

Правила формирования отмеченных выражений и текстов составляют *синтаксис* языка.

Правила их сопоставления с реальностью относятся к его *семантике*.

Описание синтаксиса и семантики производится на *метаязыке*. Чаще всего это фрагмент национального математического жаргона. В нашей книге это понятие не формализуется; большая часть следующего текста является метаязыковой.

1.2. «Реальностью» для языков математики являются определенные классы (математических) рассуждений или вычислительные процессы, реализуемые с помощью (абстрактных) автоматов. В соответствии с тем или иным назначением эти языки делятся на формальные и алгоритмические. (Ср. в естественных языках противопоставление изъяснительного и повелительного наклонения или на уровне текстов, сообщения и приказа.)

Разные формальные языки отличаются друг от друга, в первую очередь, широтой охвата формализуемых типов рассуждений — *выразительностью*, во вторую очередь — ориентацией на конкретные математические теории, в третью — оборотом элементарных средств выражения (из которых затем синтезируются все остальные) и оформлением.

В этой главе систематически рассмотрен некоторый класс формальных языков. Алгоритмические языки привлекаются эпизодически.

Восходящее к Гумбольдту и Соссюру противопоставление язык — речь столь же реально для формальных языков, как и для естественных.

В § 3 этой главы даны образцы «речи» на двух конкретных языках, ориентированных на теорию множеств и арифметику соответственно: навыки речевой деятельности должны предшествовать изучению грамматики.

Язык теории множеств принадлежит к числу самых богатых выразительными средствами, несмотря на свою крайнюю экономичность. На нем в принципе можно написать формальный текст, отвечающий почти любому фрагменту современной математики, — курс топологии, функционального анализа, алгебры или логики. Язык арифметики — один из самых бедных, но его выразительных возможностей достаточно для описания всей элементарной арифметики, а также для демонстрации эффектов самоописания по Геделю и Тарскому.

1.3. В качестве средства общения, открытия, фиксации материала никакой формальный язык не способен конкурировать со смесью национального математического арго и формул, привычной для каждого работающего математика.

Однако в силу своей жесткой нормализованности формальные тексты могут сами служить объектом математического исследо-

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ

*Gelegentlich ergreifen wir die Feder
Und schreiben Zeichen auf ein weißes Blatt,
Die sagen dies und das, es kennt sie jeder,
Es ist ein Spiel, das seine Regeln hat.*

Н. Гессе, *Buchstaben*

*Ты пишешь на листе, и смысл, означен
и закреплен блуждающими пера,
для сведущего до конца прозрачен:
на правилах покоится игра.*

Г. Гессе. Алфавит (Пер. С. С. Аверинцева)

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Пусть A — некоторое абстрактное множество — *алфавит*. Конечные последовательности элементов A называются *выражениями* в A , конечные последовательности выражений — *текстами*.

Мы будем говорить о языке с алфавитом A , если некоторые выражения и тексты отмечены (как «правильно составленные», «осмысленные» и т. п.). Так, в латинском алфавите A можно отметить словоформы английского языка и грамматически правильные английские фразы. Полученное множество выражений и текстов будет рабочим приближением к интуитивному представлению об «английском языке».

Язык Алгол-60 состоит из выражений и текстов, отмеченных в алфавите $\{\text{латинские буквы}\} \cup \{\text{цифры}\} \cup \{\text{логические значения}\} \cup \{\text{ограничители}\}$. К числу важнейших отмеченных текстов принадлежат *программы*.

В естественных языках совокупность отмеченных выражений и текстов имеет обычно зыбкие границы. Чем более формализован язык, тем жестче эти границы очерчены.

вания. Результаты такого исследования являются *теоремами математики*. Они вызывают значительный интерес (и сильные эмоции), будучи интерпретированы расширительно — как *теоремы о математике*. Но именно возможность таких и еще более расширительных толкований определяет общепсихологическое и общегуманитарное значение математической логики.

1.4. Мы условились, что выражения и тексты языка являются элементами некоторых абстрактных множеств. Чтобы работать с ними, их нужно как-то фиксировать материально. По европейской традиции нового времени (в отличие от старовавилонской или новейшей американской, использующей память ЭВМ) принята следующая форма записи. Элементы алфавита обозначаются определенными символами на бумаге (буквами разных шрифтов, цифрами, дополнительными знаками, а также их комбинациями). Выражение в алфавите A записывается в виде последовательности символов, читаемой слева направо, с переносами в случае нужды. Тексты пишутся как последовательность записей выражений с пробелами или знаками препинания между ними.

1.5. Большая часть интересных выражений и текстов на формальном языке имеет записи, которые либо физически чересчур длинны, либо психологически с трудом поддаются дешифровке и запоминанию в приемлемое время, либо то и другое вместе.

Поэтому их заменяют *сокращенными записями* (которые могут оказаться физически более длинными). Выражение $xxxxx$ можно сокращенно записать « $x \dots x$ (шесть раз)» или « x^6 »; выражение $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ как « $x=y$ », а выражение $101010 \dots 10$ как «последовательность длины $2n$ с единицами на нечетных местах и нулями на четных» или «двойчная запись числа $\frac{2}{3}(4^n - 1)$ ». Сокращенная запись может быть также обозначением любого выражения определенного типа, а не только индивидуального выражения — это так называемые «метаязыковые переменные».

Со времен Виета, Декарта и Лейбница, к которым восходит наша традиция, сокращенная запись служит неиссякаемым источником вдохновения и ошибок. Нет ни смысла, ни возможности систематизировать ее приемы: на них неизгладимо отпечатались мода, дух времени, артистизм или педантичность авторов. Символы $\Sigma, \int, \in$ являются классическими образцами для подражания. Забитая запись Фреге для « P и Q » (на самом деле «не (если P , то не Q)», откуда асимметрия):



показывает, чего следует избегать.

Как бы то ни было, сокращенные записи пронизывают математику. Привычка к расчлененному триединству:

формальный текст
здесь текста — интерпретация текста,

заменяющая неосознанное отождествление высказывания с его формой и смыслом, должна выработаться у читателя одной из первых.

2. ЯЗЫКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этом параграфе описан важнейший класс формальных языков $\mathcal{L}_1$ — языки *первого порядка* — и два конкретных представителя этого класса: язык теории множеств Цермело — Френкеля $L_1 \text{ Set}$ и язык арифметики Пеано $L_1 \text{ Ar}$. Другое название $\mathcal{L}_1$ — языки *предикатов*.

2.1. Алфавит любого языка класса $\mathcal{L}_1$ разбивается на шесть попарно непересекающихся подмножеств. В следующей таблице

Алфавит языков

Подмножества алфавита	Обозначения и названия	
	общие	в $L_1 \text{ Set}$ в $L_1 \text{ Ar}$
Связки и кванторы	$\leftrightarrow$ (равносильно); $\rightarrow$ (следует); $\vee$ (или неразделительное); $\wedge$ (и); $\neg$ (не); $\forall$ (квантор общности); $\exists$ (квантор существования)	
Переменные	$x, y, z, u, v, \dots$ с индексами	
Константы	$c, \dots$ (с индексами)	$\emptyset$ (пустое множество)
Операции рангов 1, 2, 3, ...	$f, g, \dots$ (с индексами)	нет
Отношения (предикаты) рангов 1, 2, 3, ...	$p, q, \dots$ (с индексами)	$\in$ (быть элементом, ранг 2) $=$ (равенство, ранг 2)
Скобки	((открывающая скобка);) (закрывающая скобка)	

перечислены: видовые названия элементов этих подмножеств, стандартные их обозначения в общем случае, специальные обозначения, принятые в этой книге для языков $L_1\text{Set}$ и $L_1\text{Ag}$. Вслед за этим мы описываем правила формирования отмеченных выражений и вкратце обсуждаем семантику.

Отмеченные выражения любого языка L' класса $\mathcal{L}_1$ делятся на два типа: *термы* и *формулы*. Те и другие определяются рекурсивно. Отмеченные тексты — *выводы* — определены в § 4 гл. II.

2.2. Определение

Множество термов — это наименьшее подмножество выражений языка, удовлетворяющее двум условиям:

а) *переменные и константы суть (атомарные) термы*;

б) *если f — операция ранга r , а $t_1, \dots, t_r$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_r)$ — терм.*

В условии а) элемент отождествляется с последовательностью длины 1. Запятая не входит в алфавит, это — принадлежность сокращенной записи $f(t_1, \dots, t_r)$, означает то же, что $f(t_1 t_2)$. В § 1 гл. II объяснено, как однозначно дешифровать последовательности термов, несмотря на отсутствие знака-разделителя.

Если два множества выражений языка удовлетворяют условиям а), б), то и их пересечение удовлетворяет им. Поэтому определение множества термов корректно.

2.3. Определение.

Формулы — это наименьшее подмножество выражений языка, удовлетворяющее двум условиям:

а) *если p — отношение ранга r , а $t_1, \dots, t_r$ — термы, то $p(t_1, \dots, t_r)$ есть (атомарная) формула;*

б) *если P, Q суть формулы (сокращенная запись!), x — переменная, то выражения $(P \leftrightarrow Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \wedge (Q)$, $\neg(P)$, $\forall x(P)$, $\exists x(P)$ суть формулы.*

Из определений видно, что любой терм получается из атомарных термов за конечное число шагов, каждый из которых состоит в «применении символа операции» к полученным ранее термам. Это верно и для формул. В § 1, гл. II мы уточним это замечание.

Следующие первоначальные истолкования термов и формул даны для ориентировки и относятся к так называемым «стандартным моделям» (точные определения см. в § 2 гл. II).

2.4. Примеры и толкования. а) Термы служат названиями (обозначениями) объектов теории. Атомарные термы — это названия неопределенных (переменные) или конкретных (константы) объектов. Терм $f(t_1, \dots, t_r)$ есть обозначение объекта, получившегося в результате применения операции, обозначенной f , к объектам, обозначенным $t_1, \dots, t_r$. Вот примеры из $L_1\text{Ag}$

$\bar{0}$ — обозначение нуля,

$\bar{1}$ — обозначение единицы,

$+(\bar{1}\bar{1})$ — обозначение двойки ($1+1=2$ в обычной записи).
 $+(\bar{1}+(\bar{1}\bar{1}))$ — обозначение тройки,
 $\cdot(\bar{1}(\bar{1}\bar{1})+(\bar{1}\bar{1}))$ — обозначение четверки ($2 \times 2 = 4$).

Так как эта нормализованная запись расходится с принятой в арифметике, мы будем обычно писать в $L_1\text{Ag}$ t_1+t_2 вместо $+(t_1 t_2)$ и $t_1 \cdot t_2$ вместо $\cdot(t_1 t_2)$. Можно рассматривать это соглашение как очередную условность сокращенной записи:

x — обозначение неопределенности целого числа,

$x+\bar{1}$ или $+(x\bar{1})$ — обозначение следующего за ним числа.

В языке $L_1\text{Set}$ все термы атомарные:

x — обозначение неопределенного множества,

$\emptyset$ — обозначение пустого множества.

б) Формулы служат обозначениями высказываний (суждений, предложений ...) теории. Высказывание, переведенное на неформальный язык, может оказаться истинным, ложным или неопределенным (если оно относится к неопределенным объектам): см. точные определения в гл. II.

Атомарная формула $p(t_1, \dots, t_r)$ в общем случае имеет примерно такой смысл: «упорядоченная r -ка объектов, обозначенных $t_1, \dots, t_r$, обладает свойством, обозначенным p ». Вот примеры атомарных формул в $L_1\text{Ag}$. Их общая структура $=(t_1 t_2)$ или в ненормализованной записи $t_1=t_2$:

$0=\bar{1}$, $\neg(\bar{0}=\bar{1})$, $x+\bar{1}=y$.

Примеры неатомарных формул:

$(x=\bar{0}) \rightarrow (x+\bar{1}=\bar{1})$,

$\forall x((x=\bar{0}) \vee (\neg(x \cdot x = \bar{0})))$.

Атомарные формулы в $L_1\text{Set}$: $y \in x$ (y является элементом x), $y=x$, $x=\emptyset$, а также $\emptyset \in y$, $x \in \emptyset$ и т. п. Нормализованная запись, конечно, должна была бы иметь вид $\in(xy)$ и т. п.

Некоторые неатомарные формулы:

$\exists x(\forall y(\neg(y \in x)))$: существует такое x , что ни одно y не является его элементом. Неформально это означает «существует пустое множество». Еще раз напомним, однако, что неформальное толкование подразумевает некоторую стандартную интерпретацию, которая будет явно введена в гл. II.

$\forall y(y \in z \rightarrow y \in x)$: z есть подмножество x .

Это — пример очень употребительного приема сокращенной записи: в формуле слева опущены четыре скобки. Мы не будем точно описывать, какие скобки разрешается опускать: их восстановление

должно быть однозначно или определено контекстом и не требовать специальных усилий.

Еще раз подчеркнем: сокращенные записи формул суть лишь их материальные знаки. При выборе сокращенной записи преследуются в основном психологические цели: быстрота чтения (возможно, в ущерб формальной однозначности), легкость возникновения полезных ассоциаций и трудность — вредных, соответствие привычкам автора и читателя и т. п.

Математическими объектами в теории формальных языков являются сами формулы, а не их записи.

Отступление об именах

Мы неоднократно говорили, что некоторый объект (значок на бумаге, элемент алфавита как абстрактного множества и т. д.) является записью, или обозначением, или названием другого объекта. Удобный общий термин для такого отношения — *имя*.

Буква x есть имя некоторого элемента алфавита; войдя в формулу, этот последний станет именем множества или числа; запись $x \in u$ есть имя некоторого выражения в алфавите A , которое, в свою очередь, есть имя некоторого суждения о неопределенных множествах и т. п.

В словесном оформлении имена объектов часто отождествляются с самими объектами: мы говорим «переменная x », «формула P », «множество Z ». Это не всегда безопасно. Следующий пассаж из книги Россера «Логика для математиков» [6] указывает на некоторые подводные камни:

«...суть дела в том, что если у нас есть утверждение типа «3 больше $9/12$ » о рациональном числе $9/12$, содержащее некоторое имя « $9/12$ » этого рационального числа, то мы можем заменить это имя любым другим именем того же рационального числа, например « $3/4$ ». Когда же мы рассматриваем утверждение типа «3 делит знаменатель $9/12$ » о некотором имени некоторого рационального числа, и наше утверждение содержит некоторое имя этого имени, то это имя имени можно заменить другим именем того же имени, но, вообще говоря, нельзя заменить именем другого имени, хотя бы это другое имя было именем того же рационального числа».

Впрочем, продолжает Россер, «отказ от скрупулезного преследования этих тонкостей редко приводит к путанице в логике и еще реже в математике».

Эти тонкости, однако, играют немаловажную роль в философии и в практике математики.

«Роза пахнет розой, хоть розой назови ее, хоть как», — это верно, потому что розы «существуют» вне нас и пахнут сами по себе. Но гильбертовы пространства «существуют», видимо, лишь постольку,

поскольку мы о них говорим, и выбор слова здесь небезразличен. Имя «пространство» для множества классов интегрируемых с квадратом функций было одновременно кодом целого круга интуитивных представлений о «настоящих» пространствах. Оно организовывало мысль и вело ее в определенном направлении.

Удачное имя — мост между научным знанием и здравым смыслом, новым опытом и старыми привычками. Понятливую основу любой науки составляет сложная сеть имен вещей, имен идей и имен имен. Она эволюционирует сама и меняется ее проекция на реальность.

3. НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА ПЕРЕВОДА

3.1. Напомним, что формулы L_1 Set суть имена высказываний о множествах; формулы L_1 Ag — имена высказываний о натуральных числах; в эти высказывания входят имена множеств и чисел, возможно, неопределенных.

В этом параграфе собраны первые образцы двустороннего перевода «арго» $\longleftrightarrow$ формальные языки». Одна из целей этой выставки — показать, насколько велики выразительные возможности L_1 Set и L_1 Ag, несмотря на крайнюю ограниченность средств выражения.

Как и в естественных языках, перевод не может быть задан жесткими правилами, неоднозначен и является творческим процессом. Сравните четверостишие Гессе с его переводом в эпиграфе к этой главе: важнейший инвариант перевода есть смысл, который, однако, прозрачен лишь для сведущего. Впрочем, это утверждает лишь перевод: в оригинале стоит «es kennt sie jeder».

Перед чтением дальнейшего следует просмотреть приложение к гл. II «Универсум фон Неймана». Подразумеваемая семантика L_1 Set относится к этому универсуму, а не к произвольным «канторовским» множествам. Более полное представление о смысле формул можно получить из § 2 гл. II.

Переводы L_1 Set — арг

3.2. $\forall x (\bigcap (x \in \emptyset))$: «для всех (множеств) x неверно, что x является элементом (множества) $\emptyset$ » или « $\emptyset$ — пустое множество». Второе утверждение равносильно первому лишь в универсуме фон Неймана, где элементами множеств являются только множества, а не вещественные числа, стулья или атомы.

3.3. $\forall z (z \subseteq x \leftrightarrow z \subseteq y) \leftrightarrow x = y$:

«если для всех z верно, что z является элементом x , тогда и только тогда, когда z является элементом y , то верно, что x совпадает

с u , и наоборот» или «множество однозначно определяется своими элементами». В этом выражении пропущено по крайней мере шесть скобок; подформулы $z \in x$, $z \in y$, $x = y$ даны в не нормализованной по правилам $\mathcal{L}_1$ записи.

3.4. $\forall u \forall v \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow (z = u \vee z = v))$:

«для любых двух множеств u , v существует третье множество x такое, что u , v являются его единственными элементами». Это — одна из аксиом Цермело — Френкеля. Множество x называется «неупорядоченной парой множеств u , v » и в приложении обозначается $\{u, v\}$.

3.5. $\forall u \forall z ((z \in u \wedge u \in x) \rightarrow z \in x) \wedge (u \in x \rightarrow \neg (u \in y))$: «множество x частично упорядочено отношением $\in$ между своими элементами».

Условие $u \in x \rightarrow \neg (u \in y)$ мы перенесли механически из «определения упорядоченности. В универсуме фон Неймана оно выполнено автоматически, так как ни одно множество там не является своим собственным элементом.

В качестве упражнения полезно написать формулы:

« x вполне упорядочено отношением $\in$ »;

« x линейно упорядочено отношением $\in$ »;

« x — ординал».

3.6. $\forall x (y \in z)$. Буквальный перевод «для всех x верно, что y является элементом z » звучит несколько странно. Еще хуже выглядит построенная в соответствии с правилами формула

$$A x \exists x (y \in z).$$

Можно было бы несколько усложнить правила и сделать такие формулы незаконными, но в общем они ничему не мешают. В гл. II мы убедимся, что с точки зрения «истинности» или «доказуемости» они окажутся равносильны формуле $y \in z$. Так их и следует понимать.

Переводы арго — L_1 Set

Мы выберем несколько фундаментальных конструкций общего математического значения и покажем, как они реализуются в универсуме фон Неймана, в котором нет ничего, кроме множеств, полученных «собираанием» из $\emptyset$, и в котором любые отношения нужно конструировать из $\in$.

3.7.

« x — прямое произведение $y \times z$ ». Это означает, что элементами x являются упорядоченные пары элементов из y и z соответственно. Определение неупорядоченной пары очевидно: формула

$$\forall u (u \in x \leftrightarrow (u = y \vee u = z))$$

«означает» или сокращенно записывается в виде $x = \{y_1, z_1\}$ (ср. с п. 3.4). Упорядоченная пара y_1 и z_1 вводится приемом Куратовского: это множество x_1 , элементами которого являются неупорядоченные пары $\{y_1, y_1\}$ и $\{y_1, z_1\}$. Таким образом, мы приходим к формуле

$$\exists y_1 \exists z_1 (x_1 = \{y_2, z_2\} \vee y_2 = \{y_1, y_1\} \wedge z_2 = \{y_1, z_1\}),$$

которая будет сокращенно записываться в виде

$$x_1 = \langle y_1, z_1 \rangle$$

и читаться « x_1 есть упорядоченная пара с первым элементом y_1 и вторым элементом z_1 ». Сокращенные записи подформул в формуле взяты в кавычки; позже мы перестанем это делать.

Окончательно, высказывание « $x = y \times z$ » может быть записано в виде

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in x \leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 (y_1 \in y_2 \wedge y_2 \in z \wedge x_1 = \langle y_1, y_2 \rangle)),$$

чтобы в последний раз напомнить читателю о вольностях записи, напомним эту же формулу по всем канонам $\mathcal{L}_1$:

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in x \leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 ((y_1 \in y_2) \wedge (y_2 \in z) \wedge (x_1 = \langle y_1, y_2 \rangle))) \wedge \\ \neg ((x_1 \in x) \wedge (x_2 \in x) \wedge (x_1 \neq x_2)) \wedge (\forall u ((u \in x) \leftrightarrow \neg ((u \in y_1) \wedge (u \in y_2)))) \wedge \\ \neg ((u \in x) \wedge (u \in z)) \wedge (\neg ((u \in y_1) \wedge (u \in z))) \wedge (\neg ((u \in y_2) \wedge (u \in z))))).$$

Упражнение: где находится открывающая скобка, парная к пятой от конца закрывающей скобке?

В § I гл. II будет указан алгоритм для решения таких вопросов.

3.8.

« f — отображение множества u в множество v ». Прежде всего, отображения (или функции) отождествляются со своими графиками: иначе их не удастся рассматривать как элементы универсума.

Следующая формула последовательно накладывает на f три ограничения: f есть подмножество $u \times v$; проекция f на u совпадает со всем u ; каждому элементу из u отвечает ровно один элемент из v :

$$\forall f \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 \exists z_5 \exists z_6 \exists z_7 \exists z_8 \exists z_9 \exists z_{10} \exists z_{11} \exists z_{12} \exists z_{13} \exists z_{14} \exists z_{15} \exists z_{16} \exists z_{17} \exists z_{18} \exists z_{19} \exists z_{20} \exists z_{21} \exists z_{22} \exists z_{23} \exists z_{24} \exists z_{25} \exists z_{26} \exists z_{27} \exists z_{28} \exists z_{29} \exists z_{30} \exists z_{31} \exists z_{32} \exists z_{33} \exists z_{34} \exists z_{35} \exists z_{36} \exists z_{37} \exists z_{38} \exists z_{39} \exists z_{40} \exists z_{41} \exists z_{42} \exists z_{43} \exists z_{44} \exists z_{45} \exists z_{46} \exists z_{47} \exists z_{48} \exists z_{49} \exists z_{50} \exists z_{51} \exists z_{52} \exists z_{53} \exists z_{54} \exists z_{55} \exists z_{56} \exists z_{57} \exists z_{58} \exists z_{59} \exists z_{60} \exists z_{61} \exists z_{62} \exists z_{63} \exists z_{64} \exists z_{65} \exists z_{66} \exists z_{67} \exists z_{68} \exists z_{69} \exists z_{70} \exists z_{71} \exists z_{72} \exists z_{73} \exists z_{74} \exists z_{75} \exists z_{76} \exists z_{77} \exists z_{78} \exists z_{79} \exists z_{80} \exists z_{81} \exists z_{82} \exists z_{83} \exists z_{84} \exists z_{85} \exists z_{86} \exists z_{87} \exists z_{88} \exists z_{89} \exists z_{90} \exists z_{91} \exists z_{92} \exists z_{93} \exists z_{94} \exists z_{95} \exists z_{96} \exists z_{97} \exists z_{98} \exists z_{99} \exists z_{100} \exists z_{101} \exists z_{102} \exists z_{103} \exists z_{104} \exists z_{105} \exists z_{106} \exists z_{107} \exists z_{108} \exists z_{109} \exists z_{110} \exists z_{111} \exists z_{112} \exists z_{113} \exists z_{114} \exists z_{115} \exists z_{116} \exists z_{117} \exists z_{118} \exists z_{119} \exists z_{120} \exists z_{121} \exists z_{122} \exists z_{123} \exists z_{124} \exists z_{125} \exists z_{126} \exists z_{127} \exists z_{128} \exists z_{129} \exists z_{130} \exists z_{131} \exists z_{132} \exists z_{133} \exists z_{134} \exists z_{135} \exists z_{136} \exists z_{137} \exists z_{138} \exists z_{139} \exists z_{140} \exists z_{141} \exists z_{142} \exists z_{143} \exists z_{144} \exists z_{145} \exists z_{146} \exists z_{147} \exists z_{148} \exists z_{149} \exists z_{150} \exists z_{151} \exists z_{152} \exists z_{153} \exists z_{154} \exists z_{155} \exists z_{156} \exists z_{157} \exists z_{158} \exists z_{159} \exists z_{160} \exists z_{161} \exists z_{162} \exists z_{163} \exists z_{164} \exists z_{165} \exists z_{166} \exists z_{167} \exists z_{168} \exists z_{169} \exists z_{170} \exists z_{171} \exists z_{172} \exists z_{173} \exists z_{174} \exists z_{175} \exists z_{176} \exists z_{177} \exists z_{178} \exists z_{179} \exists z_{180} \exists z_{181} \exists z_{182} \exists z_{183} \exists z_{184} \exists z_{185} \exists z_{186} \exists z_{187} \exists z_{188} \exists z_{189} \exists z_{190} \exists z_{191} \exists z_{192} \exists z_{193} \exists z_{194} \exists z_{195} \exists z_{196} \exists z_{197} \exists z_{198} \exists z_{199} \exists z_{200} \exists z_{201} \exists z_{202} \exists z_{203} \exists z_{204} \exists z_{205} \exists z_{206} \exists z_{207} \exists z_{208} \exists z_{209} \exists z_{210} \exists z_{211} \exists z_{212} \exists z_{213} \exists z_{214} \exists z_{215} \exists z_{216} \exists z_{217} \exists z_{218} \exists z_{219} \exists z_{220} \exists z_{221} \exists z_{222} \exists z_{223} \exists z_{224} \exists z_{225} \exists z_{226} \exists z_{227} \exists z_{228} \exists z_{229} \exists z_{230} \exists z_{231} \exists z_{232} \exists z_{233} \exists z_{234} \exists z_{235} \exists z_{236} \exists z_{237} \exists z_{238} \exists z_{239} \exists z_{240} \exists z_{241} \exists z_{242} \exists z_{243} \exists z_{244} \exists z_{245} \exists z_{246} \exists z_{247} \exists z_{248} \exists z_{249} \exists z_{250} \exists z_{251} \exists z_{252} \exists z_{253} \exists z_{254} \exists z_{255} \exists z_{256} \exists z_{257} \exists z_{258} \exists z_{259} \exists z_{260} \exists z_{261} \exists z_{262} \exists z_{263} \exists z_{264} \exists z_{265} \exists z_{266} \exists z_{267} \exists z_{268} \exists z_{269} \exists z_{270} \exists z_{271} \exists z_{272} \exists z_{273} \exists z_{274} \exists z_{275} \exists z_{276} \exists z_{277} \exists z_{278} \exists z_{279} \exists z_{280} \exists z_{281} \exists z_{282} \exists z_{283} \exists z_{284} \exists z_{285} \exists z_{286} \exists z_{287} \exists z_{288} \exists z_{289} \exists z_{290} \exists z_{291} \exists z_{292} \exists z_{293} \exists z_{294} \exists z_{295} \exists z_{296} \exists z_{297} \exists z_{298} \exists z_{299} \exists z_{300} \exists z_{301} \exists z_{302} \exists z_{303} \exists z_{304} \exists z_{305} \exists z_{306} \exists z_{307} \exists z_{308} \exists z_{309} \exists z_{310} \exists z_{311} \exists z_{312} \exists z_{313} \exists z_{314} \exists z_{315} \exists z_{316} \exists z_{317} \exists z_{318} \exists z_{319} \exists z_{320} \exists z_{321} \exists z_{322} \exists z_{323} \exists z_{324} \exists z_{325} \exists z_{326} \exists z_{327} \exists z_{328} \exists z_{329} \exists z_{330} \exists z_{331} \exists z_{332} \exists z_{333} \exists z_{334} \exists z_{335} \exists z_{336} \exists z_{337} \exists z_{338} \exists z_{339} \exists z_{340} \exists z_{341} \exists z_{342} \exists z_{343} \exists z_{344} \exists z_{345} \exists z_{346} \exists z_{347} \exists z_{348} \exists z_{349} \exists z_{350} \exists z_{351} \exists z_{352} \exists z_{353} \exists z_{354} \exists z_{355} \exists z_{356} \exists z_{357} \exists z_{358} \exists z_{359} \exists z_{360} \exists z_{361} \exists z_{362} \exists z_{363} \exists z_{364} \exists z_{365} \exists z_{366} \exists z_{367} \exists z_{368} \exists z_{369} \exists z_{370} \exists z_{371} \exists z_{372} \exists z_{373} \exists z_{374} \exists z_{375} \exists z_{376} \exists z_{377} \exists z_{378} \exists z_{379} \exists z_{380} \exists z_{381} \exists z_{382} \exists z_{383} \exists z_{384} \exists z_{385} \exists z_{386} \exists z_{387} \exists z_{388} \exists z_{389} \exists z_{390} \exists z_{391} \exists z_{392} \exists z_{393} \exists z_{394} \exists z_{395} \exists z_{396} \exists z_{397} \exists z_{398} \exists z_{399} \exists z_{400} \exists z_{401} \exists z_{402} \exists z_{403} \exists z_{404} \exists z_{405} \exists z_{406} \exists z_{407} \exists z_{408} \exists z_{409} \exists z_{410} \exists z_{411} \exists z_{412} \exists z_{413} \exists z_{414} \exists z_{415} \exists z_{416} \exists z_{417} \exists z_{418} \exists z_{419} \exists z_{420} \exists z_{421} \exists z_{422} \exists z_{423} \exists z_{424} \exists z_{425} \exists z_{426} \exists z_{427} \exists z_{428} \exists z_{429} \exists z_{430} \exists z_{431} \exists z_{432} \exists z_{433} \exists z_{434} \exists z_{435} \exists z_{436} \exists z_{437} \exists z_{438} \exists z_{439} \exists z_{440} \exists z_{441} \exists z_{442} \exists z_{443} \exists z_{444} \exists z_{445} \exists z_{446} \exists z_{447} \exists z_{448} \exists z_{449} \exists z_{450} \exists z_{451} \exists z_{452} \exists z_{453} \exists z_{454} \exists z_{455} \exists z_{456} \exists z_{457} \exists z_{458} \exists z_{459} \exists z_{460} \exists z_{461} \exists z_{462} \exists z_{463} \exists z_{464} \exists z_{465} \exists z_{466} \exists z_{467} \exists z_{468} \exists z_{469} \exists z_{470} \exists z_{471} \exists z_{472} \exists z_{473} \exists z_{474} \exists z_{475} \exists z_{476} \exists z_{477} \exists z_{478} \exists z_{479} \exists z_{480} \exists z_{481} \exists z_{482} \exists z_{483} \exists z_{484} \exists z_{485} \exists z_{486} \exists z_{487} \exists z_{488} \exists z_{489} \exists z_{490} \exists z_{491} \exists z_{492} \exists z_{493} \exists z_{494} \exists z_{495} \exists z_{496} \exists z_{497} \exists z_{498} \exists z_{499} \exists z_{500} \exists z_{501} \exists z_{502} \exists z_{503} \exists z_{504} \exists z_{505} \exists z_{506} \exists z_{507} \exists z_{508} \exists z_{509} \exists z_{510} \exists z_{511} \exists z_{512} \exists z_{513} \exists z_{514} \exists z_{515} \exists z_{516} \exists z_{517} \exists z_{518} \exists z_{519} \exists z_{520} \exists z_{521} \exists z_{522} \exists z_{523} \exists z_{524} \exists z_{525} \exists z_{526} \exists z_{527} \exists z_{528} \exists z_{529} \exists z_{530} \exists z_{531} \exists z_{532} \exists z_{533} \exists z_{534} \exists z_{535} \exists z_{536} \exists z_{537} \exists z_{538} \exists z_{539} \exists z_{540} \exists z_{541} \exists z_{542} \exists z_{543} \exists z_{544} \exists z_{545} \exists z_{546} \exists z_{547} \exists z_{548} \exists z_{549} \exists z_{550} \exists z_{551} \exists z_{552} \exists z_{553} \exists z_{554} \exists z_{555} \exists z_{556} \exists z_{557} \exists z_{558} \exists z_{559} \exists z_{560} \exists z_{561} \exists z_{562} \exists z_{563} \exists z_{564} \exists z_{565} \exists z_{566} \exists z_{567} \exists z_{568} \exists z_{569} \exists z_{570} \exists z_{571} \exists z_{572} \exists z_{573} \exists z_{574} \exists z_{575} \exists z_{576} \exists z_{577} \exists z_{578} \exists z_{579} \exists z_{580} \exists z_{581} \exists z_{582} \exists z_{583} \exists z_{584} \exists z_{585} \exists z_{586} \exists z_{587} \exists z_{588} \exists z_{589} \exists z_{590} \exists z_{591} \exists z_{592} \exists z_{593} \exists z_{594} \exists z_{595} \exists z_{596} \exists z_{597} \exists z_{598} \exists z_{599} \exists z_{600} \exists z_{601} \exists z_{602} \exists z_{603} \exists z_{604} \exists z_{605} \exists z_{606} \exists z_{607} \exists z_{608} \exists z_{609} \exists z_{610} \exists z_{611} \exists z_{612} \exists z_{613} \exists z_{614} \exists z_{615} \exists z_{616} \exists z_{617} \exists z_{618} \exists z_{619} \exists z_{620} \exists z_{621} \exists z_{622} \exists z_{623} \exists z_{624} \exists z_{625} \exists z_{626} \exists z_{627} \exists z_{628} \exists z_{629} \exists z_{630} \exists z_{631} \exists z_{632} \exists z_{633} \exists z_{634} \exists z_{635} \exists z_{636} \exists z_{637} \exists z_{638} \exists z_{639} \exists z_{640} \exists z_{641} \exists z_{642} \exists z_{643} \exists z_{644} \exists z_{645} \exists z_{646} \exists z_{647} \exists z_{648} \exists z_{649} \exists z_{650} \exists z_{651} \exists z_{652} \exists z_{653} \exists z_{654} \exists z_{655} \exists z_{656} \exists z_{657} \exists z_{658} \exists z_{659} \exists z_{660} \exists z_{661} \exists z_{662} \exists z_{663} \exists z_{664} \exists z_{665} \exists z_{666} \exists z_{667} \exists z_{668} \exists z_{669} \exists z_{670} \exists z_{671} \exists z_{672} \exists z_{673} \exists z_{674} \exists z_{675} \exists z_{676} \exists z_{677} \exists z_{678} \exists z_{679} \exists z_{680} \exists z_{681} \exists z_{682} \exists z_{683} \exists z_{684} \exists z_{685} \exists z_{686} \exists z_{687} \exists z_{688} \exists z_{689} \exists z_{690} \exists z_{691} \exists z_{692} \exists z_{693} \exists z_{694} \exists z_{695} \exists z_{696} \exists z_{697} \exists z_{698} \exists z_{699} \exists z_{700} \exists z_{701} \exists z_{702} \exists z_{703} \exists z_{704} \exists z_{705} \exists z_{706} \exists z_{707} \exists z_{708} \exists z_{709} \exists z_{710} \exists z_{711} \exists z_{712} \exists z_{713} \exists z_{714} \exists z_{715} \exists z_{716} \exists z_{717} \exists z_{718} \exists z_{719} \exists z_{720} \exists z_{721} \exists z_{722} \exists z_{723} \exists z_{724} \exists z_{725} \exists z_{726} \exists z_{727} \exists z_{728} \exists z_{729} \exists z_{730} \exists z_{731} \exists z_{732} \exists z_{733} \exists z_{734} \exists z_{735} \exists z_{736} \exists z_{737} \exists z_{738} \exists z_{739} \exists z_{740} \exists z_{741} \exists z_{742} \exists z_{743} \exists z_{744} \exists z_{745} \exists z_{746} \exists z_{747} \exists z_{748} \exists z_{749} \exists z_{750} \exists z_{751} \exists z_{752} \exists z_{753} \exists z_{754} \exists z_{755} \exists z_{756} \exists z_{757} \exists z_{758} \exists z_{759} \exists z_{760} \exists z_{761} \exists z_{762} \exists z_{763} \exists z_{764} \exists z_{765} \exists z_{766} \exists z_{767} \exists z_{768} \exists z_{769} \exists z_{770} \exists z_{771} \exists z_{772} \exists z_{773} \exists z_{774} \exists z_{775} \exists z_{776} \exists z_{777} \exists z_{778} \exists z_{779} \exists z_{780} \exists z_{781} \exists z_{782} \exists z_{783} \exists z_{784} \exists z_{785} \exists z_{786} \exists z_{787} \exists z_{788} \exists z_{789} \exists z_{790} \exists z_{791} \exists z_{792} \exists z_{793} \exists z_{794} \exists z_{795} \exists z_{796} \exists z_{797} \exists z_{798} \exists z_{799} \exists z_{800} \exists z_{801} \exists z_{802} \exists z_{803} \exists z_{804} \exists z_{805} \exists z_{806} \exists z_{807} \exists z_{808} \exists z_{809} \exists z_{810} \exists z_{811} \exists z_{812} \exists z_{813} \exists z_{814} \exists z_{815} \exists z_{816} \exists z_{817} \exists z_{818} \exists z_{819} \exists z_{820} \exists z_{821} \exists z_{822} \exists z_{823} \exists z_{824} \exists z_{825} \exists z_{826} \exists z_{827} \exists z_{828} \exists z_{829} \exists z_{830} \exists z_{831} \exists z_{832} \exists z_{833} \exists z_{834} \exists z_{835} \exists z_{836} \exists z_{837} \exists z_{838} \exists z_{839} \exists z_{840} \exists z_{841} \exists z_{842} \exists z_{843} \exists z_{844} \exists z_{845} \exists z_{846} \exists z_{847} \exists z_{848} \exists z_{849} \exists z_{850} \exists z_{851} \exists z_{852} \exists z_{853} \exists z_{854} \exists z_{855} \exists z_{856} \exists z_{857} \exists z_{858} \exists z_{859} \exists z_{860} \exists z_{861} \exists z_{862} \exists z_{863} \exists z_{864} \exists z_{865} \exists z_{866} \exists z_{867} \exists z_{868} \exists z_{869} \exists z_{870} \exists z_{871} \exists z_{872} \exists z_{873} \exists z_{874} \exists z_{875} \exists z_{876} \exists z_{877} \exists z_{878} \exists z_{879} \exists z_{880} \exists z_{881} \exists z_{882} \exists z_{883} \exists z_{884} \exists z_{885} \exists z_{886} \exists z_{887} \exists z_{888} \exists z_{889} \exists z_{890} \exists z_{891} \exists z_{892} \exists z_{893} \exists z_{894} \exists z_{895} \exists z_{896} \exists z_{897} \exists z_{898} \exists z_{899} \exists z_{900} \exists z_{901} \exists z_{902} \exists z_{903} \exists z_{904} \exists z_{905} \exists z_{906} \exists z_{907} \exists z_{908} \exists z_{909} \exists z_{910} \exists z_{911} \exists z_{912} \exists z_{913} \exists z_{914} \exists z_{915} \exists z_{916} \exists z_{917} \exists z_{918} \exists z_{919} \exists z_{920} \exists z_{921} \exists z_{922} \exists z_{923} \exists z_{924} \exists z_{925} \exists z_{926} \exists z_{927} \exists z_{928} \exists z_{929} \exists z_{930} \exists z_{931} \exists z_{932} \exists z_{933} \exists z_{934} \exists z_{935} \exists z_{936} \exists z_{937} \exists z_{938} \exists z_{939} \exists z_{940} \exists z_{941} \exists z_{942} \exists z_{943} \exists z_{944} \exists z_{945} \exists z_{946} \exists z_{947} \exists z_{948} \exists z_{949} \exists z_{950} \exists z_{951} \exists z_{952} \exists z_{953} \exists z_{954} \exists z_{955} \exists z_{956} \exists z_{957} \exists z_{958} \exists z_{959} \exists z_{960} \exists z_{961} \exists z_{962} \exists z_{963} \exists z_{964} \exists z_{965} \exists z_{966} \exists z_{967} \exists z_{968} \exists z_{969} \exists z_{970} \exists z_{971} \exists z_{972} \exists z_{973} \exists z_{974} \exists z_{975} \exists z_{976} \exists z_{977} \exists z_{978} \exists z_{979} \exists z_{980} \exists z_{981} \exists z_{982} \exists z_{983} \exists z_{984} \exists z_{985} \exists z_{986} \exists z_{987} \exists z_{988} \exists z_{989} \exists z_{990} \exists z_{991} \exists z_{992} \exists z_{993} \exists z_{994} \exists z_{995} \exists z_{996} \exists z_{997} \exists z_{998} \exists z_{999} \exists z_{1000} \exists z_{1001} \exists z_{1002} \exists z_{1003} \exists z_{1004} \exists z_{1005} \exists z_{1006} \exists z_{1007} \exists z_{1008} \exists z_{1009} \exists z_{1010} \exists z_{1011} \exists z_{1012} \exists z_{1013} \exists z_{1014} \exists z_{1015} \exists z_{1016} \exists z_{1017} \exists z_{1018} \exists z_{1019} \exists z_{1020} \exists z_{1021} \exists z_{1022} \exists z_{1023} \exists z_{1024} \exists z_{1025} \exists z_{1026} \exists z_{1027} \exists z_{1028} \exists z_{1029} \exists z_{1030} \exists z_{1031} \exists z_{1032} \exists z_{1033} \exists z_{1034} \exists z_{1035} \exists z_{1036} \exists z_{1037} \exists z_{1038} \exists z_{1039} \exists z_{1040} \exists z_{1041} \exists z_{1042} \exists z_{1043} \exists z_{1044} \exists z_{1045} \exists z_{1046} \exists z_{1047} \exists z_{1048} \exists z_{1049} \exists z_{1050} \exists z_{1051} \exists z_{1052} \exists z_{1053} \exists z_{1054} \exists z_{1055} \exists z_{1056} \exists z_{1057} \exists z_{1058} \exists z_{1059} \exists z_{1060} \exists z_{1061} \exists z_{1062} \exists z_{1063} \exists z_{1064} \exists z_{1065} \exists z_{1066} \exists z_{1067} \exists z_{1068} \exists z_{1069} \exists z_{1070} \exists z_{1071} \exists z_{1072} \exists z_{1073} \exists z_{1074} \exists z_{1075} \exists z_{1076} \exists z_{1077} \exists z_{1078} \exists z_{1079} \exists z_{1080} \exists z_{1081} \exists z_{1082} \exists z_{1083} \exists z_{1084} \exists z_{1085} \exists z_{1086} \exists z_{1087} \exists z_{1088} \exists z_{1089} \exists z_{1090} \exists z_{1091} \exists z_{1092} \exists z_{1093} \exists z_{1094} \exists z_{1095} \exists z_{1096} \exists z_{1097} \exists z_{1098} \exists z_{1099} \exists z_{1100} \exists z_{1101} \exists z_{1102} \exists z_{1103} \exists z_{1104} \exists z_{1105} \exists z_{1106} \exists z_{1107} \exists z_{1108} \exists z_{1109} \exists z_{1110} \exists z_{1111} \exists z_{1112} \exists z_{1113} \exists z_{1114} \exists z_{1115} \exists z_{1116} \exists z_{1117} \exists z_{1118} \exists z_{1119} \exists z_{1120} \exists z_{1121} \exists z_{1122} \exists z_{1123} \exists z_{1124} \exists z_{1125} \exists z_{1126} \exists z_{1127} \exists z_{1128} \exists z_{1129} \exists z_{1130} \exists z_{1131} \exists z_{1132} \exists z_{1133} \exists z_{1134} \exists z_{1135} \exists z_{1136} \exists z_{1137} \exists z_{1138} \exists z_{1139} \exists z_{1140} \exists z_{1141} \exists z_{1142} \exists z_{1143} \exists z_{1144} \exists z_{1145} \exists z_{1146} \exists z_{1147} \exists z_{1148} \exists z_{1149} \exists z_{1150} \exists z_{1151} \exists z_{1152} \exists z_{1153} \exists z_{1154} \exists z_{1155} \exists z_{1156} \exists z_{1157} \exists z_{1158} \exists z_{1159} \exists z_{1160} \exists z_{1161} \exists z_{1162} \exists z_{1163} \exists z_{1164} \exists z_{1165} \exists z_{1166} \exists z_{1167} \exists z_{1168} \exists z_{1169} \exists z_{1170} \exists z_{1171} \exists z_{1172} \exists z_{1173} \exists z_{1174} \exists z_{1175} \exists z_{$$

« x — конечное множество». Конечность далеко не является примитивным понятием. Вот ее определение по Дедекнду: «не существует взаимно-однозначного отображения f множества x на его собственное подмножество».

Формула:

$$\exists f (f = \text{отображение } x \text{ в } x^* \wedge \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 ((\langle u_1, v_1 \rangle \in f^* \wedge \langle u_2, v_2 \rangle \in f^* \wedge \neg (u_1 = u_2)) \rightarrow \neg (v_1 = v_2)) \wedge \exists u_1 (u_1 \in x \wedge \neg \exists v_1 (\langle v_1, u_1 \rangle \in f^*)))$$

Сокращение « $\langle u_1, v_1 \rangle \in f^* \wedge \langle u_2, v_2 \rangle \in f^* \wedge \neg (u_1 = u_2) \rightarrow \neg (v_1 = v_2)$ » означает, конечно,

$$\exists y (*y = \langle u_1, v_1 \rangle^* \wedge y \in f).$$

« x — целое неотрицательное число». Естественными представителями натуральных чисел в универсуме фон Неймана служат конечные ординалы, так что нужная формула может выглядеть так: « x вполне упорядочено отношением $\in$ « $\wedge$ » x конечно».

Это определение сразу дает естественный порядок натуральных чисел.

Упражнение: подумать, как написать формулы « $x+y=z$ » « $xy=z$ », где x, y, z — целые числа ≥ 0 .

После этого можно будет обычным образом написать формулы « x — целое число», « x — рациональное число», « x — вещественное число» (по Кантору или Дедекнду) и т. д. и затем построить формальную версию анализа. Записи приемлемой длины будут получаться лишь при периодических расширениях языка $L_1 \text{ Set}$ (см. § 8 гл. II). Например, в $L_1 \text{ Set}$ нет возможности написать термы — имена чисел 1, 2, 3, ... ($\emptyset$ есть имя 0), хотя можно построить формулы « x — конечный ординал из 1 элемента», « x — конечный ординал из 2 элементов» и т. д. При таких окольных способах выражаться простейшие числовые тождества будут иметь невероятную длину, но, конечно, для логики важна принципиальная возможность их написать.

« x — топологическое пространство». В формуле придется явно упомянуть топологию x . Зададим ее, скажем, множеством y всех открытых подмножеств x . Запишем для начала, что y состоит из подмножеств x и содержит x и пустое подмножество:

$$P_1: \forall z (z \in y \rightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x)) \wedge x \in y \wedge \emptyset \in y.$$

Пересечение $\cap$ любых двух элементов u, v из y открыто, т. е. принадлежит y :

$$P_2: \forall u \forall v \forall w ((u \in y \wedge v \in y \wedge \forall z ((z \in u \wedge z \in v) \rightarrow z \in w)) \rightarrow w \in y).$$

Труднее написать «объединение любого множества открытых подмножеств открыто». Напишем сначала:

$$P_3: \forall u (u \in z \leftrightarrow \forall v (v \in u \rightarrow v \in y)),$$

т. е. « z есть множество всех подмножеств y ».

Далее,

$$P_4: \forall u \forall w ((u \in z \wedge \forall v_1 (v_1 \in w \leftrightarrow \exists v (v \in u \wedge v_1 \in v))) \rightarrow w \in y).$$

Это значит (с учетом P_3 , определившей $\bar{z}$): «если u — любое подмножество y , т. е. множество открытых подмножеств x , то объединение w всех этих подмножеств принадлежит y , т. е. открыто».

Окончательная формула может выглядеть так:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \forall z (P_3 \rightarrow P_4).$$

Следующие наблюдения над ней будут отражены в точных определениях в § 1 и 2 гл. II.

Буквы x, y во всех P_i используются в одном и том же значении, тогда как z играет разные роли: в P_1 это подмножество x , а в P_3 и P_4 — множество подмножеств x . Мы можем позволить себе это потому, что как только мы «связали» z квантором $\forall$, скажем, в P_1 , z перестала обозначать индивидуальное, хотя и неопределенное множество, а стала временным обозначением «любого множества». Коль скоро «область действия» квантора $\forall$ кончилась, z можно использовать в новом значении. Чтобы «освободить» z для дальнейшего употребления, $\forall z$ поставлен и перед $P_3 \rightarrow P_4$.

Переводы арго — $L_1 \text{ Ag}$

3.12. « $x < y$ »: $\exists z (y = (x + z) + \bar{1})$. Учтесть, что переменные суть имена (неопределенных) неотрицательных целых чисел.

3.13. « x — делитель y »: $\exists z (y = x \cdot z)$.

3.14. « x — простое число»: « $\bar{1} < x \wedge (\forall y (\text{делитель } x \rightarrow (y = \bar{1} \vee y = x)))$ ».

3.15. «Большая теорема Ферма»:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall u (\bar{2} < u \wedge x_1^u + x_2^u = x_3^u \rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \bar{0}^u).$$

Неясно, как написать в $L_1 \text{ Ag}$ формулу $x_1^u + x_2^u = x_3^u$. Конечно, для каждого конкретного $u=1, 2, 3, \dots$ в $L_1 \text{ Ag}$ есть соответствующая атомарная формула, но как сделать u переменной? Это не тривиальная задача. Только недавно было показано, что можно найти такую атомарную формулу $p(x, u, y, z_1, \dots, z_n)$, что утверждение $\exists z_1 \dots \exists z_n p(x, \dots, z_n)$ в области натуральных чисел равносильно $y = x^u$. После этого $x_1^u + x_2^u = x_3^u$ можно будет перевести хоть так:

$$x_1^u = y_1 \wedge x_2^u = y_2 \wedge x_3^u = y_3 \wedge y_1 + y_2 = y_3.$$

Существование такой p — нетривиальный теоретико-числовой факт, так что здесь сама возможность перевода становится математической задачей.

3.16. «Гипотеза Римана». Для понимания этого примера необходимо некоторое знакомство с аналитической теорией чисел.

Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определена в полуплоскости $\text{Re } s > 1$ рядом

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Она мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость значе-

ний s . Гипотеза Римана состоит в утверждении, что нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\text{Re } s = 1/2$. В таком виде, конечно, гипотеза Римана не переводится на язык $L_1\text{Ag}$. Однако известен ряд чисто арифметических утверждений, доказуемо эквивалентных гипотезе Римана. Простейшее из них, возможно, формулируется так.

Пусть $\mu(n)$ — функция Мебиуса на целых числах ≥ 1 : она равна 0, если n делится на квадрат, и $(-1)^r$, где r — число простых делителей n , в противном случае.

Тогда имеем

$$\text{Гипотеза Римана} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \forall y \left(y > x \rightarrow \left| \sum_{n=1}^y \mu(n) \right| < y^{1/2+\varepsilon} \right).$$

Справа не цел лишь показатель степени, но в можно заставить пробегать лишь числа вида $1/z$, $z \geq 1$, z — целое, и затем возвести требуемое неравенство в степень 2z. Формулу

$$\left(\sum_{n=1}^y \mu(n) \right)^{2z} < y^{z+2}$$

уже можно перевести на язык $L_1\text{Ag}$, хотя и не совсем тривиально.

Два последних примера мы привели для того, чтобы показать, насколько сложными могут быть задачи, формулируемые на языке $L_1\text{Ag}$, несмотря на кажущуюся простоту его выразительных средств и семантики.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о языках высших порядков.

3.17. Языки высших порядков. Пусть L' — любой язык первого порядка. Его выразительные средства принципиально ограничены в одном важном отношении: нет возможности говорить о произвольных свойствах объектов теории, т. е. о произвольных подмножествах множества всех объектов. Синтаксически это отражается в запрете формулировать выражения, скажем, вида $\forall p(p(x))$, где p — отношение ранга 1. Отношения обозначают фиксированные, а не переменные свойства.

Правда, некоторые свойства выразимы с помощью неатомарных формул. Скажем, в $L_1\text{Ag}$ вместо « x четно» можно написать $\exists y(x = (\overline{1} + \overline{1}) \cdot y)$. Однако имеется континуум подмножеств целых чисел, но всего счетное множество выразимых свойств (§ 2 гл. II).

так что заведомо не все свойства выразимы формулами. Стало быть, запрещенное выражение $\forall p(p(x))$ полностью нельзя заменить никакой последовательностью выражений $P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots$

Языки, в которых допускаются кванторы по свойствам и (или) по функциям (а также, возможно, по свойствам свойств и т. д.), называемые языками высших порядков. Один такой язык $L_2\text{Real}$ мы рассмотрим в гл. III для иллюстрации метода форсинга Коэна в упрощенном варианте.

Тем не менее такого же расширения выразительных возможностей можно достичь, оставаясь в классе языков $\mathcal{L}_1$. Действительно, в языке $L_1\text{Set}$ можно говорить о любых подмножествах любых множеств, т. е. о свойствах, и свойствах свойств и свойствах систем свойств ... (с трансфинитным продолжением), не выходя за пределы формализма первого порядка. Кроме того, любой конкретный ориентированный язык высшего порядка, предназначенный для описания структурированных множеств, можно перевести на язык $L_1\text{Set}$, сохранив смысл и истинность в стандартной интерпретации. (Видимым исключением были бы языки для описания классов Геделя—Бернайса и «больших» категорий, но они, кажется, осуждены оставаться языками первого порядка при нынешнем уровне понимания парадоксов.)

Внимательный читатель отметит следующее. В $L_1\text{Set}$ можно написать формулу, в которую входил бы квантор $\forall$ по всем подмножествам целых чисел (конечных ординалов). Но в $L_1\text{Set}$ нельзя написать формулы, которые бы явно описывали многие конкретные подмножества, потому что их имеется континуум, а формул всего счетное количество. В гл. II мы коснемся этих проблем ближе, обсуждая парадокс Сколема.

Итак, в языки первого порядка (и в особенности в язык $L_1\text{Set}$) заложены почти все фундаментальные логико-множественные принципы, используемые в повседневной работе математика. Поэтому они будут основным объектом изучения в этой книге. Конкретные ориентированные языки могут, однако, быть оформлены иначе, с большими или меньшими отступлениями от правил $\mathcal{L}_1$. Кроме $L_2\text{Real}$ мы рассмотрим в качестве примеров таких языков в гл. II SELF (язык Шмюльена для самоописания) и SAg — язык арифметики, для которого удобно доказывать теорему Тарского о невыразимости истинности.

Отступление о синтаксисе

1. Важнейшая общая черта большинства искусственных языков — возможность задать богатый спектр средств выражения конечным и небольшим числом порождающих принципов.

В каждом конкретном случае выбор этих принципов (включая алфавит и синтаксис) есть результат компромисса между двумя крайностями.

Экономия выразительных средств ведет к унификации записи и упрощению механического анализа текста. Однако она удаляет текст от текстов на естественных языках и очень удлиняет их.

Обогащение выразительных средств приближает искусственные тексты к естественным, но усложняет синтаксис и формальный анализ. (Ср. машинные языки с языками программирования типа Алгола, Фортрана, Кобола и т. п.)

Приведем несколько примеров на нашем материале.

2. Дialeкты $\mathcal{L}_1$. а) Не меняя логики, заложенной в $\mathcal{L}_1$, мы могли бы обойтись в алфавите без скобок и любого из двух кванторов, а все связи заменить одной $\downarrow$ (конъюнкция отрицаний) (кроме того, константы можно было бы объявить функциями ранга 0, а функций свести к отношениям).

Это достигается следующим изменением определений. Если $t_1, \dots, \dots, t_r$ — термы, f — операция ранга r , r — отношение ранга r , то $ft_1 \dots t_r$ — терм, $pt_1 \dots t_r$ — атомарная формула. Если P, Q — формулы, то $\downarrow PQ$, $\forall xP$ — формулы. Содержательно $\downarrow PQ$ означает "не P и не Q ", так что на этом диалекте имеем следующие выражения:

$$\neg(P) : \downarrow PP, (P) \wedge (Q) : \downarrow \downarrow PP \downarrow QQ, (P) \vee (Q) : \downarrow \downarrow PQ \downarrow PQ.$$

Видно, как экономия на скобках и связках ведет к многократному повторению одной и той же формулы. Тем не менее доказательство теорем о таком языке могут упроститься за счет сокращения списка его синтаксических норм.

б) Язык теории множеств по Н. Бурбаки [5] содержит в алфавите знак $\square$, τ , $\vee$, $\neg$, $\in$ и буквы. Выражения в этом языке, однако, суть не просто последовательности знаков алфавита, но последовательности, в которых некоторые элементы объединены в пары (надстрочными соединителями). Пример:

$$\overline{\tau \wedge \neg \square A \in \square A''}$$

Главное отличие языка Бурбаки от L, Set состоит в наличии "символа выбора Гильберта". Если, скажем, $\in xy$ есть формула " x — элемент y ", то $\tau \in \square y$ есть терм, который означает "некоторый элемент множества y ".

Язык Бурбаки не слишком удобен и не получил распространения. Он стал известен в популярной литературе благодаря при-

меру сокращенной записи термина «единица», неосторожно приведенной авторами:

$$\begin{aligned} \tau_2 ((\exists u)(\exists U)(u = (U, \{\emptyset\}), Z) \wedge U \subset \{\emptyset\} \times Z \wedge (\forall x)(x \in \{\emptyset\}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in U) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall y') \\ (((x, y) \in U \wedge (x, y') \in U) \Rightarrow (y = y')) \wedge (\forall y)(y \in Z) \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in U))). \end{aligned}$$

Полная запись этого термина содержала бы несколько десятков тысяч знаков; для «единицы» этого, пожалуй, многовато.

в) Очень значительным расширением выразительных возможностей почти любого языка класса $\mathcal{L}_1$ было бы разрешение формировать «классовые термы» типа $\{x | P(x)\}$, которые обозначали бы «класс всех объектов x , обладающих свойством P ». Эта идея была использована Морзом в языке теории множеств и Шмюльманом в языке арифметики (см. § 10 гл. II).

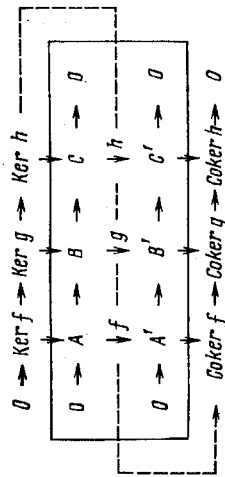
3. Общие замечания. Для большинства естественных и искусственных языков характерны дискретность и линейность (одномерность).

Восприятие внешнего мира человеком не ощущается нами ни как дискретное, ни как линейное, хотя эти характеристики прослеживаются на уровне физиологических механизмов (кодирование импульсами-спайками в нейронных сетях). Однако языки общения тяготеют к последовательному разворачиванию информации в серию различных элементарных знаков. Вероятно, главной причиной этого является значительно большая (теоретически неограниченная) степень однозначности и воспроизводимости информации, чем это достижимо при других способах ее передачи (ср. часто обсуждавшиеся преимущества цифровых ЭВМ перед аналоговыми.)

Но человеческий мозг явно пользуется обоими принципами. Целостное восприятие образов, а также эмоции связаны, скорее, с нелинейными и недискретными процессами, возможно, волновой природы. Интересно с этой точки зрения проанализировать нелинейные фрагменты различных языков.

В математике к ним относятся, в первую очередь, употребление чертвей. Оно, однако, почти не поддается формальному описанию, за исключением отцепившейся и формализовавшейся теории графов. Граф — исключительно популярный объект, минимально удаленный как от своего целостного пространственного образа, так и от описания по всем правилам теории множеств. Всякий раз, когда с задачей удается связать граф, обсуждение резко упрощается и большие фрагменты словесного описания заменяются манипуляцией с картинками. Менее известный класс примеров — коммутативные диаграммы и спектральные последовательности гомологической алгебры. Типичный образец — «лемма о змее». Вот ее точная формулировка.

Пусть дана (заключенная в рамку) коммутативная диаграмма абелевых групп и их гомоморфизмов, у которой строки являются точными последовательностями:



Тогда ядра и коядра «вертикальных» гомоморфизмов f, g, h встраиваются в шестиленную точную последовательность, как показано на чертеже, причем вся диаграмма из сплошных стрелок коммутативна. Морфизм — «змея» $\text{Ker } h \rightarrow \text{Coker } f$, обозначенный пунктирной стрелкой, и есть основной объект, который строится в лемме.

Конечно, диаграмму «со змеей» легко описать последовательно на подходящем более или менее формальном линейном языке. Однако такая процедура требует искусственного и неоднозначного разрыва связей двумерной картины (как при сканировании телевизионного изображения). Более того, отсутствие целостного обзора мешает узнаванию аналогичной ситуации в других обстоятельствах и оформлению ее в единый блок.

Детство гомологической алгебры сопровождалось увлеченным распознаванием полезных классов классов диаграмм. Интерес к ним поначалу был даже преувеличенным: ср. добавление редактора к русскому переводу книги А. Картана и С. Эйленберга «Гомологическая алгебра» [22, с. 466—473].

Имеется, вероятно, уникальный пример целой книги с сознательно введенной двумерной (блочной) структурой: Ч. Линдси, С. ван дер Мюйлен «Неформальное введение в Алгол-68» [23]. Она состоит из 8 глав, каждая из которых разбита на 7 параграфов (в числе которых для соблюдения системы восемь пустых!). Пусть (i, j) — i -я j -го параграфа i -й главы, тогда книгу можно изучать «по строкам» матрицы (i, j) или по ее «столбцам», в зависимости от намерений читателя.

Как и все великие предприятия, это плод попытки решить, по всей видимости, неразрешимую задачу, ибо, по замечанию авторов, Алгол-68 нельзя описать для того, как он уже описан.

Глава II

ИСТИННОСТЬ И ВЫВОДИМОСТЬ

1. ЛЕММА ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ЧТЕНИИ

Основное содержание этого параграфа — лемма 1.4 и определения 1.5 и 1.6. Лемма гарантирует однозначность расшифровки термов и формул любого языка класса $\mathcal{L}_1$ и служит основой большинства индуктивных рассуждений. Читатель может приять ее на веру, если он сумел самостоятельно проанализировать последнюю формулу в п. 3.7 гл. I. Важно помнить, что конструкция любого формального языка начинается с заботы о недвусмысленности синтаксических правил.

Начнем со стандартных комбинаторных определений, чтобы фиксировать терминологию.

1.1. Пусть A — некоторое множество. Последовательностью длины n из элементов A называется отображение множества $\{1, \dots, n\}$ в A . Образ i при этом отображении называется i -м членом последовательности. Значению $n=0$ отвечает пустая последовательность. Последовательности длины 1 иногда будут отождествляться с элементами A .

Последовательность длины n записывается также в виде $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$, где a_i — ее i -й член. Число i называется номером члена a_i . Если $P = (a_1, \dots, a_n)$, $Q = (b_1, \dots, b_m)$ — две последовательности, их соединением PQ называется последовательность $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ длины $m+n$, i -й член которой есть a_i при $i \leq n$, b_{i-n} при $n+1 \leq i \leq n+m$. Аналогично определяется соединение конечной последовательности последовательностей.

Вхождением последовательности Q в P называется любое представление P в виде соединения P_1QP_2 . Подставить последовательность R вместо данного вхождения Q в P — значит построить последовательность P_1RP_2 .

Пусть P^+, P^- — два непересекающихся подмножества в $\{1, \dots, n\}$. Отображение $c: P^+ \rightarrow P^-$ называется скобочной биекцией, если оно биективно и удовлетворяет условиям:

- $c(i) > i$ для всех $i \in P^+$;
- для каждого i условие $j \in [i, c(i)]$ равносильно $c(j) \in [i, c(i)]$.

1.2. Лемма.

Для данных P^+, P^- , если скобочная биекция существует, то она единственна.

Эта лемма будет применяться к выражениям в языках класса $\mathcal{L}_1$: P^+ — номера мест в данном выражении, на которых стоит открывающаяся скобка, P^- — номера мест, на которых стоит закрыва-