Пусть дана (заключенная в рамку) коммутативная диаграмма абелевых групп и их гомоморфизмов, у которой строки являются точными последовательностями:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} g \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} h \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, to path={-- ([xshift=4em]\tikztostart.east) |- ([yshift=0ex]$(\tikztostart)!0.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-4em]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] & \operatorname{Coker} h \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Тогда ядра и коядра «вертикальных» гомоморфизмов f, g, h встраиваются в шестичленную точную последовательность, как показано на чертеже, причем вся диаграмма из сплошных стрелок коммутативна. Морфизм — «змея» $\operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$, обозначенный пунктирной стрелкой, и есть основной объект, который строится в лемме.

Конечно, диаграмму «со змеей» легко описать последовательно на подходящем более или менее формальном линейном языке. Однако такая процедура требует искусственного и неоднозначного разрыва связей двумерной картины (как при сканировании телевизионного изображения). Более того, отсутствие целостного образа мешает узнаванию аналогичной ситуации в других обстоятельствах и оформлению ее в единый блок.

Детство гомологической алгебры сопровождалось увлеченным распознаванием полезных классов диаграмм. Интерес к ним поначалу был даже преувеличенным: ср. добавление редактора к русскому переводу книги А. Картана и С. Эйленберга «Гомологическая алгебра» [22, с. 466—473].

Имеется, вероятно, уникальный пример целой книги с сознательно введенной двумерной (блочной) структурой: Ч. Линдси, С. ван дер Мюйлен «Неформальное введение в Алгол-68» [23]. Она состоит из 8 глав, каждая из которых разбита на 7 параграфов (в числе которых для соблюдения системы восемь пустых!) Пусть (i, j) — имя j-го параграфа i-й главы, тогда книгу можно изучать «по строкам» матрицы (i, j) или по ее «столбцам», в зависимости от намерений читателя.

Как и все великие предприятия, это плод попытки решить, по всей видимости, неразрешимую задачу, ибо, по замечанию авторов, Алгол-68 нельзя описать для того, как он уже описан.

Глава II

ИСТИННОСТЬ И ВЫВОДИМОСТЬ

1. ЛЕММА ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ЧТЕНИИ

Основное содержание этого параграфа — лемма 1.4 и определения 1.5 и 1.6. Лемма гарантирует однозначность расшифровки термов и формул любого языка класса $\mathscr{L}_1$ и служит основой большинства индуктивных рассуждений. Читатель может принять ее на веру, если он сумел самостоятельно проанализировать последнюю формулу в п. 3.7 гл. I. Важно помнить, что конструкция любого формального языка начинается с заботы о недвусмысленности синтаксических правил.

Начнем со стандартных комбинаторных определений, чтобы фиксировать терминологию.

1.1. Пусть A — некоторое множество. Последовательностью длины n из элементов A называется отображение множества $\{1, \ldots, n\}$ в A. Образ i при этом отображении называется i-м членом последовательности. Значению $n=0$ отвечает пустая последовательность. Последовательности длины 1 иногда будут отождествляться с элементами A.

Последовательность длины n записывается также в виде $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$, где a_i — ее i-й член. Число i называется номером члена a_i. Если $P=(a_1, \ldots, a_n)$, $Q=(b_1, \ldots, b_m)$ — две последовательности, их *соединением* PQ называется последовательность $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ длины $m+n$, i-й член которой есть a_i при $i \leqslant n$, b_{i-n} при $n+1 \leqslant i \leqslant n+m$. Аналогично определяется соединение конечной последовательности последовательностей.

Вхождением последовательности Q в P называется любое представление P в виде соединения P_1QP_2. Подставить последовательность R вместо данного вхождения Q в P — значит построить последовательность P_1RP_2.

Пусть Π^+, Π^- — два непересекающихся подмножества в $\{1, \ldots, n\}$. Отображение $c\colon \Pi^+ \to \Pi^-$ называется *скобочной биекцией*, если оно биективно и удовлетворяет условиям:

а) $c(i) > i$ для всех $i \in \Pi^+$;

б) для каждого i условие $j \in [i, c(i)]$ равносильно $c(j) \in [i, c(i)]$.

1.2. Лемма.

Для данных Π^+, Π^-, если скобочная биекция существует, то она единственна.

Эта лемма будет применяться к выражениям в языках класса $\mathscr{L}_1$: Π^+ — номера мест в данном выражении, на которых стоит открывающаяся скобка, Π^- — номера мест, на которых стоит закрывающая скобка, отображение c сопоставляет каждой открывающей скобке соответствующую закрывающую.

Доказательство. Пусть функция $\varepsilon:\{1, \ldots, n\}\longrightarrow\{0, \pm 1\}$ принимает значение 1 на Π^+, -1 на Π^- и 0 в остальных местах. Утверждается, что тогда для каждого $i\in\Pi^+$, любой скобочной биекции $c:\Pi^+\longrightarrow\Pi^-$ и любого k $(1\leqslant k\leqslant c(i)-i)$ выполнены соотношения

$$\sum_{j=i}^{c(i)} \varepsilon(j)=0, \qquad \sum_{j=i}^{c(i)-k} \varepsilon(j)>0.$$

Доказав их, мы установим лемму, ибо получим следующий рецепт, однозначно восстанавливающий c по Π^+, Π^-: $c(i)$ есть наименьшее $l>i$, для которого $\sum_{j=i}^{l} \varepsilon(j)=0$.

Первое соотношение следует из того, что элементы Π^+ и Π^- входят в отрезок $[i, c(i)]$ только парами $(j, c(j))$ и $\varepsilon(j)+\varepsilon(c(j))=0$. Для доказательства второго допустим, что для некоторых i, k имеем $\sum_{j=i}^{c(i)-k} \varepsilon(j)\leqslant 0$. Так как $\varepsilon(i)=1$, то $\sum_{j=i+1}^{c(i)-k} \varepsilon(j)<0$. Значит, на отрезке $[i+1, c(i)-k]$ число элементов из Π^- строго больше, чем из Π^+. Пусть $c(j_0)\in\Pi^-$ — такой элемент на этом отрезке, что $j_0\notin[i+1, c(i)-k]$. Тогда $j_0\leqslant i$, даже $j_0<i$, ибо $c(i)$ лежит вне отрезка. Значит, лишь один член пары j_0, $c(j_0)$ лежит в $[i, c(i)]$, что противоречит определению c.

1.3. Пусть теперь A — алфавит некоторого языка L класса $\mathscr{L}$ (см. § 2 гл. I). Конечные последовательности элементов A суть выражения этого языка. Некоторые выражения были отмечены как формулы или термы.

Напомним, что из определений § 2 гл. I вытекает следующее:

а) любой терм языка L является либо константой, либо переменной, либо представляется в виде $f(t_1, \ldots, t_r)$, где f — операция ранга r, а $t_1, \ldots, t_r$ — термы меньшей длины;

б) любая формула языка L представляется либо в виде $p(t_1, \ldots, t_r)$, где p — отношение ранга r; $t_1, \ldots, t_r$ — термы меньшей длины, либо в одном из семи видов:

$$(P)\longleftrightarrow(Q),\ (P)\rightarrow(Q),\ (P)\vee(Q),$$
$$(P)\wedge(Q),\ \neg(P),\ \forall x(P),\ \exists x(P),$$

где P, Q — формулы меньшей длины; x — переменная.

Отсюда индукцией по длине получается такой результат: *если выражение E является термом или формулой, то между множеством Π^+ номеров открывающих скобок в нем и множеством Π^- номеров закрывающих скобок существует скобочная биекция.* Действительно, новые скобки в п. 1.3а, б находятся в естественной биекции, а старые (скрыты в сокращенных записях $t_1, \ldots, t_r$, P, Q) допускают такую биекцию по индуктивному предположению. Кроме того, новые скобки не разрезают пар старых.

Теперь мы можем сформулировать основной результат параграфа.

1.4. Лемма об однозначном чтении.

Каждое выражение языка L является либо термом, либо формулой, либо ни тем, ни другим.

Эти альтернативы, а также все альтернативы, перечисленные в п. 1.3а, б являются взаимоисключающими.

Каждый терм (соответственно формула) представляется точно в одном из видов, описанных в п. 1.3а (соответственно п. 1.3,б), и однозначно.

Кроме того, по ходу доказательства мы установим, что *если некоторое выражение является соединением конечной последовательности термов, то оно представляется в таком виде однозначно.*

Доказательство. Проведем индукцию по длине выражения и опишем неформально алгоритм синтаксического анализа, однозначно выясняющий, какая из альтернатив имеет место.

а) Если в выражении E нет скобок, то оно является либо термом-константой, либо термом-переменной, либо не термом и не формулой.

б) Если в выражении E есть скобки, но не существует скобочной биекции между открывающими и закрывающими скобками, то E не является ни термом, ни формулой.

в) Пусть в E есть скобки и скобочная биекция между ними. Тогда E либо однозначно представляется в одном из девяти видов: $f(E_0)$ (f — операция); $p(E_0)$ (p — отношение);

$$(E_1)\longleftrightarrow(E_2);\ (F_1)\rightarrow(E_2);\ (E_1)\vee(E_2);$$
$$(E_1)\wedge(E_2);\ \neg(E_3);\ \forall x(E_3);\ \exists x(E_3),$$

либо не является ни термом, ни формулой. Подразумевается, что выписанные пары скобок связаны единственной скобочной биекцией, по предположению существующей в E: это и обеспечивает однозначность. В самом деле, вид $f(E_0)$ получается, если первый элемент выражения есть операция, второй — скобка (, а последний — парная ей скобка), и только в этом случае, и т. д.

Таким образом, мы свели задачу к синтаксическому анализу выражений меньшей длины E_0, E_1, E_2, E_3. Это почти завершает описание алгоритма, потому что относительно E_1, E_2, E_3 нужно выяснить, являются ли они формулами. Однако относительно E_0 нужно выяснить, является ли это выражение соединением термов в надлежащем числе и однозначно ли это представление.

Ответ положителен. Следующий рецепт позволяет последовательно отделять слева термы в соединении термов.

г) Пусть E_0 — некоторое выражение, между скобками которого есть скобочная биекция. Если представление E_0 в виде tE'_0, где t — терм, существует, то оно однозначно.

Действительно, E_0 либо однозначно представляется в одном из видов:

xE'_0, cE'_0, $f(E''_0)E'_0$

(x — переменная, c — константа, f — операция, скобки связаны единственной скобочной биекцией в E_0), либо вообще не представляется в виде tE'_0, где t — терм.

В случаях $E=xE'_0$ или cE'_0 это, очевидно, единственный способ отщепить терм слева. В случае $E_0=f(E''_0)E'_0$ вопрос сводится к анализу того, является ли E''_0 соединением термов в количестве *ранг* f. Индукция по длине E_0 позволяет предположить, что ответ либо отрицателен, либо положителен и тогда E''_0 разлагается в соединении термов однозначно. Лемма доказана.

Упражнение: сформулировать и доказать лемму об однозначном чтении для «бесскобочного» диалекта $\mathscr{L}_1$, описанного в гл. I «Отступление о синтаксисе», п. 2а.

Вот первые индуктивные рассуждения, описывающие противопоставление свободных и связанных вхождений переменной в термы и формулы. Корректность следующих определений обеспечивается леммой 1.4.

1.5. Определение.

а) *Всякое вхождение переменной в атомарную формулу или терм свободно.*

б) *Всякое вхождение переменной в* $\neg(P)$ *или в* $(P_1)*(P_2)$ ($*$ — *любая связка) свободно (соответственно связано) в точности тогда, когда свободно (соответственно связано) соответствующее вхождение в* P, P_1 *или* P_2.

в) *Всякое вхождение переменной* x *в* $\forall x(P)$ и $\exists x(P)$ *связано. Вхождения остальных переменных в* $\forall x(P)$ *и* $\exists x(P)$ *таковы же, как соответствующие вхождения в* P.

Пусть дано вхождение квантора $\forall$ (или $\exists$) в формулу P. Из определений следует, что вслед за ним в P входит переменная и открывающая скобка. Выражение, начинающееся с этой переменной и кончающееся соответствующей закрывающей скобкой, называется *областью действия* данного (вхождения) квантора.

1.6. Определение.

Пусть дана формула P, *свободное вхождение переменной* x *в* P *и терм* t. *Мы говорим, что данное вхождение* x *не связывает* t *в* P, *если оно не лежит в области действия ни одного квантора вида* $\exists y$ *или* $\forall y$, *где* y — *переменная, входящая в* t.

Иными словами, после подстановки t вместо данного вхождения x все переменные, входящие в t, останутся свободными в P.

Чаще всего приходится подставлять терм вместо каждого из свободных вхождений данной переменной. Важно, что такая операция переводит термы в термы и формулы в формулы (индукция по длине). Если каждое свободное вхождение x в P не связывает t, мы будем говорить просто, что x не связывает t в P.

1.7. Работать с определениями 1.5 и 1.6 мы начнем в следующем параграфе. Здесь ограничимся некоторыми интуитивными пояснениями.

Определение 1.5 позволяет ввести важный класс *замкнутых* формул. По определению, это — формулы без свободных переменных (их называют еще суждениями). Интуитивный смысл понятия замкнутой формулы таков. Оно отвечает вполне определенному (в частности, в отношении истинности или ложности) высказыванию: имена неопределенных объектов теории используются только в контексте «все объекты x удовлетворяют условию ...» или «существует объект y со свойством ...». Наоборот, незамкнутая формула $x\in y$ или $\exists\ x\,(x\in y)$ может быть истинной или ложной в зависимости от того, какие множества нарекаются именами x, y (для первой); y (для второй). Истинность или ложность понимаются здесь для фиксированной интерпретации языка, как это будет объяснено в § 2.

Определение 1.6, в частности, устанавливает правила гигиены при перемене обозначений. Если в данной формуле мы хотим назвать неопределенный объект x другим именем y, то обязательно нужно позаботиться о том, чтобы x не фигурировало в тех частях формулы, где это имя y было уже использовано в качестве обозначения *произвольного* неопределенного объекта под знаком квантора. Иными словами, x не должен связывать. Более того, если мы хотим сказать, что x получился посредством каких-то операций из других неопределенных объектов (x=терм от $y_1, \ldots, y_n$), то имена $y_1, \ldots, y_n$ не должны быть связаны.

Близкая параллель к этим правилам из языка анализа: вместо $\int_1^x f(y)\,dy$ можно спокойно написать $\int_1^x f(z)\,dz$, но не следует писать $\int_1^x f(x)\,dx$: переменная x связана "в области действия знака $f(\ )\,d(\ )$".

2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ; ИСТИННОСТЬ; ВЫРАЗИМОСТЬ

2.1. Пусть задан язык L класса $\mathscr{L}_1$ и некоторое множество (или класс) M. Задать *интерпретацию* языка L в M — значит указать способ придания смысла формулам L как высказываниям об элементах M.

Точнее говоря, интерпретация φ языка L в M состоит из набора отображений, которые сопоставляют термам и формулам языка элементы M или структуры над M (в смысле Бурбаки). Эти отображения делятся на *первичные*, которые собственно и определяют интерпретацию, и *вторичные*, которые естественно и однозначно восстанавливаются по первичным. Сами эти отображения, а иногда и их значения мы также будем называть интерпретациями.

Перейдем к систематическим определениям. Элементы алфавита L будем иногда называть *символами*. Обозначение интерпретации φ мы будем включать в обозначения связанных с ней отображений или опускать его в зависимости от контекста.

2.2. Первичные отображения.

а) Интерпретация констант есть отображение множества символов констант (алфавита L') в M, которое символу c ставит в соответствие $\varphi(c)\in M$.

б) Интерпретация операций есть отображение множества символов операций (алфавита L'), которое каждому символу f ранга r ставит в соответствие функцию $\varphi(f)$ на $M\times \ldots \times M=M^r$ со значениями в M.

в) Интерпретация отношений есть отображение множества символов отношений (алфавита L'), которое каждому символу p ранга r ставит в соответствие подмножество $\varphi(p)\subseteq M^r$.

Вторичные отображения. Интуитивно, мы хотим интерпретировать переменные как имена «общего элемента» множества M, которым можно придавать конкретные значения из M. Терм $f(x_1, \ldots, x_r)$ мы хотим интерпретировать как функцию $\varphi(f)$ от r аргументов, пробегающих значения из M и т. п.

Чтобы дать точное определение, введем *интерпретационный класс* $\overline{M}$:

$\overline{M}$=класс всех отображений в M множества символов переменных в алфавите L'.

Таким образом, каждая точка $\xi\in\overline{M}$ ставит в соответствие любой переменной x ее значение $\varphi(x)(\xi)\in M$, которое мы чаще будем обозначать просто x^ξ.

Это позволяет рассматривать переменные как *функции на* $\overline{M}$ *со значениями в* M. Более общо:

2.3. Интерпретация термов есть сопоставление каждому терму t функции $\varphi(t)$ на $\overline{M}$ со значениями в M. Оно определяется индуктивно следующими соглашениями:

а) если c — константа, то $\varphi(c)$ есть постоянная функция со значением, которое определено первичным отображением;

б) если x — переменная, то $\varphi(x)$ есть $\varphi(x)(\xi)$ как функция от ξ;

в) если $t=f(t_1, \ldots, t_r)$, то для всех $\xi\in\overline{M}$

$$\varphi(t)(\xi)=\varphi(f)(\varphi(t_1)(\xi), \ldots, \varphi(t_m)(\xi)),$$

где $\varphi(t_i)(\xi)$ определены по индуктивному предположению, а $\varphi(f): M^r\to M$ заданы первичным отображением.

Вместо $\varphi(t)(\xi)$ мы будем для краткости писать иногда t^ξ.

2.4. Интерпретация атомарных формул. Всякой формуле P языка L' при интерпретации φ приписывается ее *функция истинности* $|P|_\varphi$. Это — функция на интерпретационном классе $\overline{M}$, принимающая только значения 0 («ложь») и 1 («истина»). Для атомарных формул она определяется так:

$$|p(t_1, \ldots, t_r)|_\varphi(\xi)=\begin{cases}1, & \text{если } \langle t_1^\xi, \ldots, t_r^\xi\rangle\in\varphi(p),\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Интуитивно высказывание p об именах $t_1, \ldots, t_r$ объектов из M становится истинным, если объекты, названные именами $t_1, \ldots, t_r$, удовлетворяют отношению, именем которого является это высказывание.

2.5. Интерпретация формулы. На неатомарных формулах функция истинности определяется индуктивно следующими соотношениями (скобки и указание на φ и ξ для краткости опущены):

$|P\longleftrightarrow Q|=|P||Q|+(1-|P|)(1-|Q|)$:

$P\longleftrightarrow Q$ истинна, когда либо P и Q обе истинны, либо P и Q обе ложны;

$|P\to Q|=1-|P|+|P||Q|$:

$P\to Q$ ложна, только когда P истинна, а Q ложна;

$|P\vee Q|=\max(|P|, |Q|)$:

$P\vee Q$ ложна, только когда обе P, Q ложны;

$|P\wedge Q|=\min(|P|, |Q|)$:

$P\wedge Q$ истинна, только когда обе P, Q истинны;

$|\neg P|=1-|P|$:

$\neg P$ ложна, только когда P истинна.

Наконец, при введении кванторов происходит следующее. Пусть $\xi\in\overline{M}$, x — некоторая переменная. Назовем *изменением* ξ *по* x любую точку $\xi'\in\overline{M}$, для которой $y^\xi=y^{\xi'}$, если y — любая переменная, отличная от x. Тогда

$$|\forall xP|(\xi)=\min_{\xi'}|P|(\xi'); \quad |\exists xP|(\xi)=\max_{\xi'}|P|(\xi'),$$

где ξ' пробегает все изменения ξ по x.

Корректность определений 2.3—2.5 обеспечивает лемма об однозначном чтении.

Мы будем называть формулу P *φ-истинной*, если $|P|_\varphi(\xi)=1$ для всех $\xi\in\overline{M}$. Интерпретация φ (или M) называется *моделью* множества формул ε, если все элементы ε φ-истинны.

2.6. Пример: стандартная интерпретация $L_1 Ar$. Это — интерпретация во множестве N целых неотрицательных чисел, при которой $\overline{0}$, $\overline{1}$ интерпретируются как 0, 1 соответственно; $+$, $\cdot$, $=$ как сложение, умножение и равенство соответственно.

2.7. Пример: стандартная интерпретация $L_1 Set$. Это — интерпретация в универсуме фон Неймана V (см. приложение), при которой $\varnothing$ интерпретируется как пустое множество, $\in$ как отношение «быть элементом», $=$ как равенство.

Все примеры перевода в гл. I относились к этим стандартным интерпретациям. Связь образцов перевода с нынешними определениями такова. Пусть $\Pi(x, y, z)$ высказывание на арго о неопределенных множествах x, y, z из V; $P(x, y, z)$ — перевод Π на язык $L_1 Set$. Тогда для любой точки ξ, интерпретирующей x, y, z как имена множеств x^ξ, y^ξ, z^ξ из универсума фон Неймана, имеем

$\Pi(x^\xi, y^\xi, z^\xi)$ истинно $\Longleftrightarrow |P(x, y, z)|(\xi)=1$.

Таким образом, каждая формула выражает некоторое свойство объектов интерпретационного множества:

2.8. Определение.

Множество $S\subseteq M^r$, $r\geqslant 1$, называется φ-выразимым (формулой P в языке L относительно интерпретации φ), если существуют такие переменные $x_1, \ldots, x_r$, что

$$|P|_\varphi(\xi)=1 \Longleftrightarrow \langle x_1^\xi, \ldots, x_r^\xi\rangle\in S.$$

Проникновение в структуру множеств:

φ-истинных формул в языке L;

φ-выразимых множеств в $\bigcup\limits_{r\geqslant 1} M^r$

принадлежит к числу важнейших задач о формальных языках.

2.9. Пример. Выразимые посредством $L_1 Ar$ множества относительно стандартной интерпретации — это наименьший класс множеств в $\bigcup\limits_{r\geqslant 1} N^r$, **который**

а) содержит все множества вида

$\{\langle k_1, \ldots, k_r\rangle \mid F(k_1, \ldots, k_r)=0\}\subseteq N^r$,

где F пробегает многочлены с целыми коэффициентами;

б) замкнут относительно конечных пересечений, объединений и дополнений (в своем N^r);

в) замкнут относительно проекций $\overline{pr_i}: N^r\to N^{r-1}$ (подразумевается, что число переменных языка бесконечно):

$\overline{pr_i}\langle k_1, \ldots, k_r\rangle=\langle k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_r\rangle$.

В самом деле, множества типа а) выражаются атомарными формулами $t^F{}_1=t^F{}_2$, где $t^F{}_1$ — терм, отвечающий сумме всех одночленов F с положительными коэффициентами, а $t^F{}_2$ — с отрицательными.

Далее, если S_1, $S_2\subseteq N^r$ выразимы формулами P_1, P_2 с одинаковыми свободными переменными, то $S_1\cap S_2$ выразимо $P_1\wedge P_2$, $S_1\cup S_2$ выразимо $P_1\vee P_2$, N^r/S_1 — формулой $\neg P_1$. Наконец, множество $\overline{pr_i}(S_1)$ выразимо формулой $\exists x_i(P_1)$.

Связки $\to$, $\leftrightarrow$ и квантор $\forall$ не дают ничего нового, ибо, не меняя выражаемого множества, их можно заменить комбинацией уже рассмотренных логических операций: $\forall x$ на $\neg\exists x\neg$ и т. п.

Это — лишь первоначальное описание *арифметических*, т. е. $L_1 Ar$-выразимых множеств. Из него непосредственно нельзя усмотреть выразимости многих конкретных множеств например множества простых чисел в N (см. пример 3.14 гл. I), множества неполных частных при разложении $\sqrt[3]{2}$ в непрерывную дробь или множества пар $\{\langle i$, i-я цифра в десятичном разложении $\pi\rangle\}\subset N^2$.

Однако, как мы покажем в § 11, «номера истинных формул арифметики» образуют еще гораздо более сложное множество, и оно невыразимо.

Приведем теперь несколько простых технических результатов.

2.10. Предложение.

Пусть P — формула в языке L, φ — его интерпретация в M, ξ, $\xi'\in M$. Предположим, что для всех переменных x, имеющих свободные вхождения в P, x^ξ, совпадает с $x^{\xi'}$. Тогда $|P|_\varphi(\xi)=|P|_\varphi(\xi')$.

2.11. Следствие.

Замкнутые формулы P в любой интерпретации определены в отношении истинности: $|P|_\varphi(\xi)$ не зависит от ξ.

Доказательство. а) Пусть t — некоторый терм и пусть для любой переменной x, входящей в t, имеем $x^\xi=x^{\xi'}$. Тогда лемма 1.4 и индукция по длине t дают $t^\xi=t^{\xi'}$.

б) Утверждение 2.10 верно для атомарных формул P вида $p(t_1, \ldots, t_r)$. В самом деле,

$$|P|(\xi)=\begin{cases}1, & \text{если } \langle t_1^\xi, \ldots, t_r^\xi\rangle\in\varphi(p),\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и аналогично для $|P|(\xi')$. Но если ξ и ξ' совпадают на всех переменных, входящих (обязательно свободно) в P, то тем более они совпадают на всех переменных, входящих в t_i, и по условию а) имеем $t_i^\xi=t_i^{\xi'}$, $i=1, \ldots, r$. Значит, $|P|(\xi)=|P|(\xi')$.

3—1

в) Проведем теперь индукцию по общему числу связок и кванторов в P. Если P имеет вид $\neg Q$ или $Q_1 * Q_2$, то вывод 2.10 для P из 2.10 для Q, Q_1, Q_2 тривиален.

Пусть теперь P имеет вид $\forall x(Q)$ и 2.10 верно для Q (случай $\exists x(Q)$ разбирается аналогично или сводится к $\forall x$ заменой $\exists x$ на $\neg\forall x\neg$).

Имеем по определению

$$|\forall xQ|(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } |Q|(\eta)=1 \text{ для всех } \eta, \text{ изменений } \xi \text{ по } x, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\forall xQ|(\xi') = \begin{cases} 1, & \text{если } |Q|(\eta')=1 \text{ для всех } \eta', \text{ изменений } \xi' \text{ по } x, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Разрешим в правых частях этих равенств изменять η и η' также по всем переменным, не входящим свободно в Q. Утверждения после слова «если» останутся истинными или ложными в этой более широкой области значений, если они были истинны или ложны раньше по индуктивному предположению для Q. Но тогда η и η' будут пробегать одинаковые области значений, потому что ξ и ξ' отличаются как раз по переменным, не входящим свободно в Q, и еще по x.

Предложение доказано.

Следующий почти очевидный факт лежит в основе многих явлений, свидетельствующих о неадекватности формальных языков интуитивным представлениям (ср. ниже «Парадокс Сколема»):

2.12. Предложение.

Мощность. Мощность класса φ-выразимых множеств не превышает

$\aleph_0 + \mathrm{card}$ ({константы} $\cup$ {операции} $\cup$ {отношения} L)

(card обозначает мощность).

Доказательство. Если в языке $\leqslant \aleph_0$ переменных, то в нем не более $\aleph_0 + \mathrm{card}$ ({константы} $\cup$ {операции} $\cup$ {отношения}) формул. Если же множество переменных несчетно, то каждое выразимое множество может быть выражено формулой, переменные которой входят в раз навсегда фиксированное счетное подмножество переменных.

2.13. Следствие.

Если M бесконечно и card ({константы} $\cup$ {операции} $\cup$ {отношения}) $< 2^{\mathrm{card}\, M}$, *то "почти все" множества невыразимы.*

Таким образом, единственный способ выразить все подмножества M — набрать огромное количество имен-констант в языке. Для языков, отражающих реальные математические рассуждения, это нереалистический рецепт. По существу, любой финитно описываемый набор средств выражения дает возможность выразить только счетное число множеств. Технически, однако, бывает удобно включать в алфавит языка, скажем, имена всех элементов M.

В следующих параграфах мы приступаем к систематическому изучению множеств истинных формул.

Пусть L — язык класса $\mathscr{L}_1$, φ — его интерпретация, T_φL — множество φ-истинных формул. В этом параграфе мы перечислим те свойства T_φL, которые отражают заложенную в языки $\mathscr{L}_1$ логику независимо от конкретных особенностей интерпретации φ.

3.1.

Множество T_φL полно. По определению это означает, что для любой замкнутой формулы P, либо P, либо $\neg P$ лежит в T_φL.

Это следует из утверждения 2.11.

3.2.

Множество T_φL не содержит противоречия, т. е. ни для какой формулы P не может быть, чтобы P и $\neg P$ лежали в T_φL.

Действительно, $T_\varphi \mathrm{L} = \{P \mid |P|_\varphi = 1\}$, а $|\neg P|_\varphi = 1 - |P|_\varphi$.

3.3.

Множество T_φL замкнуто относительно применения правил вывода MP (Modus Ponens) и Gen (Generalization — обобщение).

По определению это означает, что если P и $P \to Q$ лежат в T_φL, то также Q лежит в T_φL; если P лежит в T_φL, то $\forall xP$ для любой переменной x лежит в T_φL. Проверка почти очевидна: если $|P|_\varphi = 1$ и $|P \to Q|_\varphi = 1$, то обязательно $|Q|_\varphi = 1$; если $|P|_\varphi(\xi) = 1$ для всех ξ, то и $|\forall xP|_\varphi(\xi) = 1$.

Формула Q называется *непосредственным следствием формул* P, $P \to Q$ по правилу MP.

Формула $\forall xP$ называется *непосредственным следствием формулы P по правилу вывода* Gen.

Интуитивный смысл правил вывода следующий. Правило MP отвечает элементарному рассуждению типа: Если верно P и верно, что из верности P следует верность Q, то верно Q. Таким образом, можно сказать, что семантика выражения «если ..., то» естественных языков распределяется между семантикой связки $\to$ и правила вывода MP в языках класса $\mathscr{L}_1$.

Это часто не учитывается и приводит к недоразумениям при объяснении правил приписывания истинности формуле $P \to Q$.

Правило Gen соответствует практике записи тождества или универсально верных утверждений в математике. Когда мы пишем $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ или «в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», кванторы $\forall a \forall b$, $\forall$ (треугольник) опускаются. Восстановление их не меняет истинности, но высвобождает связанные обозначения.

3.4.

Множество $T_\varphi L$ содержит все тавтологии. Чтобы определить тавтологии, введем сначала понятие *логического многочлена* над множеством формул ε: это элемент наименьшего множества формул, содержащего ε и замкнутого относительно конструкции формул с помощью логических связок.

Последовательность формул $P_1, \ldots, P_n$ и представлений каждой из формул P_i в виде $\neg Q$ или $Q_1 * Q_2$, где Q, Q_1 Q_2 лежат в $\varepsilon \cup \{P_1, \ldots, P_{i-1}\}$, называется *представлением* P_n в виде логического многочлена над ε. Представление P_n не обязательно определено однозначно: например, если $\varepsilon = \{P, Q, P \to Q\}$, то $P \to Q$ имеет два представления.

Пусть $|\ \ |: \varepsilon \to \{0, 1\}$ — любое отображение. Если задано представление r формулы P_n в виде логического многочлена над ε, то можно рекурсивно определить $|P_n|_r$ относительно этого представления, пользуясь формулами п. 2.5.

Формула P называется тавтологией, если существует такое множество формул ε и такое представление P в виде логического многочлена над ε, что $|P|_r = 1$ для любых отображений $|\ \ |: \varepsilon \to \{0, 1\}$.

Тавтологичность эффективно распознаваема, ибо синтаксический анализ P позволяет перечислить все представления P как логического многочлена.

Принадлежность тавтологий к $T_\varphi L$ очевидна.

Вот первые примеры тавтологий:

А.0. $P \to P$,
А.1 $P \to (Q \to P)$,
А.2. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$,
А.3. $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$,
В.1. $\neg\neg P \to P$, $P \to \neg\neg P$,
В.2. $\neg P \to (P \to Q)$.

Здесь P, Q, R — любые формулы L; вид формул указывает на то представление тавтологий в виде логического многочлена над $\{P, Q, R\}$, которое имеется в виду.

Тавтологии — это рассуждения, истинные, независимо от истинности или ложности своих составных частей. Проверка тавтологичности требует достаточно удачного выбора этих частей.

В.1 — это закон исключенного третьего: двойное отрицание равносильно утверждению.

В.2 — это механизм, с помощью которого противоречие в некотором множестве формул ε языка L приводит к выводимости любой формулы и тем самым разрушает всю систему (см. приложение 4.2 ниже.) Продемонстрируем три варианта проверки тавтологичности простой формулы А.1.

Вариант А. По формулам п. 2.5 имеем

$$|P \to (Q \to P)| = 1 - |P| + |P \| Q \to P| = 1 - |P| + |P|(1 - |Q| + |P \| Q|) = 1,$$

ибо $|P|^2 = |P|$.

Вариант Б. Протабулируем $|P \to (Q \to P)|$ в зависимости от $|P|$, $|Q|$:

$\|P\|$	$\|Q\|$	$\|P \to Q\|$	$\|P \to (Q \to P)\|$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Это — образец «таблиц истинности».

Вариант В. Основное свойство связки $\to$ состоит в том, что $P \to Q$ ложно, только если P истинно, а Q ложно. Если бы $P \to (Q \to P)$ оказалось ложным, то P было бы истинным, а $Q \to P$ ложно, откуда, в свою очередь, Q истинно, в P ложно — противоречие.

Читателю рекомендуется проверить тавтологичность более сложных формул (скажем, А.2) и решить, какой вариант ему больше нравится.

3.5.

Множество $T_\varphi L$ содержит „логические аксиомы с кванторами", т. е. формулы

а) $\forall x (P \to Q) \to (P \to \forall x Q)$, если все вхождения x в P связаны;

б) $\forall x \neg P \longleftrightarrow \neg \exists x P$;

в) $\forall x P(x) \to P(t)$, если x не связывает терм t в P (*аксиома специализации*). Здесь $P(t)$ означает результат подстановки t вместо всех свободных вхождений x в P.

В остальном формулы P, Q произвольны.

Проверку φ-истинности формул 3.5 мы проведем в п. 3.7. Их интуитивный смысл более или менее ясен. Аксиома специализации, например, означает, что если $P(x)$ верна для всех x, то верна и $P(t)$, где t — название любого объекта. Условие, чтобы x не связывала t, — гигиеническое правило при перемене обозначений.

Множество

$$\mathrm{Ax}L = \{\text{тавтологии } L\} \cup \{\text{аксиомы с кванторами}\}$$

называется ***множеством логических аксиом языка*** L.

Будем называть для краткости *гёделевым* любое множество формул ε языка L, *которое полно,* не *содержит противоречия, замкнуто относительно применений правил вывода* MP и Gen и *содержит все логические аксиомы языка.* Зафиксируем основной результат обсуждения:

3.6. Предложение.

Множество истинных формул языка (в *данной интерпретации*) *гёделево.*

В § 6 мы докажем, что и, наоборот, любое гёделево множество является множеством истинных формул в подходящей интерпретации. Таким образом, гёделевость — это максимальное приближение к истинности, которого можно достичь «безотносительно к смыслу».

3.7. *Проверка истинности аксиом 3.5.*

а) Пусть R — формула 3.5а. Допустим, что $|R|(\xi)=0$ для некоторой $\xi\in\overline{M}$ и придем к противоречию.

Действительно, тогда $|\forall x(P\to Q)|(\xi)=1$ и $|P\to\forall xQ|(\xi)=0$. Из второго равенства следует, что $|P|(\xi)=1$ и $|\forall xQ|(\xi)=0$. Пусть ξ' — такое изменение ξ по x, что $|Q|(\xi')=0$. Тогда $|P|(\xi')=|P|(\xi)=1$ в силу предложения 2.10, ибо x не входит в P свободно. Значит, $|P\to Q|(\xi')=0$, но это противоречит тому, что $|\forall x(P\to Q)|(\xi)=1$.

б) Для всех $\xi\in\overline{M}$ и изменений ξ' точки ξ по x имеем

$$\forall x\,\neg P|(\xi)=\max_{\xi'}|\neg P|(\xi')=1=1-\min_{\xi'}|P|(\xi'),$$

$$\neg\exists xP|(\xi)=1-\min_{\xi'}|P|(\xi').$$

Значит, значения истинности $\forall x\neg P$ и $\neg\exists xP$ совпадают, а потому $\forall x\,\neg P\longleftrightarrow\neg\exists xP$ тождественно истинна.

в) Пусть $|\forall xP(x)\to P(t)|(\xi)=0$ для некоторой точки $\xi\in\overline{M}$. Выведем отсюда противоречие. Действительно, тогда

$$\forall xP(x)|(\xi)=1;\quad |P(t)|(\xi)=0.$$

Из первого равенства следует, что $|P(x)|(\xi')=1$ для всех ξ' — изменений ξ по x.

Возьмем в качестве ξ' такое изменение, для которого $x^{\xi'}=t^{\xi}$. Если мы докажем, что $|P(t)|(\xi)=|P(x)|(\xi')$, то получим желаемое противоречие.

Установим этот результат индукцией по общему числу связок и кванторов в P.

в$_1$) Пусть P — атомарная формула $p(t_1,\ldots,t_n)$. Последовательно находим, обозначая через $\bar t_i$ результат подстановки t вместо всех вхождений x в t_i:

$t^{\xi}=x^{\xi'}$ (по определению ξ');

$\bar t_i^{\xi}=t_i^{\xi'}$ (индукцией по длине t_i).

в$_2$) Пусть P есть $\neg Q$ или $Q_1\ast Q_2$, где $\ast$ связка. Так как по предположению x не связывает t в P, то же верно для Q, Q_1, Q_2 и нужный индукционный шаг производится автоматически.

в$_3$) Пусть, наконец, P есть $\exists yQ$ или $\forall yQ$. Разберем первый случай; второй разбирается аналогично.

Подслучай 1. $y=x$. Тогда x связана в P; поэтому $P(x)=P(t)$ и $|P|(\xi)=|P|(\xi')$ по предложению 2.4.

Подслучай 2. $y\neq x$. Индуктивное предположение имеет вид: $|Q(t)|(\eta)=|Q(x)|(\eta')$, *если* η' — *такое изменение* η *по* x, *что* $x^{\eta'}=t^{\eta}$, η — *любая точка из* $\overline{M}$.

Нужно доказать совпадение следующих двух значений истинности (где ξ, ξ' определены, как выше):

$$|\exists yQ(x)|(\xi')=\begin{cases}1, & \text{если } |Q(x)|(\eta')=1 \text{ для некоторой } \eta', \text{ изменения } \xi' \text{ по } y,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

$$|\exists yQ(t)|(\xi)=\begin{cases}1, & \text{если } |Q(t)|(\eta)=1 \text{ для некоторой } \eta, \text{ изменения } \xi \text{ по } y,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Напомним еще, что ξ' — такое изменение ξ по x, что $x^{\xi'}=t^{\xi}$.

Предположим сначала, что второе значение истинности равно 1. Выберем $\eta\in\overline{M}$ так, что $|Q(t)|(\eta)=1$, и построим такое изменение η' точки η по x, что $x^{\eta'}=t^{\eta}$. Тогда по индуктивному предположению $1=|Q(t)|(\eta)=|Q(x)|(\eta')$. Покажем, что η' есть изменение ξ' по y; отсюда будет следовать, что и первое значение истинности равно 1. В самом деле, η' получилось изменением η по x, η — изменением ξ по y, а ξ — изменением ξ' по x. Значит, η' есть изменение ξ' по x и y; нужно проверить, что изменение по x на самом деле не произошло: $x^{\eta'}=x^{\xi'}$.

Действительно, левая часть есть t^{η} по определению η', а правая часть есть t^{ξ} по определению ξ', но η получилось изменением ξ по y, а y не входит в t, ибо x не связывает t в $P=\exists yQ$.

Осталось проверить, что если второе значение истинности равно 0, то и первое равно 0. Рассуждения почти такие же. Если второе значение истинности равно 0, то $|Q(t)|(\eta)=0$ для всех η — изменений ξ по y. По каждому такому η построим η', как в первой части доказательства. Как выше, проверяется, что η' является изменением ξ' по y и, более того, пробегает все такие изменения, когда η пробегает все изменения ξ по y. Значит, и первое значение истинности равно 0.

Предложение доказано.

Отступление об естественной логике

1. Предметом логики не является внешний мир, но лишь системы его осмысления. Логика одной из таких систем — математики — в силу своей нормализованности представляет подобие жесткого трафарета, который можно накладывать на любую другую систему. Соответствие или расхождение этого трафарета с системой, однако, не служит критерием ее пригодности либо мерилом ценности. Физик не обязан быть ни последовательным, ни непротиворечивым — он должен эффективно описывать природу на

определенных уровнях. Тем менее логичны естественные языки и непосредственная работа сознания. Вообще логичность как условие эффективности появляется лишь в узко специализированных сферах человеческой деятельности.

Не имея нормативной силы, сравнение логики предикатов с логикой естественных языков или их подсистем может оказаться интересным и поучительным. Ниже приведены избранные данные лингвистики и психологии.

2. Б. Расселл, К. Дёман, Рейханбах, У. Вейнрейх и многие другие занимались выявлением в естественных языках категорий, которые формализованы в языках класса $\mathscr{L}_1$ и каталогизацией способов их передачи.

Это приводит к разбиению слов на так называемые *логико-семантические классы* вместо традиционного деления на глаголы, имена, артикли и т. д. (А. В. Гладкий, И. А. Мельчук [24, § 6]).

Например, слова *спать*, *умный*, *плакса* параллельны символам отношений (предикатам) ранга 1, слова *любить*, *приятный*, *сестра* — отношения ранга 2. Им отвечают атомарные формулы «N спит», «X приятен Y» и т. п.

Все, иногда, нечто суть кванторные слова, *и*, *или*, *но*, *если* ... ... *то*, — конечно, связки.

«The nose, le cadeau» суть константы «*этот нос*, *этот подарок*». Эффект константности достигается с использованием семантики определенного артикля. В русском языке «нос, подарок» суть скорее переменные для обозначения предметов, удовлетворяющих одноместному предикату «быть носом», «быть подарком». Возможны, впрочем, и другие толкования.

Местоимение «*он*», несомненно, является переменной. Местоимения *я* и *ты* имеют гораздо более сложную семантику, соотносясь с высказывающимся лицом, которое не выражено в безличных языках $\mathscr{L}_1$. Некоторые из аспектов местоимения первого лица включены в семантику алгоритмических языков. «Ключ памяти» надлежащего вида в программе для IBM-360 открывает программе возможность изменить содержимое какого-либо байта в блоке основной памяти. Защита памяти спрашивает: «Кто там?», и программа отвечает: «Это я». Наконец, уже в языках $\mathscr{L}_1$ удается смоделировать некоторые эффекты самоописания (см. §§ 9—11 и последующее отступление об автореферентности).

Или в русском языке выражает не только логическое $\vee$, но также строгую дизъюнкцию и даже по ощущению лингвистов, / иногда конъюнкцию $\wedge$, например во фразе «$x^2>0$ при $x<0$ или при $x>0$» (Е. В. Падучева). В латыни функции разделительного и неразделительного «или» выражаются разными словами aut, vel. «И» может выражать временную последовательность: ср. фразу «Джейн вышла замуж и родила ребенка» с «Джейн родила ребенка и вышла замуж» (С. Клини).

Конъюнкция $\wedge$ в разных языках может выражаться:

сопоположением: ма мо (кит.) — лошадь и осел; shika kitabu usome (суахили) — возьми книгу (и) читай;

предлогом: Петя с Машей;

союзом: и, and, et;

постпозитивной частицей: que (лат.) — senatus populusque — сенат и народ;

парным союзом: как ... так и

К. Дёман каталогизировал способы выражения 16 логических многочленов от двух переменных во многих языках мира.

3. При всей любопытности собранного материала, его следует воспринимать критически: тонкости употребления при сравнении с логикой часто ускользают. Разберем в качестве примера естественную семантику связки «если ... то».

Мы уже отмечали, что в языках $\mathscr{L}_1$ ей соответствует не только «$\to$», но также правило вывода MP. Более того, MP является более адекватным представителем для «если ... то».

В самом деле, правило приписывания истинности любому импликативному высказыванию с заведомо сложной посылкой почти не имеет параллелей в естественной логике. Кочующие по учебникам примеры типа «если снег черен, то $2\times2=5$» способны лишь дезориентировать, ибо выражения с такой семантикой не реализуются ни в одной естественной подсистеме языка. Исключением могут быть поэтические и экспрессивные формулы с крайне ограниченной сферой употребления («если Она неверна, то весь мир лжив»). Формальная математика, в которой одно противоречие разрушает всю систему, безусловно, имеет черты гиперэкспрессивности.

Наконец, в логике предикатов совершенно не отражен модельный аспект употребления «если .. то» в предписаниях типа «если это произойдет, то поступайте так-то». Зато он хорошо выражен в семантике связки «if ... then ... else ...» в алгоритмических языках типа Алгола. Попытки моделировать модальность в языках, построенных по образцу $\mathscr{L}_1$, без учета опыта алгоритмических языков приводят к явным неудачам (ср. А. А. Ивин [25]).

4. Неоднократно отмечалось, что выбор примитивных средств выражения в логике предикатов не отражает психологической реальности. Элементарные логические операции, одношаговые выводы требуют весьма тренированного интеллекта; напротив, логически сложные действия могут совершаться как почти элементарные целостные акты даже поврежденным сознанием.

«**Мл. лейтенант Засецкий, 23 лет, получил 2 марта 1943 года** пулевое проникающее ранение черепа левой теменно-затылочной **области. Ранение**... осложнилось воспалительным процессом, вызвавшим слипчивый процесс в оболочках мозга и выраженные изменения в окружающих тканях мозгового вещества».

Профессор А. Р. Лурия встретился с Засецким в конце мая 1943 года и следил за его состоянием в течение 26 лет. За это время Засецкий написал около 3000 страниц, с мучительным трудом описывая свою жизнь и болезнь, борясь за восстановление разума. Его тетради, по материалам которых А. Р. Лурия создал книгу «Потерянный и возвращенный мир» [26], являются не только свидетельством высокого мужества, но и документом большой выразительности.

Нарушения психики Засецкого поначалу ужасны. Над всем доминирует *асемасия* — разрывы связей между знаком и его значением.

Первая встреча Засецкого с врачом: «Попробуйте прочитать эту страничку! «—»... Нет, что это?... не знаю... я не понимаю, что это... Нет... какое это?... — «Ну, попробуйте посчитать что-нибудь простое, например сложите семь и шесть!...» — «Семь... шесть... как же это... семь... нет, я не могу... нет, я совсем не знаю...».

Утрачено понимание простейших предикатов:

«Что бывает перед зимой?» — «Перед зимой... или после зимы... лето... или что-нибудь... нет. Это у меня не выходит...» — «А перед весной?» — «Перед весной... сейчас весна... а вот до... или после... я уже теряюсь... нет... у меня не выходит...»

Нарушается интерпретация смыслоорганизующих кодов синтаксиса:

«В школу, где училась Дуня, с фабрики пришла работница, чтобы сделать доклад». Что это? Кто же сделал доклад? Дуня? Работница? А где училась Дуня? И кто пришел с фабрики? И куда?»

Это трудный пример (текст А. Р. Лурия), но вот что пишет сам Засецкий: «А еще: «слон больше мухи» и «муха больше слона»... Я понимал только, что «муха» маленькая, а «слон» большой, но разобраться в этих словах и ответить на вопрос, муха меньше слона или больше, я почему-то не мог. Главная же беда была в том, что я не мог понять, к чему относится слово «меньше» (или «больше») — к мухе или слону...».

Обращает на себя внимание сложность метаязыкового текста, описывающего языковые нарушения. Точность анализа нарушений кажется несовместимой с грубостью нарушений, которые анализируются. Это можно было бы объяснить тем, что анализ ретроспективен, но вот описание в настоящем времени, еще более глубокое: «... Я снова припоминаю про понятия «муха меньше слона» или «муха больше слона». Берусь думать над ними, как они должны правильно пониматься и как неправильно. От перестановки слов в этих понятиях изменяется смысл понятия. Мне же они кажутся на первый взгляд одинаковыми, словно ничего не изменяется от перестановки этих слов. А подольше подумаешь, замечаешь, что от перестановки слов изменяется смысл указанных четырех слов (слон, муха, меньше, больше). Но мой мозг, моя память после ранения и до сих пор не в силах сразу охватить, к кому отнести слово меньше (или больше) — к слону или к мухе? Перестановок даже в этих четырех словах очень много».

Это сохранение сложных психических способностей при утрате «простых» видно и на образцах творческого воображения Засецкого, близких к литературно-психологическим этюдам: «Вот я врач. Я осматриваю больного, сердечно обеспокоен его состоянием, болею за него всей душой, ну как же, ведь это же человек, такой же, как и все, но только он сильно болен, ему надо помочь. Ведь я тоже могу болеть, и мне тоже кто-то должен помочь, а теперь вот надо помочь этому больному. Иначе нельзя. А вот я другой врач. Ох, и надоели мне эти больные со своими жалобами. Я не знаю, зачем я связался с этой медициной. Мне не хочется ничего делать, не хочется никому помогать. Правда, я помогаю больше тем, кто и мне оказывает какую-нибудь помощь. И не беда, если умрет какой-нибудь больной, не в первый раз они умирали и умирают».

Все это показывает полную неосновательность мнения Дж. Россера [6]: «Когда доказательство открыто и записано на языке символической логики, его может проверить любой слабоумный (moron)».

Человеческая психика эффективно работает отнюдь не при проверке формальных текстов.

4. ВЫВОДИМОСТЬ

4.1. Определение.

Выводом формулы P из множества формул ε (в языке L класса $\mathscr{L}_1$) называется конечная последовательность формул $P_1, \ldots, P_n = P$ со следующими свойствами: для каждого $i = 1, \ldots, n$ выполнена по крайней мере одна из альтернатив:

а) $P_i \in \varepsilon_j$;

б) $\exists j < i$ *такое, что* P_i *непосредственно следует из* P_j *по* Gen,

в) $\exists j, k < i$ *такие, что* P_i *непосредственно следует из* P_j; P_k *по* MP.

Мы будем кратко писать $\varepsilon \vdash P$ вместо „существует вывод P из ε». Вывод P, сопровождаемый для каждого $i \leqslant n$ точным указанием на то, под какую из альтернатив а), б), в) попадает формула P_i и каковы номера i, j, k в случаях б), в), называется описанием вывода. Один вывод может допускать разные описания.

Чаще всего рассматриваются выводы из множеств ε, содержащих AxL — логические аксиомы языка L. Дополнительные элементы ε могут быть формулами L, истинность которых в стандартной интерпретации «угадана», — они называются *специальными аксиомами* L. (Примеры будут даны ниже в пп. 4.6—4.9.) Такие выводы рассматриваются как формальные эквиваленты *математических доказательств* (формулы $P=P_n$ исходя из посылок ε). Имеются следующие основания для этого отождествления:

а) **Как показано в п.3.3, если $\varepsilon \subseteq T_\varphi \mathrm{L}$ для некоторой интерпретации φ и $\varepsilon | — P$, то $P \in T_\varphi \mathrm{L}$: из истинных формул выводятся только истинные же.**

б) Была проделана большая экспериментальная работа по формализации математических доказательств, т. е. по замене их выводами в соответствующих языках класса $\mathscr{L}_1$, в частности L_1 Set. Констатировано, что для огромных фрагментов математики, включая основы теории целых и вещественных чисел, теории множеств и т. д., формализация доказательств в виде выводов в рамках $\mathscr{L}_1$ удается. В литературе по логике имеется много материала на эти тему (см., в частности, книгу Э. Мендельсона [2]).

в) Теорема Геделя о полноте логических средств $\mathscr{L}_1$ (см. § 6) показывает, что все формулы, истинные одновременно с ε (во всех интерпретациях), выводимы из ε.

Дальнейшее обсуждение см. в «Отступлении о доказательстве».

Рассматриваются также выводы из множеств ε другого типа. Например, можно исключить из ε некоторые логические аксиомы, скажем, «Закон исключенного третьего» (В.1, п. 3.4) для формального исследования интуиционистских принципов. Или можно включать в ε предположительно ложную формулу, с тем, чтобы вывести из ε противоречие, рассуждая «от противного».

Продемонстрируем формальные аспекты противоречия:

4.2. Предложение.

Допустим, что ε содержит все тавтологии типа В.2, п. 3.4. Тогда следующие два свойства ε равносильны:

а) *существует такая формула P, что* $\varepsilon | — P$ и $\varepsilon \vdash \neg P$;

б) $\varepsilon \vdash Q$ *для любой формулы* Q.

Множество ε с такими свойствами называется противоречивым.

Доказательство. б) $\Rightarrow$а) очевидно. Наоборот, **если** $\varepsilon \vdash P$ **и** $\varepsilon \vdash \neg P$, то, добавляя к описаниям этих выводов формулу $\neg P \to (P \to Q)$, по предположению лежащую в ε, и дважды применяя MP (к ней и $\neg P$; к $P \to Q$ и P), получаем описание вывода Q из ε.

4.3. Значительная часть теорем логики состоит в доказательстве утверждений вида „$\varepsilon \vdash P$“ или „не $\varepsilon \vdash P$“ для разных языков L, множеств ε и (классов) формул P.

Результат „$\varepsilon \vdash P$“ может доказываться посредством предъявления описания вывода P из ε. Однако в мало-мальски сложных случаях оно оказывается настолько длинным, что заменяется инструкцией по составлению такого описания, более или менее полной. Наконец, доказательство «$\varepsilon | — P$» может вообще не сопровождаться предъявлением вывода P из ε, хотя бы и неполного. В этом случае мы «не доказываем P, а доказываем, что существует доказательство P» (см. пример в § 8 о расширениях языка).

Результат „не $\varepsilon \vdash P$“ **в редких случаях может устанавливаться чисто синтаксическим рассуждением, но обычно доказательство опирается на конструкцию модели, т. е. интерпретации, в которой ε истинно, а P ложно (ср. обсуждение проблемы континуума в гл. III).** Если „не $\varepsilon \vdash P$“ и „не $\varepsilon \vdash \neg P$“, формула P называется *независимой от* ε.

Приведем два полезных элементарных результата о выводах. Видно, что по сравнению с обычными доказательствами выводы собраны из очень мелких деталей. Математик, как в семимильных сапогах, за один шаг покрывает целые поля формальных выводов.

4.4. Лемма.

Пусть ε содержит тавтологии. Если $\varepsilon \vdash P$ и $\varepsilon \vdash Q$, то $\varepsilon \vdash P \wedge Q$.

Доказательство. Если $P_1, \ldots, P_m$; $Q_1, \ldots, Q_n$ — выводы P и Q соответственно, то

$$P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_n; \quad P \to (Q \to (P \wedge Q)),\ Q \to (P \wedge Q),\ P \wedge Q$$

есть вывод $P \wedge Q$. Третья от конца формула — тавтология, вторая от конца непосредственно следует по MP из нее и $P_m = P$, последняя — по MP из второй и $Q_n = Q$.

4.5. Лемма о дедукции.

Пусть $\varepsilon \supset \mathrm{Ax}\, L$ и P — замкнутая формула. Если $\varepsilon \cup \{P\} \vdash Q$, то $\varepsilon \vdash P \to Q$.

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_n$ — вывод Q из $\varepsilon \cup \{P\}$. Индукцией по n покажем, что существует вывод $P \to Q$ из ε.

а) $n=1$. Тогда либо $Q \in \varepsilon$, либо $Q = P$. В первом случае $P \to Q$ выводится по MP из Q и тавтологии $Q \to (P \to Q)$, во втором случае $P \to P$ есть тавтология.

б) $n \geqslant 2$. **Предположим, что для выводов длины $\leqslant n-1$ лемма доказана. Тогда $\varepsilon \vdash P \to Q_i$ для всех $i \leqslant n-1$.** Далее, для $Q_n = Q$ имеются следующие возможности:

б$_1$) $Q \in \varepsilon$; б$_2$) $Q = P$; б$_3$) Q выводится по MP из Q_i, $Q_j = Q_i \to Q$; б$_4$) Q имеет вид $\forall x Q_j$ для $j \leqslant n-1$.

Случаи б$_1$) и б$_2$) разбираются точно так же, как при $n=1$. В случае б$_3$) вывод $P \to Q$ из ε имеет такой вид:

1) вывод $P \to Q_i$ (индуктивное предположение);
2) вывод $P \to (Q_i \to Q)$ (индуктивное предположение);
3) $(P \to (Q_i \to Q)) \to ((P \to Q_i) \to (P \to Q))$ (тавтология);

4) $(P\to Q_i)\to(P\to Q)$ (МР к (2) и (3));
5) $P\to Q$ (МР к (1) и (4)).

В дальнейшем такие рассуждения будут проводиться более кратко, с указанием лишь последних шагов вывода (здесь 3, 4, 5).

Наконец, в случае б$_4$) вывод $P\to\forall xQ_j$ из ε получается, если добавить к выводу $P\to Q_j$ из ε (индуктивное предположение) формулы

$\forall x(P\to Q_j)$ (Gen);

$\forall x(P\to Q_j)\to(P\to\forall xQ_j)$ (аксиома в силу замкнутости P);

$P\to\forall xQ_j$ (МР к двум предыдущим формулам).

Лемма доказана.

Отметим для будущего, что во фрагментах выводов, которые строились в леммах 4.4, 4.5, использованы только тавтологии типов А. О., А.1, А.2 из п. 3.4.

Приведем теперь образцы спектральных аксиом.

Аксиомы равенства. Пусть L — язык класса $\mathscr{L}_1$, в алфавите которого есть отношение ранга два $=$. Мы будем писать $t_1=t_2$ вместо $=(t_1t_2)$.

Если P — формула, x — переменная, t — терм, мы будем обозначать через $P(x,t)$ — результат подстановки t в P вместо *любой части* свободных вхождений x в P, не связывающих t.

4.6. Предложение.

а) *Формулы*

$$t=t;\quad t_1=t_2\leftrightarrow t_2=t_1;\quad t_1=t_2\wedge t_2=t_3\to t_1=t_3;\quad x=t\to(P(x,x)\to\to P(x,t))$$

φ-истинны для любой интерпретации L, *в которой* $\varphi(=)$ *есть равенство.*

б) *Все формулы пункта* а) *выводимы из множества* $AxL\cup\cup\{x=x\mid x$ переменная$\}\cup\{x=y\to(P(x,x)\to P(x,y)),\ P$ атомарные$\}$ *Формулы этого списка, за исключением* AxL, называются аксиомами равенства.

в) *Пусть* φ — *любая интерпретация* L *во множестве* M, *для которой аксиомы равенства истинны. Тогда* $\varphi(=)$ *есть отношение эквивалентности в* M, *совместимое с интерпретациями всех отношений и операций* L *в* M. *Если обозначить через* φ' *очевидную интерпретацию* L *в фактор-множестве* $M'=M/\varphi(=)$, то $\varphi'(=)$ *есть равенство, и* $T_\varphi L=T_{\varphi'}L$.

Набросок доказательства. а) φ-истинность устанавливается без труда. Ограничимся последней формулой. Пусть она ложна в точке $\xi\in\overline{M}$. Тогда $|x=t|(\xi)=1$, $|P|(\xi)=1$, $|P(x,t)|(\xi)=0$. Первое утверждение означает, что $x^\xi=t^\xi$. Но тогда $|P|(\xi)=|P(x,t)|(\xi)$ по предложению 2.10, вопреки второму и третьему равенству.

б) Вывод $t=t$: $x=x$ (аксиома равенства); $\forall x(x=x)$ (Gen); $\forall x(x=x)\to t=t$ (логическая „аксиома специализации"); $t=t$ (МР).

Вывод $t_1=t_2\leftrightarrow t_2=t_1$:

1) $x=y\to(x=x\to y=x)$ (аксиома равенства для $=$ в качестве P);

2) $Q\to((P\to(Q\to R))\to(P\to R))$, где P есть $x=y$, Q есть $x=x$, R есть $y=x$ (тавтология);

3) $x=x$ (аксиома равенства);

4) $(P\to(Q\to R))\to(P\to R)$ (МР к (2) и (3));

5) $x=y\to y=x$ (МР к (1) и (4)).

Дальше нужно дважды применить Gen, аксиому специализации и МР, чтобы вывести из (5) формулу $t_1=t_2\to t_2=t_1$; замена t_1 на t_2 и наоборот дает вывод $t_2=t_1\to t_1=t_2$; конъюнкция этих формул выводится по лемме 4.4; наконец, тавтология $(t_1=t_2\to t_2==t_1)\wedge(t_2=t_1\to t_1=t_2)\to(t_1=t_2\longleftrightarrow t_2=t_1)$ вместе с МР дает требуемое.

Вывод третьей и четвертой формул п.4.6а мы оставляем читателю. Существование вывода четвертой формулы доказывается индукцией по числу связок и кванторов в P; P представляется в виде $\neg Q$, $Q_1 * Q_2$ или $\forall xQ$, $\exists xQ$; предполагается, что для Q, Q_1, Q_2 вместо P вывод уже построен; он достраивается для P (см. Мендельсон [2, с. 87 — 88]).

г) Из φ-истинности аксиом равенства следует φ-истинность формул п. 4.6а, так как они выводимы. Первые три формулы п. 4.6 в применении к трем разным переменным x, y, z показывают тогда, что отношение $\varphi(=)$ на M рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Действительно, пусть X, Y, Z — три любые элемента M, $\xi\in\in\overline{M}$ — такая точка, что $x^\xi=X$, $y^\xi=Y$, $z^\xi=Z$, $\sim$ — отношение $\varphi(=)$ на M. φ-истинность формул п.4.6а означает, что $X\sim X$; $X\sim Y\Longleftrightarrow Y\sim X$; $X\sim Y$ и $Y\sim Z\Rightarrow X\sim Z$.

Совместимость $\sim$ с φ-интерпретацией всех отношений и операций на M по определению означает следующее.

Пусть p — отношение, $\varphi(P)\subseteq M^r$ — его интерпретация. Если $\langle X_1,\ldots,X_r\rangle\in\varphi(p)$ и $X'_i\sim X_i$, то $\langle X_1,\ldots,X'_i,\ldots,X_r\rangle\in\varphi(p)$.

Пусть f — операция, $\varphi(f):M^r\to M$ — ее интерпретация. Если $\varphi(f)(X_1,\ldots,X_r)=Y$ и $X'_i\sim X_i$, то $\varphi(f)(X_1,\ldots,X'_i,\ldots,X_r)=Y'\sim Y$.

Проверка совместимости использует φ-истинность последней формулы п. 4.6а в подходящей точке $\xi\in\overline{M}$, если взять в качестве P формулы $p(x_1,\ldots,x_r)$ и $f(x_1,\ldots,x_r)=y$ соответственно, в качестве t переменную x'_i, в качестве x переменную x_i и положить $x_i^\xi = X_i$, $x_i'^\xi = X'_i$, $y^\xi = Y$.

Из совместимости следует, что можно построить интерпретацию φ' языка L в $M' = M/\sim$, для которой $\varphi'(p) = \varphi(p) \bmod \sim$, $\varphi'(f) = \varphi(f) \bmod \sim$, $\varphi(=)$ — равенство. Из последней формулы п. 4.6а будет тогда вытекать, что все φ-истинные формулы останутся φ'-истинными, и наоборот.

В дальнейшем, говоря о специальных аксиомах любого языка $\mathcal{L}_1$ с символом $=$, мы будем молчаливо включать в их число аксиомы равенства для $=$. Модели, в которых они интерпретируются как равенство, мы будем называть *нормальными*.

Специальные аксиомы арифметики

4.7. Предложение.

Следующие формулы истинны в стандартной интерпретации языка L_1Ar *и называются специальными аксиомами* L_1Ar:

а) *аксиомы равенства*;

б) *аксиомы сложения*:

$$x + \bar{0} = x; \quad x + y = y + x; \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$x + z = y + z \to x = y;$$

в) *аксиомы умножения*:

$$x \cdot \bar{0} = \bar{0}; \quad x \cdot \bar{1} = x; \; x \cdot y = y \cdot x; \; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

г) *аксиома дистрибутивности*:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$$

д) *аксиомы индукции*:

$P(\bar{0}) \wedge \forall x (P(x) \to P(x + \bar{1})) \to \forall x P(x)$, *где* P — *любая формула языка*.

Доказательство тривиально, и мы оставляем его читателю. Отметим лишь, что «доказательство» истинности аксиом индукции само использует индукцию как метаязыковое рассуждение.

Комментарии, а) В п. 4.7,б—г мы записали обычные аксиомы коммутативного полукольца для сокращения формальных выводов: любое неформальное вычисление, использующее только эти аксиомы, может быть без труда превращено в формальный вывод его результата в L_1Ar.

Э. Мендельсон [2 гл. 3] приводит более слабую систему аксиом и затем показывает, как из нее выводятся наши формулы. Это занимает 5—6 страниц текста и является в основном данью исторической традиции, восходящей к Пеано.

б) Аксиомы индукции — это счетное множество формул L_1Ar: принято говорить, что запись предложения 4.7д есть *схема аксиом.*

Формулировка соответствующего факта в интуитивной математике такова: «для каждого свойства целых чисел P, если 0 обладает P и если из того, что x обладает P, следует, что $x+1$ обладает P, то все целые числа обладают P». Здесь «свойство целых чисел» — то же самое, что «произвольное подмножество целых чисел».

Однако в выразительных средствах L_1Ar нет способа сказать «любое подмножество». Нет также способа назвать «все свойства» — можно лишь перечислить по очереди те свойства, которые выразимы формулами языка. Еще раз напомним, что их всего счетное множество, тогда как в интуитивной интерпретации подразумевается континуум свойств. Таким образом, формальная аксиома индукции слабее неформальной, а также слабее того ее варианта, который получится при погружении L_1Ar в L_1Set.

Специальные аксиомы теории множеств Цермело — Френкеля (см. описание V в приложении к гл. II)

4.8. Предложение.

Следующие формулы истинны в стандартной интерпретации языка L_1Set *в универсуме фон Неймана* V:

а) *аксиома пустого множества*: $\forall x \neg (x \in \varnothing)$;

б) *аксиома объемности*:

$$\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y;$$

в) *аксиома пары*:

$$\forall u \forall w \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow z = u \vee z = w);$$

г) *аксиома суммы*:

$$\forall x \exists y \forall u (\exists z (u \in z \wedge z \in x) \leftrightarrow u \in y);$$

д) *аксиома степени*:

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y),$$

где $z \subseteq x$ — *сокращенная запись формулы* $\forall u (u \in z \to u \in x)$;

е) *аксиома регулярности*:

$$\forall x (\neg x = \varnothing \to \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)),$$

где $y \cap x = \varnothing$ — *сокращенная запись для* $\neg \exists z (z \in y \wedge z \in x)$.

Доказательство и объяснения. Это — неполный список аксиом Цермело — Френкеля, более тонкие аксиомы бесконеч-

4—1

ности, подстановки, а также выбора будут обсуждены в следующем пункте.

Доказательства истинности должны, конечно, состоять в вычислении функции $|\ |$ по описанным в п. 2.4 и 2.5 правилам. Проверим так, скажем, истинность аксиомы объемности. Пусть ξ — любая точка интерпретационного класса, $X = x^{\xi}$, $Y = y^{\xi}$. Тогда мы должны установить, что

$$|\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)|(\xi) = |x = y|(\xi),$$

т. е., что

$$\min_{Z \in V} (|Z \in X||Z \in Y| + (1 - |Z \in X|)(1 - |Z \in Y|)) = |X = Y|,$$

где мы пишем $|Z \in X|$ вместо $|z \in x|(\xi')$ с $z^{\xi'} = Z$, $x^{\xi'} = X$ и т. п. Но левая часть равна 1 в том и только том случае, когда для каждого $Z \in V$ либо одновременно $Z \in X$ и $Z \in Y$, либо одновременно $Z \notin X$ и $Z \notin Y$, т. е. когда $X = Y$.

Более общо, заменяя здесь V на любой подкласс $M \subseteq V$ и ограничивая стандартную интерпретацию L_1Set на M, находим из того же вычисления: *аксиома объемности истинна в M, если и только если для любых элементов X, $Y \in M$ имеем $X = Y \Longleftrightarrow X \cap M = Y \cap M$, т. е. если каждый элемент M однозначно определяется теми своими элементами, которые лежат в M.*

Мы воспользуемся этим результатом позже.

Аналогичные вычисления для всех остальных аксиом систематически проведены в гораздо более трудной ситуации в гл. III. Поэтому ниже мы ограничимся переводом их на арго, как в гл. I, и пояснениями относительно их выполнимости в V.

а) Аксиома пустого множества не нуждается в комментариях. Заметим лишь, что при интерпретации L_1Set в подклассе $M \subseteq V$ константу $\varnothing$ можно было бы интерпретировать любым элементом $X \in M$ со свойством $X \cap M = \varnothing$, не нарушив истинности этой аксиомы.

в) Аксиома пары истинна, потому что если $U, W \in V_{\alpha}$, то $\{U, W\} \in \mathcal{P}(V_{\alpha}) = V_{\alpha+1}$, так что пары лежат в V.

г) Аксиома суммы истинна, потому что если $X \in V$, то множество $Y = \bigcup_{Z \in X} Z$ тоже лежит в V. Действительно, если $X \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_{\alpha})$, то элементы X суть подмножества V_{α} и их объединение также лежит в $V_{\alpha+1}$.

д) Аксиома степени истинна, потому что, если $X \in V$, то $\mathcal{P}(X) \in V$. Действительно, если $X \in V_{\alpha}$, то $X \subseteq V_{\alpha}$ и, значит, $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(V_{\alpha}) = V_{\alpha+1}$, так что $\mathcal{P}(X) \in V_{\alpha+2}$.

е) Аксиома регулярности истинна, потому что любое непустое множество $X \in V$ имеет пустое пересечение с некоторым своим элементом, и в таком виде она доказана в приложении к гл. II «Универсум фон Неймана».

4.9. Собранные в п. 4.8 аксиомы языка L_1Set объединены одним общим свойством: в стандартной интерпретации их простейшей моделью служит в точности объединение ω_0 первых этажей $V_{\omega_0} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ универсума фон Неймана. Иными словами, это — множество транзитивно конечных множеств $X \in V$, таких, что если $X_n \in X_{n-1} \in \ldots \in X_0 = X$, то все X_i конечны.

V_{ω_0} — надежный мир комбинаторики и теории чисел; нужны дальнейшие принципы, чтобы выйти за его пределы. Их два: аксиома бесконечности и схема аксиом подстановки.

а) *Аксиома бесконечности*:

$$\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \{y\} \in x)).$$

Здесь $\{y\} \in x$ есть сокращение для $\exists z (z = \{y, y\} \wedge z \in x)$, сокращение $z = \{y, y\}$ объяснено в п.3.7 гл. I. Эта аксиома заставляет нас добавить к V_{ω_0} какое-нибудь множество, содержащее элементы $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}, \ldots$ (в счетном количестве). После этого для обеспечения истинности аксиомы степени в ее содержательном варианте придется добавлять $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{P}^2(X)$, $\ldots$, безнадежно уходя за пределы конечных, счетных, континуальных... множеств.

Поразительно, что в формальном варианте теории множеств это не так, и мы всегда можем ограничиться транзитивно-счетными подмоделями V. Это важное обстоятельство будет подробно обсуждено ниже, в § 7.

б) *Схема аксиом подстановки.* Введем следующую удобную сокращенную запись (в любом языке класса $\mathcal{L}_1$ с равенством): $\exists! y P(y)$, которая означает

$$\exists y P(y) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y).$$

Таким образом, эта формула читается «существует единственный объект y со свойством P», если подразумевать, что $=$ интерпретируется как равенство.

Если в P входят свободно другие переменные, кроме y, истинность формулы $\exists! y P(y)$ означает, что P задает y как «неявную функцию» от этих остальных переменных.

Теперь мы можем написать аксиомы подстановки. Ниже в формуле P отмечены все переменные, входящие в P свободно:

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n \forall u (\forall x (x \in u \rightarrow \exists! y P(x, y, z_1, \ldots, z_n)) \rightarrow \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge P(x, y, z_1, \ldots, z_n)))).$$

4*

Посылка читается так: «P задает y как функцию от $x \in u$ при любых значениях параметров $z_1, \ldots, z_n$», заключение: «обзор любого множества u относительно этой функции является некоторым множеством w».

Для нужд формальной теории полезно отметить, что из этой аксиомы и аксиом равенства выводимы так называемые формулы выделения:

$$\forall z_1 \ldots \forall z_n \forall x \exists y \, (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge P(u, z_1, \ldots, z_n)),$$

т. е. «если класс множеств и, обладающих свойством P, пересечь с множеством x, то получится множество».

Аксиома подстановки требует очень пристального рассмотрения. Она выходит за пределы привычных (и потому рассматриваемых как интуитивно очевидные) рабочих инструментов тополога и аналиста. Действительно, она утверждает, что, скажем, любой ординал α нельзя «растянуть» посредством некоторой функции f слишком далеко: как ни выбрать f, найдется такой ординал β, что все значения $f(\gamma)$, $\gamma \leqslant \alpha$, будут лежать в V_β, т. е. бесконечность универсума V несравненно больше, чем бесконечность любого его этажа V_α.

Даже если принять эту аксиому, очень близкие к ней по стилю вопросы остаются интуитивно не постигаемыми и не разрешимыми с помощью нее и остальных аксиом. Например, существуют ли так называемые *недостижимые кардиналы* γ?

Одно из свойств недостижимого кардинала γ таково: если f — функция из V_α в V_γ (с $\alpha < \gamma$), то множество ее значений является элементом V_γ. В частности, есть «верхняя граница», за пределы которой не могут быть растянуты ординалы, не превосходящие γ.

Существуют такие бесконечности или нет?

Размышления над этими и подобными проблемами бесконечности привели многих специалистов по основаниям математики к убеждению, что язык теории множеств типа L_1Set и та или иная система аксиом в нем — единственная реальность, с которой следует работать, а попытки придать смысл универсуму V или аналогичным моделям принципиально обречены на неудачу. В частности, множество истинных в стандартной интерпретации формул L_1Set не определено, и можно говорить лишь о формулах, выводимых из аксиом.

Мы не будем принимать эту точку зрения полностью по ряду причин. Простейшая из них состоит в ощущении того, что язык без интерпретации не только лишен внутреннего оправдания, но и не может быть использован ни для чего. Даже в «формальную игру» с символами мы играем хорошо, только руководствуясь интуитивными представлениями о смысле этих символов. Язык

(вместе с внешним миром) помогает упорядочивать и уточнять такие представления, что, в свою очередь, заставляет менять язык или переоценивать прежние лингвистические конструкции. Но ни в какой момент мы не можем считать, что достигли полной ясности.

Последовательное самоограничение заслуживает понимания. Однако интеллектуальный аскетизм (как все иные виды аскетизма) не может быть уделом многих.

в) *Аксиома выбора*:

$$\forall x (\neg x = \varnothing \to \exists y (\text{„}y \text{ — функция с областью определения } x\text{“} \wedge \wedge \forall u (u \in x \wedge \neg u = \varnothing \to \exists w (w \in u \wedge \text{„}\langle u, w \rangle \in y\text{“})))),$$

т. е. y выбирает по одному элементу из каждого непустого элемента $u \in x$.

Вера в истинность этой аксиомы в V представляется по крайней мере столь же обоснованной, как вера в существование самого V. За прошедшие полвека она стала привычной для любого работающего математика, и бурные споры начала века вокруг нее сейчас почти не воспринимаются. Мы отсылаем заинтересованного читателя к книге А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [17, гл. II].

4.10. Общие свойства аксиом. При всем разнообразии связанных с аксиомами представлений, каждое описанное нами множество аксиом в языках $\mathscr{L}_1$ (тавтологии; AxL; специальные аксиомы в L_1Ar и L_1Set) обладает следующими неформальными синтаксическими характеристиками:

а) можно указать алгоритм, распознающий по данному выражению, является ли оно аксиомой (ср. синтаксический анализ в § 1 и проверки тавтологичности в п. 3.4);

б) можно указать конечное число правил порождения аксиом.

Ясно, что априори свойство б) менее ограничительно, чем а). Действительно, распознающий алгоритм можно превратить в правило порождения: «выписывай подряд в словарном порядке все выражения и оставляй только те, для которых алгоритм дает положительный ответ».

В действительности, естественно считать, что свойство а) должно быть присуще аксиомам, а б) — выводимым формулам, какое бы явное описание тех и других в конкретном языке ни принять. В гл. III эти интуитивные представления будут оформлены в виде точных определений и будет показано, что б) строго слабее а). Ср. также обсуждение в п. 11.6в этой главы.

Отступление о доказательстве

1. Доказательство становится таковым только в результате социального акта «принятия доказательства».

Это относится к математике в той же мере, что и к физике, лингвистике или биологии. Эволюция признанных критериев доказательности — почти не исследованная тема в истории науки. Однако со времени Евклида неизменной остается идеальная структура математической демонстрации «неочевидной истины»: переход к ней от «очевидных» или установленных ранее посылок посредством серии явно выписанных «очевидно законных» элементарных умозаключений.

Таким образом, дедукция как общенаучный метод является методом математики par excellence. («Математическая индукция» явно восходит к этой же идее. Принцип индукции Пеано постулирует разрешение писать только первый и общий шаги доказательства и, таким образом, является по существу первым метаматематическим принципом. Это затемняется традиционным отнесением аксиомы Пеано к числу специальных (п. 4.7д), но так или иначе она принадлежит к фундаментальным архетипам математического мышления.)

Чем длиннее дедуктивное рассуждение, тем жестче требования к эксплицитности и нормализованности его элементарных компонент. В конечном счете количество исходных данных в формальной математике так мало́, что несоблюдение правил гигиены в длинных выводах ведет к распаду системы, если ее не корректировать извне. При индукции, напротив, сравнительно короткие выводы покоятся на обширном исходном материале: дарвиновскую концепцию эволюции объясняют школьникам, но жизни едва хватило бы, чтобы оценить убедительность ее доказательств. Аналогичное положение дел наблюдается в сравнительном языкознании при реконструкции праязыковых фактов. Поэтому здесь «правила вывода» не могут быть столь жестки, несмотря на картину младограмматиков.

2. Изложенные выше суждения согласуются с тем, что понятие формального вывода в языках $\mathscr{L}_1$ является хорошим приближением к представлению об идеальном математическом доказательстве. Поэтому поучительнее рассмотреть различия между выводами и нашими повседневными аргументами.

а) *Надежность принципов.* Не только математика, заложенная в специальные аксиомы L_1Set и L_1Ar, но даже логика языков $\mathscr{L}_1$ не является общепризнанной. В частности, после Брауэра оспаривается закон исключительного третьего. С этих крайне критических позиций наши «доказательства» в лучшем случае безупречно выводят бессмыслицу из лжи.

Быть совершенно глухим к этой критике математик не может себе позволить; вдумываясь в нее, следует по крайней мере осознать, что существуют объективно различные «степени доказательности» доказательств.

б) *Уровни доказательности.* Каждое предложенное доказательство апробируется на приемлемость математиками, иногда нескольких поколений. При этом подлежит уточнению и само доказательство, и его результат. Чаще всего доказательство является более или менее краткой схемой формального вывода в подходящем языке. Однако, как уже было отмечено, иногда утверждение P устанавливается посредством доказательства того, что доказательство P существует. Эта иерархия доказательств существования доказательств в принципе может быть как угодно высокой. Мы снимаем ее с помощью высших логических или теоретико-множественных принципов, с которыми, однако, можно и не соглашаться. Работы по конструктивной математике пестрят утверждениями типа: «не может не существовать алгоритма, вычисляющего x» там, где классический математик сказал бы просто «x существует» или в крайнем случае «x существует и эффективно вычислим».

в) *Ошибки.* Особенности человеческой психики делают формальные выводы практически не поддающимися проверке, даже если согласиться, что в принципе это идеальный вид доказательства. Два обстоятельства действуют в одну сторону с губительным эффектом: формальные выводы гораздо длиннее текстов на арго; скорость их сознательного чтения человеком гораздо ниже.

Нередки доказательства одной теоремы на пяти, пятнадцати и даже пятидесяти страницах. Доказательства двух гипотез Бернсайда из теории конечных групп занимают около пятисот страниц каждое. Длина соответствующих формальных выводов не поддается воображению.

Поэтому отсутствие ошибок в математической работе (если они не обнаружены), как и в других естественных науках, часто устанавливается по косвенным данным: имеет значение соответствие с общими ожиданиями, использование аналогичных аргументов в других работах, разглядывание «под микроскопом» отдельных участков доказательства, даже репутация автора; словом, воспроизводимость в широком смысле слова. «Непонятные» доказательства могут сыграть очень полезную роль, стимулируя поиски более доступных рассуждений.

В последние десятилетия появилось очень мощное средство для проведения длинных формальных выводов: речь идет об ЭВМ. На поверхностный взгляд это может резко изменить статус формального вывода и сделать достижимым лейбницев идеал механической проверки истинности. На самом деле положение дел гораздо менее тривиально.

Приведем сначала два авторитетных мнения на этот счет, принадлежащие К. Л. Зигелю и Х. П. Ф. Суиннертону-Дайеру [32, 33]. Оба высказывались по поводу машинной обработки конкретных теоретико-числовых задач.

3. Современный уровень наших знаний о большой теореме Ферма таков. Пусть p — простое число. Оно называется регулярным, если оно не делит числитель ни одного из чисел Бернулли $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}, \ldots, B_{p-3}$.

Для регулярных показателей p теорему Ферма доказал Куммер. Для нерегулярных p имеется иерархия критериев истинности утверждения Ферма, сводящихся к проверке того, что не имеют места некоторые делимости; если они имеют место, следует пробовать другие делимости и т. д. Проверка критериев для каждого p требует большого счета на ЭВМ; по сводке 1955 г. она была с успехом проведена для всех $p<4002$ [32] *.

Обозначим через $v(x)$ отношение числа иррегулярных $\leqslant x$, простых к числу регулярных. Куммер предположил, что $v(x)\to 1/2$ при $x\to\infty$. Зигель [34] считает более правдоподобным значение предела $\sqrt{e}-1$, приводит в его пользу вероятностные аргументы и сравнивает с данными Селфриджа — Николя — Вандивера, обсуждение которых заключает неожиданной фразой: «Кроме того, следует принять во внимание, что приведенные выше числовые значения функции $v(x)$ получены с помощью вычислительных машин и поэтому, строго говоря, не могут считаться доказанными»!

4. Точку зрения Зигеля можно объяснить естественной реакцией на информацию, полученную из вторых рук. Ниже следуют обширные выдержки из статьи профессионального математика и опытного программиста [33], посвященной следующей задаче.

Пусть L_1, L_2, L_3 — три однородные линейные формы от трех переменных с вещественными коэффициентами и определителем Δ. Предположим, что нижняя грань $|L_1L_2L_3|$ на ненулевых целых точках (исключая начало) равна 1. Что можно сказать о таких значениях Δ?

Задача для двух форм от двух переменных была в значительной мере решена А. А. Марковым: значения $\Delta<3$ составляют счетное множество $\{\sqrt{9-4/n^2}\mid n=1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 29,\ldots\}$. Здесь n пробегает явно описываемую вычислимую последовательность целых чисел.

Для трех форм Давенпорт (1943) доказал, что $\Delta=7$, или $\Delta=9$, или $\Delta>9{,}1$. Х. П. Ф. Суиннертон-Дайер в цитируемой статье [33] вычисляет все значения $\Delta\leqslant 17$ в предположении, что их конечное число, и дает их список: третье равно $\sqrt{148}$, последнее (восемнадцатое) $\sqrt{2597/9}$. Обсуждая этот результат, он приводит очень интересное свидетельство: «Если некоторая теорема была доказана с помощью ЭВМ, оказывается немыслимым так изложить ее доказательство, чтобы оно удовлетворяло обычному требованию — дать возможность достаточно терпеливому читателю проработать его и увериться в его правильности. Даже распечатка всех программ и входных данных (в нашем случае они заняли бы страниц сорок весьма скучного чтения) не может гарантировать, что при реальном счете перфокарты не были ошибочно пробиты или ошибочно считаны. Сверх того, у любого современного компьютера имеются скрытые пороки в глухих закоулках программ и электроники, — столь редко приводящие к ошибкам, что они остаются не замеченными годами, — и любой компьютер подвержен случайным сбоям. Как ни редки такие ошибки, некоторые из них могли случиться в ходе вычислений, о которых мы сообщаем в этой статье».

Положительные аргументы также весьма любопытны:

«Однако, суть наших расчетов состоит в поисках всего нескольких иголок в шестимерном стоге сена, и почти весь поиск ведется в тех частях стога, где иголок на самом деле нет. Поэтому ошибки в этих областях не повлияют на конечный результат... я думаю, что список дискриминантов $\Delta\leqslant 17$ полон, и немыслимо, чтобы мы пропустили бесконечно много допустимых значений $\leqslant 17$».

Заключение: «Тем не менее, единственный способ проверить эти результаты (если они того заслуживают) — атаковать их независимо, написав другую программу для другой машины. Точно такова же ситуация в большинстве экспериментальных наук».

Отметим, что обработка и отчасти хранение больших массивов оперативной информации вообще вне человеческого мозга приводит к все яснее осознаваемым социальным проблемам, выходящим далеко за пределы вопросов о достоверности математических выводов.

5. Наконец, процитируем впечатление от механических доказательств, даже проводимых вручную, которое приходилось испытать многим.

Сформулировав некоторое предложение о том, что „функция $T_{W,\eta_0}\theta$ определена корректно“, сильный и активно работающий математик Д. Мамфорд пишет [35, с. 230]: «Это предложение устанавливается с помощью чудовищно длинных, хотя совершенно бесхитростных выкладок. Проведя их до конца во всех деталях, я затратил несколько часов, но не стал умнее, а лишь уверился в правильности определения. Поэтому здесь я опущу подробности».

Мораль: хорошее доказательство — это рассуждение, которое делает нас умнее.

5. ТАВТОЛОГИИ И БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

5.1. Предложение.

Можно указать конечный список базисных тавтологий — логических многочленов от трех аргументов P, Q, R со следующим свойством.

---

* **К настоящему времени с помощью ЭВМ теорема Ферма доказана для** всех $p<125\,000$. (*Прим. ред.*)

Пусть L *— любой язык класса* $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{F}$ *— множество всех формул* L, *которые получаются из базисных тавтологий подстановкой вместо* P, Q, R *всевозможных формул языка. Тогда любая тавтология в* L *выводима из* $\mathscr{F}$ *с применением только правила* MP.

Выбор базисных тавтологий ни в какой мере не однозначен. Наш список будет состоять из тавтологий А. 0, А.1, А.2, А.3, В.1, В.2 п. 3.4 и следующих тавтологий:

C.1. $\neg(P\to\neg Q)\to(P\wedge Q)$, $(P\wedge Q)\to\neg(P\to\neg Q)$;

C.2. $(\neg P\to Q)\to(P\vee Q)$, $(P\vee Q)\to(\neg P\to Q)$;

C.3. $P\to(\neg Q\to\neg(P\to Q))$;

C.4. $(P\to Q)\to((\neg P\to Q)\to Q)$;

C.5. $(\neg P\to\neg Q)\to(Q\to P)$;

C.6. $(P\to Q)\wedge(Q\to P)\to(P\leftrightarrow Q)$;

C.7. $\neg P\wedge Q\to\neg(P\to Q)$.

Мы экономим не на размере базисного списка, а на длине доказательства предложения 5.1, поэтому список А.0—С.7 не является кратчайшим. Для логики $\mathscr{L}_1$ это несущественно; лишь для видоизмененных логик типа интуиционистской требуется более осторожный анализ.

Доказательство. Пусть ε — конечное множество формул L, P — логический многочлен (с фиксированным представлением) над ε. Рассмотрим отображение $v:\varepsilon\to\{0, 1\}$ и продолжим его на P по тем же формулам, которые в п. 2.3 определяли функцию истинности $|\ |$. Положим

$$P^v=\begin{cases} P, & \text{если } v(P)=1,\\ \neg P, & \text{если } v(P)=0.\end{cases}$$

5.2. Основная лемма.

Пусть $\varepsilon^v=\{Q^v\,|\,Q\in\varepsilon\}$. *Тогда для любого* v *имеем:* $\mathscr{F}\cup\varepsilon^v\vdash P^v$ (*с помощью* MP).

Лемма является оформлением следующей идеи. Естественно доказывать предложение 5.1 индукцией по длине тавтологии, но части тавтологии могут не быть тавтологиями. Операция, переводящая P в P^v, насильственно делает любую формулу «v-истинной» и дает возможность провести индукцию.

5.3. Доказательство 5.1 с помощью основной леммы.

Пусть P — тавтология и $P^v=P$ для всех v (обозначения прежние). Положим $\varepsilon=\{P_1, \ldots, P_r\}$.

По основной лемме, $\mathscr{F}\cup\{P^v_1,\ldots,P^v_r\}\vdash P$ с помощью MP для любого v. Покажем, что тогда $\mathscr{F}\cup\{P^v_1,\ldots,P^v_{r-1}\}\vdash P$ с помощью MP. Индукция вниз по r даст требуемое (предположение о том, что P есть логический многочлен от $P_1, \ldots, P_r$ в индуктивном переходе не используется).

Лемма о дедукции 4.5 показывает, что $\mathscr{F}\cup\{P^v_1,\ldots,P^v_{r-1}\}\vdash$ $\vdash(P^v_r\to P)$ с помощью MP: нужно обратиться к ее доказательству и удостовериться, что в выводе участвуют лишь тавтологии из $\mathscr{F}$ и MP, потому что Gen не участвовал в выводе P.

Так как для любого v существует v', совпадающее с v на $P_1,\ldots$ $\ldots, P_{r-1}$, но отличающееся на P_r, имеем: $P_r\to P$ и $\neg P_r\to P$ выводятся из $\mathscr{F}\cup\{P^v_1,\ldots,P^v_{r-1}\}$ с помощью MP. С другой стороны, тавтология C.4: $(P_r\to P)\to((\neg P_r\to P)\to P)$ лежит в $\mathscr{F}$. Дважды применяя MP, выводим P.

5.4. Доказательство основной леммы. Проведем индукцию по числу связок в представлении P в виде логического многочлена над ε. Если их нет, т. е. $P\in\varepsilon$, утверждение очевидно. В противном случае P имеет вид $\neg P$ или Q_1*Q_2, где $*$ — одна из бинарных связок.

а) *Случай* $P=\neg Q$. Если $v(Q)=Q$, то $Q^v=\neg Q=P=P^v$. Выводимость $Q^v=P^v$ из $\mathscr{F}\cup\varepsilon^v$ является индуктивным предположением. Если же $v(Q)=1$, то $Q^v=Q$, $P^v=\neg\neg Q$. Здесь Q выводится из $\mathscr{F}\cup\varepsilon^v$ по индуктивному предположению, затем тавтология из $\mathscr{F}$: $Q\to\neg\neg Q$ и MP дают вывод P^v.

б) *Случай* $P=Q_1*Q_2$. Сначала сведем в таблицу при разных сочетаниях $*$ и $v(Q_1)$, $v(Q_2)$ формулы, выводы которых существуют по индуктивному предположению, и формулы, которые нужно вывести.

В столбцах для $\wedge$, $\vee$ указаны такие формулы, из которых $(Q_1\wedge Q_2)^v$ и $(Q_1\vee Q_2)^v$ соответственно выводятся применением MP с помощью тавтологий из $\mathscr{F}$ (тавтологии В.1, В.2 п. 3.4).

«Выводимость» в комментариях к таблице означает «выводимость из $\mathscr{F}$ и пары формул первого столбца с помощью MP».

$v(Q_1)$	$v(Q_2)$	Даны выводы	Нужно вывести $\to$	$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$
0	0	$\neg Q_1$, $\neg Q_2$	1. $Q_1\to Q_2$	5. $\neg\neg(Q_1\to\neg Q_2)$	9. $\neg(\neg Q_1\to Q_2)$	13. $Q_1\leftrightarrow Q_2$
0	1	$\neg Q_1$, Q_2	2. $Q_1\to Q_2$	6. $\neg\neg(Q_1\to\neg Q_2)$	10. $\neg Q_1\to Q_2$	14. $\neg(Q_1\leftrightarrow Q_2)$
1	0	Q_1, $\neg Q_2$	3. $\neg(Q_1\to Q_2)$	7. $\neg\neg(Q_1\to\neg Q_2)$	11. $\neg Q_1\to Q_2$	15. $\neg(Q_1\leftrightarrow Q_2)$
1	1	Q_1, Q_2	4. $Q_1\to Q_2$	8. $\neg(Q_1\to\neg Q_2)$	12. $\neg Q_1\to Q_2$	16. $Q_1\leftrightarrow Q_2$

Вывод формул 1—16 (номера формул указаны в таблице). Вот простейшее соображение: если P выводима, то для любой Q формула $Q\to P$ тоже выводима (тавтология А.1 и MP).

Это сразу доставляет выводимость формул 2, 4, 10 и 12. Сняв в столбце $\wedge$ двойные отрицания с помощью тавтологии В.1 и МР, получим выводимость формул 5 и 7. Вывод формул 4 в последней строке по симметрии дает вывод $Q_2 \to Q_1$; лемма 4.4 и тавтология С.6 дают вывод формул 16 из $Q_1 \to Q_2$ и $Q_2 \to Q_1$.

1 выводится из $\neg Q_2 \to \neg Q_1$ и С.5 посредством МР. По симметрии выводится $Q_2 \to Q_1$ и затем 13 так же, как 16.

3 выводится из С.3: $Q_1 \to (\neg Q_2 \to \neg(Q_1 \to Q_2))$ и данных двукратным применением МР.

6 выводится из В.2: $\neg Q_1 \to (Q_1 \to \neg Q_2)$ и данных применением МР, В1 и МР.

8 выводится из С.3: $Q_1 \to (\neg\neg Q_2 \to \neg(Q_1 \to \neg Q_2))$

9 выводится из С.3: $\neg Q_1 \to (\neg Q_2 \to \neg(\neg Q_1 \to Q_2))$ двукратным МР.

11 выводится из В.2: $\neg\neg Q_1 \to (\neg Q_1 \to Q_2)$ заменой $\neg\neg Q_1$ на Q_1 по В.1 и МР.

14 выводится из С.7: $\neg Q_1 \wedge Q_2 \to \neg(Q_1 \leftrightarrow Q_2)$ с помощью леммы 4.4 и МР.

15 выводится аналогично 14.

Предложение 5.1 доказано.

5.5. Тавтологии и вероятность. Тавтологии — высказывания, истинные независимо от истинности или ложности своих «составных частей». Это утверждение сохраняется, даже если компонентам тавтологии придавать вероятностные значения истинности $\|P\|$ в алгебре измеримых множеств какого-нибудь вероятностного пространства.

Например: тавтология $R \vee S \vee \neg R \vee \neg S$ — „то ли дождик, то ли снег, то ли будет, то ли нет» — является достоверным прогнозом погоды, несмотря на крайнюю сложность метеорологического вероятностного пространства.

Точный результат удобно формулировать в терминах булевых алгебр.

5.6. Булевы алгебры. Булева алгебра B — это множество с операцией ранга 1 и двумя операциями $\vee$, $\wedge$ ранга 2, а также с двумя отмеченными элементами 0,1, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

а) $(a')' = a$ для всех $a \in B$;

б) $\wedge$, $\vee$ ассоциативны и коммутативны;

в) $\wedge$, $\vee$ дистрибутивны друг относительно друга;

г) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$;

д) $a \vee a = a \wedge a = a$;

е) $1 \wedge a = a$; $0 \vee a = a$.

Примеры. а) B — множество всех частей множества M, $'$ — дополнение, $\wedge$ — пересечение, $\vee$ — объединение, 0 — пустое подмножество, 1 — все M.

б) B — множество открыто-замкнутых подмножеств топологического пространства M с теми же операциями.

в) B — множество измеримых подмножеств вероятностного пространства M с теми же операциями.

Во всех этих случаях B можно отождествить с пространством характеристических функций соответствующих подмножеств (принимающих значения 1 на подмножестве, 0 на дополнении).

5.7. Булева функция истинности. Пусть B — булева алгебра, ε — некоторое множество формул языка L. Пусть $\| \ \|: \varepsilon \to B$ — любое отображение. Продолжим его на логические многочлены над ε (точнее, их представления) по рекурсивным формулам:

$$\|P \leftrightarrow Q\| = (\|P\| \wedge \|Q\|) \vee (\|P\|' \wedge \|Q\|'),$$

$$\|P \to Q\| = \|P\|' \vee \|Q\|, \quad \|P \vee Q\| = \|P\| \vee \|Q\|,$$

$$\|P \wedge Q\| = \|P\| \wedge \|Q\|, \quad \|\neg P\| = \|P\|'.$$

В случае $B = \{0, 1\}$ эти формулы переходят в определения из п. 2.5. Отметим, что $\vee$ и $\wedge$ в левых и правых частях имеют разный смысл.

5.8. Предложение.

Пусть P — логический многочлен — тавтология над ε. Тогда для любого отображения $\| \ \|: \varepsilon \to B$ в любую булеву алгебру B имеем $\|P\| = 1$.

Доказательство. Пример естественного отображения $\| \ \|$ получается так: если задана интерпретация языка L в множестве M, то функции истинности $|P|(\xi)$ можно рассматривать как характеристические функции выразимых подмножеств интерпретационного класса $\bar{M}$ (см. § 2). Поэтому наша обычная функция истинности по существу принимает булевы значения. Они вкладываются в булеву алгебру всех подмножеств $\bar{M}$, которая разлагается в прямое произведение двухточечных булевых алгебр $\{0, 1\}$. Поэтому здесь заключение тривиально следует из условия.

В общем случае можно было бы воспользоваться теоремой Стоуна о структуре булевых алгебр.

Вместо этого мы укажем, как редуцировать задачу к нескольким несложным вычислениям с помощью предложения 5.1. Для этого достаточно проверить $\| \ \|$-истинность базисных тавтологий и сохранение $\| \ \|$-истинности при применении МР. Например, если $\|P\| = 1$ и $\|P \to Q\| = 1$, то $\|P\|' = 0$, $\|P\|' \vee \|Q\| = 1$, откуда $\|Q\| = 1$ в силу 5.6е: это решает вопрос об МР. Аналогично вычисляются значения истинности базисных тавтологий с помощью аксиом п. 5.6.

Булевы функции истинности будут основным инструментом в изложении метода форсинга Коэна в гл. III.