ББК 32.81
М23

УДК 51—007

Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое. (Кибернетика). М., «Сов. радио», 1979, 168 с.

В наше время математические методы широко используются в естественных и гуманитарных науках. Это способствует росту интереса к самой сущности математического рассуждения и природе доказательства в широких кругах потребителей математики. В книге сделана попытка удовлетворить этот интерес, изложив на достаточно доступном уровне теорию математического доказательства и причины, по которым те или иные вопросы (типа гипотезы континуума) оказываются принципиально неразрешимыми. Изложение сопровождается экскурсами в физику, психологию и семиотику.

Книга предназначена для молодых ученых и всех, кто интересуется проблемами современной математики.

Рис. 5, табл. 3, табл. 36 назв.

Редакция кибернетической литературы

М $\frac{30501\text{-}054}{046(01)\text{-}79}$ 60-79 2500000000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди научно-технических достижений; связываемых с идеями кибернетики, наибольшее значение имеет широкое использование ЭВМ для решения задач расчета, моделирования и управления. Работа ЭВМ, если отвлечься от ее воплощения «в железе», состоит в обработке и порождении символьных текстов. Таким образом, она представляет собой *языковую деятельность*, понимаемую широко. До появления вычислительных машин языковая деятельность была исключительной прерогативой человека, и возможность ее частичного отчуждения вызвала огромный общественный интерес.

Этот интерес отразился в популярной формуле «мыслящие машины», в которой, к сожалению, совершена прискорбная подмена термина. Многочисленные благоглупости на тему о том, может ли машина мыслить, могли бы и не быть высказаны, если бы мы поняли, чего следует ожидать от мышления, кроме и помимо способности порождать тексты.

Языковая деятельность вычислительной машины является математической в некотором глубоком значении этого слова, даже когда речь идет о программе, переводящей с венгерского языка или сочиняющей одноголосные мелодии. Сама по себе «математическая речь» человека — удивительный пасынок-вундеркинд естественной речи. Структура и семантика языка математики в какой-то мере поняты благодаря ее постоянной связи с естественными науками и технологией, а также благодаря огромной работе специалистов по математической логике. Соответствующие проблемы для естественных языков зачастую еще даже не поставлены. Физик-теоретик лауреат Нобелевской премии Юджин Вигнер с большой проницательностью озаглавил одну из своих статей «О непостижимой эффективности математики в естественных науках», в то время как немногие мыслители рисковали удивляться эффективности функционирования языка вообще.

Чтобы разделить это удивление, мы приглашаем читателя сопоставить два коротких отрывка и вдуматься в их смысл.

«В большом здании судебных учреждений во время перерыва заседания по делу Мельвинских члены и прокурор сошлись в кабинете Ивана Егоровича Шебек, и зашел разговор о знаменитом красовском деле. Федор Васильевич разгорячился, доказывая неподсудность, Иван Егорович стоял на своем, Петр же Иванович, не вступив сначала в спор, не принимал в нем участия и просматривал только что поданные «Ведомости».»

«Число делений, происходящих в 1 см^3 котла за 1 с, равно $f_t n(v/\Lambda)\times(3{,}9/7{,}2)$. Смысл множителей: доля тепловых нейтронов, поглощаемых ураном, плотность нейтронов, обратное время жизни теплового нейтрона, доля поглощений нейтрона ураном, ведущих к делению. Принимая, что в акте деления освобождается 200 Мэв, мы должны умножить (число делений/с·см^3) на (200 Мэв/деление), т. е. на (0,0003 эрг/деление), чтобы получить эрг/с·см^3. В конечном выражении появляется произведение nv, т. е. поток. Следует использовать средний поток $\overline{nv}$. Можно показать, что для куба средний поток связан с потоком в центре, n_0v, соотношением $\overline{nv}=n_0v(8/\pi^3)$. Окончательно получим (в киловаттах)

$$n_0v\left(\frac{8}{\pi^3}\,V\,\frac{f_t}{\Lambda}\,\frac{3{,}9}{7{,}2}\,3{,}2\cdot10^{-14}\right).$$

После подстановки должных значений $4\cdot10^{-9}n_0v$. Мощности порядка $2{,}5\cdot10^3$ кВт (Клинтон) соответствуют потоку в центре около 10^{12}. В Хэнфорде поток нейтронов в центре котла составляет примерно 10^{13} н/с·см^2.»

Первый отрывок — начало «Смерти Ивана Ильича» Л. Н. Толстого, второй взят из «Лекций по нейтронной физике» Э. Ферми (Э. Ферми, Научные труды. Т. II, М., «Наука», 1972, с. 327).

Те различия между ними, которые бросаются в глаза: в теме, требованиях к подготовке читателя, для нас наименее существенны. Разумеется, повесть Толстого апеллирует к более или менее общечеловеческому жизненному опыту, а понимание лекций Ферми требует специфических знаний физика или инженера-атомника. (Впрочем, слово «неподсудность» у Толстого относится к терминам специальной юридической системы, и его смысл для читателя без специального образования едва ли менее туманен, чем смысл понятия «тепловой нейтрон».)

Но мы хотим обратить внимание на следующее обстоятельство. Ферми объясняет, как вычислить мощность атомного реактора, т. е. некоторую величину, которую в принципе можно измерить, считав показания стрелки подходящего прибора. Вместо этого предлагается получить ту же величину обработкой несложного арифметического текста типа $\frac{3{,}9}{7{,}2}\,3{,}2\cdot10^{-14}=\ldots$ Это — именно та часть научного исследования, которая чаще всего передается ЭВМ (конечно, обычно объем расчетов и их логическая сложность гораздо выше). Именно привычность этого (решать задачи мы учимся с первого класса) мешает взрослому человеку удивиться: почему, собственно, формальная процедура перемножения двух десятичных дробей с использованием таблицы умножения и правила переноса цифр («дважды девять — восемнадцать, восемь пишем, один в уме ... или в ячейке памяти») приводит к некоторому предсказанию относительно реального хода событий? Ведь в реакторе не происходит решительно ничего, что можно было бы хотя бы ориентировочно соотнести с элементарным актом вычисления «дважды девять — восемнадцать». С другой стороны, этот же элементарный акт может встретиться в вычислениях точки встречи ракеты с целью, положения корабля в море или времени жизни Вселенной — вычислениях, которые не имеют никакого отношения к реакторам.

Вычисление — это, разумеется, лишь простейший пример целостного математического текста, однако на нем можно проследить характерные черты математической речи вообще. В отношении структуры математический язык подчинен жестким принципам «правильной составленности». Эти правила должны гарантировать «истинность выводов при истинности посылок». Чрезвычайная неоднозначность, а зачастую отсутствие интерпретации каждого отдельного фрагмента математического текста в реальности, которую он может описывать, требует достаточно единой интерпретации «в мире идей»: иначе мы не можем даже приближенно представить себе содержание понятия «истинность» (кроме случаев, когда оно относится к единичному событию, происходящему «здесь и сейчас», и тогда определенно находится вне математики).

Понятие «истинности» почти с неизбежностью требует абстракции «бесконечности» уже потому, что правильное математическое высказывание должно быть правильным всегда и везде.

Между тем языковая деятельность имеет принципиально финитарные черты: каждый реальный текст делится на конечное число однозначно воспроизводимых элементарных единиц. Иначе язык не мог бы выполнять свои функции в общественной памяти и общественных каналах связи человечества.

В какой же мере конечные тексты могут отразить абстракцию математической бесконечности? Этот специальный случай общего вопроса о том, насколько язык способен выразить мысль, и составляет идейный стержень предлагаемой книги.

Более конкретно, книга посвящена изложению некоторых современных результатов о неразрешимости математических задач. В общих чертах представление о таких задачах широко распространено: квадратура круга относится к числу старейших примеров, проблема континуума — самых новых. Однако, несмотря на значительный интерес к проблеме неразрешимости, точный смысл полученных результатов известен сравнительно узкому кругу даже профессиональных математиков. Во многом это объясняется тем, что предмет математической дисциплины, внутри которой эти результаты устанавливаются, не вполне обычен: этим предметом является идеализированная модель реальной математики внутри самой математики. В более широком понимании речь идет даже об идеализированной картине дедуктивного познания вообще, что определяет общегуманитарную и гносеологическую ценность теорем о неразрешимости.

Цель этой книги двоякая: описать основы математической логики как модели математики и, пользуясь ее средствами, изложить несколько доказательств неразрешимости, включая проблему континуума по Коэну, теорему Тарского о невыразимости истинности и частично знаменитую теорему Геделя о неполноте. К сожалению, вне рамок этой книги пришлось оставить задачи алгоритмической неразрешимости. Изложение их требует предварительного развития аппарата рекурсивных функций или одного из его эквивалентов (машины Тьюринга, алгоритмы Маркова). Ограниченный объем книги не позволил включить этот материал.

Книга состоит из трех глав. Две первые являются введением в формальную логику и должны быть доступны читателю со сравнительно небольшим математическим образованием и некоторыми навыками теоретико-множественных рассуждений. Третья глава, посвященная проблеме континуума, заметно труднее технически. Однако полному изложению доказательства в ней предшествует модельный вариант на языке «случайных вещественных чисел», позволяющий при желании уяснить основные идеи конструкции, не вдаваясь в утомительные подробности.

К не вполне традиционному материалу относится параграф о квантовой логике с доказательством теоремы фон Неймана о скрытых параметрах, а также изложение теоремы Тарского методом Шмульяна. Шмульян придумал остроумный вариант формального языка арифметики, позволяющий легко написать на нем формулу, утверждающую свою ложность. Это снимает половину технических трудностей в доказательстве теоремы Геделя о неполноте.

Наконец, существенную часть книги составляет серия неформальных отступлений о смысле математических понятий в более широком контексте человеческой культуры. В определенном аспекте они выражают отношение автора к проблеме «обоснования» математики. Вероятно, логика способна обосновать математику не в большей мере, чем биология — обосновать жизнь.

Читатель, который пожелает расширить свои познания по обсуждаемым в этой книге вопросам и ознакомиться с другими точками зрения, может обратиться к многочисленной литературе, часть которой указана в библиографии. В частности, на русском языке имеются прекрасные курсы логики Дж. Шенфилда [1], Э. Мендельсона [2], С. Клини [3]. Специально проблеме континуума посвящена книга П. Дж. Коэна [7]. Теория множеств, ее формальные аспекты и философские проблемы изложены в книгах

Н. Бурбаки [5], А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [17], см. также глубокий обзор К. Геделя [20] и статью П. Коэна [19]. Специально математической теории рекурсивных функций и алгоритмов посвящены книги В. А. Успенского [15], А. А. Маркова [8], А. И. Мальцева [10], Х. Роджерса [11] и статьи В. А. Успенского [15], Ю. И. Манина [13, 14], Ю. Матиясевича [12]. Различные точки зрения на философские проблемы оснований математики изложены в уже цитированных книгах С. Клини и А. Френкеля и И. Бар-Хиллела, в монографии А. Тарского [16], а также в содержательной книге В. Н. Тростникова [18] и популярной работе И. Лакатоса [21].

В заключение я хотел бы выразить свою глубокую благодарность С. Г. Гиндикину, оказавшему большую помощь автору еще в период работы над рукописью, и И. М. Яглому, чье внимательное и доброжелательное рецензирование книги помогло ее улучшению.