наибольший пучок идеалов, определяющий замкнутое множество $\bigcup_{h=1}^{r} x_h$. Тогда эпиморфизм пучков

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{J}\mathcal{L} \to 0$$

индуцирует эпиморфизм групп сечений. Но, как нетрудно видеть, пучок $\mathcal{L}/\mathcal{J}\mathcal{L}$ сосредоточен на $\bigcup_{h=1}^{r} x_h$, и $\Gamma(X, \mathcal{L}/\mathcal{J}\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{h=1}^{r} k(x_h)$. Рассмотрим сечение, равное единице во всех точках x_h, и поднимем его до сечения пучка $\mathcal{L}$. Оно удовлетворяет нужным условиям.

Перейдем теперь к общему случаю.

В силу [1], гл. II, 4.5.4 можно найти такое d_0, что есть сечение $f \in \Gamma(X, O(d_0))$ со свойствами $\bigcup x_i \subset D_+(f)$ и $D_+(f)$ — аффинное множество.

Пользуясь уже установленным частным случаем, найдем сечение $s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L})$, не обращающееся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_k$. По лемме Серра есть такое число d_1, что сечение $t = f^{\otimes d_1} \otimes s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L}(d_0 d_1))$ продолжается на все X. Положим $d = d_0 d_1$.

Имеем $f^{\otimes d_1} \in \Gamma(X, O_X(d)) \Rightarrow t \otimes f^{kd_1} \in \Gamma(X, O_X((k+1)d))$ для всех $k \geqslant 0$. Это и есть сечение, которое нам нужно.

б) Будем доказывать теперь, что $l_1 - l_2 \in F^1_{\mathrm{top}} K(X)$. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмножество: $Y_i\,(i = 1, \ldots, r)$ — его неприводимые компоненты, $x_i \in Y_i$ — замкнутые точки. Тогда для достаточно большого n имеются сечения

$$O_X \to \mathcal{L}_1(n), \quad O_X \to \mathcal{L}_2(n),$$

(где $l_i = cl(\mathcal{L}_i)$), не обращающиеся в нуль в $x_1, \ldots, x_r$.

Складывая получающиеся комплексы

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0 \text{ и } 0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \to 0,$$

находим комплекс

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \oplus O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0,$$

класс которого (в смысле определения 9.2) в кольце $K(X)$ равен $l_1 - l_2$. С другой стороны, этот комплекс ацикличен в точках x_i, поэтому носитель его гомологий не содержит ни одной из неприводимых компонент множества Y и, значит, его пересечение с Y имеет в Y коразмерность $\geqslant 1$. Это завершает доказательство леммы и теоремы 9.1.

10. Связь между $K(X)$ и Pic X

10.1. Группа Pic X изучена значительно лучше, чем $K(X)$. Между этими двумя объектами существуют тесные связи, которые мы используем в этой лекции для получения дополнительной информации о каждом из них. Pic X и $K(X)$ связаны двумя фундаментальными отображениями. Первое из них i: Pic $X \to K(X)$ ставит в соответствие классу обратимого пучка $\mathcal{L}$ в Pic X его же класс в $K(X)$. Оно является гомоморфизмом Pic X в мультипликативную группу обратимых элементов $K(X)$.

Второе отображение det: $K(X) \to \mathrm{Pic}\,X$ является гомоморфизмом *аддитивной* группы $K(X)$ в мультипликативную группу Pic X и строится менее тривиально. Рассмотрим свободную группу $\mathbb{Z}[\mathcal{L}]$, порожденную классами локально свободных пучков на X (см. 1.2) и определим ее гомоморфизм в Pic X, задав его на образующих так: класс пучка $\mathcal{E}$ переходит в класс $\Lambda^r\mathcal{E}$, где $r = rk\mathcal{E}$. Для любой точной последовательности $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ в силу предложения 3.9 имеем $\Lambda^{rk\mathcal{E}}\mathcal{E} \simeq \Lambda^{rk\mathcal{E}_1}\mathcal{E}_1 \otimes \Lambda^{rk\mathcal{E}_2}\mathcal{E}_2$. Отсюда следует, что элементы $\mathcal{E} - \mathcal{E} - \mathcal{E}_2$ лежат в ядре этого гомоморфизма, так что он индуцирует гомоморфизм $K(X) \to \mathrm{Pic}\,X$, который мы и обозначим det.

10.2. Предложение. 1) *Рассмотрим $K(X)$ и Pic X как контравариантные функторы от X; тогда i и det определяют морфизмы этих функторов.*

2) *Отображение i: $\mathrm{Pic}\,X \to K(X)$ является мономорфизмом, а det: $K(X) \to \mathrm{Pic}\,X$ — эпиморфизмом.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из определения операции обратного образа пучка. i мономорфно, потому что $(\det \cdot i)(l) = l$ для всех $l \in \mathrm{Pic}\,X$, по этой же причине det — эпиморфизм.

10.3. Упражнение. Доказать, что для любых локально свободных пучков $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ рангов r_1, r_2 соответственно имеет место изоморфизм

$$\Lambda^{r_1 r_2}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \simeq (\Lambda^{r_1}\mathcal{E}_1)^{r_2} \otimes (\Lambda^{r_2}\mathcal{E}_2)^{r_1}.$$

Пользуясь билинейностью, вывести отсюда формулу, показывающую поведение det относительно умножения в кольце $K(X)$:

$$\det(xy) = (\det(x))^{\varepsilon(y)}\,(\det(y))^{\varepsilon(x)}.$$

10.4. Теорема. *В условиях п. 4.5 отображение*

$$\varphi\colon \mathrm{Pic}\,X \times \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})), \quad \varphi(x, n) = x \cdot l^n, \quad x \in \mathrm{Pic}\,X, \quad l = cl(P_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)),$$

является изоморфизмом группы $\mathrm{Pic}\,X \times \mathbb{Z}$ с $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Доказательство. Сначала покажем, что φ — мономорфизм. Действительно, если $xl^n = 1$ в $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(\mathcal{E})$, то в силу предложения 10.2 то же равенство имеет место в $K(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ (мы отождествляем Pic с подмножеством K с помощью i). Умножая обе части этого равенства на l^i и пользуясь леммой 5.3, получаем, что для всех $i \geqslant i_0$ имеет место соотношение в $K(X)$:

$$x\sigma^{n+i}(e) = \sigma^i(e),$$

где $e = cl(\mathcal{E})$. Но при $n \neq 0$ это невозможно, ибо ранги пучков $S^{n+i}(\mathcal{E})$ и $S^i(\mathcal{E})$ не могут совпадать для всех $i \geqslant i_0$, а если $n = 0$, то $x = 1$, откуда и следует мономорфность φ.

Эпиморфность φ следует из того, что класс всякого обратимого пучка в $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(\mathcal{E})$ имеет вид $\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right)$ (где $rk\mathcal{E} = r + 1$). Действительно,

$$\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right) = \prod_{i=0}^{r} \det(a_i l^i) = \left(\prod_{i=0}^{r} \det a_i\right) l_i^{\sum_i i\varepsilon(a_i)}$$

(мы воспользовались результатом упражнения 10.3).

Так как классы двух обратимых пучков в $\operatorname{Pic} Y$ (и, следовательно, в $K(Y)$) совпадают, если и только если эти пучки изоморфны, получаем

10.5. Следствие. *Всякий обратимый пучок на* $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ *изоморфен пучку вида* $f^*(\mathscr{L})(n)$, *где* $\mathscr{L}$ — *некоторый обратимый пучок на базе* X.

10.6. Предложение. *Ядро гомоморфизма* $\det\colon K(X) \to \operatorname{Pic} X$ *совпадает с* $\mathbf{Z} + F^2K(X)$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathbf{Z} + F^2K(X) \in \operatorname{Ker} \det$. Относительно первого слагаемого это очевидно.

Из результата 10.3 ясно, что достаточно проверить равенства $\det(\gamma^r(x)) = 1$ при $r \geqslant 2$. Так как по теореме 10.4 естественное отображение $f^*\colon \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} \mathbf{P}(\mathscr{E})$ мономорфно, можно воспользоваться принципом расщепления и считать, что x является линейной комбинацией классов одномерных пучков. Но тогда $\gamma^r x$ является суммой одночленов вида $\pm \prod_{i=1}^{k} (l_i - 1)$, $k \geqslant r$, l_i обратимы, а каждый такой одночлен можно представить в виде произведения двух элементов из $F^1K(X)$. Поэтому из 10.3 следует требуемое.

Наоборот, пусть $\det x = 1$, $\varepsilon(x) = 0$. Тогда $x = e_1 - e_2$, где e_i — классы локально свободных пучков одинакового ранга r. Из доказательства леммы 8.9 видно, что

$$\det e_i = \lambda^r e_i = \gamma_1(e_i - r) \equiv e_i - r + 1 \bmod F^2K(X).$$

Так как $\det x = \det e_1/\det e_2 = 1$, отсюда следует, что

$$x = e_1 - e_2 \equiv \det e_1 - \det e_2 \equiv 0 \bmod F^2K(X),$$

что доказывает предложение.

10.7. Мы можем переформулировать этот результат несколько более удобным образом.

Пусть $\mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]$ — групповое кольцо группы Пикара схемы X. Гомоморфизм i определяет по универсальности гомоморфизм колец

$$\mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X] \to K(X).$$

Вообще говоря, он не является ни вложением, ни эпиморфизмом. Однако, обозначая через $I \subset \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]$ идеал — ядро пополняющего отображения $\sum a_i l^i \to \sum a_i$, — и пользуясь формулами 8.2в), находим, что этот гомоморфизм переводит I^n в $F^nK(X)$, индуцируя тем самым отображения

$$\mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^n \to K(X)/F^nK(X)$$

и

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} I^k/I^{k+1} \to GK(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F^kK(X)/F^{k+1}K(X).$$

Из предложения 10.6 легко следует

10.8. Теорема. *Отображение*

$$i\colon \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^2 \to K(X)/F^2K(X)$$

является изоморфизмом колец.

Следствие $K(X)/F^2(X) \simeq \mathbf{Z} \oplus \operatorname{Pic} X$ (*прямая сумма аддитивных групп, в которой* $\operatorname{Pic} X$ — *идеал с нулевым умножением*). *В частности,*

$$G^1K(X) \simeq \operatorname{Pic} X.$$

Доказательство. Мы построим гомоморфизм колец, обратный к i_1. Для всякого элемента $x \in K(X)$ положим

$$j(x) = \varepsilon(x) - 1 + \det x \in \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X].$$

Имеем

$$j(x+y) - j(x) - j(y) = (1 - \det x)(1 - \det y) \in I^2.$$

Поэтому j определяет гомоморфизм аддитивных групп

$$K(X) \to \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^2.$$

Из 10.6 очевидно, что $F^2K(X)$ находится в ядре этого гомоморфизма, так что он определяет отображение, которое мы обозначим той же буквой j:

$$j\colon K(X)/F^2K(X) \to \mathbf{Z}[\operatorname{Pic} X]/I^2.$$

Равенство $j \circ i_1 = id$ очевидно из определений, а $i_1 \circ j = id$ следует из доказательства предложения 10.6:

$$i \circ j(e) = \varepsilon(e) - 1 + \lambda^{\varepsilon(e)} e \equiv e \bmod F^2K(X).$$

10.9. Замечания. а) Предыдущий результат показывает, в частности, что если $\dim X = 1$, то

$$K(X) = \mathbf{Z} \oplus \operatorname{Pic} X.$$

Пусть X — гладкая проективная кривая над алгебраическим замкнутым полем k; $\operatorname{Pic} X$, как известно, естественно изоморфна группе k-точек некоторой групповой схемы над k, размерность которой равна $1 - \chi(O_X) = g$. Тем самым при $g \geqslant 1$ $K(X)$ является «недискретным» кольцом. Только при $g = 0$, когда $X \simeq \mathbf{P}^1$, имеем $G^1K(X) \simeq \mathbf{Z}$.

К сожалению, характер групп $G^iK(X)$ при $i \geqslant 2$ в общем случае совершенно неизвестен. В частности, неизвестно, для каких поверхностей X, даже над полем комплексных чисел, $G^2K(X) \simeq \mathbf{Z}$. Старая гипотеза Севери (сформулированная, впрочем, для несколько другого объекта) утверждает, что это должно быть верно лишь для поверхностей, бирационально эквивалентных проективной плоскости.

б) Хотя структура $G^dK(X)$ для d-мерной проективной схемы над полем и неизвестна, эйлерова характеристика определяет гомоморфизм

$$\chi\colon G^dK(X) \to \mathbf{Z}.$$

Им можно воспользоваться для конструкции скалярных произведений

$$G^iK(X) \times G^{d-i}K(X) \to \mathbf{Z}$$

$$(x_1, x_2) \to \chi(x_1 x_2).$$

Легко видеть, что если x_1, x_2 — классы структурных пучков двух подсхем $X_1, X_2 \subset X$, находящихся в «общем положении» и таких, что их пересечения нульмерно, $\chi(x_1, x_2)$ дает «индекс пересечения» X_1 и X_2 (ср. 3.6).

В кольце $GK(X)$, в частности, можно определить подгруппу элементов, численно эквивалентных нулю (ядро формы $\chi(x_1, x_2)$). Они образуют идеал; соответствующее фактор-кольцо служит заменой «кольца классов циклов с точностью до численной эквивалентности».

в) Отметим, наконец, «*теорему Римана*» для гладких кривых X; полагая для класса обратимого пучка $l \in K(X)$

$$\deg l = \chi(l-1) = \chi(l) - \chi(X),$$

находим

$$\chi(l) = \deg l + \chi(X).$$

Равенство, конечно, является тавтологическим; наименее тривиальные моменты состоят в том, что, во-первых, $\deg(l_1, l_2) = \deg l_1 + \deg l_2$ и, во-вторых, что $\deg l$ можно интерпретировать как «степень дивизора» (ср. 8.12).

11. Классы Чженя и операции Адамса

11.1. Определение. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $rk\mathscr{E}$ на схеме X. Положим*

$$c_i(\mathscr{E}) = \gamma^i(cl(\mathscr{E}) - rk\,\mathscr{E}) \bmod F^{i+1}K(X) \in G^iK(X), \quad i \geqslant 1.$$

Элемент $c_i(\mathscr{E}) \in G^iK(X)$ называется i-м классом Чженя пучка $\mathscr{E}$ $(i \geqslant 1)$.

11.2. Мы перечислим сейчас ряд свойств классов c_i, показывающих, что обычный формальный механизм теории характеристических классов работает и в нашем случае.

(11.2.1). *Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X. Тогда*

$$c_i(\mathscr{L}) = \begin{cases} cl(\mathscr{L}) - 1 \bmod F^2K(X), & i = 1, \\ 0 & i > 1. \end{cases}$$

(11.2.2). *Для любого морфизма $Y \xrightarrow{f} X$ и локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X имеем*

$$c_i(f^*(\mathscr{E})) = Gf^*(c_i(\mathscr{E}))$$

(*где Gf^*: $GK(X) \to GK(Y)$ индуцирован гомоморфизмом колец f^*, который совместим с γ-фильтрацией*).

(11.2.3). *Положим*

$$c_t(\mathscr{E}) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\mathscr{E})\, t^i.$$

Тогда для любой точной последовательности $0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$ имеем

$$c_t(\mathscr{E}) = c_t(\mathscr{E}_1) \cdot c_t(\mathscr{E}_2).$$

(11.2.4). *Имеем*

$$GK(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = GK(X)[\bar{x}],$$

где элемент $\bar{x} = cl(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}) - 1 \bmod F^2K(\mathbf{P}(\mathscr{E})$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i c_i(\mathscr{E})\, \bar{x}^i = 0.$$

(Доказательство немедленно получается из теоремы 8.8 и леммы 8.9.)

(11.2.5). $c_i(\mathscr{E}) = 0$ *при* $i > rk\mathscr{E}$.

Для доказательства воспользоваться принципом расщепления и свойством (11.2.1).

(11.2.6). *Отображение $\mathscr{E} \to c_t(\mathscr{E})$ продолжается до гомоморфизма групп*

$$c_t\colon K(X) \to 1 + \bigoplus_{i=1}^{\infty} G^iK(X)\, t^i$$

(следует из (11.2.3)).

11.3. Определение. *Характером Чженя локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X называется элемент*

$$ch\mathscr{E} \in GK(X) \otimes \mathbf{Q},$$

который формально определяется выражением

$$ch(\mathscr{E}) = \sum e^{a_i(\mathscr{E})},$$

где $a_i(\mathscr{E})$ находятся из тождества

$$c_t(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{rk\mathscr{E}} (1 + a_i(\mathscr{E})\, t).$$

11.4. Предложение. *Существует гомоморфизм колец*

$$ch\colon K(X) \to GK(X) \otimes \mathbf{Q},$$

однозначно определяемый условием

$$ch(cl(\mathscr{E})) = ch(\mathscr{E})$$

для всех локально свободных пучков $\mathscr{E}$ конечного ранга на X.

Доказательство. Из свойства (11.2.3) следует, что для любой точной последовательности $0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$ имеем

$$ch(\mathscr{E}) = ch(\mathscr{E}_1) + ch(\mathscr{E}_2).$$

Из принципа расщепления и (11.2.1) следует, что в обозначениях 11.3

$$\prod_i (1 + a_i(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2)\, t) = \prod_{i,j} (1 + (a_i(\mathscr{E}_1) + a_j(\mathscr{E}_2))\, t),$$

откуда

$$ch(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2) = ch(\mathscr{E}_1) \cdot ch(\mathscr{E}_2).$$

Отсюда результат получается с помощью стандартных рассуждений.

11.5. Замечание. Те же рассуждения показывают несколько более точный результат: можно определить гомоморфизм

$$ch\colon K(X) \to GK(X) \otimes \mathbf{Z}_{d!},$$

где $d = \dim X$. Действительно, из теоремы о симметрических функциях легко следует, что $\sum a_i(\mathscr{E})^k \in F^kK(X)$, поэтому

$$ch(\mathscr{E}) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_i(\mathscr{E})^k}{k!}$$

(ибо $F^{d+1}K(X) = 0$). Нежелательность «лишних» знаменателей очевидна из-за того, что $GK(X)$ может иметь большое кручение хотя бы потому, что $G^1K(X) = \operatorname{Pic} X$.

11.6. Теорема. *Пусть $F^iK(X) = 0$ для достаточно больших i. Тогда характер Чженя индуцирует изоморфизм колец*

$$ch\colon K(X) \otimes \mathbf{Q} \to GK(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

11.7. Для доказательства этой теоремы нам понадобится определение операций Адамса, которые мы затем используем, чтобы построить отображение, обратное к ch.

Введем отображение

$$\psi_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^i t^i \colon K(X) \to K(X)[[t]]$$

формулой

$$\psi_t(x) = \varepsilon(x) - t\frac{d}{dt}\log\lambda_{-t}(x).$$

Следующие свойства операций ψ^i проверяются без труда:

(11.7.1) $\psi^i(x+y) = \psi^i(x) + \psi^i(y)$, $i \geqslant 0$.

(11.7.2) $\psi^i(l) = l^i$, где l — класс обратимого пучка.

(11.7.3) $\psi^i \cdot f^* = f^* \cdot \psi^i$ для любого морфизма $f\colon X \to Y$. (Из принципа расщепления легко следует, что эти три свойства однозначно определяют операции ψ^i.)

(11.7.4) $\psi^i(xy) = \psi^i(x)\cdot\psi^i(y)$.

(Применить (11.7.2), (11.7.3) и принцип расщепления.)

(11.7.5) $\psi^i \cdot \psi^k = \psi^{ik}$.

(Принцип расщепления и (11.7.2).)

Несколько менее тривиально поведение ψ относительно γ-фильтрации.

11.8. П р е д л о ж е н и е. *Пусть $x \in F^nK(X)$, тогда*

$$\psi^i(x) - i^n x \in F^{n+1}K(X).$$

Иначе говоря, операции ψ^i переносятся на $GK(X)$: ψ^i на $G^nK(X)$ действует как умножение на i^n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=0$ результат очевиден из определений. Далее легко видеть, что достаточно проверить утверждение для элементов вида $x = \gamma^n y$, где y пробегает некоторый базис аддитивной группы X. Рассматривая в качестве y классы локально свободных пучков и применяя принцип расщепления и теорему 8.8, сводим все к случаю $x = \prod_{k=1}^{n}(l_k - 1)$, где l_i — классы обратимых пучков. В этом случае

$$\psi^i(x) = \prod_{k=1}^{n}(l_k - 1) = \prod_{i=1}^{n}(l_k - 1)\prod_{k=1}^{n}(l_k^{i-1} + \ldots + 1).$$

Но, очевидно,

$$l_k^{i-1} + \ldots + 1 \equiv i \bmod F^1K(X).$$

Отсюда следует, что

$$\psi^i(x) \equiv i^n x \bmod F^{n+1}K(X).$$

11.9. С л е д с т в и е. *Обозначим через V_m подпространство $K(X)\otimes\mathbf{Q}$, соответствующее собственному значению i^m оператора ψ^i $(i \geqslant 2)$. Тогда, если $F^{d+1}K(X) = 0$, имеем*

$$K(X)\otimes\mathbf{Q} = \bigoplus_{m=0}^{d} V_m$$

и V_m не зависит от i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 11.8 следует, что

$$\prod_{n=0}^{d}(\psi^i - i^n) = 0,$$

как оператор на $K(X)$, поэтому тождественный оператор на $K(X)\otimes\mathbf{Q}$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных проекторов

$$1 = \sum_{n=0}^{d}\prod_{m\neq n}(\psi^i - i^m)/(i^n - i^m).$$

Образ m-го проектора и есть V_m.

Чтобы проверить независимость от i, обозначим временно V_m через $V_{m,i}$. Из предложения 11.8 следует, что

$$\prod_{n\neq m}(\psi^i - i^n)(\psi^m - k^m) = 0$$

для любого натурального k; поэтому $V_{m,i} \subset V_{m,k}$, откуда по симметрии $V_{m,i} = V_{m,k} = V_m$.

11.10. Теперь мы следующим образом определим гомоморфизм колец, совместимый с пополнением:

$$g\colon GK(X)\otimes\mathbf{Q} \to K(X)\otimes\mathbf{Q}$$

для всякого ненулевого элемента $x \in G^mK(X)\otimes\mathbf{Q}$, $m \geqslant 1$ обозначим через $g(x) \in K(X)\otimes\mathbf{Q}$ такой элемент $g(x) \in F^mK(X)\otimes\mathbf{Q}$, что

$$x = g(x) \bmod F^{m+1}K(X)\otimes\mathbf{Q},$$
$$\psi^p(g(x)) = p^m g(x), \quad p \geqslant 2.$$

(То, что это — гомоморфизм колец, следует из однозначности $g(x)$.)

11.11. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 11.6. Мы проверим сейчас, что ch и g являются взаимно обратными гомоморфизмами. Все наши конструкции совместны с гомоморфизмами f^*, поэтому можно применить принцип расщепления, т. е. ограничиться рассмотрением элементов x, лежащих в подкольце $K(X)$ (соответственно $GK(X)$), порожденном классами обратимых пучков.

Пусть $x = l - 1 \bmod F^2K(X) \in G^1K(X)$, где l — класс обратимого пучка. Я утверждаю, что

$$g(x) = \ln(1 + (l-1)) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(l-1)^n}{n}.$$

Действительно, очевидно, что $x = g(x) \bmod F^2K(X)$; кроме того,

$$\psi^i \ln(1 + (l-1)) = \ln[1 + (l^i - 1)] = i\ln[1 + (l-1)].$$

С другой стороны, по определению (см. 11.3 и (11.2.1))

$$ch(l-1) = e^x - 1 \in GK(X)\otimes\mathbf{Q}.$$

Это показывает, что

$$g\circ ch(l-1) = l-1, \quad ch\circ g(x) = x,$$

и ввиду сделанного выше замечания доказывает теорему 11.6.

12. Структура моноидальных преобразований

12.1. Напомним (см. 7.4, а также [2], 12.4), что для любой схемы X и когерентного пучка идеалов $\mathcal{J} \subset O_X$ можно построить схему $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}^n)$ и канонический морфизм $f\colon X' \to X$. Морфизм f называется *моноидальным преобразованием* X *с центром в пучке* $\mathcal{J}$ (или в замкнутой подсхеме $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ такой, что $i_*(O_Y) = O_X/\mathcal{J}$). В этом разделе мы начнем изучать структуру морфизма f и поведение $K(X)$ и $K(X')$ по отношению к этому морфизму в предположении, что подсхема Y *регулярно вложена* (определение 3.2). Технические результаты, которые мы получим, будут занимать центральное место в изучении гомоморфизма «прямого образа» и в доказательстве теоремы Римана—Роха. Кроме того, они представляют самостоятельный интерес с точки зрения бирациональной геометрии, в которой моноидальное преобразование играет исключительную по важности роль.

12.2. Предложение. *Пусть $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ — регулярное вложение замкнутой подсхемы, $N = i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ — конормальный пучок на Y (где $\mathcal{J}$ — пучок идеалов, соответствующий Y). Пусть $f\colon X' \to X$ — моноидальное преобразование с центром Y; $Y' = Y \times_X X'$ — прообраз Y на X' (в категории схем); $j\colon Y' \hookrightarrow X'$ — каноническое вложение, $g\colon Y' \to Y$ — ограничение морфизма f на Y'. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *ограничение f на $(X' \setminus Y') \to (X \setminus Y)$ является изоморфизмом схем;*

(б) *морфизм $g\colon Y' \to Y$ изоморфен каноническому морфизму $\mathbb{P}(N) \to Y$;*

(в) *$j\colon Y' \to X'$ — регулярное вложение коразмерности единица, и конормальный пучок к $Y' = \mathbb{P}(N)$ в X' изоморфен $O_{\mathbb{P}(N)}(1)$.*

Кроме того, если X и Y регулярны и на X есть обильный пучок, то и X' регулярна и обладает обильным пучком (доказательство мы опускаем).

Неформально говоря, этот результат означает, что X' получается из X «раздуванием» (blowing up) замкнутой подсхемы Y до *дивизора*. Геометрически его можно представлять себе следующим образом. Вне Y ничего не меняется, а каждая точка $y \in Y$ заменяется целым проективным пространством, точкам которого соответствуют «направления подхода к y по нормали к Y» (направление понимается в проективном смысле). В частности, если Y — замкнутая точка, то Y' — проективное пространство, размерность которого на единицу меньше, чем у X.

Дивизоры, которые получаются с помощью моноидальных преобразований из схем коразмерности >1, называются *исключительными*. Мы продолжим обсуждение их свойств ниже в п. 13.5.

Доказательство. Все утверждения можно проверять локально по X, покрыв X такими малыми открытыми аффинными множествами, в которых $\mathcal{J}$ порожден регулярной системой параметров. Поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{J} = \tilde{I}$, где $I = (f_1, \ldots, f_r) \in A$; (f_i) — регулярная система.

Так как $\mathcal{J}|_{X \setminus Y} = O_X|_{X \setminus Y}$, утверждение (а) становится очевидным, ибо $\operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} At^n) = \operatorname{Spec} A$ (в окрестности точек, не содержащихся в Y).

Далее, $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n)$, $Y' = X' \otimes_A A/I = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1})$. В самом деле, умножая тензорно точную последовательность $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ на I^n над A, находим $I \otimes_A I^n \to I^n \to A/I \otimes_A I^n \to 0$, откуда $A/I \otimes_A I^n \simeq I^n/I^{n+1}$.

Определим эпиморфизм колец

$$\psi\colon S_{A/I}(I/I^2) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$$

следующим образом: пусть $\bar{a}_i = a_i \bmod I^2$, $a_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$; тогда

$$\psi(\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n) = a_1 \ldots a_n \bmod I^n/I^{n+1}.$$

Корректность определения и совместимость с локализацией по базе проверяется без труда.

Утверждение (б) будет установлено, если мы докажем следующую лемму.

12.3. Лемма. *В условиях предыдущего пункта гомоморфизм*

$$\psi\colon S_{A/I}(I/I^2) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$$

является изоморфизмом градуированных A/I-алгебр.

Доказательство. Полагая $I = (f_1, \ldots, f_r)$, проведем индукцию по числу регулярных образующих r.

Пусть $r = 1$. По предложению 3.4 I/I^2 является свободным A/I-модулем ранга 1 с образующей $\bar{f}_1 = f_1 \bmod I^2$. n-я симметрическая степень I/I^2 является также свободным A/I-модулем ранга 1 с образующей $\bar{f}_1^n$. По определению $\psi(\bar{f}_1^n) = f_1^n \bmod I^{n+1}$. Поэтому для доказательства того, что ψ — изоморфизм, нужно лишь проверить, что если $af_1^n \in I^{n+1}$, то $a \in I$. Но если $af_1^n = bf_1^{n+1}$, то $a = bf_1$, ибо f_1 не является делителем нуля в A, что и доказывает требуемое.

Пусть теперь $I_0 = (f_1, \ldots, f_{r-1})$, и пусть лемма доказана для идеала I_0. Из доказательства предложения 3.4 следует, что

$$I/I^2 = I_0/(I_0^2 + f_r I_0) \oplus (A/I)\bar{f}_r,$$

где $\bar{f}_r = f_r \bmod I^2$ — свободный элемент над A/I. Поэтому

$$S^n_{A/I}(I/I^2) = \bigoplus_{k=0}^{n} S^{n-k}_{A/I}(I_0/(I_0^2 + f_r I_0)) \cdot \bar{f}_r^k$$

(в очевидных обозначениях).

Далее снова по предложению 3.4

$$I_0/(I_0^2 + f_r I_0) = A/I \otimes_A I_0/I_0^2$$

(справа и слева стоят свободные A/I-модули ранга $r-1$ и они канонически изоморфны). Поэтому

$$S^i_{A/I}(I_0/(I_0^2 + f_r I_0) = S^i_{A/I_0}(I_0/I_0^2) \otimes_A A/I.$$

По предположению индукции, ψ устанавливает изоморфизм

$$S^i_{A/I_0}(I_0/I_0^2) = I_0^i/I_0^{i+1}.$$

Кроме того,

$$I_0^i/I_0^{i+1} \underset{A}{\otimes} A/I = I_0^i/(I_0^{i+1} + f_r I_0^i).$$

Отсюда

$$S^n_{A/I}(I/I^2) = \bigoplus_{k=0}^{n} (I_0^{n-k}/(I_0^{n-k+1} + f_r I_0^{n-k})) \cdot \bar{f}_r^k.$$

Если $\operatorname{Ker}\psi \neq 0$, то для некоторого n в $S^n_{A/I}(I/I^2)$ найдется элемент, принадлежащий этому ядру и имеющий вид

$$\sum_{k=0}^{i} \bar{x}_k \cdot \bar{f}_r^k, \quad \bar{x}_k \in I_0^{n-k}/(I^{n-k+1} + f_r I_0^{n-k}), \quad \bar{x}_i \neq 0.$$

Пусть

$$\bar{x}_k = x_k \mod (I_0^{n-k+1} + f_r I_0^{n-k}).$$

Мы достигнем противоречия, показав, что $x_i \in I_0^{n-i+1} + f_r I_0^{n-i}$, т. е. что $\bar{x}_i = 0$, вопреки предположению.

Принадлежность $\sum_{k=0}^{i} \bar{x}_k \bar{f}_r^k$ ядру ψ, как нетрудно видеть, означает, что

$$\sum_{k=0}^{i} x_k f_r^k \in I,$$

т. е. учитывая, что $x_k \in I_0^{n-k}$, $I^{n+1} \subset I_0^{n-i+1} + f_r^{i+1} A$:

$$x_i \cdot f_r^i \in I_0^{n-i+1} + f_r^{i+1} A.$$

Так как, по предположению индукции, $I_0^n/I_0^{n+1} = S^n_{A/I_0}(I_0/I_0^2)$, а I_0/I_0^2 свободный A/I_0-модуль, f_r не является делителем нуля относительно I_0^n/I_0^{n+1} и, значит, также относительно A/I_0^h для всех $h \geqslant 1$.

Поэтому из включения

$$x_i f_r^i \in I_0^{n-i+1} + f_r^{i+1} A,$$

т. е. из включения

$$x_i \cdot f_r^i + y \cdot f_r^{i+1} \in I_0^{n-i+1}$$

следует, что

$$x_i + y \cdot f_r \in I_0^{n-i+1},$$

откуда $y \cdot f_r \in I_0^{n-i}$ (ибо $x \in I_0^{n-i}$), так что $y \in I_0^{n-i}$ и, наконец, $x_i \in I_0^{n-i+1} + f_r I_0^{n-i}$.

Лемма доказана.

12.4. Остается проверить последнее утверждение предложения 12.2. Это тоже достаточно сделать локально по базе. Имеем: $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n) = \bigcup_{i=1}^{r} D_+(f_i t)$ (здесь t — вспомогательная переменная степени 1, отмечающая однородные компоненты).

Далее $D_+(f_i t) = \operatorname{Spec}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n)_{(f_i t)}$. Кольцо $(\bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n)_{(f_i t)}$, как нетрудно видеть, изоморфно подкольцу $A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_r}{f_i}\right]$ кольца A_{f_i}, порожденному элементами вида $a/1$ $(a \in A)$ и $g_{ji} = f_j/f_i$ $(j \neq i)$.

Действительно, пусть $A_1 \subset A_2$ — два кольца, $S \subset A_1$ — мультипликативное подмножество. Тогда канонический гомоморфизм $A_{1,S} \to A_{2,S}$ является вложением. Применяя этот результат к случаю $A_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n$, $A_2 = A[t]$, $S = \{(f_i t)^n\}$ и ограничиваясь рассмотрением компонент нулевой степени, получим требуемое.

Идеал, определяющий Y' внутри $D_+(f_i t)$, порожден элементами $f_j/1$, т. е. элементами $f_i/1$ и $g_{ji} f_i$ $(j \neq i)$. Следовательно, он порожден $f_i/1$. Очевидно, что $f_i/1$ не является делителем нуля в $A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_r}{f_i}\right]$, потому что в A_{f_i} этот элемент обратим.

Стало быть, $Y' \overset{j}{\hookrightarrow} X'$ — регулярное вложение коразмерности 1.

Это же вычисление показывает, что если I' — пучок идеалов, определяющий Y' внутри X', то $j^*(I'/I'^2) \simeq O_{\mathbf{P}(N)}(1)$ (более того, $I' = O_{X'}(1)$ в обозначениях п. 7.2).

Предложение 12.2 полностью доказано.

13. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании

13.1. В этом и двух последующих разделах мы займемся вычислением $K(X')$, где X' — результат моноидального преобразования, примененного к X. Прежде всего нам понадобится гомологический метод вычисления f^*: характер результата и доказательство аналогичны теореме 2.7. Мы боремся с той же трудностью: f^* легко вычисляется на классах локально свободных пучков; нужно перенести метод вычисления на все когерентные пучки.

13.2. Теорема. *Пусть f: $X' \to X$ — проективный морфизм, X — регулярная нётерова схема с обильным пучком, F — когерентный пучок на X. Тогда*

$$f^*(cl(\mathscr{F})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\operatorname{Tor}_i^{O_X}(\mathscr{F}, O_{X'})).$$

(Определение $\operatorname{Tor}_i^{O_X}(\mathscr{F}, O_{X'})$ см. ниже.)

Доказательство. Пусть

$$\ldots \to \mathscr{L}_n \to \ldots \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{F} \to 0$$

— конечная локально свободная резольвента $\mathscr{F}$ на X. Тогда

$$f^*(cl(\mathscr{F})) = f^*(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathscr{L}_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathscr{L}_i \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}).$$

(Мы пишем $f^*(\mathscr{L}) = \mathscr{L} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}$: см. определение f^* в п. 4.4). На схеме X' пучки гомологий комплекса

$$\ldots \to \mathscr{L}_n \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to \ldots \to \mathscr{L}_0 \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to 0$$

изоморфны $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F}, O_{X'})$, откуда

$$f^*(cl(\mathcal{F})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F}, O_{X'})),$$

что и доказывает требуемое.

13.3. Теперь мы возвращаемся к обозначениям предложения 12.2: мы рассматриваем диаграмму схем и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{i} & X, \end{array}$$

в которой f — морфизм моноидального преобразования X с центром в регулярной подсхеме $i(Y)$. Через $\mathcal{N}$ обозначается конормальный пучок на Y, а через N — его класс в $K(Y)$. Все эти обозначения будут закреплены.

Мы докажем ряд тождеств относительно гомоморфизмов h_* и h^* (где h — один из морфизмов i, j, f, g) и их композиций.

Заметим, что поскольку g изоморфен проекции $\mathbf{P}(N) \to Y$, поведение K относительно g нам уже хорошо известно.

13.4. Предложение. *Для любого элемента $y \in K(Y)$ имеем*

$$i^* \cdot i_*(y) = y \cdot \lambda_{-1}(N).$$

Доказательство. В силу регулярности Y и аддитивности $i^* \cdot i_*$ достаточно рассмотреть случай, когда $y = cl(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на Y. По теореме 13.2

$$i^* \cdot i_*(cl(\mathcal{E})) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y, \mathcal{E})).$$

С другой стороны, по теореме 3.5

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y, \mathcal{E}) = \Lambda^i_{O_Y}(\mathcal{N}) \otimes_{O_X} \mathcal{E}.$$

Это доказывает требуемое.

13.5. Следствие. *Для любых двух элементов $y_1, y_2 \in K(Y)$*

$$i_*(y_1) \cdot i_*(y_2) = i_*(y_1 \cdot y_2 \cdot \lambda_{-1}(N)).$$

Доказательство. Подставим в правую часть вместо $y_2\lambda_{-1}(N)$ выражение $i^* \cdot i_*(y_2)$ и воспользуемся «формулой проекции» 7.13.

Заметим, что результаты 13.4 и 13.5 можно применять и к морфизму j, так как он также является регулярным вложением: Y' локально определен одним уравнением.

Так как конормальный пучок N' к Y' изоморфен $O_{\mathbf{P}(N)}(1)$, имеем $\lambda_{-1}(N) = 1 - l$, где l — класс N' в $K(Y')$, и, в частности,

$$j_*(1)^2 = j_*(1 - l). \qquad (1)$$

Стало быть, класс самопересечения Y' внутри X, ограниченный на Y', равен $1 - l$. Рассмотрим случай, когда Y — замкнутая точка в X. Тогда Y' — проективное пространство $\mathbf{P}$, а класс его самопересечения совпадает с классом

$$1 - cl(O_{\mathbf{P}}(1)) = -cl\, O_E,$$

где $E \subset \mathbf{P}$ — некоторая «гиперплоскость» в $\mathbf{P}$, т. е. нуль сечения пучка $O_{\mathbf{P}}(1)$ (см. п. 8.12).

Здесь замечателен знак минус! Его можно интерпретировать как показатель «жесткости», «недеформируемости» исключительного дивизора Y'. В самом деле, если бы существовала *подсхема* Y'' внутри X, класс структурного пучка, который совпадал бы с классом $O_{Y'}$, и находящаяся в общем положении с Y', то

$$j_*^2(1) = cl(O_{Y'})^2 = cl(O_{Y'})\, cl(O_{Y''}) = cl(O_{Y' \cap Y''})$$

(см. теорему 2.3). Но легко проверить (скажем, в случае, когда X — проективное многообразие над полем), что $-cl(O_E) \neq cl(O_{Y' \cap Y''})$, потому что и E, и $Y' \cap Y''$ — подсхемы. Действительно, индекс пересечения $cl(O_{Y' \cap Y''})$ с классом линейного подпространства дополнительной размерности положителен, а для $-cl(O_E)$ он отрицателен. Стало быть Y'' не существует.

Частный случай этого результата показывает, что если X — поверхность над полем k, то моноидальное преобразование с центром в k-точке x заменяет ее на проективную прямую, *индекс самопересечения которой равен* -1. Классическая теорема Кастельнуово—Энриквеса утверждает, что неприводимые исключительные дивизоры на регулярных поверхностях характеризуются этим свойством.

В общем случае у нас есть лишь *необходимые условия*: для того чтобы дивизор $Y' \subset X'$ был исключительным, он должен иметь вид $\mathbf{P}(\mathcal{N})$, а его самопересечение должно даваться формулой (1).

В какой мере они являются достаточными, отчасти выясняют недавние глубокие результаты Б. Мойшезона и П. Гриффитса.

13.6. Сейчас мы проведем аналогичные вычисления для гомоморфизма $f^* \cdot i_*$. Они будут длиннее, потому что вычисление соответствующих Tor придется провести отдельно.

Введем еще одно обозначение. Так как $Y' = \mathbf{P}(\mathcal{N})$, в силу предложения 4.9 существует канонический эпиморфизм пучков на Y': $g^*(\mathcal{N}) \to O_{Y'}(1) \to 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — ядро этого эпиморфизма, локально свободный пучок на Y', а F — его класс в $K(Y')$.

13.7. Предложение. *Для всякого элемента $y \in K(Y)$ имеем*

$$f^* \cdot i_*(y) = j_*(g^*(y) \cdot \lambda_{-1} F).$$

Доказательство. Полагая $y = cl(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на Y, как выше, находим

$$f^* \cdot i_*(y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, \mathcal{E})).$$

Поэтому требуемый результат будет установлен, если мы докажем следующий аналог теоремы 3.5.

13.8. Предложение. *Пучок $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, \mathcal{E})$, $i \geq 0$ сосредоточен на Y' и, как пучок $O_{Y'}$-модулей, изоморфен $\Lambda^i(\mathcal{F}) \otimes_{O_{Y'}} g^*(\mathcal{E})$.*

Доказательство. Первый шаг. Вычислим $\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y)$. Прежде всего, из точной последовательности пучков O_X-модулей

$$0 \to \mathcal{Y} \to O_X \to O_Y \to 0,$$

умножая ее тензорно на $O_{X'}$ и учитывая, что $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_X, O_{X'}) = 0$, $i \geqslant 1$, находим

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \to \mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to O_{X'} \to O_{Y'} \to 0.$$

Согласно вычислению, проведенному в п. 12.4, образ $\mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}$ в $O_{X'}$ равен $\mathcal{Y}' \simeq O_{Y'}$ (1), так что для вычисления Tor_1 получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \to \mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'} \to \mathcal{Y}' \to 0.$$

Так как $\mathcal{Y}'$ — локально свободный пучок, а $\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y)$ является пучком $O_{X'}/\mathcal{Y}'$-модулей, эту точную последовательность, можно умножить тензорно на $O_{X'}/\mathcal{Y}'$, не нарушив ее точности и не изменив первого члена. Имеем

$$\mathcal{Y}' \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}/\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}'/\mathcal{Y}'^2,$$

$$(\mathcal{Y} \underset{O_X}{\otimes} O_{X'}) \underset{O_{X'}}{\otimes} O_{X'}/\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \underset{O_{X'}}{\otimes} O_{X'}/\mathcal{Y}' = \mathcal{Y}/\mathcal{Y}^2 \otimes O_{Y'} = g^*(\mathcal{N}),$$

откуда

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \to g^*(\mathcal{N}) \to \mathcal{Y}'/\mathcal{Y}'^2 \to 0. \tag{1}$$

Это показывает, что

$$\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y) = \mathcal{F}.$$

(см. определение $\mathcal{F}$ в п. 13.6). (Совпадение гомоморфизма $g^*(\mathcal{N}) \to \mathcal{Y}'/\mathcal{Y}'^2$ с каноническим гомоморфизмом $g^*(\mathcal{N}) \to O(1)$ предоставляется проверить читателю.)

Второй шаг. Проведем теперь локальные вычисления Tor_i. Пусть $\mathrm{Spec}\, A$ — аффинная открытая подсхема в X, $(f_1, \ldots, f_r) \subset A$ — регулярная система элементов, порождающая пучок $\widetilde{I} = \mathcal{Y}$ над ней, $I = (f_1, \ldots, f_r)$.

Как в п. 12.4, прообраз $\mathrm{Spec}\, A$ относительно f покрывается аффинными схемами $\mathrm{Spec}\, B_j$, где

$$B_j = A\left[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_r}{f_j}\right],$$

а сечения пучка $\mathcal{Y}'$ над $\mathrm{Spec}\, B_j$ образуют идеал $f_j \cdot B_j = I'_j$.

Рассматривая сечения точной последовательности над $\mathrm{Spec}\, B_j$, находим

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(B_j, A/I) \to B_j/I'_j \underset{A/I}{\otimes} I/I^2 \xrightarrow{u} I'_j/I'^2_j \to 0.$$

Положим

$$\bar{f}_i = f_i \bmod I^2, \quad \widetilde{f}_j = f_j/1 \bmod I'^2_j,$$

$$\varphi_{ij} = f_i/f_j \in B_j, \quad \bar{\varphi}_{ij} = \varphi_{ij} \bmod I'_j.$$

Тогда, очевидно, $B_j/I'_j \underset{A/I}{\otimes} I/I^2$ есть свободный B_j/I'_j-модуль, порожденный элементами $1 \otimes \bar{f}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, а I'_j/I'^2_j — свободный модуль, порожденный элементом $\widetilde{f}_j$. Значение u на этих образующих легко вычисляется:

$$u(1 \otimes \bar{f}_i) = \varphi_{ij}\widetilde{f}_j.$$

Отсюда немедленно следует, что модуль $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Tor}_1^A(A/I, B_j)$ *свободно порожден элементами*

$$1 \otimes \bar{f}_i - \bar{\varphi}_{ij} \otimes \bar{f}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ i \neq j). \tag{2}$$

Третий шаг. Пользуясь этим локальным вычислением Tor_1, мы построим сейчас локальные изоморфизмы

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \overset{\sim}{\to} \Lambda^i_{O_X}(\mathrm{Tor}_1^{O_X}(O_{X'}, O_Y)),$$

или, точнее,

$$\mathrm{Tor}_i^A(B_j, A/I) \overset{\sim}{\to} \Lambda^i_A(\mathrm{Ker}\, u). \tag{3}$$

Конструкция будет зависеть от выбора образующих $(f_1, \ldots, f_r)$; следующий шаг покажет независимость гомоморфизмов от этого выбора.

Чтобы построить изоморфизм (3), напишем комплекс Кошуля $K(A, f_1, \ldots, f_r)$ — резольвенту A-модуля A/I, и умножим ее тензорно на B_j над A. В стандартных обозначениях получим комплекс, гомологии которого дают $\mathrm{Tor}_n^A(B_j, A)$:

$$\ldots \bigoplus B_j e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \xrightarrow{d} B_j e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-1}} \to \ldots,$$

$$d(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f_{i_k}/1 e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}.$$

Чтобы вычислить эти гомологии, сделаем замену образующих e_i, положив

$$e'_i = e_i - \varphi_{ij} e_j, \quad j \neq i, \quad \varphi_{ij} = f_i/f_j,$$

$$e'_j = e_j.$$

Легко видеть, что тогда

$$d(e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}) = \begin{cases} 0, \text{ если } j \notin (i_1, \ldots, i_n) \\ (-1)^{k+1} f_j/1 e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}, \text{ если } j = i_k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} Z_n(B_j \underset{A}{\otimes} K(A, f)) &= \bigoplus_{j \notin (i_1, \ldots, i_n)} B_j e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}, \\ B_n(B_j \underset{A}{\otimes} K(A, f)) &= f_j/1 \cdot Z^n(B_j \otimes K(A, f)). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Теперь построим изоморфизмы

$$\psi_f \colon H_n(B_j \underset{A}{\otimes} K(A, f)) \overset{\sim}{\to} \Lambda^n(\mathrm{Tor}_1^A(A/I, B_j)), \tag{5}$$

отображая класс цикла $e'_{i_1} \wedge \ldots \wedge e'_{i_n}$ в элемент

$$\bigwedge_{k=1}^{n} (\bar{f}_{i_k} \otimes 1 - \varphi_{i_k j} \otimes \bar{f}_j)$$

(ср. с (2)).

Четвертый шаг. Мы должны теперь показать, что при замене $(f_1, \ldots, f_r)$ на другую систему регулярную систему образующих $(g_1, \ldots, g_r)$ идеала I локальные изоморфизмы (5) седут себя согласованно и склеиваются в глобальные изоморфизмы Tor.

Рассуждение аналогично приведенному в п. 3.7; дополнительные технические детали связаны с тем, что замена (f_i) на (g_i) меняет также покрытие $f^{-1}(\operatorname{Spec} A)$, в терминах которого мы проводим локальные вычисления:

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \bigcup_j \operatorname{Spec} A\left[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_r}{f_j}\right] = \bigcup_k \operatorname{Spec} A\left[\frac{g_1}{g_k}, \ldots, \frac{g_r}{g_k}\right].$$

Поэтому нужно рассмотреть общее измельчение этих покрытий:

$$f^{-1}(\operatorname{Spec} A) = \bigcup \operatorname{Spec} B_{jk},$$

где

$$B_{jk} = A\left[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_r}{f_j}\right]_{g_k/f_j} = B_{kj} = A\left[\frac{g_1}{g_k}, \ldots, \frac{g_r}{g_k}\right]_{f_j/g_k}.$$

Все конструкции предыдущего шага проходят, если заменить в них B_j на B_{jk}.

Аналогично, применяя их к B_{kj} и $(g_1, \ldots, g_r)$ вместо B_{jk} и $(f_1, \ldots, f_r)$, построим изоморфизм

$$\psi_g = H_n(B_{kj} \otimes K(A, g)) \longrightarrow \Lambda^n(\operatorname{Tor}_j^A(A/I, B_{kj})).$$

Как в п. 3.7, мы должны проверить, что ψ_j и ψ_g коммутирует с гомоморфизмами резольвент $K(A, g) \to K(A, f)$.

Пусть

$$g_i = \sum_{l=1}^{r} a_{il} f_l \quad (i = 1, \ldots, r),$$

и пусть

$$K_n(A, g) = \Lambda^n\left(\bigoplus_{i=1}^{r} A\bar{e}_i\right).$$

Определим, как в п. 3.7, гомоморфизм комплексов $K(A, g) \to K(A, f)$:

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{e}_{i_n} \longrightarrow \bigwedge_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{r} a_{i_m l} e_l\right).$$

Обозначим через φ гомоморфизм, который индуцирован этим отображением на гомологиях комплексов $K \otimes B$:

$$\varphi\colon H_{\cdot}(B_{kj} \otimes K(A, g)) \longrightarrow H_{\cdot}(B_{jk} \otimes K(A, f)).$$

Нужно проверить коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_n(B_{jk} \otimes K(A, f)) & \xrightarrow{\psi_f} & \Lambda^n(\operatorname{Tor}_1 A/I, B_{jk})), \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \| \\ H_n(B_{kj} \otimes K(A, g)) & \xrightarrow{\psi_g} & \Lambda^n(\operatorname{Tor}_1(A/I, B_{kj})). \end{array}$$

Это делается прямыми вычислениями. Положим

$$e'_i = \bar{e}_i - \chi_{ij}\bar{e}_k, \quad \chi_{ij} = g_i/g_j \in B_{kj}, \quad (i \neq k)$$
$$\bar{e}'_k = \bar{e}_i.$$

Тогда (мы пишем под знаком ψ_g, ψ_f, φ для краткости цикл вместо класса гомологий):

$$\psi_g(e'_i) = \bar{g}_i - \bar{\chi}_{ij} \otimes g_j \quad (i \neq k),$$

где

$$\bar{g}_i = g_i \bmod I^2,$$
$$\bar{\chi}_{ij} = \chi_{ij} \bmod (I'_{kj})^2.$$

С другой стороны, $\varphi(\bar{e}'_i) =$ класс $\left(\sum_{l=1}^{r} a_{il}e_l - g_i/g_j \sum_{l=1}^{r} a_{kl}e_l\right)$, откуда

$$\psi_f \circ \varphi(e'_i) = \sum_{l=1}^{r} a_{il}\bar{e}_l - g_i/g_j \sum_{l=1}^{r} a_{kl}e_l - \psi_g(\bar{e}'_i),$$

что и доказывает коммутативность.

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, O_Y) \simeq \Lambda^i_{O_{X'}}(\mathcal{F}).$$

Пятый шаг. Наконец, укажем кратко, какие изменения нужно провести в предыдущих рассуждениях, чтобы получить изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_i^{O_X}(O_{X'}, \mathcal{E}) \simeq \Lambda^i(\mathcal{F}) \underset{O_{Y'}}{\otimes} \mathcal{E}$$

для любого локально O_Y-свободного пучка $\mathcal{E}$ вместо O_Y.

Они не сложны: нужно заменить в конструкции третьего шага резольвенту

$$K_{\cdot}(A, f) \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

на резольвенту

$$\bigoplus K_{\cdot}(A, f) \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

представив свободный A/I-модуль E сечений пучка $\mathcal{E}$ над $\operatorname{Spec} A$ в виде прямой суммы модулей A/I.

Все последующие построения проходят с очевидными видоизменениями, что приводит к изоморфизмам

$$\operatorname{Tor}_i^A(B_{kj}, E_{kj}) \xrightarrow{\sim} \Lambda^i(\operatorname{Tor}_1^A(B_{kj}, A/I)) \otimes E_{kj}.$$

Независимость их от выбора первоначального представления $E = \bigoplus A/I$ проверяется немедленно.

Доказательство закончено.

14. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании (продолжение)

14.1. Мы сохраним обозначения раздела 13: диаграмма, описывающая моноидальное преобразование

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{i} & X, \end{array}$$

приводит к диаграмме, состоящей из групп K, в которой число морфизмов увеличивается до восьми:

$$\begin{array}{ccc} K(Y') & \underset{j^*}{\overset{j_*}{\rightleftarrows}} & K(X') \\ {\scriptstyle g^*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle g_*} & & {\scriptstyle f^*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K(Y) & \underset{i_*}{\overset{i^*}{\leftrightarrows}} & K(X). \end{array}$$

В предыдущей лекции были доказаны два результата, выясняющие, в какой мере эта последняя диаграмма коммутативна, т. е. сравнивающие морфизмы групп K, которые получаются, если проходить по двум разным путям этой диаграммы с общим началом и концом:

$$i^* \cdot i_*(y) = y\lambda_{-1}N \text{ (предложение 13.4)},$$

$$f^* \cdot i_*(y) = j_*(g^*(y)\lambda_{-1}F) \text{ (предложение 13.7)}.$$

Роль появляющихся здесь корректирующих множителей $\lambda_{-1}N$ и $\lambda_{-1}F$ можно интуитивно объяснить, пользуясь представлением о «деформации внутри трубчатой окрестности», подобно п. 3.6.

Сейчас мы добавим еще три утверждения подобного же типа, которые будут использованы потом для вычисления $K(X')$.

14.2. Предложение. (а) $f_*f^*\colon K(X) \to K(X)$ *есть тождественное отображение*;

(б) $g_*(\lambda_{-1}(F)) = 1$;

(в) *если* $y \in \operatorname{Ker} j_* \subset K(Y')$, *то* $y = g^*g_*(y)\lambda_{-1}F$.

14.3. Доказательство 14.2 (а). Прежде всего заметим, что достаточно проверить тождество $f_*(1) = 1$. Действительно, если оно верно, то, пользуясь формулой проекции, находим для любого элемента $y \in K(Y)$

$$f_*f^*(y) = f_*(f^*(y)\cdot 1) = y \cdot f_*(1) = y.$$

Имеем далее

$$f_*(1) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl(R^if_*O_{X'}).$$

Поэтому все будет доказано, если мы установим, что

$$R^if_*O_{X'} = \begin{cases} O_X & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \geqslant 1. \end{cases}$$

Так как пучок идеалов $\mathscr{Y}' \simeq O_{X'}(1)$, определяющий Y' в X', обратим (см. п. 12.4), умножая тензорно на $O_{X'}(n)$ точную последовательность

$$0 \to \mathscr{Y}' \to O_{X'} \to j_*(O_{Y'}) \to 0,$$

получаем точную последовательность

$$0 \to O_{X'}(n+1) \to O_{X'}(n) \to j_*(O_{Y'}(n)) \to 0.$$

Применим к ней функтор f_*. Для вычисления производной точной последовательности заметим, что $f_*j_* = i_*g_*$ и что функторы i_* и j_* точны, так что $R^pi_* = 0$, $R^pj_* = 0$ при $p \geqslant 1$. Поэтому

$$R^pf_*(j_*O_{Y'}(n)) = R^p(f_*j_*)(O_{Y'}(n)) =$$

$$= R^p(i_*g_*)(O_{Y'}(n)) \quad i_*R^pg_*(O_{Y'}(n)) = \begin{cases} i_*(S^n\mathscr{N}') & \text{при } p = 0, \\ 0 & \text{при } p \geqslant 1. \end{cases}$$

(Мы пользуемся тем, что $Y' = \mathbf{P}(\mathscr{N}')$, и результатом примера 7.7.) Отсюда при $p \geqslant 1$ и любом $n \geqslant 0$ находим точную последовательность

$$0 \to R^pf_*O_{X'}(n+1) \to R^pf_*O_{X'}(n) \to 0.$$

Но так как, по теореме Серра $R^pf_*O_{X'}(n+1) = 0$ при *достаточно больших* n, это верно и при *всех* $n \geqslant 0$. Тем самым $R^pf_*O_{X'} = 0$.

Далее, при $p = 0$ получаем для любого $n \geqslant 0$ точную последовательность

$$0 \to f_*(O_{X'}(n+1)) \to f_*(O_{X'}(n)) \to i_*(S^n\mathscr{N}') \to 0.$$

Так как $X' = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{Y}^n)$, существуют канонические гомоморфизмы пучков на X: $\mathscr{Y}^n \to f_*(O_{X'}(n))$, которые приводят к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & f_*(O_{X'}(n+1)) & \to & f_*(O_{X'}(n)) & \to & i_*(S^n\mathscr{N}') & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & \mathscr{Y}^{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{Y}^n & \longrightarrow & \mathscr{Y}^n/\mathscr{Y}^{n+1} & \to 0. \end{array}$$

Левая вертикальная стрелка является изоморфизмом для $n \geqslant n_0$ в силу теоремы Серра, а правая — изоморфизм для любых n по лемме 12.3. Индукцией вниз по n отсюда находим, что средняя стрелка является изоморфизмом при всех $n \geqslant 0$, что завершает доказательство.

14.4. Доказательство 14.2(б). Распространим отображение g_* *покоэффициентно* на множество $1 + K(Y)[[t]]$. Пользуясь тем, что $F = g^*(N) - l$, где $l = cl(O_{\mathbf{P}(N)}(1))$, и учитывая формулу проекции, находим

$$g_*(\lambda_tF) = g_*(\lambda_t(g^*N)\cdot\lambda_t(-l)) = \lambda_t(N)\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^ig_*(l^i)t^i\right) = \lambda_t(N)\,\sigma_{-t}(N) = 1$$

в силу пп. 5.4 и 7.7.

14.5. Доказательство 14.2(в). Так как $j_*(y) = 0$, имеем

$$0 = j^*j_*(y) = y\lambda_{-1}(N') = y(1-l),$$

где $l = cl(O_{Y'}(1))$ (применить предложение 13.4 к j вместо i). С другой стороны, по теореме о структуре $K(Y') = K(\mathbf{P}(\mathscr{N}'))$ имеем однозначное представление

$$y = \sum_{i=0}^{r} a_i(l-1)^i, \quad a_i \in g^*K(Y),$$

где $r + 1 = rkN$ и где элемент $l - 1$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^{r+1-i}\gamma^{r+1-i}(N-r-1)(l-1)^i = 0.$$

(см. лемму 8.9). Сравнивая это соотношение с уравнением

$$y(l-1) = \sum_{i=1}^{r+1} a_{i-1}(l-1)^i = 0,$$

находим

$$(-1)^{r+1-i}\gamma^{r+1-i}(N-r-1)\cdot a_r = a_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, r+1),$$

откуда

$$y = a_r\left(\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{r+1-i}\gamma^{r+i-1}(N-r-1)(l-1)^{i-1}\right) =$$

$$= a_r\left(\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^r\gamma^{r+1-i}(N-r-1)\gamma^{i-1}(1-l)\right) =$$

$$= (-1)^ra_r\gamma^r(N-r-l) = (-1)^ra_r\gamma^r(F-r) \quad (-1)^ra_r\lambda_{-1}(F$$

(Тождество $\gamma^r(F-r)=\lambda_{-1}(F)$ было получено в ходе доказательства леммы 8.9.)

Это равенство доказывает требуемое, потому что из тождества

$$y=(-1)^r g^*(a_r)\,\lambda_{-1}(F)$$

и равенства $g_*(\lambda_{-1}(F))=1$ следует, что

$$(-1)^r a_r=g_*(y),$$

так что

$$y=g^*g_*(y)\,\lambda_{-1}(F).$$

15. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании (окончание)

15.1. Теперь мы сможем доказать основной результат о структуре кольца $K(X')$. Сначала введем некоторые объекты, фигурирующие в формулировке этого результата.

Кольца $K(Y)_N$ и $K(Y')_N$. Сохранив аддитивную структуру кольца K_Y, введем в нем новый закон умножения, положив

$$y_1 * y_2=y_1y_2\lambda_{-1}N,$$

$K(Y)_N$ — коммутативное, ассоциативное кольцо без единицы. Аналогично определим кольцо $K(Y')_{N'}$ с законом умножения $y_1' * y_2'=y_1'y_2'\lambda_{-1}N'=y_1'y_2'(1-l)$.

Кольцо $K(X)\oplus K(Y')_{N'}$. Аддитивная группа этого кольца — прямая сумма групп $K(X)$ и $K(Y')_{N'}$; умножение в $K(X)$ обычно, а в $K(Y')_{N'}$ совпадает с определенным выше; наконец,

$$(x,0)\cdot(0,y')=(0,\,g^*i^*(x)\,y').$$

Гомоморфизм α: $K(Y)_N\to K(X)\oplus K(Y')_{N'}$. Положим

$$\alpha(y)=(i_*(y),\ -g^*(y)\,\lambda_{-1}F).$$

Это, очевидно, гомоморфизм групп. Совместимость с умножением следует из тождеств

$$\alpha(y_1*y_2)=\alpha(y_1y_2\lambda_{-1}N)=(i_*(y_1y_2\lambda_{-1}N),\ -g^*(y_1y_2\lambda_{-1}N)\,\lambda_{-1}F)$$

и

$$\begin{aligned}(i_*(y_1),\ -g^*(y_1)\,\lambda_{-1}F)\,(i_*(y_2),\ -g^*(y_2)\,\lambda_{-1}F)&=\\ =(i_*(y_1)\,i_*(y_2),\ g^*(y_1y_2)\,\lambda_{-1}(F)^2(1-l)&-\\ -g^*i^*i_*(y_1)\,g^*(y_2)\,\lambda_{-1}(F)-g^*i^*i_*(y_2)\,g^*(y_1)\,\lambda_{-1}F)&=\\ &=(i_*(y_1y_2\lambda_{-1}N),\ -g^*(y_1y_2\lambda_{-1}N)\,\lambda_{-1}F),\end{aligned}$$

потому что $\lambda_{-1}(F)(1-l)=g^*(\lambda_{-1}N)$.

Кроме того, *образ α является идеалом в кольце* $K(X)\oplus K(Y')_{N'}$:

$$\begin{aligned}(x,y')\,\alpha(y)&=(x,y')\,(i_*(y),\ -g^*(y)\,\lambda_{-1}F)=\\ &=(x\cdot i_*(y),\ -g^*i^*(x)\,g^*(y)\,\lambda_{-1}F+g^*i^*i_*(y)\,y'-\\ &-g^*(y)\,y'\lambda_{-1}F\,(1-l))=(i_*(i^*(x)\cdot y),\ -g^*(i^*(x)\cdot y)\,\lambda_{-1}F)=\alpha(i^*(x)\cdot y).\end{aligned}$$

Из этой формулы, кроме того, видно, что

(а) *Образ α и $K(Y')_{N'}$ ортогональны относительно умножения.*

(б) *α является не только гомоморфизмом колец, но и гомоморфизмом $K(X)$-алгебр.*

(в) *Гомоморфизм групп α': $K(X)\oplus K(Y')_{N'}\to K(Y)$:*

$$\alpha'(x,y')=-g_*(y')$$

обладает свойством

$$\alpha'\circ\alpha(y)=y,\quad \forall y\in K(Y).$$

Поэтому идеал $\alpha(K(Y))$ выделяется прямым слагаемым (как аддитивная подгруппа).

Гомоморфизм колец β: $K(X)\oplus K(Y')_{N'}\to K(X')$. Положим

$$\beta(x,y')=f^*(x)+j_*(y').$$

Совместимость с умножением внутри подгрупп элементов вида $(x,0)$ и $(0,y')$ очевидна; совместимость с умножением «крест накрест» следует из того, что

$$\begin{aligned}\beta((x,0)\,(0,y'))&=\beta(0,\ g^*\cdot i^*(x)\,y')=j_*(g^*\cdot i^*(x)\,y')=\\ &=j_*(j^*f^*(x)\,y')=f^*(x)\,j_*(y')=\beta(x,0)\,\beta(0,y').\end{aligned}$$

15.2. Теорема. *Последовательность*

$$0\to K(Y)_N\xrightarrow{\alpha}K(X)\oplus K(Y')_{N'}\xrightarrow{\beta}K(X')\to 0$$

точна.

Доказательство. Мы проверим точность в каждом члене в отдельности.

α-вложение. Действительно, пусть $\alpha(y)=0$. Тогда, в частности,

$$g^*(y)\,\lambda_{-1}(F)=0,$$

откуда

$$0=g_*(g^*(y)\,\lambda_{-1}(F))=yg_*(\lambda_{-1}F)=y.$$

β-эпиморфизм. Достаточно проверить, что для любого элемента $x'\in K(X')$ имеем

$$x'-f^*f_*(x')\in j_*(K(Y')).$$

Можно ограничиться случаем $x'=cl(\mathscr{E})$. Тогда имеем

$$f^*f_*cl(\mathscr{E})=\sum_{i,j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}cl(R^if^*(R^jf_*(\mathscr{E}))).$$

В сумме справа пучки $R^if^*(R^jf_*(\mathscr{E}))$ сосредоточены на Y', если $i+j\geqslant 1$, потому что f является изоморфизмом вне Y'. Поэтому

$$f^*f_*cl(\mathscr{E})=cl(f^*f_*(\mathscr{E}))+x'',$$

где x'' принадлежит подгруппе, порожденной классами пучков, сосредоточенных на Y'.

Покажем, что к этой же подгруппе принадлежит разность $cl(\mathscr{E})-clf^*f_*(\mathscr{E})$. Действительно, вне Y' пучки $\mathscr{E}$ и $f^*f_*\mathscr{E}$ естественно изоморфны. Вложим $\mathscr{E}\,|\,_{X'\setminus Y'}$ диагонально в пучок $(\mathscr{E}\oplus f^*f_*(\mathscr{E}))\,|\,_{X'\setminus Y'}$ и продолжим получившийся подпучок до подпучка $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}\oplus f^*f_*(\mathscr{E})$ на всем пространстве X' (см. п. 1.13).

Проекции $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ и $\mathscr{E}' \to f^*f_*\mathscr{E}$ являются изоморфизмами вне Y'. Отсюда следует, что $cl(\mathscr{E}') - cl(\mathscr{E})$ и $cl(\mathscr{E}') - cl(f^*f_*(\mathscr{E}))$, а стало быть, и разность этих элементов, принадлежит подгруппе в $K(X')$, порожденной классами пучков, сосредоточенных на Y'.

Но эта подгруппа содержится в образе $j_*(K(Y))$, так как у каждого такого пучка есть конечный ряд подпучков, факторы которого аннулируются $\mathcal{J}'$, т. е. являются $O_{Y'}$-модулями.

$\beta \circ \alpha = 0$. Действительно,

$$\beta \circ \alpha(y) = f^* i_*(y) - j_*(g^*(y)\lambda_{-1}F) = 0$$

в силу предложения 13.7.

$\operatorname{Ker}\beta \subset \operatorname{Im}\alpha$. Пусть $(x, y') \in \operatorname{Ker}\beta$. Тогда

$$f^*(x) = -j_*(y').$$

Мы хотим доказать существование такого элемента y, что

$$x = i_*(y), \quad y' = -g^*(y)\lambda_{-1}F.$$

Первому равенству легко удовлетворить: действительно, по 14.2(а)

$$x = f_* f^*(x) = -f_* j_*(y') = -i_* g_*(y'),$$

так что достаточно положить $y = -g_*(y')$.

Остается доказать, что этот элемент удовлетворяет и второму равенству, т. е. что

$$y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}(F) = 0.$$

Сразу же получается несколько более слабый результат

$$j_*(y') = f^*(i_* g_*(y')) = j_*(g^* g_*(y')\lambda_{-1}F)$$

(см. предложение 13.7), откуда

$$j_*(y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F) = 0.$$

Теперь применим предложение 14.2(в) к элементу

$$y = y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F.$$

Получим

$$y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F = g^* g_*(y' - g^* g_*(y')\lambda_{-1}F)\lambda_{-1}F =$$
$$= g^*(g_* y' - g_*(y')\, g_*(\lambda_{-1}F))\lambda_{-}$$

ибо $g_*(\lambda_{-1}F) = 1$. Теорема доказана.

15.3. Теперь покажем, как доказанные результаты позволяют новить кольцо $K(X')$ и связанные с ним гомоморфизмы, пользуяс мацией о вложении $Y \xrightarrow{i} X$. Начнем с аддитивной структуры этог

Задание следующих структур определяет группу $K(X')$:

(а) *Группы* $K(X)$, $K(Y)$ *и гомоморфизм*

$$i_*\colon K(Y) \to K(X).$$

(б) *Класс конормального пучка* $N \in K(Y)$, *его внешние степени* $\lambda^i N$ *и произведения этих элементов на элементы из* $K(Y)$.

Действительно, вычисление группы $K(X')$ проводится тогда следующим образом.

П е р в ы й ш а г. Конструкция группы $K(Y')$ и гомоморфизма $g^*\colon K(Y) \to K(Y')$.

Положим формально

$$K(Y') = \bigoplus_{i=0}^{r} K(Y)\, l^i,$$

где g^* — вложение $K(Y)$ на слагаемое $K(Y)\, l^0$.

(Здесь $l^0 = 1$, l, ..., l^r — формальные индексы, нумерующие компоненты прямой суммы $r+1$ экземпляра групп $K(Y)$.)

В т о р о й ш а г. Конструкция гомоморфизма $\alpha : K(Y) \to K(X) \oplus K(Y')$. Положим

$$F = g^*(N) - l \in K(Y').$$

Для конструкции α нужно знать, кроме i_*, еще гомоморфизм

$$y \to g^*(y)\lambda_{-1}(F),$$

т. е. уметь умножать на $\lambda_{-1}(F)$ в кольце $K(Y')$. Но

$$\lambda_{-1}(F) = \sum_{i=0}^{r} \gamma^{r-i}(N - r - 1)(1 - l)^i.$$

Поэтому достаточно уметь умножать отдельно на степени l и на элементы $\gamma^{r-i}(N - r - 1)$. Первое сводится ко второму, потому что $\gamma^{r-i}(N - r - 1)$ — коэффициенты полиномиального уравнения, которому удовлетворяет l. В свою очередь эти коэффициенты линейно над $\mathbf{Z}$ выражаются через $\lambda^i N$.

Т р е т и й ш а г. Вычисление группы $K(X')$

$$K(X') = (K(X) \oplus K(Y'))/\alpha(K(Y)).$$

15.4. Для вычисления умножения в $K(X')$ нужно знать, в дополнение к перечисленным в п. 15.3, следующие структуры:

(в) *Умножение в* $K(X)$ *и* $K(Y)$.

(г) *Гомоморфизм колец* $i^* : K(X) \to K(Y)$.

Действительно, тогда кольцо $K(Y')$ вычисляется так:

$$K(Y') = K(Y)[t]/\left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^{r+1-i}\gamma^{r+1-i}(N - r - 1)(t - 1)^i\right)$$

(образ t^i — это элемент l^i в обозначениях предыдущего пункта). Определения п. 15.1 позволяют построить кольца $K(Y)_N$, $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$ и гомоморфизм α. Кольцо $K(X')$ восстанавливается тогда как ядро α.

Следует отметить, что для вычисления g_* нужно пользоваться формулой

$$g_*(g^*(y)\, l^i) = y\sigma^i(N) \quad (i \geqslant 0),$$

а $\sigma^i(N)$ можно представить в виде целочисленных линейных комбинаций элементов $\lambda^i(N)$, пользуясь формулой

$$\lambda_t(N)\,\sigma_{-t}(N) = 1.$$

15.5. В диаграмме, приведенной в п. 14.1, кольцо $K(X')$ является началом или концом четырех стрелок: f^*, f_*, j^* и j_*. Покажем, что описанной информации достаточно также для вычисления этих гомоморфизмов. Точнее говоря, все они некоторым каноническим образом поднимаются до гомоморфизмов кольца $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$, которые мы будем обозначать той же буквой с чертой наверху.

Именно, следующие четыре диаграммы коммутативны

$$\begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] & K(X') \\ & K(X) \arrow[ul, "\bar{f}^*"] \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\bar{f}_*"'] & K(X') \arrow[d, "f_*"] \\ & K(X) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\bar{j}_*"'] & K(X') \arrow[d, "j_*"] \\ & K(Y') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K(X) \oplus K(Y')_{N'} \arrow[r, "\beta"] & K(X') \\ & K(Y') \arrow[ul, "\bar{j}^*"] \arrow[u, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

где

$$\bar{f}^*(x) = (x, 0),$$

$$\bar{f}_*(x, y') = x + i_* g_*(y'),$$

$$\bar{j}_*(y') = (0, y'),$$

$$\bar{j}^*(x, y') = g^* i^*(x) + y'(1 - l).$$

Наконец, полезно отметить тождества

$$\bar{f}_* \circ \bar{f}^* = id,$$

$$\bar{j}^* \circ \bar{j}_*(y') = y'(1 - l),$$

$$\bar{f}^* \circ \bar{i}_*(y) - \bar{j}_*(\bar{g}^*(y)\, \lambda_{-1}F) = \alpha(y).$$

16. Операции Адамса и гомоморфизм прямого образа

16.1. Цель этого раздела и добавления к нему — дополнить утверждение теоремы 15.2 результатами о поведении γ-фильтрации относительно гомоморфизмов α и β, что позволит доказать вариант этой теоремы для колец $GK(X) \otimes \mathbf{Q}$. Так как по ходу доказательства мы все равно утратим возможность следить за кручением (по крайней мере частично), ограничимся рассмотрением операций Адамса ψ^p (см. раздел 11) вместо λ^p и γ^p, что технически значительно проще, потому что ψ^p являются гомоморфизмами колец. Точнее говоря, мы введем на кольцах $K(Y)_N$ и $K(X) \oplus K(Y')_{N'}$ такой набор операций ψ^p, что гомоморфизмы α и β будут коммутировать с ними с точностью до кручения. (При этом мы, естественно, хотим, чтобы на $K(X)$ и $K(Y)$ эти новые операции совпадали со старыми.) Начнем с интуитивного объяснения новых операций.

Первая задача состоит в том, чтобы попытаться угадать вид новых операций ψ_N^p на кольце $K(Y)_N$. Так как умножение в $K(Y)_N$ отличается от умножения в $K(Y)$ корректирующим множителем $\lambda_{-1}N$, попробуем положить

$$\psi_N^p(y) = \psi^p(y) \cdot \theta,$$

где $\theta \in K(Y)_N$ — некоторый новый корректирующий множитель, и выясним, как отразится на выборе θ требование о том, чтобы отображение ψ_N^p было эндоморфизмом *кольца* $K(Y)_N$. Должно быть выполнено соотношение

$$\psi_N^p(y_1 * y_2) = \psi_N^p(y_1) * \psi_N^p(y_2), \quad y_1, y_2 \in K(Y),$$

т. е.

$$\psi^p(y_1 y_2 \lambda_{-1}N)\theta = \psi^p(y_1)\, \psi^p(y_2)\, \lambda_{-1}N \cdot \theta^2.$$

Если бы в кольце $K(Y)$ не было делителей нуля, из равенства следовало бы, что $\theta = \psi^p(\lambda_{-1}N)/\lambda_{-1}N$. На самом деле не только этот вывод неверен, но и само равенство не имеет смысла, потому что $\lambda_{-1}N \in F^1 K(Y)$, и, следовательно (предложение 8.7), знаменатель нильпотентен!

Все же посмотрим на простейший случай, когда N — обратимый пучок. Тогда $\psi^p(\lambda_{-1}N) = \psi^p(1 - N) = 1 - N^p$, и имеется большой соблазн положить $\psi^p(\lambda_{-1}N)/\lambda_{-1}N = 1 + N + \ldots + N^{p-1}$ в этом случае. Естественно, возникает идея воспользоваться затем для продолжения этой операции на все N принципом расщепления, потребовав совместимости этой операции с гомоморфизмами f^* и выполнимости «функционального уравнения»

$$\frac{\psi^p(\lambda_{-1}(N_1 + N_2))}{\lambda_{-1}(N_1 + N_2)} = \frac{\psi^p(\lambda_{-1}N_1)}{\lambda_{-1}N_1} \cdot \frac{\psi^p(\lambda_{-1}N_2)}{\lambda_{-1}N_2}$$

(в конце концов числитель и знаменатель в отдельности этому уравнению удовлетворяют!).

Эта идея проходит вполне гладко.

16.2. Определение-лемма. *Пусть $K(X)^+$ — полугруппа классов локально свободных пучков на X по сложению, а $K(X)^*$ — полугруппа всех элементов кольца по умножению. Тогда можно единственным способом определить для всех схем X гомоморфизмы полугрупп $\theta^p : K(X)^+ \to K(X)^*$, $p \geqslant 1$, так, чтобы выполнялись следующие условия:*

(16.2.1) $\theta^p \circ f^* = f^* \circ \theta^p$ для всех морфизмов $f : X \to Y$.

(16.2.2) $\theta^p(l) = 1 + l + \ldots + l^{p-1}$, *если l — класс обратимого пучка.*

Доказательство. Единственность θ^p немедленно следует из принципа расщепления. Существование получается следующей прямой конструкцией. Пусть $X_1, \ldots X_r$ — независимые переменные, Y_i $(i = 1, \ldots \ldots r)$ — i-я элементарная симметрическая функция от (X_i). Определим многочлен $\Pi_{p,r}(Y_1, \ldots, Y_r) \in \mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_r]$ формулой

$$\Pi_{p,r}(Y_1, \ldots, Y_r) = \prod_{h=1}^{r} (1 + X_h + \ldots + X_h^{p-1})$$

и для любого класса N локально свободного пучка ранга r положим

$$\theta^p(N) = \Pi_{p,r}(\lambda^1 N, \ldots, \lambda^r N).$$

Все свойства θ^p проверяются немедленно, если учесть, что для $N = \sum_{i=1}^{r} l_i$ (l_i — классы обратимых пучков) $\lambda^k N$ есть k-я элементарная симметрическая функция от (l_i).

16.3. Замечание. Из определения $\Pi_{p,r}$ очевидно, что

$$\varepsilon(\theta^p(N)) = p^{\varepsilon(N)} \neq 0.$$

Поэтому элементы $\theta^p(N)$ обратимы в $K(X) \otimes \mathbf{Q}$, откуда немедленно следует, что θ^p однозначно продолжается до гомоморфизма групп

$$K(X) \to (K(X) \otimes \mathbf{Q})^*.$$

16.4. Свойства $\theta^p(N)$. В дополнение к перечисленным в 16.2 операция θ^p удовлетворяет следующим двум тождествам:

$$\theta^p(N)\,\lambda_{-1}N = \psi^p(\lambda_{-1}N); \tag{16.4.1}$$

$$\theta^{pq}(N) = \psi^p(\theta^q(N))\cdot\theta^p(N). \tag{16.4.2}$$

Оба они немедленно получаются из принципа расщепления, если заметить, что левые и правые части их мультипликативны по N и совпадают на классах обратимых пучков.

Теперь мы можем ввести операции ψ_N^p на кольце $K(Y)_N$.

16.5. Определение-лемма. *Положим для любого элемента* $y \in K(Y)_N$

$$\psi_N^p(y) = \psi^p(y)\cdot\theta^p(N).$$

Тогда ψ_N^p для всех натуральных p является эндоморфизмом кольца $K(Y)_N$ и, кроме того, $\psi_N^p \circ \psi_N^q = \psi_N^{pq}$.

Доказательство. Тривиальная проверка с помощью формул (16.4.1) и (16.4.2) показывает, что наша машина делает в точности то, ради чего она была построена:

$$\psi_N^p(y_1 * y_2) = \psi^p(y_1y_2)\,\lambda_{-1}N\theta^p(N);$$

$$\psi_N^p(y_1) * \psi_N^p(y_2) = \psi^p(y_1)\,\theta^p(N)\,\psi^p(y_2)\,\theta^p(N)\,\lambda_{-1}N = \psi^p(y_1y_2)\,\lambda_{-1}(N))\,\theta^p(N);$$

$$\psi_N^p(\psi_N^q(y)) = \psi^p(\psi^q(y)\,\theta^q(N))\,\theta^p(N) = \psi^{pq}(y)\,\theta^{pq}(N) = \psi_N^{pq}(y).$$

Теперь мы установим гораздо более тонкий результат: коммутирование (с точностью до кручения) наших операций ψ_N^p с гомоморфизмами прямого образа.

16.6. Теорема. *Пусть $i\colon Y \to X$ — регулярное вложение с классом конормального пучка $N \in K(Y)$. Тогда*

$$p^2(i_*\psi_N^p(y) - \psi^p(i_*(y))) = 0.$$

Доказательство. Назовем пару (i, y), состоящую из морфизма i и элемента $y \in K(Y)$ «хорошей», если для нее

$$i_*\psi_N^p(y) - \psi^p(i_*(y)) = 0.$$

Мы разобьем доказательство на несколько шагов, которые доставят нам много хороших пар; но когда естественные способы получать хорошие пары исчерпаются, придется ввести искусственный прием, который и приведет к лишнему множителю p^2 в формулировке теоремы. Я не знаю, можно ли от него избавиться совсем или уменьшить его, скажем, до p.

Первый шаг. ***Пара** (i, y) является хорошей, если пара $(j, g^*(y)\,\lambda_{-1}F)$ **хороша*** (обозначения трех последних разделов). Действительно, так как $f_*f^* = id$, f^* является вложением, так что (i, y) — хорошая пара, если $f^*i_*\psi_N^p(y) = f^*\psi^p(i_*(y))$. Но

$$f^*i_*\psi^p(y) = j_*(g^*(\psi_N^p(y))\,\lambda_{-1}F) = j_*(\psi^p(g^*y)\,\theta^p(g^*N)\,\lambda_{-1}F) =$$
$$= j_*(\psi^p(g^*y)\,\theta^p(F)\,\lambda_{-1}F\theta^p(l)) = j_*(\psi_l^p(g^*y\lambda_{-1}F)).$$

(Мы пользуемся последовательно предложением 13.7, формулой $g^*N = F + l$ и тождеством (16.4.1), примененным к F.) Далее

$$f^*(\psi^p(i_*(y))) = \psi^p(f^*i_*(y)) = \psi^p(j_*(g^*(y)\,\lambda_{-1}F)),$$

чем завершается первый шаг.

Второй шаг. *Если $y' \in \operatorname{Im} j^*$, то пара (j, y') хороша.* Действительно, пусть $y' = j^*(x)$. *Тогда*

$$j_*(\psi_l^p(y')) = j_*(\psi^p(j^*(x))\,(1 + l + \ldots + l^{p-1})) = \psi^p(x)\cdot j_*(1 + l + \ldots + l^{p-1}),$$
$$\psi^p(j_*(y')) = \psi^p(j_*j^*(x)) = \psi^p(xj_*(1)) = \psi^p(x)\,\psi^p(j_*(1)).$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$\psi^p(j_*(1)) = j_*(1 + l + \ldots + l^{p-1}).$$

Положим $L = O_{X'}(1)$, тогда $l = j^*(L)$ и $j^*(1) = 1 - L$. Поэтому $j_*(l^i) = j_*j^*(L^i) = L^i j_*(1) = L^i(1 - L)$, так что

$$\psi^p(j_*(1)) = 1 - L^p,$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} j_*(l^i) = \sum_{i=0}^{p-1} L^i(1 - L) = 1 - L^p,$$

что доказывает требуемое.

Заметим теперь, что в силу первого шага нам нужно проверять пары (j, y'), в которых элемент y' имеет очень специальный вид: $y' = g^*(y)\,\lambda_{-1}F$.

Третий шаг. *Все пары $(j, g^*(y)\,\lambda_{-1}F)$ хороши, если $\lambda^i(N-2) = 0$ при $i > r - 2$, где $r = \varepsilon(N)$.*

В самом деле, если $y' = y''(1 - l)$, то $y' = j^*j_*(y'') \in \operatorname{Im} j^*$. Поэтому достаточно проверить, что при выполнении нашего условия $\lambda_{-1}F$ делится на $1 - l$. Действительно,

$$\lambda_{-1}F = (-1)^{r-1}\lambda^{r-1}(F - 1) = (-1)^{r-1}\lambda^{r-1}(g^*(N-2) + (1 - l)) =$$
$$= (-1)^{r-1}\sum_{i=0}^{r-2} g^*\lambda^i(N-2)\,\lambda^{r-1-i}(1 - l),$$

а $\lambda^j(1 - l)$ делится на $1 - l$ при $j \geqslant 1$.

Собирая вместе результаты первых трех шагов, получаем: *все пары (i, y') хороши (**в частности, теорема** 16.6 верна даже без множителя p^2), если $\lambda^i(N-2) = 0$ при $i > \varepsilon(N) - 2$.*

Лемма 21 статьи Бореля — Серра показывает, что это условие для многообразий X, Y выполнено, например, если $\varepsilon(N) \geqslant \dim Y + 2$, т. е. если $2\dim Y + 2 \leqslant \dim X$: вложение должно быть достаточно «глубоким»; тогда ψ_N^p переходят в ψ^p.

Мы не будем пользоваться этой леммой, а вместо нее применим следующий искусственный прием. Вложим X регулярно в некоторую схему $Z\,(s\colon X \to Z)$ так, чтобы конормальный пучок X в Z был тривиален ранга 2. Геометрически естественно ожидать (и будет доказано ниже), что в индуцированном вложении Y в Z конормальный пучок будет $N + 2$. По результатам первых трех шагов все пары $(s \circ i, y)$ и (s, x) будут хорошими. Отсюда для всех пар (i, y) автоматически получится утверждение теоремы.

Приступим к выполнению этой программы.

16.7. Л е м м а. *Пусть $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{s} Z$ — цепочка регулярных вложений. Обозначим через $\mathcal{N}(Y, X)$ конормальный пучок вложения Y в X; аналогично $\mathcal{N}(Y, Z)$, $\mathcal{N}(X, Z)$. Тогда $s \circ i$ является регулярным вложением и имеет место точная последовательность*

$$0 \to i^*\mathcal{N}(X, Z) \to \mathcal{N}(Y, Z) \to \mathcal{N}(Y, X) \to 0.$$

Чтобы не прерывать связности изложения, отнесем доказательство этой леммы в конец. Приняв ее, продолжим доказательство теоремы 16.6.

16.8. Ч е т в е р т ы й ш а г. *Конструкция вложения s и некоторые его свойства.*

Положим $Z = \mathbf{P}(\mathcal{O}_X^3) = \operatorname{Proj}(\mathcal{O}_X[T_0; T_1; T_2])$, где T_0, T_1, T_2 — три независимых сечения $\mathcal{O}_Z(1)$. Подсхема Z, заданная уравнениями $T_0 = T_1 = 0$, очевидно, канонически изоморфна X; обозначим через $s: X \to Z$ соответствующее вложение, а через $p: Z \to X$-каноническую проекцию, так что $p \circ s = id$. Легко проверить, что класс конормального пучка к X в Z равен 2. Нам понадобится еще следующий факт: $\operatorname{Ker} s_* = 0$. Он немедленно следует из того, что $p_* s_* (x) = x$.

16.9. П я т ы й ш а г. Окончание доказательства теоремы 16.6.

По лемме 16.7 класс конормального пучка к Y в Z равен $N + 2$. Следовательно, все пары $(s \circ i, y)$ хороши, т. е.

$$\psi^p(s_* i_*(y)) = (si)_* \psi^p_{N+2}(y) = p^2 (si)_* \psi^p_N(y).$$

С другой стороны, класс конормального пучка к X в Z равен 2, так что все пары (s, x) хороши, в частности, пара $(s, i_*(y))$:

$$\psi^p(s_* i_*(y)) = s_* \psi^p_2(i_*(y)) = p^2 s_* \psi^p(i_*(y)).$$

Сравнивая эти два равенства, получаем

$$p^2 (si)_* \psi^p_N(y) = p^2 s_* \psi^p(i_*(y)),$$

что доказывает теорему, потому что, как было доказано на предшествующем шаге, ядро s_* тривиально.

16.10. Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 16.7. Рассмотрим локальную ситуацию, когда все схемы аффинные. То, что $s \circ i$ регулярное вложение, очевидно из определений. Пусть $Z = \operatorname{Spec} A_Z$, $X = \operatorname{Spec} A_Z/I_{X,Z}$, аналогичный смысл имеют кольца A_X, A_Y и идеалы $I_{Y,Z}$, $I_{Y,X}$. Имеет место точная последовательность A_Z-модулей

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & I_{X,Z} & \to & I_{Y,Z} & \to & I_{Y,X} & \to 0 \\ & \cap & & \cap & & \cap & \\ & A_Z & & A_Z & & A_X = A_Z/I_{X,Z}. & \end{array}$$

Умножим ее тензорно на A_X над A_Z. Это дает точную последовательность A_X-модулей

$$I_{X,Z}/I^2_{X,Z} \to I_{Y,Z} \otimes A_X \to I_{Y,X} \to 0.$$

Теперь умножим эту точную последовательность тензорно на $A_Y = A_X/I_{Y,X}$ над A_X. Получим точную последовательность A_Y-модулей

$$I_{X,Z}/I^2_{X,Z} \underset{A_X}{\otimes} A_Y \to I_{Y,X}/I^2_{Y,Z} \to I_{Y,X}/I^2_{Y,X} \to 0.$$

(При вычислении среднего члена воспользоваться ассоциативностью и тем, что $A_X \underset{A_X}{\otimes} A_Y = A_Y$.) Она является последовательностью сечений последовательности, выписанной в формулировке леммы 16.7. Нуль слева можно поставить, не нарушая точности, потому что все фигурирующие здесь пучки локально свободны на Y и ранг среднего равен сумме рангов двух крайних (Напоминаем: ранг конормального пучка к Y равен числу элементов регулярной системы уравнений, локально задающих Y, что делает аддитивность очевидной.)

Теперь, пользуясь доказанной теоремой, выясним поведение γ-фильтрации относительно гомоморфизма i_*. Положим $K_{\mathbf{Q}} = K \otimes \mathbf{Q}$.

16.11. Л е м м а. *Пусть $p \geqslant 2$ — фиксированное целое число, $y \in K_{\mathbf{Q}}(Y)$. Следующие два утверждения равносильны:*

а) $y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)$;

б) $\psi^p(y) - p^k(y) \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация а $\Rightarrow$ b уже доказана (даже в кольце $K(Y)$) в предложении 11.8.

Наоборот, пусть выполнено условие б). Пусть m — самое большое целое число, для которого $y \in F^m K_{\mathbf{Q}}(Y)$. Покажем, что предположение $m < k$ приводит к противоречию. Действительно,

$$\psi^p(y) - p^k(y) \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y),$$
$$\psi^p(y) - p^m(y) \in F^{m+1} K_{\mathbf{Q}}(Y),$$

откуда при $m < k$

$$(p^m - p^k)\, y \in F^{m+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$$

и, значит $y \in F^{m+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$, в противоречие с определением m. Лемма доказана.

16.12. П р е д л о ж е н и е. *В прежних обозначениях пусть $F^d K_{\mathbf{Q}}(Y) = 0$ при достаточно больших d. Тогда*

$$i_*(F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)) \subset F^{k+r} K_{\mathbf{Q}}(X),$$

где r — коразмерность вложения $Y \xrightarrow{i} X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предыдущей лемме

$$y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y) \Leftrightarrow \psi^p(y) - p^k y \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi^p(y)\, \theta^p(N) - p^k y \theta^p(N) \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$$

Но $\theta^p(N) - p^r \in F^1 K_{\mathbf{Q}}(Y)$. Поэтому

$$y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow \psi^p_N(y) - p^{k+r} y \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y).$$

Применим теперь убывающую индукцию по k. При достаточно больших k предложение тривиально в силу предложения об обрыве фильтрации (оно, впрочем, несущественно, и его можно было бы обойти, слегка изменив доказательство). Пусть предложение верно для $k + 1$. Тогда

$$y \in F^k K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow \psi^p_N(y) - p^{k+r} y \in F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_*(\psi^p_N(y) - p^{k+r} y) \in F^{k+1+r} K_{\mathbf{Q}}(X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi^p(i_*(y)) - p^{k+r} i_*(y) \in F^{k+r+1} K_{\mathbf{Q}}(X),$$

откуда $i_*(y) \in F^{k+r} K_{\mathbf{Q}}(X)$ в силу леммы 16.11.

16.13. Теперь мы можем объяснить план дальнейшей работы. Пусть $Y \xrightarrow{i} X$ — регулярное вложение коразмерности r. Так как $i_*(F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)) \subset F^{k+r} K_{\mathbf{Q}}(X)$, можно определить гомоморфизм градуированных групп

$$i_*: GK_{\mathbf{Q}}(Y) \to GK_{\mathbf{Q}}(X),$$

повышающий степень на r (здесь $GK_{\mathbf{Q}}(Y) = \bigoplus_k F^k K_{\mathbf{Q}}(Y)/F^{k+1} K_{\mathbf{Q}}(Y)$).

Тем самым по категории (гладких, нётеровых, с обильным пучком) схем и регулярных вложений есть два *ковариантных* функтора: $K_{\mathbf{Q}}$ и $GK_{\mathbf{Q}}$. С другой стороны, для каждой схемы X определен изоморфизм ch: $K_{\mathbf{Q}}(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$ (см. теорему 11.6). Оказывается, однако, что ch не определяет морфизм функторов, потому что он не коммутирует с i_*. Нашей главной целью будет выяснить правило коммутирования: оно составляет содержание «теоремы Римана — Роха — Гротендика» для вложения.

В действительности мы можем проследить за поведением фильтрации и, значит, группы $GK_{\mathbf{Q}}$ при гомоморфизмах прямого образа не только для регулярных вложений, но и, например, для проекций на базу проективизированных расслоений (см. следствие 8.10). Это открывает возможность расширить введенную выше категорию, рассматривая морфизмы, которые являются итерациями регулярных вложений и проекций расслоений на базу. (Нужно, однако, проверить, что сдвиг градуировки относительно f_* не зависит от способа разложения f в произведение вложений и проекций). При этом самую существенную роль в сравнении $f_*\mathrm{ch}$ и $\mathrm{ch} \circ f_*$ будут играть касательные пучки (или пучки дифференциалов), которые вводятся в следующей лекции.

Отметим, наконец, что для гладких квазипроективных многообразий над полем любой проективный морфизм разлагается в произведение регулярного вложения и проекции.

Добавление. Рассмотрим точную последовательность теоремы 15.2. Введем операции $\psi^p_{N'}$ на среднем члене этой точной последовательности, положив

$$\psi^p_{N'}(x, y') = (\psi^p(x), \ \psi^p(y')\,\theta^p(N')).$$

Нетрудно проверить, что $\psi^p_{N'}$ являются гомоморфизмами кольца:

$$\psi^p_{N'}[(x, 0)(0, y')] = \psi^p_{N'}(0, g^* \cdot i^*(x)\, y') = (0, \psi^p(g^* i^*(x)\, y')(1 - l^p)),$$

$$\psi^p_{N'}(x, 0)\,\psi^p_{N'}(0, y') = (0, \psi^p(x_0))(0, \psi^p(y')(1 - l^p)) =$$
$$= (0, g^* \cdot i^* \cdot (\psi^p(x_0)\,\psi^p(y'))(1 - l^p)).$$

Я утверждаю, что с точностью до кручения гомоморфизмы α и β перестановочны с операциями ψ. Проверка опирается на теорему 16.6; для β она тривиальна, для α — состоит из следующих вычислений (все равенства — с точностью до кручения):

$$\psi^p(\alpha(y)) = \psi^p(i_*(y), \ -g^*(y)\,\lambda_{-1}F) = (\psi^p(i_*(y)), \ -\psi^p(g^*(y)\,\lambda_{-1}F)\,\theta^p(l)),$$

$$\alpha(\psi^p_N(y)) = \alpha(\psi^p(y)\,\theta^p(N)) = (i_*(\psi^p(y)\,\theta^p(N)), \ -g^*(\psi^p(y)\,\theta^p(N))\,\lambda_{-1}F),$$

и требуемое сведение получается из-за того, что

$$g^*(\theta^p(N)) = \theta^p(F + l) = \theta^p(F)\,\theta^p(l),$$
$$\theta^p(F)\,\lambda_{-1}(F) = \psi^p(\lambda_{-1}F).$$

Теперь мы можем установить градуированный вариант теоремы 15.2.

Кольцо $GK_{\mathbf{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)}$. Аддитивная группа этого кольца градуирована:

$$(GK_{\mathbf{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)})^{(i)} = F^{i+r} K_{\mathbf{Q}}(Y)/F^{i+r+1} K_{\mathbf{Q}}(Y).$$

Умножение в нем определяется с помощью умножения «начальных форм» и поправочного множителя (см. 15.1):

$$c_r(N) = \gamma^r(N - r) \bmod F^{r+1} K_{\mathbf{Q}}(Y).$$

(Напомним, что $\lambda_{-1}N = \gamma^r(N - r)$.)

Кольцо $GK_{\mathbf{Q}}(Y')(1)_{c_1(N')}$. Определение совершенно аналогично.

Гомоморфизм $G\alpha$ (соответственно $G\beta$) получается из гомоморфизма α (соответственно β) тензорным умножением на $\mathbf{Q}$ и рассмотрением «начальных форм».

16.14. Теорема. *Имеет место точная последовательность градуированных колец*

$$0 \to GK_{\mathbf{Q}}(Y)(r)_{c_r(N)} \xrightarrow{G\alpha} GK_{\mathbf{Q}}(X) \oplus GK_{\mathbf{Q}}(Y)(1)_{c_1(N')} \xrightarrow{G\beta} GK_{\mathbf{Q}}(X') \to 0.$$

Доказательство оставляется читателю (воспользоваться следствием 11.9).

17. Пучок дифференциалов

17.1. Пусть A, B — кольца, B — A — алгебра. Обозначим через $I = I_{B/A}$ ядро гомоморфизма умножения:

$$p: B \underset{A}{\otimes} B \to B, \quad p(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2.$$

Группа I/I^2 имеет естественную структуру $B \underset{A}{\otimes} B/I = B$-модуля. Обозначим этот B-модуль через $\Omega^1_{B/A}$.

Геометрическая интерпретация соответствующего пучка над $\operatorname{Spec} B$ следующая. Схема $\operatorname{Spec}(B \underset{A}{\otimes} B)$ канонически изоморфна $\operatorname{Spec} B \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} \operatorname{Spec} B$, а гомоморфизм p соответствует диагональному отображению

$$\Delta: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} \operatorname{Spec} B.$$

Пучок $\widetilde{I}/\widetilde{I}^2$ поэтому является конормальным пучком к диагонали при этом вложении. Поэтому его естественно рассматривать как кокасательный пучок к $\operatorname{Spec} B$ вдоль слоев морфизма $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

Определим отображение

$$d = d_{B/A}: B \to \Omega^1_{B/A}$$

формулой

$$d(b) = (b \otimes 1 - 1 \otimes b) \bmod I^2.$$

17.2. Л е м м а. 1) *Отображение d является дифференцированием, т. е. удовлетворяет тождествам.*

$$d(b_1+b_2)=db_1+db_2,$$
$$d(b_1b_2)=b_1\,db_2+b_2\,db_1,$$
$$d(f(a))=0, \quad a\in A,$$

где $f\colon A\to B$ — структурный гомоморфизм.

2) *Пусть (b_i) — некоторая система образующих A-алгебры B. Тогда (db_i) составляют систему образующих B-модуля $\Omega^1_{B/A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение проверяется без труда; ограничимся тождеством для $d(b_1b_2)$:

$$b_1b_2\otimes 1-1\otimes b_1b_2=b_1\otimes 1\,(b_2\otimes 1-1\otimes b_2)+1\otimes b_2\,(b_1\otimes 1-1\otimes b_1).$$

(Учесть, что умножение в $\Omega^1_{B/A}$ на b индуцировано умножением на $b\otimes 1$ или на $1\otimes b$ в $B\otimes B$.)

Для доказательства второго утверждения заметим сначала, что

$$\sum b_i\underset{A}{\otimes} b_i'\in I \Longleftrightarrow \sum b_ib_i'=0 \Longleftrightarrow \sum b_i\otimes b_i'=$$
$$=\sum b_i\otimes b_i'-\sum b_ib_i'\otimes 1=0=\sum b_i\otimes 1\,(1\otimes b_i'-b_i'\otimes 1).$$

Отсюда следует, что $\Omega_{B/A}$ как B-модуль порожден элементами вида db при всех $b\in B$. Так как d — дифференцирование, обращающееся в нуль на образе A, то отсюда легко получается требуемое.

17.3. П р и м е р. Пусть $B=A[T_1,\ldots,T_r]$. Тогда $\Omega^1_{B/A}$ — свободный B-модуль, свободно порожденный элементами dT_i.

17.4. П р е д л о ж е н и е. *Для любого дифференцирования $d'\colon B\to M$ кольца B в B-модуль M, обращающегося в нуль на образе A, существует единственный гомоморфизм B-модулей $f\colon \Omega^1_{B/A}\to M$, для которого $d'=f\circ d_{B/A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность f немедленно следует из того, что $d'b=f(db)$ для всех $b\in B$, так что f однозначно определен на системе образующих $\Omega^1_{B/A}$.

Для доказательства существования определим сначала гомоморфизм групп

$$\varphi\colon B\underset{A}{\otimes} B\to M,$$

положив $\varphi(b\underset{A}{\otimes} b')=-b\,d'b'$.

Гомоморфизм обращается в нуль на I^2. Действительно, прежде всего, гомоморфизм φ является гомоморфизмом B-модулей, если действие B на $B\underset{A}{\otimes} B$ определить через $b\to b\otimes 1$. Далее, как было показано выше, элементы $b\otimes 1-1\otimes b$ порождают B-модуль I. Поэтому попарные произведения $(b_1\otimes 1-1\otimes b_1)(b_2\otimes 1-1\otimes b_2)$ порождают B-модуль I^2. Следовательно достаточно проверить, что φ обращается в нуль на них. Действительно,

$$\varphi[(b_1\otimes 1-1\otimes b_1)(b_2\otimes 1-1\otimes b_2)]=b_1\,d'b_2+b_2\,d'b_1-d'(b_1b_2)=0.$$

Поэтому φ индуцирует некоторое отображение $f\colon I/I^2\to M$. Имеем

$$f(db)=\varphi(b\otimes 1-1\otimes b)=d'b,$$

что завершает доказательство.

17.5. С л е д с т в и е. *Пусть $S\subset B$ — мультипликативное множество. Тогда отображение*

$$f\colon \Omega^1_{B_S/A}\to(\Omega^1_{B/A})_S\colon f(d(b_1/b_2))=(b_2\,db_1-b_1\,db^2)/b_2^2$$

определено и является изоморфизмом B_S-модулей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сквозное отображение

$$B\to B_S\xrightarrow{d}\Omega^1_{B_S/A}$$

является дифференцированием. Поэтому оно проводится через некоторый гомоморфизм B-модулей

$$\Omega^1_{B/A}\to\Omega^1_{B_S/A},$$

который в свою очередь индуцирует гомоморфизм B_S-модулей

$$B_S\underset{B}{\otimes}\Omega^1_{B/A}=(\Omega^1_{B/A})_S\to\Omega^1_{B_S/A}.$$

Элементарная проверка показывает, что этот гомоморфизм и отображение f, построенное в формулировке следствия, взаимно обратны.

17.6. Т е о р е м а. *Пусть $f\colon X\to Y$ — морфизм схем. Тогда на X существует однозначно определенный пучок $\Omega^1_{X/Y}$, обладающий следующим свойством: для любых двух открытых аффинных подсхем* $\mathrm{Spec}\,A=V\subset Y$ *таких, что* $f(U)\subset V$

$$\Gamma(U,\Omega^1_{X/Y})=\Omega^1_{B/A}.$$

Доказательство состоит из формальных проверок совместимости с локализациями, основанных на предыдущем результате, и мы его опускаем.

17.7. Рассмотрим теперь следующую ситуацию. Пусть $i\colon Y\to X$ — замкнутое вложение схем. В дифференциально геометрической модели при соблюдении некоторых условий регулярности ограничение на Y касательного пучка к X содержит касательный пучок к Y, а фактором является нормальный пучок к Y. Мы хотим выяснить, в какой мере это переносится на случай схем.

Начнем с рассмотрения локальной ситуации.

Пусть B — некоторая A-алгебра, I — B-идеал. Тогда B/I также является A-алгеброй, и мы имеем относительные (над $\mathrm{Spec}\,A$) кокасательные пучки к $\mathrm{Spec}\,B$ и $\mathrm{Spec}\,B/I$, представленные модулями $\Omega^1_{B/A}$ и $\Omega^1_{(B/I)/A}$. С другой стороны, конормальный пучок вложения $\mathrm{Spec}\,B/I\to\mathrm{Spec}\,B$ представлен B/I-модулем I/I^2. Двойственное к классическому утверждение выглядит так:

17.8. П р е д л о ж е н и е. *Существует точная последовательность B/I-модулей*

$$I/I^2\xrightarrow{\delta}B/I\underset{B}{\otimes}\Omega^1_{B/A}\xrightarrow{u}\Omega^1_{(B/I)/A}\to 0;$$

гомоморфизмы δ и u совместимы с локализацией по B.

Доказательство. Определение гомоморфизма δ. Пусть $\bar{e} \in I/I^2$ представлен элементом $e \in I$; положим

$$\delta\bar{e} = 1 \otimes d_{B/A}e.$$

Результат не зависит от выбора e, потому что если $\bar{e} = 0$, т. е. $e \in I^2$, то $de \in Id_{B/A}I$, так что $1 \otimes d_{B/A}e = 0$. То, что δ является гомоморфизмом групп, очевидно; совместимость с действием B/I следует из того, что для любого элемента $\bar{b} = b \bmod I$ имеем

$$\delta(\bar{b}\bar{e}) = 1 \underset{B}{\otimes} d(be) = 1 \underset{B}{\otimes} (e\,db + b\,de) = \bar{b} \underset{B}{\otimes} de = \bar{b}\delta(\bar{e}).$$

Определение гомоморфизма u. Отображение $d'\colon B \to \Omega^1_{(B/I)/A}$, для которого

$$d'b = d_{(B/I)/A}(b \bmod I)$$

очевидно, является дифференцированием над A. Поэтому (п. 17.4) его можно пропустить через некоторый однозначно определенный гомоморфизм B-модулей $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{(B/A)/A}$. Так как второй модуль аннулируется умножением на I, этот гомоморфизм определяет гомоморфизм B/I-модулей:

$$B/I \otimes \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{(B/I)A},$$

который по определению и есть u. Легко видеть, что

$$u(1 \underset{B}{\otimes} d_{B/A}b) = d_{(B/I)/A}(b \bmod I),$$

и, следовательно, u является эпиморфизмом.

Проверка того, что $u \circ \delta = 0$:

$$u \circ \delta(\bar{e}) = u(1 \otimes de) = d(e \bmod I) = 0.$$

Точность в среднем члене. Построим гомоморфизм

$$v\colon \Omega^1_{(B/I)/A} \to (B/I \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A})/\operatorname{Im}\delta$$

так, что u и v будут взаимно обратны. С этой целью положим для $\bar{b} = b \bmod I$

$$v(d\bar{b}) = 1 \otimes db \bmod \operatorname{Im}\delta.$$

Независимость от выбора b следует из того, что $1 \otimes de \in \operatorname{Im}\delta$ при $e \in I$. Так как

$$u \circ v(db) = d\bar{b},$$
$$v \circ u(1 \otimes db \bmod \operatorname{Im}\delta) = 1 \otimes db \bmod \operatorname{Im}\delta,$$

а u является гомоморфизмом модулей, отсюда следует требуемое.

Глобализация нашего результата дает

17.9. Предложение. *Пусть $i\colon Y \to X$ — замкнутое вложение S-схем, где S — некоторая базисная схема* (Spec A *в предыдущем предложении*). *Пусть $\mathcal{J}$ — пучок идеалов на X, определяющий Y. Тогда существует точная последовательность*

$$i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \xrightarrow{\delta} i^*(\Omega^1_{X/S}) \to \Omega^1_{Y/S} \to 0.$$

17.10. Определение. *Вложение $i\colon Y \to X$ называется правильным (над S), если выполнены следующие два условия:*

а) *i — регулярное вложение,*

б) $\operatorname{Ker}\delta = 0$.

17.11. *Пример регулярного, но неправильного вложения.*

Пусть $X = \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$, $Y = \operatorname{Spec}\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, где p — простое число; $S = \operatorname{Spec}\mathbf{Z}$. Тогда $\Omega^1_{X/S} = 0$ и $\Omega^1_{Y/S} = 0$; между тем $i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ представлен одномерным линейным пространством на $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

В этом примере проявляется «невозможность дифференцировать в арифметическом направлении».

В заключение мы вычислим пучок Ω^1 на проективизированном расслоении. Пусть X — некоторая неприводимая схема, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок конечного ранга на X.

17.12. Предложение. *Пусть $f\colon \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ — стандартная проекция. Тогда существует точная последовательность*

$$0 \to \Omega^1_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X} \to f^*(\mathcal{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \to 0,$$

в которой гомоморфизм $f^*(\mathcal{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}}(\mathcal{E})$ получается скручиванием из гомоморфизма, определенного в предложении 4.9.

Замечание. Этот результат проясняет роль пучка $\mathcal{F}$ на Y' в теории моноидального преобразования (п. 13.6):

$$\mathcal{F} = \Omega^1_{Y'/Y}(-1).$$

Доказательство. Построим интересующую нас точную последовательность локально по базе: совместимость со склеиваниями проверяется без труда.

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{E} = \widetilde{E}$, где E — свободный A-модуль, свободно порожденный элементами $T_0, \ldots, T_r \in E$. Пусть

$$f^*(T_i) \in \Gamma(\mathbf{P}(\mathcal{E}), f^*(\mathcal{E}))$$

их прообразы над $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. Полагая

$$t_{ij} = \frac{T_j}{T_i} \in S_A(E)_{(T_i)},$$

имеем

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \bigcup_{i=0}^{r} U_i,$$

$$U_i = D_+(T_i) = \operatorname{Spec} A[t_{i0}, t_{i1}, \ldots, t_{ir}].$$

Пучок $f^*(\mathcal{E})|_{U_i}$ порождается сечениями $f^*(T_j)|_{U_i}$ $(j = 0, \ldots, r)$, которые склеиваются очевидным образом.

Пучок $O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1)|_{U_i}$ изоморфен $O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}|_{U_i}$. Пусть $s_i \in O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1)|_{U_i}$ — прообраз единичного сечения структурного пучка. Известно, что локальные изоморфизмы можно выбрать таким образом, что

$$s_i|_{U_i \cap U_k} = t_{ik}s_k|_{U_k \cap U_i}.$$

Положим теперь

$$T_{ij} = f^*(T_j) \otimes s_i \in \Gamma(U_i, f^*(\mathcal{E})(-1)),$$
$$j = 0, \ldots, r.$$

Пучок $f^*(\mathscr{E})(-1)|_{U_i}$ порожден этими сечениями; склеиваются они на $U_i \cap U_k$ с помощью отождествления

$$T_{ij}|_{U_i\cap U_k} = t_{ik}T_{kj}|_{U_k\cap U_i} \quad (j=0, \ldots, r).$$

Стандартный гомоморфизм $f^*(\mathscr{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}$ на U_i переводит сечение T_{ij} в t_{ij}. Отсюда следует, что его ядро над U_i свободно порождено сечениями

$$T_{ij} - t_{ij}T_{ii}, \quad j \neq i.$$

С другой стороны, ограничение пучка $\Omega^1_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}$ на U_i свободно порождено сечениями dt_{ij}, $j \neq i$. Определим локальный изоморфизм

$$\varphi_i\colon \Omega^1_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}|_{U_i} \to \mathrm{Ker}\,(f^*(\mathscr{E})(-1) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}),$$

положив $\varphi_i(dt_{ij}) = T_{ij} - t_{ij}T_{ii}$. Покажем, что на $U_i \cap U_k$ гомоморфизмы φ_i и φ_k согласованы. Действительно,

$$\varphi_i(dt_{ij})|_{U_i\cap U_k} = T_{ij}|_{U_i\cap U_k} - t_{ij}T_{ii}|_{U_i\cap U_k} = t_{ik}T_{kj}|_{U_k\cap U_i} - t_{ik}t_{ij}T_{ki}|_{U_k\cap U_i}.$$

С другой стороны,

$$\varphi_k(dt_{ij})|_{U_k\cap U_i} = \varphi_k\left(d\left(\frac{t_{kj}}{t_{ki}}\right)\right)\Big|_{U_k\cap U_i} = \varphi_k\left(\frac{t_{ki}\,dt_{kj} - t_{kj}\,dt_{ki}}{t_{ki}^2}\right)\Big|_{U_k\cap U_i} =$$

$$= \frac{1}{t_{ki}}T_{kj}|_{U_k\cap U_i} - \frac{t_{kj}}{t_{ki}}T_{kk}|_{U_k\cap U_i} - \frac{t_{kj}(T_{ki} - t_{ki}T_{kk})}{t_{ki}^2}\Big|_{U_k\cap U_i}$$

Сравним коэффициенты при T в правых частях двух последних формул.

При T_{kj} они совпадают, потому что $t_{ki} = t_{ik}^{-1}$. При T_{ki} — потому что $t_{ik}t_{ij} = \frac{t_{kj}}{t_i^2}$.

Наконец, при T_{kk} коэффициенты справа и слева равны нулю. Предложение доказано.

18. Теорема Римана—Роха для вложений

18.1. Пусть $i\colon Y \to X$ — регулярное вложение коразмерности r. В этой лекции будет доказано, что i_* коммутирует с ch с точностью до поправочного множителя по аналогии с результатом теоремы 16.6. Этот поправочный множитель определяется следующими свойствами.

18.2. Определение-лемма. *Можно однозначно определить для всех схем X отображения*

$$\mathrm{Td}\colon K(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

(18.2.1) $\mathrm{Td}(l) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{i-1}}{i!}\right)^{-1}$, $x = c_1(l)$ *для классов обратимых пучков* l,

(18.2.2) $\mathrm{Td}\circ f^* = f^*\circ \mathrm{Td}$ для всех морфизмов $f\colon X \to Y$,

(18.2.3) $\mathrm{Td}(x_1 + x_2) = \mathrm{Td}(x_1)\,\mathrm{Td}(x_2)$.

Доказательство стандартное (ср. п. 16.2), и мы оставляем его читателю.

18.3. Напомним теперь, что отображение ch: $K_{\mathbf{Q}}(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$ устанавливает изоморфизм этих колец, с помощью которого различные структуры можно перенести из одного кольца в другое.

В частности, можно определить операции ψ^p: $GK_{\mathbf{Q}}(X) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$, полагая $\psi^p(chx) = ch\psi^p(x)$. Из определения и ранее доказанных результатов немедленно следует, что ψ^p действует на $G^iK_{\mathbf{Q}}(X)$, как умножение на p^i.

Мы можем указать теперь связь операции Td («класс Тодда») с операцией θ^p.

18.4. Лемма. $ch\theta^p(N) = p^r\cdot \mathrm{Td}\,\check{N}\,(\mathrm{Td}\,\check{N}))^{-1}$, где N — класс пучка, двойственного к $\mathscr{N}$; $r = \varepsilon(N)$.

Доказательство. Обе части равенства мультипликативны и перестановочны с f^*. Поэтому достаточно проверить, что они совпадают на классах обратимых пучков l. Действительно, при $p \geqslant 1$

$$ch\theta^p(l) = ch(1 + l + \ldots + l^{p-1}) = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(p-1)x},$$

где $x = c_1(l)$. С другой стороны, $\mathrm{Td}\,l^{-1}$ получается подстановкой $-x$ в степенной ряд $\frac{X}{1-e^{-X}}$, так что правая часть интересующей нас формулы получается подстановкой x в ряд

$$p\cdot\frac{-X}{1-e^X}\cdot\frac{1-e^{pX}}{-pX} = 1 + e^X + \ldots + e^{(p-1)X},$$

что доказывает требуемое.

18.5. Теорема Римана—Роха для вложения. *Пусть $i\colon Y \to X$ — правильное вложение коразмерности r, $N \in K(Y)$ — класс конормального пучка. Тогда для любого элемента $y \in K(Y)$ имеем*

$$ch(i_*(y)) = i_*(chy\cdot \mathrm{Td}(-\check{N})).$$

18.6. Замечание. Предположим, что для некоторой базисной схемы S вложение i является *правильным над* S (см. п. 17.10). Положим

$$\omega_X = cl(\Omega^1_{X/S}), \quad \omega_Y = cl(\Omega^1_{Y/S}).$$

Из предложения 17.9 следует тогда, что $N = i^*\omega_X - \omega_Y$, откуда

$$\mathrm{Td}(-\check{N}) = \mathrm{Td}\,\omega_Y\,(i^*\,\mathrm{Td}\,\check{\omega}_X)^{-1}.$$

По формуле проекции

$$i_*(chy\cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_Y\,(i^*\,\mathrm{Td}\,\check{\omega}_X)^{-1}) = i_*(chy\cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_Y)\,(\mathrm{Td}\,\check{\omega}_X)^{-1},$$

откуда, пользуясь теоремой 18.4, получаем следующий ее вариант для *правильных вложений:*

$$ch(i_*(y))\,\mathrm{Td}\,\check{\omega}_X = i_*(chy\cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_Y).$$

18.7. Доказательство. Положим $T = ch^{-1}(\mathrm{Td}(-\check{N}))$ и $y = Tx$. Тогда формула, которую мы хотим доказать, приобретает вид

$$ch(i_*(xT^{-1})) = i_*(chx).$$

Прежде всего заметим, что $T \equiv 1 \bmod F^{-1}K(X)$. Далее, если $ch\,x = ch_mx + ch_{m+1}x + \ldots$, где $ch_ix \in G^iK(X)$, имеем

$$ch_mx = (x - \varepsilon(x)) \bmod F^{m+1}K(X).$$

Это немедленно следует из определения ch для классов обратимых пучков и из принципа расщепления в общем случае. Поэтому, если $x \in F^m K(X)$, имеем по меньшей мере сравнение

$$ch(i_*(xT^{-1})) \equiv i_*(chx) \bmod (\bigoplus_{i=m+1}^{\infty} G^i K(X)).$$

Для того чтобы доказать точное равенство, достаточно ограничиться случаем, когда элемент chx однороден, $chx \in G^m K(X)$. Тогда $i_*(chx)$ также однороден степени $m+r$ и точное равенство будет установлено, если мы докажем, что и элемент $ch(i_*(xT^{-1}))$ однороден степени $m+r$.

Иначе говоря, нужно доказать следующую импликацию:

$$\psi^p(chy) = p^m chy \Rightarrow \psi^p(ch(i_*(yT^{-1}))) = p^{m+r} ch(i_*(yT^{-1})),$$

или равносильную импликацию

$$\psi^p y = p^m y \Rightarrow \psi^p(i_*(yT^{-1})) = p^{m+r}(i_*(yT^{-1})).$$

Имеем по теореме 16.6

$$\psi^p(i_*(yT^{-1})) = i_*(\psi^p(yT^{-1})\,\theta^p(N)) = p^m i_*(y\psi^p(T^{-1})\,\theta^p(N)).$$

Поэтому все будет доказано, если мы установим, что

$$p^r \cdot T^{-1} = \psi^p(T^{-1})\,\theta^p(N),$$

а это немедленно следует из леммы 18.4, если применить к обеим частям равенства гомоморфизм ch и учесть, что

$$chT = \mathrm{Td}(-\check{N}).$$

19. Теорема Римана—Роха для проекции

19.1. Мы продолжаем осуществлять программу, набросок которой был приведен в конце раздела 16.

Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ над связной схемой X, g: $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — стандартная проекция. Докажем теорему Римана — Роха для морфизма g. Нуждается в вычислении гомоморфизм Gg_*: $GK_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}(\mathscr{E})) \to GK_{\mathbf{Q}}(X)$; так как (следствие 8.10)

$$g_*(F^i K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))) \subset F^{i-r} K(X),$$

мы определим Gg_* как гомоморфизм, присоединенный к g_* и *понижающий степени на r.*

Теперь мы можем сформулировать результат, аналогичный теореме 18.5.

19.2. Т е о р е м а Р и м а н а — Р о х а д л я п р о е к ц и и. *Для любого элемента $y \in K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ имеем*

$$chg_*(y) = Gg_*(chy \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}),$$

где

$$\omega_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X} = cl(\Omega^1_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, левая и правая части формулы 19.2 аддитивны по y. Далее, из формулы проекции немедленно следует, что если теорема верна для y, то она верна для любого элемента вида $g^*(x) \cdot y$, где $x \in K(X)$. Поэтому *ее достаточно проверить для какой-нибудь системы образующих $K(X)$-модуля $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, например для элементов l^k, $-r \leqslant k \leqslant 0$, где $l = cl(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1))$.*

Вычислим отдельно левую и правую части основной формулы для этой системы образующих.

В ы ч и с л е н и е л е в о й ч а с т и. Имеем по определению

$$g_*(l^k) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j cl(R^j g_*(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(k)).$$

Согласно теореме Серра при $k<0$ все члены этой суммы нулевые, а при $k=0$ отличен от нуля лишь член $cl(g_*(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})})) = 1$. Следовательно,

$$chg_*(l^k) = \begin{cases} 0 & \text{при } -r \leqslant k \leqslant -1, \\ 1 & \text{при } k=0. \end{cases}$$

В ы ч и с л е н и е п р а в о й ч а с т и. а) В ы ч и с л е н и е к о л ь ц а $GK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Рассмотрим формальное разложение многочлена Чжена пучка $\mathscr{E}$ (см. п. 11.3):

$$c_t(\mathscr{E}) = \sum_{i=0}^{r+1} c_i(\mathscr{E})\, t^i = \prod_{i=1}^{r+1} (1 + a_i t).$$

Положим еще $x = c_1(l) = l - 1 \bmod F^2 K_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}(\mathscr{E})) \in G^1 K_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Так как элемент l удовлетворяет тождеству (п. 8.9)

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \gamma^i(e-r-1)(l-1)^{r+1-i} = 0,$$

где $e = cl(\mathscr{E})$, то элемент x в кольце $GK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i c_i(e)\, x^{r+1-i} = 0,$$

т. е.

$$\prod_{i=1}^{r+1} (x - a_i) = 0.$$

В силу теоремы 8.8 находим отсюда, что кольцо $GK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ изоморфно фактор-кольцу

$$GK(X)[T]/(\prod_{i=1}^{r+1}(T - a_i)),$$

где $T \bmod \prod_{i=1}^{r+1}(T - a_i)$ отождествляется с x.

б) В ы ч и с л е н и е $\mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}$. По предложению 17.12

$$\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X} = g^*(\check{e}(1)) - 1.$$

Поэтому в силу формулы из доказательства предложения 11.4

$$c_t(\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X}) = \prod_{i=1}^{r+1} (1 + (x - a_i)\, t),$$

откуда

$$\mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})/X} = \prod_{i=1}^{r+1} \frac{x - a_i}{1 - e^{-x+a_i}}.$$

в) Вычисление Gg_*. В силу аддитивности и линейности относительно умножения на элементы из $g^*(GK(X))$ достаточно вычислить Gg_* на элементах x^k, $0 \leqslant k \leqslant r$.

Результат следующий:

$$Gg_*(x^k) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k < r, \\ 1 & \text{при } k = r. \end{cases}$$

Действительно, g_* снижает степень на r, а x^k принадлежит в точности $G^k K(\mathbb{P}(\mathscr{E}))$ в силу теоремы 8.8. Поэтому при $k < r$ утверждение очевидно. При $k = r$ в силу определения g_* имеем

$$Gg_*(x^r) = \varepsilon(f_*((l-1)^r)) = \varepsilon\Big(\sum_{i=0}^{r}(-1)^i f_*(l^i)\binom{r}{i}\Big) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r+i}{i}.$$

Так как

$$(1-t)^r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}t^{r-i}, \quad \frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k}{k}t^k,$$

сумма $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\binom{r+i}{i}$ равна коэффициенту при t^r в разложении $\frac{1}{1-t}$, т. е. 1.

Собирая вместе результаты вычислений, получаем

$$Gg_*(ch\, l^k \cdot \mathrm{Td}\, \check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) = Gg_*\Big(e^{kx}\prod_{i=1}^{r+1}\frac{x-a_i}{1-e^{-x+a_i}}\Big).$$

Справа стоит коэффициент при x^r разложения величины $e^{kx}\prod$ по степеням x.

Поэтому, для того чтобы проверить формулу Римана — Роха для морфизма g, достаточно установить следующую чисто формальную лемму.

19.3. Лемма. *Рассмотрим кольцо* $\mathbb{Q}[[A_1, \ldots, A_{r+1}]][T]/\big(\prod_{i=1}^{r+1}(T-A_i)\big)$, *где* (A_i), T *— независимые переменные. Класс формального ряда* $e^{kT}\prod_{i=1}^{r+1}\frac{T-A_i}{1-e^{-T+A_i}}$ *в этом кольце представлен некоторым однозначно определенным многочленом от* T *степени* r *с коэффициентами в* $\mathbb{Q}[[A_1, \ldots, A_{i+1}]]$.

Тогда старший коэффициент этого многочлена равен 0 *при* $-r \leqslant k < 0$ *и* 1 *при* $k = 0$.

К сожалению, я не знаю прямого доказательства этой леммы в общем случае.

В семинаре Гротендика она доказана следующим окольным путем: сначала устанавливается утверждение, более слабое, чем лемма 19.3. Из него непосредственно следует теорема Римана — Роха для проекций g: $\mathbb{P}(\mathscr{E}) \to X$, где $\mathscr{E}$ *— свободный пучок*. Комбинируя затем уже доказанные формулы Римана — Роха для вложения и проекции, устанавливается полная ее форма для *алгебраических схем над полем*, откуда затем легко получится лемма 19.3 в полной общности.

Мы ограничимся проверкой частного случая.

Ослабление леммы 19.3, которое легко доказать непосредственно, формулируется так:

19.4. Лемма. *Утверждение леммы* 19.3 *верно по модулю идеала* $(A_1, \ldots, A_{r+1})$.

(Иначе говоря, вместо коэффициента при x^r мы рассматриваем лишь его свободный член.)

Доказательство. Мы можем положить $A_1 = A_2 = \ldots = A_{r+1} = 0$ в формулировке леммы. Тогда придется рассматривать формальный ряд $e^{kT}\left(\frac{T}{1-e^{-T}}\right)^{r+1}$ и его представителя в кольце $\mathbb{Q}[T]/(T^{r+1})$. Иначе говоря, нужно доказать, что коэффициент при T^r у этого ряда равен 0 при $-r \leqslant k < 0$ и 1 при $k = 0$.

Этот коэффициент равен вычету при $T = 0$ дифференциала $\frac{e^{kT}dT}{(1-e^{-T})^{r+1}}$. Подстановка $u = 1 - e^{-T}$ превращает этот дифференциал в $\frac{(1-u)^{-k-1}\,du}{u^{r+1}}$, для которого результат очевиден.

19.5. Следствие. *Теорема* 19.2 *верна, если* $c_t(\mathscr{E}) = 1$ (*в частности, если* $\mathscr{E}$ *— свободный пучок* $O_X^{(r+1)}$).

Теперь сформулируем теорему Римана — Роха для композиции регулярного вложения и проекции: это и будет ее самый общий вид.

19.6. Теорема Римана — Роха. *Пусть* f: $Y \to X$ *— морфизм, который представляется в виде* $Y \xrightarrow{i} \mathbb{P}(\mathscr{E}) \xrightarrow{g} X$, *где* i *— регулярное вложение, а* $\mathscr{E}$ *— локально свободный пучок. Если формула Римана — Роха верна для* g, *то для всех* $y \in K(Y)$ *имеем*

$$chf_*(y) = Gf_*(chy \cdot \mathrm{Td}(i^*(\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N})),$$

где N *— класс конормального пучка к* Y *в* $\mathbb{P}(\mathscr{E})$.

Доказательство. Подставив в формулу

$$ch(g_*(z)) = Gg_*(chz \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X})$$

элемент $z = i_*(y)$. Тогда получим

$$chf_*(y) = Gg_*(chi_*(y) \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) = Gg_*(Gi_*(chy \cdot \mathrm{Td}(-\check{N})) \cdot \mathrm{Td}\,\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) =$$
$$= G(g_* i_*)(chy \cdot \mathrm{Td}(-\check{N}) \cdot \mathrm{Td}\, i^*\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) = Gf_*(chy \cdot \mathrm{Td}(i^*(\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N})),$$

что и требовалось доказать.

Частный случай. Пусть X, Y — проективные алгебраические многообразия над полем k, f: $Y \to X$ — проективный морфизм. Тогда его всегда можно представить в виде произведения $Y \to \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to X$, где $\mathscr{E}$ — свободный пучок над X, например подходит разложение

$$Y \longrightarrow \mathbb{P}_k^r \times X \xrightarrow{p_2} X,$$

где i: $Y \to \mathbb{P}^r$ — какое-нибудь замкнутое вложение Y, а p_2 — проекция.

19.7. В формулировке теоремы 19.6 правая часть априори зависит от разложения f в произведение вложения i и проекции g. Эта зависимость проявляется в двух местах: в определении элемента $i^*(\check{\omega}_{\mathbb{P}(\mathscr{E})/X}) - \check{N}$ и в определении гомоморфизма Gf_*, точнее, сдвига градуировки, которым мы должны пользоваться для вычисления Gf_*. В действительности ни то, ни другое от выбора разложения не зависит. (Достаточно проверить независимость $i^*(\check{\omega}_{P(\mathscr{E})/X}) - \check{N}$, потому что градуировка сдвигается в точности на ранг этого элемента.) Мы не станем этого проверять, ибо для всех практических надобностей формулировка 19.6 достаточна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Grothendieck, en collaboration avec J. Dieudonné, Eléments de Géometrie Algébrique, Publications Mathématiques de IHES, гл. I, № 4 (1960); гл. II, № 8 (1961), гл. III, 1-я часть, № 11 (1961); гл. III, 2-я часть, № 17 (1963), гл. IV, 1-я часть, № 20 (1964) и т. д.

[2] Ю. И. Манин, Лекции по алгебраической геометрии, изд. МГУ, 1968.

[3] Д. Мамфорд, Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М., «Мир», 1968.

[4] Дж. Дьедонне, Алгебраическая геометрия, Сб. перев. «Математика» 9 : 1 (1965), 54—126.

[5] Ж. П. Серр, Локальная алгебра и теория кратностей, Сб. перев. «Математика» 7 : 5 (1963), 3—94.

[6] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Berlin, Springer, 1966.

[7] А. Борель, Ж. П. Серр, Теорема Римана — Роха, Сб. перев. «Математика», 5 : 5 (1961), 17—54.

[8] A. Grothendieck, Classes de faisceaux et théorème de Riemann—Roch (preprint), 1957.

[9] Théorie globale des intersections et théorème de Riemann—Roch, Séminaire dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Jllusie (SGA 6 (1966—1967), IHES).

[10] М. Атья, Лекции по K-теории, М., «Мир», 1967.

[11] Р. Ботт, K-теория, Сб. перев. «Математика», 11 : 2 (1967), 32—56; 11 : 3 (1967), 3—36.

[12] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[13] A. Nobile, O. E. Villamayor, Sur la K-théorie algébrique, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4 серия, 1 (1968), 581—616.

[14] J. Tate (redigée par J. R. Joly), Sur la première demonstration par Gauss de la loi de réciprocité, Université de Grenoble, Colloque de Mathématiques pures, 1968.

ПОДП. К ПЕЧАТИ 6/1-71 Г. Л-115002. Ф. 60x90/16
БУМ. ОФС. № 2. ФИЗ.П.Л. 5,5. УЧ.-ИЗД. Л. 6,0.
ЗАКАЗ 2037. ТИРАЖ 2500. ЦЕНА 16 КОП.

ОТПЕЧАТАНО НА РОТАПРИНТАХ В ТИП. ИЗД. МГУ
МОСКВА, ЛЕНГОРЫ.