SUR L'*INTÉGRATION LOGIQUE* DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

PAR JULES DRACH.

Je me propose de donner ici un aperçu rapide des points essentiels de la théorie d'intégration que j'ai développée depuis 1893 pour les équations différentielles ordinaires (ou encore les équations linéaires aux dérivées partielles). Eu égard au caractère particulier de cette théorie, je lui ai donné le nom d'*intégration logique* par opposition aux termes *intégration géométrique* ou *intégration par séries* qui me paraissent devoir caractériser les anciennes méthodes de Lagrange, Cauchy, Jacobi, etc....où l'on ne fait pas intervenir la nature des coefficients ou celle des solutions.

L'*intégration logique* de l'ensemble des équations différentielles ordinaires aboutit à partager cet ensemble en *types irréductibles* et *irréductibles les uns aux autres* et à *caractériser chacun de ces types.* Pour une équation déterminée

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

où la fonction f fait partie d'un domaine de rationalité bien défini, on pourra indiquer une méthode régulière (malheureusement théorique dans les cas généraux) pour reconnaître à quel type elle appartient—c'est-à-dire, au fonds, quelles sont les transcendantes *les plus simples* qui permettent d'exprimer rationnellement les éléments de la solution générale.

D'une manière générale, si l'on considère une équation aux dérivées partielles

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial z} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

dont les coefficients sont des fonctions des $(n+1)$ arguments $x, x_1, \ldots, x_n$ appartenant à un certain domaine de rationalité $[\Delta]$, le système fondamental de solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de l'équation (a) que l'on peut regarder comme *le plus simple* est défini par des relations :

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}, \ldots\right) = \alpha_i(x, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i = 1, \ldots, k)$$

dans lesquelles les premiers membres sont tous les *invariants différentiels rationnels et rationnellement distincts,* d'un certain groupe de transformations Γ des éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$ regardés comme fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non transformées ; les seconds membres sont des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_n$ qui appartiennent au domaine de rationalité $[\Delta]$. Le système précédent est *irréductible,* c'est-à-dire que toute

relation de même nature compatible avec les précédentes (vérifiée ainsi que ces dernières par un système fondamental au moins) en est une conséquence nécessaire ; il est également *primitif,* c'est-à-dire qu'on ne peut abaisser l'ordre des équations du système ou augmenter le nombre de ces équations qui sont d'un ordre donné en passant à un autre système fondamental. Je dis que le groupe Γ est *le groupe de rationalité de l'équation* et que les solutions les plus simples de (a) sont des fonctions de $(n+1)$ arguments $x, x_1, \ldots, x_n$, *attachées* au groupe Γ ; ces fonctions sont en général définies *simultanément* et ne peuvent être séparées.

On peut prendre pour groupe Γ un des types de groupes déterminés *a priori* par S. Lie—mais la théorie actuelle s'établit de façon directe et algébriquement ; elle redonnerait donc ces types s'il était nécessaire.

Sophus Lie avait appliqué lui-même sa théorie des groupes de transformations à l'étude des équations différentielles, mais ses travaux, *entièrement distincts de ceux dont il s'agit ici,* ne s'appliquaient qu'à des équations *particulières* parmi celles que nous étudions et ne donnaient que des résultats incomplets, qui valables dans un cas *idéalement général* ne subsistaient plus nécessairement pour un exemple particulier. La théorie des groupes avait donc donné des conclusions intéressantes pour l'intégration mais ne paraissait pas *essentielle* pour l'étude des équations différentielles. En la retrouvant dans ses traits fondamentaux *à partir de ces équations* j'espère avoir établi qu'elle est une discipline *inséparable de l'étude des transcendantes du Calcul Intégral.*

On remarquera l'analogie profonde entre ces résultats et ceux que l'on doit à Galois pour la *résolution logique* des équations algébriques. C'est en effet l'étude de la théorie algébrique de Galois et de l'extension remarquable, maintenant classique, de cette théorie *aux équations différentielles linéaires,* faite par M. Emile Picard en 1887, qui m'a conduit à rechercher les raisons cachées de la perfection et du caractère définitif de ces théories et les conditions les plus générales sous lesquelles ces qualités peuvent être conservées.

ÉQUATION DU PREMIER ORDRE.

I. *Formes-types et Groupes correspondants.*

1. Considérons une équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

où nous supposons d'abord, *pour fixer les idées,* A rationnel en x et y ; nous définirons son intégrale générale par une relation

$$z(x, y) = \text{const.}$$

où z est une solution particulière quelconque de l'équation aux dérivées partielles

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Cette dernière donne l'expression de toutes les dérivées de z prises une fois au moins par rapport à x, au moyen des dérivées prises seulement par rapport à y et des variables x, y. S'il existe par suite une relation

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

rationnelle par rapport à tous les éléments qu'elle renferme et *compatible avec l'équation* (a) *sans en être une conséquence nécessaire* on pourra supposer qu'il y figure seulement les dérivées $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ... prises par rapport à y (et aussi l'écrire sous forme entière).

Supposons d'abord que, quel que soit le choix de la solution z (autre qu'une constante), il n'existe pas de relation telle que (a'), je dis alors que l'équation (a) est *générale.* Toutes ses solutions particulières sont des transcendantes de *même nature*; elles sont définies aux transformations près du groupe ponctuel général à une variable $Z = F(z)$ où F est arbitraire, par l'équation (a) elle-même : je les appelle *fonctions de deux variables* x, y *attachées au groupe* $Z = F(z)$ (F arbitraire) dans le domaine rationnel.

S'il existe des relations telles que (a'), auquel cas je dis que (a) est *spéciale,* considérons celles qui sont d'*ordre minimum* par rapport aux dérivées de z et parmi celles-là, une quelconque de celles où le degré par rapport à la plus haute dérivée de *z est le plus petit possible.* La relation (a') est alors nécessairement d'ordre au plus égal à *trois* et il est possible de choisir z de façon à lui donner l'une des quatre *formes-types* suivantes :

(α)
$$z = R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

si elle est d'ordre zéro. Il existe pour l'équation (a) une solution rationnelle; on peut la prendre de façon que le polynome

$$P(x, y) - zQ(x, y)$$

ne soit pas décomposable quelle que soit la constante z.

La solution générale de (1) est algébrique.

(β)
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n = K(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

si elle est d'ordre 1; n est un nombre entier positif, supposé le plus petit possible.

La fonction rationnelle $K(x, y)$ doit satisfaire à l'équation *résolvante*

$$X(K) + nK\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

qui ne peut admettre qu'une seule solution rationnelle.

La transcendante z est définie, aux transformations près du groupe linéaire

$$Z = \epsilon z + a \qquad (\epsilon^n = 1);$$

on l'obtient par la quadrature

$$z = \int \sqrt[n]{K}\,(dy - A\,dx).$$

En d'autres termes il existe un multiplicateur de l'équation

$$dy - A\,dx = 0,$$

au sens d'Euler, dont la puissance n est rationnelle en x, y.

(γ) Si la relation (a') est du second ordre, on peut prendre pour forme-type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - J(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

où $J(x, y)$ est rationnel et doit vérifier la *résolvante*

$$X(J) + J\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0.$$

Cette résolvante ne peut avoir qu'une seule solution rationnelle. La transcendante z est définie, aux transformations près du groupe

$$Z = az + b \qquad (a, b \text{ constantes arbitraires}).$$

On l'obtient par les quadratures superposées

$$z = \int e^{\int J\,dy - \left(AJ + \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx}\,(dy - A\,dx).$$

En d'autres termes, pour l'équation $dy - A\,dx = 0$, la dérivée logarithmique d'un multiplicateur d'Euler est rationnelle.

On peut encore définir z par le système suivant :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -AK, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = K,$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\left(AJ + \frac{\partial A}{\partial y}\right)K, \qquad \frac{\partial K}{\partial y} = JK,$$

où l'on reconnait que K est donné à un facteur constant près multiplicatif; z est ensuite donné à une constante additive près.

(δ) Si la relation (a') est du troisième ordre, on prendra pour forme-type

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 - I(x, y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

où la fonction rationnelle $I(x, y)$ doit vérifier l'équation résolvante

$$X(I) + 2I\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0.$$

Cette équation résolvante ne possède qu'une solution rationnelle. La transcendante z est définie aux transformations près du groupe projectif général $Z = \frac{az + b}{cz + d}$, où a, b, c, d sont des constantes, par les équations (a) et (a').

On peut l'obtenir au moyen des opérations *théoriques* suivantes :—

Détermination de J par le système de deux équations de Riccati :

$$X(J) + J\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = I + \tfrac{1}{2}J^2;$$

Détermination de K au moyen de J, comme plus haut;

Détermination de z au moyen de K, comme plus haut.

Ainsi, à deux quadratures près, la détermination de z se ramène à l'intégration d'un système de deux équations de Riccati dans le cas où ce système ne possède pas de solution rationnelle.

Dans les cas (β), (γ), (δ) je dis que la transcendante z est une fonction de x et y *attachée, dans le domaine rationnel, aux groupes respectifs*

$$Z = \epsilon z + a \quad (\epsilon^n = 1), \qquad Z = az + b, \qquad Z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

II. *Groupes de Rationalité. Solutions Principales.*

2. Les formes-types que nous avons adoptées pour la relation (a') ne se conservent pas quand on remplace la solution z par une autre solution u. Si l'on pose, par exemple,

$$z = \phi(u),$$

on obtient dans le cas (δ)

$$\phi'^2 \{\phi, u\} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 + \left[\{u, y\} - I\right] \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \phi'^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

où $\{\phi, u\}$ représente l'invariant bien connu de Cayley

$$\frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2, \quad \phi' = \frac{d\phi}{du}, \ldots$$

et cette relation n'est rationnelle que si la fonction ϕ satisfait à une relation

$$\{\phi, u\} = R(u),$$

où R est rationnel.

Dans ce dernier cas (qui se présente toujours si ϕ est rationnel) la forme de la relation (a') est l'une de celles qui satisfont aux deux conditions imposées plus haut: d'être d'ordre minimum par rapport aux dérivées de u relatives à y et d'être de degré le plus petit par rapport à la dérivée $\frac{\partial^p u}{\partial y^p}$ d'ordre le plus élevé.

On peut l'écrire sous la forme

$$\frac{\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}}{\frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)^2 + R(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = I(x, y),$$

où le premier membre est *l'invariant caractéristique* du groupe de transformations (u, v) défini par

$$\frac{\frac{d^3 u}{dv^3}}{\frac{du}{dv}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 u}{dv^2}}{\frac{du}{dv}}\right)^2 + R(u)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = R(v),$$

quand on étend ce groupe en y regardant u comme fonction de la variable y non transformée.

Toutes les fois où nous choisissons la relation (a') de façon à satisfaire aux deux conditions précitées, elle exprime *que l'invariant caractéristique d'un certain groupe de transformations en* (u, v) a une valeur rationnelle en x, y ; *cette valeur est, suivant les cas*, K, J ou I.

Je dis que le *groupe de rationalité de la solution* u est le groupe en (u, v), *à équation de définition rationnelle,* dont l'invariant caractéristique est connu rationnellement en x, y.

Parmi ces groupes de rationalité, nous avons choisi plus haut les *groupes-types* que l'on peut ici caractériser en disant que leur invariant caractéristique ne dépend pas de u mais seulement des dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots$. Ces groupes de rationalité *types* correspondent à la solution z que l'on peut regarder comme *la plus simple.* Bien entendu, cette solution la plus simple n'est définie qu'aux transformations près qui conservent les formes-types des relations (a').

3. Il est essentiel de montrer quels sont les groupes de rationalité qui se présentent pour la *solution principale, au point* $x = x_0$, de l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire pour la solution qui pour $x = x_0$ prend la valeur y.

(α) Dans le cas où z est rationnel en x, y cette solution principale u est définie par $R(x, y) = R(x_0, u)$, c'est-à-dire est algébrique.

(β) Si z est défini aux transformations près $Z = \epsilon z + a$, $(\epsilon^n = 1)$ on a, pour déterminer la solution principale, les équations

$$X(u) = 0, \qquad K(x_0, u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n = K(x, y);$$

elle est donc définie aux transformations près du groupe (u, v) où

$$K(x_0, u)\left(\frac{du}{dv}\right)^n = K(x_0, v),$$

transformations qui sont en général transcendantes.

(γ) Si z est défini aux transformations près $Z = az + b$, la solution principale u est déterminée par les équations

$$X(u) = 0, \qquad \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}} + J(x_0, u)\frac{\partial u}{\partial y} = J(x, y)$$

aux transformations près (u, v), qui satisfont à

$$\frac{\frac{d^2 u}{dv^2}}{\frac{du}{dv}} + J(x_0, u)\frac{du}{dv} = J(x_0, v).$$

(δ) Enfin lorsque z n'est défini qu'aux transformations près du groupe projectif $Z = \frac{az+b}{cz+d}$, la solution principale u de (1) est déterminée par les équations

$$X(u) = 0, \qquad \frac{\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}}{\frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)^2 + I(x_0, u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = I(x, y)$$

aux transformations près (u, v) du groupe qui a pour *équation de définition*

$$\frac{\frac{d^3u}{dv^3}}{\frac{du}{dv}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2u}{dv^2}}{\frac{du}{dv}}\right)^2+I(x_0, u)\left(\frac{du}{dv}\right)^2=I(x_0, v).$$

L'importance de la considération des solutions principales $u(x, y, x_0)$ résulte de ce que la solution de l'équation (1) $\frac{dy}{dz}=A(x, y)$ qui prend la valeur y_0 pour $x=x_0$ est donnée par la relation implicite

$$u(x, y, x_0)=y_0$$

qui, d'après une remarque de Jacobi, s'écrit aussi sous forme résolue

$$y=u(x_0, y_0, x).$$

La solution y de l'équation (1) qui prend en $x=x_0$ la valeur y_0 est donc une fonction des trois arguments x_0, y_0, x dont la nature peut être mise en évidence, dans tous les cas de réduction.

Observons que le groupe de rationalité de u dépend des valeurs des invariants rationnels K, J, I, ce qui complique singulièrement l'étude des propriétés de y alors que celles de z sont si simples.

4. Il convient de remarquer ici que lorsque le groupe de rationalité d'une solution, et par suite *le groupe de rationalité-type* de l'équation

$$\frac{dy}{dx}=A(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

est déterminé, il y a lieu d'étudier les réductions qui peuvent se produire dans la difficulté de la recherche de z à partir des invariants du groupe-type. Ces réductions correspondent à la possibilité d'obtenir z à l'aide de fonctions d'un seul argument attachées au groupe-type ou à l'un de ses sous-groupes. Par exemple, si K ou $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^n$ est rationnel, il peut se faire que z puisse s'obtenir par des quadratures de différentielles algébriques portant sur des fonctions d'un argument $\omega(x, y)$, rationnel en x et y.

De même si $J(x, y)$ est rationnel, on voit que, dans tous les cas, l'introduction de la transcendante e^u, fonction d'une variable u attachée au groupe $u'=au$, permet d'obtenir K par une quadrature

$$K=e^\omega, \qquad \omega=\int J\,dy-\left(AJ+\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx,$$

et il y aura lieu de chercher si cette dernière quadrature ne peut pas s'exécuter par l'introduction de logarithmes d'arguments rationnels en x, y.

De même encore, dans le cas (δ), si par exemple I dépend de y seul, on voit que J qui vérifie $\frac{\partial J}{\partial y}=I+\frac{1}{2}J^2$ s'obtiendra en y par l'intégration d'une seule équation

de Riccati rationnelle en y et sa détermination complète se ramènera à l'intégration d'une autre équation de Riccati en x seul.

Mais à un premier examen, on peut regarder ces réductions, qui ne modifient pas le groupe de rationalité, comme secondaires.

III. *Extensions du domaine de Rationalité. Adjonction de Transcendantes.*

5. Jusqu'à présent nous avons supposé, dans l'équation

$$\frac{dy}{dx}=A(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

$A(x, y)$ rationnel. Rien d'essentiel n'est changé à la théorie précédente lorsqu'on *étend* le domaine de rationalité par l'*adjonction* de fonctions algébriques en x, y ou de *transcendantes bien définies.*

Par exemple si la relation algébrique entière

$$f(x, y, \zeta)=0$$

est irréductible et de degré n en ζ, toute fonction rationnelle en x, y, ζ se ramène *d'une seule manière* à la forme

$$\frac{p_0(x, y)+p_1(x, y)\,\zeta+\ldots+p_{n-1}(x, y)\,\zeta^{n-1}}{q(x, y)},$$

où les p et q sont des polynomes en x, y sans diviseur commun. On peut répéter tout ce qui a été dit plus haut, dans le domaine $[\zeta]$, pour une équation

$$\frac{dy}{dx}=A(x, y, \zeta),$$

où A est rationnel en x, y, ζ. Les $n\left(\text{ou } \frac{n}{p}\right)$ équations qu'on obtient en remplaçant ζ par ses n valeurs dans $A(x, y, \zeta)$, ont le même groupe de rationalité.

La théorie s'applique donc à une équation du premier ordre, *de degré quelconque* $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$, que nous écrirons $\frac{dy}{dx}=\zeta$ avec $F(x, y, \zeta)=0$.

On peut aussi adjoindre au domaine de rationalité des *transcendantes bien définies*; voici ce que nous entendons par là.

Considérons un système différentiel formé d'équations

$$\phi_i\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right)=0,$$
$$(i=1, \ldots, h),$$

dont les premiers membres sont des polynomes entiers en x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., où u est une fonction de *deux variables* x, y ; on sait par des procédés réguliers qui ne comportent que des opérations rationnelles, reconnaître si ces équations sont *compatibles* c'est-à-dire possèdent au moins une solution $u(x, y)$ dépendant des deux arguments x et y. On sait, dans ce cas, déduire des équations données un système différentiel (Σ) qui définit, dans un domaine algébrique convenable $[\Delta]$, certaines des dérivées de u, que l'on appelle *principales*, au moyen des autres qui sont dites *paramétriques*—et dont sous certaines conditions de convergence, les valeurs pour $x = x_0$, $y = y_0$ peuvent être choisies arbitrairement.

Toute fonction rationnelle des dérivées de u et de x, y, s'exprime *sous une forme unique*, au moyen des dérivées paramétriques et des variables, dans le domaine algébrique $[\Delta]$.

Cela étant rappelé, deux cas peuvent se présenter. Il peut se faire qu'on ne puisse ajouter aux équations de (Σ) aucune équation *nouvelle*, rationnelle par rapport à tous ses éléments [c'est-à-dire aucune relation entière entre les dérivées paramétriques dont les coefficients appartiennent au domaine $[\Delta]$] sans cesser d'avoir un système compatible (le nouveau système n'admettrait plus comme solutions que des constantes, ou des fonctions de x seul ou de y seul). Je dis alors que le système (Σ) envisagé comme définissant des fonctions u de deux variables x, y est *irréductible*. La transcendante u est *bien définie*: le calcul des fonctions rationnelles de x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ... (mod. Σ) peut se faire sans ambiguïté.

Si l'on peut ajouter aux équations (Σ) une ou plusieurs équations nouvelles (σ) sans cesser d'avoir un système compatible, les diverses solutions $u(x, y)$ de (Σ) ne se comportent pas de même dans le domaine $[\Delta]$. Je dis que u n'est pas bien défini par (Σ), qui est *réductible*.

Dans ce cas on peut toujours supposer qu'on a ajouté à (Σ) assez d'équations nouvelles (σ) pour former un système $(\Sigma + \sigma)$ irréductible; aux divers systèmes (σ) possibles correspondront autant de types de transcendantes $u(x, y)$ bien définies vérifiant (Σ). Enfin si l'on veut raisonner sur la transcendante $u(x, y)$ qui vérifie les équations (Σ) sans satisfaire à aucune des équations (σ) il faudra compléter les équations (Σ) en ajoutant des *inégalités* qui expriment qu'aucun des premiers membres des équations (σ) n'est nul. Il sera en pratique inutile d'écrire ces inégalités, étant bien entendu que dans le calcul des fonctions rationnelles de u et de ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., les dérivées paramétriques se comporteront comme des indéterminées.

Ce qui vient d'être dit pour les fonctions $u(x, y)$ de deux variables s'applique évidemment aussi aux fonctions d'une seule variable.

L'exemple le plus simple d'une transcendante bien définie est la fonction exponentielle e^x; elle est définie par la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \text{ avec } (u \neq 0)$$

et n'est pas séparable de cu où c est une constante quelconque. Adjoindre par conséquent la transcendante e^x au domaine de rationalité c'est écrire le système irréductible

$$(\Sigma) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u \quad (u \neq 0)$$

et en tenir compte dans le calcul (addition, multiplication, division, *dérivation*) des fonctions rationnelles de x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ...

Si l'on considère une équation

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y, u)$$

dont le second membre est rationnel en x, y, u, on peut donc répéter dans le domaine $[u]$ tout ce qui a été dit pour un domaine rationnel *absolu*.

6. A un certain point de vue les fonctions *arbitraires* d'un ou de plusieurs arguments déterminés se comportent comme des transcendantes bien définies. Par exemple pour l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)\,y + a_2(x)\,y^2 \quad \text{.........................(1)}$$

la résolvante en I possède, lorsque a_0, a_1, a_2 sont arbitraires en x, la seule solution rationnelle $I = 0$. Si l'on cherche à quelle condition la résolvante en J possède une solution rationnelle on trouve que pour cette solution $J = \frac{-2}{y - \xi}$ où $\xi(x)$ est une solution de l'équation de Riccati. Ce n'est donc que dans le domaine $[\xi]$ obtenu par l'adjonction d'une solution particulière de l'équation de Riccati que cette équation se réduit.

De même, si dans une équation (1) $\frac{dy}{dx} = A(x, y)$ dont le groupe de rationalité est l'un des groupes-types (α), (β), (γ), (δ) on remplace x et y par deux fonctions arbitraires $x(u, v)$, $y(u, v)$ des arguments u et v, pour lesquelles $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, on obtient une nouvelle équation

$$\frac{dv}{du} = m(u, v) = \frac{A(x, y)\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v} - A(x, y)\frac{\partial x}{\partial v}} \quad \text{....................(1')}$$

qui dans le domaine formé par l'adjonction des fonctions arbitraires $x(u, v)$, $y(u, v)$ (ce qui entraîne toujours l'adjonction de leurs dérivées) a le même groupe de rationalité. Le calcul des expressions explicites rationnelles de $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} : \frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\frac{\partial^3 z}{\partial v^3}}{\frac{\partial z}{\partial v}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\frac{\partial z}{\partial v}}\right)^2 = \{z, v\}$$

au moyen des valeurs de

$$K = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad J = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, \quad I = \{z, y\}$$

se fait sans difficulté.

On peut naturellement supposer que x et y sont des expressions rationnelles en u, v, $\phi_1(u)$, $\phi_2(u)$, ..., $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$, ..., $\chi(u, v)$, ..., où les fonctions ϕ_1, ϕ_2, ..., ψ_1, ψ_2, ..., $\chi(u, v)$ sont arbitraires et former ainsi des équations du premier ordre dépendant de fonctions arbitraires dont le groupe de rationalité est déterminé, mais rien ne serait plus facile que de revenir d'une telle équation à l'équation (1) $\frac{dy}{dx} = A(x, y)$ qui a servi à la construire.

Il est plus intéressant de chercher à exprimer rationnellement, dans un domaine algébrique $[\Delta]$, A et K, ou A et J, ou A et I au moyen de x, y, et d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires d'une ou de deux variables ainsi que de leurs dérivées jusqu'à un ordre fixé, de manière à satisfaire aux équations résolvantes :

$$X(K) + nK\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad X(J) + J\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0, \quad X(I) + 2I\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0.$$

On parvient alors à des types généraux d'équations dont le groupe de rationalité est connu et qui ne se ramènent pas à des équations déterminées par un changement explicite des variables.

Toutes les fois où l'on remplace dans l'une de ces équations les arbitraires qui y figurent par des transcendantes *bien définies* on pourra chercher à réduire le groupe de rationalité—et la réduction obtenue sera définitive.

On se trouve ainsi amené à des problèmes " de Diophante " *que l'on peut résoudre méthodiquement,* mais sur lesquels je n'insisterai pas ici. J'ajoute qu'on peut se poser et résoudre des problèmes analogues dans le domaine obtenu par l'adjonction aux variables x, y, d'une ou de plusieurs transcendantes, u, *bien définies* en x, y.

Comme exemple d'une équation renfermant des éléments arbitraires, dont le groupe de rationalité est le groupe projectif général (δ) je donnerai l'équation

$$\begin{vmatrix} y' & 1 & y & y^2 & y^3 \\ \phi' & 1 & \phi & \phi^2 & \phi^3 \\ \psi' & 1 & \psi & \psi^2 & \psi^3 \\ 0 & 0 & 4 & \phi+\psi & \phi^2+\psi^2-4\phi\psi \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3(\phi+\psi) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

pour laquelle dans le domaine $[\phi, \psi]$ formé par deux de ses solutions particulières, la résolvante en I possède la solution rationnelle

$$I = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(y-\phi)(y-\psi)},$$

unique lorsque ϕ et ψ demeurent arbitraires.

IV. *Détermination du Groupe de Rationalité* (Groupe-type). *Intégration algébrique de l'Équation du Premier Ordre.*

7. Pour déterminer le groupe de rationalité (type) d'une équation

$$\frac{dy}{dx} = A(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

où A appartient à un certain domaine de rationalité $[\Delta]$, il est nécessaire de savoir décider, *par un nombre fixé à l'avance de calculs élémentaires,* si l'une des équations résolvantes

$$X(z) = 0, \quad X(K) + nK\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad X(J) + J\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0, \quad X(I) + 2I\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^3 A}{\partial y^3} = 0$$

possède dans le domaine $[\Delta]$ une solution rationnelle. C'est là un problème qui est loin d'être résolu.

On peut commencer les essais en cherchant si z peut être rationnel, puis si K peut être rationnel, etc.... on est alors certain que l'équation résolvante que l'on étudie (sauf l'équation en z bien entendu) ne peut avoir qu'une seule solution rationnelle. Au contraire si l'on aborde d'emblée l'étude de la résolvante en I et si l'on trouve une solution rationnelle, il peut y en avoir d'autres lorsque l'équation en J possède elle-même une solution rationnelle. On aura donc à étudier, après avoir trouvé I, les deux équations de Riccati qui déterminent J pour décider si elles possèdent ou non une solution J rationnelle ; ce n'est que dans le dernier cas que le groupe de rationalité est le groupe projectif général.

Supposons *pour fixer les idées* $A(x, y)$ rationnel, écrivons l'équation (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$ où α, β sont deux polynomes en x, y sans diviseur commun.

Dans l'hypothèse générale où $\frac{\partial \beta}{\partial y} \neq 0$ et où β est dépourvu de facteurs multiples on montre aisément que si I est rationnel :

$$I = \frac{\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}}{\beta} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial \beta}{\partial y}}{\beta}\right)^2 + \frac{S}{\beta R},$$

et les polynomes S, R sans diviseur commun doivent satisfaire aux relations, où T désigne un polynome auxiliaire :

$$\alpha\frac{\partial R}{\partial y} + \beta\frac{\partial R}{\partial x} = \gamma R, \quad \alpha S + \beta T = R\frac{\partial \beta}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right),$$

$$\alpha\frac{\partial S}{\partial y} + \beta\frac{\partial S}{\partial x} = S\left(\gamma + \frac{\partial \beta}{\partial x} - 2\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) - 3T\frac{\partial \beta}{\partial y}$$
$$+ R\left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + 3\frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \beta\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\right].$$

Si le groupe de rationalité est le groupe projectif général, il n'existe qu'un seul système de polynomes, R, S, T, γ satisfaisant à ces conditions.

On voit que R égalé à zéro définit des solutions particulières algébriques de l'équation (1) et même *toutes les solutions particulières algébriques.* Le polynome R étant connu, la détermination de S et T s'ensuit.

Des conclusions analogues peuvent être énoncées lorsque le groupe de rationalité est le groupe linéaire. L'invariant J, s'il est rationnel s'écrit

$$J = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial y}}{\beta} - \frac{H}{R},$$

et l'on doit avoir $\quad \alpha\frac{\partial R}{\partial y} + \beta\frac{\partial R}{\partial x} = \gamma R.$

Avec
$$\gamma K = \frac{\partial R}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right),$$
$$\gamma H = \frac{\partial R}{\partial y}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \beta\left(\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\right),$$
où le polynome auxiliaire K satisfait à la condition
$$\alpha H + \beta K = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right),$$
qui est d'ailleurs une conséquence des précédentes.

Ces relations expriment simplement l'intégrabilité de l'expression
$$z = \int (\beta\, dy - \alpha\, dx)\, e^{-\int \frac{H\,dy + K\,dx}{R}}$$
et l'on reconnait comme plus haut, que R égalé à zéro définit toutes les solutions particulières algébriques de (1).

Enfin si l'équation possède un multiplicateur dont la puissance n soit rationnelle, z est donné par la quadrature
$$z = \int \sqrt[n]{\frac{P}{Q}}\,(\beta\, dy - \alpha\, dx),$$
où les polynomes P, Q doivent satisfaire aux relations
$$\alpha \frac{\partial Q}{\partial y} + \beta \frac{\partial Q}{\partial x} = LQ,$$
$$\alpha \frac{\partial P}{\partial y} + \beta \frac{\partial P}{\partial x} = \left[L - n\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\right] P,$$
qui expriment que $P=0$ et $Q=0$ définissent des solutions particulières algébriques, convenablement associées, de (1); on voit d'ailleurs que toutes les solutions particulières algébriques doivent annuler P ou Q.

Ainsi la difficulté principale est, dans tous les cas, *la détermination de toutes les solutions particulières algébriques de* (1).

La remarque suivante permet quelquefois de les obtenir. Supposons que l'équation $\frac{dy}{dx} = A(x, y)$, à étudier, dépende de certains paramètres $\lambda, \mu, \ldots$, et que pour un système de valeurs $\lambda_0; \mu_0, \ldots$ de ces paramètres on sache déterminer son groupe de rationalité Γ; il est clair que le groupe de rationalité G qui correspond au cas général aura Γ comme sous-groupe. En particulier les solutions algébriques du cas général devront se réduire pour $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$, ... à des fonctions algébriques connues.

8. On n'a étudié jusqu'à présent que le cas où l'équation
$$X(z) = \beta \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
possède une solution z rationnelle, c'est-à-dire où l'équation (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$ s'intègre

algébriquement. Dans un Mémoire célèbre (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1878) Mr Darboux a montré que la connaissance d'un certain nombre de polynomes irréductibles $\phi(x, y)$ satisfaisant à des identités $X(\phi) = M\phi$, c'est-à-dire d'un certain nombre de solutions particulières algébriques de (1) permet de construire la solution générale de (1) ou au moins un multiplicateur. Plus récemment, MM. Poincaré, Painlevé et Autonne, dans des mémoires bien connus, ont cherché à déduire de l'étude des points où $A(x, y)$ est indéterminé (points singuliers) la limitation du degré de l'intégrale algébrique irréductible de (1) en faisant intervenir la forme analytique des intégrales au voisinage des points singuliers.

Je me bornerai à indiquer ici quelques résultats auxquels on parvient par une voie tout élémentaire.

Si l'équation (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$ où α et β sont des polynomes en x, y de degré m s'intègre algébriquement, son intégrale générale peut être définie par une relation
$$P(x, y) + zQ(x, y) = 0,$$
où P, Q sont des polynomes d'un certain degré p et où on peut supposer, d'après Poincaré, que $P + zQ$ n'est pas décomposable pour toute valeur de z. On en déduit aisément les relations
$$Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x} = L\alpha, \qquad X(P) = MP,$$
$$Q\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial Q}{\partial y} = -L\beta, \qquad X(Q) = MQ,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} = LM, \qquad X(L) = \left(2M - \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) L,$$
d'où l'on peut conclure que L est un polynome de degré $2p-(m+1)$ divisible par ϕ^{a-1} si l'on a pour une valeur convenable ζ de $z: P + \zeta Q = \phi^a \psi$. Ce polynome L dont l'introduction est due à M. Darboux (*loc. cit.*) qui en a également reconnu la signification profonde, ne renferme d'ailleurs pas d'autres facteurs que ceux qui peuvent être multiples dans $P + zQ$ pour des valeurs convenables de z.

Supposons d'abord qu'il n'existe pour z que *deux valeurs exceptionnelles* pour lesquelles $P + zQ$ possède un diviseur multiple; on peut admettre qu'elles sont $z=0$ et $z=\infty$, c'est-à-dire que
$$P = \phi_1^{a_1}\phi_2^{a_2}\ldots\phi_h^{a_h},$$
$$Q = \psi_1^{b_1}\psi_2^{b_2}\ldots\psi_k^{b_k}$$
où les a et les b sont entiers. On a dans ce cas
$$\Omega = \frac{PQ}{L} = \phi_1\phi_2\ldots\phi_h\psi_1\psi_2\ldots\psi_k$$
et le degré de Ω est égal à $(m+1)$: le polynome Ω de degré $(m+1)$ satisfait en outre à l'équation
$$X(\Omega) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\Omega$$
qui exprime que $\frac{1}{\Omega}$ est un multiplicateur pour $\beta dy - \alpha dx$.

On sait donc trouver Ω dont le degré est connu et sa décomposition en facteurs indécomposables donne les ϕ et les ψ. Formons les polynomes S_i et T_j de degré $(m-1)$ définis par les identités

$$X(\phi_i) = S_i\phi_i, \qquad X(\psi_j) = T_j\psi_j;$$

on aura immédiatement

$$a_1S_1 + \ldots + a_hS_h = M,$$
$$b_1T_1 + \ldots + b_kT_k = M,$$

d'où l'on conclut l'existence d'une relation linéaire à coefficients entiers, positifs ou négatifs, *sans diviseur commun*, entre les S et les T:

$$a_1S_1 + \ldots + a_hS_h - b_1T_1 - \ldots - b_kT_k = 0.$$

Cette relation est unique et sa formation effective sépare les T, dont le coefficient est un entier négatif, des S dont le coefficient est positif; elle donne par suite les groupements qui constituent P et Q.

Ainsi l'intégrale $P + zQ = 0$ a pu être formée, mais le *degré des polynomes P et Q n'est connu qu'après la construction effective de ces polynomes.* Le principal objet de Poincaré paraît, au contraire, avoir été de limiter d'avance ce degré.

On aurait pu tout aussi bien partir de l'identité

$$\frac{1}{\Omega}(\beta dy - \alpha dx) = a_1\frac{d\phi_1}{\phi_1} + \ldots + a_h\frac{d\phi_h}{\phi_h} - b_1\frac{d\psi_1}{\psi_1} - \ldots - b_k\frac{d\psi_k}{\psi_k}$$

qui détermine sans ambiguïté les entiers a et b.

9. L'intérêt de la solution précédente, applicable quelle que soit la forme des polynomes α et β et la nature des points communs aux deux courbes $\alpha = 0$, $\beta = 0$, s'augmente si l'on observe que la même méthode peut réussir *alors qu'il existe trois ou quatre valeurs exceptionnelles de z.*

Admettons qu'il existe trois valeurs remarquables de z donnant lieu à des identités

$$P + z_1Q = A = \phi^a\phi_1^{a_1}\ldots\phi',$$
$$P + z_2Q = B = \psi^b\psi_1^{b_1}\ldots\psi',$$
$$P + z_3Q = C = \chi^c\chi_1^{c_1}\ldots\chi',$$

où l'on a mis en évidence les exposants a, b, c, les plus élevés des facteurs indécomposables multiples du premier membre. Peut-on former une expression $\Omega = \frac{A^\xi B^\eta C^\zeta}{L^\lambda}$ où ξ, η, ζ, λ sont des entiers, qu'on peut supposer sans diviseur commun, qui se réduise à un polynome *de degré indépendant* de p (degré inconnu, du polynome $P + zQ$) et par conséquent connu?

Il faudra d'abord choisir ξ, η, ζ de façon que

$$\xi + \eta + \zeta = 2\lambda$$

puis il suffira que l'on ait

$$a\xi \geqslant (a-1)\lambda, \qquad b\eta \geqslant (b-1)\lambda, \qquad c\zeta \geqslant (c-1)\lambda.$$

On en déduit aisément

$$\frac{2\xi}{\xi+\eta+\zeta} \geqslant \frac{a-1}{a}, \qquad \frac{2\eta}{\xi+\eta+\zeta} \geqslant \frac{b-1}{b}, \qquad \frac{2\zeta}{\xi+\eta+\zeta} \geqslant \frac{c-1}{c},$$

d'où l'on conclut que a, b, c devront satisfaire à l'inégalité

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 1$$

dont les solutions sont respectivement

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 2, 3, \ldots, n, \ldots.$$
$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 3, 4, 5, 6.$$
$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 4.$$
$$a = 3, \quad b = 3, \quad c = 3.$$

Dans tous ces cas une *puissance fractionnaire convenable de Ω donne un multiplicateur de la différentielle $\beta dy - \alpha dx$; bien plus, on connait l'expression en A/B de l'intégrale correspondante.* On sait donc former par un nombre limité de calculs, les polynomes A et B.

Voici le résultat le plus intéressant: si l'on suppose $a = 2$, $b = 2$, $c = n$ on peut, *sans connaître la valeur de n*, former le polynome $\Omega = \frac{ABC^2}{L^2}$, de degré $2(m+1)$; l'expression $\frac{1}{\sqrt{\Omega}}$ est un multiplicateur de la différentielle $\beta dy - \alpha dx$. On a d'ailleurs:

$$\frac{\beta dy - \alpha dx}{\sqrt{\Omega}} = \frac{-d\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{A}{B} + \rho\right)\sqrt{\frac{A}{B}}}, \quad \text{si} \quad C = A + \rho B,$$

ce qui permettra d'obtenir A et B.

Mais sauf les cas extrêmes, où $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, on a plusieurs systèmes de valeurs possibles pour ξ, η, ζ, donc au moins deux multiplicateurs, c'est-à-dire l'intégrale algébrique elle-même.

Lorsqu'il existe quatre valeurs exceptionnelles de z pour lesquelles $P + zQ$ renferme un facteur multiple, la méthode précédente ne s'applique plus *que si les facteurs multiples sont doubles.* Si l'on écrit pour les quatre valeurs exceptionnelles

$$P = A = \phi^2\phi', \qquad Q = B = \psi^2\psi',$$
$$P + \lambda Q = C = \chi^2\chi', \qquad P + \mu Q = D = \theta^2\theta',$$

le quotient $\Omega = \frac{ABCD}{L^2}$ est un polynome de degré $2(m+1)$ et $\frac{1}{\sqrt{\Omega}}$ est un multiplicateur de $\beta dy - \alpha dx$. On a d'ailleurs

$$\frac{\beta dy - \alpha dx}{\sqrt{\Omega}} = -\frac{d\left(\frac{A}{B}\right)}{\sqrt{\frac{A}{B}\left(\frac{A}{B} + \lambda\right)\left(\frac{A}{B} + \mu\right)}},$$

ce qui permettra d'obtenir A et B.

V. *Comment on tire parti de la connaissance d'une relation rationnelle vérifiée par une solution de l'équation* $\dfrac{\partial z}{\partial x}+A\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

10. Jusqu'à présent, nous nous sommes proposé de définir et d'obtenir la solution la plus simple de l'équation $X(z)=\dfrac{\partial z}{\partial x}+A\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, celle qui est attachée *au groupe de rationalité-type*. Mais il y a lieu d'indiquer une méthode régulière qui permette d'utiliser au mieux la connaissance d'une solution quelconque de l'équation précédente, c'est-à-dire en fait, *d'une relation rationnelle quelconque* entre les éléments

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \dots$$

compatible avec l'équation (a).

Soit
$$P\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \dots\right)=0,$$

cette relation supposée d'ordre p et mise sous forme entière; la relation

$$X(P)=P_1=0$$

est également une relation entière *du même ordre*, vérifiée par la même solution z. Si cette relation n'est pas identique à la précédente, on en peut conclure par élimination de la dérivée d'ordre le plus élevé, une relation entière *d'ordre inférieur* $Q\left(x,\ y,\ z,\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dots\right)=0$ compatible avec (a); on raisonnera sur celle-ci comme sur la première et il est clair qu'on trouvera ainsi une relation entière

$$S=0$$

telle que l'on ait identiquement $X(S)=MS$ (où M ne dépend que de x et y) et dont toutes les autres sont des conséquences.

Regardons maintenant dans S, z comme fonction d'un argument u que nous ne précisons pas: on pourra mettre S sous la forme

$$S=\sum_{i=1}^{h} l_i\left(z,\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \dots\right)\xi_i\left(x,\ y,\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \dots\right)$$

où le nombre h est le *plus petit possible*, ce qui exige que les ξ_i ne soient liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants et qu'il en soit de même pour les l_i $\left(\text{qui sont des polynomes en } z,\ \dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2},\ \dots\right)$.

On conclut alors de l'identité $\qquad X(S)=MS$

les h identités $\qquad X(\xi_i)=M\xi_i \quad (i=1,\ \dots,\ h)$.

Ces identités expriment simplement que les équations

$$\frac{\xi_i\left(x,\ y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dots\right)}{\xi_1\left(x,\ y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dots\right)}=\alpha_i(u) \quad (i=1,\ \dots,\ h-1)$$

sont compatibles avec la relation $X(u)=0$, lorsque les fonctions $\alpha_i(u)$, en général transcendantes, sont choisies de manière que ces équations soient compatibles quand on y regarde x comme un paramètre et y comme la seule variable. Si l'on détermine par conséquent ces fonctions $\alpha_i(u)$ de manière que le système précédent possède la solution u qui pour $x=x_0$ se réduit à la fonction de y définie par $y=\phi(u)$, c'est-à-dire si l'on pose

$$\alpha_i(u)=\frac{\xi_i\left(x_0,\ \phi(u),\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right),\ \dots\right)}{\xi_1\left(x_0,\ \phi(u),\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right),\ \dots\right)}$$

en calculant $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, … par les formules

$$1=\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad 0=\phi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\phi'(u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ \dots$$

on a des équations *rationnelles* lorsque $\phi(u)$ est rationnel.

Le système rationnel ainsi obtenu *définit, dans tous les cas, u aux transformations près d'un groupe.* On peut donc en déduire par un procédé régulier, pour une solution convenable z, l'expression rationnelle en x, y, de l'un des invariants que nous avons désigné par K, J, I (si l'on n'en déduit pas z lui-même).

Ainsi, dans tous les cas, la connaissance d'une relation rationnelle entre $x,\ y,\ z,\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dots$ compatible avec l'équation (a) entraîne par un calcul régulier, la connaissance de l'invariant rationnel de l'un des groupes-types.

On ne peut pas affirmer que ce groupe-type est le groupe de rationalité de l'équation (a); il y aura donc lieu d'étudier la détermination ultérieure, dans le domaine de rationalité adopté, des invariants J, K ou z.

Toutes les fois où l'on a pu attribuer à une solution particulière z de l'équation (a) $X(z)=\dfrac{\partial z}{\partial x}+A\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, une propriété qui se traduit *en dernière analyse* par une relation rationnelle entre $x,\ y,\ z,\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dots$ on est donc certain que l'on se trouve dans l'un des cas de réduction indiqués au début; c'est-à-dire que l'équation

$$\frac{dy}{dx}=A(x,\ y) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1),$$

est *spéciale* et que la détermination de z se ramène, dans le cas le moins avantageux, à des quadratures et à l'intégration de deux équations de Riccati.

Supposons, par exemple, qu'il existe une solution z de (a) qui soit un polynome entier en y d'ordre n; l'équation $\dfrac{\partial^{n+1}z}{\partial y^{n+1}}=0$ doit être compatible avec (a). En appliquant la méthode précédente on trouve (même sans faire intervenir u) d'abord la condition définitive de compatibilité et ensuite l'expression explicite de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}:\frac{\partial z}{\partial y}=J.$$

De même si l'on suppose qu'une certaine solution z s'exprime rationnellement en y, $z=\dfrac{P(y)}{Q(y)}$, où P et Q sont d'ordre n par exemple, la même méthode conduit, quand n est donné, à l'équation de condition que doit vérifier $A(x, y)$ et ensuite à l'expression rationnelle de $I(x, y)$ dans le cas le plus défavorable.

Bien entendu, si l'on ne fixe pas n, on ne peut *qu'affirmer la réduction* sans donner l'expression de I ou la condition à laquelle A doit satisfaire.

VI. *Exemples de déterminations du Groupe-type de Rationalité.*

11. Je me propose d'indiquer ici quelques exemples, empruntés à la Géométrie, d'équations du premier ordre dont j'ai pu déterminer le groupe de rationalité.

Le premier est relatif à l'équation différentielle qui définit *les lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel.*

La surface étant définie par les équations

$$X^2+Y^2+Z^2=\beta, \qquad \frac{aX^2}{a-\beta}+\frac{bY^2}{b-\beta}+\frac{cZ^2}{c-\beta}=0,$$

et la variable $\sqrt{\alpha}$ désignant la distance de l'origine au plan tangent en (X, Y, Z), M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, note VIII) pose $\beta=\alpha+\dfrac{u}{\alpha}$ et trouve pour équation différentielle des lignes de courbure

$$\phi\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2-\phi' u\left(\frac{du}{d\alpha}\right)+u\phi+\frac{u^2}{2}\phi''+\frac{u^3}{24}\phi^{(\mathrm{IV})}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

où les accents indiquent des dérivées par rapport à α et où

$$\phi=\alpha f(\alpha)=\alpha(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c).$$

Dans le cas où $f(\alpha)$ se réduit à un polynome du second degré, un artifice ingénieux lui permet de ramener l'intégration de (1) à des quadratures de différentielles algébriques. A notre point de vue, si l'on pose alors

$$\frac{du}{d\alpha}+\varpi=0 \quad \text{avec} \quad \phi\varpi^2+u\phi'\varpi+u\phi+\frac{u^2}{2}\phi''=0,$$

l'équation $-\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}+\varpi\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$ est telle que la résolvante en $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^3$ possède dans le domaine $[\varpi]$ la solution rationnelle

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3=\frac{1}{u^3(1-\varpi)};$$

le groupe de rationalité est donc $Z=\epsilon z+a$ $(\epsilon^3=1)$. La même forme de multiplicateur convient à toutes les équations $\dfrac{du}{d\alpha}+\varpi=0$ où ϖ est une fonction de u et de α définie par la relation implicite $u^3(1-\varpi)=\varpi^3\phi\left(\alpha+\dfrac{u}{\varpi}\right)$, quelle que soit la fonction ϕ.

C'est l'étude du cas précédent, envisagé comme cas limite, qui m'a conduit à la solution du cas général où ϕ est du quatrième degré.

Supposons que ϕ commence par le terme α^4, l'équation à étudier se conserve par la transformation $u=\dfrac{\phi}{t}$ et si l'on pose

$$\omega^2=-4\phi u^3+u^2(\phi'^2-2\phi\phi'')-4\phi^2 u$$

la même transformation remplace l'équation $\dfrac{du}{d\alpha}=\dfrac{u\phi'+\omega}{2\phi}$ par la même équation en t, où ω est changé de signe. Pour l'équation

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial\alpha}+\frac{u\phi'+\omega}{2\phi}\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

la résolvante en $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^3$ possède dans le domaine $[\omega]$ la solution rationnelle

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3=\frac{\phi}{u(K_0-\omega K_1)}$$

avec $\qquad K_0=u[\phi'(u^2+\phi)+u\phi(2\alpha+f'')], \quad K_1=u^2-\phi;$

le groupe de rationalité est donc, comme tout-à-l'heure, $Z=\epsilon z+a$ $(\epsilon^3=1)$. Ainsi, dans le cas général, la transcendante z est donnée par la quadrature

$$dz=\sqrt[3]{\frac{\phi}{u(K_0-\omega K_1)}}\left(du-\frac{u\phi'+\omega}{2\phi}d\alpha\right)$$

attachée à la surface (ω, u, α) du neuvième degré.

12. Un autre exemple intéressant est celui de *l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces générales du troisième degré.*

J'ai pensé que sur les surfaces générales du troisième degré les seules lignes asymptotiques algébriques devaient être les 27 droites.

L'examen d'un cas particulier, celui de la surface

$$z=xy+\frac{x^3+y^3}{6}$$

dont les lignes asymptotiques sont transcendantes et données par la quadrature

$$df=\frac{y\,dy+(1+\sqrt{1-xy})\,dx}{(P+\omega Q)^{\frac{1}{3}}}=0,$$

où $P=y^3-4+3xy$, $Q=xy-4$, $\omega=\sqrt{s^2-rt}$ (quadrature qui se ramène à celle d'une différentielle binôme non exprimable) a confirmé cette hypothèse et m'a montré comment les 27 droites intervenaient.

Voici le résultat général : Soit $\Omega(x, y, z)=0$, l'équation, mise sous forme entière, d'une surface du troisième degré ; en différentiant totalement quatre fois cette équation, on obtient un résultat qui, pour $\sigma_2=r+2sm+tm^2=0$, se réduit à

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}\sigma_4+4\sigma_3 X\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)=0,$$

où l'on a posé $\quad X(f)=\dfrac{df}{dx}+m\dfrac{df}{dy}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+m\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial m}\left(\dfrac{\partial m}{\partial x}+m\dfrac{\partial m}{\partial y}\right)$

et où $\quad \sigma_3=\dfrac{d^3z}{dx^3}=\alpha+3\beta m+3\gamma m^2+\delta m^3, \qquad \sigma_4=\dfrac{d^4z}{dx^4}=\lambda_0+4\lambda_1 m+\ldots.$

L'équation précédente exprime simplement que *pour chaque ligne asymptotique* $\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^4\sigma_3$ *est l'inverse du cube d'un multiplicateur.*

En d'autres terms $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-\frac{4}{3}}\sigma_3^{-\frac{1}{3}}(dy-m\,dx)=df$

est une différentielle exacte (les surfaces réglées sont exclues); le groupe de rationalité dans le domaine $[z,\sqrt{s^2-rt}]$ est simplement $f'=\epsilon f+a$, $(\epsilon^3=1)$.

Un résultat analogue peut s'énoncer pour les lignes qui satisfont à l'équation différentielle de degré $(n-1)$

$$\sigma_{n-1}=\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=0$$

sur les surfaces algébriques de degré n, dont l'équation peut s'écrire

$$\Omega=a_0z^2+\phi_1(x,y)\,z+\phi_n(x,y)=0.$$

Ces lignes sont données par la quadrature de différentielle algébrique

$$df=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-\left(\frac{n+1}{n}\right)}\sigma_n^{-\frac{1}{n}}(dy-m\,dx)=0,$$

où m désigne une racine de l'équation

$$\sigma_{n-1}=\frac{\partial^{n-1}z}{\partial x^{n-1}}+\frac{(n-1)}{1}m\frac{\partial^{n-1}z}{\partial x^{n-2}\partial y}+\ldots=0.$$

Les surfaces pour lesquelles σ_n s'annule en même temps que σ_{n-1} sont naturellement exclues. Pour en revenir aux lignes asymptotiques des surfaces du troisième degré, j'observerai qu'une réduction du groupe de rationalité de leur équation ne peut se produire que si toutes ces lignes sont algébriques; j'ai étudié en détail, à ce point de vue, les vingt et un types projectifs de ces surfaces (non réglées).

On déduit aisément des résultats précédents, par l'emploi d'une transformation dualistique (ou d'une transformation de Lie qui change les droites en sphères) d'autres résultats relatifs aux lignes asymptotiques (ou aux lignes de courbures) de surfaces algébriques; mais nous ne pouvons pas y insister ici, pas plus que sur des observations analogues aux précédentes relatives à d'autres formes de l'équation différentielle des lignes asymptotiques ou de courbure.

Je donnerai cependant, à cause de son élégance, la proposition suivante dont la forme seule est nouvelle. Soit $\Omega(x,y,z)=0$, l'équation générale d'une surface du second degré et (1) $\frac{dy}{dx}=m$ avec $1+m^2+(p+qm)^2=0$, l'équation différentielle de ses lignes de longueur nulle. On trouve sans difficulté

$$\frac{\partial m}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\sigma_2'\,X(m)}{\sigma_2}$$

avec $\quad\sigma_2=r+2sm+tm^2,\quad \sigma_2'=2(s+tm),\quad X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+m\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial m}X(m).$

Différentions totalement trois fois l'équation $\Omega=0$; le résultat où l'on fait $\frac{dy}{dx}=m$, exprime que, pour la forme différentielle $dy-m\,dx$, $\sigma_2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-\frac{3}{2}}$ est un multiplicateur

Ainsi les lignes de longueur nulle des surfaces du second degré sont données par la quadrature

$$df=\frac{dy-m\,dx}{\sqrt{\sigma_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^3}}=0\,;$$

le groupe de rationalité de l'équation (1) dans le domaine $[z,m]$ est

$$f'=\epsilon f+a,\quad(\epsilon^2=1).$$

VII. *Classification des points singuliers. Forme analytique des Intégrales dans le voisinage des points singuliers.*

13. La théorie d'intégration que nous venons d'exposer pour l'équation

$$\frac{dy}{dx}=A(x,y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

a mis en évidence l'intérêt qu'il y a à définir la solution générale de cette équation par une relation implicite

$$z(x,y)=\text{const.},$$

où z vérifie $\qquad X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

En choisissant la solution z *la plus simple*, on a défini la solution u principale en $x=x_0$ par la relation $z(x,y)=z(x_0,u)$ et il y aura lieu de dégager de cette relation implicite les propriétés de u ou de y.

Cette méthode n'est pas limitée au cas où $A(x,y)$ est une fonction *bien définie*; elle conduit dans l'hypothèse où $A(x,y)$ est, dans le voisinage de chaque point, méromorphe ou algébroïde, *à une classification précise des points singuliers de* (1) dont je veux indiquer les traits essentiels.

Si au voisinage d'un point $x=x_0$, $y=y_0$, A ou $\frac{1}{A}$ est holomorphe, on sait que u est holomorphe en x,y,y_0; le point x_0,y_0 est *ordinaire*.

Nous dirons qu'un système de valeurs x_0, y_0 *est singulier*, pour une fonction $A(x,y)$ *méromorphe*, lorsqu'au point, $x=x_0$, $y=y_0$, A est indéterminé. Il conviendra d'ajouter, pour envisager les cas où x_0 ou bien y_0 seraient infinis, les systèmes analogues pour la transformée de (1) par $x=\frac{1}{X}$, $y=\frac{1}{Y}$. Considérons, au voisinage d'un point singulier x_0, y_0, l'équation

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(a)\,;$$

il peut se faire qu'il existe une solution z de cette équation, qui soit *méromorphe* au voisinage de x_0, y_0. Dans ce cas il en existera une infinité, puisque $\phi(z)$ où ϕ est méromorphe en z est méromorphe, en x, y, avec z. Je dis alors que le point x_0, y_0 est un *point singulier apparent*.

On devra donc comme *problème préliminaire* décider si l'équation (a) peut posséder une solution z holomorphe au voisinage de $x=x_0$, $y=y_0$, ou au moins *méromorphe*, c'est-à-dire si en posant $A=\dfrac{\alpha}{\beta}$ où α et β sont holomorphes, les deux équations

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial y}+\beta\frac{\partial P}{\partial x}=MP, \qquad \alpha\frac{\partial Q}{\partial y}+\beta\frac{\partial Q}{\partial x}=MQ$$

peuvent posséder, pour une même détermination de la fonction holomorphe M, deux solutions holomorphes distinctes P et Q (ou une solution holomorphe $P+\lambda Q$ dépendant linéairement d'une constante λ).

Il est facile de former des exemples de points singuliers *apparents*; on n'a qu'à partir des expressions de P et Q et prendre par exemple

$$\beta=P\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \alpha=-\left(P\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

lorsque ces expressions n'ont pas de facteur commun, ou si l'on se donne

$$P=\phi_1^{a_1}\phi_2^{a_2}\dots\phi_h^{a_h}, \quad Q=\psi_1^{b_1}\psi_2^{b_2}\dots\psi_k^{b_k},$$

les ϕ et les ψ étant holomorphes pour $x=x_0$, $y=y_0$ avec $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$ prendre pour α et β les quotients des expressions précédentes par

$$L=\phi_1^{a_1-1}\phi_2^{a_2-1}\dots\psi_1^{b_1-1}\psi_2^{b_2-1}\dots.$$

Supposons que le point (x_0, y_0) ne soit pas un point singulier apparent: il peut se faire que l'équation résolvante en K

$$X(K)+nK\frac{\partial A}{\partial y}=0$$

possède une solution K méromorphe au voisinage de $(x=x_0,\ y=y_0)$ pour une valeur positive de n aussi petite que possible.

Dans ce cas, *il ne peut en exister qu'une seule*: s'il y en avait deux, leur quotient serait une solution méromorphe de l'équation (a); on aurait donc un point singulier apparent. Je dis alors que le point singulier (x_0, y_0) *est du premier ordre.* Pour reconnaître un tel point, on aura d'abord à rechercher si la résolvante en K peut posséder une solution *holomorphe* au voisinage de (x_0, y_0) pour une valeur entière de n *positive* ou *négative* mais différente de 1. Si cela n'a pas lieu, on posera $K=\dfrac{P}{Q}$, P et Q s'annulant tous deux en (x_0, y_0) et l'on cherchera s'il est possible de trouver P et Q holomorphes de manière à vérifier les deux équations

$$\alpha\frac{\partial Q}{\partial y}+\beta\frac{\partial Q}{\partial x}=\gamma Q,$$

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial y}+\beta\frac{\partial P}{\partial x}=\left[\gamma-n\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\right]P$$

pour une même fonction holomorphe γ.

Il est bien aisé de former des exemples de points singuliers du premier ordre— où l'équation (1) s'intègre par l'adjonction de transcendantes attachées au groupe $Z=\epsilon z+\alpha$, $(\epsilon^n=1)$ et ne dépendant que d'un argument.

Ainsi, si l'on prend l'équation $X\dfrac{dY}{dX}+Y(1-XY)=0$, où X, Y sont des fonctions

holomorphes de x et y s'annulant pour $x=0$, $y=0$, on a pour une telle équation dont la solution générale est définie par

$$z=\frac{1}{XY}+\log X,$$

l'expression méromorphe $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=K=-\dfrac{\left(X\dfrac{\partial Y}{\partial y}+Y\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)}{X^2Y^2}-\dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial y}}{X}.$

Un autre exemple, simple et général, d'un point singulier du premier ordre est donné, en $x=0$, $y=0$, par l'équation $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, où $\alpha=\lambda x+\dots$, $\beta=\mu y+\dots$, les termes non écrits étant du second ordre au moins, *lorsque* $\dfrac{\mu}{\lambda}$ *n'est ni une quantité réelle négative, ni un entier positif, ni l'inverse d'un tel entier.* MM. Poincaré et Picard ont établi que l'on peut alors poser

$$z=\frac{P(x,y)^\lambda}{Q(x,y)^\mu},$$

P et Q étant holomorphes au voisinage de $x=0$, $y=0$ et s'annulant en ce point. Dans le cas le plus général où $\mu:\lambda$ est complexe, ou bien réel et irrationnel, on a donc en prenant $Z=\log z$,

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=K=\lambda\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}-\mu\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial y}}{Q}.$$

Le cas où $\mu:\lambda$ est un entier positif ou l'inverse d'un tel entier et où l'intégrale z peut s'écrire sous la forme

$$z=\frac{S(x,y)}{X(x,y)}+h\log X(x,y)$$

où h est une constante, S et X des fonctions holomorphes donne encore un point singulier du premier ordre. Si $h=0$ avec $\mu=\lambda$ (point *dicritique* de M. Autonne) on a simplement un *point singulier apparent.*

S'il n'existe pas pour la résolvante en K, de solution méromorphe au voisinage de (x_0, y_0), il peut se faire qu'il en existe un pour la résolvante en J,

$$J=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}:\frac{\partial z}{\partial y}, \quad X(J)+J\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=0.$$

Il est clair qu'il n'en peut exister qu'une seule, sans quoi on retomberait dans le cas précédent. Je dis alors que le point $(x=x_0,\ y=y_0)$ est *singulier du second ordre.* On donnerait aisément les équations résolvantes à vérifier par des fonctions holomorphes, s'annulant toutes deux lorsque J et $\dfrac{1}{J}$ ne peuvent ni l'un ni l'autre être holomorphes.

Pour obtenir un exemple simple de point singulier du second ordre, on n'a qu'à former une équation (a) $X(z)=0$, dont le groupe de rationalité soit le groupe linéaire et pour laquelle J soit le quotient de deux polynomes s'annulant en x_0, y_0.

Je donnerai simplement l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2b\,(2x+y)+ax^2+\dfrac{a-2c}{3}\,xy+\dfrac{a-c}{3}\,y^2}{2b\,(x-2y)+\dfrac{a+c}{3}\,x^2-\dfrac{c+2a}{3}\,xy+cy^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

pour laquelle $J=\dfrac{\dfrac{\partial\beta}{\partial y}}{\beta}-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ou encore $z=\displaystyle\int e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(\beta\,dy-\alpha\,dx)$.

Supposons enfin que l'équation résolvante en J ne possède pas de solution méromorphe au voisinage du point x_0, y_0, il peut se faire que la résolvante en I,

$$I=\{z,y\}=\frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}:\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\right)^2,$$

c'est-à-dire $X(I)+2I\dfrac{\partial A}{\partial y}+\dfrac{\partial^3 A}{\partial y^3}=0$, en possède une. Elle ne pourra en avoir qu'une seule. Le point $x=x_0$, $y=y_0$ sera dit alors *singulier du troisième ordre.*

Par exemple, si l'on envisage l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_0(x)+a_1(x)\,y+a_2(x)\,y^2}{c\,(x)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

où a_0, a_1, a_2, c sont des fonctions holomorphes de x, dont les extrêmes a_0 et c s'annulent pour $x=0$, on sait que l'équation aux dérivées partielles en I admet la solution $I=0$; le point singulier est en général du troisième ordre et si l'on observe que l'expression de J peut s'écrire $J=\dfrac{-2}{y-X}$ où X doit vérifier l'équation (1) on peut affirmer que pour que le point $x=0$, $y=0$ soit seulement du second ordre il faut et il suffit que l'équation (1) possède une solution particulière X *méromorphe* au voisinage de $x=0$. Ce n'est évidemment que dans des cas exceptionnels que cette circonstance se présente.

Lorsqu'un point singulier n'est ni du premier ni du second ni du troisième ordre, je dirai qu'il est *général.* On peut également construire sans difficulté des exemples de points singuliers généraux.

(Il serait facile de donner une classification analogue, en supposant A *algébroïde* au voisinage de chacun des points singuliers.)

L'intérêt de cette classification réside évidemment dans ce fait que *s'il existe une relation*

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots\right)=0,$$

compatible avec l'équation

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A\,\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

qui soit rationnelle en $z,\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots$

et dont les coefficients sont *méromorphes* en x, y, au *voisinage de* $x=x_0$, $y=y_0$, *cette relation a l'une des formes-types obtenues au début.* Il suffit de remplacer le mot *rationnel* par *rationnel au voisinage de* $x=x_0$, $y=y_0$; les démonstrations subsistent. L'extension du domaine de rationalité peut également se faire de la même manière. A chaque point singulier correspond ainsi un groupe-type dont l'invariant est rationnel au *voisinage* de ce point: on en déduira une représentation analytique de l'intégrale en faisant appel à des transcendantes simples (logarithmes, exponentielles, etc.) qui subissent précisément *au voisinage du point singulier considéré* les mêmes transformations que z.

Le guide naturel dans cette recherche est la théorie de Fuchs, pour les équations différentielles linéaires du second ordre. (Cf. aussi F. Marotte, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1898.)

Il me reste à faire observer que si l'on suppose $A=\dfrac{\alpha}{\beta}$, au voisinage du point singulier considéré, quotient de deux fonctions holomorphes quelconques, il ne sera pas possible de réaliser effectivement la classification précédente: l'existence d'un point singulier non général, ou d'un point singulier apparent, peut entraîner une infinité de conditions distinctes (théorie des *centres* de Poincaré).

Mais il n'en sera plus de même si l'on admet simplement que α et β sont rationnels ou font partie d'un domaine $[\Delta]$ bien défini. La plus grande difficulté à résoudre (formation des conditions d'existence de développements holomorphes *convergents* au voisinage du point singulier) amène seulement à distinguer pour chaque degré des cas *généraux* (où α et β commencent par des termes *de ce degré déterminé,* dont les coefficients ne satisfont pas à certaines conditions d'égalité et d'inégalité, et où les termes de degré supérieur ont des coefficients arbitraires) et des cas particuliers où ces conditions n'étant plus satisfaites, tout se passe comme si le degré déterminé était augmenté d'une ou de plusieurs unités. Mais il peut se faire qu'il y ait indéfiniment des cas d'exception. Ce n'est donc que si α et β sont *entièrement déterminés* qu'on peut espérer, dans tous les cas, épuiser la question.

L'emploi des fonctions *majorantes* en donne alors le moyen: il s'agit de ranger les dérivées de la fonction inconnue de façon que le rang croisse avec l'ordre de dérivation et que toutes les équations qui déterminent les dérivées d'un certain ordre donnent l'expression de chacune d'elles au moyen des dérivées de rang précédent. Les exemples classiques dus à Poincaré et à M. Picard montrent comment on peut ainsi *majorer* les modules de chacune de ces dérivées et trouver des conditions *suffisantes* pour la convergence des fonctions inconnues.

Équation d'ordre quelconque.

I. *Systèmes irréductibles réguliers. Groupe de rationalité.*

14. Soit une équation différentielle ordinaire

$$y^{(n)}=f\,(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

où f appartient à un certain domaine de rationalité; je définirai sa solution générale par n relations

$$\phi_i(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=c_i\qquad(i=1,\ldots,n),$$

où les ϕ_i forment un *système fondamental* de solutions de l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}} f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

et je me propose de *fixer les caractères du système fondamental le plus simple de l'équation* (2).

Prenons tout de suite au lieu de (2), l'équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I}),$$

où les A sont des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_n$ appartenant à un certain domaine de rationalité $[\Delta]$ [*pour fixer les idées*, on pourrait supposer simplement les A rationnels]; les éléments $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de tout système fondamental vérifient les relations

$$\frac{D}{1} = \frac{D_1}{A_1} = \ldots = \frac{D_n}{A_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a),$$

avec $D \neq 0$, où les D_i sont des déterminants fonctionnels dont la formation est immédiate; par exemple

$$D = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

En d'autres termes les quotients $\frac{D_i}{D}$ sont les *invariants différentiels* indépendants du groupe ponctuel général Γ_n

$$Z_i = \phi_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

étendu en regardant les z comme fonction des $(n+1)$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$ non transformées. Si le système (a) est *irréductible*, c'est-à-dire si toute relation rationnelle $\left(\text{entre } z_1, z_2, \ldots, z_n \text{ et leurs dérivées } \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_n}, \ldots\right)$ d'ordre quelconque dont les coefficients sont des fonctions des variables $x, x_1, \ldots, x_n$ appartenant au domaine $[\Delta]$ *compatible** avec les équations (a), en est une conséquence nécessaire, je dis que l'équation (I) est *générale*. Tous les systèmes fondamentaux $z_1, \ldots, z_n$ sont des transcendantes de même nature, ce sont des *fonctions des* $(n+1)$ *variables* $x, x_1, \ldots, x_n$ attachées dans *le domaine* $[\Delta]$, *au groupe ponctuel général* Γ_n.

Tous les invariants différentiels rationnels de ce groupe Γ_n sont des fonctions rationnelles des quotients $\frac{D_i}{D}$ et de leurs dérivées et sont par suite connus rationnellement dans $[\Delta]$.

Si le système (a) est *réductible*, c'est-à-dire s'il existe des relations rationnelles, *compatibles* avec les équations (a) sans en être une conséquence nécessaire, on peut distinguer certains systèmes fondamentaux des autres.

En ajoutant aux relations (a) les relations nouvelles dont nous supposons l'existence, on obtiendra un système (S) que l'on peut supposer complété de façon à ce qu'il soit *irréductible*. Aux divers systèmes fondamentaux correspondront divers systèmes (S); il s'agit de choisir celui qu'on devra regarder comme le *plus simple*.

* J'entends par là simplement qu'un *système fondamental* $z_1, \ldots, z_n$, *au moins*, la vérifie.

Pour cela, s'il existe des systèmes (S) renfermant des équations d'ordre zéro (c'est-à-dire rationnelles en $z_1, \ldots, z_n$) on prendra tous ceux (S_0) qui en renferment le plus grand nombre, parmi ceux-là on prendra tous les systèmes (S_1) qui renferment le plus grand nombre d'équations du premier ordre, puis parmi ceux-là on prendra tous ceux (S_2) qui renferment le plus grand nombre d'équations du second ordre, et ainsi de suite.

Le raisonnement ne se continue pas indéfiniment. M. Tresse a établi en effet qu'à partir d'un certain ordre assignable, toutes les équations d'un système compatible quelconque sont des conséquences nécessaires des équations d'ordre inférieur. D'ailleurs tout système (S) renfermera certainement des équations d'ordre 0, 1, 2 ou 3.

On obtient ainsi des systèmes (S_p) irréductibles, qui déterminent tous un même ensemble de *dérivées principales*—(au sens de MM. Méray et Riquier). On peut former pour ces systèmes (S_p) continués jusqu'à un ordre convenable (et même pour chaque ordre de dérivation) une résolvante algébrique qui définit une combinaison linéaire et homogène à coefficients rationnels arbitraires, de ces dérivées principales au moyen des dérivées paramétriques. Si ces résolvantes n'ont pas le même degré, on prendra enfin parmi les systèmes (S_p) ceux (Σ) qui donnent des résolvantes de degré minimum.

Ce sont ces systèmes (Σ) que j'appelle *systèmes irréductibles réguliers*: le nombre des équations de chaque ordre et le degré de la résolvante algébrique sont les mêmes pour tous ces systèmes.

On peut encore dire que ces systèmes (Σ) sont à la fois *irréductibles* et *primitifs* en entendant par là qu'aucune transformation

$$z_i = \phi_i(Z_1, \ldots, Z_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où les ϕ_i sont définis par un système différentiel rationnel quelconque, ne peut jamais augmenter le nombre des équations du système (Σ) qui sont d'un ordre donné, ou abaisser le degré de la résolvante algébrique correspondante, en conservant les nombres analogues attachés aux ordres plus petits.

15. Les systèmes irréductibles *réguliers* sont susceptibles d'une forme remarquable qui justifie leur choix.

On peut écrire les équations nouvelles (Σ) sous la forme *canonique*

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = \alpha_i(x, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, k) \ldots\ldots(\Sigma),$$

dans laquelle les Ω_i sont des invariants différentiels, rationnellement distincts, d'un groupe Γ de transformations én $z_1, \ldots, z_n$ formant pour ce groupe Γ un *système complet* d'invariants et les α_i des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_n$ appartenant au domaine de rationalité adopté $[\Delta]$.

Les transformations (z, Z) du groupe Γ sont entièrement définies par les relations

$$\Omega_i\left(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) = \Omega_i\left(Z_1, \ldots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial x_1}, \ldots\right) \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

où les variables $x_1, \ldots, x_n$ n'interviennent qu'en apparence. Il suffira d'y faire $x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$ pour obtenir la *forme canonique* des *équations de définition* du groupe Γ, au sens de Lie.

J'ai appelé le groupe Γ *groupe de rationalité* de l'équation *spéciale* (I); il possède les propriétés fondamentales du groupe de rationalité (au sens de Galois) des équations algébriques:

1°. Tout invariant rationnel de Γ est égal à une fonction des variables $x, x_1, \ldots, x_n$ rationnelle dans le domaine $[\Delta]$.

2°. Toute fonction rationnelle de $z_1, \ldots, z_n$ et de leurs dérivées, à coefficients rationnels dans $[\Delta]$, et qui est égale à une fonction rationnelle dans $[\Delta]$, est une fonction rationnelle des invariants de Γ à coefficients rationnels dans $[\Delta]$.

Je dis que les transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ sont des *fonctions des* $(n+1)$ *variables* $x, x_1, \ldots, x_n$ *attachées, dans le domaine* $[\Delta]$, *au groupe* Γ.

On doit observer tout de suite que le groupe Γ n'est déterminé qu'à certaines transformations près: toute transformation (z, z') qui change un système irréductible régulier (Σ) en un système de même nature (Σ') change le groupe Γ en un groupe *homologue* (Γ') qui sera le groupe de rationalité pour les solutions de (Σ'). Il faut et il suffit pour cela que les équations de (Γ) soient transformées par (z, z') en équations rationnelles de même ordre.

J'ajoute en passant que si le système (Σ) renferme des équations d'ordre zéro, en nombre p, elles peuvent s'écrire $z_1 = R_1, \ldots, z_p = R_p$, où les R sont rationnels dans $[\Delta]$, les autres équations de (Σ) ne renfermant plus que $z_{p+1}, \ldots, z_n$ et le groupe *intransitif* Γ correspondant est formé de transformations

$$Z_i = z_i \quad (i = 1, \ldots, p), \qquad Z_{p+j} = \phi_j(z_1, \ldots, z_n) \quad (j = 1, \ldots, n-p).$$

II. *Forme normale d'un système irréductible régulier.*

16. Une méthode particulière, dont je vais indiquer l'essentiel, m'a permis d'obtenir pour les systèmes irréductibles réguliers une forme *normale, nouvelle,* qui met en évidence les propriétés précédentes. Soit $P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right)$ un polynome entier par rapport aux éléments $Z_1, \ldots, Z_n$ et à leurs dérivées d'ordre quelconque relatives aux variables $x_1, \ldots, x_n$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x, x_1, \ldots, x_n$ dans le domaine $[\Delta]$. Si l'on regarde les Z comme des fonctions indépendantes des n arguments $z_1, \ldots, z_n$ (qu'on ne précise pas davantage) et si l'on exécute les transformations

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \frac{\partial Z}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial z_n}\frac{\partial z_n}{\partial x_i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 Z}{\partial z_1^2}\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\frac{\partial z_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial z_1}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on pourra toujours écrire une identité

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

où les l_i ne dépendent que des Z et de leurs dérivées par rapport aux z et les ξ_i que des variables et des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$; nous supposerons que le *nombre* h *est le plus petit possible,* ce qui exige que les l_i d'une part, les ξ_i d'autre part ne soient liés par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants.

Les ξ_i, qui ne sont d'ailleurs définis qu'à une transformation linéaire à coefficients constants près, seront dits *coordonnées* du polynome P; leur introduction met en évidence de façon simple la manière dont se comportent les polynomes tels que P, quand on exécute sur les Z une transformation ponctuelle.

Soit $L_i(Z)$ ce que devient $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ quand on y fait $z_1 = Z_1, \ldots, z_n = Z_n$; on a évidemment

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = \sum_1^h L_i(Z)\, \xi_i\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right).$$

D'autre part si les z' sont des fonctions quelconques des z, on a encore

$$\sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z'}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z'}{\partial x}\right),$$

d'où l'on conclut que la *transformation* (z, z') *fait subir aux* ξ_i *et aux* l_i *deux transformations linéaires adjointes.*

Je ne veux pas insister ici sur l'étude générale des fonctions rationnelles en $Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \ldots$ dans un domaine $[\Delta]$ faite en partant de la considération des *coordonnées*: groupe des transformations qu'admet P, permutation des polynomes P entre eux, formation du système différentiel qui définit P quand on y regarde les z comme donnés et les Z comme arbitraires, ... Il s'agit simplement de montrer l'usage des coordonnées ξ_i pour l'étude des systèmes irréductibles réguliers.

Supposons d'abord que les éléments $Z_1, \ldots, Z_n$ constituent un système fondamental *déterminé,* pour une équation

$$X(Z) = \frac{\partial Z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial Z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial Z}{\partial x_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)},$$

dont les coefficients appartiennent au domaine $[\Delta]$, et que de plus le polynome P satisfasse à une identité

$$X(P) = MP,$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation *unique*

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = 0$$

forme avec le système

$$X(Z_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)}$$

un système complètement intégrable.

On en conclura que les éléments $z_1, \ldots, z_n$ qui représentent un système fondamental *quelconque* satisfont aux identités

$$\frac{X(\xi_1)}{\xi_1} = \ldots = \frac{X(\xi_h)}{\xi_h} = M(x, x_1, \ldots, x_n),$$

ou encore que les équations

$$\frac{\xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\xi_1\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)} = \alpha_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 2, \ldots, h)$$

sont toujours vérifiées, pour un choix convenable des fonctions (en général transcendantes) α_i par un système fondamental particulier quelconque.

Si l'on veut que le système précédent admette la solution qui pour $x = x_0$ satisfait aux conditions

$$z_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \phi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

il suffira de poser $$\alpha_i = \frac{\xi_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \ldots\right)}{\xi_1\left(x_0, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \ldots\right)},$$

et de calculer les seconds membres au moyen des z, en partant des formules

$$z_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

résolues en $x_1, \ldots, x_n$.

Pour que le système précédent soit rationnel, il suffira de choisir un système fondamental qui, pour $x = x_0$, satisfait aux conditions

$$x_i = R_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où les R_i sont rationnels. C'est ce qui arrive toujours pour la solution *principale en* $x = x_0$ de l'équation (I) qui est définie par

$$x_i = z_i \text{ pour } x = x_0.$$

17. Considérons maintenant un système irréductible régulier (Σ) vérifié par $Z_1, \ldots, Z_n$ et supposons que jusqu'à un certain ordre N, tel que les équations distinctes d'ordre $(N+p)$ s'obtiennent en dérivant simplement jusqu'à cet ordre les équations d'ordre N, le système (Σ) renferme k relations entières, *rationnellement distinctes,*

$$f_1 = 0, \ldots, f_k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Sigma)$$

(c'est-à-dire qu'aucun des polynomes f_i ne s'exprime sous forme entière avec les autres).

Remarquons tout de suite que s'il existe pour l'équation (I) p solutions rationnelles distinctes $z_1 = R_1, \ldots, z_p = R_p$ l'adjonction au domaine $[\Delta]$ de p fonctions algébriques ($x_1, \ldots, x_p$, par exemple, des arguments $x_{p+1}, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p$) ramène l'équation (I) à une équation à $(n-p+1)$ variables seulement, dépendant des paramètres $z_1, \ldots, z_p$ dans le domaine modifié $[\Delta']$. On peut donc supposer en modifiant $[\Delta]$, qu'il n'existe pas de solutions z_i rationnelles dans ce domaine $[\Delta]$.

J'ajoute en passant qu'il y aura lieu de chercher après avoir déterminé $R_1, \ldots, R_p$ s'il n'est pas possible d'exprimer rationnellement ces fonctions au moyen de p autres $r_1, \ldots, r_p$ appartenant au même domaine, sans que la réciproque soit vraie ; ce n'est qu'à cette condition que les solutions rationnelles $z_1, \ldots, z_p$ seront *les plus simples.*

Formons le polynome $\quad P = u_1 f_1 + \ldots + u_k f_k$

où les u désignent des polynomes arbitraires en $x, x_1, \ldots, x_n$ et mettons en évidence les *coordonnées* de ce polynome P, en introduisant les éléments $z_1, \ldots, z_n$ d'un système fondamental *quelconque,* on aura

$$P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right) = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

et le système pourra se remplacer par les équations

$$P = \sum_1^h l_i \xi_i = 0,$$
$$X(P) = P_1 = \sum_1^h l_i X(\xi_i) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X(P_{k-2}) = P_{k-1} = \sum_1^h l_i X_{k-1}(\xi_i) = 0.$$

La relation $P_k = \sum_1^h l_i X_k(\xi_i) = 0$ étant une conséquence des précédentes, on en conclut l'existence d'*identités*

$$X_k(\xi_i) = \beta_0 \xi_i + \beta_1 X(\xi_i) + \ldots + \beta_{k-1} X_{k-1}(\xi_i) \qquad (i = 1, \ldots, h).$$

Il est aisé de montrer que *le nombre h des coordonnées de P est nécessairement égal à* $(k+1)$. Si l'on avait $h \leqslant k$ on déduirait des équations de (Σ) une ou plusieurs relations rationnelles qui seraient vérifiées par les éléments $z_1, \ldots, z_n$ d'un système *fondamental quelconque et qui ne se réduiraient pas à des identités*—ce qui est impossible.

Si l'on avait $h = k + r$ on pourrait former en partant du système précédent un système rationnel comprenant rk équations d'ordre au plus égal à N. En rangeant les ξ dans un ordre convenable on peut montrer que chaque coordonnée dont l'indice dépasse $(k+1)$ donne une équation au moins distincte rationnellement des k premières formées en partant de $\xi_1 \ldots \xi_k \xi_{k+1}$.

Le système (Σ) étant résolu par rapport à $l_1, \ldots, l_k$ pourra donc s'écrire :

$$\frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)}{l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)} = -\frac{\Delta_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\Delta\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)} \qquad (i = 1, \ldots, k) \quad \ldots\ldots\ldots(\Omega).$$

C'est la forme nouvelle que je voulais signaler ; je l'appelle *forme normale* des équations (Σ). On conclut immédiatement des équations (Ω) que l'on peut trouver un système irréductible régulier (Σ') possédant la solution $z_1, \ldots, z_n$ qui satisfait pour $x = x_0$ aux conditions

$$x_i = R_i(z_1, \ldots, z_n),$$

où les R_i sont n fonctions rationnelles indépendantes. Il suffira de poser

$$\Delta_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \alpha_i(z_1, \ldots, z_n)\, \Delta\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

en calculant les α_i par les formules

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i\left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots\right)}{\Delta\left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots\right)},$$

où l'on remplace les x_i et les $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$ par leurs expressions en $z_1, \dots, z_n$.

En particulier, il existe un système irréductible régulier (Σ_0) qui possède la *solution principale en* $x = x_0$, c'est-à-dire celle qui satisfait pour cette valeur de x aux conditions

$$x_i = z_i \ (i = 1, \dots, n);$$

on l'obtient en prenant

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i(x_0, x_1, \dots, x_n, 1, \dots)}{\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n, 1, \dots)},$$

où le second membre se déduit de $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ en faisant

$$x_i = z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = 1, \dots.$$

Le système *initial* (Σ) peut s'écrire, en faisant $z_i = Z_i$,

$$\frac{L_i(Z)}{L_{k+1}(Z)} = -\frac{\Delta_i\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{\Delta\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)},$$

et l'on passe de l'une de ses solutions $z_1, \dots, z_n$ à une autre solution $Z_1, \dots, Z_n$ en satisfaisant simplement aux relations

$$\frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)}{l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right)} = \frac{L_i(z)}{L_{k+1}(z)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\Omega_1),$$

qui sont les *équations de définition du groupe de rationalité* Γ, correspondant à (Σ). On reconnaît là l'ensemble des transformations (z, Z) qui n'altèrent pas la *forme* de la relation unique

$$P = 0.$$

Enfin, si l'on observe que dans la *forme normale* (Ω) les éléments $z_1, \dots, z_n$ peuvent être regardés comme arbitraires et si l'on y pose

$$z_i = x_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = 1, \dots$$

on obtient la nouvelle forme

$$\frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)} = -\frac{\Delta_i(x, x_1, \dots, x_n, 1, \dots)}{\Delta(x, x_1, \dots, x_n, 1, \dots)} \quad \dots\dots\dots\dots (\Omega'),$$

qui prouve que les *invariants différentiels du groupe de rationalité* Γ (ce sont les premiers membres) sont, dans le domaine de rationalité adopté, des fonctions rationnelles de $x, x_1, \dots, x_n$. Cette forme (Ω') est la *forme canonique* signalée plus haut.

Il convient de signaler ici que les *invariants relatifs* $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ du groupe Γ subissent, quand on exécute sur les variables x (non transformées par Γ) une transformation quelconque du groupe ponctuel général Γ_n, *une simple transformation linéaire et homogène.*

Les invariants absolus de Γ, $\frac{l_i}{l_{k+1}}$, subissent donc une transformation projective.

En adjoignant au besoin la racine p-ième d'une fonction du domaine de rationalité $[\Delta]$, on peut toujours s'arranger pour que $l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ soit une puissance entière du déterminant fonctionnel $\frac{\partial(Z_1, \dots, Z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$.

III. *Formation des résolvantes.*

18. Considérons le polynome P qui nous a servi à obtenir la *forme normale* du système irréductible régulier (Σ) : si l'on met en évidence les *coordonnées* on a

$$P = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

et nous avons observé qu'une transformation (z, z') donne lieu à l'identité

$$\sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \sum_1^h l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z'}\right) \xi_i\left(x, \frac{\partial z'}{\partial x}\right).$$

On en conclut que l'on a des identités :

$$l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = \sum_1^h \lambda_{i,j}\left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right) l_j\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial z'}\right) \qquad (i = 1, \dots, h),$$

où les z et les z' sont des variables quelconques. Faisons dans ces identités $z'_1 = x_1, \dots, z'_n = x_n$ et en même temps $z_1 = x'_1, \dots, z_n = x'_n$: elles s'écriront

$$l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x'}\right) = \sum_1^h \lambda_{i,j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) l_j\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \qquad (i = 1, \dots, h).$$

Si l'on pose maintenant

$$x'_i = x_i + \delta x_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

en définissant les δx_i par

$$\frac{\delta x}{1} = \frac{\delta x_1}{A_1} = \dots = \frac{\delta x_n}{A_n},$$

où l'on suppose δx infiniment petit, ce qui revient à prendre

$$x'_i = x_i + X(x_i)\, \delta x$$

avec

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$Z_1, \ldots, Z_n$ seront des invariants pour la transformation infinitésimale précédente et l'on aura, par exemple, en écrivant

$$\delta\left(dZ - \frac{\partial Z}{\partial x_1}\,dx_1 \ldots - \frac{\partial Z}{\partial x_n}\,dx_n\right) = 0,$$

$$\delta\left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}\right) = \delta x\,.\,X\left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}\right) = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_i}\frac{\partial Z}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_i}\frac{\partial Z}{\partial x_n}\right)$$

.... etc. ....

Les formules classiques du changement de variables (x, x') nous permettent aisément d'obtenir des expressions $\mu_{ij}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$ telles que l'on ait identiquement

$$\mu_{i,j}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \lambda_{i,j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \qquad (i, j = 1, \ldots, h);$$

on les aurait d'ailleurs immédiatement en résolvant les équations évidentes

$$\sum_1^h \lambda_{i,j}\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\lambda_{j,s}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \epsilon_{js} \qquad (j, s = 1, \ldots, h),$$

avec $\epsilon_{js} = 0$ pour $j \neq s$, $\epsilon_{jj} = 1$.

Les formules $\qquad \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \delta x\,.\,\frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = 1 + \delta x\,.\,\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$

....

donnent alors aisément le coefficient de δx dans le développement de $\mu_{i,j}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$:

$$\mu_{i,j}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = [\mu_{i,j}] + \delta x\,.\,\omega_{ij} + \ldots.$$

Ce coefficient ω_{ij} est un polynome formé avec les dérivées des A en $x_1, \ldots, x_n$. Il nous suffit d'égaler les coefficients de δx dans les deux membres de toutes les équations qui définissent les $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x'}\right)$ pour obtenir

$$X\left[l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right] = \sum_{j=1}^h \omega_{ij}(x, x_1, \ldots, x_n)\, l_j\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \qquad (i = 1, \ldots, h) \ldots (\mathrm{R}_0).$$

Ce système (R_0) est le *système résolvant* des *invariants relatifs* $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ *du groupe de rationalité* Γ: on voit qu'il est *linéaire et homogène.*

Pour obtenir le système résolvant dont dépendent les *invariants absolus*

$$\frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{l_{k+1}\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}$$

nous poserons, en supprimant l'indice $(k+1)$ pour avoir des formules plus simples,

$$\frac{l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{l\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)} = \Lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, k) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\Sigma),$$

et le système précédent s'écrira

$$l X(\Lambda_i) + \Lambda_i X(l) = l \Sigma_j \omega_{ij}(x) \Lambda_j$$
$$X(l) = l \Sigma_j \omega_j \Lambda_j,$$

d'où encore

$$X(\Lambda_i) + \Lambda_i \Sigma_j \omega_j \Lambda_j = \Sigma_j \omega_{ij} \Lambda_j \qquad (i = 1, \ldots, k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{R}).$$

Pour que ce système résolvant (R) soit linéaire il faut et il suffit que l'on puisse choisir l'un des $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ de façon que tous les ω_{ij} correspondants soient nuls—c'est-à-dire que cet $l_i\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ ne renferme pas de dérivées des Z.

19. Lorsque le groupe de rationalité est Γ *le système résolvant ne peut posséder qu'*UNE SEULE SOLUTION RATIONNELLE. Si l'on avait en effet un autre système

$$\frac{l_i\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{l\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)} = \lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, k) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\sigma),$$

vérifié par un système fondamental au moins $z_1, \ldots, z_n$, il est impossible qu'il existe des solutions communes aux deux systèmes (σ), (Σ).

Nous avons vu plus haut que ces deux systèmes peuvent recevoir la forme

$$\frac{L_i(Z)}{L_{k+1}(Z)} = -\frac{\Delta_i\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{\Delta\left(x, \frac{\partial Z}{\partial x}\right)}$$

où $-\frac{\Delta_i}{\Delta}$ se réduit à Λ_i pour $Z_p = x_p \qquad (p = 1, \ldots, n)$

et
$$\frac{L_i(z)}{L_{k+1}(z)} = -\frac{\delta_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\delta\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}$$

où $-\frac{\delta_i}{\delta}$ se réduit à λ_i pour $z_p = x_p\,(p = 1, \ldots, n)$. Si tous les λ_i ne sont pas égaux aux Λ_i de même indice, les expressions $\frac{\delta_i}{\delta}$ et $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ *ne sont pas identiques,* mais les identités

$$X\left(\frac{\Delta_i}{\Delta}\right) = 0, \quad X\left(\frac{\delta_i}{\delta}\right) = 0,$$

nous permettent de former un système *rationnel* comprenant les équations, en nombre $2k$:

$$\frac{\Delta_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\Delta\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \Phi_i(u), \quad \frac{\delta_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\delta\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \phi_i(u) \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

et satisfait par un système fondamental. Il suffit toujours de prendre le système fondamental qui satisfait pour $x = x_0$ aux conditions

$$x_p = R_p(u_1, \ldots, u_n) \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

où les R_p sont n fonctions rationnelles distinctes. Le système (Σ) ne serait donc pas *irréductible et régulier*.

IV. *Exemples. Groupes-types de rationalité.*

20. (A) Soit l'équation aux dérivées partielles à trois variables

$$T(f)=\frac{\partial f}{\partial t}+A(u, v, t)\frac{\partial f}{\partial u}+B(u, v, t)\frac{\partial f}{\partial v}=0,$$

dont nous désignons par x, y deux solutions distinctes. Si le groupe de rationalité est (Γ) $Y=\phi(y)$, $X=\dfrac{x}{\phi'(y)}$ où ϕ est arbitraire, les équations de définition

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=0, \qquad X\frac{\partial Y}{\partial y}=x,$$

expriment simplement que l'on a $XdY=xdy$, d'où l'on conclut que $x\dfrac{\partial y}{\partial u}$ et $x\dfrac{\partial y}{\partial v}$ sont les deux invariants au moyen desquels tous les autres s'expriment. En écrivant que le système

$$x\frac{\partial y}{\partial u}-\lambda=0, \qquad x\frac{\partial y}{\partial v}-\mu=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

reste invariant par l'opération $T(f)$, on a les résolvantes que doivent vérifier λ et μ (rationnels dans le domaine adopté):

$$\left.\begin{aligned}T(\lambda)+\lambda\frac{\partial A}{\partial u}+\mu\frac{\partial B}{\partial u}=0\\ T(\mu)+\lambda\frac{\partial A}{\partial v}+\mu\frac{\partial B}{\partial v}=0\end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{R}).$$

On pourrait aussi déduire de là l'équation unique à laquelle doit satisfaire le quotient

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

On remarquera aisément qu'avec les équations (a) tout système irréductible régulier renferme une autre équation du premier ordre, qui en est une condition d'intégrabilité:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial \mu}{\partial u}-\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

La méthode générale conduit alors pour la *forme normale* aux équations

$$\frac{\mu\dfrac{\partial x}{\partial u}-\lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}}{X\dfrac{\partial Y}{\partial y}}=\frac{\mu\dfrac{\partial y}{\partial u}-\lambda\dfrac{\partial y}{\partial v}}{-X\dfrac{\partial Y}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial \mu}{\partial u}-\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}{\dfrac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}}=\frac{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{1}\ldots\ldots\ldots\ldots(\Omega),$$

sur lesquelles on raisonnera comme plus haut.

Par exemple, si l'on pose

$$\lambda_0=\lambda(t_0, x, y), \quad \mu_0=\mu(t_0, x, y),$$

le système de solutions (x, y) de $T(f)=0$ qui pour $t=t_0$ prennent respectivement les valeurs u et v (système principal pour $t=t_0$) est défini par les équations

$$\frac{\mu\dfrac{\partial x}{\partial u}-\lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\mu_0}=\frac{\mu\dfrac{\partial y}{\partial u}-\lambda\dfrac{\partial y}{\partial v}}{-\lambda_0}=\frac{\dfrac{\partial \mu}{\partial u}-\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}}{\dfrac{\partial \mu_0}{\partial x}-\dfrac{\partial \lambda_0}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{1}.$$

On voit quelle est la complication de ces équations, où interviennent les valeurs particulières de λ et μ; alors que les éléments les plus simples, correspondant au *groupe-type* de rationalité, sont définis par les équations

$$T(Y)=0, \quad \frac{\partial Y}{\partial u}=\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial Y}{\partial v}, \qquad X=\frac{\mu}{\dfrac{\partial Y}{\partial v}},$$

dont les deux premières forment un système complet qui peut être quelconque.

21. (B) Considérons encore le cas où le groupe de rationalité est le groupe fini

$$X=\frac{ax+b}{cx+d}, \qquad Y=\frac{ay+b}{cy+d} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Gamma),$$

a, b, c, d étant les constantes arbitraires.

Nous définirons ce groupe par l'équation aux différentielles totales

$$\frac{dX\,dY}{(X-Y)^2}=\frac{dx\,dy}{(x-y)^2},$$

qui nous donne immédiatement les trois invariants du premier ordre

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{(x-y)^2}=\lambda, \quad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{(x-y)^2}=\mu, \quad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v}}{(x-y)^2}=\nu\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Sigma).$$

Les fonctions rationnelles λ, μ, ν devront satisfaire au système résolvant:

$$\left.\begin{aligned}&T(\lambda)+2\frac{\partial A}{\partial u}\lambda+\frac{\partial B}{\partial u}\nu=0\\ &T(\mu)+2\frac{\partial A}{\partial v}\lambda+\left(\frac{\partial B}{\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\right)\mu+2\frac{\partial B}{\partial u}\nu=0\\ &T(\nu)+\frac{\partial A}{\partial v}\nu+2\frac{\partial B}{\partial v}\mu=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{R}),$$

qui ne possèdera qu'un seul système de solutions rationnelles.

On obtient aisément la *forme normale* du système (Σ), il suffit de résoudre les trois équations

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{(X-Y)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{(X-Y)^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{(X-Y)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\lambda\\ &2\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{(X-Y)^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{(X-Y)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+2\frac{\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{(X-Y)^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=\mu\\ &\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{(X-Y)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{(X-Y)^2}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\dfrac{\partial X}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{(X-Y)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2=\nu\end{aligned}\right\}\ldots(\Omega),$$

par rapport aux trois invariants absolus du groupe. Mais cette résolution n'est pas nécessaire pour l'application de la méthode de transformation des équations (Ω) indiquée plus haut.

Il convient d'observer ici que si l'on définit (Γ) par l'invariance de $\frac{dxdy}{(x-y)^2}$ la permutation de x et y est possible, on doit donc la faire figurer explicitement dans (Γ).

Les invariants évidents

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \alpha, \qquad \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \beta,$$

sont donnés par les équations symétriques

$$\alpha + \beta = \frac{\mu}{\nu}, \qquad \alpha\beta = \frac{\lambda}{\nu}.$$

La résolvante, dont dépend α,

$$T(\alpha) + \frac{\partial B}{\partial u} - \alpha \frac{\partial B}{\partial v} = \alpha \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u} \right),$$

admet deux solutions α, β dont les fonctions symétriques élémentaires sont rationnelles.

Si α et β sont rationnels tous deux, la permutation de x et y n'est pas possible: le système irréductible régulier s'obtiendra en ajoutant aux équations précédentes (Σ) une nouvelle équation rationnelle qui résulte de ce que

$$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{\mu^2 - 4\lambda\nu}{\nu^2} = \Delta^2,$$

où Δ est rationnel: cette équation est simplement

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{(x-y)^2} = \Delta.$$

22. (C) Des circonstances analogues se présentent toutes les fois où le groupe de rationalité (Γ) comprend des transformations finies non engendrées par ses transformations infinitésimales, autrement dit est un *groupe complexe*.

Supposons par exemple que ce soit le groupe:

$$X = f(x), \quad Y = g(y),$$

où f et g sont arbitraires, la permutation de x et y étant possible. Les quotients

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}} = \alpha, \qquad \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \beta,$$

peuvent s'échanger par les transformations du groupe. Ce sont leurs fonctions symétriques qui sont rationnelles, et si l'on pose

$$\alpha\beta = \lambda, \quad \alpha + \beta = \mu$$

le système irréductible régulier est formé des deux relations identiques:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \mu \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 - \mu \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(\Sigma),$$

avec $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Le système résolvant dont une seule solution est rationnelle sera

$$\left.\begin{aligned} T(\mu) - \mu \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u}\right) + 2\frac{\partial B}{\partial u} - 2\lambda \frac{\partial A}{\partial v} - \mu^2 \frac{\partial A}{\partial v} = 0 \\ T(\lambda) + \mu \frac{\partial B}{\partial u} - 2\lambda \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u}\right) - \lambda\mu \frac{\partial A}{\partial v} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(\mathrm{R}).$$

Lorsque α et β sont rationnels, le système régulier (Σ), au lieu de se composer des *deux* relations linéaires écrites plus haut, comporte *trois* équations quadratiques, l'équation nouvelle étant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \alpha - \beta.$$

On verrait sans difficulté que ces équations sont *rationnellement distinctes*, bien qu'elles soient fonctionnellement dépendantes.

Les trois équations du système irréductible régulier (Σ) conduisent aisément à la forme normale (Ω) où interviennent les *quatre* invariants relatifs du groupe

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Les remarques que l'on vient de faire suffisent pour rendre compte des diverses circonstances qui peuvent se présenter lorsqu'on veut utiliser pour la théorie de la rationalité les *types* de groupes à n variables (engendrés par leurs transformations infinitésimales) donnés par Lie et M. Cartan, quand ils sont *imprimitifs*.

D'abord un groupe G engendré par des transformations infinitésimales peut être compris dans un *groupe complexe* Γ: on obtient Γ en ajoutant à G un nombre fini de transformations, formant groupe, et appartenant au *plus grand groupe H dans lequel G est invariant.*

On aura ainsi divers types de groupes Γ correspondant aux divers types de groupes finis contenus dans H.

En outre si Γ est imprimitif et se définit comme sous groupe du groupe

$$\begin{aligned} &Z_i = \phi_i(z_1, \ldots z_p) && (i = 1, \ldots, p) \\ &Z_j = \psi_j(z_{p+1}, \ldots, z_{p+q}) && (j = p+1, \ldots, p+q) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Z_k = \omega_k(z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_n) && (k = p+q+\ldots+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

où les $\phi_i, \psi_i, \ldots, \omega_k \ldots$ sont arbitraires, il peut arriver que certains ensembles de variables z, en même nombre, subissent des transformations appartenant à un même groupe (définies par les mêmes équations différentielles).

Le groupe Γ comprendra alors normalement les permutations qui échangent entre eux les éléments homologues de ces ensembles. Il pourra y avoir une réduction, par adjonction de grandeurs algébriques du domaine de rationalité $[\Delta]$ à un groupe engendré par des transformations infinitésimales, mais la *forme normale* du groupe restera composée d'équations d'ordre élevé en *nombre surabondant,* c'est-à-dire que les premiers membres de ces équations seront rationnellement mais non fonctionellement distincts.

Il est clair que si le groupe Γ est *imprimitif* et compris dans H, on peut obtenir pour le système irréductible régulier correspondant une *forme réduite,* que j'appelle encore *forme-type* et qu'on obtient en faisant jouer à H le rôle joué dans la théorie générale par le groupe ponctuel général Γ_n.

On obtiendra ainsi des *groupes de rationalité-types* identiques à peu de chose près aux types de groupes adoptés par Lie: les invariants rationnellement indépendants de ces groupes Γ sont connus rationnellement dans $[\Delta]$ et réciproquement, mais *le nombre des invariants relatifs de* Γ (invariants qui subissent toujours une transformation linéaire, quand on exécute une transformation de H) peut dépasser le nombre des équations rationnellement distinctes, parce que dans la forme normale réduite les dénominateurs des premiers membres ne sont plus nécessairement identiques.

23. (D) Un exemple simple éclaircira cela:

Supposons pour l'équation

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + A(t, u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + B(t, u, v)\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

dont x, y sont deux solutions distinctes, le groupe de rationalité

$$\left.\begin{aligned} X &= x\phi'(y) + \psi(y) \\ Y &= \phi(y) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Gamma),$$

où ϕ et ψ sont arbitraires. Sous cette forme on a, pour le groupe, les équations de définition

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x},$$

et l'on obtient immédiatement les invariants fonctionnellement distincts

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}} = \lambda, \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2} = \mu,$$

d'où l'on peut déduire deux relations linéaires

$$\frac{\partial y}{\partial u} - \lambda\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial u} - \lambda\frac{\partial x}{\partial v} - \mu\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A).$$

En leur appliquant la méthode générale, on trouve

$$\frac{\partial Y}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \lambda\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \lambda\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \mu\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0,$$

où l'on voit apparaître quatre expressions linéairement distinctes:

$$\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial y},$$

au lieu de trois que demande la théorie si *le système* (A) *est irréductible régulier.*

Mais on forme aisément le système irréductible régulier qui comporte *trois* relations du premier ordre et s'écrit sous la *forme normale*

$$\frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)}{-\dfrac{\partial Y}{\partial y}\dfrac{\partial X}{\partial x}} = \frac{\left(\dfrac{\partial y}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\mu\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)}{\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)^2},$$

où l'échange de x et y est possible.

Ces trois relations sont du type

$$\Delta = h^2 = hk = k^2,$$

mais deux d'entre elles, comprenant Δ, ne permettent jamais de conclure, *sans restriction,* $h = k$.

Si maintenant on considère (Γ) comme sous-groupe de

$$\left.\begin{aligned} Y &= \phi(y) \\ X &= f(x, y) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(H),$$

le système (A) conduit pour la *forme normale réduite* à

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\lambda\dfrac{\partial y}{\partial v}} = 1, \qquad \frac{\mu\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}}{\dfrac{\partial Y}{\partial y}},$$

avec
$$\frac{\partial Y}{\partial y} \neq 0.$$

V. *Réduction du Groupe de Rationalité.*

24. Le problème de *l'intégration logique,* pour une équation

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I),$$

exige la résolution des questions suivantes:

1°. Détermination de tous les *types* Γ de groupes contenus dans le groupe ponctuel général Γ_n, à n variables $z_1, \ldots, z_n$ dont les équations de définition sont rationnelles.

Ce problème peut être regardé comme résolu en principe par les recherches de Lie et de M. Cartan.

2°. Détermination du groupe de rationalité Γ de (I).

Chaque type de groupe (Γ') est caractérisé par un *système complet* d'invariants différentiels, quand on y regarde les z comme des fonctions de n variables $x_1, \ldots, x_n$ *non transformées*: ces invariants différentiels sont liés à ceux de Γ_n qui sont les quotients $\frac{D_i}{D}$ par un *système résolvant* qui possède une solution rationnelle en $x, x_1, \ldots, x_n$ quand Γ' renferme le groupe Γ.

Si Γ' coïncide avec Γ, ce système résolvant ne possède qu'*une seule solution rationnelle*: le groupe de rationalité est donc aussi *le plus petit groupe dont les invariants différentiels sont rationnels dans* $[\Delta]$.

Lorsque Γ est connu la nature des transcendantes $z_1, \ldots, z_n$ *attachés à ce groupe* est fixée: une décomposition du groupe Γ mettra en évidence leurs propriétés essentielles.

Soit Γ_1 un *plus grand sous-groupe invariant* dans Γ dont les équations de définition sont rationnelles; ses invariants différentiels subissent par les transformations de Γ des transformations formant un groupe Γ/Γ_1 qui ne possède pas de sous-groupe invariant maximum (groupe *simple*).

Soit de même Γ_2 un plus grand sous-groupe (à équations rationnelles) invariant dans Γ_1; les invariants de Γ_2 subissent par les transformations de Γ_1 des transformations formant le groupe Γ_1/Γ_2, etc.....

Au bout d'un nombre *limité* d'opérations (la limitation résulte du fait que tout groupe Γ_i possède au moins un invariant rationnel n'appartenant pas aux précédents et de l'application du théorème de M. Tresse) on tombe sur un groupe Γ_p formé de la transformation identique. Le groupe Γ_{p-1} est simple.

Les équations qui constituent un système irréductible régulier (Σ) peuvent donc s'écrire de manière à mettre en évidence:

Un système définissant $z_1, \ldots, z_n$ au moyen des invariants différentiels de Γ_{p-1};

[redacted]

dont les coefficients dépendent de $x, x_{p+1}, \ldots, x_n$ et des *paramètres* $z_1, \ldots, z_p$, *les* Z_{p+i} *à la fois comme fonction des* x *et des paramètres* z.

Il est donc nécessaire d'envisager dans la formation du système irréductible régulier (Σ) les éléments $\frac{\partial Z}{\partial z_i}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial z_i \partial z_j}, \ldots$ en même temps que les dérivées $\frac{\partial Z}{\partial x_{p+i}}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial x_{p+i}\partial x_{p+j}}, \ldots$. Cela entraîne quelques modifications qui n'atteignent rien d'essentiel. Des exemples simples suffisent à mettre en évidence ces modifications.

Observons cependant que les transformations des *coefficients* des Z_{p+i} $(i=1, \ldots n-p)$ peuvent être de forme beaucoup plus générale que celles des Z_{p+i} entre eux; comme cela résulte de la recherche des types de groupes intransitifs.

L'exemple évident, signalé par M. Cartan, du groupe

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z + f(x, y),$$

où f est quelconque, ou bien est la *solution la plus générale d'un système quelconque, linéaire,* d'équations aux dérivées partielles

$$F_i\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

à coefficients dépendant seulement de x *et* y et qui peut se présenter pour l'équation

$$T(z) = \frac{\partial z}{\partial t} + C(x, y, w, t)\frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

sous des conditions faciles à donner—c'est-à-dire pour une équation de premier ordre

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C(x, y, w, t),$$

dépendant de deux paramètres—fait prévoir la complication possible des transformations du groupe Γ de rationalité quand on laisse des paramètres dans l'équation étudiée[1].

VI. *Comment on tire parti de relations connues satisfaites par un système fondamental.*

25. Avant de passer aux applications particulières, je signalerai que la considération des *coordonnées* d'un polynome $P\left(Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, x\right)$ permet, par *une méthode régulière de calcul,* de déduire de tout système d'équations rationnelles vérifié par $Z_1, \ldots, Z_n$ et leurs dérivées en $x_1, \ldots, x_n$ un autre système (peut-être *réductible*) ayant la *forme canonique.* Si l'on traite en effet ce système de la même manière que le système

* La théorie précédente *d'intégration logique* des équations linéaires aux dérivées partielles a été résumée dans des *Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1893, 1895) et développée dans ma thèse (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 1898), la définition des *systèmes irréductibles réguliers* auxquels s'appliquent exclusivement les raisonnements et conclusions de ma thèse a été communiquée en Octobre 1898, à MM. Painlevé et Vessiot, qui avaient amicalement appelé mon attention sur l'ambiguïté de certains énoncés. La théorie des *coordonnées* des polynomes, avec son application à la détermination de la *forme normale* d'un système irréductible régulier, a été exposée dans un mémoire présenté en 1902 à l'Académie des Sciences et qui a commencé à paraître aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1908).

régulier (Σ) tout ce que nous avons dit subsiste, fors que le nombre h des coordonnées de P peut être $(k+r)$, où r est quelconque. En résolvant les k relations obtenues par rapport à $l_1, \ldots, l_k$ on a le système

$$l_i = \sum_{j=1}^{r} l_{k+j} \frac{\Delta_{i,j}}{\Delta} \qquad (i=1, \ldots, k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

d'où l'on déduit les identités en $z_1, \ldots, z_n$

$$X\left(\frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}\right) = 0,$$

qui permettent de former le système compatible, rationnel:

$$\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} = \omega_{ij}(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1, \ldots, k;\ j=1, \ldots, r) \ldots\ldots\ldots\ldots (B),$$

où les ω_{ij} sont calculés de manière que le système précédent possède la solution qui pour $x = x_0$ satisfait aux conditions

$$x_i = R_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

où les R_i sont rationnels et quelconques.

Les équations $l_i = \Sigma l_{k+j}\omega_{ij}$ $(i=1, \ldots, k)$ demeurent inaltérées quand on exécute sur les z une transformation (z, z') qui conduit d'une solution du système (B) à une autre et réciproquement.

Eu égard à la transformation linéaire des l_i quand on passe des z aux z', on trouve que ces transformations (z, z') satisfont aux conditions, en nombre rk:

$$\sum_{p=1}^{k} \lambda_{i,p}\left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right)\omega_{pj}(z') + \lambda_{i,k+j}\left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right) = \sum_{q=1}^{r} \omega_{iq}(z)\left\{\sum_{m=1}^{k} \lambda_{k+q,m}\left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right)\omega_{mj}(z') + \lambda_{k+q,k+j}\left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right)\right\}$$
$$(i=1, \ldots, k;\ j=1, \ldots, r) \ldots (C).$$

On établirait aisément *qu'elles définissent un groupe* Γ *dont on a rationnellement les invariants.* Ce groupe n'est pas nécessairement le groupe de rationalité de $X(z) = 0$ puisque (Σ) n'est pas même irréductible.

26. Je voudrais encore faire remarquer qu'il est aisé de *préciser de quel secours peut être l'intégration d'une équation*

$$Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

pour celle d'une autre équation aux mêmes variables

$$Z(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + A_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0.$$

Soient respectivement $Y_1, \ldots, Y_n$ et $Z_1, \ldots, Z_n$ les éléments de deux systèmes fondamentaux: s'il existe de tels systèmes pour lesquels les transcendantes Y_i et Z_j ne sont pas *étrangères*, c'est-à-dire pour lesquels on peut ajouter aux équations $Y(Y_i) = 0$, $Z(Z_j) = 0$ des relations rationnelles en $Y_i, \frac{\partial Y_i}{\partial x_p}, \ldots, Z_j, \frac{\partial Z_j}{\partial x_p}, \ldots$ dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité adopté et renfermant effectivement les deux systèmes de fonctions $Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n$; l'application de la méthode générale qui a servi à transformer (Σ) conduit à les mettre sous la forme

$$\Omega_i\left(Z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \omega_i(x) \qquad (i=1, \ldots, k),$$

$$\Omega_{k+j}\left(Z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \omega_{k+j}\left(x, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}, \ldots\right) \qquad (j=1, \ldots, r),$$

où les Ω sont tous les invariants rationnels et rationnellement distincts d'un certain type de groupe Γ de transformations en $Z_1, \ldots, Z_n$ et où les ω sont rationnels dans le domaine $[\Delta']$ formé par l'adjonction à $[\Delta]$ de $Y_1, \ldots, Y_n$. On peut d'ailleurs supposer que les ω_{k+j} sont également des invariants différentiels pour un groupe (γ) de transformations en $Y_1, \ldots, Y_n$.

Enfin le système précédent peut être supposé *irréductible et primitif*; il contient alors normalement des équations

$$\Omega_{k+r+l}\left(Y, \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \omega_{k+r+l}(x) \qquad (l=1, \ldots, s),$$

qui donnent avec les précédentes l'expression rationnelle de tous les invariants distincts du groupe (γ).

Applications.

I. *Équation du second ordre. Équations différentielles linéaires.*

27. L'étude de l'équation

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + A(t, u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + B(t, u, v)\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

faite d'après les principes précédents, n'entraîne pas d'autre difficulté—et celle-là insurmontable dans le cas général—que de reconnaître si un système résolvant formé, a, ou non, une solution rationnelle. En effet Lie, et après lui M. Cartan, a donné tous les types de groupes finis et infinis à deux variables engendrés par leurs transformations infinitésimales et l'on en déduit sans difficulté les groupes *complexes.* Le nombre de ces types croît assez vite quand on passe d'une variable à deux : il y en a effet une soixantaine et quelques-uns renferment un entier arbitraire. Mais la plupart sont *imprimitifs,* c'est-à-dire que parmi les invariants différentiels figure par exemple :

$$\frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial v} = \lambda.$$

La solution y de $T(y) = 0$ est donc donnée par un système complet de deux équations —système qui peut être quelconque—et se distingue nettement des autres.

Quand on envisage seulement les groupes primitifs, on n'en trouve que six—dont trois sont finis :

Groupe général.

Groupe dont les transformations multiplient les aires par une constante.

Si l'on pose
$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$
$$\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial u} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial v} = \mu$$
sont rationnels.

Groupe des transformations qui conservent les aires :
$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$
est rationnel. C'est le multiplicateur de Jacobi.

Groupe projectif général.

Les invariants s'obtiennent en observant que l'équation aux différentielles totales, $dxd^2y - dyd^2x = 0$, demeure inaltérée par les transformations du groupe.

Groupe linéaire général.

Les invariants s'obtiennent en observant que le système
$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0,$$
admet les transformations du groupe.

Groupe linéaire spécial.

Avec les équations précédentes, on a $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = D$ où D est rationnel, c'est-à-dire que l'élément d'intégrale double $dxdy$ est invariant.

Remarquons en passant que *toutes les fois où le groupe de rationalité est fini* (et cette remarque est générale) les transcendantes x, y peuvent être amenées à faire partie du domaine de rationalité par des *adjonctions de transcendantes attachées à des groupes linéaires.*

Ceci augmente l'importance des recherches faites dans les cas où le groupe de rationalité est linéaire, ce qui arrive toujours lorsque dans l'équation
$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$
les A_i sont linéaires en $x_1, \ldots, x_n$.

On retrouve ainsi comme cas particulier, soit directement, soit en faisant intervenir *l'équation adjointe* de Lagrange, la théorie de M. Émile Picard pour les équations différentielles linéaires. Mais on n'ajoute rien d'essentiel à cette théorie. Les observations faites par Fuchs et M. Darboux sur les propriétés des intégrales algébriques se présentent simplement de façon nécessaire.

II. *Problème Normal de Lie.*

28. Il est bien clair que la théorie *d'intégration logique* des équations aux dérivées partielles donne le moyen de préciser pour *tous les problèmes de la théorie des groupes de Lie* (le domaine de rationalité étant fixé) la difficulté de la solution, cette difficulté étant toujours caractérisée par un groupe de rationalité. Dans certains cas les avantages qu'elle apporte sont de pure forme, mais il n'en est pas toujours ainsi. Lie et ses élèves ont fait appel, suivant les méthodes habituelles, à des *changements de variables transcendants* et à des déterminations *successives d'éléments indissolublement liés.*

Par exemple, Lie est revenu à diverses reprises sur l'étude des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles qui admettent des transformations infinitésimales. Il énonce ainsi le *problème normal* de sa théorie.

Une équation
$$A(f) = \Sigma \alpha_\nu (x_1, \ldots, x_{r+1}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
à $(r+1)$ variables admet les r transformations infinitésimales indépendantes
$$X_k(f) = \Sigma \xi_{k\nu}(x_1, \ldots, x_{r+1}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1, \ldots, r),$$
qui satisfont aux conditions
$$(X_i, X_k) = \Sigma c_{iks} X_s(f);$$
on suppose qu'il n'existe aucune identité
$$\phi(x) A(f) + \Sigma \phi_k(x) X_k(f) = 0,$$
où les ϕ sont quelconques et l'on demande *d'utiliser le plus possible la connaissance des $X_k(f)$ pour l'intégration de l'équation.*

En supposant que l'équation $A(f) = 0$ soit *la plus générale possible* parmi celles qui satisfont à ces conditions, Lie a indiqué une méthode de détermination *successive* des solutions de (1), mais le groupe de rationalité n'a pas été mis en évidence. C'est ce groupe, qui est *linéaire,* qui caractérise pour nous la simplification apportée dans l'intégration.

Par exemple, si les X_i forment un groupe *intégrable* dépourvu de transformation distinguée, le système obtenu en ajoutant à (1) les équations
$$X_i(f) + E_i(f) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$
où les $E_i(f)$ définissent le *groupe adjoint,* admet r solutions pour lesquelles on peut prendre
$$Z_1 = e_i - \omega_i(x_1, \ldots, x_{r+1}) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$
Les ω sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_{r+1}$ *attachées à un groupe linéaire intégrable.*

III. *Groupes infinis simples. Équations les plus générales qui leur correspondent.*

29. Il résulte des recherches de Lie qu'il existe, à n variables, quatre types de groupes infinis *simples* ; M. Cartan a démontré qu'il *n'y en a pas d'autres.* Ce sont :

(1°) le groupe ponctuel général Γ_n à n variables ;

(2°) le groupe V_n dont les transformations conservent les volumes ;

(3°) le groupe W_n des transformations de contact, qui n'altère pas l'équation
$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0$$
où $n = 2k + 1$ et où $z, x_1, \ldots, x_k, p_1, \ldots, p_k$ sont les n variables transformées ;

(4°) le groupe de transformations à $n=2k$ variables qui conserve l'intégrale double

$$\iint dx_1 dy_1 + \ldots + dx_k dy_k.$$

Il est facile d'indiquer des équations *spéciales*, dépendant de fonctions rationnelles arbitraires en nombre aussi grand que possible, dont le groupe de rationalité Γ est l'un de ces groupes simples.

II.—Pour le groupe V_n dont l'équation de définition est

$$\frac{\partial (X_1, \ldots, X_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = 1,$$

si l'on regarde les x comme des fonctions de $t, u_1, \ldots, u_n$ satisfaisant à

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + A_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial u_n} = 0,$$

l'invariant différentiel caractéristique est

$$D = \frac{\partial (x_1, \ldots, x_n)}{\partial (u_1, \ldots, u_n)},$$

et la résolvante correspondante,

$$T(D) + D\left(\frac{\partial A_1}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial u_n}\right) = 0,$$

est l'équation au multiplicateur de Jacobi. On obtiendra l'expression la plus générale de $D, A_1, \ldots, A_n$ en posant

$$DA_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

avec
$$D + \frac{\partial \omega_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial \omega_n}{\partial u_n} = 0.$$

L'équation cherchée est donc

$$DT(f) = \frac{\partial (\omega_1, f)}{\partial (t, u_1)} + \frac{\partial (\omega_2, f)}{\partial (t, u_2)} + \ldots + \frac{\partial (\omega_n, f)}{\partial (t, u_n)} = 0,$$

où les ω sont des fonctions arbitraires en $u_1, \ldots, u_n$ et t, *dans le domaine de rationalité adopté.*

III.—Si l'on veut que l'équation

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_k dx_k = 0$$

soit une relation invariante entre $(2k+1) = n$ solutions, formant un système fondamental de l'équation

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + A_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + A_n \frac{\partial f}{\partial u_n} = 0,$$

il faut et il suffit pour cela que les rapports des expressions

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_i} - \ldots - p_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

soient des invariants pour le groupe de rationalité. On pourra donc poser

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_k dx_k = \rho\,(\lambda_1 du_1 + \ldots + \lambda_{2k} du_{2k} + du_{2k+1}),$$

où les λ_i seront des fonctions rationnelles. Ces invariants devront satisfaire aux équations résolvantes :

$$T(\rho\lambda_i) + \frac{\partial A_1}{\partial u_i}\rho\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial A_{2k}}{\partial u_i}\rho\lambda_{2k} + \frac{\partial A_{2k+1}}{\partial u_i}\rho = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2k),$$

$$T(\rho) + \frac{\partial A_1}{\partial u_{2k+1}}\rho\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial A_{2k}}{\partial u_{2k+1}}\rho\lambda_{2k} + \frac{\partial A_{2k+1}}{\partial u_{2k+1}}\rho = 0,$$

d'où l'on conclut simplement :

$$T(\lambda_i) + \frac{\partial A_i}{\partial u_i}\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial A_{2k+1}}{\partial u_i} = \lambda_i\left\{\frac{\partial A_1}{\partial u_{2k+1}}\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial A_{2k+1}}{\partial u_{2k+1}}\right\} \quad (i = 1, \ldots, 2k) \ldots (\mathrm{R}).$$

Pour résoudre le système (R), je pose

$$A_{2k+1} = -\{\lambda_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{2k} A_{2k}\},$$

où λ_0 est une nouvelle inconnue et l'on reconnait facilement que *toutes les dérivées des A_i disparaissent des équations* (R). Ces équations sont donc simplement $2k$ équations linéaires aux inconnues $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ et λ_0 demeure arbitraire.

Si l'on pose, pour la symétrie, $t = u_0$ et

$$\omega_{ij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial u_i} + \lambda_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial u_{2k+1}} - \lambda_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_{2k+1}} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, 2k),$$

le système qui définit les A_i peut s'écrire

$$\omega_{i0} + \omega_{i1} A_1 + \ldots + \omega_{i,2k} A_{2k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2k).$$

On aura donc pour l'équation cherchée

$$\Omega T(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial u_{2k}} & \frac{\partial f}{\partial u_{2k+1}} \\ \omega_{10} & 0 & \ldots & \omega_{1,2k} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{2k,0} & \omega_{2k,1} & \ldots & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{2k} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

avec $\Omega = \| \omega_{ij} \|$.

Quand les λ sont pris arbitrairement dans le domaine de rationalité, les A_i sont également rationnels et le groupe de rationalité est bien W_n. Ce résultat est d'ailleurs lié à la réduction de $\lambda_1 du_1 + \ldots + du_{2k+1}$ à sa forme canonique. Il est nécessaire de supposer les λ choisis de façon que la réduite soit bien à $(2k+1)$ éléments. On peut appliquer ceci à partir de $k=1$ et former, par exemple, une équation

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + A\frac{\partial f}{\partial u} + B\frac{\partial f}{\partial v} + C\frac{\partial f}{\partial w} = 0,$$

dépendant de trois fonctions rationnelles arbitraires de u, v, w, t et dont le groupe de rationalité est défini par

$$dZ - PdX = \sigma(dz - pdx),$$

c'est-à-dire est le groupe des transformations de contact du plan.

IV.—Supposons enfin qu'il s'agisse d'obtenir une équation

$$T(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + A_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + A_{2k} \frac{\partial f}{\partial u_{2k}} = 0,$$

dont le groupe de rationalité soit formé des transformations qui conservent *l'élément d'intégrale double*

$$dx_1 dy_1 + \ldots + dx_k dy_k$$

(les x et les y étant $2k$ solutions convenables de $T(f) = 0$). Si u_i et u_j sont deux quelconques des variables $u_1, \ldots, u_{2k}$ l'expression

$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(u_i, u_j)} + \frac{\partial(x_2, y_2)}{\partial(u_i, u_j)} + \ldots + \frac{\partial(x_k, y_k)}{\partial(u_i, u_j)}$$

est un invariant; désignons par μ_{ij} son expression rationnelle en $t, u_1, \ldots, u_{2k}$. On forme aisément le système des résolvantes pour les μ_{ij}:

$$T(\mu_{ij}) + \frac{\partial A_1}{\partial u_i} \mu_{1j} + \ldots + \frac{\partial A_{2k}}{\partial u_i} \mu_{2k,j} = \frac{\partial A_1}{\partial u_j} \mu_{1i} + \ldots + \frac{\partial A_{2k}}{\partial u_j} \mu_{2k,i} \quad (i, j = 1, \ldots, 2k) \ldots (\mathrm{R}),$$

mais ici se présente pour la recherche des A une difficulté qui tient à ce que *les* μ_{ij} *ne sont pas arbitraires.*

Ils doivent satisfaire à toutes les identités

$$\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial u_l} + \frac{\partial \mu_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial \mu_{li}}{\partial u_j} = 0 \qquad (i \neq j \neq l = 1, \ldots, 2k),$$

et ces conditions nécessaires *sont suffisantes.* Observons qu'en posant

$$x_1 \frac{\partial y_1}{\partial u_j} + \ldots + x_k \frac{\partial y_k}{\partial u_j} = \sigma_j,$$

ces fonctions σ sont données par les équations—évidemment compatibles:

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial u_i} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_j} = \mu_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, 2k).$$

On passe de la solution particulière $\sigma_i, \ldots$ de ces relations à la solution *la plus générale* $\Sigma_i, \ldots$ en posant

$$\Sigma_i = \sigma_i + \frac{\partial \Omega}{\partial u_i} \qquad (i = 1, \ldots, 2k),$$

où Ω est arbitraire en $u_1, \ldots, u_{2k}$ et t.

On peut donc dire que *l'expression*

$$\sigma_1 du_1 + \ldots + \sigma_{2k} du_{2k}$$

est définie à une différentielle totale additive près $d\Omega$ par les équations précédentes; il en est donc ainsi de

$$x_1 dy_1 + \ldots + x_k dy_k.$$

En d'autres termes, les éléments X, Y les plus généraux qui satisfont aux conditions imposées sont liés à un système particulier x, y par l'équation aux différentielles totales

$$X_1 dY_1 + \ldots + X_k dY_k = x_1 dy_1 + \ldots + x_k dy_k + d\Omega,$$

où Ω est arbitraire en $t, u_1, \ldots, u_{2k}$ ou bien encore en $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ et t.

Le groupe de rationalité peut donc aussi se définir comme *l'ensemble des transformations* en $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ qui *conserve* À UNE DIFFÉRENTIELLE EXACTE près *la forme*

$$x_1 dy_1 + \ldots + x_k dy_k.$$

Soit alors
$$x_1 \frac{\partial y_1}{\partial u_i} + \ldots + x_k \frac{\partial y_k}{\partial u_i} = \sigma_i + \frac{\partial \omega}{\partial u_i} \quad (i = 1, \ldots, 2k),$$

où ω et les x, y sont inconnus; les résolvantes correspondantes sont

$$T\left(\sigma_i + \frac{\partial \omega}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial A_1}{\partial u_i}\left(\sigma_1 + \frac{\partial \omega}{\partial u_i}\right) + \ldots + \frac{\partial A_{2k}}{\partial u_i}\left(\sigma_{2k} + \frac{\partial \omega}{\partial u_{2k}}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2k) \ldots (\mathrm{R}).$$

Si l'on pose
$$T(\omega) + A_1 \sigma_1 + \ldots + A_{2k} \sigma_{2k} = \phi,$$

où nous pouvons cette fois regarder ϕ comme connu, les A sont donnés par le système

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial u_i} + A_1\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial u_1} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i}\right) + \ldots + A_{2k}\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial u_{2k}} - \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial u_i}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, 2k).$$

L'équation cherchée est donc explicitement

$$MT(f) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial u_{2k}} \\ \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial u_1} & 0 & \ldots & \mu_{1,2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \sigma_{2k}}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial u_{2k}} & \mu_{2k,1} & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où $M = \|\mu_{ij}\|$; elle dépend des $2k$ fonctions $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2k}$ arbitraires *dans le domaine de rationalité.* La fonction ϕ, si elle n'est pas la dérivée en t d'une fonction du domaine, doit être conservée. Lorsque $\phi = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ où ψ appartient au domaine, on peut supprimer ϕ de l'équation en modifiant les σ_i.

Tout se passe ici pour les σ comme dans le problème où il s'agit de déterminer $\sigma_1, \sigma_2, \mu_{12}$ en u_1, u_2 dans un certain domaine de rationalité, de façon que $\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} - \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} = \mu_{12}$; on n'a pas toutes les solutions en se donnant arbitrairement σ_1, σ_2 dans le domaine.

Les transformations infiniment petites du groupe de rationalité (bien connu dans la théorie des transformations de contact) sont obtenues en résolvant

$$\delta(x_1 dy_1 + \ldots + x_k dy_k) = d\Omega \,.\, \delta u,$$

ce qui donne
$$x'_i = x_i + \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \delta u, \quad y'_i = y_i - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \delta u \quad (i = 1, \ldots, k),$$

où ϕ demeure arbitraire.

IV. *Systèmes complets d'équations linéaires.*

30. Un système complet, mis sous la forme de Jacobi, et composé de p relations à $(m+p)$ variables, résolubles en $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_p}$, définit des transcendantes $Z_1, \ldots, Z_m$ fonctions de $(m+p)$ variables et *attachées au groupe ponctuel général* Γ_m *ou à l'un des sous-groupes types* Γ, dans le domaine de rationalité $[\Delta]$ dont font partie les coefficients.

La théorie de la rationalité pourrait, en effet, se développer comme pour une seule équation, p des variables ($x_1, \ldots, x_p$ par exemple) jouant le rôle de la variable unique x et les autres $x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}$ jouant le rôle des *variables principales*.

Il est bon d'observer que les transcendantes $Z_1, \ldots, Z_m$ seront définies par des systèmes auxiliaires Σ *identiques* à ceux qui se présentent pour $(m+1)$ variables : il y aura seulement à envisager pour chacune d'elles les p relations

$$X_1(Z)=0, \ldots, X_p(Z)=0,$$

qui sont les seules où interviennent $\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial x_p}$.

Une réduction *théorique* du problème permettra de n'ajouter ces relations que successivement : d'abord toutes celles qui renferment des dérivées en x_1, c'est-à-dire $X_1(z_i)=0$, puis toutes celles qui renferment des dérivées en x_2, etc. C'est à ce même point de vue théorique qu'un système complet intégrable, de deux équations de Riccati à deux variables, se ramène, d'après M. Darboux, à deux équations successives à une seule variable.

Cette observation s'applique encore pour ramener, d'une manière générale, la détermination des fonctions de plusieurs variables *attachées à un groupe fini*, à une succession de déterminations de *fonctions d'une seule variable attachées au même groupe*, dans des domaines convenablement choisis.

On peut aussi envisager l'une des équations du système et fixer son groupe de rationalité, sachant qu'elle possède des solutions qui satisfont aux $(m+p-1)$ autres —c'est-à-dire appliquer à une seule équation la théorie générale.

La méthode de Jacobi peut d'ailleurs être présentée comme une simple application de cette théorie générale. Supposons, par exemple, que pour l'équation

$$X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

on sache qu'une solution au moins, f, vérifie une équation linéaire qu'on écrit

$$B(f)=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+b_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

on en déduira immédiatement, en appliquant $X(f)$, ce qui donne

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+\Sigma_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}=0 \qquad (i=1, \ldots, n),$$

$$X[B(f)]=B'(f)=b'_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+b'_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

où
$$b'_i=X(b_i)-B(A_i) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

($B'(f)$ est précisément le *crochet* de Jacobi $[X, B]$ obtenu d'un seul coup.)

Si $B'(f)$ est distinct de $B(f)$, on formera de même $X[B'(f)]=B''(f)$ et ainsi de suite. On ne s'arrête que lorsque $B^{(k)}(f)$ est combinaison linéaire de $B, B', \ldots, B^{(k-1)}$.

Le système ainsi obtenu s'écrit aussi, en regardant f comme fonction de $z_1, \ldots, z_n$:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}B(z_1)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial z_n}B(z_n)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z_1}B^{(k-1)}(z_1)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial z_n}B^{(k-1)}(z_n)=0,$$

et puisque l'opération $X(f)$ ne l'altère pas, on peut en le résolvant par rapport à $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_k}$ en tirer un système rationnel (Σ) comprenant $k(n-k)$ relations du premier ordre, dont on pourra disposer de manière qu'il admette une solution $z_1, \ldots, z_n$ satisfaisant pour $x=x_0$ à des conditions initiales données :

$$x_i=R_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Mais parmi tous ces systèmes de $k(n-k)$ relations figurent également ceux qui résultent des hypothèses $\frac{\partial f}{\partial z_1}=\ldots=\frac{\partial f}{\partial z_k}=0$, f arbitraire en $z_{k+1}, \ldots, z_{n-1}$, c'est-à-dire les équations linéaires

$$B^{(i)}(z_l)=0, \qquad (i=0, 1, \ldots, (k-1)), (l=k+1, \ldots, n),$$

qui expriment que $z_{k+1}, \ldots, z_n$ sont des solutions communes aux $(k+1)$ équations

$$B^{(i)}(f)=0, \quad X(f)=0.$$

Ce sont donc toutes les solutions de ce système, et il est nécessaire et suffisant, pour que l'hypothèse du début soit justifiée, que $k<n$.

V. *Équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires.*

31. On sait qu'une *intégrale complète* de l'équation

$$Z(z, x_1, \ldots, x_p, p_1, \ldots, p_n)=a \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

où $p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}$, peut, d'après Lie, être définie par les équations

$$X_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)=a_i \qquad (i=1, \ldots, n),$$

où les Z et les X satisfont à une identité

$$dZ-P_1dX_1-\ldots-P_ndX_n=\rho(dz-p_1dx_1-\ldots-p_ndx_n)\ldots\ldots(2),$$

dans laquelle les P sont connus rationnellement du moment où les X le sont.

Les Z, X, P vérifient les conditions

$$[Z, X_i]=[X_i, X_k]=[P_i, P_k]=[P_i, X_k]=0,$$
$$[P_i, X_i]=\rho, \quad [P_i, Z]=\rho P_i,$$
$$[Z, \rho]=\rho\frac{\partial Z}{\partial z}-\rho^2, \quad [X_i, \rho]=\rho\frac{\partial X_i}{\partial z}, \quad [P_i, \rho]=\rho\frac{\partial P_i}{\partial z},$$

qui sont suffisantes pour l'existence d'une identité (2) et où l'on a posé, suivant l'usage :

$$[F, \Phi] = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right\}.$$

L'équation $$[Z, f] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

à $(2n+1)$ variables possède donc les solutions $X_1, \ldots, X_n, Z$ et $\frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}$.

Pour fixer le groupe de rationalité qui leur correspond j'observe qu'un autre système de déterminations,

$$dZ - Q_1 dY_1 - \ldots - Q_n dY_n = \sigma (dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n),$$

donne $$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \frac{\rho}{\sigma} (dZ - Q_1 dY_1 - \ldots - Q_n dY_n).$$

Les X et les P sont donc définis, par l'identité (2), à une transformation de contact près *qui conserve* Z. Il est aisé d'en déduire la transformation la plus générale subie par $X_1, \ldots, X_n, \frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}$; on n'a qu'à former les équations finies d'une transformation de contact en partant des *équations directrices, parmi lesquelles on fera figurer* $Z = z$.

Les éléments $X_1, \ldots, X_n, \frac{P_2}{P_1}, \ldots, \frac{P_n}{P_1}$ sont donc en général *inséparables* : bien que les $(n-1)$ derniers s'expriment avec les premiers, les conditions auxquelles ils doivent satisfaire *n'isolent pas les* X *et on ne peut songer à les déterminer isolément.*

Cela n'aurait de sens que si le groupe de rationalité était imprimitif, les X étant transformés entre eux.

Cependant comme les P font partie du domaine de rationalité défini par les X on n'augmente pas la difficulté du problème en se proposant de les obtenir tous.

32. Examinons d'un peu plus près l'équation à deux variables

$$Z(x, y, z, p, q) = a,$$

et l'équation linéaire correspondante

$$[Z, F] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}).$$

Soit $$dZ - P dX - Q dY = \rho (dz - p dx - q dy) ;$$

si nous posons $P = TQ$, il existera pour (I) un système de 3 solutions X, Y, T qui satisfont aux deux relations

$$[X, Y] = 0, \quad [T, Y + TX] = 0.$$

Si ξ, η, θ désigne un système particulier de valeurs de X, Y, T on a évidemment

$$X = X(\xi, \eta, \theta, Z), \quad Y = Y(\xi, \eta, \theta, Z), \quad T = T(\xi, \eta, \theta, Z),$$

et ces trois fonctions de quatre variables devront satisfaire aux relations

$$\frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi, \theta)} - \theta \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\eta, \theta)} = 0,$$

$$\frac{\partial (T, Y)}{\partial (\xi, \theta)} - \theta \frac{\partial (T, Y)}{\partial (\eta, \theta)} + T \left\{ \frac{\partial (T, X)}{\partial (\xi, \theta)} - \theta \frac{\partial (T, X)}{\partial (\eta, \theta)} \right\} = 0,$$

qui sont les *équations de définition* du *groupe de rationalité.* Il est facile d'obtenir ses transformations infinitésimales ; soit

$$X = \xi + \epsilon x, \quad Y = \eta + \epsilon y, \quad T = \theta + \epsilon t,$$

l'une de ces transformations où x, y, t sont des fonctions à déterminer de ξ, η, θ et Z ; on aura explicitement

$$x = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad y = \phi(\xi, \eta, \theta, Z) - \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

$$t = \theta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi},$$

où ϕ demeure arbitraire en ξ, η, θ, Z.

Parmi les réductions qui peuvent se présenter pour le groupe Γ, lorsque Z est choisi de manière particulière, je signalerai celle qui correspond à l'existence d'une solution rationnelle ρ pour l'équation

$$[Z, \rho] = \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2.$$

Les éléments P, Q, X, Y sont donnés par

$$P dX + Q dY = dZ - \rho (dz - p dx - q dy),$$

donc définis à une transformation homogène de contact près à 2 variables et $X, Y, \frac{Q}{P}$ sont donnés à une *transformation de contact du plan près.*

Si l'équation à étudier est

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

nous pouvons l'écrire *en adjoignant la fonction algébrique* q au domaine de rationalité :

$$q = f(x, y, z, p).$$

La méthode de Lagrange conduit à chercher une fonction $\phi(x, y, p)$ telle que

$$dz = p dx + f dy,$$

où p est donné par $\phi(x, y, z, p) = a$, soit intégrable par une seule relation en x, y, z, dépendant d'une nouvelle constante. La fonction p est solution de l'équation

$$[q - f, \phi] = 0,$$

qui s'écrit développée

$$A(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(f - p \frac{\partial f}{\partial p} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial p}.$$

Elle admet en général trois solutions *inséparables.* Désignons par $\psi(x, y, z, p)$ une seconde solution ; pour que les deux équations

$$\phi(x, y, z, p) = a, \quad \psi(x, y, z, p) = b,$$

soient compatibles, il faut $$\frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + p \dfrac{\partial \phi}{\partial z}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + p \dfrac{\partial \psi}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial p}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial p}},$$

et l'on reconnait immediatement qu'alors

$$dz - p\,dx - f(x, y, z, p)\,dy = \lambda(d\phi - \omega\,d\psi),$$

où

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0$$

définit la troisième solution. Ces trois éléments ϕ, ω, ψ sont connus à une transformation de contact du plan près: si f est arbitraire *le groupe de rationalité est donc le groupe de transformations de contact du plan.*

Il serait facile d'indiquer tous les types possibles de réduction. Je ferai simplement observer que si z disparaît de l'équation $q = f(x, y, p)$, auquel cas il suffit de chercher ϕ de façon que $\phi(x, y, p) = a$ rende intégrable $p\,dx + f(x, y, p)\,dy$, l'équation qui définit ϕ est

$$A(\phi) = -\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Elle admet le multiplicateur 1, et le groupe de rationalité du cas général est formé des transformations

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\phi, \psi)} = 1.$$

33. Des remarques analogues aux précédentes peuvent se faire pour *l'intégration d'un système en involution*

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \ldots, X_q = a_q.$$

Tout se passe comme si, dans la résolution de l'identité

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n),$$

ou dans l'intégration de $[Z, f] = 0$, on connaissait rationnellement $X_1, \ldots, X_q$.

On sait que la transformation infinitésimale *de contact* la plus générale en $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$,

$$W(f) = \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \varpi_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + \ldots,$$

est définie par les formules

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \varpi_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial W}{\partial z}\right), \quad \zeta = \Sigma p_i\frac{\partial W}{\partial p_i} - W,$$

où W *fonction caractéristique* est quelconque en $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$.

Les transformations qui n'altèrent pas les éléments $z, x_1, \ldots, x_q$ satisfont donc aux conditions

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = \ldots = \frac{\partial W}{\partial p_q} = 0, \quad \Sigma p_{q+i}\frac{\partial W}{\partial p_{q+i}} - W = 0,$$

qui expriment que $\quad W = p_n F\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{p_{q+1}}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right).$

On déduira de là les transformations infinitésimales subies par

$$x_{q+1}, \ldots, x_n, \frac{p_{q+1}}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n},$$

qui sont les $(2n - 2q - 1)$ solutions du système en involution

$$(z, \phi) = (x_i, \phi) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

autres que les solutions rationnelles $z, x_1, \ldots, x_q$.

En posant $\qquad \omega_{q+i} = \frac{p_{q+1}}{p_n} \qquad (i = 1, \ldots, (n-1)),$

on aura

$$\xi_{q+i} = \frac{\partial F}{\partial\omega_{q+i}}, \quad \varpi_{q+i} = -\frac{\partial F}{\partial x_{q+i}} + \omega_{q+i}\frac{\partial F}{\partial x_n}, \quad \xi_n = F - \Sigma\omega_{q+i}\frac{\partial F}{\partial\omega_{q+i}} \qquad (i = 1, \ldots, (n-1)),$$

où F est arbitraire en

$$z, x_1, \ldots, x_q, \quad x_{q+1}, \ldots, x_n, \quad \omega_{q+1}, \ldots, \omega_n.$$

Comme F renferme à la fois les x et les ω, ces éléments sont donc en général *inséparables*: pour que les x se déterminent séparément il faut et il suffit que les $\frac{\partial F}{\partial\omega}$ ne dépendent plus des ω, c'est-à-dire que F soit linéaire en $\omega_{q+1}, \ldots, \omega_{n-1}$. Les x subiront alors une transformation ponctuelle et les ω les transformations projectives qui en résultent lorsqu'on *étend* le groupe ponctuel.

Il est bien évident que la *théorie de la rationalité,* à la fois *logique et nécessaire,* permet de discuter les diverses méthodes proposées par Jacobi, Cauchy, Mayer, Lie, etc., pour intégrer les équations (où systèmes d'équations) non linéaires à une inconnue. Les méthodes où l'on se propose la détermination *successive* ou *partielle* des éléments d'une intégrale complète ne se justifient que dans des cas particuliers; il n'y a guère que l'emploi des *caractéristiques de Cauchy* (ou de leurs équivalents) qui peut être légitimé.

VI. *Problème de Pfaff.*

34. Il s'agit de ramener une forme différentielle donnée

$$\Delta = a_1 du_1 + \ldots + a_n du_n,$$

à l'un ou à l'autre des types

$$dy - x_1 dy_1 - \ldots - x_p dy_p,$$
$$x_1 dy_1 + \ldots + x_p dy_p,$$

où les y et les x sont des fonctions *indépendantes* des n variables $u_1, \ldots, u_n$.

1°. Si l'on a $\qquad \Delta = x_1 dy_1 + \ldots + x_p dy_p,$

les équations $\qquad a_{i1}\xi_1 + \ldots + a_{in}\xi_n = a_i\xi_0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$ ....(1),

où $a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial u_k} - \frac{\partial a_k}{\partial u_i}$, possèdent $(n - 2p + 1)$ systèmes de solutions linéairement distinctes les équations

$$X_s(f) = \xi_{1s}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + \xi_{ns}\frac{\partial f}{\partial u_n} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, (n - 2p + 1)) \quad \ldots(A)$$

formées avec ces solutions constituent un *système complet* dont les solutions sont

$$y_1, y_2, \ldots, y_p, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_p}{x_1}.$$

Le groupe de rationalité de ce système complet est *dans le cas général* (c'est-à-dire lorsque que les a_i sont pris, *dans un domaine de rationalité fixé,* de la manière la plus générale de façon à satisfaire aux conditions précédentes) le groupe général des transformations de contact à $(2p-1)$ variables résultant de l'identité

$$x_1\left(dy_1+\frac{x_2}{x_1}dy_2+\ldots+\frac{x_p}{x_1}dy_p\right)=X_1\left(dY_1+\frac{X_2}{X_1}dY_1+\ldots+\frac{X_p}{X_1}dX_p\right).$$

Les éléments y_i, $\frac{x_i}{x_1}$ sont donc en général *inséparables*; les transformations du groupe de rationalité les échangent les uns dans les autres. Toute tentative de détermination séparée des y et des x ne peut avoir de sens que s'il y a une réduction du groupe de rationalité et s'il devient un *groupe de transformations ponctuelles en* $y_1, \ldots, y_n$ *étendu.*

Quand le système complet (A) est intégré, la fonction x_1 est connue explicitement.

2°. Si l'on a $$\Delta=dy-x_1dy_1-\ldots-x_pdy_p,$$
les équations (1) ne sont satisfaites que si $\xi_0=0$ et possèdent $(n-2p)$ solutions linéairement distinctes; le système complet

$$X_s(f)=\xi_{1s}\frac{\partial f}{\partial u_1}+\ldots+\xi_{ns}\frac{\partial f}{\partial u_n}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(A)},$$

formé avec ces solutions, admet lui-même les solutions

$$y_1, \ldots, y_p, \quad x_1, \ldots, x_p,$$

son groupe de rationalité est *dans le cas général* défini par l'identité

$$X_1dY_1+\ldots+X_pdy_p=x_1dy_1+\ldots+x_pdy_p+d\Omega,$$

où Ω demeure arbitraire en $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p$. C'est donc le groupe *simple* pour lequel *l'élément d'intégrale double* $dx_1dy_1+\ldots+dx_pdy_p$ *demeure invariant.*

Ici encore toute tentative de détermination séparée ou successive des éléments $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p$ n'a de sens que si le groupe de rationalité se réduit. Dans le cas où ce groupe est réduit à un groupe ponctuel en $y_1, \ldots, y_n$ étendu, on pourra trouver un système définissant seulement les y; les x seront alors connus sans nouvelle intégration. On observera ici que lorsque le système (A) est intégré, y est donné par une quadrature de différentielle totale.

Les remarques précédentes nous permettraient avec le tableau des types de groupes de contact à $2p+1$ ou $2p$ variables d'indiquer sans difficulté tous les cas de réduction qui peuvent se présenter dans la détermination de la forme canonique de Δ.

Si l'expression Δ est *inconditionnelle,* c'est-à-dire si l'on a $n=2p$ ou $n=2p+1$, le système (A) se réduit à une seule équation, qui se trouve pour des raisons évidentes être celle obtenue dans la formation des équations les plus générales à groupes simples.

35. Pour terminer cet exposé, déjà trop long, je me bornerai à signaler que la *théorie de la rationalité* s'applique encore dans l'étude des *groupes de fonctions* introduits par Lie (détermination des fonctions distinguées d'un groupe, réduction du groupe à la forme canonique, etc....), dans celle des équations aux dérivées partielles du second ordre qui peuvent s'intégrer par les méthodes de Monge,

d'Ampère ou de M. Darboux, enfin dans l'étude générale des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales: la transformation du système en un autre où le nombre des différentielles est réduit à sa plus petite valeur peut se faire par l'intégration d'un certain système complet (E. V. Weber, Cartan) dont il y a lieu de préciser le groupe de rationalité.

J'ai indiqué en détail pour le premier ordre, comment, en remplaçant le mot *rationnel* par *rationnel dans un certain voisinage,* on pouvait déduire de la même théorie une classification précise des domaines singuliers d'une équation

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

(ou d'un système complet) basée sur la nature des invariants différentiels *rationnels dans ce voisinage.* Le principe de cette classification subsiste dans le cas général, puisque la réduction d'un système irréductible régulier à la forme normale et l'unicité des solutions du système résolvant relatif au groupe Γ (qui remplace le groupe de rationalité au voisinage du domaine étudié) se conservent. Il y a là un domaine immense ouvert à la curiosité des chercheurs—mais où l'on rencontre des difficultés sérieuses, alors que les applications précédentes sont de nature facile.

Enfin le problème qui consiste, dans un domaine de rationalité bien déterminé $[\Delta]$, à reconnaître, *par un nombre limité à l'avance de calculs élémentaires,* quel est le groupe de rationalité d'une équation donnée

$$X(z)=\frac{\partial z}{\partial x}+A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

s'impose également à l'attention. La principale difficulté est toujours la détermination de tous les polynomes P irréductibles dans $[\Delta]$, qui satisfont à une identité

$$X(P)=MP.$$

Ce n'est que dans des cas exceptionnels qu'on peut le résoudre.