COMPTE RENDU

DU

DEUXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

TENU A PARIS DU 6 AU 12 AOUT 1900.

PROCÈS-VERBAUX ET COMMUNICATIONS

PUBLIÉS PAR

E. DUPORCQ,
Ingénieur des Télégraphes, Secrétaire général du Congrès.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

COMPTE RENDU

DU

DEUXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL

DES MATHÉMATICIENS

TENU A PARIS DU 6 AU 12 AOUT 1900.

PREMIÈRE PARTIE.

DOCUMENTS ET PROCÈS-VERBAUX.

BUREAU DU CONGRÈS.

Président d'honneur : MM. HERMITE.
Président : POINCARÉ.
Vice-Présidents : CZUBER.
GEISER.
GORDAN.
GREENHILL.
LINDELÖF.
LINDEMANN.
MITTAG-LEFFLER.
MOORE.
TIKHOMANDRITZKY.
VOLTERRA.
ZEUTHEN.
Secrétaire général : DUPORCQ.
Secrétaires : BENDIXSON.
CAPELLI.
MINKOWSKI.
PTASZYCKI.
WHITEHEAD.

où a_1, a_2 désignent des constantes, forment dans l'arrangement casparyien les seize coefficients d'un système orthogonal.

II. Les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées des produits

$$\vartheta^2_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\, d^2 \log \vartheta_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$$

forment dans l'arrangement casparyien les seize coefficients d'un système orthogonal.

III. Les premières dérivées des dix fonctions thêta paires et des six fonctions thêta impaires forment, dans l'arrangement casparyien, les seize coefficients d'un système orthogonal. Ce système est le suivant :

$$\begin{array}{cccc}
c_0\,\vartheta'_0(x_1, x_2) & c_{01}\,\vartheta'_{01}(x_1, x_2) & -c_{03}\,\vartheta'_{03}(x_1, x_2) & -c'_{24}\,\vartheta_{24}(x_1, x_2) \\
-c_2\,\vartheta'_2(x_1, x_2) & c_{12}\,\vartheta'_{12}(x_1, x_2) & c_{23}\,\vartheta'_{23}(x_1, x_2) & -c'_{04}\,\vartheta_{04}(x_1, x_2) \\
c_4\,\vartheta'_4(x_1, x_2) & -c_{14}\,\vartheta'_{14}(x_1, x_2) & c_{34}\,\vartheta'_{34}(x_1, x_2) & -c'_{02}\,\vartheta_{02}(x_1, x_2) \\
c'_{13}\,\vartheta_{13}(x_1, x_2) & c'_3\,\vartheta_3(x_1, x_2) & c'_1\,\vartheta_1(x_1, x_2) & c_5\,\vartheta'_5(x_1, x_2).
\end{array}$$

Ce troisième théorème est un cas spécial d'un théorème général qui permet de déduire de chaque système orthogonal de neuf coefficients un système orthogonal de seize coefficients.

SUR LES INTÉGRALES COMPLÈTES

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. JULES DRACH (CLERMONT-FERRAND).

Les équations dont il s'agit sont à une seule fonction inconnue et à deux variables indépendantes.

Les méthodes de Monge, d'Ampère et de M. Darboux épuisent, théoriquement, ce qu'on peut dire de général sur la recherche des solutions dépendant de fonctions arbitraires ou d'une infinité de constantes arbitraires.

Notre but est d'apporter une modeste contribution à l'étude des solutions qui ne dépendent que d'un nombre limité de constantes arbitraires, en particulier des solutions à trois et à cinq constantes. M. J. König, dans un Mémoire bien connu (*Mathematische Annalen*, t. XXIV), a ramené la détermination de ces dernières (*intégrales complètes*) à l'intégration d'une équation *linéaire* du second ordre à sept variables indépendantes et à des intégrations ultérieures de systèmes complets. Nous montrons qu'on peut remplacer l'équation de M. König (qui est déterminée) par une équation du second ordre (*non linéaire*) à sept variables, dont la forme peut varier et qui renferme *cinq* fonctions inconnues; de plus, on peut éviter toute intégration ultérieure. *Tout se ramène donc à trouver un système de cinq fonctions de sept variables liées par une relation du second ordre.* M. König n'a pas indiqué d'application de sa méthode; nous n'en avons pas donné non plus, et c'est uniquement parce qu'on sait fort peu de chose sur le sujet que nous avons jugé utile de publier ces pages.

1. Considérons un système d'équations aux différentielles totales

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_1 = a_1\, dx_4 + b_1\, dx_5, \\ dx_2 = a_2\, dx_4 + b_2\, dx_5, \\ dx_3 = a_3\, dx_4 + b_3\, dx_5, \end{cases}$$

où les a et les b sont des fonctions des cinq variables x, et supposons qu'il admette trois combinaisons intégrables; il faut et il suffit pour cela que les équations linéaires

$$(2)\quad \begin{cases} A(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + a_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + a_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \\[2ex] B(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_5} + b_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + b_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + b_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

forment un système jacobien, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$(3)\qquad A(b_1) = B(a_1), \qquad A(b_2) = B(a_2), \qquad A(b_3) = B(a_3).$$

Admettons maintenant, ce qui arrivera en général, que le couple (a_1, b_1) soit formé de deux fonctions *distinctes* des variables x_2 et x_3, de telle sorte que x_1, x_4, x_5, a_1, b_1 soient cinq fonctions *distinctes* des x_i; il sera possible de transformer le système (1) par l'introduction des nouvelles variables (a_1, b_1) et le système transformé

$$(4)\quad \begin{cases} dx_1 = a_1\, dx_4 \quad + b_1\, dx_5, \\ da_1 = A(a_1)\, dx_4 + B(a_1)\, dx_5, \\ db_1 = A(b_1)\, dx_4 + B(b_1)\, dx_5, \end{cases}$$

où $A(a_1)$, etc., sont exprimés avec les variables x_1, x_4, x_5, a_1, b_1, admettra toujours trois combinaisons intégrables.

Nous remarquerons qu'il suffit de poser

$$z = x_1, \quad x = x_4, \quad y = x_5, \quad p = a_1, \quad q = b_1,$$
$$r = A(a_1), \quad s = A(b_1) = B(a_1), \quad t = B(b_1)$$

pour donner au système (4) la forme connue

$$(5)\quad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

où r, s, t sont trois fonctions de x, y, z, p, q satisfaisant aux conditions

$$(6)\qquad \frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx},$$

qui expriment que le système

$$(7)\quad \begin{cases} X(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + r\dfrac{\partial f}{\partial p} + s\dfrac{\partial f}{\partial q} = 0, \\[2ex] Y(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + s\dfrac{\partial f}{\partial p} + t\dfrac{\partial f}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

est jacobien.

On sait qu'alors, L, M, N désignant trois solutions fonctionnellement distinctes du système (7), correspondant à trois combinaisons intégrables de (5), les équations

$$L(x, y, z, p, q) = l,$$
$$M(x, y, z, p, q) = m,$$
$$N(x, y, z, p, q) = n$$

sont compatibles, quelles que soient les constantes l, m, n, et déterminent une solution, dépendant de trois constantes, du système des équations

$$r = A(a_1) = R(x, y, z, p, q),$$
$$s = B(a_1) = A(b_1) = S(x, y, z, p, q),$$
$$t = B(b_1) = T(x, y, z, p, q)$$

et aussi de toute combinaison de ces dernières.

2. Les remarques précédentes montrent comment on passe d'un système d'équations à cinq variables

$$(5)\quad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

possédant trois combinaisons intégrables, au système le plus général *de même forme* qui possède la même propriété.

Posons, en désignant par λ, μ deux variables auxiliaires

$$(8)\quad \begin{cases} x = X(x', y', z', \lambda, \mu), \\ y = Y(x', y', z', \lambda, \mu), \\ z = Z(x', y', z', \lambda, \mu), \\ p = P(x', y', z', \lambda, \mu), \\ q = Q(x', y', z', \lambda, \mu), \end{cases}$$

les seconds membres représentant cinq fonctions distinctes de leurs arguments, de telle sorte que x', y', z', λ, μ s'expriment aussi avec x, y, z, p, q. Le système transformé du système (5) s'écrira

$$(9)\quad \begin{cases} dZ - P\,dX - Q\,dY = 0, \\ dP - r\,dX - s\,dY = 0, \\ dQ - s\,dX - t\,dY = 0, \end{cases}$$

où l'on a remplacé dans r, s, t les variables x, y, z, p, q par leurs expressions (8); il renferme les différentielles dx', dy', dz', $d\lambda$, $d\mu$ et peut être résolu par rapport aux trois dernières si l'on suppose, ce qui aura lieu en général, le déterminant de leurs coefficients différent de zéro. On obtient ainsi

$$(10)\qquad \begin{cases} dz' = p'\,dx' + q'\,dy', \\ d\lambda = l_1\,dx' + l_2\,dy', \\ d\mu = m_1\,dx' + m_2\,dy'. \end{cases}$$

$p', q', l_1, l_2, m_1, m_2$ ne dépendant que des dérivées premières des fonctions X, Y, Z, P, Q, et l'on déduira immédiatement de là

$$(11)\qquad \begin{cases} dp' = r'\,dx' + s'\,dy', \\ dq' = s'\,dx' + t'\,dy', \end{cases}$$

en posant

$$(12)\qquad \begin{cases} r' = X(p') = \dfrac{\partial p'}{\partial x'} + \dfrac{\partial p'}{\partial z'}\,p' + \dfrac{\partial p'}{\partial \lambda}\,l_1 + \dfrac{\partial p'}{\partial \mu}\,m_1, \\ s' = X(q') = Y(p') = \dfrac{\partial q'}{\partial x'} + \dfrac{\partial q'}{\partial z'}\,p' + \dfrac{\partial q'}{\partial \lambda}\,l_1 + \dfrac{\partial q'}{\partial \mu}\,m_1 = \ldots, \\ t' = Y(q') = \dfrac{\partial q'}{\partial y'} + \dfrac{\partial q'}{\partial z'}\,q' + \dfrac{\partial q'}{\partial \lambda}\,l_2 + \dfrac{\partial q'}{\partial \mu}\,m_2. \end{cases}$$

Dans le cas où les fonctions p' et q' sont des fonctions distinctes des variables λ et μ, ce qui est évidemment le cas général, les équations (11) peuvent remplacer les deux dernières équations du système (10) et l'on retrouve ainsi un système *de même forme* que (5). Les expressions r', s', t' dépendent des dérivées secondes des fonctions X, Y, Z, P, Q et sont connues immédiatement lorsque les variables sont x', y', z', λ, μ; il suffit de remplacer λ et μ par leurs expressions déduites des valeurs de p' et q' pour les obtenir exprimées avec les variables x', y', z', p', q'.

3. Supposons maintenant qu'il s'agisse de *déterminer une solution, dépendant de trois constantes arbitraires, de l'équation quelconque du second ordre*

$$(13)\qquad F(x', y', z', p', q', r', s', t') = 0;$$

partons d'un système de fonctions r, s, t des variables x, y, z, p, q pour lesquelles le système

$$(5)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 \end{cases}$$

admet trois combinaisons intégrables, et faisons le changement de variables indiqué par les formules (8); nous avons vu qu'on peut calculer p' et q', puis r', s', t' de façon que le système transformé garde la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0, \\ dp' - r'\,dx' - s'\,dy' = 0, \\ dq' - s'\,dx' - t'\,dy' = 0. \end{cases}$$

Il suffira donc d'assujettir les éléments $x', y', z', p', q', r', s', t'$ à vérifier la relation

$$(15)\qquad F(x', y', z', p, q', r', s', t') = 0,$$

pour obtenir un système de trois fonctions r' s', t' des variables x', y', z', p', q' pour lequel les équations (14) admettent trois combinaisons intégrables. La détermination de ces combinaisons revient à l'intégration d'un système complet et conduit à une solution de l'équation (13) renfermant trois constantes arbitraires.

Le problème proposé est ainsi ramené à la recherche d'une solution particulière de l'équation (15) dans laquelle p', q', r', s', t' sont des fonctions des cinq variables x', y', z', λ, μ, qui dépendent des dérivées premières et secondes des arbitraires X, Y, Z, P, Q. Cette équation (15) est donc une *équation à cinq variables* x', y', z', λ, μ *renfermant cinq fonctions inconnues* (1).

Remarquons, en outre, que la connaissance d'une solution particulière de l'équation (15) *et celle de la solution dépendant de trois constantes du système* (5) suffisent pour obtenir la solution cherchée de l'équation (13). Il suffira, en effet, de faire dans les équations

$$L(x, y, z, p, q) = l,$$
$$M(x, y, z, p, q) = m,$$
$$N(x, y, z, p, q) = n,$$

qui définissent les trois solutions distinctes de (5), le changement de variables

$$x = X(x', y', z', \lambda, \mu), \quad \ldots, \quad q = Q(x', y', z', \lambda, \mu),$$

et d'éliminer λ et μ entre les trois équations transformées, pour obtenir z' au moyen de x', y', l, m, n. On n'a donc pas besoin d'intégrer chaque

(1) Les expressions de r', s', t' sont d'ailleurs *linéaires* par rapport aux dérivées secondes de chacune des fonctions inconnues.

fois le système (14) ou le système équivalent écrit avec les variables x', y', z', λ, μ.

4. Des remarques analogues s'appliquent aussi à la recherche des *intégrales complètes* des équations du second ordre, qui dépendent de cinq constantes arbitraires.

Considérons une équation du second ordre, supposée résolue par rapport à r,

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t); \tag{16}$$

on sait que pour en obtenir une intégrale complète il faut lui adjoindre deux équations

$$\begin{cases} u(x, y, z, p, q, s, t) = \alpha, \\ v(x, y, z, p, q, s, t) = \beta, \end{cases} \tag{17}$$

telles que le système formé par les trois équations soit complètement intégrable quelles que soient les constantes α et β. Les conditions d'intégrabilité s'obtiennent en écrivant les égalités

$$\frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx}, \tag{18}$$

r, s, t étant définis implicitement par les trois équations considérées; elles sont du premier ordre et bilinéaires par rapport aux dérivées de u et v.

Tout système d'intégrales de ces deux équations (18) pour lequel le déterminant $\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$ n'est pas nul permettra de déterminer s et t de façon que le système

$$\begin{gathered} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 \end{gathered}$$

possède trois combinaisons intégrables; l'intégration introduira trois nouvelles constantes l, m, n et l'on obtiendra ainsi une *intégrale complète*.

La détermination de u et v a été étudiée, en particulier, par M. J. König (*Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 465); si l'on élimine v [en résolvant les deux équations (18) par rapport à $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$, puis annulant le crochet de Jacobi, pour exprimer que le système est complet], on obtient

pour déterminer u *une équation du second ordre à sept variables* x, y, z, p, q, s, t, *linéaire par rapport aux dérivées du second ordre :*

$$A = 0. \tag{19}$$

Bien entendu, le cas où les équations (18) se réduisent algébriquement à une seule est écarté, la méthode d'Ampère étant alors applicable (*cf.* J. König, *loc. cit.*, p. 481, § IV).

Réciproquement, si u satisfait à l'équation (19), les deux équations $r = R$, $u = \alpha$ possèdent en commun une intégrale dépendant de quatre constantes arbitraires; la détermination de cette intégrale exige encore des intégrations : celle du système complet (18), ou du moins la détermination d'une solution, et l'intégration complète du système aux différentielles totales, qui admet alors trois combinaisons intégrables.

Il suffit de se reporter aux résultats obtenus dans le paragraphe précédent pour reconnaître que la connaissance de trois fonctions r, s, t de x, y, z, p, q et de deux variables α et β pour lesquelles le système

$$\begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 \end{cases} \tag{5}$$

possède trois combinaisons intégrables, ramène la détermination d'une solution complète de l'équation

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t) \tag{16}$$

à celle d'une solution particulière de l'équation à sept variables

$$r' = R(x', y', z', p', q', s', t'). \tag{20}$$

Cette dernière ne renfermera d'ailleurs, avec les cinq fonctions inconnues X, Y, Z, P, Q des variables x', y', z', λ, μ, α et β, que leurs dérivées secondes par rapport aux cinq variables x', y', z', λ, μ; les expressions de r', s', t' sont *linéaires* par rapport aux dérivées secondes de chacune des inconnues.

Ajoutons que si l'on connaît, pour le choix des fonctions r, s, t de x, y, z, p, q, α, β d'où l'on est parti, les trois solutions distinctes du système aux différentielles totales

$$\begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases} \tag{5}$$

aucune intégration n'est nécessaire pour trouver l'*intégrale complète* de (16) *quand on connaît une* solution particulière de l'équation (20). Il suffira de faire dans les expressions de z, p, q, au moyen des variables x, y et des constantes α, β, l, m, n, le changement de variables

$$x = X(x', y', z', \lambda, \mu, \alpha, \beta), \quad \ldots, \quad q = Q(x', y', z', \lambda, \mu, \alpha, \beta),$$

et d'éliminer λ, μ *entre* les trois équations obtenues.

Ces remarques sont actuellement sans portée pratique; nous n'avons aucune idée du degré de difficulté que présentent l'intégration de l'équation (19) à sept variables ou celle de l'équation analogue

$$r' = R(x', y', z', p', q', s', t'). \tag{20}$$

Il nous a cependant paru utile de montrer qu'on peut remplacer l'équation (19), qui est entièrement déterminée, par une équation susceptible de prendre des formes très différentes, puisqu'elle contient, outre les fonctions r, s, t de X, Y, Z, P, Q, α, β, assujetties à la seule condition de rendre le système (5) complètement intégrable, quatre fonctions de $x', y', z', \lambda, \mu, \alpha, \beta$, que l'on peut choisir arbitrairement. Nous avons vu de plus que la détermination d'une solution particulière de (20) doit être regardée en fait comme équivalente à celle d'une intégrale complète de l'équation

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t),$$

puisqu'en choisissant convenablement les trois fonctions r, s, t de $x, y, z, p, q, \alpha, \beta$, aucune intégration ne sera plus nécessaire pour obtenir cette intégrale complète.

5. *Nous n'insisterons pas ici sur la signification géométrique* des transformations en x, y, z, p, q que nous venons de considérer, transformations qui changent manifestement des familles de surfaces à trois ou cinq paramètres en familles analogues, et sont *de contact* pour l'ensemble des éléments ainsi définis.

Bornons-nous à faire observer que la remarque fondamentale d'où nous sommes parti, relative à la transformation d'un système jacobien de n équations à $n+q$ inconnues en un système de même forme, est susceptible d'applications variées. Signalons pour l'équation du second ordre

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t)$$

la généralisation qui se présente quand on adjoint à l'équation deux

autres relations :

$$u\left(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = \alpha,$$
$$v\left(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = \beta,$$

où ne figurent que deux dérivées d'ordre n (les autres s'exprimant avec celles-là) de façon à former un système complètement intégrable. M. König (*loc. cit.*) a montré que les conditions d'intégrabilité

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^2\, \partial y^{n-2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}\right), \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)$$

conduisent encore, dans le cas général, à une seule équation du second ordre pour déterminer u, équation à $2n+3$ variables. La détermination d'une solution de cette équation, jointe à des intégrations de systèmes complets, conduit à une *intégrale complète* renfermant $2n+1$ constantes arbitraires. Nous avons, avec la théorie indiquée plus haut, le moyen de remplacer cette équation *déterminée* à $2n+3$ variables par une autre équation à $2n+3$ variables *renfermant* $2n+1$ *fonctions inconnues* et de supprimer les intégrations ultérieures de systèmes complets.

Rappelons, en terminant, que l'étude du cas où les deux conditions d'intégrabilité se réduisent algébriquement à une seule a permis à M. König de retrouver la méthode de M. Darboux; il n'est donc pas nécessairement sans intérêt d'étudier la détermination des solutions d'une équation du second ordre qui ne dépendent que d'un nombre fini de constantes arbitraires.