PROCEEDINGS

OF THE FIFTH INTERNATIONAL CONGRESS

OF

MATHEMATICIANS

(Cambridge, 22—28 August 1912)

EDITED BY THE GENERAL SECRETARIES OF THE CONGRESS

E. W. HOBSON
SADLEIRIAN PROFESSOR OF PURE MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

AND

A. E. H. LOVE
SEDLEIAN PROFESSOR OF NATURAL PHILOSOPHY IN THE UNIVERSITY OF OXFORD

VOL. II.

COMMUNICATIONS TO SECTIONS II—IV

Cambridge:
at the University Press
1913

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA GÉOMÉTRIE

PAR JULES DRACH.

La théorie d'intégration, que j'ai développée sous le nom de *théorie de la rationalité ou intégration logique* (et dont on trouvera les points essentiels dans ma Communication au Congrès, Section d'Analyse), donne pour les équations différentielles de la Géométrie *des méthodes régulières permettant de prévoir des réductions dans la difficulté de l'intégration*, c'est-à-dire *une réduction du groupe de rationalité.*

On ramène ainsi des propositions classiques, dues à l'ingéniosité des géomètres, à leur source analytique commune et l'on peut, sans difficulté, en indiquer de nouvelles.

J'appelle équations différentielles de la Géométrie, celles où interviennent ou des fonctions arbitraires ou des fonctions que l'on regarde comme *données* mais dont on ne précise pas la nature transcendante.

Le domaine des fonctions que l'on doit regarder comme données ou connues, se compose donc des fonctions *rationnelles* de certains éléments qui ont été représentés par un signe *explicite* (je dirai *explicitées*) et ce domaine comprendra toujours, avec une fonction $\phi(x, y)$ de deux variables par exemple, toutes ses dérivées $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \ldots$. Ainsi il est bien entendu *qu'on n'explicite pas un signe fonctionnel d'opération*: log u ou sin u ne font pas nécessairement partie du domaine qui comprend u; les seules fonctions de u qui appartiennent toujours à ce domaine sont les fonctions rationnelles de u et de ses dérivées dont les coefficients sont rationnels par rapport aux autres éléments du domaine.

L'incertitude où l'on est de la nature des transcendantes *données* ne permet pas d'aboutir à des conclusions précises sur l'intégration, sauf dans le cas *général*; ce n'est que si les transcendantes sont définies par un système irréductible à partir des éléments rationnels absolus (variables et constantes arbitraires) que la théorie de *l'intégration logique* peut s'appliquer jusqu'au bout.

Il s'agit donc seulement ici d'une *application particulière et partielle de la théorie de la rationalité*: les propositions analytiques ne sont pas distinctes de celles qui interviennent dans cette théorie.

Équations du premier ordre.

1. Soit une équation du premier ordre

$$dv = m\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

où m est une fonction *donnée* de u et v. *Supposons que l'on connaisse, pour les courbes*

$$\phi(u, v) = \text{const.}$$

qui satisfont à l'équation (1), *une propriété géométrique: de quelle utilité cette connaissance peut-elle être pour l'intégration de* (1)*?* Considérons d'abord le cas où les courbes étant tracées sur une surface (S), d'élément linéaire donné par

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

la propriété géométrique en question se conserve dans une déformation continue de (S); elle s'exprime alors par une relation,

$$R(\phi, I_1(\phi), I_2(\phi), \ldots, \Omega, I_1(\Omega), \ldots) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

entre les *invariants de Beltrami* de la fonction ϕ (c'est-à-dire les paramètres différentiels $\Delta(\phi)$, $\Delta_2(\phi)$, $\Delta(\phi, \Delta\phi)$, ...) et *les invariants absolus* du ds^2 (ou de Minding) déduits de la courbure totale Ω par l'application à Ω des opérateurs $\Delta(\phi)$, $\Delta_2(\phi)$, ... Cette relation (2) peut être regardée comme une *forme réduite* de la relation

$$R(\Phi, I_1(\Phi), I_2(\Phi), \ldots, \Omega, I_1(\Omega), \ldots) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

où Φ est une fonction arbitraire de ϕ.

Si la relation (3) ne renferme qu'en apparence la fonction Φ, c'est-à-dire si elle garde la même forme en $\phi, \dfrac{\partial\phi}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi}{\partial v}, \ldots$ quel que soit Φ nous ne tirons aucun parti de la connaissance de (2): elle est simplement l'équation aux dérivées partielles qui définit le rapport $m = -\dfrac{\frac{\partial\phi}{\partial u}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}$. Elle ne renferme donc que le quotient $\dfrac{\frac{\partial\phi}{\partial u}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}$ et ses dérivées.

Exemples: La relation $\Delta\phi = 0$; la relation $\dfrac{1}{\rho_\phi} = F(\Omega, \Delta(\Omega), \ldots)$ où $\dfrac{1}{\rho_\phi}$ est la courbure géodésique de la courbe $\phi = \text{const.}$ et F une fonction quelconque des invariants absolus; la relation qui exprime que les lignes pour lesquelles $dv = m\,du$ sont des asymptotiques sur l'une des déformées de (S).

Si la relation (3) renferme $\Phi, \Phi', \Phi'', \ldots$ $\left(\text{où } \Phi' = \dfrac{d\Phi}{d\phi}, \ldots\right)$ lorsqu'on tient compte des formules de transformation:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \Phi' \frac{\partial\phi}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = \Phi' \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \Phi'' \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2, \ldots$$

et si *on l'identifie* à l'une de ses *réduites* (obtenue en particularisant Φ), on obtiendra un système différentiel qui définit, au moyen de ϕ, l'une des expressions suivantes:

$$\Phi, \Phi', \frac{\Phi''}{\Phi'}, \frac{\Phi'''}{\Phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2.$$

Suivant les cas, on déduira de (3) par une *méthode régulière*, qui consiste essentiellement dans la formation des conditions d'intégrabilité de (1) et (3), c'est-à-dire, comme on l'a vu en Analyse, dans l'application de l'opération

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + m \frac{\partial f}{\partial v},$$

qui donne par exemple:

$$X\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0,$$

$$X\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\right) + 2\frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial v^2}\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

une équation dont l'ordre différentiel ne dépasse pas trois et qui définit implicitement l'une des expressions:

$$\phi, \frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} : \frac{\partial\phi}{\partial v} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\partial^3\phi}{\partial v^3}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}\right)^2.$$

Toutes les autres équations satisfaites par ϕ sont des conséquences de cette relation unique. On peut donc ajouter à l'équation:

$$X(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial u} + m\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0,$$

l'une des équations:

$$\phi = R, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = K, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} = J\frac{\partial\phi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial^3\phi}{\partial v^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\right)^2 = I\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2,$$

où R, K, J, I sont connus en u, v *sans intégration*. Les équations qui définissent m sont alors, respectivement:

$$X(R) = 0, \quad X(K) + K\frac{\partial m}{\partial v} = 0, \quad X(J) + J\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial^2 m}{\partial v^2} = 0,$$

$$X(I) + 2I\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial^3 m}{\partial v^3} = 0.$$

On observera que si les expressions de R, K, J, I sont, par rapport aux dérivées de m, d'ordre p, l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier m est d'ordre au plus égal à $(p+3)$.

Si les éléments qui figurent dans (1) et dans (2) appartiennent à un domaine de rationalité $[\Delta]$ bien défini, on pourra préciser dans ce domaine la réduction ultérieure de l'intégration de (1), s'il en existe une qui ne soit pas uniquement celle signalée plus haut.

Remarque: Tout ce que nous venons de dire s'applique uniquement aux *solutions propres* de (2), c'est-à-dire à celles qui ne satisfont à aucune relation d'ordre inférieur par rapport aux dérivées de ϕ. L'équation (2) peut posséder des solutions particulières *impropres* qui pourront être traitées par la même méthode mais conduiront à des conclusions différentes. Ainsi $\Delta_2\phi=0$ qui définit sur une surface les lignes isothermes peut posséder des solutions de $\Delta\phi=F(\phi)$; cela arrive sur toutes les surfaces dont l'élément linéaire peut s'écrire $ds^2=\frac{1}{F(\phi)}(d\phi^2+d\psi^2)$, c'est-à-dire qui sont applicables sur des surfaces de révolution. Pour les solutions propres de $\Delta_2\phi=0$, la méthode conduit à la connaissance de J ; pour les autres on a K.

Exemples : Si la relation (2) est :

$$\frac{1}{\rho_\phi}=\phi F(\Omega, \Delta(\Omega), \ldots)$$

où l'on désigne par ρ_ϕ le rayon de courbure géodésique des courbes $\phi(u, v)=$ const., elle donne ϕ sans intégration.

On a de même sans intégration, connaissant seulement leur équation différentielle, les lignes qui sur une déformée de (S) sont sur des sphères concentriques ; pour celles qui sont dans des plans parallèles on connaîtra $\frac{\partial\phi}{\partial v}=K$ en même temps que $m(u, v)$, sauf si ces plans sont isotropes, auquel cas on ne connaîtra que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}:\frac{\partial\phi}{\partial v}=J.$$

Il peut exister, pour certaines formes du ds^2, des cas d'exception qui s'interprètent aisément.

La relation
$$\Delta_2\phi=F\left(\Omega, \Delta(\Omega), \ldots, \frac{1}{\rho_\phi}, \ldots\right)$$
donnera $\frac{\partial\phi}{\partial v}$, c'est-à-dire un multiplicateur de l'équation (1) $dv-m\,du=0$; les relations

$$\Delta(\phi, \Delta_2\phi)=0 \quad \text{ou} \quad \Delta(\Delta\phi)=0$$

donnent seulement $\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}:\frac{\partial\phi}{\partial v}$, c'est-à-dire la dérivée logarithmique d'un multiplicateur.

De même si l'on connaît l'équation différentielle

$$dv-m\,du=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

des lignes $\phi(u, v)=$ const. qui permettent de mettre un élément linéaire donné sous la forme

$$ds^2=\alpha d\phi^2+\frac{1}{\alpha}d\psi^2,$$

on connaît également $\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}:\frac{\partial\phi}{\partial v}=J$ sans intégration. Il en est de même pour les lignes $\phi(u, v)=$ const. telles que

$$ds^2=\cos^2\alpha d\phi^2+\sin^2\alpha d\psi^2.$$

Enfin si la relation (2) est

$$\Delta(\phi, \Delta_2\phi)-\frac{1}{2}(\Delta_2\phi)^2-\frac{1}{4}\left[\frac{\Delta(\phi, \Delta\phi)}{\Delta\phi}\right]^2=0,$$

on peut obtenir sans intégration :

$$\frac{\frac{\partial^3\phi}{\partial v^3}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}\right)^2=I,$$

et l'intégration de (1) se ramène, à deux quadratures près, à celle de deux équations de Riccati.

2. Il est clair que ce qui permet la théorie précédente c'est l'intervention du groupe ponctuel $\Phi=\Phi(\phi)$; on *peut donc appliquer la méthode à une propriété géométrique quelconque du faisceau de courbes* $\phi(u, v)=$ const. *dont on suppose connue l'équation différentielle*

$$dv=m\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

cette propriété étant exprimée par une relation, de nature quelconque, entre les invariants géométriques, qui se ramène, en dernière analyse, à une relation entre $u, v, \phi, \frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}, \frac{\partial^3\phi}{\partial v^3}$. Par exemple si l'on suppose que sur la surface

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(S),$$

les courbes définies par (1) sont planes, ou sphériques, ou tracées sur des surfaces algébriques de degré connu, on les obtient sans intégration.

Ainsi, soit
$$A(\phi)=\frac{\partial\phi}{\partial u}+m\frac{\partial\phi}{\partial v}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a),$$

dans l'hypothèse où les courbes $\phi(u, v)=$ const. sont planes on peut, *si elles ne sont pas des droites*, définir l'intégrale de (a) par la relation : $z=\alpha x+\beta y+\gamma$ où α, β, γ sont des solutions de $A(\phi)=0$. Deux d'entre elles sont des fonctions entièrement déterminées de la troisième.

En appliquant l'opération $A(f)$ on obtient les équations

$$A(z)=\alpha A(x)+\beta A(y),$$
$$A_2(z)=\alpha A_2(x)+\beta A_2(y), \quad \text{avec} \quad A_2(\omega)=A(A(\omega)),$$

et l'ensemble de ces trois relations détermine α, β, γ. Deux de ces expressions α et β seront d'ailleurs des fonctions de γ, si γ est variable.

L'équation aux dérivées partielles que doit vérifier m est simplement :

$$\begin{vmatrix} A(z) & A(x) & A(y) \\ A_2(z) & A_2(x) & A_2(y) \\ A_3(z) & A_3(x) & A_3(y) \end{vmatrix}=0.$$

Le cas d'exception, où les lignes $\phi=$ const. sont des droites, se reconnaît à ce que :

$$\frac{A_2(z)}{A(z)}=\frac{A_2(x)}{A(x)}=\frac{A_2(y)}{A(y)};$$

on n'a que deux équations distinctes pour trouver α, β, γ et les droites sont les axes des faisceaux de plans ainsi obtenus. D'ailleurs elles sont à priori connues puisqu'en un point de (S) l'équation (1) donne la direction de la tangente à la courbe.

On connaît de même $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ sur les lignes telles que la dérivée de ϕ suivant la direction conjuguée de la tangente à $\phi = \text{const.}$ est une fonction de ϕ (sauf si cette fonction est nulle): l'équation (2) est alors

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(D'\frac{\partial\phi}{\partial v} - D''\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left(D'\frac{\partial\phi}{\partial u} - D\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)}{\sqrt{E\left(D'\frac{\partial\phi}{\partial v} - D''\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2 + 2F\left(D'\frac{\partial\phi}{\partial v} - D''\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)\left(D'\frac{\partial\phi}{\partial u} - D\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \dots}} = F(\phi).$$

On connaît simplement $\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} : \frac{\partial\phi}{\partial v}$ pour les lignes qui satisfont à $\Delta_2(\phi) = 0$, Δ_2 étant un paramètre analogue à celui de Beltrami mais construit avec une forme différentielle quadratique quelconque, par exemple avec

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2\,;\ \text{etc.}$$

On forme sans difficulté des exemples où la propriété géométrique dont nous supposons l'existence n'entraîne que la connaissance de

$$\frac{\frac{\partial^3\phi}{\partial v^3}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}\right)^2 = I\,;$$

celui signalé plus haut s'applique encore lorsque $\Delta\phi$ et $\Delta_2\phi$ sont construits avec une forme quadratique quelconque, définie sur (S), au lieu du carré de l'élément linéaire.

3. Les raisonnements précédents se transportent, sans y rien changer d'essentiel, à un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles qui n'admet qu'une solution.

On saura donc, par une méthode régulière, tirer parti de la connaissance d'une propriété géométrique de la famille de surfaces

$$\phi(x, y, z) = \text{const.}$$

pour la détermination de ϕ au moyen d'un système *complet* connu:

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{X} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}}{Y} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial z}}{Z},$$

qu'on peut toujours regarder comme définissant les surfaces normales aux courbes de la congruence:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

On se trouve ici dans le cas où, identiquement:

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

Si l'on sait, par exemple, que les surfaces $\phi = \text{const.}$ forment une famille isotherme, on a:

$$\Delta_2\phi : \Delta\phi = F(\phi),$$

avec
$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2, \qquad \Delta_2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

On en déduit la connaissance de $\frac{\phi''}{\phi'}$, c'est-à-dire que ϕ sera défini à une transformation linéaire près, par des relations obtenues sans intégration. Si ces surfaces $\phi = \text{const.}$ sont des plans ou des sphères ou des surfaces algébriques de degré connu, ou même des surfaces transcendantes définies par une relation *de forme connue* en x, y, z:

$$\Omega(x, y, z) = 0,$$

on les obtient sans intégration.

Si les surfaces $\phi = \text{const.}$ sont orthogonales aux surfaces $\Delta\phi = \text{const.}$, auquel cas $\Delta(\phi, \Delta\phi) = 0$, on peut encore déduire de là $\frac{\phi''}{\phi'}$, c'est-à-dire que ϕ est défini aux transformations près du groupe linéaire. Enfin ϕ serait défini aux transformations près du groupe projectif, si l'on avait

$$\Delta(\phi, \Delta_2\phi) - \tfrac{1}{2}(\Delta_2\phi)^2 - \tfrac{1}{4}\left[\frac{\Delta(\phi, \Delta\phi)}{\Delta\phi}\right]^2 = \Delta\phi \,.\, F(x, y, z).$$

4. La méthode générale, employée pour édifier la théorie de la rationalité, donne aussi un procédé régulier pour *déduire de la connaissance d'une propriété géométrique du réseau des courbes*

$$\phi(u, v) = \text{const.}, \quad \psi(u, v) = \text{const.},$$

définies respectivement par les équations:

$$A(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial u} + m\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$B(\psi) = \frac{\partial\psi}{\partial u} + n\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

une réduction du groupe de rationalité de ces équations. Si l'on connaît une relation

$$R\left(u, v, \phi, \frac{\partial\phi}{\partial v}, \ldots, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \ldots\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

d'ordre quelconque par rapport aux dérivées de ϕ et de ψ, l'application de l'opérateur $A(\omega)$ qui donne

$$A\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et aussi
$$A(\psi) + (n - m)\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0,$$

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + (n - m)\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \frac{\partial n}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par suite n'introduit pas d'éléments ϕ, $\frac{\partial\phi}{\partial v}$, ... autres que ceux qui figurent dans R, conduit à une relation

$$F\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial v}, \ldots\right) = G\left(u, v, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial^p\psi}{\partial v^p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

dont (3) et toutes les autres sont des conséquences, et dont le premier membre est l'un des quatre invariants:

$$\phi, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = K, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} : \frac{\partial\phi}{\partial v} = J, \quad \frac{\frac{\partial^3\phi}{\partial v^3}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}}{\frac{\partial\phi}{\partial v}}\right)^2 = I.$$

L'équation: $\quad A(F) = A(G) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5),$

peut alors, en tenant compte des équations résolvantes

$$A(\phi) = 0, \quad A(K) + K\frac{\partial m}{\partial v} = 0, \quad A(J) + J\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial^2 m}{\partial v^2} = 0, \quad A(I) + 2I\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial^2 m}{\partial v^2} = 0,$$

être débarrassée de ϕ et de ses dérivées. Elle est donc une relation *connue* entre

$$u, v, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial^{p+1}\psi}{\partial v^{p+1}}.$$

Mais nous savons qu'on en peut toujours déduire une relation analogue donnant explicitement en u, v l'un des quatre invariants:

$$\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} : \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}}\right)^2.$$

Il est donc loisible de supposer tout de suite que dans R (ou dans G) la fonction ψ ne figure qu'au second ordre.

Les types possibles de relations entre ϕ et ψ peuvent ainsi être établis a priori et la réduction de l'intégration de (1) *et de* (2) *précisée pour chacun d'eux.* On observera que l'équation (2) est nécessairement *spéciale*, et comme on aurait pu permuter le rôle de ϕ et ψ, il en est de même de (1). Toute propriété géométrique du réseau (ϕ, ψ) qui conduit à une relation (3) [c'est-à-dire qui ne s'exprime pas par une relation entre u, v, m, n et leurs dérivées] donnera donc, en dernière analyse, une des relations-types dont nous venons d'établir l'existence.

(a) Supposons, par exemple, qu'il existe une relation

$$\phi = F(u, v, \psi),$$

où ψ est connu, c'est-à-dire que l'intégration de (1) se ramène à celle de (2) et réciproquement (sans d'ailleurs qu'aucune d'elles s'intègre explicitement); on aura dans ce cas l'identité:

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial u} + m\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial\psi}(m-n)\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0,$$

d'où résulte entre ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, u, v une relation du premier ordre, à laquelle nous pouvons supposer la forme:

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = K_1(u, v).$$

La fonction F (qui dépend de ψ) doit donc vérifier identiquement la relation

$$\frac{\partial F}{\partial u} + m\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial\psi}(m-n)K_1 = 0,$$

et cette condition est suffisante. On observe que F peut être supposé linéaire en ψ et l'on trouve immédiatement

$$F = \psi + \beta(u, v),$$

avec la condition: $\quad A(\beta) + (m-n)K_1 = 0.$

En résumé *si l'équation* (2):

$$B(\psi) = \frac{\partial\psi}{\partial u} + n\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0,$$

possède le multiplicateur K_1, c'est-à-dire si

$$B(K_1) + K_1\frac{\partial n}{\partial v} = 0,$$

l'équation (1) $A(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial u} + m\frac{\partial\phi}{\partial v} = 0$, *où l'on a pris m de manière à vérifier la condition*:

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} - nK_1 + m\left(\frac{\partial\beta}{\partial v} + K_1\right) = 0,$$

possède une solution ϕ, liée à ψ par la relation: $\phi = \psi + \beta$.

L'équation (1) possède évidemment le multiplicateur connu

$$\frac{\partial\phi}{\partial v} = K_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v}.$$

(b) Si la relation *unique*, supposée connue, a la forme

$$\phi = F\left(u, v, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial v}\right),$$

elle donnera de même

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial u} + m\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial\psi}(m-n)\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}\left\{(m-n)\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \frac{\partial n}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\} = 0,$$

d'où l'on conclut l'existence d'une relation connue:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = J_1\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

où J_1 ne dépend que de u, v et vérifie:

$$B(J_1) + J_1\frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\partial^2 n}{\partial v^2} = 0.$$

L'identité

$$\frac{\partial F}{\partial u} + m\frac{\partial F}{\partial v} + (m-n)\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial\psi} + \left\{(m-n)J_1 - \frac{\partial n}{\partial v}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)} = 0,$$

conduit aisément à l'expression *unique* :

$$F = c\psi + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

acceptable sous la condition :

$$A(\alpha) + \alpha \left\{(m-n) J_1 - \frac{\partial n}{\partial v}\right\} + c(m-n) = 0 \qquad (c \neq 0).$$

On peut encore prendre α arbitrairement et déterminer m par cette relation.

D'ailleurs l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \left(c + \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha J_1 \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

jointe à celle qui donne ϕ, permet d'exprimer explicitement ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ au moyen de ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ *lorsque* $c \neq 0$.

Si l'on a $c = 0$, auquel cas

$$\phi = \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^{*}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \alpha J_1\right) \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

log ϕ est donné par une quadrature ; une autre quadrature est nécessaire pour obtenir ψ quand ϕ est supposé connu. La correspondance entre les solutions des équations (1) et (2) est évidente.

(c) Pour *épuiser* l'étude des cas où ϕ est explicitement connu quand on a intégré (2), il reste à examiner l'hypothèse :

$$\phi = F\left(u, v, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right).$$

La fonction F devra satisfaire identiquement à la relation :

$$\frac{\partial F}{\partial u} + m \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial \psi}(m-n)\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)} \left\{(m-n)\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial n}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right\}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)} \left\{(m-n)\frac{\partial^3 \psi}{\partial v^3} - 2\frac{\partial n}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial v^2}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right\} = 0,$$

où l'on suppose

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial^3 \psi}{\partial v^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)^2 = I_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2,$$

I_1 étant connu en u, v et vérifiant :

$$B(I_1) + 2I_1 \frac{\partial n}{\partial v} + \frac{\partial^3 n}{\partial v^3} = 0.$$

La réduction de F à sa forme la plus simple donnera, en observant que F est *déterminé* aux transformations près qui remplacent ψ par $f(\psi)$ où f est arbitraire :

$$F = \alpha \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^3} + \beta \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2} + \frac{\gamma}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)},$$

* L'hypothèse $\phi = \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)^p$, où p est entier, se ramène à celle-là par l'extraction de la racine $p^{\text{ième}}$ de α.

où β, γ sont des fonctions de u, v seul qui s'expriment explicitement au moyen de $\alpha(u, v)$ et de ses dérivées. Cette dernière satisfait à une condition du troisième ordre facile à former, qui, jointe à la résolvante I_1, caractérise ce cas.

En général $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ s'exprime rationnellement en ϕ, $\frac{\partial \phi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}$, et il existe une relation donnant explicitement $\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}$ au moyen de ϕ, $\frac{\partial \phi}{\partial v}$, u, v.

Remarque. Il est clair que tout ce que nous venons de dire au sujet de l'intégration simultanée de deux équations du premier ordre, pourra se répéter, *avec des changements évidents,* pour trois ou un plus grand nombre d'équations.

Nous avons donc la possibilité *par une méthode régulière* d'utiliser la connaissance d'une propriété géométrique du système des courbes

$$\alpha(u, v) = \text{const.}, \quad \beta(u, v) = \text{const.}, \quad \gamma(u, v) = \text{const.}, \ldots$$

pour l'intégration des équations du premier ordre qui définissent séparément ces courbes.

Exemples géométriques.

Supposons qu'il s'agisse de mettre un élément linéaire connu sous la forme

$$ds^2 = a^2 d\phi^2 - 2d\phi\, d\psi + c^2 d\psi^2,$$

et que l'on connaisse les équations

$$A(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial u} + m\frac{\partial \phi}{\partial v} = 0, \qquad B(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial u} + n\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0,$$

qui définissent ϕ et ψ. La relation

$$\frac{\Delta(\phi, \psi)}{\Delta\phi\,\Delta\psi - \Delta^2(\phi, \psi)} = 1$$

donnera explicitement $\quad \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} = \theta(u, v),$

et l'on en déduira aisément les expressions de

$$\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}}{\frac{\partial \phi}{\partial v}} \quad \text{et de} \quad \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}}{\frac{\partial \psi}{\partial v}}$$

au moyen de u et v.

Supposons de même que les courbes $\phi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, définies par

$$A(\phi) = 0, \quad B(\psi) = 0,$$

satisfassent à la condition $\Delta(\phi, \Delta\psi) = \Delta\phi$; on en déduira une relation donnant $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ au moyen de $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$, puis une relation en u, v, $\frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^3 \psi}{\partial v^3}$, c'est-à-dire une expression explicite de I_1. On aurait de même $\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} : \frac{\partial \phi}{\partial v} = J(u, v)$, explicitement en u, v.

On retrouve aisément aussi les propositions classiques en Géométrie : s'il s'agit de mettre un ds^2 sous une forme connue

$$ds^2 = 2\Omega(\phi, \psi)\, d\phi\, d\psi,$$

on a, avec les équations différentielles des courbes $\phi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, la condition

$$\Delta(\phi, \psi) = \frac{1}{\Omega(\phi, \psi)},$$

d'où l'on déduira explicitement ϕ et ψ, sauf 1° si Ω a la forme $F(\phi - \psi)$ (F quelconque, surfaces de révolution) auquel cas on ne connaît que $\frac{\partial\phi}{\partial v}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, 2° si Ω a la forme $\frac{1}{(\phi-\psi)^2}$ auquel cas on n'a que les invariants du groupe qui conserve $\frac{d\phi d\psi}{(\phi-\psi)^2}$, groupe étudié *dans ma communication* en Analyse : ϕ et ψ sont définis à une même transformation projective près.

Des remarques analogues peuvent se faire lorsque Ω n'est pas entièrement connu, mais satisfait à certaines équations aux dérivées partielles. Elles redonneraient, par exemple, la théorie de la réduction d'un ds^2 à la forme de Liouville, avec la discussion correspondante.

Équations du second ordre.

5. La méthode que nous venons d'exposer pour une ou plusieurs équations du premier ordre, s'applique quels que soient l'ordre et le nombre des équations différentielles ordinaires que l'on considère. En Géométrie, le cas des équations du second ordre (ou des équations linéaires aux dérivées partielles à trois variables x, y, z) est particulièrement important. Le groupe de transformations qui intervient est le groupe général à deux variables et le nombre des types de réductions possibles est voisin de soixante.

Si l'on définit la congruence des courbes Γ

$$\phi(x, y, z) = \text{const.}, \quad \psi(x, y, z) = \text{const.},$$

par les équations :

$$A(\phi) = A(\psi) = 0 \quad \text{.................................(1)},$$

où

$$A(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z},$$

on saura *par une méthode régulière*, tirer parti, pour l'intégration des équations (1), de la connaissance d'une propriété géométrique quelconque des courbes Γ et l'on obtiendra toujours, en définitive, l'expression explicite, au moyen de x, y, z, des invariants différentiels en ϕ, ψ, $\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\phi}{\partial z}$, ..., $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, ... de l'un des *types* de groupes de transformations en ϕ, ψ.

Il en sera de même si l'on connaît pour un système de deux congruences de courbes $\phi = a$, $\psi = b$; $\phi_1 = a_1$, $\psi_1 = b_1$ une propriété géométrique et si l'on cherche à en tirer parti pour la détermination de l'une ou de l'autre congruence à partir de ses équations différentielles. Mais le nombre des types de relations possibles, entre ϕ, ψ et leurs dérivées d'une part, ϕ_1, ψ_1 et leurs dérivées d'autre part, types qu'on peut établir *a priori*, est extrêmement élevé.

Je me bornerai à indiquer des exemples tout à fait simples.

(a) Supposons que les courbes $\phi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$, définies par le système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{n} \quad \text{.................................(1)}$$

$\left(\text{ou les équations } A(\phi) = 0,\ A(\psi) = 0 \text{ avec } A(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, soient *planes.*

On pourra poser : $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, α, β, γ étant des fonctions à déterminer de ϕ et ψ.

Si deux de ces fonctions, α et β par exemple, sont *distinctes* en ϕ et ψ, on pourra prendre $\phi = \alpha$, $\psi = \beta$ et l'on aura en appliquant l'opération $A(f)$:

$$n = \alpha + \beta m,$$
$$A(n) = \quad \beta A(m),$$

qui donnent explicitement α et β en x, y, z. La condition qui exprime que les courbes sont planes est :

$$\frac{A_2(n)}{A(n)} = \frac{A_2(m)}{A(m)}.$$

Si α, β, γ sont fonctions d'un seul argument, et si α n'est pas constant, on pourra prendre $\phi = \alpha$; α et β seront donnés comme plus haut, mais β sera une fonction de α, d'ailleurs connue, et il en sera de même de γ. On connaîtra donc explicitement ϕ ; la détermination de ψ dépendra d'une équation à deux variables, renfermant le paramètre ϕ.

En résumé si les plans qui renferment les courbes de la congruence dépendent de deux paramètres, chaque plan ne contient qu'un nombre limité de courbes qu'on obtient sans intégration ; si ces plans ne dépendent que d'un paramètre, on a toujours ces plans sans intégration, mais les courbes qui sont dans chacun d'eux sont données par une équation différentielle du premier ordre qui peut être quelconque. Cela s'étend au cas où les courbes de la congruence sont sur des sphères, des surfaces algébriques de degré connu, ou même des surfaces transcendantes dont l'équation $\Omega(x, y, z) = 0$ a une forme connue en x, y, z.

(b) Supposons qu'il s'agisse de déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces

$$f(x, y, z) = \alpha,$$

qui soit une *famille de Lamé.* En posant :

$$\Delta(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z},$$

on a pour les inconnues ϕ, ψ les trois conditions :

$$\Delta(f, \phi) = 0, \quad \Delta(f, \psi) = 0, \quad \Delta(\phi, \psi) = 0.$$

La dernière, transformée par la méthode générale, s'écrit :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\Delta\phi + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial\psi} + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\right)\Delta(\phi, \psi) + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\psi}\Delta\psi = 0\,;$$

elle ne garde sa forme, *si l'on ne peut avoir* $\Delta\phi=\Delta\psi=0$, qu'en prenant

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}=0,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\phi}=0$$

(ou permutant ϕ et ψ). Les surfaces $\phi=\text{const.}$, $\psi=\text{const.}$ se déterminent donc séparément par des systèmes complets à une solution.

On sait bien en effet que ces surfaces définissent les deux systèmes de lignes de courbure des surfaces $f(x, y, z)=\alpha$.

Si l'on peut avoir $\Delta\phi=0$, $\Delta\psi=0$, les trajectoires sont intersections de développables isotropes : ceci ne se présente que si $f(x, y, z)=\alpha$ définit des plans ou des sphères (lignes de courbure indéterminées) et l'on retrouve alors les résultats classiques.

Remarque. Ces résultats, relatifs aux trajectoires orthogonales d'une famille de plans ou de sphères (et les résultats analogues relatifs aux trajectoires orthogonales d'une famille de droites ou de cercles dans le plan ou sur une surface connue), peuvent aussi s'obtenir par l'application directe de la théorie de la rationalité.

Si les équations différentielles à intégrer

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{n}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

sont données en coordonnées cartésiennes (x, y, z), on peut former explicitement au moyen de x, y, z, m, n et leurs dérivées les expressions des nouvelles variables qui ramènent le système (1) à sa forme la plus simple ; on peut aussi donner explicitement au moyen des mêmes éléments les expressions des invariants du groupe Γ :

$$\Phi=f(\phi, \psi),\quad \Psi=g(\phi, \psi),$$

qui caractérise la réduction pour l'équation

$$A(F)=\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

dont ϕ et ψ sont deux solutions.

Par exemple, supposons que l'équation

$$\frac{dy}{dx}=m(x, y)$$

soit l'équation d'une famille de cercles ayant leurs centres sur l'axe ox et proposons nous de trouver leurs trajectoires orthogonales.

Si l'on pose : $$A(\phi)=\frac{\partial\phi}{\partial x}+m\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,$$

en écrivant l'équation des cercles :

$$x^2+y^2-2\alpha x+\beta=0,$$

on trouve $$x+my-\alpha=0,$$

pour déterminer α et $\beta=\omega(\alpha)$, c'est-à-dire l'équation explicite des cercles. La condition que doit vérifier m [qui serait défini implicitement par les deux équations précédentes en y posant $\beta=\omega(\alpha)$, ω arbitraire] est simplement :

$$1+m^2+y\left(\frac{\partial m}{\partial x}+m\frac{\partial m}{\partial y}\right)=0.$$

L'équation qui définit les trajectoires orthogonales est :

$$B(\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\ ;$$

on en connaît *un multiplicateur* qui donne ψ par la quadrature :

$$d\psi=\frac{dx+m\,dy}{y\sqrt{1+m^2}}.$$