

теорем, стандартизации языка и т. п. Допущение их в систему, однако, требует соблюдения определенных правил гигиены, главное из которых — непротиворечивость системы. Непротиворечивость должна быть обеспечена заранее посредством тщательного исследования синтаксиса языка, который уже должен проводиться без апелляции к актуальной бесконечности.

Возникающая в результате проведения этой программы совокупность формальных моделей математики и логики были важнейшим ее результатом. В частности, оформление точных математических понятий «вычислимости» и «алгорифма» и всей теории рекурсивных функций тесно связано с программой Гильберта. Невозможность ее выполнения в описанном объеме, открытая Геделем, составляет другой аспект проблемы. Трудно решить, свидетельствует ли эта невозможность в пользу принятия интуитивной теории множества, какой мы ее знаем сейчас, или ее отвержения; с теми же основаниями этот вопрос может ставиться уже для арифметики.

Во всяком случае, взгляд на математику как на формальную систему очень плодотворен, если осознавать его ограниченность. Он дает возможность достигнуть значительного взаимопонимания при обсуждении таких разных концепций, как интуитионистская логика и теоретическая физика, доставляя «пустые схемы» сложных структур. Непротиворечивость формальной системы, плодотворность которой проверена экспериментально, перестает быть первостепенной задачей. Выбор конкретно порождаемых текстов в такой системе составляющих весьма незначительную долю всех допустимых текстов, все равно производится по неформализуемым правилам, которые важнее формальной непротиворечивости, описываемой в терминах всех подпадающих порождению текстов. Роль отбираемых текстов состоит в важнейшем, хотя и плохо изученном посредничестве между мозгом и другим мозгом, мозгом и внешним миром, а также мозгом и самим собой (текст есть внешняя память, текст наводит мост между геометрической и арифметической интуицией каждого индивидуального сознания, которые, возможно, опираются на существенно разные физиологические механизмы). В конечном счете, главный аспект текста есть его способность участвовать в таких актах посредничества, и только изучение этой способности может разрешить загадку математики. Старая метафора В. Гюго, сопоставляющая книгу и собор, имеет глубокий смысл, если структурированность текста составляет важнейшую предпосылку его социальной роли.

Все эти проблемы способствуют гуманитаризации математики; вместе со встречным движением математизации гуманитарного знания они помогают вернуть утраченное единство двух культур. В предвидении синтеза мы можем ожидать нового понимания «множества» как одной из самых удивительных мифологем нашего времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги и статьи по математической логике и теории множеств

1. Шенфилд Дж. Математическая логика: Пер. с англ. — М.: Наука, 1975.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику: Пер. с англ. — М.: Наука, 1976.
3. Клини С. К. Введение в метаматерику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1957.
4. Линдон Р. Заметки по логике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.
5. Бурбаки Н. Теория множеств: Пер. с франц. — М.: Мир, 1965.
6. Rosser J. B. Logic for Mathematicians. — New York: Putnam, 1953.
7. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.

Книги и статьи по теории рекурсивных функций и алгоритмов

8. Марков А. А. Теория алгоритмов. — Труды мат. ин-та В. А. Стеклова АН СССР, 1954, т. 42.
9. Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. — М.: Физматгиз, 1960.
10. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1966.
11. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость: Пер. с англ./ Под ред. В. А. Успенского. — М.: Мир, 1972.
12. Матиясевич Ю. В. Диофантовы множества. — УМН, 1972, т. 22, вып. 5, с. 185—222.
13. Манин Ю. И. Десятая проблема Гильберта. — Современные проблемы математики/ Под ред. Р. В. Гамкрелидзе. — М.: ВИНТИ, 1973, вып. 1, с. 5—37.
14. Манин Ю. И. Теорема Геделя. — Природа, 1975, № 2, с. 80—87.
15. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте в элементарном изложении. — УМН, 1974, т. 29, вып. 1, с. 3—47.

Книги и статьи по проблемам оснований математики

16. Тарский А. Введение в логику и методологию естественных наук: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948.
17. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
18. Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. — М.: Наука, 1975.
19. Коэн П. Дж. Об основаниях теории множеств. — УМН, 1974, т. 29, вып. 5, с. 169—176.
20. Gödel K. What is Cantor's continuum problem? — American Mathematical Monthly, 1947, v. 54, № 9.
21. Лакарос И. Доказательства и опровержения: Пер. с англ. — М.: Наука, 1967.

# Другие цитированные работы

22. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра: Пер. с англ. — М.: Мир, 1960.
23. Линдси Ч., ван дер Мюйлен С. Неформальное введение в Алгол-68; Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.
24. Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической логики. — М.: Мир, 1969.
25. Ивин А. А. Логика норм. — М.: МГУ, 1973.
26. Лурья А. Р. Потерянный и возвращенный мир. — М.: МГУ, 1971.
27. Стеблин-Каменский М. И. Культура Исландии. — Л., Наука, 1967.
28. фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики: Пер. с нем. / Под ред. акад. Н. Н. Боголюбова. — М.: Наука, 1964.
29. Макки Дж. У. Лекции по математическим основам квантовой механики. Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.
30. Reid C. Hilbert.—Berlin, Springer, 1975.
31. Smullyan R. M. Languages in which selfreference is possible. — J. Symbolic Logic, 1975, v. 22, № 1.
32. Selfridge J., Nicol C. A., Vandiver H. S. On the loust Fermat thcorem. — «Proc. National Academy USA», 1955, v. 41, p. 970—973.
33. Swinnerton — Dyer H. P. E. On the product of three homogeneous linear forms. — «Acta Arithmetica», 1971, v. 18, p. 371—385.
34. Siegel C.-L. Zuzwei Bemerkungen Kummer. — «Nachrichten Ak. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse», 1964, № 6, p. 51—57.
35. Mumford D. Equations defining abelian varieties. — Inventiones Mathematicae, 1967, v. 3, p. 3.
36. Kochen S., Specker E. P. The Problem of hidden variables in quantum Mechanics. J. Mathematics and Mechanics, 1967, v. 17, p. 59—87.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- |                                                                 |                                                    |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Адамар Ж. 153                                                   | Куратовский 106                                    |
| Бар-Хиллел И. 7, 53                                             | Кронекер 156                                       |
| Бенвенист Э. 87                                                 | Лакатос И. 7                                       |
| Бернайс 21, 100                                                 | Лаллас П. С. 153                                   |
| Бернштейн 109                                                   | Лебер 110, 112, 116                                |
| Биркгофф Г. 98                                                  | Левенсейм 70                                       |
| Брауэр 54, 156, 158                                             | Лейбниц 10                                         |
| Бурали 100                                                      | Линдси Ч. 24                                       |
| Бурбаки Н. 7, 22, 30, 154                                       | Лурья А. Р. 42                                     |
| Вандивер 56                                                     | Мальцев А. А. 7                                    |
| Вейнрейх У. 40                                                  | Мамфорд Д. 57                                      |
| Витнер Ю. 3                                                     | Марков А. А. 6, 7, 56, 157                         |
| Виета 3                                                         | Мартьянов Л. 63                                    |
| Галуа 75                                                        | Матиясевич Ю. В. 7                                 |
| Гедель К. 6, 7, 9, 21, 56, 78, 100, 87, 111, 125, 149, 150, 160 | Мельчук И. А. 40, 62                               |
| Гейтинг 156                                                     | Мендельсон Э. 7, 44, 48, 100                       |
| Гессе Г. 8                                                      | Морз 23                                            |
| Гильберт 22, 75, 159, 160                                       | Мостовский 71, 72                                  |
| Гиндикин С. Г. 7                                                | Мюйлен С. ван дер 24                               |
| Гладкий А. В. 40, 62                                            | Нейман Д. фон 6, 15, 32, 87, 90, 98, 100, 103, 125 |
| Гумбольдт 9                                                     | Николь 56                                          |
| Гюго В. 161                                                     | Падучева Е. В. 40                                  |
| Давенпорт 56                                                    | Паскаль Б. 153                                     |
| Декарт Р. 10                                                    | Пеано 11, 48, 54                                   |
| Деман К. 40, 41                                                 | Пономарев 98                                       |
| Зигель К. Л. 55, 56                                             | Пуанкаре А. 152, 153                               |
| Ивин А. А. 41                                                   | Рассел Б. 40, 155                                  |
| Кантор Г. 74, 101, 108, 109, 110, 157, 159                      | Рейхенбах 40                                       |
| Картан А. 24                                                    | Риман 20                                           |
| Клини С. К. 6, 7, 40, 76, 155                                   | Роджерс Х. 7                                       |
| Кениг 110                                                       | Россер 14, 43                                      |
| Коэн П. Д. 6, 7, 21, 61, 74, 110—112, 147, 149                  | Селфридж 56                                        |
| Кохен 89, 97                                                    | Сколем 21, 70, 74, 152                             |
| Куайн 155                                                       | Соссюр 9                                           |
| Куммер 56                                                       | Стеблин-Каменский М. И. 63                         |
|                                                                 | Стоун 61                                           |
|                                                                 | Свиннerton-Дайер Х. П. Ф. 55, 56                   |

- Тарский А. 6, 7, 9, 21, 78, 85  
Толстой Л. Н. 4  
Том Р. 148  
Тростников В. Н. 7  
Тьюринг 6
- Уайтхед 155  
Успенский В. А. 7
- Фейнман 154  
Ферма П. 19  
Ферми Э. 4  
Форти 100  
Фреге 10  
Френкель А. 7, 53, 100
- Хомский Н. 62.
- Цермело 100, 109
- Шенфилд Д. 6  
Шмудлян 6, 21, 23, 78, 80, 85.  
Шпеккер 89, 97  
Шредингер 90  
Шредер 109
- Эйленберг С. 24
- Яглом И. М. 7
- Аксиома объемности 130  
— полноты 115, 119  
— специализации 37  
Аксиомы арифметики 48  
— бесконечности 138  
— выбора 141  
— с кванторами 119  
— пары 134  
— подстановки 139  
— порядка 119  
— равенства 46  
— регулярности 136  
— специальные теории множеств  
Цермело — Френкеля 49, 72, 78,  
108, 114, 145  
— степени 135  
— суммы 134  
Алгол-60—8  
Алгебра истинных значений 16  
Алгоритмические языки 9  
Алфавит 8  
— языков 11  
— достаточный 65  
Атомарные термы 12  
Атом ортогелия 88, 99  
Аттракторы 148  
Аутореферентность 87
- Булевы алгебры 57, 60  
— функции истинности 61, 127  
Бинарное отношение 107
- Вывод формулы из множества формул в языке  $L$  43  
Внешний аспект семантики 158  
Внутренний аспект семантики 158  
Выражения 8  
Выразимость 29  
Выразительность языка 9  
Вычисление 5  
Вхождение последовательности  $Q$  в  $P$  25  
Геделево множество формул языка  $L$  38  
Гипотеза континуума «ложна» 143  
— Римана 20  
Гомологическая алгебра 24  
Граф 23  
Гуманитаризация математики 161
- Диагональный процесс Кантора 110  
Диалекты  $\mathcal{L}$ , 22
- Естественная семантика связки «если ... то» 41
- Задачи алгоритмической неразрешимости 6
- Изменение  $\xi$  по  $x$  31  
Интуиционизм 149  
Имя 14  
Интерпретационное множество 116  
Интерпретационный класс 30  
Интерпретация атомарных формул 31  
— языка 29  
Истинность 112
- Кардинал 105  
Квантовая логика 6, 87, 93  
Квантовые тавтологии 97  
Кеннинг 62  
Класс замкнутых формул 29  
Коммутирующие операторы 91  
Конвенционализм 152  
Конечное множество 18  
Конструктивизм 148  
Конструкции случайных множеств 137
- Лемма о дедукции 45  
— о змее 23  
— об однозначном чтении 27  
— Цорна 67  
Логико-семантические классы 40  
Логический многочлен 36
- Математика как формальная система 160  
Математическая логика 10  
Математический язык 5  
Метаязык 9  
Метаязыковые переменные 10  
Множества арифметические 33  
— конструктивные 111  
— равномошные 108  
— сравнимые 108  
Множество термов 12  
—  $\varphi$ -выразимо 32  
Множеств теория 6  
Модель множества формул  $\varepsilon$  32  
Модулярная структура 98  
Модулярный вопрос 98  
Мощностей измерение 105

- Мощность класса  $\Phi$ -выразимых множеств 34  
 — континуума 147
- Невыводимость континуум-гипотезы в 118
- Невыразимость истинности 78, 83
- Недостижимые кардиналы 52
- Неразрешимость математических задач 5
- Номер члена 25
- Неформальное толкование 13
- Ординалы 101, 103
- предельные 104
- Образование множества в множестве 17
- вторичные 30
- Парадокс Сколема 70—74
- Переводы аргументов —  $L_1, Ag$  15
- Понятие «истинности» 5
- Приближенные симметрии 99
- Проблема континуума 6, 108, 110
- неразрешимости 5
- Проверка истинности сложных утверждений 113
- Программы 8
- Простой кеннинг 62
- Расширения языка 74
- Реалистический аспект семантики 152
- «Реальность» для языков математики 9
- Регулярные открытые множества 144
- Символы 30
- Синтаксические свойства истинности 35
- Скобочная биекция 25
- Случайный класс 132
- Смысл математического текста 150
- Сокращенная запись 10
- Спин 99
- Стандартная интерпретация  $L_1$  Set 32
- Специальные аксиомы 44
- Стандартные модели 12
- Статистичность 148
- Тавтологии 36, 57, 119
- Тексты 8
- Теорема Геделя о неполноте 6, 87
- о полноте логических средств 44, 64
- о невыразимости 79
- фон Неймана 88
- о скрытых параметрах 6
- Стоуна о структуре булевых алгебр 61
- Тарского о невыразимости истинности 6, 83
- Ферма большая 19, 56
- Теоремы математики 10
- Терм простой 76
- Теория множеств 6
- рекурсивных функций и алгоритмов 7
- Термы 12
- Техника «урезания моделей» 70
- Топологическое пространство 18
- Трансфинитная индукция 104
- рекурсия 104
- Универсум над булевой алгеброй 124
- фон Неймана 15, 51, 100, 105
- Упорядоченная пара 17
- Формальные языки 9
- Формулы 12
- Функция истинности 31
- Частичная булева алгебра 94
- Экспонат 84
- Язык арифметики Шмюльяна 80
- Бурбаки 22
- вещественного анализа 114
- нерелятивистской квантовой механики 90
- синтаксис и семантика 9
- случайных вещественных чисел 6
- теории множеств 9, 23
- — Цермело — Френкеля 11
- SELF 78
- Языки высших порядков
- искусственные 21
- науки и бытовые 150
- первого порядка (предикатов) 11
- формальные и алгоритмические 9
- Языковая деятельность ЭВМ 3
- Ярлык выражения  $P$  84