'est-à-dire qu'un multiplicateur est rationnel en φ].

Dans le cas examiné :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y}(dy - \varphi A dx + \rho d\varphi)$$

et ρ satisfait à la résolvante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + A\varphi\frac{\partial \rho}{\partial y} + A - \rho\varphi\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Peut-on prendre pour ρ un polynôme du premier degré en φ

$$\rho = R + R_1\varphi\,?$$

On trouve immédiatement les conditions que doivent remplir R, R_1, A. En changeant la variable x, on peut écrire $R_1 = A$, et il reste à satisfaire aux relations :

$$A + \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial R}{\partial y} - R\frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

ou à l'équation unique du second ordre :

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0.$$

Les caractéristiques de cette équation sont y et $x - \dfrac{R}{\frac{\partial R}{\partial x}} = -u$; nous allons les choisir comme variables indépendantes.

L'équation elle-même peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial x}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}\right),$$

c'est-à-dire exprime que :

$$(x+u)dx+\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}dy$$

est une différentielle exacte.

Il en est donc encore ainsi de

$$-x\,du+\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}dy=d\sigma,$$

ce qui permet de poser :

$$x=-\frac{\partial\sigma}{\partial u},\qquad \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial x}}=\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$

et donne :

$$R=\frac{\left(u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}.$$

Comme d'autre part

$$dR=\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy$$

donne, avec les nouvelles variables u, y :

$$dR=\frac{-1}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}d\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\frac{\partial R}{\partial y}dy,$$

on a pour σ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}\right)+\frac{\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}}{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}=0,$$

qui se réduit manifestement à :

$$\left(u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial y}=\frac{\partial\sigma}{\partial y}$$

et s'intègre *une fois* sous la forme :

$$u\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)^2=\sigma+f(u)$$

qui comporte une fonction arbitraire. Si l'on désigne par y [ou $g(y)$] *une intégrale de l'équation du premier ordre* (*non spéciale*)

$$d\sigma-\frac{\partial\sigma}{\partial u}du=0,$$

la relation

$$y=y(\sigma,u)$$

définit σ en u et y, et l'on en déduit implicitement, à l'aide de $x=-\frac{\partial\sigma}{\partial u}$, l'expression de R au moyen de x et y.

On voit qu'il a été nécessaire d'*expliciter* une intégrale d'une équation du premier ordre qui n'est pas réductible. Mais la présence de l'arbitraire $f(u)$ permet aussi de former une infinité de cas où la question peut s'achever complètement ; on observe en effet que la fonction $u-\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ vérifie une équation de la forme d'Euler, (A_0), étudiée précédemment.

III. — *Détermination des cas où l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2}=F(x,y)$ *possède une intégrale première rationnelle en* $\frac{dy}{dx}$.

[8] L'équation aux dérivées partielles

$$(a)\qquad X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}F(x,y)=0,\quad \text{où}\quad y'=\frac{dy}{dx},$$

F étant quelconque en x, y, possède, d'après une remarque de Jacobi, un multiplicateur constant que l'on peut prendre égal à l'unité. Si l'on ajoute aux relations

$$X(\varphi)=0,\qquad X(\psi)=0$$

la condition

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = 1$$

on définit les solutions fondamentales φ, ψ de (a) aux transformations près qui satisfont à

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1\,.$$

Cette dernière équation est celle du *groupe de rationalité* de (a) dans le cas général. Les réductions possibles de ce groupe pourraient aisément être indiquées en partant des tableaux donnés par Lie ou M. Cartan. Par exemple s'il existe une équation, *et une seule,*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0$$

où μ est *rationnel* en y', formant avec $X(\varphi) = 0$ un système complet, dans le *domaine de rationalité* [R] qui comprend F et les coefficients de μ, les transformations du groupe de rationalité seront simplement de la forme

$$\Phi = f(\varphi), \qquad \Psi = \frac{1}{f'(\varphi)}\psi + g(\varphi)$$

où f et g sont arbitraires dans le cas général. L'adjonction de φ permettra d'obtenir ψ par deux quadratures. Mais la détermination de φ, fonction des trois variables x, y, y' *attachée* au groupe $\Phi = f(\varphi)$ dans le domaine [R], n'est pas susceptible de réduction.

Le système d'équations aux dérivées partielles qui détermine les coefficients de μ et F ne pourra être intégré *explicitement* que si l'on adopte une *représentation explicite* pour les intégrales de certaines équations linéaires aux dérivées partielles bien déterminées, qui ne peuvent s'exprimer au moyen d'un nombre fini de quadratures. Il n'en est pas de même lorsque φ peut s'obtenir par des quadratures.

[**9**] Nous supposerons ici, pour prendre le cas le plus simple, que φ est *une intégrale* de (a) *rationnelle* en y' :

$$\varphi(y') = \varphi,$$

l'autre intégrale ψ s'obtient alors par la quadrature

$$\psi = \int \frac{dy - y'dx}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}},$$

où y' est défini en x, y, φ par l'équation précédente.

Examinons en détail le cas, qui suffit à préciser la méthode, où φ est un *polynôme* en y' de degré n :

$$\varphi = a_0 y'^n + \frac{n}{1} a_1 y'^{n-1} + \ldots;$$

en écrivant l'identité en y' :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} F = 0$$

on obtient entre les a et F des relations :

$$(\Sigma) \qquad \frac{\partial a_0}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a_0}{\partial x} + n\frac{\partial a_1}{\partial y} = 0, \ldots$$

dont l'ensemble peut se remplacer par une équation aux dérivées partielles d'ordre $(n-1)$ à une inconnue λ et aux variables x, y; les a_i s'exprimant sous forme entière avec λ et ses dérivées. C'est cette équation E_{n-1} que nous allons intégrer.

Les transformations $Y = \alpha y + \beta$, $X = \gamma$ où α, β, γ sont des fonctions de x choisies de manière à conserver la forme de (a) permettent de prendre $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Les autres relations entre les a_i seuls peuvent se remplacer par

$$(S) \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \omega_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = 0$$

où ω_i désigne l'une des racines de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0$, supposées distinctes, et où l'on a : $\varphi_i = \varphi(\omega_i)$. Ces relations (S) expriment que l'équation différentielle $\varphi = \varphi(y')$ a des solutions singulières qui sont données par : $dy - \omega_i dx = 0$, dont les intégrales sont $\varphi_i = \text{const.}$

A un autre point de vue les φ_i sont les *variables caractéristiques* d'Ampère pour E_{n-1} : la solution générale du système (S) dépend de $(n-1)$ fonctions arbitraires d'un argument qui est l'une des variables φ_i.

[**10**] Pour intégrer le système (S), nous partons de l'expression de $d\psi$ que nous écrirons en tenant compte de (S), sous la forme, décomposée en fractions simples :

$$d\psi = A_1 \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \ldots + A_{n-1}\frac{d\varphi_{n-1}}{y' - \omega_{n-1}}$$

où les A_i s'expriment avec les ω_i et les facteurs intégrants $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y}$ des différentielles : $dy - \omega_i dx$.

Posons :

$$\varphi = (y' - \mu_1) \ldots (y' - \mu_n)$$

on aura, pour tout indice j :

$$d\psi_j = A_1 \frac{d\varphi_1}{\mu_j - \omega_1} + \ldots + A_{n-1} \frac{d\varphi_{n-1}}{\mu_j - \omega_{n-1}}$$

et l'on peut déterminer les A_k en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ de manière que les seconds membres soient, quel que soit j, des différentielles exactes. Cela revient à dire que l'on peut prendre :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = B_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$$

et former pour les B_i un système compatible.

Si l'on considère les μ_j comme des coordonnées cartésiennes exprimées en $\Phi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ par les relations :

$$\Phi = \mu_1 + \ldots + \mu_n$$
$$\varphi_i = (\omega_i - \mu_1) \ldots (\omega_i - \mu_n) \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

où les ω sont donnés par :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{1}{\omega - \mu_1} + \ldots + \frac{1}{\omega - \mu_n} = 0,$$

les surfaces

$$\Phi = \text{const.}, \qquad \varphi_i = \text{const.}$$

sont deux à deux orthogonales, et :

$$d\mu_1^2 + \ldots + d\mu_n^2 = H_1^2 d\varphi_1^2 + \ldots + \frac{1}{n} d\Phi^2;$$

les dérivées des μ sont données par :

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \varphi_i} = H_i^2 \varphi_i \cdot \frac{1}{\mu_k - \omega_i}, \qquad \frac{\partial \mu_k}{\partial \Phi} = \frac{1}{n}$$

avec

$$H_i^2 \varphi_i = \frac{-1}{\varphi''(\omega_i)} \quad \text{où} \quad \varphi''(\omega_i) = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}\right]_{y' = \omega_i}$$

Il suffit de faire $\Phi = 0$ pour obtenir un système particulier de déterminations des A_k. En posant : $\mu'_j = \frac{1}{n}\Phi + \Psi_j$ on voit que les μ'_j sont les coordonnées cartésiennes des points d'un système orthogonal à n dimensions qui a *même représentation sphérique* que celui formé par les μ_j. Ce système général peut être obtenu par les méthodes de Darboux (Systèmes orthogonaux et coordonnées curvilignes, Livre II, Ch. I) qui exigent l'intégration d'un système de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du second ordre de la forme de Laplace à une seule fonction inconnue — dont la solution générale dépend de n fonctions d'un argument. En y faisant $\Phi = 0$, on trouve l'expression des A_k.

Cette intervention des systèmes orthogonaux qui établit *a priori* la compatibilité des équations imposées aux A_k n'est pas essentielle à la question. En écrivant les conditions d'intégrabilité des $d\Psi_j$ on trouve aisément qu'il est nécessaire de prendre $A_k = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k}$ où θ satisfait aux équations :

$$(T) \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(\omega_i \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\omega_k \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_k}\right)$$

et l'on peut remarquer que ω_m satisfait à toutes les équations (T) où les indices diffèrent de m. Les fonctions $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ qui satisfont à l'équation

$$\varphi = (\sigma - \mu_1) \ldots (\sigma - \mu_n)$$

où φ est un paramètre sont aussi des solutions de (T); on peut déduire de là l'expression de la solution générale θ sous forme d'*intégrale définie,* analogue à celle donnée par M. Appell pour l'équation d'Euler et de Poisson généralisée.

[**11**] Il reste à assujettir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, x, y$ aux relations exprimées par l'identité en y' :

$$\frac{dy - y'dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}} = A_1 \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \ldots + A_{n-1} \frac{d\varphi_{n-1}}{y' - \omega_{n-1}}$$

qui donne immédiatement :

$$A_1 \omega_1^k d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1} \omega_{n-1}^k d\varphi_{n-1} = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-4)$$

$$(\Omega) \qquad A_1 \omega_1^{n-3} d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1} \omega_{n-1}^{n-3} d\varphi_{n-1} = -dx,$$

$$A_1 \omega_1^{n-2} d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1} \omega_{n-1}^{n-2} d\varphi_{n-1} = dy,$$

pour déterminer les φ au moyen de x et y.

Ce système différentiel (Ω) est complètement intégrable (ce n'est d'ailleurs que le système $d\varphi_i = B_i(dy - \omega_i dx)$ écrit sous une autre forme).

On forme aisément de proche en proche les combinaisons intégrables :

$$\Sigma A_i d\varphi_i = d\theta,$$

$$\Sigma A_i \omega_i d\varphi_i = d\theta_1,$$

$$\Sigma A_i \left(\omega_i^2 + \frac{(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 \right) d\varphi_i = d\theta_2,$$

$$\Sigma A_i \left(\omega_i^3 + (n-1) a_2 \omega_i + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a_3 \right) d\varphi_i = d\theta_3,$$

$$\Sigma A_i \left(\omega_i^4 + \frac{3(n-1)}{2} a_2 \omega_i^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3} a_3 \omega_i + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_4 - \frac{(n-1)^2(n-5)}{8} a_2^2 \right) d\varphi_i = d\theta_4,$$

$$\Sigma A_i \Bigg[\omega_i^5 + 2(n-1) a_2 \omega_i^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a_3 \omega_i^2 + \left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} a_4 - \frac{(n-1)^2(n-6)}{4} a_2^2 \right) \omega_i + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a_5 - \frac{(n-1)^2(n-2)(n-6)}{4 \cdot 3} a_2 a_3 \Bigg] d\varphi_i = d\theta_5,$$

. . . .

où l'on voit apparaître comme coefficients des premiers membres des équations de (Ω) des combinaisons linéaires à coefficients constants de toutes les fonctions d'un même *poids* des coefficients de $\varphi(y')$ — par exemple,

$$a_1^2,\ a_2; \quad a_1^3,\ a_1 a_2,\ a_3; \quad a_1^4,\ a_1 a_3,\ a_2^2,\ a_4; \quad \ldots .$$

Les formules se simplifient ici à cause de $a_1 = 0$.

Les relations qui déterminent $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ au moyen de x et y sont donc :

$$\theta = \text{const.}, \quad \theta_1 = \text{const.}, \ldots, \quad \theta_{n-3} = -x + \text{const.}, \quad \theta_{n-2} = y + \text{const.}$$

Tous les éléments définis d'abord en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sont ainsi connus en x, y.

On observera ici un premier exemple d'une méthode nouvelle d'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables, d'ordre quelconque, qui nous paraît devoir être signalée.

Elle consiste, dans le cas où il existe n familles de caractéristiques auxquelles correspondent des variables φ_i, fonctions déterminées des éléments d'une solution (fonction inconnue et ses dérivées de tous ordres), à transformer le problème posé par l'introduction explicite de ces *variables caractéristiques* d'Ampère regardées comme indépendantes en un problème à $(n+2)$ variables que l'on traitera d'abord; on déterminera ensuite les n relations qui doivent définir les φ_i au moyen de x et y. Nous en indiquerons bientôt d'autres applications.

[**12**] Les indications qui précèdent permettent de traiter de la même manière le cas d'une intégrale φ rationnelle en y'.

Si l'on écrit cette intégrale : $\varphi = \dfrac{P(y')}{Q(y')}$, on peut supposer P et Q de même degré n en y'; les variables x, y jouent alors un rôle spécial, ce sont des variables caractéristiques qui s'ajoutent aux $(2n-2)$ autres provenant des racines de l'équation $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0$.

Dans le cas où P et Q ne sont pas de même degré en y' (cas particulier) les variables x et y ne donnent lieu à aucune difficulté.

On peut encore passer par l'intermédiaire des systèmes orthogonaux de l'espace euclidien à $2n$ dimensions, qui permet de simplifier les changements de variables. Tout ceci fera l'objet d'un travail plus étendu, publié ailleurs.

Il nous reste à signaler ici — comme aussi dans les exemples précédents — que la *réduction* des équations différentielles correspond à l'existence d'un nombre fini, quelconque d'ailleurs, de solutions particulières qui sont des transcendantes *plus simples* que les autres solutions; la première *extension nécessaire du domaine de rationalité* consiste en leur *adjonction*. Ceci confirme une observation générale faite dès le début de nos recherches(1).

---

(1) Cf. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 8 mai 1893 et *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1898, p. 310 et suivantes.