

Интуитивные представления о множествах, к которым мы апеллировали в предшествующем изложении, строя универсум V , являются первичным материалом. Язык $L_1\text{Set}$ изобретен для того, чтобы писать на нем формальные тексты, эквивалентные нашим содержательным рассуждениям относительно V . Аксиомы $L_1\text{Set}$ (включая логические) получены в результате анализа содержательных доказательств. Критерием полноты их списка служит возможность написать формальный вывод, являющийся переводом любого содержательного доказательства. Эта возможность должна быть продемонстрирована компендиумом формальных текстов достаточного объема. Читатель найдет их в других книгах.

В частности, в $L_1\text{Set}$ можно написать и вывести из аксиом формулу « $\forall x \exists$ ординал $\alpha (x \in V_\alpha)$ », формально отражающую наше ограничение множествами из V .

Вопрос о формальной непротиворечивости аксиом Цермело — Френкеля должен оставаться предметом веры, пока и поскольку не продемонстрирована их противоречивость. Все те доказательства, которые были основаны на них, до настоящего момента непривели к противоречию, но развернули перед нами богатый мир классической и современной математики. Этот мир обладает некоторой реальностью и внутренней жизнью, мало зависящей от формализмов, призванных его описывать.

Обнаружение противоречия в любом из этих формализмов, будь оно и произойдет, послужит лишь прояснению, уточнению и, возможно, перестройке наших представлений, но не их крушению, как это многократно случалось в прошлом.

Глава III

ПРОБЛЕМА КONTИНУУМА И ФОРСИНГ

1. ЗАДАЧА; РЕЗУЛЬТАТ; ИДЕИ

1.1. Кантору принадлежат две фундаментальные идеи в теории бесконечных множеств: открытие (или изобретение?) шкалы их мощностей и доказательство неограниченности этой шкалы.

Напомним, что два множества M, N называются *равномощными* (запись: $\text{card } M = \text{card } N$), если между ними существует взаимно-однозначное соответствие. Мы пишем $\text{card } M \leq \text{card } N$, если M равномощно части N . Мы говорим, что M и N *сравнимы*, если либо $\text{card } M \leq \text{card } N$, либо $\text{card } N \leq \text{card } M$. Мы пишем $\text{card } M > \text{card } N$, если $\text{card } M \geq \text{card } N$, но M и N не равномощны.

1.2. Теорема (Кантор, Шредер, Бернштейн, Цермело).

а) Любые два множества сравнимы. Если $\text{card } M \leq \text{card } N$ и $\text{card } N \leq \text{card } M$ одновременно, то $\text{card } M = \text{card } N$. Коротко: *мощности линейно упорядочены*.

б) Пусть $\mathcal{P}(M)$ — множество всех частей (подмножеств) M . Тогда $\text{card } \mathcal{P}(M) > \text{card } M$. В частности, самой большой мощности не существует.

в) В любом классе мощностей существует наименьшая. Коротко: *мощности вполне упорядочены*.

Доказательство. а) Пусть M равномощно части $M' \subseteq M$ и M равномощно части $N_1 \subseteq M \sim M'$. Отождествим M с M' . Мы получим три множества $N_1 \subseteq M \subseteq N$ и взаимно-однозначное отображение $f: N \rightarrow N_1$. Построить же нужно взаимно-однозначное отображение $g: N \rightarrow M$. Вот его явное описание:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если же } x \in f^n(N) \setminus f^n(M) \text{ для некоторого } n \geq 0, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $f^n(y) = f(f \dots f(y) \dots)$ (n раз); $f^n(N) = \{f^n(y) \mid y \in N\}$.

Проверка свойств f оставляется читателю.

Для доказательства сравнимости любых двух множеств достаточно установить, что любое множество может быть вполне упорядочено, сравнимость вполне упорядоченных множеств следует из леммы 5 приложения к гл. II.

Пусть M — некоторое множество. Для каждого непустого подмножества $N \subseteq M$ выберем некоторый его элемент $s(N) \in N$. Полное упорядочение $<$ подмножества $M' \subseteq M$ назовем *допустимым* (относительно s), если $s(M \setminus \hat{X}) = X$ для всех $X \in M'$, где $\hat{X} = \{Y \mid Y \in M', Y < X\}$.

Если $M' \neq M'$ — подмножества M , на которых есть допустимые полные упорядочения, то одно из них является начальным сегментом второго и упорядочения согласования.

Действительно, как в п. 7а² приложения доказывается, что канонический изоморфизм f , скажем, M' с начальным сегментом M'' , есть тождественное вложение: если $f(X) \neq X$ и X наименьший с таким свойством, то $f(\hat{X}) = \hat{X}$, $X = s(M \setminus \hat{X}) \Rightarrow X = s(M \setminus f(\hat{X})) = f(X)$ — противоречие.

Теперь легко устанавливается, что объединение M' всех подмножеств M , имеющих допустимое отношение s упорядочения, само допустимо упорядочено и совпадает с M , так как иначе его можно было бы вложить в $M' \cup \{s(M \setminus M')\}$.

Отсюда, в частности, следует, что любое множество равномощно некоторому ординалу и, значит, единственному кардиналу. Это оправдывает обозначение card для мощности и упорядочения кар-

диналов в качестве стандартной шкалы мощностей (приложение, п. 11).

б) Так как $\mathcal{P}(M)$ содержит все одноэлементные подмножества M , $\text{card } \mathcal{P}(M) \geq \text{card } M$. Кроме того, никакое отображение $f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ не может быть взаимно-однозначным (или даже отображением на). Действительно, положим

$$N = \{z \mid z \notin f(z)\} \in \mathcal{P}(M)$$

и покажем, что N не лежит в образе f . Предположение о существовании $n \in M$ такого, что $N = f(n)$, немедленно приводит к противоречию, если рассмотреть положение n относительно N :

$$n \in N \Rightarrow n \in f(n) \Rightarrow n \notin N \text{ по определению } N;$$

$$n \notin N \Rightarrow n \notin f(n) \Rightarrow n \in N \text{ по определению } N.$$

Это — знаменитый «диагональный процесс» Кантора.

в) Полная упорядоченность мощностей устанавливается одновременно со сравнимостью на первых шагах теории ординалов (см. приложение к гл. II).

1.3. Замечание. Приведенное доказательство леммы о возможности вполне упорядочить любое множество по существу принадлежит Цермело. Оно было, вероятно, самым серьезным поводом к жестокой критике аксиомы выбора. Действительно, стоящие за ним интуитивные представления сводятся к рецепту: выбирать один элемент множества M за другим, пока все M не будет исчерпано. В таком виде «физическая» немислимость предписания брошется в глаза, и все доказательство многим современникам представлялось не более чем фокусом. Предложение выбрать «сначала» по элементу $c(N)$ в каждом подмножестве $N \subseteq M$ вызвало, например, следующее возражение Лебега. Если отображенные нами элементы не отмечены никакими специальными свойствами, то как мы можем быть уверены, что в процессе всего рассуждения продолжаем думать об одних и тех же элементах?

За исключением специалистов в основаниях, работающие математики сегодня почти не склонны воспринимать эти сомнения.

Поставим теперь основную задачу, которой мы будем заниматься в этой главе. Будем писать $\text{card } \mathcal{P}(M) = 2^{\text{card } M}$, по аналогии с конечным случаем. Континуум — это 2^{ω_0} .

1.4. Проблема континуума.

Каково место континуума на шкале мощностей?

По теореме $1.26 \ 2^{\omega_0} \geq \omega_1$. Поэтому во всяком случае $2^{\omega_0} \geq \omega_1$.

Если же $2^{\omega_0} > \omega_1 > \omega_2, \dots, > \omega_n$, для любого n , то $2^{\omega_0} > \omega_\omega$, ибо континуум не может быть объединением счетного множества подмножеств меньшей мощности (Кениг).

1.5. Гипотеза континуума (КГ): $2^{\omega_0} = \omega_1$. Обобщенная гипотеза континуума утверждает, что $2^{\text{card } M}$ непосредственно следует за $\text{card } M$ для любого бесконечного M . Вот почти все наши знания об этом.

1.6. Теорема.

а) Отрицание гипотезы континуума нельзя вывести из остальных аксиом теории множеств, если они непротиворечивы (Гедель).
б) Гипотезу континуума нельзя вывести из остальных аксиом теории множеств, если они непротиворечивы (Козн).

То же верно для обобщенной гипотезы континуума.

Если принять, что аксиомы теории множеств и логические средства вывода в языке $L_1\text{Set}$, подразумеваемые в формулировке, фактически исчерпывают доказательный аппарат современной математики, можно сказать, что континуум-проблема представляет собой пример абсолютно неразрешимой задачи. Хотя теорема Геделя о неполноте доставляет конкретные примеры неразрешимых суждений в любой формальной системе с разумными свойствами, эти примеры разрешаются «очевидным» образом в некоторой высшей системе. Положение с континуум-проблемой выглядит гораздо труднее. Если согласиться, что она осмысленна, ее решение может быть достигнуто лишь введением нового принципа доказательств. Хотя разные возможности этого обсуждались, предложенные новые аксиомы теории множеств не кажутся ни достаточно убедительными, ни, главное, достаточно эффективными в «большой» математике. За сто лет после введения трансфинитной индукции ни один новый метод конструкции множеств не вошел в обращение. Между тем идея доказательств теоремы Геделя 1.6. а) именно и состоит в проверке того, что все старые методы позволяют построить не более чем ω_1 подмножеств в натуральном ряде (или вещественных чисел).

1.7. Идея Геделя. Гедель рассматривает основные теоретические множественные операции: образование пары, произведение, дополнение, сумму и т. п. — и строит класс всех множеств, которые получаются трансфинитным итерированием этих операций, исходя из $\emptyset$. Такие множества называются конструктивными. Заранее совершенно не ясно, любое ли подмножество $\{0, 1, 2, \dots\}$ конструктивно или, более общо, любое ли множество из универсума V конструктивно. (Оказывается, что эта задача столь же формально неразрешима, как и проблема континуума.) Однако внутри класса конструктивных множеств число подмножеств $\{0, 1, 2, \dots\}$ оказывается равным ω_1 , вероятнее всего, просто потому, что массу неконструктивных подмножеств мы пропустили. В то же время все аксиомы теории множеств, ограниченные на этот класс, в разумном смысле слова оказываются истинными, как и все выводы из них. Поэтому отрицание КГ невыводимо, будучи истинным в этой модели.

В этой книге доказательство Геделя не излагается, см., например, [20].

1.8. Идея Коэна. Мы излагаем ее ниже в варианте Д. Скотта и Соловья и к тому же на модельной задаче.

Мы будем обсуждать КГ в следующей форме: не существует подмножества вещественных чисел R , мощность которого была бы строго промежуточной между мощностями $\{0, 1, 2, \dots\}$ и R .

Действительно, если $2^{\omega_0} > \omega_1$, то множество мощности ω_1 в R имело бы промежуточную мощность.

Чтобы установить недоказуемость этого утверждения, что равносильно теореме Коэна, достаточно построить модель вещественных чисел, в которой все аксиомы и следствия из них выполняются, а множество промежуточной мощности существует.

Этой моделью будет служить множество $\bar{R}$ случайных чисел на очень большом вероятностном пространстве Ω . Подбирая Ω , можно сделать $\bar{R}$ настолько большим, что между N (целые числа модели) и $\bar{R}$ (континуум модели) будет множество промежуточной мощности, погруженное в $\bar{R}$ внутри модели.

Конечно, дело не может обстоять так просто, и проведению этой программы должно что-то мешать. Мешает то, что почти все свойства R , в том числе большинство аксиом, оказываются ложными для $\bar{R}$, так что $\bar{R}$ не может служить моделью R в обычном смысле слова. Способ преодоления этой трудности и составляет основную идею Коэна. Коэн заменяет свойство истинности утверждения другим свойством, которое мы будем называть временно «истинностью» и которое обладает нужными формальными качествами. Именно, все аксиомы R оказываются «истинными» в $\bar{R}$, все выводы из «истинных» утверждений по правилам логики приводят снова к «истинным» утверждениям, а КГ оказывается не «истинной» и, значит, не выводимой из аксиом.

Покажем подробнее, как это делается.

1.9. Пусть I — множество мощности $> \omega_1$. Положим $\Omega = [0, 1]^I$ с мерой Лебега; $\bar{R}$ — множество случайных чисел на Ω — множество вещественно-значных измеримых функций на Ω .

1.10. Теорема.

а) Для $\bar{R}$ «истинны» все аксиомы вещественных чисел и все выводы из них.

б) Для $\bar{R}$ утверждение КГ не «истинно».

Свойство: утверждение P о случайных числах $\bar{x}, \bar{y}, \dots \in \bar{R}$ «истинно» нужно понимать так:

если рассмотрим точку $\omega \in \Omega$, взяв значения $\bar{x}(\omega), \bar{y}(\omega), \dots$ случайных чисел $\bar{x}, \bar{y}, \dots$ в ней и образовать утверждение P_ω об этих обыкновенных вещественных числах, то для почти всех $\omega \in \Omega$ (кроме множества меры 0) P_ω окажется истинным в обычном смысле слова.

Короче: «истинность» — истинность при всех испытаниях с вероятностью единица.

Пример. Пусть P — утверждение «в R нет делителей нуля», т. е. «если $x, y \in R$ таковы, что $xy=0$, то либо $x=0$, либо $y=0$ ». Тогда утверждение «в $\bar{R}$ нет делителей нуля», конечно, не истинно. Однако оно «истинно», потому что истинно утверждение: «если $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{R}$ таковы, что $\bar{x}\bar{y}=0$, то для почти всех $\omega \in \Omega$ либо $\bar{x}(\omega)=0$, либо $\bar{y}(\omega)=0$ ».

1.11. Чтобы придать точный смысл определению «истинности» и научиться эффективно проверять «истинность» достаточно сложных утверждений, практически необходимо ввести формальный язык (в данном случае язык теории вещественных чисел). Это — математический объект, и теорема 1.10 в точной формулировке будет утверждением об этом объекте, а вовсе не об R и не от R .

Связь этого языка с R осуществляется через систему неформальных рецептов, которые позволяют переводить на этот язык обычные неформальные тексты об R , и через систему теорем, которые служат аргументами в пользу возможности адекватности такого перевода.

Роль $\bar{R}$ сведется к вспомогательной конструкции, которая используется для определения и вычисления специальной функции «истинности» на формулах языка.

Такое место логики в изложенной программе.

1.12. Подробное доказательство теоремы 1.9 было бы достаточно длинным и нетривиальным по нескольким причинам. Прежде всего, описание формального языка и аксиом R в нем само по себе не может быть слишком коротким. Затем требуется проверка «истинности» всех аксиом и не «истинности» КГ, в общей сложности одна-две дюжины проверок, каждая из которых является индуктивным вычислением с бесконечными суммами и произведениями внутри булевой алгебры измеримых множеств в Ω . Самые серьезные трудности, однако, связаны с тем, что смысл всех утверждений об R в $\bar{R}$ сильно меняется, и не всегда в удобную сторону.

Мы проиллюстрируем качественную сторону дела, попытавшись объяснить, почему КГ не «истинна» и почему это нетривиально.

Как было сказано, мы хотим построить подмножество $\bar{M}$ в $\bar{R}$ мощности, промежуточной между мощностью N и мощностью $\bar{R}$. Для этого можно поступить так: пусть для любого $i \in I$ случайное число $\bar{x}_i: [0, 1]^I \rightarrow [0, 1]$ есть i -я проекция. Выберем подмножество $J \subset I$ такое, что $\omega_0 < \text{card } J < \text{card } I$ (это возможно, если I велико) и положим

$$\bar{M} = \{x_j | j \in J\} \subset \bar{R}.$$

Тогда в обычном смысле слова $\text{card } \bar{N} < \text{card } \bar{M} < \text{card } \bar{R}$. Однако нам нужно доказать, что соответствующие утверждения «истинны»

Атомарные формулы: $t_1 = t_2$ и $t_1 \leq t_2$, где t_i — термы.

Формулы определяются индуктивно в точности, как в языках $\mathcal{L}_1$, со следующим дополнением: $\forall f(Q)$ и $\exists f(Q)$ — формулы, если Q — формула, f — символ переменной функции.

Понятия свободного вхождения переменной (x или f) замкнутой формулы и другие очевидным образом переносятся на наш язык. Приемы сокращенной записи — те же, что были проделаны в гл. I. Подразумеваемая стандартная интерпретация формул языка должна быть очевидна из определений и следующих примеров формул.

2.3.

Формула $Z(y)$: « y — целое число». Способ записать это, верно, не совсем очевиден: мы пишем « y можно получить, прибавляя (или вычитая) 1 к 0» или «любая функция f с периодом 1, обращающаяся в нуль в нуле, обращается в нуль в y », что дает

$$Z(y) : \forall f((f(0) = 0 \wedge \forall x(f(x) = f(x+1))) \rightarrow f(y) = 0).$$

2.4.

Формула $K\Gamma$: «любое подмножество в R либо равносильно R , либо счетно, либо конечно».

Подготовленная словесная формулировка: «для множества нулей любой функции h либо существует функция g , отображающая его на все R , либо существует функция f , отображающая целые числа на него».

Формула:

$$K\Gamma : \forall h(\exists g \forall u \exists v(h(x) = 0 \wedge g(x) = g(x)) \vee \exists f \forall u(h(u) = 0 \rightarrow \exists x(Z(x) \wedge u = f(x))))).$$

Обратите внимание, что $Z(x)$ входит в $K\Gamma$ как составная часть.

Запишем еще аксиому полноты

2.5.

Формула Π : «любое ограниченное сверху подмножество в R (множество значений функции f) имеет верхнюю грань (z):

$$\forall f(\exists u \forall x(f(x) \leq u) \rightarrow \exists z \forall u(\forall x(f(x) \leq u) \rightarrow z \leq u)).$$

Все остальные интересующие нас формулы пишутся еще проще и не требуют специальных комментариев.

Теперь мы дадим точное определение свойства «истинности» замкнутой формулы языка $L_2\text{Real}$, неформально описанного в § 1. Подчеркнем, что оно не является абсолютным, а зависит от выбора основного вероятностного пространства Ω , которое используется для конструкции «модели» вещественных чисел.

в нашем пиквикском смысле. Но в этом смысле роль целых чисел берут на себя «локально целые» (целые с вероятностью 1 при всех испытаниях) случайные числа, мощность которых может быть гораздо больше чем ω . Поэтому необходимая нижняя оценка $\text{card } \bar{M}$ оказывается резко поднятой. Аналогично, описание $\bar{M}$, которое мы дали в наивных терминах, после формализации и последующей расшивки для $\bar{R}$ начинает иметь другой смысл и приводит к множеству, гораздо большему, чем «настоящее» $\bar{M}$, поэтому неясно, что сохранится верхнее неравенство для $\text{card } \bar{M}$. То, что в конце концов все оказывается в порядке, выглядит почти как чудо.

План оставшейся части главы следующих. В § 2 и 3 мы излагаем (с сокращениями) этот урезанный вариант теоремы о невыгодности $K\Gamma$ в языке вещественных чисел второго порядка. Читатель, которого интересует полное доказательство, может начать прямо с § 4, где вводится булевозначный «универсум случайных множеств», заменяющий V . В § 5—7 проверяется «истинность» аксиом Цермело — Френкеля, а в § 8 — «ложность» $K\Gamma$.

2. ЯЗЫК ВЕЩЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА

2.1. В этом параграфе мы опишем формальный язык, ориентированный на теорию вещественных чисел. Это значит, в частности, что переменные $x, y, z, \dots$ будут рассматриваться как имена вещественных чисел. Однако при попытке записать на языке первого порядка интересующие нас утверждения, например гипотезу континуума $K\Gamma$ или даже просто аксиому полноты (отличающую множество всех вещественных чисел от рациональных), мы обнаружим, что не в состоянии этого сделать. Действительно, в этих формулировках речь идет о произвольных подмножествах (или одноместных отношениях) вещественных чисел, тогда как в языках первого порядка нет символов для переменных отношений: ср. п. 3.17 гл. I.

Поэтому нам придется рассмотреть язык второго порядка $L_2\text{Real}$, самый экономный, в котором выражаются аксиомы и $K\Gamma$. При описании языка мы будем кратки, отмечая в основном специфику, связанную с ориентацией и особенностями второго порядка.

2.2. Язык $L_2\text{Real}$. Алфавит состоит из символов переменных $x, y, z, \dots$, переменных ранга 1: $f, g, h, \dots$; констант $0, 1$, операций $+$, $\cdot$ ранга 2; отношений $=, \leq$ ранга 2; связи, кванторы, скобки, запятые — те же, что в языках $\mathcal{L}_1$.

Термы — это $x, y, z, \dots$ и $\bar{0}, \bar{1}$, а также $f(t), t_1 \cdot t_2$ и $t_1 + t_2$, если f — символ функции; t, t_1 и t_2 — термы. Термы суть имена вещественных чисел.

2.6. Алгебра истинностных значений. Как в § 1, положим:

I — некоторое множество;

$\Omega = [0, 1]^I$ — с мерой Лебега;

B — алгебра измеримых множеств Ω по модулю подмножеств меры 0;

0 — класс пустого множества в B ;

1 — класс Ω в B .

В алгебре B определены следующие операции:

a' — «дополнение» к элементу $a \in B$;

$a \wedge b$ — «пересечение» элементов $a, b \in B$;

$a \vee b$ — «объединение» элементов $a, b \in B$,

которые удовлетворяют обычным тождествам и определяют на B структуру булевой алгебры. Мы пишем $a \leq b$, если $a \wedge b = a$.

Более того, операции пересечения и произведения однозначно доопределяются на *бесконечные семейства* элементов и продолжают удовлетворять обычным тождествам, которые выполняются в алгебре всех подмножеств любого множества. Мы не будем про-
верять это.

Отметим лишь, что здесь существенно отождествление множеств «по модулю нуля» и что тождества типа $A \bmod 0 \wedge B \bmod 0 = (A \cap B) \bmod 0$ уже не переносятся на случай бесконечных семейств.

Наконец, B удовлетворяет *условию счетности*: если $\bigvee a_\alpha = 1$ и $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ для $\alpha \neq \beta$, то $a_\alpha \neq 0$ не более чем для счетного множества индексов α . Это вытекает из положительности и аддитивности меры Лебега.

Технически говоря, B является *полной булевой алгеброй с условием счетности*. Ее точное происхождение и наличие на ней меры играют менее важную роль.

2.7. Интерпретационное множество. Мы введем сейчас большое множество M , каждая точка которого ξ будет состоять в присывании некоторых значений всем символам алфавита языка $L_2 \text{Real}$. После фиксации ξ каждая формула языка окажется конкретным высказыванием об измеримых функциях (случайных величинах) на Ω и функционалах над ними (ср. § 2 гл. II).

Положим для этого:

$\bar{R}$ — множество измеримых вещественных функций на Ω ;

$\bar{R}^{(1)}$ — множество всевозможных отображений $\bar{R} \rightarrow \bar{R}$, которые удовлетворяют условию

$$\forall x, y \in \bar{R} \text{ множество } \{w \in \Omega \mid \bar{x}(w) = \bar{y}(w)\} \bmod 0 \leq$$

$$\leq \{\{w \in \Omega \mid \bar{f}(x)(w) = \bar{f}(y)(w)\} \bmod 0.$$

Интуитивный смысл определения $\bar{R}^{(1)}$ таков. Если исключить в нем условие « $\bmod 0$ », то требование будет означать просто, что значе-
ние случайной величины $\bar{f}(\bar{x})$ при каждом испытании должно определяться значением $\bar{x}$ *при этом испытании*. Конечно, это очень естественное требование, если мы хотим, чтобы $\bar{f}$ адекватно отображали свойства обычных вещественно-значных функций в смысле § 1. Добавление « $\bmod 0$ » ослабляет это условие до требования «с условной вероятностью 1».

Теперь вернемся к множеству $\bar{M}$: одна точка $\xi \in \bar{M}$ состоит в выборе

$x^i \in \bar{R}$ для каждого символа переменной x ;

$f^i \in \bar{R}^{(1)}$ для каждого символа переменной функции f .

Опишем интерпретацию выражений языка, отвечающую выбору ξ .

а) Термы. Пусть t — терм, $\xi \in \bar{M}$. Тогда $t^i \in \bar{R}$ — случайная величина, определяемая очевидным индуктивным процессом.

б) Функция истинности $\| \cdot \|$ на атомарных формулах. Пусть P — атомарная формула $t_1 \leq t_2$ или $t_1 = t_2$. Ее истинностным значением в точке $\xi \in \bar{M}$ называется элемент алгебры B , который определяется так:

$$\|t_1 \leq t_2\|(\xi) = \{w \in \Omega \mid t_1^i(w) \leq t_2^i(w)\} \bmod 0.$$

Аналогичное определение относится к $t_1 = t_2$.

в) Функция истинности $\| \cdot \|$ в общем случае. Общее определение индуктивно. Для соединения связками формулы те же, что и в п. 5.7 гл. II:

$$\begin{aligned} \|\neg P\| &= \|P'\|, \quad \|P \vee Q\| = \|P\| \vee \|Q\|, \quad \|P \wedge Q\| = \|P\| \wedge \|Q\|, \\ \|P \rightarrow Q\| &= \|P'\| \vee \|Q\|, \quad \|P \leftrightarrow Q\| = (\|P\| \wedge \|Q\|) \vee (\|P'\| \wedge \|Q'\|). \end{aligned}$$

В этих пяти формулах мы для краткости опустили указание ξ . Наконец,

$$\|\forall x P\|(\xi) = \bigwedge_{\xi'} \|P\|(\xi') \quad (\text{по всем } \xi', \text{ отличающиеся от } \xi \text{ лишь изменением } x);$$

$$\|\exists x P\|(\xi) = \bigvee_{\xi'} \|P\|(\xi') \quad (\text{по тем же } \xi'), \text{ и аналогично с кванторами по переменным функциям.}$$

Интуитивно значение функции истинности утверждения о случайных числах — это множество испытаний $\bmod 0$, при которых это утверждение становится истинным как факт о вещественных числах.

2.8. Лемма.

Если P — замкнутая формула, то $\|P\|(\xi)$ не зависит от выбора $\xi \in \bar{M}$ и принимает только значения 0 или 1.

(Устанавливается несложным индуктивным рассуждением по длине описания P . Удобнее доказать более общий факт: если P — любая формула, а ξ и ξ' не отличаются на переменных, входящих в P свободно, то $\|P\|(\xi) = \|P\|(\xi')$: ср. предложение 2.10 гл. II.)

Это общее значение $\|P\|(\xi)$ мы можем обозначить просто $\|P\|$. Теперь мы в состоянии сформулировать основное определение этого параграфа.

2.9. Определение.

Формула P языка $L_2\text{Real}$ называется «истинной», если $\|P\|(\xi) = 1$ при всех $\xi \in \bar{M}$.

3. НЕВЫВОДИМОСТЬ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ В $L_2\text{Real}$

3.1. Основная лемма.

а) Правила вывода сохраняют «истинность»;

б) логические аксиомы первого порядка и их варианты в $L_2\text{Real}$ «истинны»;

в) специальные аксиомы языка $L_2\text{Real}$ «истинны»;

г) $K\Gamma$ не «истинна», если $\text{card } I > \omega_1$.

Отсюда вытекает

3.2 Теорема.

$K\Gamma$ не выводима из аксиом в языке $L_2\text{Real}$.

В этом параграфе мы приведем те фрагменты доказательства основной леммы, которые существенны и для «настоящей» теоремы Коэна, а не только для нашей модельной задачи. Отметим, что теорема 3.2 слабее теоремы Коэна так как язык $L_2\text{Real}$ содержит гораздо меньше выражительных средств, чем язык теории множеств. Хотя на нем и формулируется континуум-гипотеза, в силу общих результатов Геделя нет никаких оснований ожидать, что вообразаемое ее доказательство тоже обязано допускать формализацию на этом языке. Например, для вывода могло бы потребоваться введение функционалов от функций, функционалов от функционалов и т. д. Язык теории множеств, к которому мы вернемся в § 4, содержит средства для одновременного рассмотрения всех этих конечных и даже трансфинитных уровней.

3.3. Доказательство 3.1а. Если $\|P\| = 1$ и $\|P \rightarrow Q\| = 1$, то $\|P\| = 0$ и $\|P\| \vee \|Q\| = 1$, откуда $\|Q\| = 1$.

Если $\|P\| = 1$, то $\|P\|(\xi) = 1$ для всех $\xi \in \bar{M}$, но тогда (§' пробегает изменения ξ по x):

$$\| \forall x P \|(\xi) = \bigwedge_{\xi'} \|P\|(\xi') = \bigwedge_{\xi'} 1 = 1.$$

Аналогично разбирается Gen по функциям.

3.4. Доказательство 3.1б (набросок).

Тавтологии. Их «истинность» доказана в § 5 гл. II.

Аксиомы с кванторами. Доказательство получается индукцией по длине описания формул, входящих в схемы аксиом, и является вполне прямым, так что мы его опускаем.

3.5. Доказательство 3.1в (набросок). Мы ограничимся указанием списка аксиом и краткими комментариями.

Специальные аксиомы теории множеств: это аксиомы равенства и (схема) аксиом выбора:

$$AB: \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists f \forall x P(x, f(x)),$$

где P — любая формула, не имеющая свободных переменных, кроме x и y , и y не ограничивает f в P .

Специальные аксиомы теории полей: аксиомы аддитивной группы, мультипликативной группы, дистрибутивности сложения относительно умножения.

Специальные аксиомы порядка:

$$x \leq y \vee y \leq x; \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \leftrightarrow x = y;$$

$$x \leq y \rightarrow (x + z \leq y + z); \quad (x \leq y \wedge \bar{0} \leq z) \rightarrow xz \leq yz.$$

Аксиома полноты (п. 2.5).

Наибольших усилий требует проверка «истинности» аксиом выбора и полноты. Характер вычислений при этом, однако, аналогичен вычислениям в доказательстве «ложности» $K\Gamma$, которые мы проведем подробно ниже. Поэтому эти проверки мы здесь опускаем.

Первая аксиома равенства тривиальна. Вторая проверяется сначала для атомарных формул P , затем проводится индукция по длине описания P . Рассуждения довольно кропотливые, но простые.

Аксиомы упорядоченного поля проверяются без труда. Ограничимся одним примером: «ненулевое число имеет обратное»:

$$\| \forall x (\neg (x = \bar{0}) \rightarrow \exists y (xy = \bar{1})) \| = \bigwedge_{x \in \bar{R}} (\neg (x = \bar{0}) \rightarrow \bigvee_{y \in \bar{R}} \|x \cdot y = \bar{1}\|).$$

Чтобы проверить, что это значение равно 1, достаточно установить это для каждого члена с фиксированным значением $\bar{x} \in \bar{R}$, для чего, в свою очередь, достаточно построить по $\bar{x}$ такую случайную величину $\bar{y} \in \bar{R}$, что $\|\bar{x} = 0\| \vee \|\bar{x}\bar{y} = 1\| = 1$. Для этого положим

$$\bar{y}(w) = \begin{cases} \bar{x}(w)^{-1}, & \text{если } \bar{x}(w) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \bar{x}(w) = 0. \end{cases}$$

3.6. Доказательство 3.1г. Напомним сначала, как выглядит КГ:

$$\forall h (\exists g \forall x (h(x) = 0 \wedge y = g(x)) \vee \exists f \forall y (h(y) = 0 \rightarrow \exists x (Z(x) \wedge y = f(x))))$$

Обозначим через P_1, P_2 первую и вторую альтернативы в этой формуле: КГ имеет вид $\forall h (P_1 \vee P_2)$. Мы хотим доказать, что для любой точки $\xi \in \bar{M}$ имеем $\| \forall h (P_1 \vee P_2) \|(\xi) = 0$. Согласно определению в п. 2.7

$$\| \forall h (P_1 \vee P_2) \|(\xi) = \bigwedge_{\xi'} (\| P_1 \|(\xi') \vee \| P_2 \|(\xi'))$$

где ξ' пробегает все изменения ξ по h . Чтобы проверить, что это значение равно 0, достаточно установить существование такой точки ξ' , что $\| P_1 \|(\xi') = \| P_2 \|(\xi') = 0$. Поскольку в P_1 и P_2 все переменные, кроме h , связаны, отыскание ξ' равносильно выбору $h^{\xi'}$ $= \bar{h} \in \bar{R}^{(1)}$. Мы укажем $\bar{h}$ явно: это будет функция, «множество нулей которой имеет промежуточную мощность».

С этой целью, как в § 1, фиксируем подмножество $J \subset I$ мощности, строго промежуточной между ω_0 и $\text{card } I$. Напомним, что $\bar{x}_i \in \bar{R}$ для каждого $i \in I$ есть функция « i -я координата».

Далее, для каждой случайной величины $\bar{x} \in \bar{R}$ выберем такое подмножество $\Omega(\bar{x}) \leq \Omega$, что

$$\bigvee_{i \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_i \| = \Omega(\bar{x}) \bmod 0$$

(здесь используется полнота B). Наконец, определим $\bar{h} \in \bar{R}^{(1)}$, положив для каждой $\bar{x} \in \bar{R}$ и $w \in \Omega$:

$$\bar{h}(\bar{x})(w) = \begin{cases} 0, & \text{если } w \in \Omega(\bar{x}), \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.7. Утверждение о корректности.

а) $\bar{h}(\bar{x})$ как функция от w (при фиксированном $\bar{x}$) измерима, так что $\bar{h}$ отображает $\bar{R}$ и $\bar{R}$.

б) Для каждой $\bar{x} \in \bar{R}$ имеем

$$\| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| = \bigvee_{i \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_i \|$$

в) $\bar{h} \in \bar{R}^{(1)}$ (см. п. 4.2), так что существует точка $\xi' \in \bar{M}$, для которой $h^{\xi'} = \bar{h}$:

Доказательство. а) $\bar{h}(\bar{x})$ принимает на Ω всего два значения: 0 и 1, и множества уровня этих значений измеримы по определению и свойству полноты B .

б) Очевидно из определения.

в) Мы должны проверить, что для всех $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{R}$ имеем

$$\{w \in \Omega \mid \bar{x}(w) = \bar{y}(w)\} \bmod 0 \leq \{w \in \Omega \mid \bar{h}(\bar{x})(w) = \bar{h}(\bar{y})(w)\} \bmod 0$$

Покажем, что множество точек $w \in \Omega$, для которых одновременно $\bar{x}(w) = \bar{y}(w)$ и $\bar{h}(\bar{x})(w) \neq \bar{h}(\bar{y})(w)$, имеет меру 0.

Достаточно рассмотреть случай $\bar{h}(\bar{x})(w) = 0, \bar{h}(\bar{y})(w) = 1$, т. е. установить, что

$$\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| \wedge \| \bar{h}(\bar{y}) = 1 \| = 0$$

Запишем второй множитель в виде $\bigvee_{i \in J} \| \bar{x} = \bar{x}_i \|$ (см. утверждение

3.7б) и применим к нему и первому множителю правило дистрибутивности (используется полнота B). Учтем, кроме того, что $\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{x} = \bar{x}_i \| \leq \| \bar{y} = \bar{x}_i \|$. Тогда получим

$$\| \bar{x} = \bar{y} \| \wedge \| \bar{h}(\bar{x}) = 0 \| \leq \bigvee_{i \in J} \| \bar{y} = \bar{x}_i \| = \| \bar{h}(\bar{y}) = 0 \|,$$

откуда и следует требуемое.

Пояснение. Выбор $\bar{h}$ — существенное место доказательства, и мы хотим его мотивировать. Напомним, что h — это имя той функции, мощность множества нулей которой нас интересует. Выбор конкретной $\bar{h}$ для «опровержения» КГ осуществляется так, чтобы среди «почти всюду нулей» $\bar{h}$ были элементы множества $\{\bar{x}_i \mid i \in J\}$, которое имеет промежуточную мощность в наивном смысле слова (ср. § 1). Однако $\bar{h}$ не может быть каким угодно отображением $\bar{R}$ в $\bar{R}$: на нее наложено сильное ограничение $\bar{h} \in \bar{R}^{(1)}$. Поэтому вместе со всеми $\bar{x}_i$ в множестве нулей $\bar{h}$ почти всюду может оказаться неизбежным включить еще какие-то $\bar{y} \in \bar{R}$, а также «частично включить» какие-то $z \in \bar{R}$. Последнее выражение есть попытка передать возможность того, что $\| \bar{h}(z) = 0 \|$ есть не 0 и не 1, так что $\bar{z}$ является нулем $\bar{h}$ с «некоторой вероятностью».

Таким образом, «множество нулей» $\bar{h}$ может оказаться больше, чем мы хотим, так что естественно ожидать затруднений в доказательстве того, что его нельзя отобразить на все $\bar{R}$ (альтернатива P_1). Казалось бы, что обстоятельство делает тривиальным опровержение альтернативы P_2 (Z нельзя отобразить на множество нулей), однако и это неверно! Как мы уже отмечали, окажется, что $\| Z(\bar{x}) \| = 1$ для многих $\bar{x}$, не являющихся постоянными целочисленными функциями на Ω , да к тому же $\| Z(\bar{x}) \| = 0, 1$ еще для каких-то $\bar{x}$, так что «множество целых чисел» в нашей модели резко возросло.

Последнее замечание: в нашем обсуждении по существу возникло понятие « B -случайного множества», которое будет центральным в последующем изложении (см. § 4). Именно, «множе-

ство нулей $\bar{h}$ » является случайным в том смысле, что для каждой $\bar{z} \in \bar{R}$ утверждению « $\bar{z} \in$ (нули $\bar{h}$)» естественно приписывается булево значение истинности $\|\bar{h}(\bar{z})\| = 0$.

Теперь вернемся к прерванному доказательству того, что $\|K\bar{G}\| = 0$.

3.8. Доказательство $\|P_1\|(\xi') = 0$. Согласно правилам вычисления функции истинности найдем

$$\|P_1\|(\xi') = \bigvee_{\bar{g}} \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{\bar{x}} \{\|\bar{h}(\bar{x})\| = 0 \wedge \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})\|\}$$

($\bar{h}$ определена выше, $\bar{g}$ пробегает все элементы $\bar{R}^{(1)}$, а $\bar{x}, \bar{y}$ — все элементы $\bar{R}$). Мы предположим, что $\|P_1\|(\xi') = 0$ и придем к противоречию. Обозначим это значение через $\bigvee_{\bar{g}} a(\bar{g})$.

Если оно $\neq 0$, то $a(\bar{g}) \neq 0$ для какой-то конкретной функции $\bar{g} \in R^{(1)}$. Выберем ее и положим

$$a = \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{\bar{x}} \{\|\bar{x} = \bar{x}_j\| \wedge \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})\|\}.$$

Здесь V появилось как замена $\|\bar{h}(\bar{x})\| = 0$ в силу 3.76. Далее $\|\bar{x} = \bar{x}_j\| \wedge \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x})\| \leq \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x}_j)\|$. Пользуясь этим и дистрибутивностью, находим

$$a \leq \bigwedge_{\bar{y}} \bigvee_{j \in J} \|\bar{y} = \bar{g}(\bar{x}_j)\|.$$

В частности, для каждой $\bar{x}_i$ вместо $\bar{y}$

$$a \leq \bigvee_{j \in J} \|\bar{x}_i = \bar{g}(\bar{x}_j)\|.$$

Если, как мы предположили, $a \neq 0$, то для каждого i найдется $j(i) \in J$ такой, что

$$\|\bar{x}_i = \bar{g}(\bar{x}_{j(i)})\| \neq 0.$$

Поскольку I несчетно и $\text{card } J < \text{card } I$, должен существовать такой индекс $j_0 \in J$, что $j_0 = j(i)$ для всех i из несчетного подмножества $I_0 \in I$. Это, однако, противоречит условию счетности для B , потому что члены семейства $\|\bar{x}_i = \bar{g}(\bar{x}_{j_0})\|$ ($i \in I_0$) попарно не пересекаются. В самом деле,

$$\|\bar{x}_{i_1} = \bar{g}(\bar{x}_{j_0})\| \wedge \|\bar{x}_{i_2} = \bar{g}(\bar{x}_{j_0})\| \leq \|\bar{x}_{i_1} = \bar{x}_{i_2}\| = 0,$$

если $i_1 \neq i_2$.

Обратите внимание, в какой мере это рассуждение параллельно «наивному» из § 1. Функция $\bar{g}$, по предположению, отображает

нули $\bar{h}$ на $\bar{R}$ «с ненулевой вероятностью», но точный смысл вычислений едва ли поддается словесной формулировке.

Вычисление $\|Z(y)\|$. Формула $Z(y)$, « y — целое число», выписана в п. 2.3. Так как она входит в P_2 , вычисление $\|Z(y)\|$ необходимо для вычисления $\|P_2\|$.

3.9. Лемма.

Пусть $\eta \in \bar{M}$, $y^* = \bar{y} \in \bar{R}$. Тогда $\|Z(y)\|(\eta) = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \|\bar{y} = n\| = \{\omega \in$

$$\in \Omega \mid \bar{y}(\omega) \in Z\} \bmod 0.$$

Доказательство. Мы должны установить, что

$$\bigvee_i \|\bar{f}(0) = 0\| \vee \bigvee_x \|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x} + 1)\| \vee \bigvee_n \|\bar{f}(y) = 0\| = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \|\bar{y} = n\|.$$

Проверим по очереди неравенство в обе стороны.

Неравенство $\leq$. Достаточно найти конкретную функцию $\bar{f} \in \bar{R}^{(1)}$, для которой соответствующий член левой части содержится в правой части.

Определим $\bar{f}$, положив $\bar{f}(\bar{x})(\omega) = \sin^2 \pi \bar{x}(\omega)$ (вместо $\sin^2 \pi \bar{x}$ можно взять любую измеримую функцию $R \rightarrow R$ с периодом 1 и нулями только в целых точках). Легко видеть, что $\bar{f}(\bar{x}) \in \bar{R}$ и $\bar{f} \in R^{(1)}$. Тогда $\|\bar{f}(0) = 0\|' = 0$ и $\|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x} + 1)\|' = 0$. Поэтому нужно лишь проверить, что

$$\|\sin^2 \pi \bar{y} = 0\| \leq \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \|\bar{y} = n\|,$$

а это очевидно.

Включение $\geq$. Достаточно проверить, что для любых фиксированных значений $n \in Z$, $\bar{f} \in \bar{R}^{(1)}$, $\bar{y} \in \bar{R}$ имеем

$$\|\bar{y} = n\| \leq b \vee c,$$

где $b = \|\bar{f}(0) = 0\| \vee \bigvee_x \|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x} + 1)\|$; $c = \|\bar{f}(\bar{y}) = 0\|$. Но включение $a \leq b \vee c$ равносильно тому, что $a \wedge c' \leq b$. Далее, в нашей ситуации

$$a \wedge c' = \|\bar{y} = n\| \wedge \|\bar{f}(\bar{y}) = 0\|' \leq \|\bar{f}(n) = 0\|'$$

(n под знаком $\bar{f}$ — постоянная случайная величина, всюду равна n). Поэтому достаточно убедиться, что

$$\|\bar{f}(n) = 0\|' \leq \|\bar{f}(0) = 0\|' \vee \bigvee_x \|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x} + 1)\|'$$

или, переходя к дополнениям, что

$$\|\bar{f}(n) = 0\| \geq \| \bar{f}(0) = 0 \| \wedge (\wedge_x \|\bar{f}(x) = \bar{f}(x+1)\|).$$

Мы лишь увеличим правую часть, если оставим в ней только члены, отвечающие $\bar{x}=0, 1, 2, \dots, n-1$, но пересечение этих членов, очевидно, равно

$$\|\bar{f}(0) = 0\| \wedge \|\bar{f}(0) = \bar{f}(1) = \dots = \bar{f}(n)\| \leq \|\bar{f}(n) = 0\|.$$

3.10. Доказательство $\|P_2\|(\xi') = 0$. По правилам вычисления $\|P_2\|$, учитывая предыдущую лемму, находим

$$\|P_2\|(\xi') = \bigvee_{\bar{f}} \bigwedge_{\bar{y}} (\|\bar{h}(\bar{y}) = 0\| \bigvee_{\bar{x}} \bigvee_n (\|\bar{x} = n\| \wedge \|\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})\|)).$$

Так как $\bar{f} \in \bar{R}^{(1)}$, имеем $\|\bar{x} = n\| \leq \|\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(n)\|$, так что

$$\|\bar{x} = n\| \wedge \|\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})\| \leq \|\bar{y} = \bar{f}(n)\|.$$

Далее, достаточно доказать, что член, отвечающий любому конкретному выбору $\bar{f}$, равен 0. Допустим, что это не так, и придём к противоречию. Пусть $a \neq 0$ — член, отвечающий $\bar{f}$. По сказанному,

$$a \leq \bigwedge_{\bar{y}} (\|\bar{h}(\bar{y}) = 0\| \bigvee_{\bar{n}} \|\bar{y} = \bar{f}(n)\|).$$

В частности, для каждого $j \in J$ мы должны иметь (с $\bar{x}_j$ вместо $\bar{y}$):

$$a \leq \bigvee_{\bar{n}} \|\bar{x}_j = \bar{f}(n)\|$$

(учесть, что $\|\bar{h}(\bar{x}_j) = 0\|' = 0$ в силу 5.76). Значит, для каждого j должно найтись такое целое число $n(j)$ что $\|\bar{x}_j = \bar{f}(n(j))\| \neq 0$. Так как J несчетно, существует n_0 и несчетное подмножество $J_0 \subseteq J$ таких j_0 , что $n(j_0) = n_0$ для всех $j_0 \in J_0$. Тогда $\|\bar{x}_j = \bar{f}(n_0)\|$, $j \in J_0$ образуют несчетное множество ненулевых попарно непересекающихся элементов B . Это противоречит условию счетности для B .

4. УНИВЕРСУМ НАД БУЛЕВОЙ АЛГЕБРОЙ

4.1. В этом параграфе мы фиксируем некоторую полную булеву алгебру B (см. п. 2.6) и построим над ней универсум « B -случайных множеств». Он окажется моделью для аксиом Цермело—Френкеля в том же обобщенном смысле, в каком случайные числа R были моделью вещественных чисел R в § 3. Мы проверим

«истинность» всех аксиом L_1 Set в § 5—7 и затем «ложность» гипотезы континуума при подходящем выборе B в § 8.

Объекты V^B будут обозначаться большими буквами X, Y, Z . Вместе с каждым объектами будут определены элементы $\|X \in Y\| \in B$ и $\|Y = X\| \in B$. Интуитивный смысл их таков: если B — алгебра измеримых множеств вероятностного пространства, то $\|X \in Y\|$ есть максимальное множество, на котором « X является элементом Y с вероятностью единица». Так как в общем случае вероятностные меры не играют роли, мы будем называть «вероятностями» просто элементы B и тогда $\|X \in Y\|$ есть просто вероятность включения X в Y .

Конструкция точных определений нетривиальна, потому что мы хотим сохранить «истинность» аксиомы объемности. Если случайное множество должно однозначно определяться своими элементами (тоже случайными) хотя бы в обобщенном смысле, то оно не может быть «слишком» случайным: см. п. 4.3.

Мы будем считать, что алгебра B как множество является элементом универсума фон Неймана V . В таком случае все объекты V^B тоже будут элементами V и нужные нам конструкции можно будет формализовать средствами L_1 Set. Это позволяет в принципе принять более формалистическую точку зрения, чем наша; тогда излагаемое ниже доказательство независимости КГ можно рассматривать как руководство к построению гораздо более синтаксического варианта с использованием «внутренней интерпретации» языка L_1 Set в самом себе. Предположение о непротиворечивости аксиом Цермело—Френкеля в формулировке теоремы 1.6 приобретает тогда смысл разумной предосторожности, ибо эта непротиворечивость не может быть установлена средствами чистого языка (Гедель). В нашем изложении эта оговорка является чистым лицемерием, ибо принятое нами «существование» универсума V , являющегося моделью аксиом, и «доказывает» их непротиворечивость: ср. приложение, п. 1.8.

4.2. Конструкция V^B . Мы построим для каждого ординала α множество V_α^B трансфинитной рекурсии по α и затем положим $V^B = \bigcup_\alpha V_\alpha^B$. Начало рекурсии: $V_0^B = \emptyset$.

Индуктивное предположение:

Для ординала $\alpha \geq 1$ определено множество V_α^B ;

для каждого элемента $X \in V_\alpha^B$ определено подмножество

$$D(X) \subseteq V_\alpha^B \text{ (его индуктивный смысл будет объяснен позже);}$$

для каждой пары элементов $X, Y \in V_\alpha^B$ определены «булевы функции истинности» $\|X \in Y\| \in B$, $\|X = Y\| \in B$, которые следует интуитивно представлять себе как «вероятность того, что X есть

элемент Y » и «вероятность того, что X совпадает с Y » соответственно.

Эти данные, по предположению, удовлетворяют следующим условиям:

- а) если $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \alpha$, то $V_{\beta_1}^B \subseteq V_{\beta_2}^B$;
- б) если $\beta < \alpha$, $X \in V_{\beta+1}^B \setminus V_{\beta}^B$, то $D(X) = V_{\beta}^B$;
- в₁) $\|X \in Y\| = \bigvee_{z \in D(Y)} (\|X = Z\| \wedge \|Z \in Y\|) (1)_{\alpha}$.

Условие $(1)_{\alpha}$ является отражением требования, чтобы «истинной» оказалась следующая формула теории множеств, легко выводимая из аксиом:

$$x \in y \iff \exists z (x = z \wedge z \in y). \quad (2)_{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{в}_2) \quad \|X = Y\| = & \left(\bigwedge_{z \in D(X)} \|Z \in X\| \vee \|Z \in Y\| \right) \wedge \left(\bigwedge_{z \in D(Y)} \|Z \in Y\| \vee \|Z \in X\| \right). \end{aligned}$$

Условие $(2)_{\alpha}$ является отражением «истинности, выводимой формулы

$$x = y \iff (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \in y \rightarrow z \in x).$$

Заметим, что на этом уровне не совсем понятно, почему, скажем, в $(1)_{\alpha}$ мы ограничились только теми Z , которые содержатся в $D(Y)$, казалось бы естественным проверить все вообще Z . Позже мы увидим, что формула остается верной, если булево объединение брать по всем Z .

На этом мы заканчиваем описание данных для V_{α}^B .

Теперь укажем явную рекурсивную конструкцию V_{α}^B и связанных с ним данных.

Определение $V_{\alpha+1}^B$ и D . Положим $V_{\alpha+1}^B = V_{\alpha}^B \cup V_{\alpha+1}^{B*}$, где $V_{\alpha+1}^{B*}$ состоит из всевозможных функций Z с областью определения V_{α}^B и областью значений $\subseteq V_{\alpha}^B$, которые удовлетворяют следующему «условию экстенсинальности»:

$$\text{для всех } X, Y \in V_{\alpha}^B, \|X = Y\| \wedge \|Z(X) = \|X = Y\| \wedge \|Z(Y)\|. \quad (3)$$

Чуть ниже мы определим $\|X \in Z\| = Z(X)$ для $X \in V_{\alpha}^B$, $Z \in V_{\alpha+1}^B \setminus V_{\alpha}^B$; поэтому (3), как выше, можно интерпретировать как отражение «истинности» формулы

$$(x = y) \wedge (x \in z) \leftrightarrow (x = y) \wedge (y \in z).$$

Ср. также комментарий в п. 2.7 по поводу определения $\bar{R}^{(1)}$.

Элементы $V_{\alpha+1}^B \setminus V_{\alpha}^B$ мы будем называть *новыми* (ранга α), а элементы V_{α}^B — *старыми*. Положим $D(Z) = V_{\alpha}^B$, если Z новый.

Определение булевых функций истинности. На парах старых элементов эти функции уже определены. Положим далее:

$$\|X \in Y\| = Y(X), \text{ если } X \text{ старый, а } Y \text{ новый}; \quad (4)$$

$$\|X = Y\| = \left(\bigwedge_{z \in D(X)} \|Z \in X\| \vee \|Z \in Y\| \right) \wedge \left(\bigwedge_{z \in D(Y)} \|Z \in Y\| \vee \|Z \in X\| \right). \quad (5)$$

Формула (5) автоматически выполнена, если X и Y оба старые, в силу $(2)_{\alpha}$; в остальных случаях она однозначно определяет $\|X = Y\|$ с учетом (4) и того, что Z в (5) пробегает только старые элементы.

Наконец, положим

$$\|X \in Y\| = \bigvee_{z \in D(Y)} \|X = Z\| \wedge \|Z \in Y\|, \quad (6)$$

если X — новый элемент, а Y — любой. Правая часть однозначно определяется с помощью (4) и (5), ибо $D(Y) \subseteq V_{\alpha}^B$.

Формулы (4) и (6) для новых X и старых Y показывают следующее. В качестве первого приближения мы можем считать, что случайное множество Y ранга α «состоит» из множеств Z меньшего ранга, входящих в Y с вероятностями $Y(Z)$, которые можно выбирать со значительной степенью произвола, подчиняясь лишь условию экстенсинальности (3).

Однако затем оказывается, что мы должны автоматически «включать» в Y все новые и новые элементы X с вероятностями, которые уже предписываются формулой (6). Условия (3) и (6) и означают, что наши множества не могут быть совсем случайными.

Определение V_{α}^B и других данных для предельных ординалов α . Мы просто полагаем $V_{\alpha}^B = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}^B$, а все остальные данные уже построены.

4.3. Проверка корректности определений. Мы должны проверить $(1)_{\alpha+1}$ и $(2)_{\alpha+1}$: свойства 4.2а и б при переходе от α к $\alpha+1$, очевидно, сохраняются. В свою очередь, единственное не совсем очевидное тождество получается, если в $(1)_{\alpha+1}$ взять X старым, а Y новым:

$$Y(X) = \bigvee_{z \in V_{\alpha}^B} (\|X = Z\| \wedge Y(Z)).$$

Оно проверяется так. Неравенство $\geq$ получится, если записать правую часть в виде $V(\|X = Z \wedge Y(X)\|)$ с помощью (3). Неравенство $\leq$ получится, если рассмотреть член с $Z = X$ и учесть, что $\|X = X\| = 1$ для всех X (легкая индукция по α).

На этом конструкция булевозначного универсума закончена.

4.4. Примеры и замечания. Рассмотрим несколько частных случаев наших конструкций, чтобы прояснить их структуру.

а) Очевидно, $V_1^B = \{\emptyset\}$, ибо существует единственная «пустая» функция, область определения которой является подмножеством $V_0^B = \emptyset$. Вычислим $V_2^B = V_1^B \cup V_2^{B*}$. Будем обозначать через $\{\emptyset\}_b \in V_2^{B*}$ функцию на одноэлементном множестве V_1^B , принимающую значение $b \in B$. Все они экстенциональны, так что

$$V_2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}_b \text{ для всех } b \in B\}.$$

Из (4) следует, что

$$\|\emptyset \in \{\emptyset\}_b\| = b.$$

Из (5) видно, что

$$\|\emptyset = \{\emptyset\}_b\| = b'.$$

Интуитивно эти формулы означают, что $\{\emptyset\}_b$ состоит из одного элемента $\emptyset$ «над b » и пусто вне b . Снова применяя (5), находим

$$\|\{\emptyset\}_a = \{\emptyset\}_b\| = \|(a' \vee b) \wedge (a \vee b')\| = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b').$$

Таким образом, $\{\emptyset\}_a$ и $\{\emptyset\}_b$ совпадают там, где они состоят из одного элемента $\emptyset$, в согласии с интуицией.

Применяя (6), находим

$$\|\{\emptyset\}_a \in \{\emptyset\}_b\| = \|\{\emptyset\}_a = \emptyset \wedge \|\emptyset \in \{\emptyset\}_b\| = a' \wedge b$$

(единственно возможное включение типа $\emptyset \in \{\emptyset\}$ имеет место там, где $\{\emptyset\}_a$ пусто, а $\{\emptyset\}_b$ не пусто).

Пусть, наконец, $X \in V_3^{B*}$ — некоторая экстенциональная функция на подмножестве V_2^B со значениями в B . Тогда по (6)

$$\|X' \in \{\emptyset\}_b\| = \|X = \emptyset \wedge \|\emptyset \in \{\emptyset\}_b\| = \|X = \emptyset \wedge b$$

и в силу (5)

$$\|X = \emptyset\| = (\bigwedge_{a \in \beta} \|\{\emptyset\}_a \in X'\|) \wedge \|\emptyset \in X'\| =$$

$$= (\bigvee_{a \in \beta} \|\{\emptyset\}_a \in X\| \vee \|\emptyset \in X\|)'$$

Таким образом, $\|X = \emptyset\|$ интуитивно означает дополнение к носителю X в B , а $\|X \in \{\emptyset\}_b\|$ есть множество, где одновременно X пусто и $\{\emptyset\}_b$ не пусто опять в соответствии с обычной формулой $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Это показывает, как образуются новые объекты X могут оказываться случайными элементами старых с ненулевой вероятностью.

б) Рассмотрим случай $B = \{0, 1\}$. Соответствующее вероятностное пространство одноточечное, и наши случайные множества должны стать детерминированными. Это и происходит: универсум V^B естественно отображается на универсум фон Неймана V так, что если через $\tilde{X} \in V$ обозначить образ $X \in V^B$, то для всех X, Y выполняются условия:

$$\|X \in Y\| = 1 \Leftrightarrow \tilde{X} \in \tilde{Y}; \quad \|X = Y\| = 1 \Leftrightarrow \tilde{X} = \tilde{Y}.$$

$$NB: \|\emptyset = \{\emptyset\}_b\| = 1, \text{ но } \emptyset \neq \{\emptyset\}_b.$$

Для конструкции этого отображения положим $\tilde{\emptyset} = \emptyset$, $\{\emptyset\}^{\sim} = \{\emptyset\}$. Далее, допустив, что отображение $V_{\alpha+1}^{(0,1)} \rightarrow V_{\alpha}$ с нужными свойствами уже построено, продолжим его до $\alpha + 1$. С этой целью новому элементу $X \in V_{\alpha}^{(0,1)}$ поставим в соответствие сначала то подмножество $V_{\alpha}^{(0,1)}$, на котором X принимает значение 1, а затем образ этого подмножества в V_{α} , т. е. элемент $\mathcal{P}(V_{\alpha}) = V_{\alpha+1}$: по определению, это и будет $\tilde{X}$.

Проверка свойств этого отображения предоставляется читателю.

в) *Булевы функции истинности формул языка $L_1 \text{ Set}$.* Мы определим их по образцу § 2. Введем интерпретационный класс $\bar{M}$: каждая точка $\xi \in \bar{M}$ ставит в соответствие любому символу переменной x языка $L_1 \text{ Set}$ некоторый объект $x^{\xi} = X$ универсума V^B . Будем еще считать, что любая точка ξ отображает символ языка $\emptyset$ в пустое множество $\emptyset = V_{\emptyset}$.

Если P — атомарная формула $x \in y$ или $x = y$ языка $L_1 \text{ Set}$, то значения $\|P\|(\xi)$ определяются как $\|x^{\xi} \in y^{\xi}\| \in B$ и $\|x^{\xi} = y^{\xi}\| \in B$ соответственно.

Для всех остальных формул P языка значения $\|P\|(\xi)$ затем определяются индуктивно, в точности теми же формулами, что в п. 2.7. Нужно лишь заметить, что хотя в вычислениях с кванторами приходится рассматривать выражения $\bigvee_{\xi} a_{\xi}$, $\bigwedge_{\xi} a_{\xi}$ по семействам, перенумерованным классом $\bar{M}$, разные элементы семейства образуют подмножество B , так что эти выражения имеют смысл. Мы будем называть формулу P «истинной» (в модели V^B), если $\|P\|(\xi) = 1$ для всех ξ , и «ложной», если $\|P\|(\xi) = 0$ для всех ξ .

Как в § 3 гл. II проверяется, что все тавтологии и логические аксиомы с кванторами «истинны» и что правила вывода сохраняют «истинность». Поэтому оставшаяся нам часть работы состоит в проверке «истинности» аксиом Цермело — Френкеля (при любой B) и «ложности» гипотезы континуума (при подходящей B).

5. АКСИОМА ОБЪЕМНОСТИ «ИСТИННА»

Мы начнем с доказательства нескольких соотношений, связывающих функции истинности. Прежде всего, из формулы (5), § 4 видно, что $\|X=Y\| = \|Y=X\|$ и $\|X=X\| = 1$. Следующая лемма требует более кропотливой работы.

5.1. Лемма.

Для любых $X, Y, Z \in V^B$ имеем

$$\|X=Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|X=Z\|; \quad (1)$$

$$\|X=Y\| \wedge \|Y \in Z\| \leq \|X \in Z\|; \quad (2)$$

$$\|X \in Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|X \in Z\|. \quad (3)$$

Доказательство. а) (3) верно, если $X \in D(Y)$. Действительно, тогда по формуле (5) § 4 $\|Y=Z\| \leq \|X \in Z\|$, откуда, пересекая с $\|X \in Y\|$, находим требуемое.

б) (3) верно, если $X, Y \in V_{\alpha+1}^B, Z \in V_{\alpha+1}^B$. Действительно, выберем $U \in D(Y)$ и применим уже доказанный частный случай (3):

$$\|U \in Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|U \in Z\|.$$

Возьмем булево пересечение обеих частей с $\|X=U\|$ и булеву сумму по всем $U \in D(Y)$; затем к левой части применим формулу (6) § 4 и воспользуемся дистрибутивностью. Это дает

$$\|X \in Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \bigvee_{U \in D(Y)} \|X=U\| \wedge \|U \in Z\| \leq \bigvee_{U \in D(Y)} \|X=U\| \wedge \|U \in Z\| = \|X \in Z\|.$$

в) (1) верно в $V_{\alpha+1}^B$, если (3) верно в V_{α}^B . Рассмотрим элемент $U \in D(X) \subseteq V_{\alpha}^B$. Согласно п. а)

$$\|U \in X\| \wedge \|X=Y\| \leq \|U \in Y\|.$$

Возьмем булево пересечение с $\|Y=Z\|$:

$$\|U \in X\| \wedge \|X=Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|U \in Y\| \wedge \|Y=Z\|.$$

Правая часть всегда $\leq \|U \in Z\|$, если $Y \in V_{\alpha}^B$, то по п. б) или индуктивному предположению, если же $Y \in V_{\alpha+1}^B$ новый, то по п. а).

Итак, мы установили, что для всех $X, Y, Z \in V_{\alpha+1}^B, U \in D(X)$

$$\|U \in X\| \wedge \|X=Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|U \in Z\|.$$

Воспользовавшись тем, что в любой булевой алгебре из $a \wedge b \leq c$ следует $b \leq a \vee c$, получаем отсюда

$$\|X=Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|U \in X\| \vee \|U \in Z\|$$

и далее

$$\|X=Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \bigwedge_{U \in D(X)} \|U \in X\| \vee \|U \in Z\|.$$

Меняя здесь местами X и Z , получаем для всех $U \in D(Z)$

$$\|Z=Y\| \wedge \|Y=X\| \leq \bigwedge_{U \in D(Z)} \|U \in Z\| \vee \|U \in X\|.$$

Из двух последних формул и (5), очевидно, следует (3).

г) (2) верно в $V_{\alpha+1}^B$, если (1) верно в $V_{\alpha+1}^B$. Действительно, пусть $U \in D(Z)$. Согласно (1)

$$\|X=Y\| \wedge \|Y=U\| \leq \|X=U\|.$$

Возьмем булево пересечение с $\|U \in Z\|$ и булеву сумму по всем $U \in D(Z)$:

$$\|X=Y\| \wedge \bigvee_{U \in D(Z)} \|U \in Z\| \wedge \|Y=U\| \leq \bigvee_{U \in D(Z)} \|X=U\| \wedge \|U \in Z\|.$$

Применяя (1) $_{\alpha+1}$ § 4, получаем (2).

д) (3) верно в $V_{\alpha+1}^B$, если (2) верно в $V_{\alpha+1}^B$. Действительно, пусть $U \in D(Y)$. По п. а)

$$\|U \in Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|U \in Z\|.$$

Взяв булево произведение с $\|X=U\|$ и применив (2) к правой части, получим $\|X=U\| \wedge \|U \in Y\| \wedge \|Y=Z\| \leq \|X \in Z\|$.

Наконец, построим булеву сумму по всем $U \in D(Y)$ и воспользуемся (1) § 4, получим (3).

Очевидно, все доказанное обеспечивает индуктивный переход от α к $\alpha+1$. Теперь мы уже можем установить основной результат этого параграфа.

5.2. Предложение.

Аксиома объемности

$$x \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

«истинна».

Доказательство. Формула $\|P \leftrightarrow Q\|(\xi) = 1$ равносильна $\|Q\|(\xi)$. Поэтому достаточно доказать, что для всех $X, Y \in V^B$

$$\|X=Y\| = \bigwedge_{Z \in V^B} (\|Z \in X\| \vee \|Z \in Y\|) \wedge (\|Z \in X\|' \vee \|Z \in Y\|).$$

Неравенство $\geq$ немедленно следует из формулы (2) § 4. Чтобы получить обратное неравенство, запишем два очевидных следствия из (3) леммы 5.1:

$$\|X=Y\| \leq \|Z \in X\| \vee \|Z \in Y\|'; \quad \|X=Y\| \leq \|Z \in X\|' \vee \|Z \in Y\|,$$

и возьмем булево произведение по всем Z . Предложение доказано.

Отметим, что из (2) следует общее свойство экстенциональности: для всех

$X, Y, Z \in V^B$

$$\|X = Y\| \wedge \|Y \in Z\| = \|X = Y\| \wedge \|X \in Z\|.$$

5.3. Следствие.

Аксиомы равенства в языке $L_1\text{Set}$ «истинны».

Действительно (см. предложение 4.6 гл. II), они выводятся из аксиомы объемности, «истинной» формулы $x = x$ и «истинной» формулы $x = y \leftrightarrow y \in x \times (x \in z \leftrightarrow y \in z)$ с помощью стандартных правил вывода, которые сохраняют «истинность».

5.4. Замечание. В большинстве вычислений нам будут важны лишь значения $\|X \in Y\|$ и $\|X = Y\|$, а не точное определение объектов X, Y . Заметим в связи с этим, что следующие два бинарных отношения на V^B :

$$a) \|X = Y\| = 1,$$

$$b) \forall Z \in V^B, \|Z \in X\| = \|Z \in Y\|,$$

совпадают (легкое следствие (2) и аксиомы объемности). Мы будем называть такие X, Y *эквивалентными* и писать $X \sim Y$.

6. АКСИОМЫ ПАРЫ, СУММЫ, СТЕПЕНИ И РЕГУЛЯРНОСТИ «ИСТИННЫ»

6.1. Вычисления предыдущего параграфа показывают, что основная работа по обеспечению «истинности» аксиомы объемности была вложена в определение универсума V^B . Явные формулы для рекурсивного вычисления $\|X \in Y\|$ и $\|X = Y\|$ отражали так много частных свойств включения и равенства, что их объединение гарантировало выполнение общей аксиомы.

Проверка ряда других аксиом требует по существу определения в V^B аналогов операций, имеющихся в V , неупорядоченной пары, множества подмножеств и т. п. Эти операции можно определить посредством формул языка $L_1\text{Set}$. Напомним, однако, что, если $P(x)$ — формула с единственной свободной переменной x , то совокупность $x^E \in V$, для которых $P(x^E)$ истинна, образует, вообще говоря, лишь класс, а не множество.

Оказывается удобным ввести вспомогательное понятие «случайного класса» и по отношению к V^B . Последующие конструкции операций в V^B после этого часто производятся в два приема: сначала значением операции оказывается случайный класс, который затем уже «отождествляется» со случайным множеством с помощью отдельного рассуждения.

6.2. Определение.

а) *Случайным классом называется любая функция W на V^B со значениями в B , удовлетворяющая следующему условию экстенциональности:*

$$W(X) \wedge \|X = Y\| = W(Y) \wedge \|X = Y\| \text{ для всех } X, Y \in V^B.$$

б) *Случайный класс W называется эквивалентным случайному множеству $Z \in V^B$ (запись $W \sim Z$), если $W(X) = \|X \in Z\|$ для всех $X \in V^B$.*

6.3. Примеры и замечания. а) Для любого случайного множества Z функция $X \mapsto \|X \in Z\|$ экстенциональна; в силу (2) § 5 и потому является случайным классом. По аналогии с этим мы часто будем писать $\|X \in W\|$ вместо $W(X)$ и для любых случайных классов W .

б) Существуют случайные классы, неэквивалентные случайным множествам. Например, «универсальный» случайный класс: $W(X) = 1$ для всех X . (Иначе мы имели бы $\|W \in W\| = 1$, в противоречие с аксиомой регулярности, «истинность» которой будет проверена позже.)

в) Пусть W — случайный класс, а α — любой ординал. Определим элемент $W_\alpha \in V^B_{\alpha+1}$ так:

$$D(W_\alpha) = V^B_\alpha, W_\alpha = \text{ограничение } W \text{ на } V^B_\alpha$$

(как функции, см. 4.2). Нетрудно видеть, что для всех $X \in V^B$ имеем

$$\|X \in W_\alpha\| \leq \|X \in W\|. \quad (1)$$

В самом деле, пусть $U \in V^B_\alpha, X \in V^B$. Тогда имеем

$$\|X = U\| \wedge \|W_\alpha(U) = \|X = U\| \wedge \|W(U) = \|X = U\| \wedge \|W(X) \leq \|W(X)\|,$$

откуда в силу (6) § 4:

$$\|X \in W_\alpha\| = \bigvee_{U \in V^B_\alpha} \|X = U\| \wedge \|W_\alpha(U) \leq \|W(X)\| = \|X \in W\|.$$

Ничего мы часто будем проверять, что интересующий нас конкретный класс W эквивалентен множеству, отыскивая такой ординал α , что $W \sim W_\alpha$. Из (1) видно, что для этого достаточно проверить неравенство $\|X \in W\| \leq \|X \in W_\alpha\|$ для всех X .

г) Пусть W, W_1, W_2 — случайные классы. Тогда $W_1 \wedge W_2, W_1 \vee W_2, W' =$ также случайные классы, ибо условие экстенциональности для этих функций проверяется тривиально. Мы будем писать $W_1 \cap W_2, W_1 \cup W_2$ вместо $W_1 \wedge W_2, W_1 \vee W_2$ соответственно.

д) Пусть W — случайный класс, а X — случайное множество. Покажем, что $W \cap X$ эквивалентно случайному множеству. Точнее, если $D(X) = V^B_\alpha$, то $W \cap X \sim (W \cap X)_\alpha$. В самом деле, для любого $Y \in V^B$ имеем по (6) § 4:

$$\begin{aligned} \|Y \in (W \cap X)_\alpha\| &= \bigvee_{U \in V^B_\alpha} \|U = Y\| \wedge \|U \in (W \cap X)_\alpha\| = \bigvee_{U \in V^B_\alpha} (\|U = Y\| \wedge \|U \in W\| \wedge \|U \in X\|) = \\ &= \|Y \in W\| \wedge \|U \in W\| \wedge \|U \in X\| = \bigvee_{U \in V^B_\alpha} \|U = Y\| \wedge \|U \in W\| \wedge \|U \in X\| = \\ &= \|Y \in W\| \wedge \|Y \in X\| = \|Y \in W \cap X\|. \end{aligned}$$

Из этого результата следует «истинность» формул выделения (см. п. 4.96 гл. II). Следующее предложение дает общий способ конструкции случайных классов.

6.4. Предложение.

Пусть $P(x, y_1, \dots, y_n)$ — формула, не содержащая свободных переменных, кроме $x, y_1, \dots, y_n$. Пусть $Y_1, \dots, Y_n \in V^B$ фиксированы. Тогда функция

$$X \mapsto W(X) = \|P(X, Y_1, \dots, Y_n)\|$$

является случайным классом.

Интуитивно W содержит каждое множество X с той вероятностью, с которой для него истинно утверждение $P(X); Y_1, \dots, Y_n$ играют роль «констант». Доказательство. Воспользуемся «истинностью» соответствующей аксиомы равенства:

$$\| \forall x \forall y_1 \dots \forall y_n (x = y \rightarrow (P(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow P(y, y_1, \dots, y_n))) \| = 1.$$

Рассмотрев точку ξ интерпретационного класса, которая придает $x, y_1, \dots, y_n$ значения $X, Y_1, \dots, Y_n \in V^B$ соответственно, находим отсюда

$$\|X = Y\| \leq \|P(X, Y_1, \dots, Y_n)\| \vee \|P(Y, Y_1, \dots, Y_n)\|$$

или

$$\|X = Y\| \wedge \|W(X) \leq W(Y),$$

откуда следует экстенсинальность W .

Теперь мы можем приступить к проверке аксиом.

6.5. Предложение.

Аксиома пары

$$\forall u \forall w \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w)$$

«истинна».

Доказательство. Имеем по определению

$$\begin{aligned} \| \forall u \forall w \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w) \| &= \bigwedge_u \bigwedge_w \bigvee_x \| z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w \| \\ &= U \vee Z = W \| . \end{aligned}$$

Поэтому достаточно для любых $U, W \in V^B$ найти такой $X \in V^B$, что для всех $Z \in V^B$

$$\|Z \in X\| = \|Z = U\| \vee \|Z = W\|. \quad (2)$$

При фиксированных U, W рассмотрим правую часть (2) как функцию от Z . Она является случайным классом по предложению 6.4, ибо отвечает формуле $z = U \vee z = W$. Покажем, что он эквивалентен случайному множеству. Точнее, если $U, W \in V^B$, то $X \sim X_\alpha$. По замечанию в конце п. 6.3в для этого достаточно проверить, что для всех Z

$$\|Z \in X\| \leq \|Z \in X_\alpha\|.$$

Но так как $\|U \in X_\alpha\| = 1$, то по формуле (2) §5 имеем

$$\|Z = U\| \leq \|Z \in X_\alpha\|$$

и аналогично

$$\|Z = W\| \leq \|Z \in X_\alpha\|.$$

откуда следует требуемое.

6.6. Предложение.

Аксиома суммы

$$\forall x \exists u \forall v (\exists z (u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow u \in v)$$

«истинна».

Доказательство. Фиксируем $X \in V^B$ и построим такое случайное множество Y , что для всех $U \in V^B$

$$\|U \in Y\| = \|\exists z (U \in z \wedge z \in X)\| = \bigvee_{z \in V^B} \|U \in z\| \wedge \|z \in X\|.$$

По предложению 6.4 случайный класс с таким свойством существует. Покажем, что если $D(X) = V^B_\alpha$, то $Y \sim Y_\alpha$. Учитывая, что $D(Y_\alpha) = D(X)$, имеем

$$\|U \in Y_\alpha\| = \bigvee_{z \in D(X)} \|U = z\| \wedge \|z \in Y_\alpha\| = \bigvee_{z \in D(X)} \|U = z\| \wedge$$

$$\wedge (\bigvee_{z_1 \in V^B} \|z \in z_1\| \wedge \|z_1 \in X\|). \quad (3)$$

Покажем, что во внутренней сумме (3) можно ограничиться суммированием по $Z_1 \in D(X)$. Действительно, для любого Z_1

$$\|Z_1 \in X\| = \bigvee_{z_2 \in D(X)} \|Z_1 = z_2\| \wedge \|z_2 \in X\|,$$

$$\|z \in z_1\| \wedge \|z_1 \in X\| = \bigvee_{z_2 \in D(X)} \|z \in z_1\| \wedge \|z_1 = z_2\| \wedge$$

$$\wedge \|z_2 \in X\| \leq \bigvee_{z_2 \in D(X)} \|z \in z_2\| \vee \|z_2 \in X\|. \quad (4)$$

Учитывая это, проведем в (3) суммирование сначала по Z при фиксированном $Z_1 \in D(X)$. Так как $D_1(Z_1) \leq D(X)$, сумма по $Z \in D(X)$ совпадает с суммой по $Z \in D(Z_1)$ и будет равна $\|U \in Z_1\|$. Значит,

$$\|U \in Y_\alpha\| = \bigvee_{z_1 \in D(X)} \|U \in z_1\| \wedge \|z_1 \in X\| = \bigvee_{z_1 \in V^B} \|U \in z_1\| \wedge$$

$$\wedge \|z_1 \in X\| = \|U \in Y\|$$

в силу (4).

6.7. Предложение.

Аксиома степени

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$$

«истинна». (Напомним, что $z \subseteq x$ — сокращение для $\forall u (u \in z \rightarrow u \in x)$.)

Доказательство. Фиксировав $X \in V^B$, мы построим такой $Y \in V^B$, что для всех $Z \in V^B$

$$\|Z \in Y\| = \|Z \subseteq X\| = \bigwedge_{u \in V^B} \|U \in Z\| \vee \|U \in X\|.$$

Правая часть определяет Y как случайный класс в силу предложения 6.4. Покажем, что если $D(X) = V^B_\alpha$, то $Y \sim Y_{\alpha+1}$.

Прежде всего, построим элемент $Z_\alpha \in V^B_{\alpha+1}$, рассмотрев Z как случайный класс. Имеем в силу (1) $\|U \in Z_\alpha\| \geq \|U \in Z\|$, так что

$$\|Z \in Y\| \leq \|Z_\alpha \in Y\| = \|Z_\alpha \in Y_{\alpha+1}\|. \quad (5)$$

Мы докажем еще неравенство

$$\|Z \in Y\| \leq \|Z_\alpha = Z\|. \quad (6)$$

Из (5) и (6) немедленно следует, что $Y \sim Y_{\alpha+1}$, ибо в силу (2) §4

$$\|Z \in Y\| \leq \|Z_\alpha \in Y_{\alpha+1}\| \wedge \|Z_\alpha = Z\| \leq \|Z \in Y_{\alpha+1}\|.$$

7.1. Мы начнем этот параграф с описания еще двух полезных способов кон-
струкции случайных множеств. Первый из них, очень употребительный, решает
следующую задачу. Пусть задано множество объектов $X_i \in V^B$, $i \in I$, и элементов
 $a_i \in B$. Предположим, что мы хотим построить случайное множество X , содер-
жащее каждый X_i с вероятностью a_i . Такое X может не существовать, оказы-
вается, однако, что всегда существует X с $\|X_i \in X\| \geq a_i$ для всех $i \in I$ и, более
того, существует наименьшее X с таким свойством.

7.2. Лемма.

а) В условиях предыдущего пункта функция X от Y

$$\|Y \in X\| = \bigvee_i a_i \wedge \|Y = X_i\| \quad (1)$$

является случайным классом X , эквивалентным случайному множеству. Кроме
того, $\|X_i \in X\| \geq a_i$, и если $X' -$ любой случайный класс, для которого $\|X_i \in X'\| \geq$
 $\geq a_i$ при всех i , то $\|Y \in X'\| \geq \|Y \in X\|$ при всех Y .

Мы будем говорить, что X (и любое эквивалентное ему множество) соби-
рает X_i с вероятностями a_i .

б) В тех же условиях функция Z от Y

$$\|Y \in Z\| = \bigvee_i a_i \wedge \|Y \in X_i\| \quad (2)$$

является случайным классом Z , эквивалентным случайному множеству. Если
сверх того $a_i \wedge a_j = 0$ при всех $i \neq j$, то $\|Z = X_i\| \geq a_i$ и для любого случайного
класса Z' с условиями $\|Z' = X_i\| \geq a_i$ при всех i имеем $\|Y \in Z'\| \geq \|Y \in Z\|$ при
всех Y .

Мы будем говорить, что Z склеено из X_i с вероятностями a_i .

Доказательство. Экстенсionalность функций Z и X определенных
формулами (1) и (2) проверяется немедленно.

Существует такой ординал α , что $X_i \in V^B_\alpha$ для всех i . Покажем, что $X \sim X_\alpha$
и $Z \sim Z_\alpha$. Имеем для любого $Y \in V^B$

$$\begin{aligned} \|Y \in X_\alpha\| &= \bigvee_{z \in V^B_\alpha} \|Y = z\| \wedge \|z \in X_\alpha\| = \bigvee_{z \in V^B_\alpha} \|Y = z\| \wedge a_i \wedge \|z\| = \\ &= \|Y\| = \bigvee_{z \in V^B_\alpha} a_i \wedge \|Y = z\| \wedge \|z\| = \|Y\|. \end{aligned}$$

Рассматривая член с $Z = X_i$ справа, получаем $a_i \wedge \|Y = X_i\| \leq \|Y \in X_i\|$, от-
куда в силу (1) $\|Y \in X\| \leq \|Y \in X_\alpha\|$, чего достаточно по п. 6.3г.

Аналогично для любого $Y \in V^B$

$$\|Y \in Z_\alpha\| = \bigvee_{z \in V^B_\alpha} \|Y = z\| \wedge a_i \wedge \|z \in X_i\| = \bigvee_{z \in V^B_\alpha} a_i \wedge \|Y \in X_i\| \wedge$$

$$\wedge \|Y = z\|.$$

Кроме того, $\|Y \in X_i\| = \bigvee_{z \in V^B_\alpha} \|Y = z\| \wedge \|Y \in X_i\|$, откуда следует, что

$$a_i \wedge \|Y \in X_i\| \leq \|Y \in Z_\alpha\| \text{ и с помощью (2) } \|Y \in Z\| \leq \|Y \in Z_\alpha\|.$$

Остается проверить (6). Пусть сначала $U \in D(X) \subseteq V^B_\alpha$. Тогда $\|U \in Z_\alpha\| =$
 $= \|U \in Z\|$, откуда $\|U \in Z_\alpha\| \leftrightarrow \|U \in Z\|' = 0$ и тем более

$$\|U \in X\| \wedge \|U \in Z_\alpha\| \leftrightarrow \|U \in Z\|' = 0. \quad (7)$$

Левая часть (7) при переменном U определяет случайный класс вида $X \cap W$
где W отвечает формуле $\neg(u \in Z_\alpha \leftrightarrow u \in Z)$. Так как $D(X) = V^B_\alpha$, в силу
6.3в имеем $X \cap W \sim (X \cap W)_\alpha$.

Но согласно (7) $(X \cap W)_\alpha$ есть нулевая функция на V^B_α и значит $\|U \in X \cap W\| =$
 $= 0$ для всех $U \in V^B$. Следовательно,

$$\|U \in X\| \leq \|U \in Z_\alpha\| \leftrightarrow \|U \in Z\| \text{ для всех } U. \quad (8)$$

Теперь для проверки (6) запишем левую и правую части отдельно (пользуясь
«истинностью» формулы $Z_\alpha = Z \leftrightarrow \forall u (u \in Z_\alpha \leftrightarrow u \in Z)$):

$$\|Z \in Y\| = \bigwedge_{u \in V^B} \|U \in Z\|' \vee \|U \in X\|;$$

$$\|Z_\alpha = Z\| = \bigwedge_{u \in V^B} \|U \in Z_\alpha\| \leftrightarrow \|U \in Z\|.$$

Теперь ясно, что требуемое в (6) неравенство имеет место почленно: для
 $\|U \in X\|$ это следует из (8), а для $\|U \in Z\|'$ — из того, что

$$\|U \in Z_\alpha\| \leftrightarrow \|U \in Z\| = (\|U \in Z_\alpha\|' \vee \|U \in Z\|) \wedge (\|U \in Z_\alpha\| \vee \|U \in Z\|')$$

и $\|U \in Z\|' \leq \|U \in Z_\alpha\|'$ для всех U .

6.8. Предложение.

Аксиома регулярности

$$\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

«истинна».

Доказательство. Фиксируем $X \in V^B$. Аксиома с «константой» X вместо
 x имеет вид $R \rightarrow S$. Мы должны проверить, что $\|R \rightarrow S\| = 1$. Для этого доста-
точно установить, что $\|R\| \wedge \|S\|' = 0$, где

$$\|R\| = \bigvee_{y \in V^B} \|Y \in X\|; \quad (9)$$

$$\|S\|' = \bigwedge_{y \in V^B} \|Y \in X\|' \wedge \bigvee_{z \in V^B} \|Z \in Y\| \wedge \|Z \in X\|. \quad (10)$$

Допустим, что $\|R\| \wedge \|S\|' = a \neq 0$ и придем к противоречию. Из (9) и (10)
следует, что существует $Y \in V^B$ такой, что $\|Y \in X\| \wedge a \neq 0$. Выберем Y наи-
меньшего ранга с этим свойством.

Снова из (9) и (10) видно, что

$$\|Y \in X\| \wedge a \leq \bigvee_{z \in V^B} \|Z \in Y\| \wedge \|Z \in X\|.$$

Справа можно ограничиться суммированием по $Z \in D(Y)$, не изменив всей сум-
мы, поэтому должен существовать такой $Z \in D(Y)$, что

$$\|Z \in X\| \wedge \|Y \in X\| \wedge a \neq 0$$

и, значит, $\|Z \in X\| \wedge a = 0$, но ранг Z меньше ранга Y , что противоречит вы-
бору Y .

Пусть теперь X, Z — какие-нибудь случайные множества со свойствами (1). Из (1) ясно, что $\|X_i \in X'\| \geq a_i$. Если $\|X_i \in X'\| \geq a_i$ для всех i , то $\|Y \in X'\| = \bigvee_i \|Y = Z\| \wedge \|Z \in X'\| \geq \bigvee_i \|Y = X_i\| \wedge \|X_i \in X'\| \geq \|Y \in X\|$ в силу (1). Аналогично, если $a_i \wedge a_j = 0$ для $i \neq j$, то из (2) видно, что $a_i \wedge \|Y \in Z\| = a_i \wedge \|Y \in X_i\|$, откуда

$$a_i \wedge \|X_i = Z\| = \bigvee_j a_i \wedge \|Y \in X_i \leftrightarrow Y \in Z\| = a_i; \text{ и } \|X_i = Z\| \geq a_i.$$

Если же $\|X_i = Z'\| \geq a_i$ для всех i , то

$$\|Y \in Z'\| \geq \|Y \in Z'\| \wedge \|Z' = X_i\| = \|Y \in X_i\| \wedge \|Z' = X_i\| \geq a_i \wedge \|Y \in X_i\|,$$

так что $\|Y \in Z'\| \geq \|Y \in Z\|$.

Вот первый пример использования леммы 7.2а.

7.3. Предложение.

Аксиома бесконечности

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow \{u\} \in x))$$

«истинна».

Доказательство. Проверка «истинности» аксиомы пары, мы для любых $U, W \in V^B$ построили (с точностью до эквивалентности) элемент $Z \in V^B$ со свойством $\|Y \in Z\| = \|Y = U \vee Y = W\|$ для всех Y . Естественно обозначить такой элемент $\{U, W\}^B$. Соответственно путь $\{U\}^B = \{U, U\}^B$.

Приступим теперь к проверке аксиомы. Положим $X_0 = \emptyset, X_1 = \{\emptyset\}^B, \dots, X_n = \{X_{n-1}\}^B$. Далее, обозначим через $X \in V^B$ элемент, который собирает все X_i с вероятностями 1. Мы проверим, что

$$\| \emptyset \in X \wedge \forall u (u \in X \rightarrow \{u\} \in X) \| = 1.$$

Очевидно, достаточно установить, что для всех $U \in V^B$ имеем $\|U \in X\| \leq \| \{U\}^B \in X \|$ (т. е. в силу (1))

$$\bigvee_{i=0}^{\infty} \|U = X_i\| \leq \bigvee_{i=0}^{\infty} \| \{U\}^B = X_i \|.$$

Действительно, из «истинности» формулы $u \in x \leftrightarrow \{u\} = \{x\}$ и того, что $X_{i+1} = \{X_i\}^B$, сразу же следует, что $\|U = X_i\| = \| \{U\}^B = X_{i+1} \|$.

Лемма 7.2б понадобится нам для доказательства следующего вспомогательного факта:

7.4. Лемма.

Пусть W — некоторый случайный класс. Тогда существует такой элемент $X \in V^B$, что

$$\bigvee_{U \in V^B} W(U) = W(X).$$

Левую часть можно представить в виде $\| \exists x (x \in W) \| = \| W \neq \emptyset \|$. Поэтому интуитивный смысл леммы таков: вероятность того, что класс непуст, совпадает с вероятностью вхождения в него подходящего элемента.

Доказательство. Прежде всего, существует такой ординал β , что $\bigvee_{U \in V^B} W(U) = \bigvee_{U \in V^B} W(U)$. Действительно, пусть $a_i = \bigvee_{U \in V^B} W(U)$ и для любого

$a \in B$ положим $\gamma(a) = \min \{\gamma | a_\gamma > a\}$ (или 0, если $a_1 \leq a$ для всех γ). Положим, наконец, $\beta = \sup_{a \in B} \gamma(a)$. Это ординал, так как B — множество. Если $\gamma > \beta$, то $a_1 \geq a_\gamma$ в силу монотонности, но $a_1 > a_\beta$ не может быть по выбору γ .

Итак, пусть $\bigvee_U W(U) = \bigvee_{U \in V^B} W(U)$. Перенумеруем все элементы из V^B некоторым начальным отрезком ординалов (аксиома выбора!): $V^B = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Положим

$$a_\alpha = W(U_\alpha) \wedge (\bigvee_{\gamma < \alpha} W(U_\gamma))', \quad \alpha \in I.$$

Очевидно, $a_\alpha \wedge a_\gamma = 0$ при $\alpha \neq \gamma$. Пользуясь леммой 7.2б скленим множества U_α с вероятностями a_α ($\alpha \in I$). Получим множество X с условиями $\|X = U_\alpha\| \geq a_\alpha \geq W(U_\alpha)$. Пользуясь экстенсинальностью W , находим

$$W(X) \geq \bigvee_{\alpha \in I} \|X = U_\alpha\| \wedge W(U_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} W(U_\alpha) = \bigvee_{U \in V^B} W(U).$$

7.5. Предложение.

Аксиома подстановки

$$\forall z \forall u (\forall x (x \in u \rightarrow \exists! y P(x, y, z)) \rightarrow \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \wedge P(x, y, z))))$$

«истинна» (здесь $\bar{z} = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$).

Доказательство. Мы фиксируем «вектор» $\bar{Z} = \langle Z_1, \dots, Z_n \rangle$ с $Z_i \in V^B$ и элемент $U \in V^B$. Вместо $P(x, y, \bar{Z})$ мы будем писать $P(x, y)$ и т. п. Представив аксиому с «константами» Z_i, U в виде $R \rightarrow S$, мы должны доказать, что $\|R \rightarrow S\| = 1$.

7.6. Частный случай:

если $\|R\| = 1$, то $\|S\| = 1$. Покажем сначала, как общий случай выводится из этого.

Пусть $a \in B$. Обозначим через B_a множество $\{b \in B | b \leq a\}$. Операции B индуцируют на B_a структуру булевой алгебры с единицей $1_a = a$. Естественное отображение $B \rightarrow B_a: b \mapsto b \wedge a = b_a$ является гомоморфизмом. Легкая индукция по a позволяет построить сюръективное отображение универсумов $V^B \rightarrow V^{B_a}: X \mapsto X_a$, такое, что для всех $X, Y \in V^B$

$$\|X_a \in Y_a\| = \|X \in Y\| \wedge a; \quad \|X_a = Y_a\| = \|X = Y\| \wedge a.$$

Теперь выберем в прежних обозначениях $a = \|R\|$. Тогда $\|R\|_a = 1_a$, так что в силу 7.6 $\|S\|_a = 1_a$. Это означает, что $\|S\| \geq a$, так что $\|R \rightarrow S\| = 1$. (В этом рассуждении мы пользовались п. 7.6 для V^{B_a} ; ясно, что $\|R\|_a = \|R_a\|$ в очевидных сокращениях.)

7.7. Доказательство 7.6. Условие $\|R\| = 1$ означает, что для любого $X \in V^B$

$$\|X \in U\| \leq \| \exists! y P(X, y) \|.$$

Чтобы проверить условие $\|S\|=1$, достаточно для любого $U \in V^B$ отыскать такое $W \in V^B$, что для всех $Y \in V^B$

$$\|Y \in W\| = \bigvee_{X \in V^B} \|X \in U\| \wedge \|P(X, Y)\|. \quad (4)$$

Формула (4) определяем W как случайный класс в силу предложения 6.4. Найдём такое α , что $W \sim W_\alpha$.

С этой целью заметим сначала, что в (4) можно ограничиться суммированием по $X \in D(U)$:

$$\|Y \in W\| = \bigvee_{X \in D(U)} \|X \in U\| \wedge \|P(X, Y)\| \quad (5)$$

(доказательство такое же, как рассуждение после формулы (3) § 6).

Теперь применим лемму 7.4 к классу $W_X(Y) = \|P(X, Y)\|$. Она позволит для каждого $X \in D(U)$ найти такой элемент $Y_X \in V^B$, что

$$\| \exists y P(X, y) \| = \| P(X, Y_X) \|. \quad (6)$$

(Так как $\| \exists! y P(X, y) \| \leq \| \exists y P(X, y) \|$, мы сможем воспользоваться этими Y_X для оценки $\|X \in U\|$ с помощью (9).)

Положим

$$\alpha = \sup(\alpha_X \mid Y_X \in V^B_{\alpha_X}) \text{ по всем } X \in D(U)$$

и покажем, что $W \sim W_\alpha$ для этого α . Нам нужно проверить, что для всякого Y имеем $\|Y \in W\| \leq \|Y \in W_\alpha\|$, а для этого в силу (5) и (2) § 4 достаточно ус- тановить, что для любого $X \in D(U)$

$$\|X \in U\| \wedge \|P(X, Y)\| \leq \|Y = Y_X\| \wedge \|Y_X \in W_\alpha\|. \quad (7)$$

Имеем прежде всего в силу (3), (5), (6) и определения α :

$$\|X \in U\| \leq \|P(X, Y_X)\| \leq \|Y_X \in W\| = \|Y_X \in W_\alpha\|. \quad (8)$$

Далее рассмотрим формулу, которая «истинна», ибо выводима из логических аксиом и аксиом равенства:

$$\forall x \exists! y P(x, y) \wedge P(x, y_1) \wedge P(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2.$$

Из нее находим

$$\bigvee_{X \in V^B} \| \exists! y P(X, y) \| \wedge \| P(X, Y) \| \leq \| P(X, Y_X) \| \leq \| Y = Y_X \|. \quad (9)$$

Наконец, учитывая, что $\|X \in U\| \leq \bigvee_{X \in V^B} \| \exists! y P(X, y) \|$ в силу (3) и $\|X \in U\| \leq \|P(X, Y_X)\|$ в силу (8), перемножим почленно неравенства (8) и (9). Это даст

$$\|X \in U\| \wedge \|P(X, Y)\| \leq \|Y = Y_X\| \wedge \|Y_X \in W_\alpha\|,$$

т. е. (7).

7.8. Предложение.

Аксиома выбора «истинна».

Доказательство. Напомним, что аксиома выбора имеет вид $\forall x \exists y (Q \wedge R \wedge S \wedge T)$, где Q означает:

$$\forall z (z \in y \rightarrow \exists! \exists w (z = \langle u, w \rangle))$$

(« y — бинарное соответствие»);

R означает:

$$\forall u \forall w_1 \forall w_2 (\langle u, w_1 \rangle \in y \wedge \langle u, w_2 \rangle \in y \rightarrow w_1 = w_2)$$

(« y — функция»);

S означает:

$$\forall u (\exists w (\langle u, w \rangle \in y) \rightarrow u \in x)$$

(«область определения y содержится в x »);

T означает:

$$\forall u (u \neq \emptyset \wedge u \in x \rightarrow \exists w (w \in u \wedge \langle u, w \rangle \in y))$$

(«область определения y совпадает с x ; y выбирает по одному элементу из каждого непустого элемента x »).

Фиксируем $X \in V^B$ и построим для X «выбирающую функцию» Y . Для этого а) перенумеруем $D(X)$ начальным отрезком ординалов:

$$D(X) = \{U_0, U_1, \dots, U_\alpha, \dots\}, \alpha \in I;$$

б) для каждого $U_\alpha \in D(X)$ отыщем по лемме 7.4. такой элемент $W_\alpha \in V^B$,

что

$$\|W_\alpha \in U_\alpha\| = \bigvee_{W \in V^B} \|W \in U_\alpha\|;$$

в) для каждого $\alpha \in I$ положим

$$a_\alpha = \|U_\alpha \in X\| \wedge (\bigwedge_{\beta < \alpha} \|U_\beta \in X\|' \vee \|U_\beta = U_\alpha\|');$$

г) наконец, обозначим через Y множество, собирающее «упорядоченные пары» $\langle U_\alpha, W_\alpha \rangle^B$ с вероятностями $a_\alpha, \alpha \in I$. Здесь, конечно, $\langle U, W \rangle^B = \{\{U\}^B, \{U, W\}^B\}$.

Смысл конструкции: в каждом U_α мы выбираем элемент W_α , входящий в U_α «с наибольшей возможной вероятностью», но затем «пары» $\langle U_\alpha, W_\alpha \rangle^B$ мы включаем в график Y функции выбора по очереди, каждую последующую лишь в той мере, в какой раньше U_α «не учитывалась» в X .

Теперь подставим X, Y вместо x, y в аксиому выбора и, обозначая через Q, R, S, T соответствующие формулы с константами, проверим, что $\|Q\| = \|R\| = \|S\| = \|T\| = 1$.

Мы будем постоянно пользоваться формулой, вытекающей из (2) и определения Y :

$$\|Z \in Y\| = \bigvee_{\alpha} \|Z = \langle U_\alpha, W_\alpha \rangle^B\| \wedge a_\alpha. \quad (10)$$

7.9. $\|Q\|=1$. По определению Q это означает, что для $Z \in V^B$ должно быть $\|Z \in Y\| \leq \bigwedge_{W \in V^B} \|Z = \langle U, W \rangle^B\|$.

а это очевидно из (10).

7.10. $\|R\|=1$. По определению R для любых $U, W^1, W^2 \in V^B$ мы должны доказать неравенство

$$\| \langle U, W^1 \rangle^B \in Y \| \wedge \| \langle U, W^2 \rangle^B \in Y \| \leq \| W^1 = W^2 \|.$$

С помощью (10) левая часть переписывается в виде

$$\bigvee_{\alpha, \beta} \| U = U_\alpha \| \wedge \| W^1 = W_\alpha \| \wedge \| U = U_\beta \| \wedge \| W^2 = W_\beta \| \wedge \| W^1 = W^2 \|.$$

Так как $\| U = U_\alpha \| \wedge \| U = U_\beta \| \leq \| U_\alpha = U_\beta \|$ и $\| U_\alpha = U_\beta \| \wedge \| U_\alpha \wedge \alpha_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$ (см. определение α_α), в этой сумме можно оставить лишь члены с $\alpha = \beta$. В каждом таком члене есть сомножитель $\| W^1 = W'_\alpha \wedge \| W^2 = W_\alpha \| \leq \| W^1 = W^2 \|$, что доказывает требуемое.

7.11. $\|S\|=1$. Это тождество равносильно формуле

$$\| \langle U, W \rangle^B \in Y \| \leq \| U \wedge X \|.$$

но левая часть равна в силу (10):

$$\bigvee_{\alpha} \| U = U_\alpha \| \wedge \| W = W_\alpha \| \wedge \| U = U_\alpha \| \wedge \| W = W_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in X \| \leq \bigvee_{\alpha} \| U = U_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in X \| = \| U \in X \|.$$

$$7.12. \|T\|=1. \text{ Мы должны доказать неравенство (для любого } U \in V^B) \\ \| U \in X \| \wedge \| U \neq \emptyset \| \leq \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U \| \wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|.$$

Как мы уже неоднократно замечали,

$$\bigvee_{U \in V^B} \| U \in X \| \wedge \| U \neq \emptyset \| = \bigvee_{U \in D(X)} \| U \in X \| \wedge \| U \neq \emptyset \|.$$

Поэтому в (11) достаточно ограничиться элементами $U, \alpha \in I$. Далее,

$$\| U_\alpha \neq \emptyset \| = \| \exists w (w \in U_\alpha) \| = \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \| = \| W_\alpha \in U_\alpha \|.$$

Поэтому (11) превращается в неравенство

$$\| U_\alpha \in X \| \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leq \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|.$$

Для его доказательства применим индукцию α . При $\alpha=0$ оно очевидно, ибо справа член с $W=W_0$ совпадает с левой частью. Пусть оно верно для всех $\beta < \alpha$.

По определению α_α

$$\| U_\alpha \in X \| = \alpha_\alpha \vee \bigvee_{\beta < \alpha} \| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \|.$$

Подставив эту формулу в левую часть (12), мы получим, что нужно доказать два неравенства:

$$\alpha_\alpha \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leq \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|; \quad (13)$$

$$\| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| W_\alpha \in U_\alpha \| \leq \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|.$$

для всех $\beta < \alpha$.

Неравенство (13) очевидно: для его проверки достаточно рассмотреть справа член с $W=W_\alpha$. Неравенство (14) следующим образом сводится к индуктивному предположению. Левая часть (14) мажорируется величиной

$$\| U_\beta \in X \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| U_\alpha \in U_\beta \| \leq \| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| W_\beta \in U_\beta \|$$

по определению W_β . Далее, по индукции и в силу экстенсинальности

$$\| U_\beta = U_\alpha \| \wedge \| U_\beta \in X \| \wedge \| W_\beta \in U_\beta \| \leq \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\beta \| \wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|.$$

$$W_\beta \in Y \| \wedge \| U_\beta = U_\alpha \| \leq \bigvee_{W \in V^B} \| W \in U_\alpha \| \wedge \| \langle U, W \rangle^B \in Y \|,$$

что завершает проверку аксиомы выбора.

8. ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА «ЛОЖНА» ДЛЯ ПОДХОДЯЩИХ B

8.1. Напомним (лемма 7.2a), что множество $X \in V^B$ собирает множества $\{X_i\}$ с вероятностями $a_i \in B$ ($i \in I$), если $\| Y \in X \| = \bigvee_i \| Y = X_i \| \wedge a_i$ для всех Y .

Пользуясь этим определением, мы можем ввести полезное каноническое отображение универсума фон Неймана V в V^B : $t \mapsto \hat{t}$. Пусть $\hat{\emptyset} = \emptyset$ (напомним, что $\| Y \in \emptyset \| = 0$ для всех Y), и если $\hat{s}$ уже определены для всех $s \in V_\alpha$, то для $t \in V_{\alpha+1}$ положим:

$\hat{t}$ собирает с вероятностями 1 все s для $s \in t$. Иными словами, для любого $Y \in V^B$

$$\| Y \in \hat{t} \| = \bigvee_{s \in t} \| Y = \hat{s} \|. \quad (1)$$

(Собирающий объект определен неоднозначно, а лишь с точностью до эквивалентности, так что, строго говоря, следовало бы указывать ранг i , например потребовать, чтобы он совпадал с рангом t . Это несущественно, так как нас будут интересовать лишь функции истинности, которые не меняются при замене любого объекта на эквивалентный ему.)

Теперь мы можем сформулировать дополнительные (кроме полноты) условия, которые будут наложены на булеву алгебру B для нужд этого параграфа. Напомним, что ω_0 — первый бесконечный ординал, ω_1 — первый ординал мощности $> \omega_0$; ω_2 — первый ординал мощности $> \omega_1$.

8.2. Условия на B .

а) *Условие счетности*. Напомним его содержание: если дано семейство элементов $\{a_i\}$, $i \in I$, с условиями $a_i \neq 0$, $a_i \wedge a_j = 0$ при $i \neq j$, то I не более чем счетно.

б) Существует семейство элементов $b(n, a) \in B$, пронумерованное множеством $\omega_0 \times \omega_2$ со следующим свойством: если $Z(a)$ собирает элементы A , $n \in \omega_0$ с вероятностями $b(n, a)$, то $\|Z(a) = Z(\beta)\| = 0$ при $a \neq \beta$.

Интуитивный смысл второго условия таков. Нетрудно видеть, что $\|Z(a) \equiv \widehat{\omega}_0\| = 1$. В самом деле, это условие равносильно $\forall x (x \in Z(a) \rightarrow x \in \widehat{\omega}_0) = 1$, т. е.

$$\forall X \in V^B, \|X \in Z(a)\| \leq \|X \in \widehat{\omega}_0\|.$$

что очевидно из (1), ибо $\widehat{\omega}_0$ собирает A с вероятностями 1, а $Z(a)$ — с вероятностями $b(n, a) \leq 1$.

Таким образом, условие (8.26) означает, что мы можем набрать ω_2 различных подмножеств $Z(a) \subseteq \widehat{\omega}_0$, так что в наивном смысле слова $\text{card } \mathcal{P}(\widehat{\omega}_0) > \omega_1$, — это и есть отрицание континуум-гипотезы. Конечно, нужно еще проверить, что это интуитивное соображение можно превратить в доказательство.

8.3. Существование B с нужными свойствами. Можно было бы воспользоваться измеримыми множествами, как в § 3. Для разнообразия и сравнения с § 9 приведем еще одну конструкцию. Пусть $\{0, 1\}$ дискретно двухточечное пространство; $I = \omega_0 \times \omega_2$, $S = \{0, 1\}^I$ пространство векторов из 0 и 1, координаты которых пронумерованы множеством I . Введем на S топологию прямого произведения. Ее стандартный базис образует открытые подмножества, состоящие из всех векторов, у которых координаты на некотором конечном подмножестве $J \subset I$ фиксированы.

Если $a \in S$, положим

$$a' = \text{дополнение замыкания } a \text{ в } S, a'' = (a')'.$$

Множества $a \subseteq S$ с $a'' = a$ называются регулярными открытыми множествами пространства X .

8.4. Теорема.
Положим

$$B = \{a \subseteq S \mid a'' = a\}, a \wedge b = a \cap b; a \vee b = (a \cup b)'.$$

Тогда B с операциями $\vee, \wedge$ и $'$ является полной булевой алгеброй с условием счетности, и $\bigvee_i a_i = (\bigcap_i a_i)'$ для любого семейства $a_i \in B$.

Доказательство мы опустим: см. Россер [6, гл. 2].

8.5. Лемма.

В условиях теоремы 8.4 положим: $b(n, a)$ — множество векторов с 1 на месте (n, a) и определим $Z(a)$, как в п. 8.26. Тогда $\|Z(a) = Z(\beta)\| = 0$ при $a \neq \beta$.

Доказательство. По формуле (5) § 4

$$\|Z(a) = Z(\beta)\| = \bigwedge_{n \in \omega_0} (b(n, a) \wedge b(n, \beta)) \vee (b(n, a)' \wedge b(n, \beta)').$$

Правая часть может лишь увеличиться, если заменить $\wedge$ на $\cap$ и $\vee$ на $\cup$; штрихи здесь совпадают с обычными дополнениями. Если $\|Z(a) = Z(\beta)\| \neq 0$, то должен был бы существовать элемент из стандартного базиса топологии X , описанного в начале п. 8.3, содержащийся в

$$\Pi(b(n, a) \cap b(n, \beta)) \cup (b(n, a)' \cap b(n, \beta)'),$$

Но это пересечение состоит из векторов, у которых координаты на местах (n, a) и (n, β) одинаковы для всех n , тогда как в любом элементе стандартного базиса топологии ограничения наложены лишь на конечное число координат.

8.6. Формулировка отрицания континуум-гипотезы. Мы будем доказывать истинность следующей формулы: $\neg \text{КГ}$: $\forall x (x \text{ — ординал} \wedge x \text{ не конечен} \wedge \forall u (u \subseteq x \rightarrow u \text{ конечен}) \rightarrow \exists w (\text{нет функции из } x \text{ на все } \omega \wedge \text{нет функции из } w \text{ на } \omega^x(x)))$.

Здесь x конечен: $\forall u (u \subseteq x \wedge u \neq x \rightarrow \text{нет функции из } u \text{ на все } x)$.

Расшифровку остальных сокращений мы оставляем читателю.

Посылка в $\neg \text{КГ}$ означает: x есть первый бесконечный ординал, заключение: « w есть множество мощности, строго промежуточной между мощностью x и мощностью $\mathcal{P}(x)$ ».

Мы будем сокращенно записывать $\neg \text{КГ}$ в виде

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists w (Q_1(x, w) \wedge Q_2(x, w))). \quad (2)$$

8.7. Редукционная лемма.

Пусть $P(x), Q(x)$ — две формулы языка Цермело — Френкеля с единственной свободной переменной x и со следующими свойствами:

Формула $\exists! x P(x)$ выводима из аксиом;

$X_0 \in V^B$ — такой элемент что $\|P(X_0)\| = 1$. Тогда $\|P(X)\| = \|X = X_0\|$ для всех X , и если $\|Q(X_0)\| = 1$, то $\| \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \| = 1$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\| \exists x P(x) \| \geq \| \exists! x P(x) \| = 1$, ибо все аксиомы истинны в V^B , а правила вывода сохраняют истинность. Значит, существование объекта $X_0 \in V^B$ с $\|P(X_0)\| = 1$ обеспечено леммой 7.4.

Далее, $P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y$ также выводима, откуда, применяя это к X вместо x и X_0 вместо y , находим

$$\|P(X)\| \leq \|X = X_0\|, \quad (3)$$

но $\|P(X)\| \wedge \|X = X_0\| = \|P(X_0)\| \wedge \|X = X_0\|$; сравнивая это с (3), получаем, что в (3) можно поставить равенство.

Наконец, допустим, что $\|Q(X_0)\| = 1$. Тогда по доказанному

$$\|P(X)\| = \|Q(X_0)\| \wedge \|X = X_0\| = \|Q(X)\| \wedge \|X = X_0\| = \|Q(X)\| \wedge \|P(X)\|,$$

$$\text{откуда } \|P(X)\| \leq \|Q(X)\| \text{ и } \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) = 1.$$

Эту лемму можно применять к доказательству $\neg \text{КГ}$ в форме (2), потому что из аксиом выводима формула $\exists! x P(x)$, где $P(x)$ — посылка « x есть первый бесконечный ординал». Мы не будем приводить соответствующий формальный вывод, удовлетворившись констатацией того, что единственность ω_0 общезвестна.

Теперь в силу леммы 8.7 для проверки $\neg \text{КГ}$ достаточно установить следующие факты:

$$8.8. \|P(\widehat{\omega}_0)\| = 1.$$

(Иными словами, роль X_0 в нашей ситуации играет $\widehat{\omega}_0$.)

$$8.9. \|Q_1(\widehat{\omega}_0, \widehat{\omega}_1)\| = 1.$$

$$8.10. \|Q_2(\widehat{\omega}_0, \widehat{\omega}_1)\| = 1$$

(значит, $\| \exists w (Q_1(\widehat{\omega}_0, w) \wedge Q_2(\widehat{\omega}_0, w)) \| = 1$, что завершает проверку условий леммы).

Проверка 8.8 проводится почти механически, и мы оставляем ее в качестве упражнения.

8.11. Проверка п. 8.9. Мы должны установить, что если V удовлетворяет условию счетности, то $\| \exists$ функция из $\hat{\omega}_0$ на все $\hat{\omega}_1 \parallel = 0$. Следующее доказательство дословно переносится на более общий случай, когда вместо ω_0 , ω_1 берется любая пара $s, t \in V$ с $\text{card } t < \text{card } s$ и $\text{card } s$ бесконечно.

Допустим, что $0 \neq a = \|\exists f(f - \text{функция } \bigwedge \forall y(y \in \widehat{\omega}_1 \rightarrow \exists x(x \in \widehat{\omega}_0 \wedge \langle x, y \rangle \in f))\|$, и приходим к противоречию. Должен существовать такой элемент $F \in V^B$, что $a \leq \|F - \text{функция } \bigwedge \forall y(y \in \widehat{\omega}_1 \rightarrow \exists x(x \in \widehat{\omega}_0 \wedge \langle x, y \rangle \in F))\|$.

Для каждого $a \in \omega$, рассмотрим член произведения, отвечающий $\hat{Y} = a$, и учтем что $\|\alpha \in \hat{\omega}, \| = 1$.

Получим

$$\alpha \leq \|F\text{-функция}\| \wedge (\bigvee_X \|X \in \widehat{\omega}_0\| \wedge \| \langle X, \alpha \rangle \in F \|). \quad (4)$$

В силу (I)

$$\|X \in \hat{\omega}_0 \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha} \rangle \in F \| = \bigvee_{n \leq \omega_0} \| X = \hat{n} \| \wedge \| \langle X, \hat{\alpha} \rangle \in F \| =$$

$$= \bigvee_{n < \omega_0} \|X = \widehat{n}\| \wedge \|\widehat{\langle n, \alpha \rangle}^B\| \in F\|,$$

так что, суммируя сначала по X , а потом по n , можно представить (4) в виде

$$\alpha \leq \|F\text{-функция}\| \wedge \bigvee_{n \leq \omega_0} \|\widehat{\langle \pi, \alpha \rangle}^B\| \in F\|. \text{ Значит, для каждого } \alpha < \omega_1, \text{ найдется}$$

такой $n(\alpha) < \omega_0$, что

$$\|F\text{-функция}\|\wedge\|\langle n(\hat{\alpha}), \hat{\alpha} \rangle^B\| \in F\| \neq 0.$$

Поэтому существует такое значение n_0 и такое подмножество $J \subseteq \omega_1$, мощности ω_1 , что

$$0 \neq a_{\alpha} = \|F - f_{\alpha}\| \quad \bigwedge \langle \hat{p}_{\alpha}, \hat{a}_{\alpha} \rangle \in F \quad \text{для всех } \alpha \in J.$$

Остается проверить, что $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, что противоречит условию счетности для B . Так как по определению функции

$$a_\alpha \wedge a_\beta = \|F\text{-функция}\| \wedge \|\widehat{\langle n_0, \alpha \rangle}^B \in F\| \wedge \|\widehat{\langle n_0, \beta \rangle}^B \in F\| \leq \|\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}\|.$$

достаточно проверить, что если $\alpha \neq \beta$, то $\|\hat{\alpha} - \hat{\beta}\| = 0$.

Действительно, если, скажем, $\gamma \in \alpha$, но $\gamma \notin \beta$, то в формуле (5) § 4 для $\alpha = \beta$ есть нулевой член $\|\hat{\gamma} \in \hat{\beta}\| \vee \|\hat{\gamma} \in \hat{\beta}\|$. (Проверка того, что $\|\hat{\gamma} \in \hat{\beta}\| = 0$ при $\gamma \notin \beta$, в свою очередь, требует знания того, что $\|\hat{\gamma} = \hat{\delta}\| = 0$ при $\gamma \neq \delta$, но лишь для γ и δ меньшего ранга, чем α и β , так что полное доказательство требует индукции по рангу.)

146

8.12. Проверка 8.10. Мы должны установить, что $\|\Xi$ функция из $\widehat{\omega}_1$ на $\mathcal{F}^B(\omega_0) = 0$, т. е. что

$$0 = \| (g_{\partial \langle z, \eta \rangle} \vee \hat{\omega}_{\partial \eta}) \# \epsilon \leftarrow \hat{\omega} \supset z \vee \text{ЯПНП} - \delta \right\|$$

Допустим, что для некоторого $G \in V^V$ имеем $0 \neq a = \|G - \text{функция } \Delta \wedge (\dots)\|$.

Для каждого $\alpha < \omega_2$ рассмотрим член, отвечающий $Z = Z(\alpha)$ (определение

$$0 \neq \alpha \leq \|G\| \quad G \text{ — функция } \|\bigwedge_Y Y \in \widehat{\omega}_1\| \wedge^Y \|Y, Z(\alpha)\rangle \in G\|. \quad (5)$$

В сязу (1)

$$\|Y \in \widehat{\omega}_1\| \wedge \|Y, Z(\alpha)\rangle \in G\| \stackrel{B}{=} \widehat{\mathfrak{p}}\| \wedge \|Y, Z(\alpha)\rangle \in G\| \stackrel{B}{=} \bigvee_{\beta < \omega_1} \|Y = \bigvee_{\beta < \omega_1} Y =$$

$$= \|\hat{\beta}\| \wedge \|\hat{\beta}, Z(\alpha)\|^B \in G \|.$$

Суммируя сначала по Y , перепишем (5) в виде

$$0 \neq a \leq \|G - \text{функция}\| \wedge \bigvee_{\beta < \omega_1} \|\hat{\beta}, Z(\alpha)\| \in G^B.$$

Значит для каждого $\alpha < \omega_2$ найдется такой $\beta(\alpha) < \omega_1$, что

$$0 \neq a \equiv \|G - \text{функция}\| \wedge \| \langle \beta(\alpha)^{\sim}, Z(\alpha)^{\mathbf{B}} \rangle \in G \|.$$

Поэтому существует такое значение $\beta_0 < \omega_1$ и такое подмножество $J \subseteq \omega_2$ мощности ω_2 , что

$$0 \neq \alpha = \|g - \text{функция}\| \wedge \langle \hat{\rho}_\alpha, Z(\alpha) \rangle \in G \text{ для всех } \alpha \in J.$$

Мы приходим к противоречию с условием счетности, как в предыдущем пункте, если покажем, что $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, но это следует из того, что $a_\alpha \wedge a_\beta \leq$
 $\leq \|Z(\alpha) = Z(\beta)\| = 0$

В силу леммы 8.5.

9. КАКОВА МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА?

9.1. После всего, что мы узнали о языке и аксиоматике Цермелло — Френкеля, возвращение к этому вопросу может показаться наивным, но оно неизбежно, если считать основной ценностью смысл.

Среди специалистов по основаниям существует и распространена точка зрения, согласно которой ответ состоит в том, что вопрос бесмыслен. К такой точке зрения как будто стал склоняться и сам Поль Коэн [19], признавая, что тем самым «принимает на себя тяжёлую ношу».

себя языковую пошуку. Разумеется, с этих позиций должна быть отвергнута почти вся семантика языка L_1 Set, в том числе заведомо этажи V_α университета фон Неймана начиная с $\alpha = \omega_0 + 1$. Никакое половинчатое решение не может спасти дела, тем более, что вопросы о вышших

аксиомах бесконечности или так называемых «измеримых кардиналов» находятся в еще худшем положении, чем КГ.

В таком случае следует предпринять серьезные поиски альтернативных языков и семантики. Разногласия здесь велики и неприимы. Наиболее четкую позицию занимают конструктивисты, несмотря на существование и в их среде различных оттенков мнений. Они отвергают актуальную бесконечность и неэффективные доказательства существования. (Последнее, впрочем, на практике часто сводится к более дифференцированному словоупотреблению — «не может не существовать», «квазисуществование», которое почти синонимично лингвистическим предосторожностям, принятым в классических текстах.) Недостаток этой позиции, на наш взгляд, состоит в том, что конструктивизм отнюдь не является «другой математикой». Это — крайне рафинированная подсистема классической математики, отвергающая ее крайности и бережно лелеющая эффективный вычислительный аппарат.

К сожалению, похоже, что именно «крайности» — смелые экстраполяции, инфинитные и не поддающиеся конструктивной интерпретации абстракции — придают аппарату эффективность. Трудно представить себе, какую помощь могла бы получить от математики квантовая физика XX века, если бы в течение последней сотни лет ее аппарат развивался только на основе абстракции «конструктивного объекта». Какие-нибудь стандартные вычисления с бесконечномерными представлениями групп Ли, играющие сегодня важную роль в понимании микромира, скорее всего просто не были бы придуманы.

Не исключено, что новую (или хорошо забытую старую) концепцию континуума, при которой он не будет иметь никакой «мощности», следует искать в глубоком изучении внешнего мира. Представление о множестве, состоящем из элементов, действительно рискует оказаться адекватным лишь для конечных или счетных множеств, тогда как «высшие бесконечности» могут оказаться абстракциями от объектов совершенно другого типа.

Физика как будто бы указывает на принципиальное отличие процедуры «счета» от идеализации измерения по Эвдоксу — Дедекнду. Счету поддаются материальные области притяжения, «аттракторы» (Р. Том), которые суть единицы, не имеющие резких границ. Доли единицы, если даже они реализуются физически, суть аттракторы уже другой природы, в микромире и эти представления, видимо, теряют смысл.

Если статистичность является фундаментальным свойством природы, плодотворным может оказаться рассмотрение математических моделей, в которых она появляется в качестве неопределимого понятия. Неожиданное богатство нестандартных интерпретаций классической математики в бுவезначных моделях согласу-

ется с предположением, что все слова, которые мы говорим, нужно понимать иначе.

9.2. Перейдем теперь к менее радикальной точке зрения на проблему континуума, при которой она считается осмысленной. Тогда главный вопрос по-прежнему состоит в том, как узнать положение континуума на шкале алефов.

П. Коэн заканчивает свою книгу [7] следующим мнением: «Точка зрения, которая, как предчувствует автор, может в конце концов стать принятой, состоит в том, что КГ является, очевидно, ложной ... С больше чем $\aleph_{\omega}$, где $\aleph_{\omega} = \aleph_{\omega}$ и т. д. С этой точки зрения С рассматривается как невероятно большое множество, которое дано нам какой-то смелой новой аксиомой и к которому нельзя приблизиться путем какого бы то ни было постепенного процесса построения».

Таким образом, здесь дана гипотетическая оценка С снизу и больше ничего — нет даже предположений о том, регулярен кардинал С или сингулярен.

Но проблема состоит, конечно, не только в том, чтобы угадать правдоподобную гипотезу. Ее следует поддержать настолько убедительными косвенными свидетельствами, чтобы она стала принятой, не будучи доказанной. Каков может быть характер этих свидетельств?

Гедель [20], обсуждая любые новые аксиомы теории множеств, пишет следующее: мы можем, конечно, надеяться достичь и более глубокого понимания концепций, лежащих в основе логики и математики, что позволит распознать интересующую нас аксиому как следствие этих концепций.

Но и оставляя в стороне внутреннюю необходимость какой-то новой аксиомы и даже признав отсутствие этой необходимости, мы можем принять решение об истинности этой аксиомы другим способом — индуктивно, изучая ее «успешность», т. е. плодотворность при выведении «проверяемых» следствий. Мы имеем в виду следствия, доказуемые и без этой аксиомы, но доказательства которых при ее использовании значительно упрощаются, их становится легче открыть, удается скомбинировать в одном рассуждении многие разные доказательства. Отвергаемые интуитивистами аксиомы вещественных чисел были до какой-то степени проверены в этом смысле, потому что аналитическая теория чисел часто позволяет устанавливать теоретико-числовые теоремы, впоследствии подпадающие доказательству элементарными средствами. Но мыслима и гораздо более высокая степень уверенности. Могут быть открыты аксиомы, столь богатые проверяемыми следствиями, проливающие такой яркий свет на целые дисциплины и доставляющие настолько сильные методы решения задач (даже, возможно, решающие их в каком-то конструктивном смысле), что совершенно

безотносительно к их внутренней необходимости эти аксиомы принимаются, хотя бы в том же смысле, в каком принимают любую основательную физическую теорию».

Мало что можно добавить к этой энергично выраженной надежде. Имеется, однако, теорема, доказанная самим же Гёделем, согласно которой в достаточно богатой формальной системе *любая* новая независимая аксиома как угодно сильно сокращает доказательство подходящих утверждений, доказуемых без нее. Это не только ослабляет веру в прагматические критерии истинности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. О СМЫСЛЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕКСТА

Изложенные выше результаты, демонстрирующие огромную сложность понятий «доказуемости» и «истинности» математических утверждений, делают естественной попытку обсудить, каков вообще смысл математических абстракций. Возможные точки зрения на этот счет были исходным пунктом для различных школ в области оснований математики, сформировавшихся в XX веке. Ниже мы кратко опишем концепции этих школ и стоящие перед ними проблемы.

Начнем, однако, с замечания о том, что понятие смысла математического текста само по себе является абстракцией высокого уровня. Более непосредственному изучению поддаются *процессы осмысления текста*, которые мы и принимаем в качестве первоначального материала. В этих процессах выделяется несколько аспектов, попеременно выступавших на первый план в разных индивидуальных актах осмысления. Мы намерены описать их и проследить, как абсолютизация какого-либо из этих аспектов определяет каждую из оформившихся философских позиций в проблемах оснований.

Осмыслению бытовых текстов на родном языке человек учится с детства, параллельно с овладением самим этим языком, находясь в однородной языковой среде. Так, в индивидуальном сознании образуется потенциальное ядро сразу и однозначно понимаемых текстов. Эта нерасчлененность процесса понимания бытового текста позволяет приписать ему наличие определенного смысла. Разумеется, когда этот процесс понимания становится предметом изучения психологов, лингвистов, психиатров, он обнаруживает колоссальную сложность и иерархическую организацию. Здесь мы вправе рассматривать его как единое целое, а смысл, продуцируемый этим осмыслением, как правомерную абстракцию.

Иначе обстоит дело с языками науки. При создании очередного естественно-научного понятия, системы понятий или теории, а также при обучении им соответствующие тексты представляются вместе с инструкциями по их осмыслению. Эти инструкции могут

составлять явно выделенную часть текста, но могут и быть замаскированными в языковых конструкциях, параллельных языковым конструкциям в уже осмысленных текстах. Так появляется якобы понятное выражение «электрон пролетел через щель А (а не через щель В)» в учебниках по квантовой механике, «инструкцией» по осмыслению которого является его синтаксис, параллельный синтаксису однозначно понимаемой фразы «камень пролетел через щель А, а не через щель В». Эта «инструкция» вводит в заблуждение, и долгие последующие объяснения посвящены введению правильно построенной для языка квантовой механики фразы «амплитуда прохождения электрона через щель А» и инструкциям по ее осмыслению. На дальнейшем конце такой иерархии инструкций находятся обычно описания операционных процедур экспериментальных наук — измерений, наблюдений и т. п. Осмысление текста включает более или менее полное осознание этой иерархии.

Своеобразие математических текстов состоит обычно в отсутствии таких операциональных процедур, к которым содержание текста сводится хотя бы в конечном счете. Тем не менее в определенных ситуациях в осмыслении математического текста такой «реалистический» аспект играет основную роль.

Далее, осмысливая математический текст, математик пользуется более или менее определенными зрительными, кинематическими и другими образами, возникающими в его сознании. Соответствующий аспект смысла мы назовем «внутренним».

Наконец, осмысляя текст в его отношении к другим реальным или потенциальным текстам, т. е. строя его переводы на другие подязыки, эксплицируя определения, формализуя и т. д., математик обращается к «внешнему» аспекту смысла.

Рассмотрим в качестве простейшего примера осмысление понятия «два» в контекстах «возьми два яблока», «философский дуализм» и «шестой знак после запятой в десятичном разложении π есть два». В первом из них наиболее существен реалистический аспект смысла, во втором — внутренний, ибо представление о «двух» должно применяться к столь сложной понятийной системе, как «первоначальные сущности, предположительно лежащие в основе мира, в рамках философских систем определенного класса». Наконец, в третьем контексте доминирует внешний смысл, ибо понимание этого текста апеллирует к реконструкции некоторого метода приближенного вычисления π , метода получения десятичных знаков соответствующего приближения, метода оценки точности приближения и т. п.

Займемся описанием этих аспектов смысла и их влиянием на выбор и оценку той или иной системы оснований математики подробнее.

а) *Реалистический аспект семантики*. Не подлежит сомнению, что он играет основную роль в широко понимаемой «прикладной»

математике. Сюда входят, конечно, инженерные и экономические расчеты. То же относится к аппарату теоретической физики, однако здесь резко возрастает роль и сложность процедур экспликации физического смысла выкладок. По этой причине формально-математическая строгость вычислений может отходить для физика на второй план, если правила интерпретации служат более сильным формообразующим фактором теории. Таково положение дел с процедурами перенормировки в квантовой электродинамике, которые для математики выглядят вводимыми *ad hoc* правилами вывода в формальном тексте, но получают осмысление и конечное оправдание в совпадении вычисленных радиационных поправок с экспериментально измеренными. Физика же доставляет важнейшие образцы множественности реалистических интерпретаций одной и той же математической теории: волновое уравнение может описывать колебание струны и рассеяние электронов; интеграл может отвечать объекту, заряду, пути или вероятности; примеры можно продолжать до бесконечности. Акцент на этой идее приводит к столь разным концепциям, как «конвенционализм» А. Пуанкаре, «теоретико-множественный релятивизм» Сколема или теоретико-множественная интерпретация интуиционистской логики.

Для «чистого» математика реалистический аспект смысла может доминировать, когда текст осмысливается как описание алгоритмической процедуры, производимой над текстами же. Таковы школьные алгоритмы действий с десятичными дробями или метаматематические правила подстановки термина в формулу. Наконец, смысл программы для компьютера есть та последовательность состояний, которую воспроизведет компьютер, действуя в соответствии с этой программой. Несколько утрируя, можно сказать, что работа компьютера и есть одна из процедур осмысления программы. Математика Египта и Вавилонии была почти целиком «реалистической», и такова же семантика традиционных школьных учебников для младших классов.

Следует подчеркнуть, что слово «реалистический» в наших объяснениях нужно понимать широко. Даже когда его истолкование ведется в терминах эмпирических процедур, мы всегда в действительности подразумеваем некоторые абстракции, зачастую очень рафинированные. Эти абстракции могут быть не только естественно-научными, но и философскими: предположение о существовании некоторого «неоплатонистского» мира множеств позволяет отнести к «реалистической» философию классической теоретико-множественной математики. Отвержение этого мира как нереального с заменой его более реальным миром текстов и алгоритмических процедур над ними характеризует «другой реализм» конструктивной математики. Ориентация на реальность физического мира и интерпретация математики в терминах естественных наук предопределяет «прикладную» философию математики, едва

ли сформулированную систематически, но повседневно творимую физиками.

б) *Внутренний аспект семантики.* Как сказано, он проявляется в каждом индивидуальном акте осмысления как с трудом эксплицируемый и зависящий от индивидуального сознания «интуитивный смысл» текста.

Каждый человек имеет непосредственный доступ лишь к своему сознанию. Самонаблюдение и языковые средства позволяют сосчитать некоторый внешний образ своих актов мышления, однако весьма несовершенный и неполный. При этом фундаментальная подсознательная компонента либо вовсе выпадает из описания, либо грубо деформируется в результате попыток ее экстернизации.

По этим причинам существующие описания интуитивного смысла текстов обычно относятся к отдельным понятиям и элементарным мыслительным актам. Кроме философов и психологов замечательные образцы таких описаний оставили Б. Паскаль, П. С. Лаплас, А. Пуанкаре, Ж. Адамар. Общность анатомической и функциональной структуры центральной нервной системы разных людей, с одной стороны, и общность опыта и языковых назывков — с другой, позволяет вычленить некоторую совокупность элементарных единиц выражения для «языка интуитивных смыслов». Сюда могут попасть такие праматематические термины, как «количество», «близость»; на более высоком уровне — «отношение», «непрерывность/дискретность», на еще более высоком уровне — «алгоритм». В роли таких единиц выражения могут выступать также схематические рисунки.

Придание интуитивному понятию статуса термина в аксиоматизированной подсистеме математики выводит его с уровня «внутренней семантики» на уровень «внешней семантики». При этом уточнение смысла происходит за счет отбрасывания потенциальных возможностей, заключенных в интуитивном образе. Так, интуитивное понятие «актуально бесконечно малой величины» было полностью отброшено в классическом обосновании анализа, затем возродилось в точных понятиях «нильпотентного элемента» в алгебраической и дифференциальной геометрии наших дней и «бесконечно малого числа» в нестандартных моделях вещественного поля у логиков. Сохраняя некоторые черты интуитивного архетипа, эти «внешние» интерпретации бесконечно малой величины не совпадают и вводят мысль в разных направлениях.

Совокупность единиц внутреннего смысла индивидуально и исторически изменчива, открыта и слабо структурирована. Овладевание новым материалом ведет к образованию новых единиц. Напротив, взаимодействие элементарных частей между собой и с полем в физике может описываться на языке «графов Фейнмана». Каждый такой граф «есть» чертеж из точек разных сортов, соединенных

ребрами-линиями разных сортов. Осмысливая данный граф «реалистически», физик увидит в части его ребер мировые линии элементарных частиц. Другая часть ребер, не подающаяся такой интерпретации, будет сопоставлена с «виртуальными» частицами. Так возникнет удобная новая единица интуитивного смысла, отвечающая не наблюдаемым фактам, но промежуточным единицам выражения в принятом языке. Аналогично возникли «кварки», отвечающие неприводимым представлениям некоторой группы. Вопрос о «реальном существовании» виртуальных частиц или кварков нуждается в тонкой интерпретации, предшествующей попыткам его решения.

Заметим, наконец, что «внешнее» осмысление графа Фейнмана предполагает, например, умение написать по нему соответствующий член ряда теории возмущений, а «внешнее» осмысление кварков — умение разложить тензорное произведение двух представлений в сумму неприводимых компонент.

Всякая последовательная концепция оснований математики стремится ограничить фонд общепринятых единиц интуитивного смысла необходимым минимумом. При этом производится как отбор допустимых единиц выражения, так и ограничение объема их интуитивного содержания. После этого остальные приемлемые единицы интуиции структурируются их сведением к элементарным.

Принятие языка теории множеств, подготовленное «арифметизацией континуума», действительно позволило резко уменьшить необходимую для математики область элементарных единиц «внутреннего» смысла или по Н. Бурбаки «разных интуиций», не уменьшив объема классической математики. Научившись интуитивной интерпретации теоретико-множественных понятий и конструкций, математик мог перестать обращаться к интуиции как единственному источнику многих других понятий. «Кривая», например, стала сложным, но подающимся недвусмысленной передаче теоретико-множественным конструктом.

Последующее изучение этого понятия могло обнаружить у него как и прежние «интуитивно очевидные» свойства, так и совершенно новые, вроде существования кривой Пеано, заполняющей квадрат, что казалось резко противоречащим интуиции (А. Пуанкаре). Теория множеств избавила большинство математиков от анархии различия индивидуальных интуиций, правда, ценой установления тирании меньшинства, пытающегося добиться интуитивного прояснения и согласования внутреннего смысла единственного основного понятия «множество», сначала казавшегося столь надежным.

Рассмотрим с этой точки зрения несколько альтернатив языка теории множеств. Первая из них — двойственный язык «свойств», «предикатов» и т. п. Его элементарное выражение «обладать свойством», заменяет выражение «быть элементом множества». Се-

мантика понятия «свойство», принимаемого за первоначальное, в интуиции не обязана быть полностью эквивалентной семантике понятия «множество элементов с данным свойством», хотя бы потому, что определенность свойства «быть красным», совсем не требует определенности «множества красных предметов», учитывая хотя бы наличие шкалы оттенков цвета. Более того, в доканторовской математике язык свойств использовался именно для замены табулированной актуальной бесконечности. Действительно, интуитивно «проверка того, что объект обладает данным свойством» сильно отличается от «собирая воедино всех объектов с данным свойством».

Тем не менее в системах Рассела—Уайтхеда, Куайна и других авторов формализация языка свойств в «теориях типов» использовалась именно для обоснования теории множеств. Прагматическая цель состояла в таком ограничении универсума и языковых средств, чтобы сделать невозможным появление парадоксов раселовского типа.

«Реальностью» для теории типов является универсум, состоящий из индивидуумов (нулевого типа), их свойств (первого типа), свойств их свойств (второго типа) и т. д. до бесконечности. Парадокс Рассела не воспроизводим, ибо свойство «быть свойством, не обладающим самим собой» универсуму не принадлежит. В этом универсуме, однако, интерпретировать классическую математику неудобно уже на уровне языка и почти невозможно на уровне аксиом существования: постулируемая Расселом специфическая «аксиома сводимости» не удовлетворяла его самого. Варианты теории типов связывают с «логическим тезисом», согласно которому математика сводима к логике, по историческим и интуитивным причинам. сам этот тезис едва ли обладает четким содержанием (см. Клини [3]).

В интуиционистской математике место как «множества», так и «свойства» примерно занимает выражение «закон образования», однако, принципиальная установка интуиционизма на несуществование «внешнего смысла» их текстов, в частности неадекватность любой из формализаций, мешает вести это сопоставление слишком далеко.

Для Брауэра и его школы интуиционизма предметом первоначальной интуиции является ряд целых чисел $0, 1, 2, 3, \dots$, при этом рассматриваемый не как заверченный, но как становящийся посредством закона перехода от n к $n+1$. Соответственно индукция принимается как основной прообраз всех конструкций, допустимых в математике. Сами по себе конструкции должны осуществляться финитными средствами над финитными объектами, и существование математического объекта понимается как возможность построить его. Это исключает доказательство существования «от противного», не сопровождаемые предъявлением соответст-

вующего объекта в случае, когда он должен выбираться из потенциально бесконечного множества. Это — известный принцип неприемлемости закона исключенного третьего в бесконечных областях.

Континуум Брауэра представляет собой с трудом эксплицируемую в классических терминах «среду свободного становления», скажем, десятичных дробей, не актуально, а лишь потенциально бесконечных, причем, однако, выбор последовательных десятичных знаков не подчинен никакому закону.

Кронекер был первым проповедником ограничений, которые подобная точка зрения налагает на математику, и одним из самых влиятельных противников Кантора. Брауэр и его последователи приложили много усилий к тому, чтобы прояснить контуры интуиционистской математики и логики, развивая ее положительные принципы. Однако они, в частности Гейтинг, постоянно подчеркивали примат внутренней интерпретации математических текстов и ограниченные возможности передачи ее в однозначно понимаемых аксиоматических теориях. С этих философских позиций отсутствие готовности принять внутреннюю интерпретацию теории множеств в духе Кантора может показаться необъяснимым: многие математики признают внутреннюю интерпретацию теории множеств в полном объеме. Для объяснения интуиционисты привлекают психологические аргументы в пользу примата идеи расчлененности, прерывности и, стало быть, потенциальной счетности в качестве единственно законного типа бесконечности. Интуиционистам не чужды и апелляции к «реалистическому» смыслу математики, в одной из статей Брауэр утверждает, что применение принципа исключенного третьего в естественных науках зависит от свойств конечности и дискретности физического мира.

Конструктивизм школы А. А. Маркова начал оформляться в конце 40-х годов, как вариант интуиционизма, использующий уточнения понятий конструктивного объекта и алгоритма на базе теории рекурсивных функций либо ее вариантов. Не вдаваясь здесь в подробности определений, укажем лишь на некоторые характерные принципиальные установки этой школы.

«Реальность» конструктивистов составляют тексты в конечных алфавитах, подвергаемые процессам переработки, которые алгоритмичны, в частности также описываемы текстами в конечном алфавите.

Потенциальная бесконечность допускается как абстракция текстов заранее не ограниченной длины и алгоритмов, работающих заранее не ограниченное время; актуальная бесконечность отвергается.

Существование математического объекта трактуется либо как его предъявление, либо как возможность построить его алгоритмически. Существенная тонкость состоит в том, что по А. А. Маркову возможность алгоритмического построения сама по себе мо-

жет устанавливаться классическими средствами, а не исключительно предъявлением такого построения. В частности, в таких доказательствах может использоваться редукция к противоречию.

Конструктивный континуум представлен парами алгоритмов, из которых первый задает вычислимую последовательность Коши рациональных чисел, а второй — явные оценки скорости сходимости (в классическом смысле). С точки зрения классической математики конструктивный континуум счетен, сверх того, а) свойство пары алгоритмов определять вещественное число алгоритмически неразрешимо; б) свойство двух таких пар определять одно и то же число неразрешимо; точно так же неразрешимо свойство предсказывать данное число. По этим причинам конструктивный анализ резко отличается от обычного. Например, в качестве функций вещественной переменной рассматриваются алгоритмы, переводящие конструктивное вещественное число в другое такое же число. Но тогда такая простая функция, как $f(x) = -1$ при $x \leq 0$, $f(x) = 0$ при $x > 0$, не существует в конструктивном анализе, ибо иначе было бы разрешимо свойство числа «быть нулем». В действительности, все конструктивные функции непрерывны в классическом смысле слова.

Та «реальность», с которой классическая математика сопоставляет свои конструкции, для большинства является чем-то вроде платоновской «реальности» мира идей. С точки зрения философского материализма это — сублимированная и экстерниризованная реальность индивидуальных сознаний, отражающих внешний мир; с точки зрения платонизма — реальность, независимая от сознания и находящаяся с ним в предустановленной гармонии. Мы можем также рассматривать этот мир как общую часть проекций вовне внутренних смыслов математики в индивидуальных сознаниях. Представление о единстве такого мира могло существовать лишь до тех пор, пока протестующие голоса выдающихся математиков не доказали обратного.

Едва ли, однако, можно считать окончательными любые аргументы, высказывавшиеся по поводу семантики понятия «множества» в математике. Их внимательный анализ показывает крайнюю бедность привлекаемого научного материала.

Например, критикуя канторову актуальную бесконечность различных сущностей с «реалистических» позиций, можно было бы заметить, что она абсолютизирует не столько опыт обращения с конечным, сколько повседневную физику здравого смысла, в которой мир состоит из отдельных вещей, поддающихся счету, упорядочению, собиранию и т. п. Квантовая физика подсказывает тогда абстракции мира совершенно другого типа, в котором «множества» электронов, скажем, состоит из сущностей разных, но неразличимых, в котором логика не отражает логики обыденной речи, ориентированной на макромир, но и не совпадает с логикой интуи-

ционизма — вообще любой из версий, предлагавшихся философами математики. Бесконечность микромира «внутри» и «вширь» с ее вероятностными и полевыми аспектами совершенно не похожа на канторову и определено не сводима к последовательности «элементарных актов различения», все равно, считать ли ее актуальной или потенциальной. Сам предикат «быть элементом» имеет в микромире сомнительный статус.

С другой стороны, и психологические рассуждения Брауэра, Гейтинга и других апеллируют в основном к элементарному самонаблюдению и совершенно не принимают в расчет достижений научной психологии и нейрофизиологии. Можно сказать, что пристальное внимание к конструктивным аспектам математики позволило вычленить понятие универсальной машины Тьюринга как «наименьшего общего фактора» всех индивидуальных сознаний. Его физиологической основой является дискретизованная двигательная активность с использованием простейших рецепторов, например осознательных.

Потенциально счетная бесконечность интуicionистов и конструктивистов есть бесконечность, доступная этому фактору. Однако геометрическая интуиция, на которой основана бесконечность континуума, при таком подходе полностью игнорируется. Ее физиологической основой является двигательная активность самого широкого плана, опирающаяся на сложнейшие процессы переработки информации зрительными рецепторами соответствующими корковыми полями. Нейрофизиологическое описание этих процессов только начинается, но совершенно ясно, что сверхупрощенные концепции математической интуиции, предлагаемые в полемическом задоре, далеки от реальности.

в) *Внешний аспект семантики.* Он дополнителен к внутреннему аспекту в том же смысле, в каком описание правил употребления слова «множество» дополнительно к его определению по Кантору. Осмысляя математический текст «внешним» образом, математик может конструировать его переводы на другие языки (от формул к графикам и наоборот), строить различные сокращения текста или, напротив, реконструировать опущенные подробности доказательств, экспериментировать с изменением посылок и т. п. «Внешний смысл» математического текста — это его рабочий смысл для математика-профессионала, когда он пишет статью, учит математике студентов или общается с коллегами. Процедура внешнего осмысления не обязана быть и редко бывает полным, точным, прямолинейным сведением к основным понятиям (такова лишь ее модель в формальной теории). Она содержит круги, туники, и скачки. Осмысление евклидовой прямой как модели вещественных чисел, а вещественных чисел как множества точек прямой не определяет ни одного из этих понятий, но проясняет смысл обоих.

«Реалистически» осмысливая дельта-функцию Дирака ($\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, $\delta(0) = \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$), физик ¹ представит себе ее,

скажем, как точечную единичную массу бесконечной плотности. Для математика несколько более абстрагированный вариант этого представления будет скорее относиться к категории «внутренней» семантики. Лишь получив возможность осознать дельта-функцию «внешним» образом как функционал на пространстве финитных функций и включив ее таким образом в качестве хорошо определенного термина в формализмы анализа и в качестве частного теоретико-множественного объекта — в общематематические теории, математик почувствует себя совершенно спокойно. Однако физик вполне может удовлетвориться внешним формализмом для данного случая, вовсе не постулируя его сводимости к теории множеств. Философская компонента формалистических концепций математики связана именно с абсолютизацией ее внешнего аспекта, когда содержание полностью отождествляется с формой. Кристаллизацией формальной математики в работах Гильберта и его школы мы снова обязаны трудностям теории множеств.

Новаторство Кантора выразилось прежде всего в создании содержательной теории «порядков бесконечности». С языковой точки зрения это означало неявное введение некоторых аксиом существования множеств (в том числе аксиомы множества частей и аксиомы выбора), использование языковых конструкций нового типа (как определение полной упорядоченности) и, наконец, свободное применение логики конечного в новом инфинитарном мире (в частности, закона исключенного третьего).

Такая оценка работы Кантора, разумеется, стала возможной лишь в ретроспективе, для него и долгое время после него на первом месте стояла семантика актуальной бесконечности платоновского типа, хотя, возможно, и не выявленная до конца. Во всяком случае утверждения и вопросы о существовании тех или иных множеств воспринимались как имеющие общепонятный смысл. Сами множества, существование которых утверждалось, могли задаваться указанием свойства их общего элемента либо конструкцией из некоторых уже данных множеств.

Перенос акцента со «смысла» на «текст» был вызван именно критикой такой семантики как из-за обнаружения парадоксов, так и из-за интуитивной неприемлемости для многих теоремы Цермело о возможности вполне упорядочить любое множество. Точка зрения Гильберта состояла в том, что не все математические понятия и рассуждения вообще должны быть непосредственно интерпретируемы в финитных терминах. Те из них, которые такой интерпретации не допускают, суть «идеальные» языковые конструкции, которые присоединяются к системе для упрощения доказательств

теорем, стандартизации языка и т. п. Допущение их в систему, однако, требует соблюдения определенных правил гигиены, главное из которых — непротиворечивость системы. Непротиворечивость должна быть обеспечена заранее посредством тщательного исследования синтаксиса языка, который уже должен проводиться без апелляции к актуальной бесконечности.

Возникшая в результате проведения этой программы совокупность формальных моделей математики и логики были важнейшим ее результатом. В частности, оформление точных математических понятий «вычислимости» и «алгорифма» и всей теории рекурсивных функций тесно связано с программой Гильберта. Невозможность ее выполнения в описанном объеме, открытая Геделем, составляет другой аспект проблемы. Трудно решить, свидетельствует ли эта невозможность в пользу принятия интуитивной теории множества, какой мы ее знаем сейчас, или ее отвержения; с теми же основаниями этот вопрос может ставиться уже для арифметики.

Во всяком случае, взгляд на математику как на формальную систему очень плодотворен, если осознавать его ограниченность. Он дает возможность достигнуть значительного взаимопонимания при обсуждении таких разных концепций, как интуитионистская логика и теоретическая физика, доставляя «пустые схемы» сложных структур. Непротиворечивость формальной системы, плодотворность которой проверена экспериментально, перестает быть первостепенной задачей. Выбор конкретно порождаемых текстов в такой системе составляющих весьма незначительную долю всех допустимых текстов, все равно производится по неформализуемым правилам, которые важнее формальной непротиворечивости, описываемой в терминах всех подпадающих порождению текстов. Роль отбираемых текстов состоит в важнейшем, хотя и плохо изученном посредничестве между мозгом и другим мозгом, мозгом и внешним миром, а также мозгом и самим собой (текст есть внешняя память, текст наводит мост между геометрической и арифметической интуицией каждого индивидуального сознания, которые, возможно, опираются на существенно разные физиологические механизмы). В конечном счете, главный аспект текста есть его способность участвовать в таких актах посредничества, и только изучение этой способности может разрешить загадку математики. Старая метафора В. Гюго, сопоставляющего книгу и собор, имеет глубокий смысл, если структурированность текста составляет важнейшую предпосылку его социальной роли.

Все эти проблемы способствуют гуманитаризации математики; вместе со встречным движением математизации гуманитарного знания они помогают вернуть утраченное единство двух культур. В предвидении синтеза мы можем ожидать нового понимания «множества» как одной из самых удивительных мифологем нашего времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги и статьи по математической логике и теории множеств

1. Шенфилд Дж. Математическая логика: Пер. с англ. — М.: Наука, 1975.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику: Пер. с англ. — М.: Наука, 1976.
3. Клини С. К. Введение в метаматематику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1957.
4. Линдон Р. Заметки по логике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.
5. Бурбаки Н. Теория множеств: Пер. с франц. — М.: Мир, 1965.
6. Rosser J. B. Logic for Mathematicians. — New York: Putnam, 1953.
7. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969.

Книги и статьи по теории рекурсивных функций и алгоритмов

8. Марков А. А. Теория алгоритмов. — Труды мат. ин-та В. А. Стеклова АН СССР, 1954, т. 42.
9. Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. — М.: Физматгиз, 1960.
10. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1966.
11. Ройджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость: Пер. с англ./ Под ред. В. А. Успенского. — М.: Мир, 1972.
12. Матиясевич Ю. В. Дифантовы множества. — УМН, 1972, т. 22, вып. 5, с. 185—222.
13. Манин Ю. И. Десятая проблема Гильберта. — Современные проблемы математики/ Под ред. Р. В. Гамкрелидзе. — М.: ВИНТИ, 1973, вып. 1, с. 5—37.
14. Манин Ю. И. Теорема Геделя. — Природа, 1975, № 2, с. 80—87.
15. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте в элементарном изложении. — УМН, 1974, т. 29, вып. 1, с. 3—47.

Книги и статьи по проблемам оснований математики

16. Тарский А. Введение в логику и методологию естественных наук: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948.
17. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
18. Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. — М.: Наука, 1975.
19. Коэн П. Дж. Об основаниях теории множеств. — УМН, 1974, т. 29, вып. 5, с. 169—176.
20. Gödel K. What is Cantor's continuum problem? — American Mathematical Monthly, 1947, v. 54, № 9.
21. Лакатос И. Доказательства и опровержения: Пер. с англ. — М.: Наука, 1967.