

Отступление с кенningами

1. Процесс, описанный в § 5, порождает всевозможные тавтологии с помощью конечного числа правил. В современной лингвистике попытка адекватного описания естественных языков посредством порождающих правил очень популярны (Н. Хомский и др.), см., например, книгу А. В. Гладкого, И. А. Мельчука [24].

Многие психологи, однако, полагают, что эта концепция имеет мало отношения к реальному процессу речи. Последний, согласно одному из мнений, скорее уподобляется вероятностной игре, погоне, течению реки по местности со сложным рельефом. Выбор очередного слова при порождении фразы статистически определяется как общим формирующим принципом (мысль, ситуация, психологическое состояние), так и особенностями семантики, грамматического оформления, фонетики, ассоциативного облака уже сказанных слов.

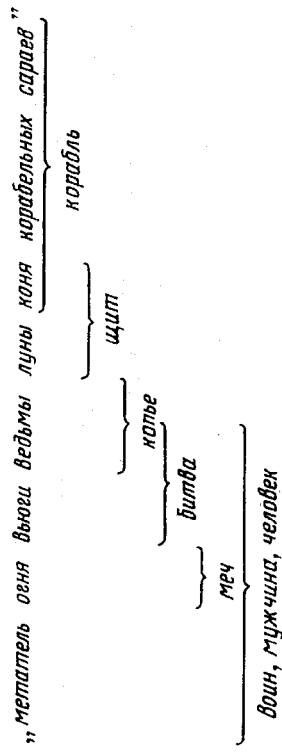
Можно надеяться, что формальные грамматики более адекватны специальным фрагментам естественных языков, жестче организованным в том или ином смысле: скажем, языкам определенных поэтических или юридических систем. В этих фрагментах существенную роль играют «правила запрета», отсеивающие, например все тексты без выраженного ритмического рисунка. Даже поверхностная интроспекция позволяет удостовериться в психологической реальности таких правил при версифицировании. Это значительно менее очевидно относительно порождающих правил.

2. Все же существовала по крайней мере одна поэтическая система, в которой порождающие правила занимали важное место. Одним из существенных элементов скальдической (древнеисландской) поэзии были специальные формулы, называемые *ке-нингами*. Кеннинг есть выражение, которое может заменить одно слово. Например,

„вьюга копий“	есть кеннинг		„битвы“
„древо битвы“		}	„война“
„куст шлема“			
„метатель меча“			„мужчины“
„раздаватель золота“			„человека“
„море телеги“			„земли“
„огонь войны“			„золота“
„небо песка“		}	„моря“
„поле июления“			и т. п.

Простой кеннинг — это кеннинг, никакая часть которого не является кеннингом. Приведенные выше примеры являются простыми кеннингами. Они играют роль аксиом, и создавать новые прос-

тые кеннинги, очевидно, имеют право только великие поэты. На долю невеликих поэтов остается создание новых кеннингов по правилам вывода. Правило вывода нового кеннинга из уже имеющихся: любое слово в одном из данных кеннингов может быть заменено его кеннингом (не обязательно простым). Пример сложного кеннинга с его расшифровкой (пример реальный):



Леонид Мартынов, воспринял кеннинги как метафоры (глубокое заблуждение, хотя и простибельное. Структурные роли кеннингов и метафор в разных поэтических системах совершенно различны) и написал стихотворение «Песни скальдов», которое кончается так:

...А может быть, переводчики что-то перемудрили?

Нет! Возможно и в наши живут времена

какие-то метатели огня въюги ведьмы луны коня

корабельных сараев или

расточители янтая холодной земли великанского кабана?

Все возможно!

И кто утверждать может твердо,

Что и ныне нет песен, которые можно назвать

Прибьем дрожжей людей костей фьорда?

Может быть, есть и нынче такие песни, как знать?

После этого профессиональное замечание М. И. Стеблина-Каменского, из книги которого «Культура Исландии» [27] взяты примеры, звучит несколько расхолаживающе: «Любой кеннинг война, или мужнины, был, как правило, не богаче содержанием, чем местоимение «он»».

Упражнения:

а) Восстановить простые кеннинги, входящие в вывод двух последних кеннингов, процитированных Мартыновым.

б) Построить кеннинги максимальной длины, выводимые из приведенных в тексте. Доказать, что более длинных кеннингов вывести нельзя.

6.1. Пусть L — некоторый язык класса $\mathcal{L}_1$, φ — его интерпретация, $T_\varphi L$ — множество φ -истинных формул. В § 3 было показано, что множество $T_\varphi L$ *гедделово*, т. е. полно, не содержит противоречия, замкнуто относительно вывода и содержит все логические аксиомы AxL .

Основная цель этого параграфа — доказательство обратного результата (Гедель):

6.2. Теорема.

а) Любое гедделово множество T является множеством всех φ -истинных формул $T_\varphi L$ для подходящей интерпретации L в некотором множестве M мощности $\leq \text{card}(A) + \aleph_0$ (здесь и ниже имеется в виду мощность алфавита без переменных: ср. 2.12).

б) Любое непротиворечивое множество формул ε , содержащее AxL , можно вложить в гедделово множество.

Модель M , которая будет построена в доказательстве, состоит из выражений в некотором расширении алфавита L , т. е. носит несколько искусственный характер. В следующем параграфе будет показано, что если некоторая естественная интерпретация (M, φ) языка L задана, то из нее можно выбрать подмодель мощности $\leq \text{card}(A) + \aleph_0$.

6.3. Следствие (критерий выводимости).

Пусть $\varepsilon \models AxL$.

а) Формула P выводима из ε в том и только в том случае, когда либо ε противоречиво, либо P φ -истинна для всех моделей φ множества ε мощности $\leq \text{card}(A) + \aleph_0$.

б) Формула P независима от ε в том и только том случае, когда $\varepsilon \cup \{P\}$ и $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ непротиворечивы, или, что то же по теореме 6.2, когда $\varepsilon \cup \{P\}$ и $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ имеют модели.

В дальнейшем мы будем часто опускать проверку существования разных формальных выводов. Если читатель захочет это восполнить, почти всегда проще устанавливать выводимость с помощью критерия 6.3, чем непосредственно.

Доказательство. а) Если ε противоречиво, то из ε выводится любая формула (предложение 4.2). Пусть ε непротиворечиво и P φ -истинна для всех моделей ε . Для доказательства $\varepsilon \vdash P$ рассмотрим два случая.

а₁) $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ противоречиво. Тогда $\varepsilon \cup \{\neg P\} \vdash P$, откуда по лемме о дедукции 4.5. $\varepsilon \vdash \neg P \rightarrow P$. Тавтология $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$ и MP дают $\varepsilon \vdash P$.

а₂) $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ непротиворечиво. Тогда по теореме 6.2 множество $\varepsilon \cup \{\neg P\}$ имеет модель; в ней ε истинно, а P ложна, так что этот случай невозможен.

б) Допустим, что P независима от ε , т. е. P и $\neg P$ невыводимы. Тогда по результату п. 6.3а существует модель ε , в которой P истинна, и модель ε , в которой P ложна. Обратное очевидно. Теперь приступим к доказательству теоремы Геделя.

6.4. Определение.

Пусть ε — некоторое множество формул языка L . Алфавит языка L называется достаточным для ε , если для любой формулы $P(x)$, содержащей ровно одну свободную переменную x , существует такая константа c_P (зависящая от P), что формула

$$R_P: \neg \forall x P(x) \rightarrow \neg P(c_P)$$

принадлежит ε .

Интуитивный смысл R_P : «если не все x обладают свойством P , то можно указать конкретный объект c_P , не обладающий этим свойством».

Терминология «достаточность алфавита» связана с тем, что в случае нехватки формул вида R_P в ε мы сможем просто увеличить ε , добавив все R_P , а если не хватит констант c_P , нам придется добавлять их к алфавиту языка.

План доказательства теоремы 6.2 состоит в следующем. Сначала мы установим, что справедлива следующая

6.5. Основная лемма.

Если множество ε формул языка непротиворечиво, полно, содержит AxL и алфавит L достаточен для ε , то существует модель ε мощности $\leq \text{card}(A) + \aleph_0$.

Следующие две леммы позволяют вложить любое непротиворечивое ε в полное множество или в такое, для которого алфавит достаточен.

6.6. Лемма.

Если ε непротиворечиво и содержит AxL , то существует непротиворечивое полное множество формул $\varepsilon' \models \varepsilon$.

6.7. Лемма.

Если ε непротиворечиво и содержит AxL , то существуют:

а) язык L' , алфавит которого получается из алфавита L добавлением множества новых констант мощности $\leq \text{card}(A) + \aleph_0$;

б) множество формул ε' языка L' , непротиворечивое, содержащее ε и AxL' и такое, что алфавит L' достаточен для ε' .

Однако эти конструкции мешают друг другу. Пополняя множество ε , для которого алфавит был достаточен, мы можем получить множество с недостаточным алфавитом, а добавляя новые константы, мы увеличиваем общий запас формул в языке и тем нарушаем полноту старых множеств.

Поэтому конструкции 1.5 и 1.6 придется по очереди провести счетное число раз, чтобы в конце концов доказать последнюю лемму

6.8. Лемма.

Если $\varepsilon \models \text{Ax}L$ непротиворечиво, то существует:

а) язык $L^{(\infty)}$, алфавит которого получается добавлением к алфавиту L множества новых констант мощности $\leq \text{card}(\text{алфавит } L) + \aleph_0$;

б) множество формул $\varepsilon^{(\infty)}$ в языке $L^{(\infty)}$, полное, непротиворечивое, содержащее ε и $\text{Ax}L^{(\infty)}$ и такое, что алфавит $L^{(\infty)}$ достаточен для него.

После того как лемма 6.8 будет доказана, теорема 6.2 получится из основной леммы, если применить ее к $\varepsilon^{(\infty)}$, а затем ограничить получившуюся модель на L и ε .

Приступим теперь к доказательству лемм. Основная лемма будет доказана в п. 6.9, леммы 6.5—6.7 — в п. 6.10—6.12.

6.9. Доказательство основной леммы. Начнем с явного построения интерпретации φ языка L , которая окажется моделью для ε .

а) Назовем постоянным термом такой терм в L , который не содержит переменных. Положим далее $M = \{\text{второй экземпляр} \mid \text{множества постоянных термов языка} = \{t \mid t \text{ — постоянные термы}\} \text{ и определим первичные отображения интерпретации } \varphi \text{ языка } L \text{ в } M \text{ условиями:}$

$$\varphi(c) = c \text{ для любой константы } c;$$

$$\varphi(f)(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_r) = f(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_r)$$

для любого символа операции ранга r и любых постоянных термов;

$$(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_r) \models \varphi(p),$$

если и только если $p(t_1, \dots, t_r) \models \varepsilon$ (для любого отношения p ранга r и постоянных термов $t_1, \dots, t_r$).

Докажем теперь следующее.

б) Утверждение. Пусть P — замкнутая формула. Имеем $|P|_\varphi = 1$ в том Γ только том случае, когда $P \models \varepsilon$. (Отсюда уже будет следовать, что φ -модель ε . В самом деле, если $P \models \varepsilon$ незамкнута, то ее замыкание $\forall x_1 \dots \forall x_n P$ выводимо из ε с помощью Gen и в силу полноты и непротиворечивости ε должно содержаться в ε . В силу утверждения, $\forall x_1 \dots \forall x_n P|_\varphi = 1$, откуда $|P|_\varphi = 1$).

Доказательство утверждения б). Проведем индукцию по общему числу кванторов и связей в формуле P . Будем писать $|P|$ вместо $|P|_\varphi$.

б₁) P — атомарная формула $p(t_1, \dots, t_n)$. Утверждение следует из определения $|P|$ и списка первичных отображений, потому что из замкнутости P вытекает, что термы t_i постоянны.

$$\text{б}_2) P = \neg Q.$$

Если $|P| = 1$, то $|Q| = 0$ и $Q \not\models \varepsilon$ по индуктивному предположению для Q в силу полноты $\neg Q \models \varepsilon$, т. е. $P \models \varepsilon$.

Если же $|P| = 0$, то $|Q| = 1$ и $Q \models \varepsilon$, откуда $\neg Q \not\models \varepsilon$ в силу непротиворечивости ε .

$$\text{б}_3) P = (Q_1 \rightarrow Q_2).$$

Сначала покажем, что если $|P| = 0$, то $P \models \varepsilon$. Действительно, в этом случае $|Q_1| = 1, |Q_2| = 0$; по индукции $Q_1 \models \varepsilon, Q_2 \not\models \varepsilon$; в силу полноты $\neg Q_2 \models \varepsilon$ тавтология $Q_1 \rightarrow (\neg Q_2) \rightarrow \neg(Q_1 \rightarrow Q_2)$ и два MP дают $\varepsilon \vdash \neg(Q_1 \rightarrow Q_2)$. В силу

полноты выводимые из ε замкнутые формулы содержатся в ε ; значит, $\neg(Q_1 \rightarrow Q_2) = \neg P \models \varepsilon$, так что $P \not\models \varepsilon$.

Теперь покажем, что если $P \not\models \varepsilon$, то $|P| = 0$. Действительно, тогда в силу полноты $\neg P = \neg(Q_1 \rightarrow Q_2) \models \varepsilon$. Тавтология $\neg(Q_1 \rightarrow Q_2) \rightarrow Q_1$ и $\neg(Q_1 \rightarrow Q_2) \rightarrow \neg Q_2$ и MP дают $\varepsilon \vdash \neg Q_1, \varepsilon \vdash \neg Q_2$, откуда в силу полноты $Q_1 \models \varepsilon, \neg Q_2 \models \varepsilon$. По индуктивному предположению, $|Q_1| = 1, |Q_2| = 0$, откуда $|P| = |Q_1 \rightarrow Q_2| = 0$.

$$\text{б}_4) P = Q_1 \vee Q_2 \text{ или } Q_1 \wedge Q_2.$$

С помощью тавтологий, выражающих $\vee, \wedge$ через $\rightarrow, \neg$, этот случай сводится к предыдущим, и мы опускаем его разбор.

$$\text{б}_5) P = \forall x Q.$$

Если x не входит в Q свободно, то $|P| = 1$ равносильно $|Q| = 1$, т. е., по индуктивному предположению, $Q \models \varepsilon$. Это включение, в свою очередь, равносильно включению $\forall x Q \models \varepsilon$ в одну сторону по Gen , в другую — по аксиоме специализации $t = x$ и MP .

Далее мы предполагаем поэтому, что x входит в Q свободно.

Сначала предположим, что $|P| = 1$, но $P \not\models \varepsilon$, и придем к противоречию.

Если $P \not\models \varepsilon$, то $\neg P \models \varepsilon$, т. е. $\neg \forall x Q(x) \models \varepsilon$. Так как алфавит L достаточен для ε , в ε содержится формула $\neg \forall x Q(x) \rightarrow \neg Q(c_Q)$. Применяя MP , получим $\varepsilon \vdash \neg Q(c_Q)$, откуда в силу непротиворечивости $\varepsilon, Q(c_Q) \not\models \varepsilon$. По индуктивному предположению $|Q(c_Q)| = 0$ ($Q(c_Q)$ замкнута). Это означает, что $|P|(\xi) = 0$ для $\xi \in \bar{M}$, если $x^\xi = c_Q$, что противоречит предположению $|P| = 1$.

Теперь предположим, что $|P| = 0$, но $P \models \varepsilon$, и придем к противоречию.

Так как $|P| = 0$, для некоторого $\xi \in \bar{M}$ имеем $|P|(\xi) = 0$. Найдем постоянный терм t из условия $x^\xi = t$. Очевидно, x не связывает t в Q , так что $0 = |Q(x)|(\xi) = |Q(t)|$, откуда $Q(t) \not\models \varepsilon$ по индуктивному предположению, и $\neg Q(t) \models \varepsilon$ в силу полноты.

С другой стороны, если $P \models \varepsilon$, т. е. $\forall x Q(x) \models \varepsilon$, то по аксиоме специализации $\forall x Q(x) \rightarrow Q(t)$ получаем $\varepsilon \vdash Q(t)$. Это несовместимо с непротиворечивостью ε по результату предыдущего абзаца.

$$\text{б}_6) P = \exists x Q.$$

Этот случай сводится к предыдущему с помощью аксиомы, выражающей $\exists$ через $\forall$ и отрицание, и мы опускаем его разбор.

6.10. Доказательство леммы 6.6. Чтобы вложить множество ε в полное непротиворечивое множество ε' , мы должны будем воспользоваться трансфинитной индукцией или эквивалентной ей леммой Цорна и леммой о дедукции для языка L , доказанной в п. 4, 5 гл. II.

Лемма Цорна будет применяться к множеству

$\mathcal{C}_\varepsilon = \{\text{множество множеств формул } \varepsilon' \text{ языка } L, \text{ содержащих } \varepsilon \text{ и непротиворечивых, которое упорядочено включением}\}.$

Проверки условий леммы Цорна. Пусть $\{\varepsilon'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{C}_\varepsilon$ для любых $\alpha, \beta \in I$ либо $\varepsilon'_\alpha \subseteq \varepsilon'_\beta$, либо $\varepsilon'_\beta \subseteq \varepsilon'_\alpha$. Тогда объединение $\bigcup_{\alpha \in I} \varepsilon'_\alpha$ принадлежит $\mathcal{C}_\varepsilon$. Действительно, иначе $\bigcup_{\alpha \in I} \varepsilon'_\alpha$ было бы противоречиво. Существовал бы вывод противоречия из конечного числа формул. Пусть они содержатся в $\varepsilon'_{\alpha_1}, \dots, \varepsilon'_{\alpha_n}$. Среди $\varepsilon'_{\alpha_1}, \dots, \varepsilon'_{\alpha_n}$ есть множество, содержащее остальные $n-1$; оно было бы противоречиво вопреки предположению.

Вывод из леммы Цорна: в множестве $\mathcal{C}_\varepsilon$ существует максимальный элемент, т. е. такое непротиворечивое множество $\varepsilon' \models \varepsilon$, что если $Q \not\models \varepsilon'$, то $\varepsilon' \cup \{Q\}$ противоречиво.

Утверждается, что ε' полно. Действительно, предположим, что P замкнута, $P \not\models \varepsilon', \neg P \not\models \varepsilon'$ и придем к противоречию. Из максимальности ε' следует, что

$\varepsilon \cup \{P\} \vdash R, \varepsilon' \cup \{P\} \vdash R$, где R — любая формула. По лемме о дедукции $\varepsilon' \vdash P \rightarrow R, \varepsilon' \vdash \neg P \rightarrow R$. Тавтология $(P \rightarrow R) \rightarrow ((\neg P \rightarrow R) \rightarrow R)$ и МР дают $\varepsilon' \vdash R$, что несомненно с непротиворечивостью ε' .

6.11. Доказательство леммы 6.7. Чтобы построить язык с достаточным алфавитом для непротиворечивого множества формул ε' , содержащего ε и $Ax L'$, поступим самым естественным образом.

а) Добавим к алфавиту языка L множество новых констант той же мощности, что и алфавит L . Получится язык L' .

б) Рассмотрим множество формул $\varepsilon \cup Ax L'$ в языке L' , где $Ax L'$ — все логические аксиомы языка L' . Оно непротиворечиво. Действительно, если бы существовал вывод противоречия из $\varepsilon \cup Ax L$ в L' , то следующая процедура превратила бы его в вывод противоречия из ε в L : возьмем конечное множество всех новых констант, входящих в формулы этого вывода, и заменим эти константы старыми переменными (из L), не входящими в формулы этого вывода. Легко проверить, что вывод противоречия останется выводом противоречия и будет проходить целиком в L .

в) В L' возьмем множество всех формул $P(x)$, содержащих ровно одну свободную переменную. Для каждой такой формулы P выберем свою новую константу c_P , определим формулу

$$R_P: \neg \forall x P(x) \rightarrow \neg P(c_P)$$

и положим окончательно

$$\varepsilon' = \varepsilon \cup Ax L' \cup \{R_P\}.$$

Очевидно, осталось проверить только, что ε' непротиворечиво. Если бы из ε' выводилось противоречие, то оно выводилось бы с участием конечного числа формул R_P . Поэтому достаточно проверить, что добавление одной формулы R_P не может привести к противоречию, если R_P добавляется к непротиворечивому множеству. Изменив обозначения, можно считать, что это непротиворечивое множество и есть $\varepsilon \cup Ax L'$.

Предположим обратное: $\varepsilon \cup Ax L' \cup \{R_P\}$ противоречиво. Тогда в частности $\varepsilon \cup Ax L' \cup \{R_P\} \vdash \neg R_P$ и по лемме о дедукции $\varepsilon \cup Ax L' \vdash R_P \rightarrow \neg R_P$. Тавтология $(R_P \rightarrow \neg R_P) \rightarrow \neg R_P$ и МР дают $\varepsilon \cup Ax L' \vdash \neg R_P$. Тавтология $(\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg P(c_P)) \rightarrow \neg R_P$.

Пользуясь тавтологиями $\neg(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow P \wedge Q, P \wedge Q \rightarrow P, P \wedge Q \rightarrow \neg Q$, получаем $\varepsilon \cup Ax L' \vdash \neg \forall x P(x), \varepsilon \cup Ax L' \vdash \neg R_P$.

Покажем, что тогда множество $\varepsilon \cup Ax L'$ противоречиво вопреки предположению.

Действительно, в выводе $P(c_P)$ из $\varepsilon \cup Ax L'$ всюду заменим c_P переменной y , не входящей в этот вывод. Получим вывод $P(y)$ из $\varepsilon \cup Ax L'$. После этого Ген, аксиома специализации, МР и снова Ген приведут к выводу $\forall x P(x)$.

6.12. Доказательство леммы 6.8. Пусть L — язык класса $\mathcal{L}_1$, ε — множество формул в нем. Вложим ε в полное непротиворечивое множество ε' , затем к (L, ε') применим лемму 6.7. Получившиеся язык и множество формул обозначим через L^*, ε^* . Положим, далее, по индукции

$$(L^{(0)}, \varepsilon^{(0)}) = (L, \varepsilon); (L^{(i+1)}, \varepsilon^{(i+1)}) = (L^{(i)*}, \varepsilon^{(i)*})$$

и наконец,

$$L^{(\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^{(i)}, \quad \varepsilon^{(\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{(i)}.$$

Множество $\varepsilon^{(\infty)}$ непротиворечиво, ибо иначе вывод противоречия получался бы "на конечном уровне", а все $\varepsilon^{(i)}$ непротиворечивы. Оно полно, ибо каждая замкнутая формула $L^{(\infty)}$ записывается в алфавите $L^{(i)}$ для какого-то i , а $\varepsilon^{(i+1)}$ содержит пополнение $\varepsilon^{(i)}$ в $L^{(i)}$. Наконец, алфавит $L^{(\infty)}$ достаточен для $\varepsilon^{(\infty)}$ по тем же соображениям.

Этим заканчивается доказательство леммы.

6.13. Вывод теоремы 6.2 из лемм. Пусть T — геделово множество формул в L . Применяя к нему лемму 6.8, вложим (L, T) в $(L^{(\infty)}, T^{(\infty)})$, где пара $(L^{(\infty)}, T^{(\infty)})$ удовлетворяет лемме 6.5. Пусть $\varphi^{(\infty)}$ — интерпретация $L^{(\infty)}$, существование которой утверждает лемма 6.5. Мощность $M^{(\infty)}$ не превышает $\text{card}(\text{алфавит } L) + \aleph_0$. Ограничение φ интерпретации $\varphi^{(\infty)}$ на L удовлетворяет условию $T \subseteq T_\varphi L$. Докажем, что $T = T_\varphi L$. Действительно, пусть $P \in T_\varphi L$. Если P замкнута, то $P \in T$, ибо в силу полноты либо P , либо $\neg P$ лежит в T , а второе несовместимо с φ -истинностью P . Если она незамкнута и $x_1, \dots, x_n$ — переменные, входящие в P свободно, то $\forall x_1 \dots \forall x_n P$ замкнута и принадлежит T . По аксиоме специализации, P выводима из $T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n P\}$, откуда $P \in T$ в силу замкнутости T относительно выводов.

Это доказывает первое утверждение теоремы.

Второе следует из аналогичного рассуждения: применяя его к ε вместо T , находим модель φ для ε ; тогда $\varepsilon \subseteq T_\varphi L$ и $T_\varphi L$ геделово.

6.14. Заметим в заключение, что если алфавит L содержит символ $=$, для которого в ε (или T) включены аксиомы равенства, то существует нормальная интерпретация, удовлетворяющая те-

ореме 6.2 и переводящая $=$ в равенство. Для доказательства следует построенную выше модель M профакторизовать по отношению эквивалентности $\varphi(=)$, как в п. 4.6.

7. СЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ И ПАРАДОКС СКОЛЕМА

«I know what you're thinking about», said Tweedledum, «but it isn't so, nohow». «Contrariwise», continued Tweedledee, «if it was so, it might be; if it were so, it would be: but as it isn't, it ain't. That's logic».

Lewis Carroll, Through the Looking Glass.

7.1. В этом параграфе изложена техника «врезания моделей», в частности, для $L_1\text{Set}$.

Пусть L — язык класса $\mathcal{L}$, $M \subseteq N$ — два множества (или класса в V), φ, ψ — интерпретации L в M, N соответственно, согласованные в очевидном смысле слова, так что φ есть расширение ψ . Интерпретационные классы $\bar{M}, \bar{N}$ естественно вложены: $\bar{M} \subseteq \bar{N}$.

7.2. **Определение.**
Формула P языка L называется (M, N) -абсолютной, если для всех $\xi \in \bar{M}$ имеем

$$|P|_M(\xi) = |P|_N(\xi).$$

Мы пишем $||_M$ вместо $||_\varphi$ и т. п.

Свойство абсолютности используется обычно так: если P абсолютна и к тому же N истинна, то она заведомо M -истинна. Стандартный механизм нарушения абсолютности: если формула $\exists x Q(x)$ N -истинна, значит в N есть объект со свойством Q , но в M такого объекта может не оказаться. Доказательство следующего факта описывает, как с этим бороться.

7.3. Предложение.

Пусть ε — множество формул языка L , φ — интерпретация L в N , $M_0 \subseteq N$ — некоторое подмножество. Существует множество M , $M_0 \subseteq M \subseteq N$, мощности $\leq \text{card } M_0 + \text{card } \varepsilon + \aleph_0$, такое, что все формулы из ε (M, N) -абсолютны.

7.4. Следствие (Левенсейм — Сколем).

Если алфавит L счетен и N является моделью ε , то в N существует счетная подмодель ε .

(Ее можно строить, сохранив абсолютность всех формул L , в частности истинность всех формул, которые были истинными.)

Доказательство. Пусть множество $M_i \subseteq N$, $i \geq 0$, уже определено. Положим

$$M_{i+1} = M_i \cup \{x^i \mid \xi^i = \xi' (x, P, \xi)\},$$

где x пробегает переменные L ; P — подформулы формул из ε ; ξ — точки из $\bar{M}_i$, а при фиксированной тройке (x, P, ξ) ξ является каким-нибудь одним изменением ξ по x со свойством $|P|_N(\xi') = 1$, если оно существует; в противном случае (x, P, ξ) не вносит вклад в M_{i+1} .

Положим далее $M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$. Утверждение о мощности M очевидно. Покажем теперь, что все подформулы формул из ε (M, N) -абсолютны. Проведем индукцию по числу кванторов в формуле. Для атомарных формул результат очевиден; индуктивный шаг, отвечающий конструкции новой формулы с помощью связок, также ясен. Квантор $\forall$ сводится стандартным способом в $\exists$.

Итак, пусть P абсолютна. Установим абсолютность $\exists x P$. Достаточно считать, что x входит в P свободно. Имеем для $\xi \in \bar{M}$:

$$|\exists x P|_N(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \xi' \in \bar{N}, \text{ изменение } \xi \text{ по } x, \\ & |P|_N(\xi') = 1, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$|\exists x P|_M(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если существует } \xi'' \in \bar{M}, \text{ изменение } \xi \text{ по } x, \\ & |P|_M(\xi'') = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Но условия за фигурной скобкой эквивалентны. Действительно, существует такое изменение η точки ξ по переменным, не входящим свободно в P , что $\eta \in \bar{M}_i$ для подходящего i . Тогда в случае $|\exists x P|_N(\xi) = 1$ существует $\xi' \in \bar{N}$ с $|P|_N(\xi') = 1$ существует $\eta' \in \bar{M}_{i+1}$ с $|P|_N(\eta') = |P|_M(\eta') = 1$, η' — изменение η по x в силу конструкции $\bar{M}_{i+1}$ и индуктивного предположения. Это доказывает требуемое.

7.5. Применим теперь следствие 7.4 к стандартной интерпретации $L_1\text{Set}$ в универсуме фон Неймана V и к множеству ε аксиом Цермело — Френкеля. Мы получим счетную модель N для этой системы аксиом, у которой, однако, будет один недостаток: если $X \subseteq N$, некоторые элементы X могут не принадлежать N , т. е. N не будет транзитивна. Следующий результат Мостовского показывает, как заменить N транзитивной счетной моделью.

Пусть $N \subseteq V$ — некоторый подкласс, $\varepsilon \subseteq N \times N$ — бинарное отношение на нем. Мы будем писать $X \varepsilon Y$ вместо $\langle X, Y \rangle \in \varepsilon$. Для любого $X \subseteq N$ положим

$$[X] = \{Y \mid Y \varepsilon X\}.$$

Предположим, что $[X] \subseteq V$ для всех $X \subseteq N$, т. е. что $[X]$ — множества, а не классы. Рассмотрим интерпретацию φ языка $L_1\text{Set}$ в классе N , для которой $\varphi(\in) = \varepsilon$, и $\varphi(=)$ — равенство.

7.6. Предложение (Мостовский).

Предположим, что аксиомы объемности и пустого множества Φ -истинны и в N не существует бесконечной цепочки $X_n \in X_{n-1} \dots \in X_1 \in X_0$.

Тогда существует единственный транзитивный класс $M \subseteq V$ и единственный изоморфизм $f: (N, \varepsilon) \rightarrow (M, \in)$.

Применяя это утверждение к счетной модели $(N, \in)$ аксиом Цермело — Френкеля из п. 7.5, мы найдем транзитивную счетную $(M, \in)$ — «маленький универсум». (Условие об обрыве цепочек выполнено в V , а не только в N ; $[X]$ есть подмножество $X \cap V \subseteq X$ и потому является элементом V .)

7.7. Доказательство предложения 7.6. Для каждого ординала α мы построим транзитивную рекурсив (см. приложение Универсум фон Неймана) множества $N_\alpha \subseteq N$, $M_\alpha \subseteq V$, согласованные изоморфизмы $f_\alpha: (N_\alpha, \varepsilon|_{N_\alpha}) \rightarrow (M_\alpha, \in|_{M_\alpha})$ и покажем, что $\bigcup N_\alpha = N$.

а) Из Φ -истинности аксиомы объемности и того, что $\varphi(=)$ — равенство, без труда получаем $X_1 = X_2 \Leftrightarrow [X_1] = [X_2]$ для всех $X_1, X_2 \in N$. Пусть $\emptyset_N \in N$ — интерпретация константы $\emptyset$ языка $L_1\text{Set}$. Согласно сделанному замечанию, с учетом истинности аксиомы пустого множества находим, что $\emptyset_N$ — единственный элемент N , для которого $[\emptyset_N] = \emptyset \in V$. Положим $N_0 = \{\emptyset_N\}$, $M_0 = \{\emptyset\}$; $f_0(\emptyset_N) = \emptyset$.

б) Рекурсивное построение. Пусть α — ординал. Допустим, что $N_\alpha, M_\alpha, f_\alpha$ уже построены. Положим:

$$N_{\alpha+1} = \{X \in N \mid [X] \subseteq N_\alpha \wedge X \notin N_\alpha\} \cup N_\alpha;$$

$$f_{\alpha+1}(X) = \{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X]\} \text{ для } X \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha; f_{\alpha+1}|_{N_\alpha} = f_\alpha;$$

$M_{\alpha+1}$ — образ $f_{\alpha+1}$.

Если β — предельный ординал, положим

$$N_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} N_\alpha; M_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha; f_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} f_\alpha.$$

Наконец, положим $M = \bigcup M_\alpha$, $f = \bigcup f_\alpha$ по всем ординалам.

в) Индуктивное доказательство. Мы проверим, что для каждого α :

в₁) N_α есть множество, т. е. $N_\alpha \in V$,

в₂) M_α — транзитивное подмножество V ,

в₃) f_α — изоморфизм $N_\alpha \subset M_\alpha$, переводящий ε в $\in$;

в₄) $N = \bigcup N_\alpha$.

Утверждения в₁) — в₃) для $\alpha = 0$ очевидны. Если они верны для всех $\alpha < \beta$ и β предельный, то они верны и для β . Остается проверить переход от α к $\alpha + 1$.

в₁) Очевидно, $[]$ есть функция из $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ в $\mathcal{P}(N_\alpha)$; в силу истинности аксиомы объемности существует обратная функция. Ее образ $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ есть мно-

жество, ибо N_α и, значит, $\mathcal{P}(N_\alpha)$ по индуктивному предположению является множеством.

в₂) Любой элемент из $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$ имеет вид $\{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X]\}$, где $X \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$, но тогда $[X] \subseteq N_\alpha$. Значит, элемент $f_\alpha(Y)$ этого элемента $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha$ принадлежит образу f_α , т. е. множеству $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$. Это доказывает транзитивность $M_{\alpha+1}$.

в₃) Проверим сначала, что $f_{\alpha+1}$ является биекцией. Сюръективность очевидна; пользуясь индуктивным предположением, убеждаемся, что достаточно проверить инъективность на $N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$. Но если $X_1, X_2 \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ и $f_{\alpha+1}(X_1) = f_{\alpha+1}(X_2)$, то $\{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X_1]\} = \{f_\alpha(Y) \mid Y \in [X_2]\}$. Пользуясь инъективностью f_α , получаем $[X_1] = [X_2]$, откуда $X_1 = X_2$.

После этого находим

$$Y \in X \Leftrightarrow Y \in [X] \Leftrightarrow f_\alpha(Y) \in f_\alpha([X]);$$

поэтому для $X \in N_{\alpha+1} \setminus N_\alpha$ отношение $Y \in X$ переходит в $f(Y) \in f(X)$. Это, очевидно, достаточно для завершения индукции.

в₄) Проверим, наконец, что $N = \bigcup N_\alpha$. Пусть $N' = N \setminus \bigcup N_\alpha$, допустим, что N' не пусто и придем к противоречию.

Если существует $X \in N'$ такой, что $[X] \cap N' = \emptyset$, то $[X] \cap N \subseteq \bigcup N_\alpha$; тогда $[X] \subseteq N_\alpha$ для некоторого α , и, значит, $X \in N_{\alpha+1}$, вопреки условию $X \in N' \setminus \bigcup N_\alpha$. Если же для всех $X \in N'$ имеем $[X] \cap N' \neq \emptyset$, тогда, выбирая последовательно $X_{n+1} \in [X_n] \cap N'$, получаем бесконечную цепочку $\dots X_{n+1} \in X_n \in \dots \in X_0$, вопреки условию теоремы.

г) Допустим, что есть два транзитивных подкласса M, M' и изоморфизм $g: (M, \in) \rightarrow (M', \in)$. Положим $M_\alpha = V_\alpha \cup M$, $M'_\alpha = V_\alpha \cup M'$. Очевидная индукция по α тогда показывает, что g — тождественное отображение.

Предложение доказано.

7.8. Парадокс Сколема.

Пусть M — транзитивная счетная модель аксиом Цермело — Френкеля. В этом случае следующие формулы M -истинны:

аксиома бесконечности;

аксиома степеней;

теорема Кантора об отсутствии отображений x на $\mathcal{P}(x)$ для любого множества x (она выводима из аксиом Цермело — Френкеля).

Так как при счетном X множество $\mathcal{P}(X)$ несчетно, то содержательные утверждения об M -истинности аксиомы степени в счетной модели M должны сильно отличаться от содержания утверждения об ее V -истинности.

Действительно, пусть в $L_1\text{Set}$ $y = \mathcal{P}(x)$ — сокращение формулы $\forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$. Пусть $\xi \in \bar{M}$, $x = X \in M$, $y = Y \in M$. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$|y = \mathcal{P}(x)|_M(\xi) = 1 \Leftrightarrow Y = \{Z \mid Z \subseteq X, Z \in M\},$$

т. е. роль $\mathcal{P}(X)$ в M играет $\mathcal{P}(X)_M = \mathcal{P}(X) \cap M$. В этом случае $\mathcal{P}(X)_M$ не более чем счетно, ибо M счетно, и с обычной точкой

зрения отображение счетного X на $\mathcal{P}(X)_M$ существует. Это не противоречит теореме Кантора потому, что ее M -истинность влечет лишь отсутствие таких отображений (графиков) в модели M . Вне нее они вполне могут существовать, но, добавляя один из них к M (и все, что нужно будет добавить для сохранения истинности аксиом), мы увеличиваем M , а вместе с этим $\mathcal{P}(X)_M$, и добавленное отображение перестает быть сюръективным отображением.

Все эти эффекты изменения смысла высказываний теории множеств в счетных моделях принято называть парадоксом Сколема.

Коэн был первым, кому удалось использовать свойства счетных моделей для доказательства невыводимости гипотезы континуума. В его моделях между ω_0 и $\mathcal{P}(\omega_0)_M$ лежат множества « M -промежуточной» мощности, хотя с внешней точки зрения и ω_0 , и $\mathcal{P}(\omega_0)_M$, и все остальные множества просто счетны. Но он добавил фундаментальную новую идею о релятивизации самого понятия истинности, и лишь постфактум можно представить себе положение дел в его моделях с такой простотой (см. детали в гл. III).

Сам Сколема и другие специалисты, по основаниям математически готовые работать со счетными, но не большими бесконечностями, рассматривали парадокс Сколема как проявление относительного характера теоретико-множественных понятий. В частности, существуют «разные континуумы» $\mathcal{P}(\omega_0)_M$, из которых ни один не совпадает с «настоящим» $\mathcal{P}(\omega_0)$.

С точки зрения тополога или аналитика, для которого континуум является рабочей реальностью, существование его счетных моделей просто означает ограниченность формального языка как средства имитации содержательных рассуждений. Мы уже встречались с подобными ограничениями при обсуждении формальных аксиом индукции в § 4.

Возможно, для психолога или философа науки наиболее интересно то, что любой математик может понять точку зрения другого (хотя и не обязан с ней соглашаться). Это означает, что речь математика A , доказуемо неспособная нести недвусмысленную информацию о континууме, способна все же привести мозговую информацию B в состояние, при котором он формирует представление о континууме, адекватное отвергнуть.

«Я значаю, что ты думаешь», — сказал Труляля Алисе, — но это вовсе не так, а совсем наоборот».

8. РАСШИРЕНИЯ ЯЗЫКА

8.1. В этом параграфе изучается формальный вариант «введения новых обозначений». При этом мы ограничимся рассмотрением только имен таких новых функций и констант, которые «доказуемо выражимы» в языке. Их добавление к алфавиту сокращает фор-

мальные выводы и записи формул, но не увеличивает множества выводимых формул, в чем и будет состоять основная теорема.

Практически, конечно, и сокращение записей, и удачные новые имена сразу делают доступными интуиции целые области фактов, оставшихся за ее пределами до того. Группы, обнаруженные Галуа в теории уравнений, — один из самых известных примеров. Гильберт в 1923 г. скептически отозвался о попытке преградить инфляцию в Германии введением новой денежной единицы Rentenmark: «Задачу нельзя решить, переименовав независимую переменную». Как замечает его биограф Констанс Рид [30], он был неправ: экономическое положение постепенно стабилизировалось.

Мы будем работать со следующими данными.

8.2. Пусть L' — некоторый язык класса $\mathcal{L}_1$ с равенством и бесконечным множеством переменных, $P'(x)$ — формула в L' , в которую x входит свободно. Напомним, что сокращенная запись $\exists! xP'(x)$ (читать: «существует единственный x со свойством P ») относится к формуле

$$\exists xP'(x) \wedge \forall y \forall u (P'(y) \wedge P'(u) \rightarrow y = u).$$

Пусть ε' — некоторое множество формул языка, содержащее AxL' аксиомы равенства и, возможно, дополнительные специальные аксиомы. Допустим, что из ε' выводима формула $\exists! xP'(x, y_1, \dots, y_n)$, где в P' нет свободных переменных, кроме $x, y_1, \dots, y_n$. В содержательном истолковании это значит, что формула P' определяет x как некую функцию от $y_1, \dots, y_n$ и в неформальном тексте мы вправе ввести для этой функции новое обозначение, скажем $x = f(y_1, \dots, y_n)$, и дальше пользоваться им.

Вот формальный вариант этой процедуры.

8.3. Предложение.

В условиях п. 8.2 обозначим через L язык класса $\mathcal{L}_1$, алфавит которого получается из алфавита L' добавлением нового символа операции f ранга n , если $n \geq 1$, или константы f при $n = 0$.

Пусть ε — наименьшее множество формул L , содержащее AxL , аксиомы равенства, ε' и формулу $P'(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)$.

Тогда существует явно описываемое отображение множества формул (богатого) языка L в множество формул (бедного) языка L' , которое формуле Q сопоставляет ее перевод Q' , со следующими свойствами:

- если f не входит в Q , то перевод Q совпадает с Q ;
- если Q выводима из ε в L , то Q' выводима из ε' в L' .

В частности, множество формул L' , выводимых из ε' в L' , совпадает с множеством формул L , не содержащих f и выводимых из ε в L .

Доказательство. Перевод формул. Пусть $n \geq 1$ (случай $n = 0$ разбирается аналогично, но проще, и мы его опустим). Добавление f сказывается прежде всего на увеличении множества

термов: в языке L есть термы $f(t_1, \dots, t_n)$, где f , в свою очередь, может входить в $t_1, \dots, t_n$, и т. д. Чтобы уместить количество упоминаний f при назывании $f(t_1, \dots, t_n)$, приходится говорить об идиомах: «такой x , что $P(x, t_1, \dots, t_n)$ ». Это и есть основная идея перевода формул. Дадим теперь индуктивное точное определение.

а) Терм $f(t_1, \dots, t_n)$ называется простым f -термом, если f не входит в $t_1, \dots, t_n$.

б) Пусть Q — атомарная формула в L . Если f не входит в Q , назовем ее своим собственным переводом. Если f входит в Q , то существует простой f -терм $f(t_1, \dots, t_n)$, входящий в Q . Возьмем самое первое вхождение простого f -терма в Q , выберем символ переменной x , не входящий в Q , подставим его вместо этого вхождения, получив формулу Q^* , и построим формулу

$$Q' : \exists x (P(x, t_1, \dots, t_n) \wedge Q^*(x)).$$

Применив эту процедуру к $Q'_{(1)}$, получим $Q'_{(2)}$ и т. д. После конечного числа шагов получится формула $Q'_{(n)} = Q'$, в которую f не входит, она и будет переводом Q .

в) Если Q не атомарная формула, она имеет вид $\neg Q_1$ или $Q_1 * Q_2$ (* — связь), или $\forall y Q_1$, или $\exists y Q_1$. Во всех этих случаях перевод Q получается из переводов ее составных частей автоматически — «добавлением штриха».

Перевод выводов. Задача состоит в следующем: пусть $Q_1, \dots, Q_n = Q$ — вывод Q из ε и пусть Q' — перевод Q . Нужно построить вывод Q' из ε' . Первое, что приходит в голову, — построить последовательность переводов $Q'_1, \dots, Q'_n$. Почему она может не быть выводом Q из ε , хотя MP и Gen переводятся тривиальным образом, а тавтологии переводятся тавтологиями же? Потому что в некоторых местах может стоять, например, логическая аксиома $\forall x R(x) \rightarrow R(t)$, которая после перевода перестает быть аксиомой, если f входит в R . Значит, мы должны дополнить последовательность $Q'_1, \dots, Q'_n$ выводами некоторых ее промежуточных членов из ε' , чтобы превратить ее в вывод Q' . Это довольно громоздкая комбинаторная процедура, с которой можно познакомиться по книге Клини [3, § 74]. (Мораль изложенного состоит в том, что новые обозначения действительно экономят время и место).

Вместо этого мы неэффективно докажем выводимость $\varepsilon' \vdash Q'$ с помощью критерия выводимости из п.б.3. Сформулируем его еще раз:

а) Если Q' истинна в любой модели ε' , то $\varepsilon' \vdash Q'$. Так как в ε' содержатся аксиомы равенства, мы можем слегка усилить этот критерий;

б) Если Q' истинна в любой нормальной модели ε' , то Q истинна в любой модели ε' .

Напомним, что в нормальной модели « $\equiv$ » интерпретируется как равенство. С другой стороны, как показано в § 4, в любой модели « $\equiv$ » интерпретируется как отношение эквивалентности, совместимое с интерпретацией всех констант, функций и отношений. Факторизация по нему приводит к нормальной модели, причем значения истинности всех формул остаются прежними.

в) Нормальные модели ε' (в языке L') совпадают с нормальными моделями ε (в языке L).

Точнее говоря, между ними устанавливается следующее взаимно-однозначное и естественное соответствие, сохраняющее функции истинности. Ограничимся разбором случая $n \geq 1$.

Пусть φ — нормальная интерпретация L' в M , для которой $Q' \models \varphi = 1$ при всех $Q' \in \varepsilon'$. В частности, поскольку $\varepsilon' \vdash \exists! x P'$,

$$\exists! x P' (x, y_1, \dots, y_n) \models \varphi = 1.$$

Вычисляя левое значение истинности в точке $\xi \in \bar{M}$ и пользуясь нормальностью модели, получаем, что отсюда вытекает, что любой $n = ke \langle y_1^k, \dots, y_n^k \rangle \in M^n$ отвечает единственное значение $x^k \in M$, такое, что $P' (x^k, y_1^k, \dots, y_n^k) \models \varphi = 1$ (запись нестандартна, но смысл очевиден).

Будем тогда интерпретировать f (новый символ в языке L) как функцию $M^n \rightarrow M$, которая переводит $\langle y_1^k, \dots, y_n^k \rangle$ в x^k . Очевидно, мы получим нормальную модель ε в языке L .

Наоборот, ограничивая любую нормальную модель ε на L' , получим нормальную модель ε' .

г) Если Q выводима из ε в L , то Q' истинна в любой нормальной модели ε' . Действительно, Q истинна в любой модели ε множества ε . Чтобы доказать истинность Q' начнем с атомарных Q , содержащих f .

В обозначениях первой части доказательства (перевод формул) построим Q^* и затем $Q'_{(1)} = \exists x (P(x, t_1, \dots, t_n) \wedge Q^*(x))$. Для проверки того, что $Q'_{(1)} \models \varphi = 1$, нужно для каждой точки $\xi \in \bar{M}$ найти такое изменение ξ' точки ξ по x , что $P \models \varphi (\xi') = 1$, $Q^* \models \varphi (\xi') = 1$.

Найдем x^k из условия $P(x^k, t_1^k, \dots, t_n^k) \models \varphi = 1$.

Описание интерпретации f , данное в пункте в), показывает, что тогда $Q^* \models \varphi (\xi') = Q \models \varphi (\xi) = 1$.

Таким образом, переход от Q к $Q'_{(1)}$ сохраняет истинность; итерируя его, находим, что Q' истинна для атомарных Q . Наконец, индукция по числу связей и кванторов доказывает истинность Q' в общем случае.

Объединяя результаты а) — г), получаем окончательно $\varepsilon' \vdash Q'$, что завершает доказательство предложения 8.3.

8.4. Примеры. а) В языке $L_1 \text{Set}$ из аксиомы объемности и аксиомы пары (а также аксиом равенства и логических аксиом) выводима формула

$$\exists! x \forall z (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = v).$$

Пользуясь предложением 8.3, убеждаемся, что если добавить к $L_1 \text{Set}$ новый символ функции ранга 2 — «неупорядоченная пара» $\{ \}$, то множество формул языка $L_1 \text{Set}$, выводимых из аксиом Цермело — Френкеля в этом расширении, не изменится.

Поэтому мы можем спокойно пользоваться не только сокращенной записью « $x = \{u, w\}$ », как это делалось раньше, но и терминами, составленными с помощью символа $\{ \}$. В частности, (пользуясь $\{ \}$ не нормализованно, а в соответствии с традицией):

б) мы можем ввести обозначения для конечных ординалов $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$

уже как термы в нашем расширении языка, и затем «погрузить» формальную арифметику в формальную теорию множеств.

в) Выведа из аксиом Цермело — Френкеля формулу $\exists! x$ (« x ординал» $\wedge$ « x не конечен» $\wedge$ « $\forall$ ординал $y < x$ конечен»), мы сможем ввести новую константу ω и продолжать вводить имена новых и новых ординалов, которые доказуемо однозначно характеризуются формулами языка $L_1\text{Set}$ (или его расширения, полученного таким же способом).

Этой новой свободой действий мы будем пользоваться в гл. III.

9. НЕВЫРАЗИМОСТЬ ИСТИННОСТИ: ЯЗЫК SELF

9.1. Суждения типа «парадокс лжеца», будучи смоделированы в формальных языках, приводят к важным теоремам о принципиальной ограниченности выразительных и доказательных средств таких языков. К самым известным из них принадлежат теорема Тарского о невыразимости множества истинных формул арифметики и теорема Гёделя о невозможности эффективно аксиоматизировать арифметику. Теореме Тарского посвящены ближайшие три параграфа. Наше изложение основано на изысканной работе Шмюльяна [31].

В этом параграфе описан крайне элементарный язык SELF (не лежащий в классе $\mathcal{L}_1$), предназначенный для самоописания, на котором вышло демонстрируется идея конструкции. В § 10 введен новый язык арифметики SAG , столь же выразительный, как $L_1\text{Ag}$, но также не принадлежащий классу $\mathcal{L}_1$: его синтаксис приближен к синтаксису SELF, что резко упрощает доказательство. Наконец, в § 11 теорема Тарского доказана для SAG методом Шмюльяна.

9.2. Язык SELF (Smullyan's Easy Language For selfreference).

Алфавит SELF: $E, *$ (симметричные кавычки); r (отношение ранга 1); $\neg$ (отрицание).

Синтаксис SELF. К отмеченным выражениям принадлежат: ярылыки, экспонаты, формулы и имена.

Ярылык любого выражения P — это $*P*$ (P в кавычках).

Экспонат любого выражения P — это $P * P *$ («вещь с ярыком»).

Формулы — это выражения вида $rE \dots E * P *$ и $\neg rE \dots E * P *$. Здесь E стоит на $k \geq 0$ местах после r . Сокращенная запись: $rE^k * P *$ или $\neg rE^k * P *$.

Наконец, введем бинарное отношение на множестве всех выражений: «быть именем». Оно определяется рекурсивно:

а) ярылык P является именем P ;

б) если P — имя Q , то EP — имя экспоната Q , т. е. имя выражения. $Q * Q *$.

9.3. Замечания. а) Если P есть имя Q , то экспонат Q имеет по крайней мере два разных имени: $EP, *Q * Q *$. Таким образом, выражение может иметь несколько имен. Наоборот по имени выражение восстанавливается однозначно: имена имеют вид $E^k *$ $*P *$, $k \geq 0$.

Мы будем писать $N(Q)$ вместо «одно из имен Q ».

б) Каждая формула имеет вид $rN(Q)$ (или $\neg rN(Q)$). В следующем пункте мы ее интерпретируем как высказывание «выражение Q (не) обладает свойством R », и естественно, что, говоря о Q , формула «называет Q по имени».

в) Выражение $E * E *$ является одним из двух своих имен. Точно так же формула $rE * rE *$ «говорит о себе самой» (п. 9.5). Язык SELF и был сконструирован так, чтобы эти эффекты самоописания проявились при возможно более скромных выразительных средствах.

9.4. Стандартные интерпретации. Чтобы определить одну из стандартных интерпретаций языка SELF, выберем любое множество (свойство) R выражений языка и введем функцию истинности $| _R$ на его формулах соглашением

$$1 - | \neg rN(Q) |_R = | rN(Q) |_R = \begin{cases} 1, & \text{если } Q \in R, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем говорить, что формула R -истинна (R -ложна), если значение $| _R$ на ней равно 1 (0).

9.5. Теорема о невыразимости.

Для любого свойства R

$$R \cap \{\text{формулы}\} \neq \begin{cases} R\text{-истинные формулы,} \\ R\text{-ложные формулы.} \end{cases}$$

Доказательство. а) Формула $Q = \neg rE * \neg rE * R$ -истинна $\Leftrightarrow rE * \neg rE * R$ -ложна $\Leftrightarrow Q \notin R$, ибо $E * \neg rE *$ есть имя экспоната $\neg rE$, т. е. Q . Таким образом, Q не может одновременно лежать в R и быть истинной, что доказывает первую часть теоремы.

Связь с парадоксом лжеца становится ясной, если учесть, что Q говорит о себе: «Я обладаю свойством R ».

б) Аналогично формула $rE * rE *$ говорит о себе: «Я обладаю свойством R » и потому не может одновременно лежать в R и быть R -ложной.

10.1. В этом параграфе описан язык арифметики SAg и его стандартная интерпретация. Главное отличие SAg от L_1Ag состоит в возможности формировать «классовые термы» — имена некоторых множеств натуральных чисел. Точнее, если $P(x)$ — формула SAg с одной свободной переменной x , то выражение $x(P(x))$ в SAg именует множество $\{x \in N \mid P(x) \text{ истинно}\}$, а выражение $x(P(x))\bar{k}$, где $\bar{k}$ -терм — имя целого числа $k \geq 1$, именует высказывание « k удовлетворяет P ». Это расширение средств выражения в SAg по сравнению с L_1Ag не увеличивает класс подмножеств в UN^* , которые выразимы формулами, но приближает синтаксис SAg к синтаксису $SELF$ настолько, что позволяет имитировать доказательство теоремы 9.5.

Кроме того, алфавит SAg по сравнению с алфавитом L_1Set несколько изменен и сокращен, но это сделано лишь для упрощения описаний синтаксиса и логики SAg не обедняет.

10.2. Алфавит SAg : x (переменная); ' (штрих для формирования счетного множества переменных $x, x', x'', \dots$); $\cdot$ (умножение — операция ранга 2); $\uparrow$ (возвышение в степень, как в АЛГОЛе, — операция ранга 2); $=$ (равенство); $\downarrow$ (связка — конъюнкция отрицаний); $()$ — скобки; $\bar{1}$ (константа единица).

10.3. Синтаксис и интерпретация SAg . Из-за разрешения формировать классовые термы $x(P(x))$ и формулы $x(P(x))\bar{k}$ описание синтаксиса сложнее, чем в языках класса $\mathcal{L}_1$.

Рекурсией по целому числу $i \geq 0$ мы определим две последовательности множеств выражений: Tm_{2i} (термы ранга $\leq 2i$) и $\Phi_{L_{2i+1}}$ (формулы ранга $\leq 2i+1$). (Получно двойной индукцией — по рангу терма или формулы, а внутри множества Tm_{2i} , $\Phi_{L_{2i+1}}$ — по длине устанавливается лемма об однозначности чтения, на которую опираются определения в свободных (замкнутых) вхождениях и функций истинности. Ничего нового по сравнению с § 1 здесь нет, и мы оставим эти детали читателю).

Параллельно с синтаксисом описывается стандартная интерпретация SAg в N . Чтобы интерпретировать выражения со свободными переменными, нужно фиксировать точку $\xi \in N^N = N \times N \times \dots$, которую мы будем отождествлять с бесконечным вектором с натуральными координатами: на k -м месте находится значение k -й переменной $(x', \dots, x'')^{\xi}$ ($k = 1$ штрих).

а) Tm_0 — *числовые термы*: *наименьшее множество выражений, содержащее переменные $x, x', x'', \dots$, имена натуральных чисел $\bar{1}, \bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}, \dots$ и замкнутое относительно образования выражений $(t_1) \cdot (t_2), (t_1) \uparrow (t_2)$, где $t_i \in Tm_0$.*

Вместо $x', \dots, (k = 1$ штрих) будем кратко писать x_k ; вместо $\bar{1}, \dots, \bar{1}$ ($k \geq 1$ единиц) будем писать $\bar{k}$.

Терм $\bar{k}$ интерпретируется как k (независимо от ξ); x_k^{ξ} — k -я координата ξ ; если $t_1^{\xi}, t_2^{\xi} \in N$ уже определены, то $[(t_1) \cdot (t_2)]^{\xi} = t_1^{\xi} t_2^{\xi}$, $[(t_1) \uparrow (t_2)]^{\xi} = (t_1^{\xi})^{t_2^{\xi}}$.

Вхождения выражений $x_k = x', \dots, x''$ в любой терм из Tm_0 , очевидно, не перекрываются. Все они считаются свободными.

б) Φ_{L_1} — *наименьшее множество выражений, содержащее все выражения вида $t_1 = t_2$ (где $t_i \in Tm_0$) и замкнутое относительно образования выражений $(P) \downarrow (P_2)$, где $P_i \in \Phi_{L_1}$.*

Иными словами Φ_{L_1} — логическое замыкание множества атомарных формул $\{t_1 = t_2 \mid t_i \in Tm_0\}$.

Выбор точки ξ определяет значение истинности любой формулы $P \in \Phi_{L_1}$ рекурсией по числу вхождений связи $\downarrow$.

$$|t_1 = t_2|(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_1^{\xi} = t_2^{\xi}, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$|(P_1) \downarrow (P_2)|(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } |P_1|(\xi) = |P_2|(\xi) = 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Все вхождения переменных в элементы Φ_{L_1} не перекрываются и считаются свободными.

Пусть теперь $i \geq 1$ и множества Tm_{2k-2} , $\Phi_{L_{2k-1}}$ определены для $k \leq i$ вместе с интерпретациями и противопоставлением свободных замкнутых вхождений.

Определим очередные множества следующими соглашениями.

а) Tm_{2i} — *классовые термы ранга $\leq 2i$* :

$$Tm_{2i-2} \cup \{x_k(P) \mid k \geq 1, P \in \Phi_{L_{2i-1}}\}$$

(при $i=1$ не нужно включать Tm_0).

Интерпретация:

$$(x_k(P))^{\xi} = \{x_k^{\xi} \mid \text{пробегает те изменения } \xi \text{ по } x_k, \text{ для которых } |P|(\xi) = 1\}.$$

Все вхождения переменной x_k в $x_k(P)$ считаются связанными, вхождения остальных переменных — такие же, как в P .

б) $\Phi_{L_{2i+1}}$ — *логическое замыкание множества выражений*

$$\Phi_{L_{2i-1}} \cup \{x_k(P) = x_k(Q) \mid k \geq 1;$$

$$P, Q \in \Phi_{L_{2i-1}}\} \cup \{T\bar{k} \mid k \geq 1, T \in Tm_{2i}\}.$$

Функция истинности: положим $x_k(P) = T_1$, $x_k(Q) = T_2$; тогда

$$[x_k(P) = x_k(Q)](\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } T_1 = T_2, \text{ как подмножества } N; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$|T\bar{k}|(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in T^{\bar{k}}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

На логическое замыкание функция | | продолжается тем же способом, что в п. 10.3 б).
Все входящие переменных в $x_k(P) = x_k(Q)$ и $T\bar{k}$ те же, как в соответствующий классовой терм. Композиция с помощью связи $\downarrow$ не меняет качества входящего.

Как в п. 2.10, доказывается, что $|P|(\xi)$ зависит только от ξ — значений переменных, имеющих свободные вхождения в формулу $P \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \Phi_{L_1, Ag}^{i+1}$.

На этом описание синтаксиса и семантики SA_g закончено.

В заключение покажем, что классы множеств в UN^r , выраженных формулами L_1Ag и SA_g, совпадают. Этот результат не используется в доказательстве теоремы Тарского в следующем параграфе. Однако он сам и метод его доказательства полезны.

Пусть L_1Ag имеют счетное множество переменных. Обозначив их $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ и отождествив x_i с x'_i ($i=1$ штрих), мы очевидным способом отождествим также интерпретационные классы для L_1Ag и SA_g. Утверждение о равновыразимости немедленно получится тогда из следующего более сильного факта:

10.4. Предложение.

Можно эффективно определить два отображения перевода

$$\{ \text{формулы } L_1Ag \} \rightleftharpoons \{ \text{формулы SA}_g \}$$

а) в каждой точке ξ значения истинности любой формулы и ее перевода совпадают;

б) множества свободных переменных любой формулы и ее перевода совпадают.
Заметим, что отображения, которые мы определим, не будут взаимно-обратными!

Доказательство.

а) Перевод $L_1Ag \rightarrow SA_g$. Перевод формулы P будем обозначать « P ». Сначала переведем атомарные формулы, затем проведем рекурсивно по длине. В алфавите SA_g нет сложения, зато есть умножение и возведение в степень, это позволяет вместо $z = x + y$ писать $2^z = 2^x \cdot 2^y$.

б) Атомарные формулы. Они имеют вид $t_1 = t_2$. «Выполнив действия», заменим каждый ненулевой терм в L_1Ag «нормализованным термом» — многоочленным вида $\Sigma x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, где одночлены записаны в виде $(\dots ((x_1 \cdot x_1) \cdot \dots) \cdot x_n) \dots$, расположены в словарном порядке и отделены скобками $(\dots ((m_1 + m_2) + m_3) + \dots)$. Ясно, как такому терму поставить в соответствие терм $n\bar{2} \uparrow t_4$ в SA_g: скажем,

$n\bar{2} \uparrow ((x_1) \cdot (x_2) + x_2)$ есть $(\bar{2} \uparrow (x_1) \cdot (x_1)) \cdot (\bar{2} \uparrow (x_2))$. Перевод $n\bar{2} \uparrow \bar{0}$ по определению есть 1. После этого перевод формулы $t_1 = t_2$ по определению будет $n\bar{2} \uparrow t_1 = n\bar{2} \uparrow t_2$. Ясно, что они имеют одни и те же переменные и истинны в одних и тех же точках ξ .

а₂) Если « Q », « Q_1 », « Q_2 » уже определены, то « $\neg Q$ » определяется как « $Q \downarrow nQ$ ». Аналогично строится « $Q_1 \downarrow Q_2$ » для остальных связей (ср. отступление о синтаксисе в гл. 1).

а₃) Если « Q » определена, то « $\forall x_k Q$ » определяется как

$$x_k(\langle Q \rangle) = x_k(x_k = x_k).$$

Обе формулы истинны в точке ξ , если и только если Q (и « Q ») истинны во всех изменениях ξ' точки ξ по x_k .

Свободные переменные у них общие, ибо по индукции можно предположить, что это так для Q и « Q ».

а₄) « $\exists x_k Q$ » по определению совпадает с « $\neg \forall x_k \neg Q$ ».

б) Перевод SA_g — L_1Ag .

Перевод P по-прежнему будем обозначать « P », хотя на этот раз P будет формулой SA_g, а « P » — формулой L_1Ag .

Тонким местом является перевод формулы $x_1 = x_2 \uparrow x_3$. Известно, хотя и не слишком легко доказать [12], что он существует и даже может быть взят в виде $\exists x_4 \dots \exists x_n p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где p — атомарная формула L_1Ag . Здесь мы примем этот факт на веру и выберем некоторый перевод « $x_1 = x_2 \uparrow x_3$ » раз навсегда.

б₁) Перевод формулы из Φ_0 . Следующие правила дают рекурсивное определение:

« $t_1 = t_2$ » имеет тот же вид, если $t_1, t_2 \in \{\text{переменные}\} \cup \{\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \dots\} + \{\bar{1} + \dots\}$.
« $x_k = t_1 \cdot t_2$ » имеет вид $\exists x_i \exists x_j (n x_i = t_1 \wedge n x_j = t_2 \wedge x_k = x_i \cdot x_j)$
« $x_k = t_1 \uparrow t_2$ » имеет вид $\exists x_i \exists x_j (n x_i = t_1 \wedge n x_j = t_2 \wedge n x_k = x_i \uparrow x_j)$, где x_i, x_j — первые две переменные, не входящие в t_1, t_2 .

Аналогично переводятся формулы с переставленными правыми и левыми частями, а также с $\bar{1} \dots \bar{1}$ вместо x_k . Далее, положим

$$n t_1 = t_2 \text{ имеет вид } \exists x_i (n x_i = t_1 \wedge n x_i = t_2),$$

где x_i — первая переменная, не входящая в t_1, t_2 , если только ни один из термов t_1, t_2 не является переменной или $\bar{1} \dots \bar{1}$.

Ясно, что функция истинности и множество свободных переменных при таком переводе сохраняются.

б₂) Пусть формулы из $\Phi_{L_1, Ag-1}$ уже переведены. Положим

$$n x_k(P_1) = x_k(P_2) \text{ есть } \forall x_k (n P_1 \leftrightarrow n P_2);$$

$$n x_k(P) \bar{n} \text{ есть } n P(n),$$

где справа $\bar{n} = (\dots (\bar{1} + \bar{1}) + \dots)$ подставлен вместо всех свободных вхождений x_k в « P ». Это завершает доказательство.

11. НЕВЫРАЗИМОСТЬ ИСТИННОСТИ: ТЕОРЕМА ТАРСКОГО

11.1. Язык SA_g интерпретируется в N , не во множестве своих формул, как SELF. Чтобы иметь возможность определить вырази-

мое множество формул, мы занумеруем их (некоторыми) целыми числами следующим способом.

Символы алфавита (их девять) занумеруем целыми числами от 1 до 9 в любом порядке, но так, чтобы $\bar{1}$ имела номер 9. После этого положим $(a_i \in (\text{алфавит } \text{SAG}), v(a_i) \text{ — номера } a_i)$:

$$\text{номер } (a_1, \dots, a_k) = n(a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k v(a_i) \cdot 10^{k-i} + 1.$$

Иными словами, номер выражения получится, если заменить все входящие в него символы соответствующими арабскими цифрами (а $\bar{1}$ заменить на 9!), затем прочесть полученную десятичную запись и увеличить это число на единицу. Ясно, что по номеру выражение восстанавливается однозначно.

Ярлыком выражения P назовем имя номера P в SAG , т. е. $\bar{1} \dots \bar{1} (n(P) \text{ раз})$. Будем обозначать ярлык P через $*P*$, как в SELF (но теперь это — сокращенная запись).

Экспонатом P назовем выражение $P * P *$.

11.2. Определение.

Пусть $P(x)$ — формула SAG с одной свободной переменной x .

а) Выражение Q удовлетворяет P , если номер Q лежит во множестве $\{k | P(\bar{k})\}$ истинна;

б) выражение Q выставлено в P , если экспонат Q удовлетворяет P .

11.3. Лемма. Пусть $P(x)$, как в п. 11.2. Обозначим через $P_E(x)$ формулу $P((\bar{1}\bar{0}) \uparrow (x))$ Терм $x \cdot 10^{x^4}$ подставлен вместо всех свободных вхождений x . Тогда множество выражений, удовлетворяющих P_E , совпадает с множеством выражений, выставленных в P .

Доказательство. Если Q имеет номер k , то экспонат Q имеет номер $k \cdot 10^k$ (вот зачем $\bar{1}$ имеет номер девять):

$$n(Q * Q *) = n(\underbrace{Q \bar{1} \dots \bar{1}}_{n(Q) \text{ раз}}) = (n(Q) - 1) \cdot 10^{n(Q)} +$$

$$+ \underbrace{9 \dots 9}_{n(Q) \text{ раз}} + 1 = n(Q) \cdot 10^{n(Q)}.$$

Значит, номер Q удовлетворяет P_E в том и только в том случае, когда номер экспоната Q удовлетворяет P .

11.4. Теорема.

Для любой формулы $P(x)$, как в п. 11.2, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Множество истинных формул, удовлетворяющих } P \end{array} \right\} \neq \left\{ \begin{array}{l} \text{Множество ложных формул.} \end{array} \right\}$$

Доказательство. Рассмотрим формулу Тарского — Шмюльяна $S: xP_E * xP_E *$. Согласно определениям, имеем (учесть, что xP_E — классовой терм, а $*xP_E*$ — имя числа):

S истинна $\Leftrightarrow xP_E$ удовлетворяет $P_E \Leftrightarrow xP_E$ выставлена в P (лемма 10.3) $\Leftrightarrow$ экспонат xP_E удовлетворяет $P \Leftrightarrow S$ удовлетворяет P .

Значит, либо S не ложна и удовлетворяет P , либо ложна и не удовлетворяет P ; поэтому множество удовлетворяющих P формул не может совпадать с множеством ложных формул.

Как в § 9, формула S говорит: «Я удовлетворяю P ». Аналогично, формула

$$x((P) \downarrow (P))_E * x((P) \downarrow (P))_E$$

говорит: «Я не удовлетворяю P » и потому либо удовлетворяет P , либо не истинна. Теорема доказана.

11.5. Лемма 11.3 — это, конечно, чистое волшебство. Десятичная система тут ни при чем, и $\bar{1}$ не обязательно было нумеровать девяткой, но так все гораздо красивее.

Более общо, пусть $?Ag$ — любой язык арифметики с конечным алфавитом, содержащим алфавит SAG . Пусть правила образования и стандартной интерпретации формул в $?Ag$ расширены как угодно по сравнению с SAG . Требуется лишь, чтобы термы и формулы SAG сохранили прежний смысл и для любой формулы $P(x)$ в $?Ag$ со свободной переменной x выражение $x(P(x))$ было формулой в $?Ag$ и интерпретировалось бы по тому же рецепту, что и в SAG . (Например, можно добавить к SAG знак «+», связи и кванторы и разрешить строить формулы также по правилам $\mathcal{L}$: так мы вложим $L_1 Ag$ в $?Ag$.)

Тогда для $?Ag$ справедлива теорема о невыразимости п. 11.4.

Нумерацию нужно выбрать так: если m — число элементов алфавита $?Ag$, v — нумерация символов, при которой $v(\bar{1}) = m$, то

$$n(a_1 \dots a_k) = \sum_{i=1}^k v(a_i) (m + 1)^{k-i} + 1.$$

Тогда в прежних соглашениях

$$n(Q * Q *) = n(Q \bar{1} \dots \bar{1}) = \underbrace{(n(Q) - 1)}_{n(Q) \text{ раз}} (m + 1)^{n(Q)} + \\ + m \sum_{j=0}^{n(Q)-1} (m + 1)^j + 1 = n(Q) (m + 1)^{n(Q)}$$

и, определив $P_E(x)$ как $P((x) \cdot ((m+1) \uparrow (x)))$, мы без дальнейших изменений получим лемму 11.3 и теорему Тарского для Ag .

11.6. Комментарий. а) Если бы теорема Тарского была не верна и для какой-то формулы $P(x)$ оказалось, что $\{Q|Q - \text{формула и } P(n(Q)) \text{ истинна}\}$ совпадает с множеством всех истинных формул арифметики, это означало бы, что все теоретико-числовые вопросы сводятся к серии однократных задач. Вместо того, чтобы спрашивать, верна ли проблема номер n , можно было бы спрашивать, истинно ли утверждение $P(\bar{n})$.

Хотя такая массовая проблема может иметь значительную сложность (и в определенном смысле быть «бесконечно сложной»), теорема Тарского утверждает, что вся арифметика является еще гораздо более разнообразной.

б) Пока у нас остается повод для подозрения, что все дело в «слишком удачной» нумерации формул. Это не так. Можно показать, что теорема Тарского остается верной для любой нумерации, при которой формула и ее номер эффективно восстанавливаются друг по другу.

в) Естественно задаться вопросом, выразимо ли множество номеров *доказуемых* или *выводимых* формул (при каком-нибудь определении аксиом и правил вывода, скажем, в SAg). Ответ: да, *выразимо*.

Приведем интуитивные соображения в пользу этого.

Как бы мы ни определили понятие доказуемости, можно естественно считать, что оно обладает следующим свойством: *существует алгоритм* (скажем, программа на ЭВМ), *который по любому тексту данного языка распознает, является ли этот текст доказательством и какой именно формулы*.

Напишем теперь программу, которая будет подряд в словарном порядке строить тексты на языке, проверять, являются ли они доказательствами, и вычислять номер доказанной формулы в случае положительного ответа. График функции (номер доказательства) $\rightarrow$ (номер доказанной формулы) выразим в L_1Ag , грубо говоря, потому, что машинная логика и арифметика заложены в L_1Ag . Поэтому множество номеров доказуемых формул выразимо в L_1Ag , в SAg или в любом языке Ag , как в 11.5.

Объединяя это обсуждение с теоремой Тарского, получаем следующую форму теоремы Геделя:

11.7. Теорема Геделя о неполноте арифметики.

В любом языке арифметики типа Ag и при любом определении выводимости, при котором множество (номеров) выводимых формул выразимо,
 {истинные формулы} $\neq$ {выводимые формулы}.

Отступление об автореферентности

В естественных языках лингвисты лишь недавно отметили класс так называемых перформативных высказываний. Их характерной чертой является автореферентность — «способность соотноситься как со своим референтом с той реальностью, которую оно само создает, в силу того, что она производится в условиях, которые делают его действием» (*Э. Бенвенист*). К ним относятся: «клянусь», когда само высказывание составляет акт клятвы; «объявляю всеобщую мобилизацию», «назначаю вас директором», когда эти высказывания составляют акт власти, уполномоченной совершать называемые действия.

Пристальное рассмотрение семантики перформативных высказываний выявляет в них императивный оттенок, хотя и выраженный изъяснительным наклонением глаголов.

В связи с этим интересно сопоставить роль автореферентности в формальных и алгоритмических языках (ср. п. 1.2 гл. I). В формальных языках (и вообще языках описания) она приводит к логическим кругам, парадоксам или при попытках избежать круга к демонстрации неполноценности. Напротив, в алгоритмических языках (и вообще в языках и системах управления) автореферентность является важнейшим приемом разворачивания финитной программы в потенциально сколь угодно длинный процесс (циклы); она участвует в актах управления (обратная связь) и принадлежит к числу фундаментальных возможностей систем.

Подобная двусмысленность прослеживается и в психологии: ср. противопоставление *самонализ* — *самовоспитание*.

Наконец, автореферентность может играть роль в генетической обусловленности процессов старения (биологических и социальных систем). Цикл с самообращением, реализованный многократно, приводит к эрозии места обращения.

12. КВАНТОВАЯ ЛОГИКА

12.1. Последний параграф главы посвящен некоторым физическим фактам и математическим конструкциям, принятым для их описания. В частности, обсуждается теорема фон Неймана о невозможности ввести скрытые параметры в квантовомеханическую картину мира. Этот материал не вполне традиционный для курса логики, имеет к нему двойное отношение.

Во-первых, теорема фон Неймана является редким примером метафизического утверждения. Она относится к свойствам языка, а не микромира, как, скажем, теорема Гарского в метаматематике. Этим объясняется ее изолированное положение в физике и наш интерес к ней здесь.

Во-вторых, анализ квантово-механических эффектов обнаружил глубокое реальное расхождение внутренних логик макро- и микромира. Хотя передача этих различий средствами естественного языка и естественной логики мучительно трудна и в конечном счете всегда оставляет чувство неудовлетворенности, попытки эти постоянно продолжают. Основания физики XX века преподали нам суровый урок. Для их создания и понимания оказались совершенны не существенными именно те гносеологические абстракции, которые так ценили критики оснований математики XX века: финитность, непротиворечивость, конструктивность и вообще картезианская интуитивная ясность. Вместо этого на первый план выступили не предсказанные принципы: дополненность, неклассически вероятностная функция истинности.

Следующее изложение основано на статье [36]. В п. 12.9—12.16 содержится чистая алгебра, формально не опирающаяся на остальной полуфизический текст.

12.2. Атом ортоголея. Мы опишем сейчас некоторые характеристики поведения физической системы «атом артогелия в состоянии $n=2, l=0, s=1$ ». В этом состоянии атом гелия возбужден: два его электрона находятся на втором энергетическом уровне, их спины направлены в одну сторону. Тем не менее состояние метастабильно: чтобы свалиться на первый уровень, электроны должны разлучиться спинами в противоположные стороны (парагелий), что и создает некоторую устойчивость.

Спин есть физическая величина той же размерности, что «угловой момент количества движения». Полный спин нашей системы (в атомных единицах: единица действия равна постоянной Планка $\hbar/2\pi$) представляется единичным вектором в трехмерном физическом пространстве. В качестве первого приближения можно вообразить, что он меняется со временем, но его мгновенные значения подпадают под измерению. (Неадекватность этих представлений скоро будет продемонстрирована.)

Эксперимент по измерению мгновенного значения спина нашей системы может состоять во включении магнитного поля определенной геометрии и регистрации сдвига энергетических уровней (спектральных линий) атома. Каждый исход такого эксперимента определенным образом интерпретируется как измерение проекции спина на то или иное направление, однозначно выделенное геометрий поля. Направления мы будем отождествлять с точками единичной сферы S^2 . Квантовая механика делает следующие позитивные утверждения об измерениях спина ортоголея.

Следующие величины измеримы:

- а) проекция спина $s(a, t)$ на направление $a \in S^2$ в момент времени t ;
- б) длины трех проекций спина $\{|s|(a_i, t)\}$, $i=1, 2, 3$, на три попарно ортогональные направления (репер) $\{a_1, a_2, a_3\} \subset S^2$ в момент времени t .

Предсказания о результатах измерения таковы:

- в) $s(a, t)$ есть случайная величина, принимающая только значения $-1, 0, 1$. (Вероятности этих значений могут быть предсказаны по результатам предыдущих измерений, но здесь для нас не существенны.)

- г) $\sum_{i=1}^3 |s|(a_i, t) = 2$ для любого орта $\{a_1, a_2, a_3\}$ и любого t .

12.3. Попытка классического истолкования. Она могла бы состоять в принятии следующих гипотез:

А. Имеется некоторое пространство Ω «скрытых параметров» или «внутренних состояний» системы и функция $s(a, t; \omega)$, $\omega \in \Omega$, такая, что если в момент времени t система находится в состоянии ω , то $s(a, t; \omega)$ есть «истинное значение проекции спина на ось a » в этот момент.

Б. Вероятностный аспект предсказанный в п. 12.2в есть следствие нашего незнания точных значений $\omega = \omega(t)$, так что для некоторой меры $d\mu(\omega)$ имеем *математическое ожидание* $s(a, t) = \int_{\Omega} s(a, t; \omega) d\mu(\omega)$; аналогично для $|s|$.

Обобщая, можно было бы считать, что Ω зависит не только от самой системы, но и от установки для измерения спина; μ может зависеть от времени и т. п. Все эти возможности, однако, находятся в противоречии с предсказаниями п. 12.2в, г) по следующей поразительной причине.

12.4. Предложение (Кохен, Шпеккер).

Не существует отображения $S^2 \rightarrow \{0, 1\}$ такого, что для любого репера $\{a_1, a_2, a_3\}$ значение этого отображения равно 0 точно на одном направлении a_i .

Более того, можно построить конечную систему из 117 точек $\Gamma \subset S^2$ со следующим свойством. Для любого отображения $k: \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ либо найдется репер $\{a_1, a_2, a_3\} \in \Gamma$, на котором k принимает значение 0 не в точности один раз, либо найдется пара перпендикулярных направлений $\{a_1, a_2\} \subset \Gamma$, на которых k равно 0.

Между тем одновременное принятие утверждений п. 12.2 и гипотез п. 12.3 позволило бы такое отображение сферы построить. Действительно, достаточно было бы рассмотреть $S^2 \rightarrow \{0, 1\}: a \mapsto |s|(a, t; \omega)$

при фиксированных t, ω . Согласно п. 12.2в $|s|$ принимает лишь

значения 0,1, а согласно 12.2г на любом орте $|s|$ дважды принимает значение 1 и один раз 0.

Мы докажем предложение 12.4 в п. 12.12—12.15, а сейчас приступим к более систематическому изложению «квантовой логики». Будем придерживаться удобного и привычного дуализма «язык/интерпретация», хотя и другое в физике гораздо менее формализовано и труднее разделимо.

12.5. Язык нерелятивистской квантовой механики. Для описания физической системы S типа «свободный электрон», «атом гелия в магнитном поле» и т. п. квантовая механика использует некоторый фрагмент языка функционального анализа, «ориентированный на описание S » (см. [28, 29]). Предполагая, что читатель знаком с функциональным анализом, мы ограничимся словником важнейших используемых терминов. Тут же приведены их синонимы, употребляемые физиками: они указывают на «физический смысл», т. е. интерпретацию, которая в нашем тексте будет обсуждаться отдельно.

а) *Комплексное сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}_S$.* Важны также его одномерные подпространства и вектора длины единицы. Синоним для первых: (чистые) состояния, для вторых — ψ -функции (нормированные), точнее, мгновенные значения ψ -функций.

б) *Унитарное представление R в $\mathcal{H}_S$: $t \mapsto u_t = e^{-iH_S t}$.* Синонимы: $t \mapsto u_t$ — динамическая группа; t — время; инфинитезимальная образующая H_S (самосопряженный оператор) — динамический оператор, или гамильтониан S .

в) *Уравнение Шредингера:* $\partial\psi/\partial t = -iH_S\psi$. Ему удовлетворяют эволюционирующие со временем ψ — функции: $\psi_t = e^{-iH_S t}$.

г) *Самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_S$.* Синоним: наблюдаемые. Оператор H_S есть наблюдаемая энергии. Дискретный спектр H_S — энергетические уровни S .

Для нас особое значение будут иметь наблюдаемые — ортогональные проекторы. Так, чистые состояния $S \subset \mathcal{H}_S$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с проекторами P_ψ на соответствующее подпространство.

Другой важный класс проекторов строится на основе теоремы о спектральном разложении. Пусть $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_A(\lambda)$. Тогда для любого борелевского подмножества $u \subseteq R$ определен проектор $P_A(u)$.

Его образ в простейших случаях натянут на те вектора в $\mathcal{H}_S$, которые собственны для A с собственными значениями из u .

Наблюдаемые-проекторы называются также «вопросами» (Макки) или «альтернативными свойствами» (русский перевод термина фон Неймана).

д) *Коммутирующие операторы.* Синоним: совместно (одновременно) измеримые наблюдаемые.

Для неограниченных операторов A, B , формальный коммутатор которых может вообще иметь пустую область определения, коммутативность определяется как перестановочность $P_A(U_1), P_B(U_2)$ для всевозможных борелевских $U_1, U_2 \subseteq R$.

е) *Унитарные представления в $\mathcal{H}_S$ различных групп, как то $SO(3), Su(2), Sp$ и т. п.* Синоним: симметрии системы S (если представления коммутируют с гамильтонианом H_S); приближенные симметрии (если $H_S = H_0 + H_1$, где представления коммутируют с H_0 , а H_1 — «малое возмущение»).

12.7. Пример. S — «электрон в электрическом поле протона» (без учета движения протона), релятивистских эффектов и спина). Здесь $\mathcal{H}_S = L^2(E^3)$ — интегрируемые с квадратом комплексные функции в евклидовом «физическом пространстве координат электрона». H_S — самосопряженное расширение оператора

$$-\frac{\hbar}{4\pi m} \Delta - \frac{1}{h} \frac{e^2}{r},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка; m — масса электрона; e — его заряд; r — расстояние до начала координат (где сидит протон). Уровни энергии (дискретный спектр H_S):

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Собственные ψ -функции, отвечающие точкам этого спектра, суть состояния электрона, связанного с протоном в атом водорода. Уровень энергии $n=1$ отвечает невозбужденному атому, остальные — возбужденному. Положительная полусось — непрерывный спектр H_S ; в состояниях с положительной энергией электрона «атом водорода ионизирован».

Важнейшие наблюдаемые электрона: операторы умножения на три координатные функции x_j (наблюдаемые координаты): самосопряженные расширения операторов $p_j = (\hbar/2\pi i)(\partial/\partial x_j)$ (наблюдаемые проекции импульсов). Операторы x_j, p_j не коммутируют, так что координата x_j и проекция импульса на ось x_j одновременно не измеримы.

Система S сферически симметрична. Естественное представление $SO(3)$ в $L^2(E^3)$ коммутирует с H_S . Ограничение этого представления на подпространство $\mathcal{H}_S$, отвечающее дискретному спектру H_S , естественно разлагается в прямую сумму представлений, отвечающих уровням энергии E_n . В свою очередь, E_n — подпространство разлагается в прямую сумму представлений $SO(3)$ на сферических многочленах степеней $j=0, 1, 2, \dots, n-1$ с кратностью 1. Если ψ -функция электрона принадлежит уровню E_n и подпространству

множество $U \subset R$ равна $(P_A(U)\psi_i, \psi_i)$, где $P_A(U)$ определен в п. 12.5г).

в) *Эволюция после наблюдения.* В предположениях предыдущего пункта ψ -функция системы после наблюдения определяется его результатом: если регистрация дала в момент t_0 для A значение a_i , то S эволюционирует начиная с $\psi_A^{(i)}$ в момент t_0 до очередного наблюдения совершенно независимо от прежнего пути эволюции.

Таким образом, результат наблюдения может позволить нам узнать вид ψ -функции *после* наблюдения, но не дает информации о том, какая она была *до* наблюдения.

Поэтому физики часто говорят, что регистрация значения a_i *приготавливает* систему в состоянии $\psi_A^{(i)}$ в момент времени t_0 . Другой синоним: в момент наблюдения ψ -функция системы *стягивается* в $\psi_A^{(i)}$.

Если нам удалось зарегистрировать одновременные значения двух наблюдаемых, то мы приготовили систему с ψ -функцией, собственной для них обеих. Поскольку для некоммутирующих наблюдаемых всегда есть не общие собственные вектора, их значения, вообще говоря, одновременно не измеримы.

12.9. Квантовая логика. Выделим теперь алгебраический скелет квантовой логики. Мы будем исходить из следующих аналогий.

Пусть дан формальный язык класса $\mathcal{L}_1$ с единственной переменной и его интерпретация во множестве M , где эта переменная может принимать значения. Тогда в M выделяется булева алгебра B выразимых множеств (ср. § 3). Конъюнкции формул отвечает булево пересечение выражаемых ими множеств и т. п. Согласно определению $M \models B$, если средствами ими множеств и т. п. Согласно «Принадлежит ли N значение переменной?». Алгебра B есть важнейший инвариант пары {язык, интерпретация}.

Теперь рассмотрим язык квантовой механики, ориентированный на описание системы S . Нам придется исключить временной аспект, *фиксировав* момент времени, к которому относятся высказывания о состоянии системы. Тогда «состояние системы» будет единственной переменной языка. Она принимает значения во множестве прямых гильбертова пространства $\mathcal{H}_S$. Единственные вопросы, на которые возможен двучастный ответ, таковы: «принадлежит ли состояние системы данному замкнутому подпространству $\mathcal{H}_S$?». Замкнутые подпространства $\mathcal{H}_S$ образуют аналог алгебры B . Конъюнкция вопросов отвечает образованию пересечения подпространств, дизъюнкция — их сумме, но обе операции можно производить лишь в том случае, когда соответствующие наблюдаемые проекторы коммутируют, и лишь в этом случае выполнены булевы тождества.

ранству, отвечающему представлению $SO(3)$ на сферических многочленах степени j , говорят, что (n, j) — главное и орбитальное квантовое число соответствующего состояния электрона в атоме водорода.

Мы дали образец учебного физического текста. «Язык» смешан в нем с «метаязыком», указывающим на стандартную интерпретацию языка. Опишем теперь ее отдельно и более систематически.

12.8. Интерпретация. Очень важный аспект интерпретации, которого мы здесь не можем касаться — список неформальных рецептов для выбора $\mathcal{H}_S$, H_S и наблюдаемых, отвечающих данной системе S . Этот выбор «единиц выражения» производится часто в два этапа: выбор классического описания и применение «правил квантования» к нему. Он может быть «приближенным» в том смысле, что не учитываются те или иные обстоятельства (как спин в п. 12.7).

Пусть $\mathcal{H}_S$ и H_S уже выбраны. Характернейшая особенность интерпретации квантового языка — ее «двуслойность». Часть математических высказываний интерпретируется как утверждения о «свободно эволюционирующей системе», другая как утверждения о результатах наблюдения над ней.

а) *Свободная эволюция.* Считается, что (в рамках выбранного приближения) максимально полная информация о состоянии системы в момент t задается ее ψ -функцией $\psi_t \in \mathcal{H}_S$. Пока за системой никто не подглядывает, ψ_t эволюционирует как $e^{-iH_S t} \psi_0$, исходя из начального состояния ψ_0 . (Как узнать ψ_0 ? См. пункт п. 12.8в).

б) *Наблюдение.* Пусть мы хотим измерить мгновенное значение какой-то физической величины для нашей системы S в момент t . Этой величине отвечает наблюдаемая A . (Как узнать вид A ? см. начало п. 12.8.) Будем для простоты предполагать, что A имеет однократный точечный спектр.

Предсказания относительно наблюдений таковы.

Если $A\psi_t = a\psi_t$, то a будет значением наблюдаемой A в момент t для системы S в состоянии ψ_t с ψ -функцией ψ_t .

В общем случае пусть $\psi_A^{(i)}$, $i=1, 2, \dots$ — ортонормированный базис $\mathcal{H}_S$ из собственных векторов для A . Разложим ψ_t по этому базису

$$\psi_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{(i)}(t) \psi_A^{(i)}. \text{ Пусть } A\psi_A^{(i)} = a_i \psi_A^{(i)}.$$

Тогда результат измерения A будет случайной величиной, принимающей значения a_i с вероятностями $|\alpha^{(i)}(t)|^2$ соответственно. (Ее математическое ожидание, как нетрудно видеть, равно скалярному произведению $(A\psi_t, \psi_t)$). Эта формула годится для всех A . Более общо, вероятность попадания значений A в борелевское под-

Аксиоматизируем ситуацию:

12.10. Определение.

Частичной булевой алгеброй B называется множество, снабженное следующими структурами:

- рефлексивное и симметричное бинарное отношение $\star$ «совместной измеримости». Вместо $\langle a, b \rangle \in \star$ мы пишем $a \star b$;
- частичные бинарные операции $\vee, \wedge$ и унарная операция $'$;
- элементы $0, 1 \in B$.

Эти структуры должны удовлетворять следующим аксиомам:

- Отношение $\star$ замкнуто относительно операций $\wedge, \vee, ';$ если a_1, a_2, a_3 попарно совместно измеримы, то $(a_1 \wedge a_2) \star a_3$, $(a_1 \vee a_2) \star a_3$, $a_1' \star a_3$; кроме того, $a \star 0, a \star 1$ для всех $a \in B$.

- Если a_1, a_2, a_3 попарно совместно измеримы, то вместе с 0 , 1 они порождают булеву алгебру относительно операций $\vee, \wedge, ';$.

12.11. Пример. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство (возможно, вещественное и конечномерное). Частичная булева алгебра $B(\mathcal{H})$ определяется как множество замкнутых подпространств $\mathcal{H}$ со следующими структурами:

- $a \star b$, если и только если существуют такие три попарно ортогональные замкнутые подпространства $c, d, e \subseteq \mathcal{H}$, что $a = c \oplus d$, $b = e \oplus d$.

Мотивировка: это условие равносильно перестановочности проекторов на a, b ;

- $a \wedge b =$ пересечение a, b ;

- $a \vee b =$ сумма a, b ;

- $a' =$ ортогональное дополнение к a ;

- $0 = \{0\}, 1 = \mathcal{H}$.

Одна из форм теоремы о несуществовании скрытых параметров такова

12.12. Теорема.

Если $\dim \mathcal{H} \geq 3$, то $B(\mathcal{H})$ нельзя вложить в булеву алгебру с сохранением операций.

Результат поддается разнообразным формальным усилениям (см. [36, § 5]). Мы не будем на них останавливаться.

Доказательство. Выберем в $\mathcal{H}$ вещественное евклидово подпространство $E^3 \subseteq \mathcal{H}$ и покажем, что уже $B(E^3)$ не вкладывается в булеву алгебру. Иначе существовал бы гомоморфизм частичной алгебры $B(E^3)$ на двухэлементную булеву алгебру $\{0, 1\}$, ибо для любой пары элементов любой булевой алгебры существует разделяющий их гомоморфизм на $\{0, 1\}$.

Пусть h — такой гомоморфизм. Если $a_1, a_2, a_3 \subseteq E$ — попарно ортогональные прямые, то

$$h(a_i \wedge a_j) = h(a_i) \wedge h(a_j) = 0 \text{ для } i \neq j.$$

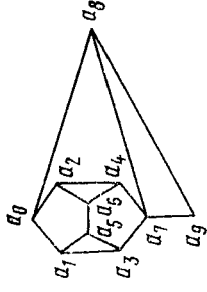
Поэтому из любой пары ортогональных прямых хоть одна должна переходить в 0 . Далее, $h(a_1 \vee a_2 \vee a_3) = h(a_1) \vee h(a_2) \vee h(a_3) = h(E^3) = 1$. Поэтому из любого репера ровно одна прямая должна переходить в 1 .

Отбрасывая точки единичной сферы S^2 на прямые, соединяющие их с началом, мы получили бы с помощью h отображение S^2 со свойством, уже описанным в предположении 12.4 (нужно лишь поменять местами 0 и 1). Докажем, что отображения с таким свойством нет даже на подходящем подмножестве из 117 точек в S^2 . Этот усиленный результат комбинаторно красив и физически значим: попытка измерять проекции спина ортогелия одновременно по всем направлениям могла бы вызвать возмущения даже при надежде на скрытые параметры. На самом же деле уже конечного числа направлений достаточно, чтобы показать несостоятельность попытки.

Рассмотрим некоторый конечный граф. Его реализацией на S^2 назовем такое вложение множества его вершин в S^2 , при котором расстояние между концами любого ребра равно 90° .

12.13. Лемма.

Пусть α, β — такие точки на S^2 , что синус угла между их радиус-векторами содержится в $[0, 1/3]$. Тогда существует реализация графа Γ_1 : при которой a_0 переходит в α , a_9 в β .



Доказательство. Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ репер на S^2 . Переведем a_5 в $\bar{x}$, a_6 в $\bar{z}$. Положим далее для некоторых $\xi, \eta \in R$

$$a_1 \mapsto \frac{\bar{y} + \xi \bar{z}}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad a_2 \mapsto \frac{\bar{x} + \eta \bar{y}}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Тогда образы a_3 и a_4 определяются с точностью до знаков по ортогональности к (a_5, a_6) , (a_2, a_6) , и мы выберем

$$a_3 \mapsto \frac{\xi \bar{y} - \bar{z}}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad a_4 \mapsto \frac{\eta \bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Затем аналогично положим

$$a_0 \mapsto \frac{\xi \eta \bar{x} - \xi \bar{y} + \bar{z}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \xi^2 \eta^2}}, \quad a_9 \mapsto \frac{\bar{x} + \eta \bar{y} + \xi \eta \bar{z}}{\sqrt{1 + \eta^2 + \xi^2 \eta^2}}.$$

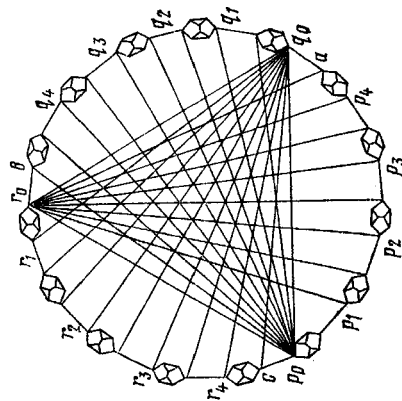
и, наконец, с точностью до знака определяются a_i и a_9 . Синус угла между a_0 и a_9 легко вычислить: он равен

$$\xi\eta / \sqrt{(1 + \xi^2 + \eta^2)(1 + \eta^2 + \xi^2\eta^2)}.$$

Это выражение принимает все значения между 0 и $1/3$.

12.14. Лемма.

Рассмотрим граф Γ_2 , который получается из картинки



отождествлениями вершин $a=p_0$, $b=q_0$, $c=r_0$ (видимые пересечения ребер внутри окружности не являются вершинами).

Этот граф реализуется в S^2 .

Докажем утверждение. Положим для $0 \leq k \leq 4$

$$p_k \mapsto \cos \frac{\pi k}{10} \bar{x} + \sin \frac{\pi k}{10} \bar{y},$$

$$q_k \mapsto \cos \frac{\pi k}{10} \bar{y} + \sin \frac{\pi k}{10} \bar{z}, \quad r_k \mapsto \sin \frac{\pi k}{10} \bar{x} + \cos \frac{\pi k}{10} \bar{z}.$$

Так как $\sin(\pi/10) < 1/3$, это отображение можно сначала продолжить до реализации подграфа между точками p_0, p_1 и q_0 , воспользовавшись предыдущей леммой. Вращая полученную реализацию вокруг r_0 так, чтобы (p_0, p_1) перешла в (p_1, p_2) , (p_2, p_3) , ..., получаем реализацию «нижней дуги» и r_0 . Аналогичные вращения вводим круг образов p_0, q_0 доставляют реализацию остальных двух дуг.

12.15. Конец доказательства предложения 12.4 и теоремы 12.12. Рассмотрим произвольное отображение k вершин графа Γ_2 в $\{0, 1\}$. Допустим, что ровно одна вершина каждого треугольника переходит в 1 и хотя бы одна из вершин каждого ребра переходит в 0. Пусть в треугольнике $\{p_0, r_0, q_0\}$ в 1 переходит p_0 . Рассмотрим копию графа Γ_1 между вершинами p_0, r_0, p_1 , отождествив их с a_0, a_8, a_9 соответственно. Мы должны иметь $k(p_1) = k(a_9) = 1$. Действи-

тельно, если бы $k(a_9) = 0$, то $k(a_7) = 1$ и затем $k(a_1) = k(a_2) = k(a_3) = k(a_4) = 0$, $k(a_5) = k(a_6) = 1$ — противоречие.

Теперь вернемся к Γ_2 . Так как $k(r_0) = k(p_1) = 1$, аналогично находим $k(p_2) = 1$ и затем $k(p_3) = k(p_4) = k(p_5) = 1$. Но $k(q_0) = 1$ противоречит тому, что $k(p_0) = 1$. Этим завершается доказательство.

12.16. Квантовые тавтологии. Эта тема почти не исследована: мы приведем один контрпример Кохена и Шлекера [36] и формулировку недавних результатов Гельфанда и Пономарева.

а) *Контрпример.* Он состоит в следующем: можно указать представление логического многочлена от 117 переменных, которое будет классической тавтологией, но в частичной булевой алгебре $B(E^3)$ при некоторых значениях переменных определено и принимает значение 0. Это — просто другой аспект невозможности вложить $B(E^3)$ в булеву алгебру.

Действительно, пусть $P(p, q, r)$ — такой логический многочлен от трех переменных, который принимает значение истинности 1, когда в точности одно из значений $|p|, |q|, |r|$ есть 1. Можно считать, что в P входят только связи $\vee, \wedge$ и $\neg$. Аналогично, пусть $Q(p, q) = \neg p \vee \neg q$: Q принимает значение 1, когда среди $|p|, |q|$ есть хоть один 0.

Перенумеруем вершины графа Γ_2 числами от 1 до 117 и поможим

$$R(p_1, \dots, p_{117}) = \bigwedge_{(i, j, k)} P(p_i, p_j, p_k) \bigwedge_{(r, s)} Q(p_r, p_s).$$

Первое произведение взято по всем тройкам (i, j, k) , образующим треугольники в Γ_2 , второе — по всем парам (r, s) , соединенным ребром в Γ_2 .

Рассуждение п. 12.15 показывает, что при любом отображении $\{p_1, \dots, p_{117}\} \rightarrow \{0, 1\}$ хотя бы один из булевых сомножителей принимает значение 0, так что R является классической тавтологией. В то же время если подставить вместо p_i прямую, соединяющую начало координат с образом i -й вершины в фиксированной реализации графа Γ_2 , мы получим в качестве значения R элемент $0 \in B(E^3)$.

В самом деле, p_r, p_s ортогональны, то $p_r \vee p_s = E^3$; аналогично, если p_i, p_j, p_k ортогональны, то $P(p_i, p_j, p_k) = 1 \in B(E^3)$. Это проверяется следующим образом: положим $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$, тогда

$$P(p, q, r) = p + q + r + p \wedge q \wedge r$$

(при любой расстановке скобок), откуда

$$P(p_i, p_j, p_k) = p_i \oplus p_j \oplus p_k = E^3.$$

б) *Результаты Гельфанда и Пономарева.* Начнем со следующего замечания. На множестве замкнутых подпространств $B(\mathcal{H})$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ операции $\bigvee, \bigwedge$ и $'$ определены всюду, хотя перестают удовлетворять булевым аксиомам и при пренебрежении отношением $*$ совместной измеримости, как будто лишаются физического смысла.

Тем не менее естественно исследовать и такие структуры, впервые предложенные в качестве квантово-механических логик Г. Биркгофом и Дж. фон Нейманом. Вот их аксиоматизация:

Определение.

Модулярной структурой L называется множество с бинарными операциями $\bigwedge, \bigvee$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- $\bigwedge, \bigvee$ ассоциативны и коммутативны;
- $a \wedge a = a \vee a = a$ для всех $a \in L$.
- Если $a \wedge b = b$, то $(a \vee c) \wedge b = b \vee (c \wedge b)$ (модулярное тождество).

Биркгофф и фон Нейман требуют еще существования операции «ортогонального дополнения» с обычными аксиомами, но здесь мы ее опускаем.

Заметим, что модулярное тождество в $B(\mathcal{H})$ универсально выполняется, только если $\mathcal{H}$ конечномерно. Оно выполнено также для троек a, b, c , элементы которых имеют конечную размерность или коразмерность в $\mathcal{H}$.

И. М. Гельфанд и В. А. Пономарев изучали линейные представления свободных модулярных структур с n образующими в $B(\mathcal{H})$ для конечномерных пространств над произвольными полями. Такое представление называется неразложимым, если оно не разлагается в прямую сумму представлений в $B(\mathcal{H}_1) \oplus B(\mathcal{H}_2)$.

Определение.

Модулярным вопросом называется элемент свободной модулярной структуры, который при любом неразложимом конечномерном представлении принимает значение либо 0, либо 1.

Один из главных результатов Гельфанда и Пономарева состоит в конструкции очень нетривиальной счетной серии модулярных вопросов. Мы ограничимся формулировками.

Пусть L^n — свободная модулярная структура с n образующими $\{a_1, \dots, a_n\}$. Положим $I = \{1, \dots, n\}$.

Последовательность длин $l \geq 1: a = (i_1, \dots, i_l)$ элементов I назовем *допустимой*, если в ней нет одинаковых соседей.

Последовательность длин $l - 1: \beta = (k_1, \dots, k_{l-1})$ элементов I назовем *подчиненной a* , если она допустима и $\forall j \leq l - 1, k_j \notin \{i_j, i_{j+1}\}$. Положим для допустимой a :

$$a_\alpha = a_{i_1} \dots a_{i_l} = a_{i_1} \wedge (\bigvee_{\beta} a_\beta),$$

где β пробегает все последовательности, подчиненные a . Далее, определим для $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i(l) = \bigvee_{\alpha} a_\alpha,$$

где α пробегает все допустимые последовательности длины l с последним элементом i . Наконец, положим

$$H_i(l) = \bigvee_{j \neq i} A_j(l).$$

Подструктура в L^n , порожденная элементами $H_1(l), \dots, H_n(l)$, целиком состоит из модулярных вопросов для всех $l \geq 1$.

Это — трудный результат: легче доказывалось, что эта подструктура является булевой алгеброй из 2^n элементов. Подставляя ее элементы в качестве значений переменных в обычные булевы тавтологии, мы получаем «квантовые тавтологии», но для этого нужно рассматривать структуры с дополнениями.

Остается выяснить, извлекается ли из этой алгебры нетривиальная физика. Возможно, следует соединить ее с техникой представлений групп симметрий.

12.17. Атом ортогелия: второе посещение. В заключение мы вернемся к атому ортогелия S и покажем, как материал п. 12.2 выглядит с общих позиций.

а) Выбор $\mathcal{H}_S$, как было объяснено в п. 12.7, бесспиновому электрону отвечает пространство $L^2(E^3)$. Учет спина заставляет ввести «двухкомпонентную» ψ -функцию, т. е. перейти к пространству $L^2(E^3) \oplus C^2$. Система двух электронов согласно принципу Паули ψ -функция этой системы должна оставаться в антисимметричной относительно перестановок электронов части тензорного квадрата. Поэтому окончательно $\mathcal{H}_S = \Lambda^2(L^2(E^3) \oplus C^2)$.

б) Выбор H_S . Это — трудная задача, потому что каждый электрон движется в переменном электромагнитном поле, созданном ядром и другим электроном. Главный член гамильтониана отвечает постоянному сферически симметричному потенциалу, который получается усреднением по времени. Остаток рассматривается как малое возмущение. Приведем приближенный вид ψ -функции ортогелия, точнее, элемента из $\Lambda^2(L^2(E^3))$, отвечающего проекции $\mathcal{H}_S$ на подпространство единичной проекции спина:

$$\psi \approx e^{-\frac{1}{2}(r_1+r_2)} [(C_1 + C_2(r_1+r_2) + C_3 r_{12} + C_4 r_{12}(r_1+r_2) \operatorname{sh} C_0(r_1-r_2) + (r_1-r_2)(C_3 + C_4 r_{12}) \operatorname{ch} C_0(r_1-r_2)].$$

Здесь

$$r_i = \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2; \quad r_{12} = \left(\sum_{j=1}^3 (x_{1j} - x_{2j})^2 \right)^{1/2};$$

константы $k, C_0, \dots, C_6$ находятся экспериментально.

в) *Приближенные симметрии.* В пространстве $\mathcal{H}_S$ действует группа $SU(2)$: на $L^2(E^3)$ через свой фактор $SO(3)$, на C^2 своим стандартным представлением. Это — группа приближенных симметрий системы; ψ -функция ортогелия «не слишком удаляется» от подпространства, отвечающего подходящему представлению $SU(2)$, что позволяет говорить о главном (n), орбитальном (j) и других квантовых числах состояния, как в атоме водорода.

г) *Спин.* Оператор полного углового момента J коммутирует с гамильтонианом H_S . В состоянии $n=2, j=1$ его собственное значение равно 2 (в атомных единицах). Собственное подпространство $N \subset \mathcal{H}_S$, отвечающее этому значению, трехмерно. Далее, операторы квадратов проекций спина J^x, J^y, J^z попарно коммутируют (это — особенность спина 1).

Обозначая через P проектор $\mathcal{H}_s$ на N , мы получаем возможность вложить частичную булеву алгебру $B(E^s)$ и $B(\mathcal{H}_s)$, сопоставив прямой $a \in E^s$ образ оператора $PJ^s a$ в $\mathcal{H}_s$. Это заменяет несколько наивную картину п. 12.2.

Приложение. Универсум фон Неймана

1. Предпосылки канторовской «наивной» теории множеств сводились к следующим: множество может состоять из любых различных элементов (физического или интеллектуального мира); множество однозначно определяется набором своих элементов; любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Формальный язык теории множества $L_1\text{Set}$ призван описывать более ограниченный класс множеств (универсум), чем канторовские. Часть этих ограничений вызвана соображениями удобства, другая — желанием избежать так называемых парадоксов. Это дает «оценку сверху» для рассматриваемых классов. «Оценка снизу» определяется желанием, чтобы рассматриваемый класс множеств был замкнут относительно всех математических конструкций, необходимых для реализации той или иной части (в идеале «всей») содержательной математики.

2. Вслед за Цермело, фон Нейманом и другими мы рассмотрим два основных ограничения на множества.

а) Элементами множеств могут быть лишь множества же. В частности, в универсуме V фон Неймана (см. ниже) любая цепочка включений $X_0 \ni X_1 \ni X_2 \ni \dots$ обрывается, и, значит, последним элементом ее обязательно является пустое множество. Таким образом, все множества V строятся «из ничего».

б) Предположение о том, что всякая совокупность хотя бы таких множеств снова образует множество из V , немедленно приводит к противоречию (Бурали — Форти, Расселл и др.). В частности, совокупность всех множеств универсума элементом V не является. Поэтому требуется точная формулировка (по крайней мере части) тех операций, которые не выводят за пределы V . Два основных формальных языка теории множеств: Геделя — Бернаиса и Цермело — Френкеля — отличаются тем, именами каких объектов являются символы переменных при стандартной интерпретации в V . У Цермело — Френкеля (наш $L_1\text{Set}$) это имена множеств. У Геделя — Бернаиса это имена таких совокупностей множеств — классов, которые «не обязательно являются множествами», и свойство класса «быть множеством» специально определяется как свойство «быть элементом другого класса». Язык Геделя — Бернаиса изучен в гл. 4 книги Мендельсона [2]. В этом параграфе мы опишем универсум фон Неймана, пользуясь общепринятыми средствами обычной содержательной математики. Отношение этой конструкции к формализму будет обсуждено в п. 18.

3. Первые этажи. Универсум фон Неймана строится индуктивно начиная с пустого множества последовательным применением операций $\mathcal{P}$: «множество всех подмножеств». Тем самым

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset, \\ V'_1 &= \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \\ V_2 &= \mathcal{P}(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ &\dots \dots \dots \\ V_{n+1} &= \mathcal{P}(V_n), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что $V_n \subset V_{n+1}$ (позже это будет доказано в полной общности). Этаж V_n состоит из 2^{2^n} ($n - 1$ двоек) конечных множеств, элементами которых, в свою очередь, являются конечные множества, и т. д. Выйти за пределы конечных множеств нельзя, если не обратиться к рассмотрению всех V_n как «уже построенных», к объединению которых снова применяется операция $\mathcal{P}$. Полагаем

$$\begin{aligned} V_{\omega} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \\ V_{\omega+1} &= \mathcal{P}(V_{\omega}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Индексы, которыми теперь помечаются этажи, суть имена первых бесконечных ординалов. Кантору принадлежит эта замечательная идея трансфинитного итерирования конструкций, которую он впервые применил к исследованию тригонометрических рядов, и затем исследовал систематически, найдя в ней ключ к бесконечному.

В продолжение ближайших двух пунктов наши множества временно являются канторовскими. Мы вернемся к универсуму V , несколько ознакомившись с ординалами.

4. Ординалы.

Пусть X — некоторое множество, на котором задано бинарное отношение $<$. Рассмотрим следующие свойства этого отношения:

а) $Y \not\subset Y$ для всех $Y \in X$; если $Y_1 < Y_2$ и $Y_2 < Y_3$, то $Y_1 < Y_3$;

б) для любых $Y, Z \in X$, либо $Y < Z$, либо $Z < Y$, либо $Y = Z$;

в) любое непустое подмножество X имеет наименьший (в смысле $<$) элемент.

Отношение $<$ частично упорядочивает X , если оно удовлетворяет а); линейно упорядочивает X , если оно удовлетворяет а) и б); вполне упорядочивает X , если удовлетворяет всем трем условиям а), б), в).

Пусть $(X, <)$ вполне упорядочено. Начальный отрезок Y , деленный элементом $Y \in X$, — это вполне упорядоченное множество $(Z, <)$, где $Z = \{Y' | Y' < Y\}$. Как принято, говоря о вполне упорядоченном множестве, мы можем опускать явное указание порядка, если оно ясно из контекста.

5. Лемма.

Пусть X, Y — два вполне упорядоченных множества. Тогда имеет место ровно одна из трех альтернатив:

- а) X и Y изоморфны;
- б) X изоморфно начальному сегменту Y ;
- в) Y изоморфно начальному сегменту X .

Изоморфизм, существование которого утверждается, определен однозначно.

Доказательство. Разобьем рассуждение на несколько шагов.

а) Пусть X вполне упорядочено, $f: X \rightarrow X$ — монотонное отображение, т. е. $Z_1 < Z_2 \Rightarrow f(Z_1) < f(Z_2)$. Тогда для всех $Z \in X$ имеем $f(Z) \geq Z$. Действительно, среди элементов, не обладающих этим свойством, должен был бы существовать, наименьший, скажем Z_0 . Но из $f(Z_0) < Z_0$ и монотонности f следовало бы $f(f(Z_0)) < f(Z_0)$, так что нашелся бы и еще меньший элемент.

б) Поэтому X не изоморфно никакому своему начальному отрезку $\hat{X}_1$: если $f: X \rightarrow \hat{X}_1$, то $f(X_1) < X_1$.

в) Пусть теперь X, Y вполне упорядочены. Положим $f = \{(X, Y_1) | X_1 \in X, Y_1 \in Y \text{ и существует изоморфизм } \hat{X}_1 \text{ с } \hat{Y}_1\}$. Прежде всего, $f \subseteq X \times Y$ есть график взаимно-однозначного отображения $pr_1 f$ на $pr_2 f$. Действительно, если $X_1 \neq X_2$, скажем $X_1 < X_2$, то в силу б) $\hat{X}_1$ не изоморфно $\hat{X}_2$; по симметрии то же верно для f^{-1} . Отсюда же видно, что f и f^{-1} монотонны.

Далее, если $X_1 \in pr_1 f$ и $X_2 < X_1$, то $X_2 \in pr_1 f$ и аналогично для $pr_2 f$.

Покажем, наконец, что либо $pr_1 f = X$, либо $pr_2 f = Y$. Иначе существует минимальный элемент $\hat{X}_1$ из $X \setminus pr_1 f$ и минимальный элемент $\hat{Y}_1$ из $Y \setminus pr_2 f$. Но в силу вышесказанного f индуцирует изоморфизм $\hat{X}_1$ с $\hat{Y}_1$. По определению f тогда $\hat{X}_1 > \hat{Y}_1 \in f$ — противоречие.

г) Все сказанное означает, что либо f есть изоморфизм (точнее, его график) множества X на начальный сегмент Y или Y , либо f^{-1} есть изоморфизм Y на начальный сегмент X . Из определения f ясно, что график любого изоморфизма должен содержать себя в графике f , откуда следует единственность. Лемма доказана.

В качестве предварительного определения мы можем теперь рассмотреть класс всех вполне упорядоченных множеств, изоморфных данному вполне упорядоченному X , и назвать его ординалом.

Два ординала α, β связаны отношениями $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$ в зависимости от того, какая из трех альтернатив леммы 5 выполняется для представителей $X \in \alpha$, $Y \in \beta$ (от выбора представителей это отношение, очевидно, не зависит).

Следующий шаг, естественно, состоит в том, чтобы рассмотреть «все» ординалы как класс и показать, что $<$ индуцирует на нем отношение полного порядка, получив таким образом универсальную шкалу полного порядка. Здесь, однако, возникает излишняя сложность: класс вполне упорядоченных множеств, изоморфных данному X , непомерно велик, и класс ординалов должен быть «классом классов», что бессмысленно усложняет дело. Фон Нейману принадлежит изящная техническая находка, снимающая эту трудность: вместо многообразия навязанных извне отношений порядка на X рассмотреть единственное отношение, заданное внутренними свойствами.

6. Определение.

Ординалом называется множество множеств X , которое вполне упорядочено отношением $\in$ между его элементами и транзитивно, т. е. удовлетворяет условию: если $Z \in Y \in X$, то $Z \in X$.

7. Теорема.

а) Класс ординалов On вполне упорядочен отношением $\alpha \in \beta$ (мы будем записывать его также $\alpha < \beta$).

б) Любое вполне упорядоченное множество изоморфно одному определенному ординалу α , а также однозначно определено начальному отрезку ординалов (меньших $\alpha \cup \{\alpha\}$).

Доказательство. а) Мы должны проверить утверждения а), б), в) п. 4. Первое из них немедленно следует из определения.

Для доказательства б) рассмотрим два ординала α, β . Согласно лемме 5, существует изоморфизм f одного из них (скажем, α) на начальный сегмент β либо на β . Покажем, что тогда $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$. С этой целью установим, что $f(Y) = Y$ для всех $Y \in \alpha$. Действительно, если Y_1 — минимальный элемент с $f(Y_1) \neq Y_1$, то $f(Y_2) = Y_2$ для всех $Y_2 \in Y_1$. Так как f — изоморфное вложение α относительно упорядочения $\in$ и Y_1 и $f(Y_1)$ суть множества, имеем

$$f(Y_1) = \{f(Y_2) | Y_2 \in Y_1\} = \{Y_2 | Y_2 \in Y_1\} = Y_1$$

в противоречие с выбором Y_1 . То же рассуждение показывает, что $f(\alpha) = \alpha$, откуда следует требуемое.

Наконец, пусть C — непустой класс ординалов, $\alpha \in C$. Если α не наименьший в C , то наименьший элемент пересечения $\alpha \cap C$ будет наименьшим в C .

б) Пусть X — некоторое вполне упорядоченное множество. Обозначим через S множество ординалов, изоморфных какому-нибудь начальному отрезку X . Оно непусто, например ординал $\{\emptyset\}$ изоморфен отрезку, состоящему из наименьшего элемента X .

Множество $\beta = \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$, как нетрудно видеть, является ординалом, который изоморфен X . Действительно, если бы это было не так, β был бы изоморфен начальному отрезку X (скажем, X_1), но тогда ординал $\beta \cup \{\beta\}$, больший β , был бы изоморфен начальному отрезку $X_1 \cup \{X_1\}$ вопреки определению β .

Вот элементарные свойства ординалов.

8. а) Конечные ординалы — это «натуральные числа» (и нуль) первых этапов универсума V . Так мы и будем их зачастую обозначать: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ... что для конечных α находится в согласии с отождествлением в п. 8а.

б) Ординал, непосредственно следующий за данным α , есть $\alpha \cup \{\alpha\}$. Он обозначается также $\alpha + 1$, что для конечных α находится в согласии с отождествлением в п. 8а.

в) Ординал β называется *предельным*, если $\beta \neq \emptyset$ и $\beta \neq \alpha + 1$ ни для какого α . Первый предельный ординал ω_0 как вполне упорядоченное множество изоморфен $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Если α — предельный ординал, то $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$. Верно и обратное.

Ординалами пользуются для трех главных целей: доказательств с помощью (трансфинитной) индукции, конструкций с помощью (трансфинитной) рекурсии и для измерения мощностей. Вот основные принципы.

9. Трансфинитная индукция.

Пусть C — некоторый класс ординалов, причем

- $\emptyset \in C$;
- если $\alpha \in C$, то $\alpha + 1 \in C$;
- если множество ординалов $\{\alpha_i\}$ содержится как подмножество в C , то $\bigcup \alpha_i \in C$. Тогда C содержит все ординалы.

Действительно, иначе существовал бы наименьший ординал, не содержащийся в C , но он не мог бы быть пустым в силу а), предельным в силу в) и любым другим в силу б). В конкретных приложениях проверка а) и в) часто оказывается тривиальной и опускается.

10. Трансфинитная рекурсия.

Пусть G — некоторая функция от множеств (в дальнейшем будет достаточно считать, что она определена на всех множествах универсума) со значениями в множествах. Тогда существует единственная функция от ординалов F , удовлетворяющая соотношению: $F(\alpha) = G(\text{множество значений } F \text{ на элементах } \alpha)$.

Действительно, это соотношение однозначно определяет $F(0) = G(\emptyset)$, затем $F(1) = G(\{F(0)\})$, $F(2)$, ... Таким образом, если мы рассмотрим класс C таких ординалов α , что F с нужным свойством можно определить на начальном отрезке ординалов $< \alpha$, то этот

класс будет удовлетворять условиям 9а—в и, значит, он содержит все ординалы. Единственность устанавливается попутно (если $F \neq F'$, рассмотрим наименьший α с $F(\alpha) \neq F'(\alpha)$).

11. **Измерение мощностей.** Разные ординалы могут быть равносильными, например все ординалы ω_0 , $\omega_0 + 1$, $\omega_0 + 2$, ... (и многие последующие!) — счетные. Однако как угодно далеко происходит скачок мощности.

Ординал, который не равносильно никакому предшествующему ординалу, называется кардиналом.

Таковы все конечные ординалы и ω_0 .

Любой бесконечный кардинал является, конечно, предельным ординалом. Далее, любое множество равносильно кардиналу, и притом единственному (см. § 1 гл. III). Бесконечные кардиналы образуют вполне упорядоченный класс, который естественно именуется ординалами. Итак,

ω_0 — первый счетный ординал;

ω_1 — первый ординал мощности $> \omega_0$ — множество всех счетных и конечных ординалов;

ω_2 — первый ординал мощности $> \omega_1$ — множество всех ординалов мощности $\leq \omega_1$ и т. д.

Теперь мы можем ввести наше основное определение.

12. Определение.

Универсумом V (фон Неймана) называется класс множеств $\bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha$, где множество V_α определяется следующей трансфинитной рекурсией:

$$V_\alpha = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha),$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал.}$$

Приведем некоторые элементарные свойства универсума V .

13.

Каждое множество V_α транзитивно: если $Y \in X \in V_\alpha$, то $Y \in V_\alpha$ (иными словами, $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$).

Допустим, что это неверно. Тогда должен существовать наименьший ординал α с $V_\alpha \not\subseteq V_{\alpha+1}$, причем $\alpha \geq 2$. Если α не предельный,

$\alpha = \beta + 1$, $Y \in X \in V_\alpha$ и $Y \notin V_\alpha$, то противоречие получается так: $X \in V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta) \Rightarrow X \subseteq V_\beta \Rightarrow Y \in V_\beta \Rightarrow Y \in V_{\beta+1} = V_\alpha$, потому что для β еще верно, что $V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$ (по выбору α . Если α предельный, противоречие достигается аналогично (находим $\gamma < \alpha$

с $Y \in X \in V_{\gamma+1}$, $Y \notin V_\gamma$).

Прямое произведение:

$$X \times Y = \{(U, W) \mid U \in X, W \in Y\}.$$

Аналогично

$$X_1 \times \dots \times X_n = (\dots ((X_1 \times X_2) \times X_3) \dots).$$

Заметим, что, вообще говоря, $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$: между этими множествами существует лишь каноническое взаимно-однозначное соответствие. Отождествление их и запись $X \times Y \times Z$ является вольностью, обычно безобидной.

Бинарное отношение (или соответствие) r есть множество (или класс), элементами которого являются только упорядоченные пары. Если $r \in V$ — отношение, то его область определения $\text{dom } (r)$ есть класс всех первых членов элементов r , а область значений $\text{rng } (r)$ есть класс всех вторых членов.

Функция есть бинарное отношение, каждый элемент которого однозначно определяется своим первым членом. Таким образом, функции как отображения множеств в V отождествляются со своими графиками. Если f — функция, мы часто пишем $W = f(U)$ вместо $\langle U, W \rangle \in f$. Кроме того,

$$f^{-1}(X) = \{Y \mid f(Y) \in X\},$$

$$f|_X = \{\langle U, W \rangle \in f \mid U \in X\}.$$

Семейство $\{X_\gamma\}_{\gamma \in Z}$ как элемент V по определению есть функция, состоящая из пар $\{\langle \gamma, X_\gamma \rangle \mid \gamma \in Z\}$ и т. п.

Еще раз подчеркнем: самое главное в этих определениях то, что мы не вводим никаких новых объектов, кроме элементов V , и никаких новых отношений, кроме выражимых в терминах $\in$. Стоит также отметить, что в соответствии с обычным (экстенциональным) пониманием, **свойство** элементов множества X из V есть **множество** $Y \subseteq X$ (состоящее из всех элементов с этим свойством). Поэтому $Y \subseteq V$, так что свойства, и свойства свойств, и свойства множеств свойств... (с трансфинитной интерацией) суть элементы V .

Универсум V заслуживает своего имени.

17. Покажем, наконец, что цепочки $X_1 \ni X_2 \ni \dots$ из элементов V обрываются (конечно, на пустом множестве). Мы установим, что если X непусто, то существует $Y \in X$ с $Y \cap X = \emptyset$ (обрыв цепочек получается, если применить это утверждение к множеству X членов цепочки). Действительно, пусть Y — элемент наименьшего ранга в X (он существует, ибо ранги, будучи ординалами, вполне упорядочены). Если бы оказалось, что $X \cap Y \neq \emptyset$, то элемент $Y \cap X$ имел бы ранг, меньший ранга Y , — противоречие.

18. Связь с аксиомами $L_1\text{Set}$. Точка зрения, принятая в этой книге, состоит в следующем.

Определим ранг любого множества $X \in V$: ранг $X = \alpha$, если $X \in V_{\alpha+1}$, и это наименьший α с таким свойством. Если $Y \in X$, то ранг $X \geq \text{ранг } Y + 1$.

14.

Все ординалы принадлежат V ; $(\text{ранг } \alpha) = \alpha$.

Покажем сначала, что $\alpha \in V_{\alpha+1}$ для всех ординалов α . Это так для $\alpha = 0$. Предположим, что α — наименьший ординал с $\alpha \notin V_{\alpha+1}$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $\beta \in V_{\beta+1}$, откуда $\beta, \{\beta\} \in V_{\beta+2} = \mathcal{P}(V_{\beta+1})$ и, значит, $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} \in V_{\beta+2} = V_{\alpha+1}$ — противоречие. Если же α — предельный ординал, то $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$ и $\beta \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$ по выбору α , так что $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta \cup V_\alpha = V_\alpha$ и $\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$ — противоречие. Таким образом, ранг $\alpha \leq \alpha$; аналогично доказывается строгое равенство.

15.

Универсум V замкнут относительно стандартных операций над множествами: разность, объединение, пересечение, образование $\mathcal{P}(X)$ и $\bigcup Y$, «собирание» множеств, пронумерованных некоторым множеством $\{X_\gamma\}_{\gamma \in X}$. В частности, если $X, Y \in V_\alpha$, то пара $\{X, Y\} \in V_{\alpha+1}$. Мы пишем $\{X\}$ вместо $\{X, X\}$.

16. Прямые произведения, отношения, функции также могут быть определены как элементы V с помощью приема, предложенного Куратовским. Интуитивное представление об упорядоченной паре множеств $X, Y \in V$ реализуется с помощью множества $\langle X, Y \rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$.

Упорядоченные пары как элементы V характеризуются следующими свойствами: это множества из двух элементов X', Y' ; один из них является подмножеством другого (скажем, $X' \subseteq Y'$); если $X' \subseteq Y'$, то $X' = \{X\}$ — одноэлементное множество, и его единственный элемент X называется первым членом пары; Y' является не более чем двухэлементным множеством, и его отличный от X элемент Y (если он есть) или сам X (в противном случае) называется вторым членом пары. Поэтому $\langle X, Y \rangle = \langle X', Y' \rangle$ в том и только том случае, когда $X = X', Y = Y'$, что оправдывает название.

Подчеркнем, что это определение вводится для того, чтобы при конструировании прямых произведений не выходить за пределы V и чтобы множество, отвечающее прямому произведению, можно было описать только в терминах отношения $\in$, т. е. на языке $L_1\text{Set}$.

Упорядоченная n -ка множеств определяется как

$$\langle X_1, \dots, X_n \rangle = (\dots (\langle X_1, X_2 \rangle, X_3) \dots).$$

Интуитивные представления о множествах, к которым мы апеллировали в предшествующем изложении, строя универсум V , являются первичным материалом. Язык $L_1\text{Set}$ изобретен для того, чтобы писать на нем формальные тексты, эквивалентные нашим со-держательным рассуждениям относительно V . Аксиомы $L_1\text{Set}$ (включая логические) получены в результате анализа содержа-тельных доказательств. Критерием полноты их списка служит воз-можность написать формальный вывод, являющийся переводом любого содержательного доказательства. Эта возможность должна быть продемонстрирована компендиумом формальных текстов до-статочного объема. Читатель найдет их в других книгах.

В частности, в $L_1\text{Set}$ можно написать и вывести из аксиом фор-мулу « $\forall x \exists$ ординал $\alpha (x \in V_\alpha)$ », формально отражающую наше огра-ничение множествами из V .

Вопрос о формальной непротиворечивости аксиом Цермело — Френкеля должен оставаться предметом веры, пока и поскольку не продемонстрирована их противоречивость. Все те доказательства, которые были основаны на них, до настоящего момента не при-вели к противоречию, но развернули перед нами богатый мир классической и современной математики. Этот мир обладает неко-торой реальностью и внутренней жизнью, мало зависящей от фор-мализмов, призванных его описывать.

Обнаружение противоречия в любом из этих формализмов, бу-де оно и произойдет, послужит лишь прояснению, уточнению и, возможно, перестройке наших представлений, но не их крушению, как это многократно случилось в прошлом.

Глава III

ПРОБЛЕМА КONTИНУУМА И ФОРСИНГ

1. ЗАДАЧА; РЕЗУЛЬТАТ; ИДЕИ

1.1. Кантору принадлежат две фундаментальные идеи в теории бесконечных множеств; открытие (или изобретение?) шкалы их мощностей и доказательство неограниченности этой шкалы.

Напомним, что два множества M, N называются *равномощны-ми* (запись: $\text{card } M = \text{card } N$), если между ними существует взаим-но-однозначное соответствие. Мы пишем $\text{card } M \leq \text{card } N$, если M равномощно части N . Мы говорим, что M и N *сравнимы*, если либо $\text{card } M \leq \text{card } N$, либо $\text{card } N \leq \text{card } M$. Мы пишем $\text{card } M > \text{card } N$, если $\text{card } M \geq \text{card } N$, но M и N не равномощны.

1.2. Теорема (Кантор, Шредер, Бернштейн, Цермело).

а) Любые два множества *сравнимы*. Если $\text{card } M \leq \text{card } N$ и $\text{card } N \leq \text{card } M$ одновременно, то $\text{card } M = \text{card } N$. Коротко: *мощно-сти линейно упорядочены*.

б) Пусть $\mathcal{P}(M)$ — множество всех частей (подмножеств) M . Тогда $\text{card } \mathcal{P}(M) > \text{card } M$. В частности, самой большой мощности не существует.

в) В любом классе мощностей существует наименьшая. Корот-ко: *мощности вполне упорядочены*.

Доказательство. а) Пусть M равномощно части $M' \subseteq N$ и N равномощно части $N_1 \subseteq M \sim M'$. Отождествим M с M' . Мы полу-чим три множества $N_1 \subseteq M \subseteq N$ и взаимно-однозначное отображе-ние: $f: N \rightarrow N_1$. Построить же нужно взаимно-однозначное отобра-жение $g: N \rightarrow M$. Вот его явное описание:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если же } x \in f^n(N) \setminus f^n(M) \text{ для некоторого } n \geq 0, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $f^n(y) = f(f \dots f(y) \dots)$ (n раз); $f^n(N) = \{f^n(y) \mid y \in N\}$.

Проверка свойств f оставляется читателю.

Для доказательства сравнимости любых двух множеств доста-точно установить, что любое множество может быть вполне упо-рядочено, сравнимость вполне упорядоченных множеств следует из леммы 5 приложения к гл. II.

Пусть M — некоторое множество. Для каждого непустого под-множества $N \subseteq M$ выберем некоторый его элемент $s(N) \in N$. Пол-ное упорядочение $<$ подмножества $M' \subseteq M$ назовем *допустимым* (относительно s), если $s(M \setminus \hat{X}) = X$ для всех $X \in M'$, где $\hat{X} = \{Y \mid Y \in M', Y < X\}$

Если $M' \neq M'$ — подмножества M , на которых есть допустимые полные упорядочения, то одно из них является начальным сегмен-том второго и упорядочения согласования.

Действительно, как в п. 7а² приложения доказывается, что ка-нонический изоморфизм f , скажем, M' с начальным сегментом M'' , есть тождественное вложение: если $f(X) \neq X$ и X наименьший с таким свойством, то $f(\hat{X}) = \hat{X}$, $X = s(M \setminus \hat{X}) \Rightarrow X = s(M \setminus f(\hat{X})) = f(X)$ — противоречие.

Теперь легко устанавливается, что объединение M' всех подмно-жеств M , имеющих допустимое отношение s упорядочения, само допустимо упорядочено и совпадает с M , так как иначе его можно было бы вложить в $M' \cup \{s(M \setminus M')\}$.

Отсюда, в частности, следует, что любое множество равномощ-но некоторому ординалу и, значит, единственному кардиналу. Это оправдывает обозначение card для мощности и употребление кар-