Настоящее пособие печатается стереотипно на фоторотапринтах со статьи в журнале АН СССР «Успехи математических наук», т. XXIV, вып. 5 (149), «Наука», 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . 3
Литературные указания . . . 5
1. Группы Гротендика $K_{.}(X)$ и $K^{\cdot}(X)$ . . . 6
2. $K(X)$ и циклы . . . 11
3. Самопересечение и внешние степени . . . 14
4. Проективизированные расслоения . . . 20
5. Вычисление $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ и принцип расщепления . . . 23
6. Вычисление $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ (окончание) . . . 27
7. $K(X)$ как ковариантный функтор . . . 31
8. γ-фильтрация кольца $K^{\cdot}(X)$ . . . 36
9. Фильтрация и размерность . . . 41
10. Связь между $K(X)$ и Pic X . . . 44
11. Классы Чженя и операции Адамса . . . 48
12. Структура моноидальных преобразований . . . 52
13. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании . . . 55
14. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании (продолжение) . . . 61
15. Поведение $K(X)$ при моноидальном преобразовании (окончание) . . . 64
16. Операции Адамса и гомоморфизм прямого образа . . . 68
17. Пучок дифференциалов . . . 75
18. Теорема Римана — Роха для вложений . . . 80
19. Теорема Римана — Роха для проекции . . . 82
Литература . . . 86

Введение

В 1966—1968 гг. автор прочел на механико-математическом факультете МГУ двухгодовой курс лекций.

Курс был задуман как введение в алгебраическую геометрию; записки его первой части [2] опубликованы годом раньше. Мне хотелось не только представить список некоторых основных понятий теории схем, но также показать, как они работают в более содержательных вопросах. Я полагал, что удачным примером такой содержательной математики является теория Гротендика колец K, приводящая в конце концов к доказательству теоремы

Римана — Роха. С одной стороны, она позволяет продемонстрировать технику вычислений с когерентными пучками, не требуя слишком детального изучения локальных свойств морфизмов или проблем представимости функторов (на что у меня не было времени). С другой стороны, она наиболее близка к классической проблематике и явно открыта для дальнейшего прогресса. Будучи фундаментом «численных методов» в алгебраической геометрии нётеровых схем, K-теория доставляет необходимый аппарат для исследования структуры колец Чжоу, задач об алгебраичности циклов или проблем бирациональной геометрии. Эта теория представлена в предлагаемых записках лекций второго года. Читатель, для которого лекции [2] окажутся недоступными, сможет понимать эти записки, ознакомившись с литературой, указанной в п. а) (см. в особенности [3], [4]).

Все же идейно обе части курса составляют единое целое. Я хотел изложить весь материал с подробными и полными доказательствами; к сожалению, этот идеал не был достигнут. Первую часть следовало бы дополнить некоторыми сведениями из теории размерности, гомологической алгебры и теории регулярных колец; в лекциях Серра о кратностях пересечений [5] есть все необходимое. Во второй части опущены некоторые технические подробности, в основном из второй главы «Оснований» Гротендика [1].

Кроме предлагаемых записок, сейчас существует три изложения K-теории Гротендика в контексте схем.

Первое из них — статья Бореля — Серра (см. [7]). Второе — неопубликованный препринт Гротендика [8], датированный 1957 г. и дающий другой вариант доказательства теоремы Римана — Роха, годный лишь для характеристики нуль, но приводящий к более точным результатам. Наконец, этой теории был посвящен семинар Гротендика 1966—1967 гг. (SGA 6) в Институте высших исследований [9].

Первые два изложения относились к случаю проективных неособых многообразий над полем. В семинаре теория была значительно обобщена. Основные ее результаты распространены на нётеровы схемы, не обязательно регулярные. В отчете Бореля — Серра два главных момента требуют изменений:

а) Определение колец Чжоу, которые служат областью значений теории характеристических классов.

Действительно, теория колец Чжоу для нётеровых схем не построена.

б) Определение кольца $K(X)$.

В самом деле, если отбросить условие регулярности схемы, то группы K, построенные для категории всех когерентных пучков и подкатегории локально свободных пучков перестают совпадать. Это немедленно приводит к затруднениям, если мы одновременно хотим, чтобы $K(X)$ было кольцом и обладало структурой ковариантного функтора. Определение умножения хорошо вводится для «локально свободной» группы K, а прямой образ — для «когерентной» группы.

В семинаре Гротендика первое затруднение обходится следующим образом: роль кольца Чжоу $A(X)$ играет кольцо, присоединенное к $K(X)$ относительно некоторой специальной «γ-фильтрации» (см. раздел 8). Это оправдывается тем, что для неособых многообразий над полем кольца $A(X)$ и $GK(X)$ действительно изоморфны с точностью до кручения, а теория «характера Чженя» ch все равно убивает кручение.

Второе, гораздо более серьезное затруднение, преодолевается введением нового определения $K(X)$, использующего «производные категории» Вердье и связанную с ними новомодную гомологическую алгебру. Изложение необходимой техники *ab ovo* потребовало бы по крайней мере удвоения объема этих лекций. По этой причине я ограничился здесь рассмотрением регулярных нётеровых схем.

В остальном доказательства близки к тем, которые изложены в записках [9], так что эту статью можно рассматривать как «дайджест» семинара Гротендика.

Два исключения, возможно, заслуживают быть отмеченными.

а) Вычисление Tor в разделах 3 (теорема 3.5) и 13 (предложение 13.8) производится прямым методом, без использования теоремы об умножениях в Tor.

б) При изучении фильтрации в $K(X)$, ее поведения относительно прямого образа и в доказательстве теоремы Римана — Роха для вложения я пользуюсь операциями Адамса ψ вместо операций Гротендика λ. В частности, вместо гротендиковских $\lambda^p(N, x)$ появляются «каннибальские характеристические классы» топологов $\theta^p(N)$ (раздел 16), что позволяет обойтись без общей теории λ-колец и довольно значительно сокращает изложение.

Как и в первой части, я старался разбирать примеры и указывать мотивировки, чтобы помочь читателю ориентироваться в этом бравом новом мире.

Я глубоко признателен А. Бельскому за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Литературные указания

Прилагаемый в конце статьи список литературы никак не претендует на полноту: отобраны работы, по возможности доступные и обобщающие материал. Приводимая в них библиография позволит читателю двигаться дальше.

а) Общие сведения о схемах. К этому разделу относятся работы [1] — [5]. Работа [1] — основной источник и справочник по теории схем, чрезвычайно подробный и объемистый. Для понимания наших лекций с избытком достаточно знакомства с двумя главами [1].

Лекции 3—10 из работы [3] также дают сжатый, но очень содержательный обзор почти всех фактов, которые необходимы для понимания настоящей статьи.

В курсе лекций [5] нет упоминания о схемах, но локальная теория кратностей пересечений, развитая в нем, послужила отправной точкой для введения колец K Гротендика.

б) Теорема Римана — Роха. Сведения о теореме Римана — Роха читатель найдет в работах [6] — [9]. Заметим, что в книге [6] впервые была доказана теорема Римана — Роха в алгебраической геометрии топологическими средствами. В приложении, написанном Шварценбергером, содержится обзор некоторых дальнейших результатов, в частности по K-теории, возникшей после первой публикации книги Хирцебруха.

в) Топологическая K-теория. К этому разделу относятся лекции [10] и [11].

г) Другие варианты алгебраической K-теории. К этому разделу относятся работы [12] — [14]. Из них фундаментальная книга [12] подводит итог ряду исследований Басса и других авторов по теории функторов K_0 и K_1 на категории колец. Отметим, что для схем неизвестно даже удовлетворительного определения K_1. В работе [13] содержится попытка ввести алгебраический аналог надстройки и дать определение функторов K_i для всех i на категории колец. Пока при $i \geqslant 2$ нет общепринятого определения. Еще один вариант определения K_2 дан в записках семинара Милнора, пока неопубликованных. Он связан с интересными арифметическими вопросами; см., в частности, работу [14].

1. Группы Гротендика $K_{\cdot}(X)$ и $K^{\cdot}(X)$

1.1. В первой части этого курса ([2], 25) была введена группа Гротендика $K(X)$, где X — нётерова схема. Эта группа классифицирует «аддитивные функции» от когерентных пучков. Ее изучение должно привести к лучшему пониманию специальной аддитивной функции — характеристики Эйлера — Пуанкаре.

Там же было доказано, что для проективного пространства над полем группа $K(\mathbf{P}^r)$ порождена уже классами локально свободных пучков (и настолько мала, что может быть эффективно вычислена).

Цель этого раздела — доказать аналогичное утверждение в более общей ситуации. Попутно мы выясним, почему группа $K(\mathbf{P}^r)$ оказалась кольцом ([2], 25.12).

В дальнейшем все схемы, если не оговорено обратное, предполагаются нётеровыми.

1.2. Пусть $\mathscr{S}$ — категория когерентных пучков на X, $\mathscr{L}$ — ее полная подкатегория локально свободных пучков. Обозначим через $\mathbf{Z}[\mathscr{S}]$ (соответственно $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$) свободную абелеву группу, порожденную классами $[\mathscr{F}]$ (с точностью до изоморфизма) пучков $\mathscr{F}$ и $\mathscr{S}$ (соответственно $\mathscr{L}$).

Для каждой точной последовательности

$$0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$$

пучков из $\mathscr{S}$ (соответственно $\mathscr{L}$) образуем элемент $[\mathscr{F}_2]-[\mathscr{F}_1]-[\mathscr{F}_3]$ и рассмотрим подгруппу $\mathscr{J}$ (соответственно $\mathscr{J}_1$), порожденную такими элементами в $\mathbf{Z}[\mathscr{S}]$ (соответственно $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$).

1.3. Определение.

$$K_{\cdot}(X) = \mathbf{Z}[\mathscr{S}]/\mathscr{J},$$

$$K^{\cdot}(X) = \mathbf{Z}[\mathscr{L}]/\mathscr{J}_1.$$

1.4. Для любого пучка $\mathscr{F}$ из $\mathscr{S}$ (соответственно $\mathscr{L}$) обозначим через $cl_{\cdot}\mathscr{F}$ (соответственно $cl^{\cdot}\mathscr{F}$) его образ в $K_{\cdot}(X)$ (соответственно $K^{\cdot}(X)$).

Очевидно, $cl_{\cdot}$ и $cl^{\cdot}$ — аддитивные функции.

1.5. Предложение. а) *Группа $K^{\cdot}(X)$ является коммутативным кольцом с единицей, в котором умножение определено формулой*

$$cl\mathscr{F}_1 cl\mathscr{F}_2 = cl(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2). \tag{1}$$

б) *Группа $K_{\cdot}(X)$ является $K^{\cdot}(X)$-модулем с внешним умножением, определенным той же формулой.*

Доказательство. Формула (1) определяет структуру кольца уже на $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$, потому что объекты $\mathscr{L}$ (с точностью до изоморфизма) образуют моноид относительно тензорного произведения. Этот моноид ассоциативен и коммутативен.

Далее, подгруппа $\mathscr{J}_1$ образует идеал в $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$, потому что, если последовательность $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ точна, а $\mathscr{F}$ локально свободен, то и последовательность $0 \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}_3 \to 0$ точна. Поэтому на $K^{\cdot}(X) = \mathbf{Z}[\mathscr{L}]/\mathscr{J}_1$ переносится структура кольца.

$\mathbf{Z}[\mathscr{S}]$ также является кольцом и $\mathbf{Z}[\mathscr{L}]$-модулем, но $\mathscr{J}$, вообще говоря, не выдерживает умножения на элементы из $\mathbf{Z}[\mathscr{S}]$.

Тем не менее

$$\mathbf{Z}[\mathscr{L}]\mathscr{J} \subset \mathscr{J}, \quad \mathscr{J}_1\mathbf{Z}[\mathscr{S}] \subset \mathscr{J}.$$

Это устанавливается так же, как то, что $\mathscr{J}_1$ — идеал. Поэтому $\mathbf{Z}[\mathscr{S}]/\mathscr{J} = K_{\cdot}(X)$ является $K^{\cdot}(X)$-модулем.

1.6. Кроме описанных структур, $K_{\cdot}(X)$ и $K^{\cdot}(X)$ связаны естественным отображением

$$i\colon K^{\cdot}(X) \to K_{\cdot}(X)\colon cl^{\cdot}\mathscr{F} \mapsto cl_{\cdot}\mathscr{F}, \tag{2}$$

которое является гомоморфизмом $K^{\cdot}(X)$-модулей.

Мы покажем сейчас, что при определенных условиях i есть изоморфизм. Этих условий два: локальное и глобальное.

1.7. Определение. *Схема X называется регулярной, если существует такое целое число n, что любой когерентный пучок на X всюду локально имеет свободную резольвенту длины $\leqslant n$.*

(Это свойство в [2], 25.9, называлось «гладкостью»; здесь мы возвращаемся к терминологии Гротендика.) Можно доказать, что регулярная схема не имеет нильпотентов, а любая ее связная компонента неприводима.

Глобальные резольвенты позволяет в случае $\mathbf{P}^r_A$ строить лемма Серра ([2], 22.3). Мы аксиоматизируем свойство пучка $O(1)$, которое устанавливает эта лемма.

1.8. Определение. *Обратимый пучок $\mathscr{L}$ на нётеровой схеме X называется обильным, если для любого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X существуют целые числа m, $p > 0$ и эпиморфизм $O_X^p \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ (иначе говоря, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ порожден своими глобальными сечениями).*

1.9. Теорема. *Пусть X — нётерова регулярная схема, на которой есть обильный обратимый пучок. Тогда отображение (2)*

$$i\colon K^{\cdot}(X) \to K_{\cdot}(X)$$

является изоморфизмом.

В этом случае будем вместо $K_{\cdot}$ и $K^{\cdot}$ писать просто $K(X)$. Наоборот, если встречается обозначение $K(X)$, мы молчаливо считаем, что для X выполнены предположения теоремы 1.9.

Доказательство. *Первый шаг: i — эпиморфизм.* Для проверки этого достаточно показать, что всякий когерентный пучок F имеет (конечную ациклическую) резольвенту, состоящую из локально свободных пучков.

В силу определения 1.8 существует эпиморфизм $O_X^p \to \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m} \to 0$ для достаточно больших p и m, т. е. эпиморфизм $(\hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})^p \to \mathcal{F} \to 0$. Это дает начало локально свободной резольвенты; продолжив ее, построим резольвенту длины n, где n — число, фигурирующее в определении 1.7:

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{L}_{n-1} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

Здесь $\mathcal{K}$ по определению — ядро последнего гомоморфизма. В силу регулярности X для всех $x\in X$ слой $\mathcal{K}_x$ является свободным $\mathcal{O}_x$-модулем. Покажем, что $\mathcal{K}$ локально свободен.

Пусть $x\in X$, $s_1,\ldots,s_r\in\mathcal{K}_x$ — свободный базис $\mathcal{O}_x$-модуля $\mathcal{K}_x$; $\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_r$ — сечения K над некоторым открытым множеством $U\ni x$ — продолжения $s_1,\ldots,s_r$. Построим над U гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X^r|_U \to \mathcal{K}|_U$, соответствующий $\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_r$. Его ядро и коядро тривиальны в точке x, потому они тривиальны и в некоторой окрестности V точки x. Это доказывает, что K локально свободен.

Второй шаг: *конструкция обратного отображения* $j\colon K_{\cdot}(X)\to K^{\cdot}(X)$. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Построим его локально свободную резольвенту

$$0 \to \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_{n-1} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

и поставим в соответствие классу $\mathrm{cl}_{\cdot}\mathcal{F}$ в $K_{\cdot}(X)$ класс $\sum(-1)^i\,\mathrm{cl}^{\cdot}(\mathcal{L}_i)$ в $K^{\cdot}(X)$.

Покажем, что класс $\sum(-1)^i\,\mathrm{cl}^{\cdot}(\mathcal{L}_i)$ не зависит от выбора резольвенты, что определит отображение множеств

$$j\colon K_{\cdot}(X)\to K^{\cdot}(X).$$

Пусть даны две резольвенты

$$\mathcal{L}_{\cdot}\to\mathcal{F}\to 0,\qquad \mathcal{L}'_{\cdot}\to\mathcal{F}\to 0$$

($\mathcal{L}_{\cdot}$, $\mathcal{L}'_{\cdot}$ — комплексы пучков).

Допустим, что мы построили третью локально свободную резольвенту $\mathcal{L}''_{\cdot}$ и ее эпиморфизмы на первые две. Покажем, что тогда классы $\sum(-1)^i cl^{\cdot}(\mathcal{L}''_i)$ и $\sum(-1)^i cl^{\cdot}(\mathcal{L}'_i)$ совпадают в $K^{\cdot}(X)$; этого, очевидно, достаточно. В самом деле, $K_i=\ker(\mathcal{L}''_i\to\mathcal{L}'_i)$ является локально свободным пучком (ибо локально свободный фактор-модуль свободного модуля выделяется прямым слагаемым, а проективные модули над локальными кольцами свободны ([2], 26.11). С другой стороны, пучки $\mathcal{K}_i$ образуют комплекс и притом ациклический:

$$0\to\mathcal{K}_n\to\mathcal{K}_{n-1}\to\ldots\to\mathcal{K}_0\to 0$$

(ацикличность следует из точной последовательности когомологий для последовательности комплексов $0\to K_{\cdot}\to\mathcal{L}''_{\cdot}\to\mathcal{L}'_{\cdot}\to 0$ и ацикличности $\mathcal{L}'_{\cdot}$ и $\mathcal{L}''_{\cdot}$). Отсюда следует, что в группе $K^{\cdot}(X)$ элементы $\sum(-1)^i cl^{\cdot}(\mathcal{L}''_i)$, $\sum(-1)^i cl^{\cdot}(\mathcal{L}'_i)$ совпадают, ибо $\sum(-1)^i cl^{\cdot}(\mathcal{L}''_i-\mathcal{L}'_i)=\sum(-1)^i cl^{\cdot}(K_i)$.

Остается построить резольвенту $\mathcal{L}''$. Будем строить $\mathcal{L}''_i$ индукцией по i; очередной член должен войти в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_i \arrow[r] & \mathcal{L}_{i-1} \\
\mathcal{L}''_i \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{L}''_{i-1} \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathcal{L}'_i \arrow[r] & \mathcal{L}'_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Пусть $\mathcal{B}_i=\ker(\mathcal{L}_{i-1}\to\mathcal{L}_{i-2})$, аналогично определим $\mathcal{B}'_i$, $\mathcal{B}''_i$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{L}_i \arrow[r] & \mathcal{B}_i \arrow[r] & \mathcal{L}_{i-1} \\
 & & \mathcal{C}_i \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathcal{B}''_i \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathcal{L}''_{i-1} \arrow[u] \arrow[ddd] \\
\mathcal{L}''_i \arrow[r] & \mathcal{D}_i \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & & \mathcal{C}'_i \arrow[uurr] \arrow[dr] & & & \\
 & & & \mathcal{L}'_i \arrow[r] & \mathcal{B}'_i \arrow[r] & \mathcal{L}'_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Стрелки $\mathcal{B}''_i\to\mathcal{B}'_i$, $\mathcal{B}''_i\to\mathcal{B}_i$ определены в ней по коммутативности, если $(i-1)$-й член резольвенты $\mathcal{L}''_{\cdot}$ уже построен.

Во-первых, можно считать, что эти стрелки — эпиморфизмы. Если это не так, то сначала изменим $\mathcal{L}''_{i-1}$. Именно, вместо $\mathcal{L}''_{i-1}$ возьмем $\mathcal{L}''_{i-1}\oplus\mathcal{L}_i\oplus\mathcal{L}'_i$; граничный гомоморфизм в $\mathcal{L}''_{i-2}$ доопределим нулем на новых слагаемых, а отображения на $\mathcal{L}_{i-1}$ и $\mathcal{L}'_{i-1}$ доопределим нулем на $\mathcal{L}'_i$ и $\mathcal{L}_i$ соответственно и граничным гомоморфизмом резольвенты $\mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{L}'$) на $\mathcal{L}_i$ (соответственно $\mathcal{L}'_i$).

Во-вторых, если уже верно, что $\mathcal{B}''_i\to\mathcal{B}'_i$ и $\mathcal{B}''_i\to\mathcal{B}_i$ эпиморфны, достроим последовательно пучки и гомоморфизмы $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}'_i$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{L}''_i$ следующим образом.

Положим $\mathcal{C}_i=\mathcal{L}_i\sqcup_{B_i}\mathcal{B}''_i$ [1], $\mathcal{C}'_i=\mathcal{L}'_i\sqcup_{B'_i}\mathcal{B}''_i$, а гомоморфизмы — проекции.

Положим далее $\mathcal{D}_i=\mathcal{C}_i=\mathcal{C}_i\sqcup\mathcal{C}'_i$ (гомоморфизмы проекции), а в качестве $\mathcal{L}''_i$ возьмем локально свободный пучок с эпиморфизмом на $\mathcal{L}_i$.

Этим закончено построение резольвенты $\mathcal{L}''$; стало быть определение j корректно.

Третий шаг. Уже построены отображения $K^{\cdot}(X)\underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}}K_{\cdot}(X)$. Из определений немедленно следует, что отображение ji является тождественным. Поэтому ядро i тривиально и, значит, i является мономорфизмом групп. Это доказывает теорему.

Нам понадобится еще один технический результат о пучках.

[1] Пусть $M\xrightarrow{f}P$, $N\xrightarrow{g}P$ — гомоморфизмы модулей; тогда $M\sqcup_P N=\{(m,\ n)\in M\times N\mid f(m)=g(n)\}$.

1.10. П р е д л о ж е н и е. *Пусть Y — нётерова схема и $X \subset Y$ — открытое множество, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $(X, O_Y|_X)$. Тогда существует когерентный пучок $\mathcal{F}'$ на Y такой, что $\mathcal{F}'_X = \mathcal{F}$. Более того, если $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}|_Y$, где $\mathcal{G}$ — пучок на Y, то можно считать, что $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$.*

Вот два полезных приложения:

1.11. С л е д с т в и е. *Пусть $\mathcal{L}$ — обильный пучок на Y; тогда $\mathcal{L}|_X$ обилен на X.*

Действительно, пусть F когерентен на X; $\mathcal{F}'$ его продолжение на Y. Существует эпиморфизм $(\mathcal{L}^{\otimes m})^p \to \mathcal{F}'$. Его ограничение на X дает эпиморфизм $(\mathcal{L}|_X^{\otimes m})^p \to \mathcal{F}$.

Объединив это с очевидным замечанием, что ограничение обильного пучка на замкнутую подсхему обильно, мы получаем довольно большой запас нётеровых схем, обладающих таким пучком. Например, все локально замкнутые подсхемы $\mathbf{P}^r_A$ (где A — нётерово кольцо) имеют обильный обратимый пучок.

1.12. С л е д с т в и е. *Пусть $Z \subset Y$ — замкнутая подсхема, $X = Y \setminus Z$. Существует последовательность групп*

$$K_.(Z) \to K_.(Y) \to K_.(X) \to 0,$$

в которой первая стрелка индуцирована «продолжением нулем» пучков с Z на Y, а вторая — ограничением пучков с Y на X.

Эта последовательность точна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эпиморфность второго отображения сразу следует из 1.10. Точность в члене $K_.(Y)$ здесь нам не понадобится, и мы не будем ее доказывать (см. Борель — Серр [7], предложение 7).

1.13. Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1.10. Пусть $x \in Y \setminus X$; рассмотрим некоторую аффинную окрестность U точки x в Y. Если мы сможем продолжить $\mathcal{F}$ (сам по себе или как подпучок $\mathcal{G}$) с X на $X \cup U$, то все будет доказано в силу нётеровости Y, потому что строго возрастающая цепочка открытых множеств в Y конечна. В свою очередь достаточно продолжить $\mathcal{F}$ с $X \cap U$ на U, т. е. можно с самого начала считать, что Y аффинная.

П е р в ы й ш а г. Покажем, что пучок $\mathcal{F}$ на X порождается конечным числом своих сечений, т. е. существует эпиморфизм $O_X^p \to \mathcal{F} \to 0$.

Пусть $Y = \operatorname{Spec} A$; мы можем покрыть X конечным числом открытых множеств $D(f_i) = \operatorname{Spec} A_{f_i}$, $f_i \in A$. Ограничение $\mathcal{F}$ на $D(f_i)$ порождено конечным числом образующих нётерова A_{f_i}-модуля $\Gamma(D(f_i), \mathcal{F})$; после умножения их на надлежащую степень f_i эти сечения можно продолжить до сечений $\mathcal{F}$ над всем X; отсюда следует требуемое.

В т о р о й ш а г. Пусть K — ядро эпиморфизма $O_X^p \to \mathcal{F} \to 0$ на X. Пучок O_X^p можно продолжить до O_Y^p; покажем, что K можно продолжить до подпучка $K' \subset O_Y^p$. Если это сделать, мы сможем продолжить $\mathcal{F}$, потому что можно положить $\mathcal{F}' = O_Y^p/K'$.

Следовательно, все будет доказано, если мы докажем второе утверждение предложения 1.10 в случае $Y = \operatorname{Spec} A$.

Пусть M — A-модуль; $\widetilde{M}$ — соответствующий пучок на Y, $K \subset M|_X$ — его подпучок; нужно продолжить K до подпучка $\widetilde{M}$ на Y.

Положим $X = \bigcup D(f_i)$ (конечное покрытие); $N_i = \Gamma(D(f_i), K) \subset M_{f_i}$. Имеем, очевидно,

$$(N_i)_{f_j} = (N_j)_{f_i} \subset M_{f_if_j}.$$

Определим $M' = \{m \in M \mid \forall i,\ mf_i/f_i \in N_i\}$.

Я утверждаю, что $\widetilde{M}' \subset \widetilde{M}$ является искомым продолжением пучка K. Достаточно проверить, что $\widetilde{M}'|_{D(f_i)} = K|_{D(f_i)}$ или, иначе, что $M'_{f_i} = N_i$. Вложение $M'_{f_i} \subset N_i$ очевидно из определения; чтобы проверить обратное включение, нужно доказать, что для любого $j \neq i$ всякий элемент из N_i можно представить в виде m'/f_i^k, где $m'f_j/f_j \in N_j$. Действительно, возьмем элемент m/f_i^k; имеем $f_i(m/f_i^k)/f_j \in (N_i)_{f_j} = (N_j)_{f_i} \Rightarrow f_j^r(mf_i^s - m') = 0$, $m'|_1 \in N_j$, что доказывает требуемое.

2. $K(X)$ и циклы

2.1. Группа $K_.(X)$ имеет интересную систему образующих «геометрического» происхождения:

О п р е д е л е н и е. *Циклом на X называется элемент свободной абелевой группы $Z(X)$, порожденной замкнутыми приведенными неприводимыми подсхемами X.*

Поставим в соответствие циклу $\Sigma\, a_i Y_i$ элемент $\Sigma\, a_i cl.(O_{Y_i}) \in K_.(X)$ (O_Y продолжается нулем вне Y). Очевидно, это определяет гомоморфизм группы циклов в $K_.(X)$.

2.2. Т е о р е м а. *Описанный гомоморфизм $Z(Y) \to K_.(X)$ является эпиморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся случаем $X = \operatorname{Spec} A$. Любой A-модуль F имеет композиционный ряд, факторы которого изоморфны A/p_i, где $p_i \subset A$ — простые идеалы ([2], 24.11). Это доказывает требуемое, потому что $\widetilde{A/p}$ — структурный пучок замкнутой, приведенной и неприводимой подсхемы.

(В общем случае можно дать аналогичное доказательство, развив предварительно формализм «точек, ассоциированных с когерентным пучком»).

В случае, когда $K_.(X) = K^.(X)$, что мы будем предполагать дальше, этот результат можно развивать в двух направлениях.

С одной стороны, он дает гомоморфизм группы циклов на X на кольцо $K(X)$. Следовательно, он позволяет ввести в этой группе умножение (по модулю некоторого соотношения эквивалентности, которое нуждается в уточнении). Сейчас мы увидим, что для циклов «в общем положении» это умножение совпадает с пересечением. Таким образом, кольцо $K(X)$ можно рассматривать как некоторый аналог кольца гомологий X (точнее, подкольца, состоящего из алгебраических циклов).

С другой стороны, класс всякого локально свободного пучка в $K(X)$ можно представить линейной комбинацией циклов на X: это — причина существования *теории характеристических классов*, которой мы займемся позже.

2.3. Т е о р е м а. *Пусть* $\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2 \subset O_X$ — *когерентные пучки идеалов*, Y_1, Y_2 — *соответствующие замкнутые подсхемы* X *со структурными пучками* $O_{Y_i} = O_X/\mathscr{Y}_i$. *Тогда, если* Y_1, Y_2 *находятся «в общем положении», то*

$$cl(O_{Y_1})\,cl(O_{Y_2}) = cl(O_{Y_1 \cap Y_2}).$$

Вот точные определения:

О п р е д е л е н и е 1. $O_{Y_1 \cap Y_2} = O/(\mathscr{Y}_1 + \mathscr{Y}_2)$.

(Множество решений объединения двух систем уравнений является пересечением множеств решений каждого из них.)

О п р е д е л е н и е 2. *Замкнутые подсхемы* $Y_1, Y_2 \subset X$ *называются «находящимися в общем положении», если для каждой точки* $x \in Y_1 \cap Y_2$ *существует ее аффинная окрестность* $x \in U = \operatorname{Spec} A$ *и системы образующих* $(f_1, \ldots, f_r)$, $(g_1, \ldots, g_s)$ *идеалов* $\Gamma(U, \mathscr{Y}_1) \subset A$, $\Gamma(U, \mathscr{Y}_2) \subset A$ *соответственно, такие, что* (f), (g) *и* (f, g) *являются* A-*регулярными последовательностями.*

(Напомним, что последовательность элементов $f_1, \ldots, f_r \in A$ называется A-регулярной, если $f_{i+1} \bmod (f_1, \ldots, f_i)$ не является делителем нуля в $A/(f_1, \ldots, f_i)$ для всех i.)

Геометрическое значение этих условий менее очевидно.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда A — кольцо многочленов над полем, а f_i, g_i — линейные формы. Набор линейных форм составляет A-регулярную последовательность, если и только если он линейно независим (проверить!), откуда легко получить, что два линейных многообразия Y_1, Y_2 в аффинном пространстве X находятся в общем положении, если и только если они не пересекаются при $\dim Y_1 + \dim Y_2 < \dim X$ или пересекаются по подпространству размерности $\dim X - \dim Y_1 - \dim Y_2$ в противном случае. Это соответствует геометрической интуиции.

Отметим еще, что условие определения 2 наложено не только на взаимное расположение Y_1 и Y_2, но и на каждую из них отдельно (в окрестности точек пересечения). Может оказаться, что Y в окрестности некоторой точки вообще нельзя задать A-системой. Это, однако, всегда можно сделать, если в этой точке X и Y регулярны.

2.4. Доказательство теоремы 2.6 затруднено следующими обстоятельствами. Пока мы умеем вычислять умножение лишь для классов локально свободных пучков. Следовательно, для вычисления $cl(O_{Y_1}) \cdot cl(O_{Y_2})$ нужно знать резольвенту хотя бы одного из пучков O_{Y_i}. Но у нас имеются только локальные сведения об этих пучках (и даже в окрестности не всех точек). Мы могли бы вычислить $cl(O_{Y_1}|_U) \cdot cl(O_{Y_2}|_U)$ для некоторых открытых множеств U, но это не дает ответа в $K(X)$, даже если $\{U_i\}$ образуют покрытие X: ядро гомоморфизма $K(X) \to \sqcup K(U_i)$ может быть нетривиально и даже совпадать со всем $K(X)$ (функтор $K(X)$ очень плохо локализуется).

Поэтому нам понадобится более тонкая конструкция, позволяющая вычислить произведения локально.

2.5. Г о м о л о г и ч е с к а я   и н т е р п р е т а ц и я   у м н о ж е н и я   в $K(X)$. **Пусть** $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ **— два пучка на** X. **Рассмотрим локально свободную резольвенту одного из них:**

$$0 \to \mathscr{L}_n \to \ldots \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{F} \to 0.$$

В силу определений имеем

$$cl(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(\mathscr{L}_i),$$

так что

$$cl(\mathscr{F})\,cl(\mathscr{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(\mathscr{L}_i)\,cl(\mathscr{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{G}) \qquad (1)$$

(в самом деле, $cl(\mathscr{L})\,cl(\mathscr{G}) = cl(\mathscr{L} \otimes \mathscr{G})$, **если даже только** $\mathscr{L}$, **а не оба пучка локально свободны по предположению 1.5).**

С другой стороны, рассмотрим комплекс пучков, получающийся из резольвенты пучка $\mathscr{F}$ **тензорным умножением на** $\mathscr{G}$:

$$C: 0 \to \mathscr{L}_n \otimes \mathscr{G} \to \mathscr{L}_{n-1} \otimes \mathscr{G} \to \ldots \to \mathscr{L}_0 \otimes \mathscr{G} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \to 0.$$

По стандартному свойству аддитивных функций находим

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(H_i(C)), \qquad (2)$$

где $H_i(C)$ — i-й пучок гомологий комплекса C.

Теперь мы имеем следующий результат:

2.6. П р е д л о ж е н и е. а) *Пучки* $H_i(C)$ *не зависят от выбора резольвенты* $\mathscr{L}$, *точнее,* $H_i(C)$, *построенные для разных* $\mathscr{L}$, *канонически изоморфны.*

Положим $H_i(C) = \operatorname{Tor}_i^{O_X}(\mathscr{G}, \mathscr{F})$ (*или просто* $\operatorname{Tor}_i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$).

б) $\operatorname{Tor}_i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *является ковариантным функтором по* $\mathscr{F}$ *и* $\mathscr{G}$; *он канонически изоморфен* $\operatorname{Tor}_i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

в) $\operatorname{Tor}_i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *как функтор любого из аргументов при фиксированном другом является* i-*м производным функтором от тензорного произведения.*

В частности, имеются обычные точные последовательности Tor, *связанных с точными тройками* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2 \to 0$.

Н а б р о с о к   д о к а з а т е л ь с т в а. В книгах Картана — Эйленберга и Маклейна имеется теория Tor для модулей над кольцом A.

В этой теории свойство а) следует из того, что для любых двух резольвент L, L' модуля F существует гомоморфизм $f: L \to L'$, продолжающий тождественный изоморфизм F, и два таких гомоморфизма гомотопны. Поэтому f индуцирует канонически определенный изоморфизм между модулями гомологий комплексов $L \otimes G$ и $L' \otimes G$.

Совпадение $\operatorname{Tor}_0^A(F, G)$ с $F \otimes G$ получается прямым вычислением, потому что тензорное умножение точно справа. Канонический изоморфизм $\operatorname{Tor}_i^A(F, G)$ и $\operatorname{Tor}_i^A(G, F)$ строится сравнением гомологий комплексов $L \otimes G$, $F \otimes L'$ и $L \otimes L'$, где L — резольвента F, а L' — резольвента G.

Возможность перенести все эти конструкции с модулей на квазикогерентные пучки основана на том, что локализация сохраняет точные последовательности и тензорные произведения: если F, G — A-модули, $S \subset A$ — мультипликативная система, то из точности последовательности A-модулей $0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0$ следует точная последовательность A-модулей $0 \to (F_1)_S \to (F)_S \to (F_2)_S \to 0$ и $(F \underset{A}{\otimes} G)_S = F_S \underset{A_S}{\otimes} G_S$. Отсюда вытекает, что для всех i

$$\mathrm{Tor}_i^{A_S}(F_S,\ G_S) = (\mathrm{Tor}_i^A(F,\ G))_S,$$

так что вся теория Tor локализуется.

Из этого предложения и формул (1), (2) получаем следующий результат.

2.7. Теорема. *Для любых двух когерентных пучков $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ на X имеем*

$$cl(\mathcal{F})\, cl(\mathcal{G}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, cl(\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F},\ \mathcal{G})).$$

2.8. Доказательство теоремы 2.3. Достаточно установить, что в условиях теоремы

$$\mathrm{Tor}_0(O_{Y_1},\ O_{Y_2}) = O_{Y_1} \underset{O_X}{\otimes} O_{Y_2} \simeq O_X/(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2),$$

$$\mathrm{Tor}_i(O_{Y_1},\ O_{Y_2}) = 0 \text{ при } i \geqslant 1.$$

Первое утверждение верно вне зависимости от предположений. Второе достаточно проверить локально.

Если $x \notin Y_1 \cap Y_2$, то либо $(O_{Y_1})_x = 0$, либо $(O_{Y_2})_x = 0$, так что в окрестности таких точек $\mathrm{Tor}(O_{Y_1},\ O_{Y_2}) = 0$.

Пусть теперь $x \in Y_1 \cap Y_2$. Пользуясь тем, что Y_1, Y_2 в общем положении, сведем дело к аффинному случаю: $F = A/(f_1, \ldots, f_r)$, $G = A/(g_1, \ldots, g_r)$. Комплекс Кошуля $K^A(f)$ доставляет свободную резольвенту A-модуля F ([2], 21.6):

$$0 \to K_r^A(f) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} K_1^A(f) \to K_0^A(f) \to 0,$$

где

$$K_n(f) = \bigoplus A e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant r,$$

и

$$d(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f_{i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}.$$

Тензорно умножая эту резольвенту на $G = A/(g_1, \ldots, g_r)$, получаем комплекс Кошуля $K^{A/g}(f \bmod (g))$, который тоже ацикличен, ибо по условию $f \bmod (g)$ составляет $A/(g)$-последовательность. Отсюда вытекает требуемое.

3. Самопересечение и внешние степени

3.1. В предыдущем разделе мы вычислили произведение в $K(X)$ классов структурных пучков подсхем Y_1, Y_2, находящихся в «общем положении». Сейчас, пользуясь теоремой 2.7, мы вычислим $(cl(O_Y))^2$. Это — другой крайний случай: Y, очевидно, никогда не находится в общем положении по отношению к самому себе. Все же нам придется наложить на Y некоторое условие регулярности, аналогичное тому, которое фигурировало в определении общего положения.

3.2. Определение. *Замкнутая подсхема $Y \subset X$ называется регулярно вложенной, если для каждой точки $y \in Y$ существует такая аффинная окрестность $U = \mathrm{Spec}\, A$, что идеал $\mathcal{J} \subset A$, определяющий Y в U, порождается некоторой A-регулярной последовательностью.*

3.3. Пусть Y — замкнутая подсхема X, $O_Y = O_X/\mathcal{J}$. Пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ отличен от нуля лишь на Y; его можно рассматривать как когерентный пучок O_Y-модулей. В дифференциально-геометрической модели $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_Y$ играет роль «конормального расслоения» на Y. Его локальные сечения являются линейными частями функций на X, равных нулю на Y; каждый касательный к X в точке $y \in Y$ вектор можно рассматривать как функцию на этих линейных частях, и эта функция тождественно равна нулю, если вектор касается Y.

3.4. Предложение. *Пусть $Y \subset X$ — регулярно вложенная замкнутая подсхема и $O_Y = O_X/\mathcal{J}$. Тогда O_Y-пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_Y$ локально свободен и ранг его в точке $y \in Y$ равен локальному числу уравнений, определяющих Y в окрестности этой точки.*

Доказательство. Очевидно, вопрос является чисто локальным. Пусть A — некоторое кольцо, $(f_1, \ldots f_r)$ — A-последовательность, $I = \sum_{i=1}^{r} Af_i$. Покажем, что A/I-модуль I/I^2 свободен ранга r. Очевидно, элементы $\bar{f}_i = f_i \bmod I$ являются его образующими; достаточно проверить, что они независимы. Проведем индукцию по r.

При $r = 1$ из того, что $\bar{a}\bar{f} = 0$, где $\bar{a} = a \bmod Af$, следует, что $af = bf^2$ для некоторого $b \in A$, откуда $f(a - bf) = 0$ и, так как f не является делителем нуля в A, $a = bf$, т. е. $\bar{a} = 0$.

Пусть предложение доказано для A-последовательности $(f_1, \ldots, f_{r-1})$. Допустим, что $\sum_{i=1}^{r} \bar{a}_i \bar{f}_i = 0$ в I/I^2, где $\bar{a}_i = a_i \bmod I$, $a_i \in A$. Можно считать, что $\Sigma a_i f_i = 0$ в A: иначе $\Sigma a_i f_i = \Sigma u_i f_i$, $u_i \in I$, и можно заменить a_i на $a_i - u_i$, не изменив $\bar{a}_i$.

Так как f_r не является делителем нуля в кольце $A/(f_1, \ldots, f_{r-1})$, из равенства $a_r f_r + \sum_{i=1}^{r-1} a_i f_i = 0$ следует, что справедливо $a_r = \sum_{i=1}^{r-1} b_i f_i$, откуда $\sum_{i=1}^{r-1} (a_i + b_i f_r) f_i = 0$. Из предположения индукции находим $a_i + b_i f_r \in \sum_{i=1}^{r-1} Af_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$, так что $a_i \in I$ для всех i, т. е. $\bar{a}_i = 0$, что завершает доказательство.

3.5. Теорема. *Пусть Y — регулярно вложенная замкнутая подсхема в X, $O_Y = O_X/\mathcal{J}$, $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок O_Y-модулей, тривиально продолженный на X. Тогда*

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y,\ O_Y) = \Lambda_{O_Y}^i(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2),$$

$$\mathrm{Tor}_i^{O_X}(\mathcal{F},\ O_Y) = \mathcal{F} \otimes \Lambda_{O_Y}^i(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2).$$

Следствие. *В группе $K(X)$ имеем*

$$cl(\mathscr{F})\,cl(O_Y)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,cl(\mathscr{F}\underset{O_Y}{\otimes}\Lambda^i_{O_Y}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)).$$

Полагая здесь $\mathscr{F}=O_Y$, получаем обещанную формулу для «самопересечения» Y, т. е. для $cl(O_Y)^2$. С ней связаны следующие интуитивные представления.

В дифференциально-геометрической модели для вычисления самопересечения нужно «сдвинуть» Y. Это можно сделать локально, не выходя за пределы некоторой трубчатой окрестности. В свою очередь трубчатая окрестность Y определяется нормальным расслоением к нему, если Y достаточно регулярно. В нашей ситуации это проявляется в появлении пучка $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$.

3.6. Пример (индекс самопересечения диагонали). Несколько забегая вперед, мы можем дать красивое приложение этой теоремы.

Пусть X — регулярное проективное многообразие над полем, $\Delta_X\subset X\times X$ — диагональ. Конормальный пучок к диагонали — это пучок дифференциалов Ω^1_X (см. раздел 17). В стандартных обозначениях $\Lambda^i(\Omega^1_X)=\Omega^i_X$ — пучок i-мерных внешних дифференциальных форм на X.

Далее, $\dim(X\times X)=2\dim X$, так что естественно предположить (и можно доказать), что $cl(\Delta_X)^2$ представлен линейной комбинацией пучков с нульмерными носителями. Тогда с классом «самопересечения» диагонали (в $K(X)$) можно связать некоторое целое число «индекс самопересечения». Как вычислить его? В случае, когда $Y_1, Y_2\subset X$ находятся в общем положении и пересекаются по конечному числу замкнутых точек, естественно назвать их индексом пересечения число

$$\deg(Y_1\cap Y_2)=\dim H^0(X,\ O_{Y_1\cap Y_2})=\chi(O_{Y_1\cap Y_2}).$$

Так как χ — аддитивная функция, это определение годится и здесь: применяя его, находим

$$(\Delta_X\cdot\Delta_X)=\sum_{i=0}^{\dim X}(-1)^i\chi(\Omega^i_X)=\sum_{i=0}^{\dim X}(-1)^i\sum_{j=0}^{\dim X}(-1)^j\dim H^j(X,\ \Omega^i_X)=$$
$$=\sum_{p=0}^{2\dim X}(-1)^p\dim\Big(\bigoplus_{i+j=p}H^j(X,\ \Omega^i_X)\Big).$$

Если X определено над полем комплексных чисел, по известной теореме Де Рама — Дольбо — Серра сумма $\bigoplus_{i+j=p}H^j(X,\ \Omega^i_X)$ изоморфна пространству p-мерных сингулярных когомологий X с коэффициентами в $\mathbf{C}$, так что индекс самопересечения диагонали Δ_X равен обычной эйлеровой характеристике, как и должно быть.

3.7. Доказательство теоремы 3.5. Мы снова можем рассматривать чисто локальную ситуацию; нужно лишь позаботиться о том, чтобы получить *канонический* изоморфизм $\mathrm{Tor}_i^{O_X}(O_Y,\ O_Y)$ с $\Lambda^i_{O_Y}(J/J^2)$, упомянутый в наброске доказательства предложения 2.6, — иначе мы не сможем склеить эти изоморфизмы в один глобальный.

Пусть A — коммутативное кольцо, $(f_1,\ldots,f_r)$ — A-последовательность, I — идеал, порожденный ею.

Построим комплекс Кошуля $K_.(f)$; стандартный гомоморфизм $K_.(f)\to A/I$ превращает его в свободную A-резольвенту модуля A/I. Из явной формулы для дифференциала в $K_.(f)$ легко получается, что все дифференциалы комплекса $K_.(f)\underset{A}{\otimes}A/I$ нулевые, так что группа его i-мерных гомологий, изоморфная $\mathrm{Tor}_i^A(A/I,\ A/I)$ является свободным A/I-модулем ранга $\binom{r}{i}$. Мы определим такие изоморфизмы

$$\psi_f\colon K_.(f)\underset{A}{\otimes}A/I\longrightarrow\Lambda(I/I^2)$$

(справа стоит комплекс с нулевыми дифференциалами), что для любой другой A-последовательности $(g_1,\ldots,g_r)$, порождающей I (в силу предложения 3.4 она состоит из того же числа элементов), и для любого гомоморфизма комплексов $\varphi\colon K_.(g)\to K_.(f)$, продолжающего тождественное отображение $A/I\to A/I$, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} K_.(g)\otimes A/I & \xrightarrow{\psi_g} & \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi\otimes 1} & & \Lambda_{A/I}(I/I^2). \\ K_.(f)\otimes A/I & \xrightarrow{\psi_f} & \end{array}\qquad(1)$$

Допустим, что мы построили такие ψ_f. Тогда они определяют канонический изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/I,\ A/I)=\Lambda^i_{A/I}(I/I^2),$$

совместимый с локализацией, что доказывает первое утверждение теоремы. Второе немедленно следует отсюда, ибо для любого свободного A/I-модуля F имеем

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/I,F)=H_i(K_.(f)\underset{A}{\otimes}F)=H_i((K_.(f)\underset{A}{\otimes}A/I)\underset{A/I}{\otimes}F=\Lambda^i_{A/I}(I/I^2)\underset{A/I}{\otimes}F,$$

где все равенства означают канонические изоморфизмы, совместимые с локализацией.

Остается определить ψ_f. Пусть $K_p(f)=\bigoplus Ae_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$, $K_p(f)\underset{A}{\otimes}A/I=\bigoplus A/Ie_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$. Положим

$$\psi_f(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p})=\bar f_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar f_{i_p},$$

где $\bar f_i=f_i \bmod I^2\in I/I^2$. В силу предложения 3.4 ψ_f является изоморфизмом.

Коммутативность диаграммы (1) достаточно проверить для какого-нибудь одного гомоморфизма резольвент $\varphi_i\colon K_.(g)\to K_.(f)$, ибо остальные ему гомотопны. Его можно построить следующим образом. Пусть $g_i=\sum_{j=1} a_{ij}f_j$, $a_{ij}\in A$, и пусть $K_i(g)=\bigoplus Ae'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}$. Положим

$$\varphi(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p})=\Big(\sum_{j=1}^{r}a_{i_1j}e_j\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j=1}^{r}a_{i_pj}e_j\Big).$$

Следующее вычисление показывает, что это гомоморфизм комплексов:

$$\varphi(d(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}) = \varphi\big(\sum_k(-1)^{k+1}g_{i_k}e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge\hat{e'_{i_k}}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}\big) =$$

$$=\sum_k(-1)^{k+1}g_{i_k}\big(\sum_{j=1}^r a_{i_1j}e_j\big)\wedge\ldots\wedge\hat{\sum_k}\wedge\ldots\wedge\big(\sum_{j=1}^r a_{i_pj}e_j\big)=$$

$$=d(\varphi(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p})=$$

$$=\sum(-1)^{k+1}\big(\sum_{j=1}^r a_{i_1j}e_j\big)\wedge\ldots\wedge\underbrace{\sum_{j=1}^r \widehat{a_{i_kj}f_j}}_{k\text{-е место}}\wedge\ldots\wedge\big(\sum_{j=1}^r a_{i_pj}e_j\big).$$

$\Big($учесть, что $g_{i_k}=\sum\limits_{j=1}^r a_{i_kj}f_j\Big)$.

Еще одно вычисление, столь же простое, показывает коммутативность (1):

$$\psi_f\cdot(\varphi\otimes 1)(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}\otimes 1)=\big(\sum_{j=1}^r a_{i_1j}\bar f_j\big)\wedge\ldots\wedge\big(\sum_{j=1}^r a_{i_pj}\bar f_j\big)=$$

$$=\bar g_{i_1}\wedge\ldots\wedge\bar g_{i_p}=\psi_g(e'_{i_1}\wedge\ldots\wedge e'_{i_p}).$$

Это завершает доказательство теоремы 3.5.

3.8. Теорема 3.5 показывает важность операций внешней степени. Покажем сейчас, что их можно перенести на $K^\cdot(X)$. Нетривиальность задачи объясняется тем, что хотя эти операции определены на образующих группы $\mathbf{Z}(\mathcal{L})$, они заведомо нелинейны, так что продолжить их по аддитивности нельзя.

Вот пример: если $X=\operatorname{Spec} k$, то $K^\cdot(X)\rightleftarrows\mathbf{Z}$, где изоморфизм достигается сопоставлением каждому линейному пространству над k его размерности, и $\Lambda^i(n)=\binom{n}{i}$. Дело спасается красивым приемом, который придумал Гротендик.

3.9. Предложение. *Пусть $0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}_2\to 0$ — точная последовательность локально свободных пучков конечного ранга над произвольной схемой X. Тогда для всех $n\geqslant 0$ в группе $K(X)$ имеет место тождество*

$$cl^\cdot(\Lambda^n(\mathcal{F}))=\sum_{i=0}^n \mathrm{cl}^\cdot(\Lambda^i(\mathcal{F}_1))\cdot cl^\cdot(\Lambda^{n-i}(\mathcal{F}_2)).$$

Доказательство. Пусть сначала $X=\operatorname{Spec} A$ и пучки $\mathcal{F}_i$ соответствуют свободным модулям F_i. Введем в модуле $\Lambda^n(F)$ убывающую фильтрацию, обозначив через $\Lambda_i^n(F)$ подмодуль, порожденный элементами вида

$$a_1\wedge\ldots\wedge a_i\wedge b_{i+1}\wedge\ldots\wedge b_n,\quad\text{где } a_1,\ldots,a_i\in F_1.$$

Очевидно,

$$\Lambda^n(F)=\Lambda_0^n(F)\supset\Lambda_1^n(F)\supset\ldots\supset\Lambda_n^n(F)=\Lambda^n(F_1).$$

Удобно еще положить $\Lambda_{n+1}^n(F)=0$. Построим изоморфизм

$$\varphi\colon \Lambda^iF_1\otimes\Lambda^{n-i}F_2\to\Lambda_i^n(F)/\Lambda_{i+1}^{n-i}(F)\qquad(i=0,\ldots,n).$$

Для этого выберем сечение $s\colon F_2\to F$, определяющее прямое разложение $F=F_1+s(F_2)$, и положим

$$\varphi((a_1\wedge\ldots\wedge a_i)\otimes(b_1\wedge\ldots\wedge b_{n-i}))=$$

$$=a_1\wedge\ldots\wedge a_i\wedge s(b_1)\wedge\ldots\wedge s(b_{n-i})\bmod\Lambda_{i+1}^n(F).$$

В действительности φ не зависит от выбора s, потому что $\operatorname{Im}(s-s')\in F_1$ для любых двух сечений s, s'. То обстоятельство, что φ — изоморфизм, легко проверить, выбрав свободные базы F_1 и F_2. Так как способ конструкции совместим с локализацией, получаем отсюда формулу для классов пучков

$$cl^\cdot(\Lambda^n(\mathcal{F}))=\sum_{i=0}^n cl^\cdot(\Lambda_i^n(\mathcal{F})/\Lambda_{i+1}^n(\mathcal{F}))=\sum_{i=0}^n cl^\cdot(\Lambda^i\mathcal{F}_1\otimes\Lambda^i\mathcal{F}_2),$$

которая доказывает требуемое.

3.10. Теорема. *Для любой схемы X существует и однозначно определена серия отображений*

$$\lambda^i\colon K^\cdot(X)\to K^\cdot(X)\qquad(i=0,1,2,\ldots),$$

удовлетворяющая условиям

$$\lambda_r^i(cl^\cdot(\mathcal{F}))=cl^\cdot(\Lambda^i(\mathcal{F}))$$

для любого когерентного локально свободного O_X-модуля $\mathcal{F}$.

Доказательство. Рассмотрим группу *по умножению* $1+tK^\cdot(X)[[t]]$ формальных степенных рядов с коэффициентами в кольце $K^\cdot(X)$ и определим гомоморфизм

$$\lambda_t\colon \mathbf{Z}[\mathcal{L}]\to 1+tK^\cdot(X)[[t]],$$

положив

$$\lambda_t(\mathcal{F})=1+\sum_{i=1}^\infty cl^\cdot(\Lambda^i(\mathcal{F}))\,t^i$$

для локально свободных пучков $\mathcal{F}$ и доопределив λ_t на $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$ по аддитивности. Из предложения 3.9 тогда следует, что подгруппа в $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$, порожденная элементами $[\mathcal{F}]\to[\mathcal{F}_1]\to[\mathcal{F}_2]$ для точных последовательностей $0\to\mathcal{F}_1\to\to\mathcal{F}\to\mathcal{F}_2\to 0$, принадлежит ядру λ_t, так что λ_t можно определить на $K^\cdot(X)$. Положим для любого элемента $x\in K^\cdot(X)$

$$\lambda_t(x)=1+\sum_{i=1}^\infty\lambda^i(x)\,t^i.$$

Это устанавливает существование операций λ^i; единственность очевидна.

Имеем, в частности, $\lambda^0(x)=1$, $\lambda^1(x)=x$ для всех x.

3.11. Пример. Рассмотрим проективное пространство $\mathbf{P}^r$ над некоторым полем. Кольцо $K(\mathbf{P}^r)$ было вычислено ранее ([2], 25.11): полагая $l=cl(O_{\mathbf{P}^r}(1))$, имеем

$$K(\mathbf{P}^r)\simeq\mathbf{Z}[X]/((1-X)^{r+1}),$$

где изоморфизм ставит в соответствие $X\sim\to l$.

Гомоморфизм λ_t легко вычислить, потому что x — класс обратимого пучка, так что $\lambda_t(l^i)=1+l^it$. Отсюда находим

$$\lambda_t\big(\sum_{i=0}^r a_il^i\big)=\prod_{i=0}^r(1+l^it)^{a_i}.$$

4. Проективизированные расслоения

4.1. В первой части этого курса было вычислено кольцо $K(\mathbf{P}_k^r)$, где k — поле. Цель ближайших трех разделов — обобщить этот результат на случай, когда вместо k рассматривается произвольная регулярная нётерова схема, имеющая обильный пучок.

Этот фундаментальный результат подобен теореме периодичности Атья — Ботта.

Нам придется провести некоторую подготовительную работу, чтобы определить понятия, входящие в формулировку основной теоремы.

4.2. Прежде всего, проективное пространство $\mathbf{P}_k^r = \operatorname{Proj} k[T_0, \ldots, T_r]$ мы обычно записывали с «выделенной системой координат» $(T_0, \ldots, T_r)$. В бескоординатной форме $\mathbf{P}_k^r = \operatorname{Proj} S_k(E)$, где E — $(r+1)$-мерное линейное пространство над k, а $S_k(E)$ — его симметрическая алгебра над k с естественной градуировкой. Аналогично $\mathbf{P}_A^r = \operatorname{Proj} S_A(E)$ для любого кольца A и любого свободного A-модуля E.

Заменив кольцо A на произвольную схему X, а свободный A-модуль E на локально свободный пучок $\mathscr{E}$ над X, мы можем аналогично построить схему, которая будет обозначаться через $\operatorname{Proj} S_{O_X}(\mathscr{E})$ или $\mathbf{P}(\mathscr{E})$. Проще всего описать ее явно, выбрав такое аффинное покрытие $X = \bigcup U_i$, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, что $\mathscr{E}$ тривиален на всех U_i. Тогда мы можем построить схемы $P_i = \operatorname{Proj} S_{A_i}(\Gamma(U_i, \mathscr{E}))$. Ограничение P_i над $U_i \cap U_j$ склеивается с ограничением P_j на $U_i \cap U_j$ очевидным образом; морфизмы $P_i \to U_i$ склеиваются в морфизм $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$.

Важно заметить, что обратимые пучки $O_{P_i}(1)$, определенные на каждом из P_i, также естественно склеиваются и дают обратимый пучок $O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$.

4.3. Мы часто будем пользоваться следующими фактами, которые оставим без доказательства:

а) Если X регулярна, то $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ регулярна.

б) Если на X есть обильный пучок $\mathscr{L}$, то и на $P(\mathscr{E})$ есть обильный пучок: $\mathscr{L} \underset{O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}}{\otimes} O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(n)$ обилен для $n \geqslant n_0$ ([1], гл. II, предложение 4.6.13 (ii)).

Схема $\mathbf{P}(\mathscr{E})$, построенная для данного локально свободного пучка $\mathscr{E}$ на X, и будет для нас заменой проективного пространства; мы вычислим кольцо $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.

Ответ, очевидно, должен зависеть от $K(X)$; эта зависимость отражается в существовании гомоморфизма колец $K(X) \to K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, индуцированного морфизмом схем $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$. Мы построим сейчас этот гомоморфизм в общем случае.

4.4. Предложение. *Для любого морфизма схем $f\colon X \to Y$ можно определить канонический гомоморфизм колец $f^*\colon K^{\cdot}(Y) \to K^{\cdot}(X)$, так что $X \rightsquigarrow K^{\cdot}(X)$ превращается в контравариантный функтор из категории нётеровых схем в категорию колец.*

Набросок доказательства. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм схем, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на Y. Тогда определен когерентный пучок $f^*(\mathscr{F})$ на $\mathscr{F}$ — «обратный образ» пучка $\mathscr{F}$. Она однозначно определяется следующими свойствами:

а) Если f — открытое вложение X в Y (т. е. отождествляет X с открытым подмножеством $f(X)$ в Y, а O_X — с $O_Y|_{f(X)}$), то $f^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F}|_X$.

б) Если $f\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ — морфизм аффинных схем, отвечающий гомоморфизму колец $\varphi\colon B \to A$, а $\mathscr{F} = \widetilde{F}$, то $f^*(\mathscr{F}) = \widetilde{A \underset{B}{\otimes} F}$, где A рассматривается как B-алгебра относительно φ.

в) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

г) f^* есть ковариантный функтор $\mathscr{S}_Y \to \mathscr{S}_X$, который в случае б) совпадает с обычной заменой кольца.

Мы опускаем доказательство существования «обратного образа», которое сводится к проверке различных совместимостей. Вот доказательство единственности и заодно метод вычисления: пусть $V \subset Y$, $U \subset f^{-1}(V)$ — аффинные открытые множества. Из диаграммы вложений i, j и ограничения f на U, V

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle i}\uparrow\!\bigcup & & \bigcup\!\uparrow{\scriptstyle j} \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

находим, пользуясь свойствами а), б), в):

$$\Gamma(U, i^* f^*(\mathscr{F})) = \Gamma(U, g^* j^*(\mathscr{F})) =$$
$$= \Gamma(U, O_U) \underset{\Gamma(V, O_V)}{\otimes} \Gamma(V, j^*(\mathscr{F})) = \Gamma(U, O_U) \underset{\Gamma(V, O_V)}{\otimes} \Gamma(V, \mathscr{F}|_V).$$

Стало быть, сечения пучка $f^*(F)$ однозначно определены для достаточно мелких открытых подмножеств $U \subset X$; так же легко определить отображения ограничения.

Из локального описания вытекают следующие факты: во-первых, если $\mathscr{F}$ локально свободен, то $f^*(\mathscr{F})$ локально свободен и имеет тот же ранг; во-вторых, f^* переводит короткие точные последовательности *локально свободных* пучков в точные последовательности; в-третьих, для таких пучков

$$f^*(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2) = f^*(\mathscr{F}_1) \otimes f^*(\mathscr{F}_2).$$

Отсюда следует, что f^* индуцирует некоторый гомоморфизм колец $K^{\cdot}(Y) \to K^{\cdot}(X)$, который мы обозначим также f^*. Равенство $(fg)^* = g^* f^*$ следует из в).

Отметим, что $f^* \lambda^i = \lambda^i f^*$: это также немедленно следует из локального описания f^*.

Теперь мы можем сформулировать основной результат:

4.5. Теорема. *Пусть X — связная регулярная нётерова схема с обильным пучком, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ на ней, $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ — схема, описанная в п. 4.1, $\mathscr{L} = O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$ — стандартный обратимый пучок на ней.*

Тогда кольцо $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, *как* $K(X)$*-алгебра, имеет вид*

$$K(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = K(X)[T]/\Big(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\lambda^{r+1-i}(e)\,T^i\Big),$$

где $e = cl(\mathscr{E}) \in K(X)$,

$$T \bmod \Big(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\lambda^{r+1-i}(e)\,T^i\Big) = l = cl(\mathscr{L}) \subset K(\mathbf{P}(\mathscr{E})).$$

В частности, $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ *является свободным* $K(X)$*-модулем ранга* $r+1$.

Пример. Пусть $\mathscr{E}$ свободен: $\mathscr{E} = (O_X)^{r+1}$, X — k-схема, где k некоторое поле. Тогда $e = r+1$, $\lambda^i(e) = \binom{r+1}{i}$; с другой стороны, $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = X \times \mathbf{P}^r_k$. Отсюда

$$K(X\times \mathbf{P}^r_k) = K(X)[T]/(1-T)^{r+1} = K(X) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} K(\mathbf{P}^r_k).$$

При $k = \mathbf{C}$, $r = 1$ этот результат аналогичен теореме (комплексной) периодичности Ботта (в формулировке Атья — Ботта) для топологического K-функтора, потому что прямая $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ гомеоморфна римановой сфере S^2.

Доказательство. Мы должны установить следующие утверждения:

4.6. Утверждение. $\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^*(\lambda^{r+1-i}(e))\,l^i = 0$, *где* $f\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — *естественная проекция.*

4.7. Утверждение. *Элементы* l^i $(i = 0, \ldots, r)$ *линейно независимы над* $K(X)$.

4.8. Утверждение. *Элементы* l^i, $i \in \mathbf{Z}$, *порождают* $K(X)$*-алгебру* $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.

Пункты 4.9 и 4.10 будут посвящены доказательству утверждения 4.6; раздел 5 — доказательству утверждения 4.7, наконец, раздел 6 — доказательству 4.8.

Для доказательства 4.6 нам понадобится одно вспомогательное предложение, представляющее самостоятельный интерес.

4.9. Предложение. *Пусть* $\mathscr{E}$ — *локально свободный пучок на схеме* X; $f\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ — *естественное отображение. Тогда существует канонический эпиморфизм*

$$f^*(\mathscr{E}) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1) \to 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathscr{E} = \widetilde{E}$, где E — свободный A-модуль. Тогда в обозначениях ([2], 23) имеем

$$\Gamma_*(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ f^*(\mathscr{E})) = E \underset{A}{\otimes} S_A(E),$$

$$\Gamma_*(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)) = S_A(E)(1).$$

(Напомним, что $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = \operatorname{Proj} S_A(E)$, а функтор Γ_* ставит в соответствие квазикогерентному пучку $\mathscr{F}$ на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ градуированный $S_A(E)$-модуль $\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\ \mathscr{F}(n))$.)

Кроме того, имеется очевидный гомоморфизм модулей

$$E \otimes S_A(E) \to S_A(E)(1),$$
$$e \otimes f \sim\!\to ef.$$

Он эпиморфен, потому что E порождает $S_A(E)$. Так как Γ_* есть эквивалентность категории пучков с категорией модулей, этому гомоморфизму отвечает эпиморфизм пучков

$$f^*(\mathscr{E}) \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1).$$

Совместимость таких отображений с локализацией по A легко проверяется. Это доказывает требуемое в общем случае.

(На самом деле здесь не обязательно пользоваться общим результатом об эквивалентности категорий, ибо наше утверждение гораздо более элементарно и легко проверяется с помощью явного вычисления групп сечений.)

4.10. Доказательство утверждения 4.6. Из доказанного предложения следует, что существует эпиморфизм

$$f^*(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{L}^{-1} \to O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}.$$

Пусть a — класс ядра этого эпиморфизма. Так как ядро является локально свободным пучком ранга r, имеем $\lambda^i a = 0$ при $i \geqslant r+1$.

Далее, в обозначениях п. 4.5,

$$f^*(e)\,l^{-1} = 1 + a.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор λ_t (см. п. 3.10):

$$\sum_{i=0}^{r+1}\lambda^i(f^*(e)\,l^{-1})\,t^i = (1+t)\Big(\sum_{i=0}^{r}\lambda^i(a)\,t^i\Big).$$

Положим здесь $t = -1$ и учтем, что для любого пучка $\mathscr{F}$ и обратимого пучка $\mathscr{L}$ имеем $\Lambda^i(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}) \simeq \Lambda^i(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{L}^i$:

$$\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^*(\lambda^i(e))\,l^{-i} = 0,$$

или

$$\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i f^*(\lambda^i(e))\,l^{r+1-i} = 0,$$

откуда соотношение 4.6 получается заменой i на $r+1-i$.

5. Вычисление $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ и принцип расщепления

5.1. В этом разделе мы докажем утверждение 4.7. Для этого нам понадобятся некоторые сведения *о прямых образах* пучков.

Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм, $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Пучок $f_*(\mathscr{F})$ на Y определяется своими сечениями над любым открытым множеством $U \subset Y$

$$\Gamma(U, f_*(\mathscr{F})) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{F}).$$

Он квазикогерентен.

Отображение $\mathscr{F} \sim\!\to f_*(\mathscr{F})$ является ковариантным функтором из категории квазикогерентных пучков на X в категорию таких пучков на Y. Если

$X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$, $\varphi: B \to A$ — гомоморфизм колец, то f_* соответствует функтору, который каждому A-модулю F ставит в соответствие B-модуль $F_{[\varphi]}$, совпадающий как группа с F; действие B на $F_{[\varphi]}$ определяется так: $b_s = \varphi(b)s$ для всех $b \in B$, $b \in B$, $s \in F$.

В случае, когда $Y = \mathrm{Spec}\, k$, k — поле, имеем

$$f_*(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Это показывает, что функтор f_*, вообще говоря, неточен. На самом деле, он, как и Γ, точен слева; его правые производные функторы обозначаются $R^i f_*$, пучки $R^i f_*(\mathcal{F})$ иногда называются *высшими прямыми образами* пучка $\mathcal{F}$.

Пучок $R^i f_*(\mathcal{F})$ ассоциирован с предпучком на Y

$$U \leadsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F});$$

при $i > 0$ этот предпучок, вообще говоря, не является пучком.

Следующая формула связывает прямые и обратные образы.

Пусть $f: X \to Y$ — морфизм, $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на Y, $\mathcal{G}$ — квазикогерентный пучок на X. Тогда существует естественный изоморфизм пучков

$$f_*(f^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{F} \otimes f_*(\mathcal{G}).$$

(Так как результат локален по Y, достаточно рассмотреть случай, когда $Y = \mathrm{Spec}\, A$ и $\mathcal{F} = O^r_Y$. Из определения f^* немедленно получается, что $f^*(\mathcal{F}) = O^r_X$, и требуемое равенство становится очевидным.)

В частности, при фиксированном $\mathcal{F}$ функтор $\mathcal{G} \leadsto f_*(f^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G})$ точен слева и его производные совпадают с производными функтора $\mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes f_*(\mathcal{G})$, которые просто равны $\mathcal{F} \otimes R^i f_*(\mathcal{G})$, ибо умножение на $\mathcal{F}$ сохраняет точные последовательности.

Следовательно,

$$R^i f_*(f^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{F} \otimes R^i f_*(\mathcal{G}) \text{ для всех } i \geqslant 0. \qquad (1)$$

Наконец, нам понадобится следующий факт.

Пусть X — нётерова схема, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на ней, $f: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ — морфизм, описанный в предыдущем разделе. Тогда для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ все пучки $R^i f_*(\mathcal{F})$ когерентны. В самом деле, они квазикогерентны по определению и имеют локально конечный тип по теореме Серра ([2], 22.1).

5.2. Лемма. *Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ — когерентные пучки на* $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. *Если $cl(\mathcal{F}) = cl(\mathcal{G}) \in K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$, то для всех $n \geqslant n_0$ имеем*

$$cl(f_* \mathcal{F}(n)) = cl(f_*(\mathcal{G}(n)) \in K(X),$$

где

$$\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \underset{\mathbf{P}(\mathcal{E})}{\otimes} \mathcal{L}^n, \quad \mathcal{L} = O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1). \qquad (2)$$

Доказательство. Из равенства $cl(\mathcal{F}) = cl(\mathcal{G})$ следует, что в группе $\mathbf{Z}[\mathcal{S}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}]$ имеем

$$\mathcal{F} - \mathcal{G} = \sum_i n_i(\mathcal{U}_i + \mathcal{V}_i - \mathcal{W}_i),$$

где пучки под знаком суммы связаны точными последовательностями: $0 \to \mathcal{U}_i \to \mathcal{W}_i \to \mathcal{V}_i \to 0$ (мы пишем пучки вместо их классов с точностью до изоморфизма). Так как тензорное умножение на $\mathcal{L}$ сохраняет все точные последовательности, имеем для всех n равенство в группе $\mathbf{Z}[S_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}]$

$$\mathcal{F}(n) - \mathcal{G}(n) = \sum n_i(\mathcal{U}_i(n) + \mathcal{V}_i(n) - \mathcal{W}_i(n)),$$

откуда в группе $\mathbf{Z}[\mathcal{S}_X]$

$$f_*(\mathcal{F}(n)) - f_*(\mathcal{G}(n)) = \sum n_i(f_*(\mathcal{U}_i(n) + f_*(\mathcal{V}_i(n) - f_*(\mathcal{W}_i(n)).$$

Из теоремы Серра ([2], 22.1) следует, что при $n \geqslant n_0$ для достаточно мелких $U \subset X$ имеем

$$H^i(f^{-1}(U), \mathcal{U}_i(n)) = 0, \quad i \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\forall i\, R^i f_*(\mathcal{U}_i(n)) = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

так что последовательности

$$0 \to f_*(\mathcal{U}_i(n)) \to f_*(\mathcal{W}_i(n)) \to f_*(\mathcal{V}_i(n)) \to 0$$

точны на X, что доказывает равенство

$$cl(f_*(\mathcal{F}(n)) = cl(f_*(\mathcal{G}(n)).$$

5.3. Лемма. *Предположим, что в $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ имеет место соотношение*

$$\sum_{i=0}^{r} f^*(x_i)\, l^i = 0, \qquad x_i \in K(X).$$

Тогда, полагая $\sigma^n(e) = cl(S^n(\mathcal{E})) \in K(X)$ ($S^n(\mathcal{E})$ — n-я симметрическая степень), имеем для всех $n \geqslant n_0$ в $K(X)$

$$\sum_{i=0}^{r} x_i \sigma^{n+i}(e) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x_i = cl(\mathcal{F}_i) - cl(\mathcal{F}'_i)$ в $K(X)$, где $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ — локально свободные пучки на X; положим

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{r} f^*(\mathcal{F}_i(i)), \quad \mathcal{M}' = \bigoplus_{i=0}^{r} f^*(\mathcal{F}'_i(i)).$$

Из условия леммы следует, что в $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ имеем

$$cl(\mathcal{M}) = cl(\mathcal{M}').$$

Согласно предыдущей лемме

$$cl(f_*(\mathcal{M}(n)) = cl(f_*(\mathcal{M}'(n)), \quad n \geqslant n_0,$$

т. е.

$$cl\,[\bigoplus_{i=0}^{r} f_*(f^*(\mathcal{F}_i) \otimes \mathcal{L}^{n+i})] = cl\,[\bigoplus_{i=0}^{r} f_*(f^*(\mathcal{F}'_i) \otimes \mathcal{L}^{n+i}].$$

Так как $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}'_i$ — локально свободные пучки, замечание в конце п. 5.1 показывает, что

$$f_*(f^*(\mathcal{F}_i) \otimes \mathcal{L}^{n+i}) = \mathcal{F}_i \otimes f_*(\mathcal{L}^{n+i}).$$

С другой стороны, из теоремы ([2], 23.6) вытекает, что

$$f_*(\mathcal{L}^{n+i}) = S^{n+i}(\mathcal{E}).$$

Следовательно,

$$f_*(\mathcal{M}(n)) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{F}_i \otimes S^{n+i}(\mathcal{E}),$$

$$f_*(\mathcal{M}'(n)) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{F}'_i \otimes S^{n+i}(\mathcal{E}),$$

откуда и получается утверждение леммы.

5.4. Лемма. *Для всех $n \geqslant 1$ в кольце $K(X)$ имеет место соотношение*

$$\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \lambda^i(e)\,\sigma^{n-i}(e) = 0,$$

где по определению $\sigma^j(e) = 0$ при $j < 0$.

Доказательство. Определим для любого p, $1 \leqslant p \leqslant r+1$, гомоморфизм пучков O_X-модулей

$$d_p : \Lambda^p \mathcal{E} \otimes S(\mathcal{E}) \to \Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \otimes S(\mathcal{E}),$$

полагая для всякого открытого множества $U = \operatorname{Spec} A \subset X$, над которым $\mathcal{E}$ тривиален:

$$d_p((f_1 \wedge \ldots \wedge f_p) \otimes g) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} (f_1 \wedge \ldots \wedge \hat{f_i} \wedge \ldots \wedge f_p) \otimes (f_i \otimes g),$$

где $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, $g \in \Gamma(U, S(\mathcal{E}))$.

Без труда проверяется, что такие гомоморфизмы существуют и что $d_{p-1} \circ d_p = 0$. Обозначим еще через $\mathcal{E}$ естественную проекцию $S(\mathcal{E}) \to O_X$ пучка градуированных алгебр на компоненту нулевой степени; получается комплекс O_X-модулей

$$0 \to \Lambda^{r+1}\mathcal{E} \otimes S(\mathcal{E}) \to \Lambda^r \mathcal{E} \otimes S(\mathcal{E}) \to \ldots \to \Lambda^1 \mathcal{E} \otimes S(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathcal{E}} O_X \to 0.$$

Этот комплекс ацикличен. Действительно, над всяким открытым множеством $U = \operatorname{Spec} A$, над которым $\mathcal{E}$ тривиален и соответствует A-модулю E, комплекс сечений является комплексом Кошуля, построенным для симметрической алгебры $S_A(E)$ и $S_A(E)$-последовательности, состоящей из какого-нибудь базиса E.

Так как d_p отображает $\Lambda^p \mathcal{E} \otimes S^q(\mathcal{E})$ в $\Lambda^{p-1}\mathcal{E} \otimes S^{q+1}(\mathcal{E})$, мы можем разбить этот комплекс в прямую сумму, получив для каждого $n \geqslant 1$ точную последовательность

$$0 \to \Lambda^{r+1}\mathcal{E} \otimes S^{n-r-1}(\mathcal{E}) \to \ldots \to \Lambda^1 \mathcal{E} \otimes S^{n-1}\mathcal{E} \to S^n(\mathcal{E}) \to 0,$$

где $S^j(\mathcal{E}) = 0$ при $j < 0$.

Это доказывает лемму.

5.5. Доказательство утверждения 4.7. Пусть $\sum_{i=0}^{r} f^*(x_i)\, l^i = 0$ в кольце $K(X)$. Из леммы 5.3 следует, что тогда $\sum_{i=0}^{r} x_i \sigma^{n+i}(e) = 0$ при $n \geqslant n_0$. Иначе говоря, в кольце $K(x)[[t]]$ степенной ряд

$$\left(\sum_{i=0}^{r} x_i t^{r-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i(e)\, t^i\right) = F(t) \qquad (2)$$

является на самом деле многочленом.

С другой стороны, лемма 5.4 дает тождество

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i(e)\, t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \lambda^i(e)\, t^i\right) = 1. \qquad (3)$$

Поэтому, умножая (2) на $\lambda_{-t}(e)$, получаем

$$\sum_{i=0}^{r} x_i t^{r-i} = F(t) \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \lambda^i(e)\, t^i.$$

Так как старший коэффициент $\lambda^{r+1}(e)$ обратим, сравнение степеней многочленов слева и справа показывает, что такое тождество возможно лишь при $F(t) = 0$, так что $x_i = 0$ при $i = 0, \ldots, r$.

Отметим одно важное следствие из уже доказанных результатов: так называемый «принцип расщепления».

5.6. Предложение. *Пусть X — нётерова регулярная схема с обратимым пучком, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ на ней. Тогда существует такой морфизм $Y \xrightarrow{f} X$, где Y — нётерова и регулярна, и такие обратимые пучки $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{r+1}$ на Y, что выполнены следующие два условия:*

а) *Гомоморфизм колец f^*: $K(X) \to K(Y)$ является вложением.*

б) *$f^*(e) = l_1 + \ldots + l_{r+1}$, где*

$$e = cl(\mathcal{E}) \in K(X), \quad l_i = cl(\mathcal{L}_i) \in K(Y).$$

Доказательство. Согласно предложению 4.9 у пучка $\mathcal{E}$, поднятого на $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, имеется обратимый фактор-пучок; поэтому в $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ класс $f^*(e)$ распадается в сумму классов обратимого пучка и локально свободного пучка на единицу меньшего ранга. Итерируя эту конструкцию, получаем требуемое; мономорфность f^* следует из утверждения 4.7.

6. Вычисление $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ (окончание)

Здесь мы докажем утверждение 4.8, опуская проверку ряда технических фактов. Доказательство будет разбито на несколько шагов.

6.1. Первый шаг. Цель его — свести задачу вычисления $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ к некоторой задаче о пучках *на* X. Для случая $X = \operatorname{Spec} k$ этот шаг состоит в сопоставлении каждому когерентному пучку на $\mathbf{P}_k^r$ некоторого градуированного модуля над однородным координатным кольцом проективного пространства, т. е. градуированного линейного пространства над k. В общем случае появляются пучки градуированных модулей над пучком алгебр $S(\mathcal{E})$. Нам нужны также функториальные свойства этого соответствия, формализующие то обстоятельство, что «при рассмотрении градуированных объектов конечным числом однородных компонент можно пренебречь» (ср. [2], 23).

Начнем с точных определений.

6.2. Определение категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$. *Объекты $\mathcal{M}$ категории* $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ — локально свободные над X пучки градуированных $S(\mathcal{E})$-модулей конечного типа.

Точнее говоря, $\mathcal{M}$ задается, во-первых, набором своих однородных компонент:

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = 0 \text{ при } i < i_0(\mathcal{M}),$$

где $\mathcal{M}_i$ — локально свободные когерентные пучки на X, и, во-вторых внешним законом композиции

$$S^i(\mathcal{E}) \times \mathcal{M}_j \to \mathcal{M}_{i+j}, \quad \forall i, \ j \in \mathbf{Z},$$

который должен удовлетворять обычным аксиомам действия градуированного кольца на градуированный модуль.

Объекты вида $\bigoplus_{i=1}^{m} S(\mathcal{E})(n_i)$ называются свободными; напомним, что $(S(\mathcal{E})(n))_i = S^{n+i}(\mathcal{E})$; закон композиции определяется законом умножения в пучке алгебр $S(\mathcal{E})$.

По определению, $\mathcal{M}$ *имеет конечный тип*, если существуют такие целые числа $i_0 \leqslant i_1$, что естественный гомоморфизм пучков градуированных $S(\mathcal{E})$-модулей

$$\bigoplus_{i=i_0}^{i_1} \mathcal{M}_i \otimes S(\mathcal{E}) \to \bigoplus_{i \geqslant i_0} \mathcal{M}_i$$

является эпиморфизмом. В этом случае объекты $\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathcal{M}_i$ имеют конечный тип для всех n_0.

Морфизмы категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$. Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — два объекта из $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$; по определению

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \varinjlim_{n_0} \operatorname{Hom}_{S(\mathcal{E})}\Big(\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathcal{M}_i; \bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathcal{N}_i\Big),$$

где справа от знака $\varinjlim$ стоит группа однородных гомоморфизмов пучков градуированных модулей над пучком $S(\mathcal{E})$.

Композиция гомоморфизмов определяется очевидным образом.

Из этого определения следует, что объекты $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ в категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ изоморфны, если пучки $S(\mathcal{E})$-модулей $\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathcal{M}_i$, $\bigoplus_{i \geqslant n_0} \mathcal{N}_i$ изоморфны для некоторого n_0. Пучки $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ с такими свойствами называются *TN-изоморфными.*

Так как во всем последующем будут важны лишь классы пучков с точностью до TN-изоморфизма, мы для краткости будем иногда считать объектами категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ также все пучки, TN-изоморфные описанным в начале этого пункта.

Теперь мы можем сформулировать основной результат первого шага доказательства.

6.3. П р е д л о ж е н и е. *Пусть $\mathcal{F}$ — локально свободный когерентный пучок на* $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. *Положим*

$$\alpha(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(\mathcal{F}(n)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha(\mathcal{F})_n.$$

Тогда $\alpha(\mathcal{F})$ TN-изоморфен объекту категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$.

Отображение $\mathcal{F} \rightsquigarrow \alpha(\mathcal{F})$ является ковариантным функтором, который устанавливает эквивалентность категории $\mathcal{L}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$ локально свободных когерентных пучков на $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ с некоторой полной подкатегорией категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}(\mathcal{E})$, замкнутой относительно расширений.

З а м е ч а н и е. В этой формулировке неявно содержится утверждение о том, что если $\mathcal{F}$ локально свободен на $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, то $f_*(\mathcal{F}(n))$ локально свободен на X при всех $n \geqslant n_0$. Пучки, обладающие последним свойством допускают полную характеризацию: это в точности пучки, плоские над X. Нам этот факт не понадобится.

6.4. В т о р о й ш а г. Для применения результата 6.3 нам нужно знать, какие объекты в $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ соответствуют пучкам вида $f^*(\mathcal{F})(i)$, где $\mathcal{F}$ — когерентный локально свободный пучок на X. В силу 5.1, 5.2 имеем

$$\alpha(f^*(\mathcal{F})(i)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(f^*(\mathcal{F})(n+i)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F} \underset{O_X}{\otimes} S^{n+i}(\mathcal{E}) = \mathcal{F} \underset{O_X}{\otimes} S(i).$$

(Мы можем рассматривать $\mathcal{F}$ как градуированный пучок, для которого $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i = 0$, $i > 0$.)

6.5. Мы выведем теперь утверждение 4.8 из следующего результата.

П р е д л о ж е н и е. *Для всякого объекта $\mathcal{M}$ в категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ существует резольвента вида*

$$0 \to \mathfrak{Z}_r \to \mathcal{L}_r \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{M} \to 0, \qquad (1)$$

где $\mathcal{L}_i$ $(i = 0, \ldots, r)$ — прямые суммы пучков вида $\mathcal{F} \otimes_{O_X} S(\mathcal{E})(j)$ ($\mathcal{F}$ когерентен и локально свободен на X), а $\mathfrak{Z}_r$ имеет конечный убывающий ряд градуированных подпучков, факторы которого изоморфны прямым суммам пучков вида $\mathcal{F} \otimes_{O_X} S(\mathcal{E})(j)$.

Действительно, пусть этот результат доказан.

Пользуясь предложением 6.3 и вычислением в п. 6.4, находим, что для всякого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X существует резольвента, в которой все пучки, кроме последнего, являются прямыми суммами пучков $f^*(\mathfrak{G})(i)$, а у последнего есть композиционный ряд с факторами такого же вида. Переводя это утверждение на язык группы $K(X)$ и учитывая, что

$$cl(f^*(\mathfrak{G})(i)) = f^*(cl(\mathfrak{G}))\, l^i$$

в обозначениях п. 4.5, немедленно получаем требуемое.

6.6. Т р е т и й ш а г. Он будет состоять в доказательстве предложения 6.5.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольный объект из $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$. Так как он конечного типа, существует эпиморфизм

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{M} \to 0,$$

где $\mathcal{L}_0$ — конечная прямая сумма пучков вида

$$\mathcal{M}_i \otimes S(\mathcal{E}), \quad i \geqslant i_0.$$

Однородные компоненты ядра этого гомоморфизма, очевидно, локально свободны на X; из нётеровости X легко следует, что это ядро имеет конечный тип. Поэтому оно принадлежит категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$, и мы можем продолжить резольвенту такого типа как угодно далеко. Остановимся на r-м члене и обозначим через $\mathfrak{Z}_r$ ядро отображения $\mathcal{L}_r \to \mathcal{L}_{r-1}$.

Мы хотим доказать, что у $\mathfrak{Z}_r$ есть фильтрация с факторами описанного типа. Сначала установим, что *локально* $\mathfrak{Z}_r$ *изоморфен прямой сумме пучков* вида $S(\mathcal{E})(j)$. Для этого нам потребуется следующее обобщение теоремы Гильберта о сизигиях ([2], 25.10).

6.7. Лемма. *Пусть A — нётерово кольцо, $B = A[T_0, \ldots, T_r]$, M — B — модуль конечного типа, проективный над A. Тогда у M есть резольвента, состоящая из проективных B-модулей, длины $r+1$.*

Чтобы не нарушать последовательность изложения, доказательство этой леммы отнесено в последний пункт.

6.8. Вернемся к пучку $\mathfrak{Z}_r$. Для любой точки $x \in X$ существует аффинная окрестность $U = \operatorname{Spec} A$, над которой пучок $\mathcal{E}$ свободен; пусть $\mathcal{E} = \tilde{E}$, где E — свободный A-модуль. Сечения однородных компонент $\mathfrak{Z}_r$ над U являются проективными A-модулями конечного типа; поэтому $N = \Gamma(U, \mathfrak{Z}_r)$ как A-модуль проективен. Кроме того, N является градуированным модулем конечного типа над кольцом $S_A(E)$. Окрестность U можно считать настолько мелкой, что над ней все пучки $\mathcal{L}_i$ из резольвенты (1) изоморфны прямым суммам пучков вида $S(E)(k)$. Поэтому сечения (1) образуют точную последовательность градуированных $S_A(\mathcal{E})$-модулей:

$$0 \to N \to L_r \to \ldots \to L_0 \to M \to 0,$$

где L_i свободны.

В силу леммы 6.7, примененной к M и $B = S_A(E)$, $S_A(E)$-модуль N, рассматриваемый *без градуировки*, проективен и имеет конечный тип.

Отсюда следует, что A-модуль $A \underset{B}{\otimes} N$ проективен и конечного типа. (Здесь A рассматривается как B-алгебра относительно пополнения ε: $B \to A$; $\varepsilon(E) = 0$.) То же верно относительно его однородных компонент, лишь конечное число которых ненулевые.

Поэтому окрестность U можно еще уменьшить так, чтобы над ней $\widetilde{A \underset{B}{\otimes} N}$ стал свободен. Пусть U уже удовлетворяет этому условию.

Я утверждаю, что тогда N свободен как градуированный модуль над $S_A(E)$.

Действительно, поднимая до N элементы однородного свободного A-базиса модуля $A \underset{B}{\otimes} N$, находим гомоморфизм B-модулей

$$L \to M,$$

где L — свободный градуированный B-модуль. Пусть K, C — ядро и коядро этого гомоморфизма. После тензорного умножения на A над B он становится изоморфизмом. Поэтому, обозначая $I = \bigoplus_{i \geq 1} S_A^i(E)$, имеем $IK = K$, $IC = C$, откуда следует, что $K = C = 0$, ибо степени ненулевых однородных компонент K и C ограничены слева («градуированная лемма Накаяма», ср. [2], 26.18).

6.9. Предыдущий пункт показывает, что пучок Z_r локально над X изоморфен прямой сумме пучков вида $S(E)(k)$. Покажем, что любой объект $\mathcal{M}$ в категории $\mathfrak{S}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ с таким свойством допускает фильтрацию, факторы которой изоморфны прямым суммам пучков $\mathcal{F} \otimes S(\mathcal{E})(k)$.

Так как $\mathcal{M}$ конечного типа, существуют такие целые числа $i_0 \leqslant i$, что $\mathcal{M}$ порожден над $S(\mathcal{E})$ своими однородными компонентами степеней от i_0 до i_1.

Если $i_0 = i_1 = i$, то, очевидно, M изоморфен $\mathcal{M}_i \otimes S(\mathcal{E})$: это следует из локального свойства $\mathcal{M}$, о котором мы говорили.

В общем случае индукция по разности $i_0 - i_1$ немедленно показывает требуемое: из локальных соображений следует, что гомоморфизм

$$\mathcal{M}_{i_0} \otimes S(\mathcal{E}) \to \mathcal{M}$$

не имеет ядра, а фактор по нему удовлетворяет условиям, в которых выполнено индуктивное предположение.

6.10. Доказательство леммы 6.7. Напишем резольвенту L длины r модуля M, состоящую из свободных B-модулей конечного ранга и обозначим через N ядро последней стрелки. Для доказательства того, что N проективен, достаточно проверить, что для всех простых идеалов $Q \subset B$ локализация N_Q является B_Q — свободным модулем.

Рассмотрим B_Q как A_P-алгебру (где $P = A \cap Q$) A_P и B_P-нётеровы локальные кольца; пусть $\bar{P}$, $\bar{Q}$ — их максимальные идеалы; $k = A_P/\bar{P}$. Локализуя B-резольвенту модуля M по Q, мы получим B_Q-резольвенту $L_{\cdot} \underset{B}{\otimes} B_Q$ модуля M_Q. Но так как все модули $L_i \otimes B_Q$, а также модули циклов и границ A_P-проективны, то, умножая $L_{\cdot} \underset{B}{\otimes} B_Q$ тензорно на k над A_P, получим (ациклическую) $B_Q \underset{A}{\otimes} k$-резольвенту модуля $M_Q \otimes k$.

Поскольку $B_Q \otimes k$ является локализацией кольца $k[T_0, \ldots, T_r]$, пользуясь теоремой Гильберта о сизигиях получаем, что модуль $N_Q \otimes k$ свободен над $B_Q \otimes k$.

Таким образом, достаточно рассмотреть следующую ситуацию. Дан локальный гомоморфизм нётеровых локальных колец $A_P \to B_Q$ и B_Q-модуль N конечного типа; $N \underset{A_P}{\otimes} k$ свободен над $B_Q \otimes k$ (где k — поле классов вычетов A_P); требуется доказать, что N свободен над B_Q.

Поднимем элементы свободного базиса $N_Q \otimes k$ над $B_Q \otimes k$ до элементов из N и рассмотрим соответствующий гомоморфизм $B_Q^P \to N_Q$. Пусть K, C — его ядро и коядро соответственно.

Из леммы Накаяма легко следует, что $C = 0$; из точной последовательности Tor вытекает, что $K = 0$.

7. $K(X)$ как ковариантный функтор

7.1. Пусть X — проективная нётерова схема над полем k, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на ней. Напомним, что его характеристика $\chi(\mathcal{F})$ определяется формулой

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}). \qquad (1)$$

Эта сумма имеет смысл, потому что $\dim H^i(X, \mathscr{F}) < \infty$ и $H^i(X, \mathscr{F}) = \{0\}$ при $i > \dim X$ (теорема Серра).

Попытаемся обобщить это определение. Пусть сначала $X = \operatorname{Proj} R$, где R — градуированная нётерова A-алгебра (A — нётерово кольцо, заменяющее поле k). Тогда естественная замена (1) получится, если в альтернированной сумме вместо $\dim H^i(X, \mathscr{F})$ рассмотреть $\varphi(H^i(X, \mathscr{F}))$, где φ — произвольная аддитивная функция на категории нётеровых A-модулей. (Здесь снова теорема Серра обеспечивает нётеровость H^i и конечность суммы). Так как существует универсальная аддитивная функция $cl_.$ со значениями в группе $K_.(X)$, есть и «универсальная» эйлерова характеристика. Мы можем записать ее в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl_.(\widetilde{H^i(X, \mathscr{F})}) \in K_.(Y), \tag{2}$$

где $\widetilde{H^i(X, \mathscr{F})}$ — пучок на $Y = \operatorname{Spec} A$, модуль глобальных сечений которого совпадает с $H^i(X, \mathscr{F})$.

Наконец, сумму (2) можно переписать еще иначе, если заметить, что структура A-алгебры на R определяет некоторый морфизм $f\colon X = \operatorname{Proj} R \to \operatorname{Spec} A = Y$ и что в обозначениях п. 5.1 имеем

$$\widetilde{H^i(X, \mathscr{F})} = R^i f_* \mathscr{F}.$$

Тем самым сумма (2) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl_.(R^i f_* \mathscr{F}) \in K_.(Y). \tag{3}$$

Это выражение немедленно обобщается на случай морфизма $f\colon X \to Y$, где Y не обязательно аффинная схема. Чтобы оно имело смысл, однако, локально над Y строение f должно допустить применение теоремы Серра. Такие морфизмы можно описать следующим образом, обобщая конструкцию $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ в п. 4.2.

7.2. Пусть X — нётерова схема, $\mathscr{R}$ — квазикогерентный пучок нётеровых градуированных O_x-алгебр над ней. Для каждого открытого аффинного множества $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ определена нётерова градуированная A-алгебра $R = \Gamma(U, \mathscr{R})$, ее проективный спектр $\operatorname{Proj} R$ и морфизм $\operatorname{Proj} R \to U$. Все эти проективные спектры и морфизмы естественно склеиваются над разными U, и определяют морфизм

$$f\colon \operatorname{Proj} \mathscr{R} \to X.$$

Пусть, кроме того, $\mathscr{R}$ как $\mathscr{R}_0$-алгебра порождена пучком $\mathscr{R}_1$; тогда на каждой из схем $\operatorname{Proj} \Gamma(U, \mathscr{R})$ определен обратимый пучок $O(1)$ и все вместе они склеиваются в пучок, который мы будем обозначать $O_Y(1)$, где $Y = \operatorname{Proj} \mathscr{R}$.

Пучок алгебр $\mathscr{R}$ восстанавливается с помощью пучка $O_Y(1)$ с точностью до конечного числа компонент: в силу теоремы Серра существует гомоморфизм алгебр

$$\alpha\colon \bigoplus_{n=0}^{\infty} f_*(O_X(n)) \to \mathscr{R},$$

однородные компоненты α_n которого являются изоморфизмами при $n \geqslant n_0$.

7.3. О п р е д е л е н и е. ***Морфизмы** $f\colon Y \to X$, описанные в 7.2, **называются проективными морфизмами.***

7.4. П р и м е р ы. Морфизм $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$, *определенный в* п. 4.2, ***проективен.***

Более общо, пусть $\mathscr{F}$ — произвольный когерентный пучок на X. Обозначая через $S^n(\mathscr{F})$ n-ю симметрическую степень пучка $\mathscr{F}$ над O_X, построим пучок градуированных алгебр $\bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\mathscr{F}) = S(\mathscr{F})$. Можно проверить, что он нётеров. Тем самым определен проективный морфизм

$$\operatorname{Proj} S(\mathscr{F}) \to X.$$

Наконец, пусть $\mathscr{J} \subset O_X$ — когерентный пучок идеалов на X. Мы можем тогда рассматривать степени $\mathscr{J}^n$ внутри пучка O_X, и образовать пучок алгебр $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{J}^n$. Его проективный спектр вместе с морфизмом на X называется *моноидальным преобразованием X с центром в пучке $\mathscr{J}$* (или в подсхеме Y, $O_Y = O_X/\mathscr{J}$). Несколько позже мы будем подробно изучать структуру таких морфизмов и поведение $K(X)$ относительно них.

Теперь мы воспользуемся формулой (3), чтобы для всякого проективного морфизма $f\colon Y \to X$ определить гомоморфизм групп $K_.(Y) \to K_.(X)$, обобщающий эйлерову характеристику. Для проверки корректности нам нужен следующий легкий вариант теоремы Серра.

7.5. Л е м м а. *Пусть $f\colon Y \to X$ — проективный морфизм нётеровых схем, и пусть на X есть обильный пучок, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на Y. Тогда $R^i f_* \mathscr{F}$ — когерентные пучки на X и $R^i f_* \mathscr{F} = 0$ при $i \geqslant i_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, можно свести все к случаю, когда $Y = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — некоторый локально свободный пучок на X. Действительно, пусть $Y = \operatorname{Proj} \mathscr{R}$, где $\mathscr{R}$ порождена над O_X пучком $\mathscr{R}_1$. Так как на X есть обильный пучок, существует эпиморфизм $\mathscr{E} \to \mathscr{R}_1$ ($\mathscr{E}$ локально свободен), определяющий замкнутое погружение $Y \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ (над X). Прямые образы пучка $\mathscr{F}$ совпадают с прямыми образами его «продолжения нулем» на $\mathbf{P}(\mathscr{E})$.

Поскольку определение $R^i f_* \mathscr{F}$ и свойство пучка быть когерентным локально по X, мы можем считать далее, что $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, и $\mathscr{E} = \widetilde{E}$, где E — свободный A-модуль; а в этом случае утверждение леммы прямо следует из теоремы Серра. (Нётеровость базы обеспечивает существование общего i_0, начиная с которого $R^i f_* \mathscr{F} = 0$).

7.6. Т е о р е м а. *Пусть $f\colon Y \to X$ — проективный морфизм, X — гладкая квазипроективная схема. Тогда отображение*

$$\mathscr{F} \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i cl_.(R^i f_* \mathscr{F})$$

является аддитивной функцией на категории когерентных пучков на Y со значениями в группе $K_.(X)$ и, следовательно, определяет гомоморфизм групп

$$f_*\colon K_.(Y) \to K_.(X)$$

(не путать f_* с прямым образом *пучка*!).

Доказательство теоремы 7.6 очень просто и в сущности повторяет доказательство аддитивности эйлеровой характеристики, поэтому мы его не приводим.

7.7. Пример. Пусть $Y = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, $l = cl.(O_Y(1)) \in K(Y)$. Все необходимое для вычисления $f(l^i)$, $i \geqslant 0$, нам известно (теорема Серра):

$$f_*(O(i)) = S^i(\mathscr{E}),$$
$$R^k f_*(O(i)) = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 1, \ i \geqslant 0.$$

Отсюда

$$f_*(l^i) = \sigma^i(l), \quad i \geqslant 0.$$

Упражнение. Пользуясь вычислением когомологий пучка $O(i)$ на $\mathbf{P}^r_A$ при $i \leqslant 0$, вычислить $f_*(l^i)$ для отрицательных i.

7.8. Пример. Пусть $i: Y \to X$ — замкнутое вложение. Легко видеть, что это — проективный морфизм:

$$Y = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} O_Y t^n\right)$$

(t — вспомогательная «градуирующая» переменная).

Далее, $i_*(\mathscr{F})$ есть «продолжение нулем», так что i_* — точный функтор. Поэтому

$$i_*(cl.(\mathscr{F})) = cl.(i_*(\mathscr{F})).$$

Упражнение. Вычислить i_* для линейного вложения проективных пространств над полем: $\mathbf{P}^s_k \to \mathbf{P}^r_k$, зная явный вид K.

Теперь мы можем установить основные свойства f_*, являющиеся новыми по сравнению со свойствами эйлеровой характеристики:

7.9. Теорема. *Пусть* $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ — *два проективных морфизма и на* X *есть обильный пучок. Тогда морфизм* fg *тоже проективен и*

$$(fg)_* = f_* g_*.$$

Набросок доказательства. Мы опустим доказательство того, что fg — проективный морфизм (см: [1], гл. II, предложение 5.5.5 (ii) и предложение 4.6.13 (ii)).

Доказательство второго утверждения опирается на следующую лемму.

7.10. Лемма. *В условиях теоремы* 7.9 *пусть* $\mathscr{F}$ — *когерентный пучок на* Z. *Тогда существует когомологическая спектральная последовательность, для которой*

$$E_2^{p,q} = R^q f_*(R^q g_*(\mathscr{F})),$$

сходящаяся к $R^n(fg)_*(\mathscr{F})$.

Доказательство. Мы применим общую теорему Гротендика о спектральной последовательности произведения функторов (Гротендик. О некоторых вопросах гомологической алгебры, гл. II, теорема 2.4.1). Ситуация следующая: даны три абелевых категории — *квазикогерентных* пучков на Z, Y, X и два функтора $\mathscr{F}_Z \xrightarrow{g_*} \mathscr{F}_Y \xrightarrow{f_*} \mathscr{F}_X$. Во всех этих категориях достаточно много инъективных объектов, оба функтора точны слева.

Поэтому для применимости теоремы Гротендика достаточно проверить, что при $q > 0$

$$(R^q f_*)(g_* \mathscr{J}) = 0,$$

если $\mathscr{J}$ — любой инъективный пучок на X.

Пучок $(R^q f_*)(g_* \mathscr{J})$ связан с предпучком на X

$$U \rightsquigarrow H^q(f^{-1}(U), g_*(\mathscr{J}));$$

поэтому достаточно доказать, что этот предпучок является нулевым. С другой стороны, группы когомологий можно вычислить по Чеху. Пусть (V_i) — конечное аффинное покрытие $f^{-1}(U)$ на Y; тогда

$$H^q(f^{-1}(U), g_*(\mathscr{J})) = \check{H}^q((V_i), g_* \mathscr{J}).$$

Но комплекс Чеха $C^q((V_i), g_* \mathscr{J})$, как легко видеть, изоморфен комплексу Чеха

$$C^q(g^{-1}(V_i); \mathscr{J})$$

покрытия $(g^{-1}(V_i))$ некоторого открытого множества в Z с коэффициентами в $\mathscr{J}$.

Ограничение пучка $\mathscr{J}$ на $Ug^{-1}(V_i) = (fg)^{-1}(U)$ является по-прежнему инъективным пучком. (Это легко следует из определения инъективности и возможности продолжения пучков.)

Поэтому для доказательства леммы достаточно установить следующий результат: пусть $\mathscr{J}$ — инъективный пучок на схеме Z, (U_i) — произвольное конечное покрытие Z; тогда $\check{H}^q((U_i), \mathscr{J}) = 0$ при $q > 0$.

Для этого достаточно показать, что комплекс Чеха имеет вид $C^q((U_i), \mathscr{J}) = \operatorname{Hom}(\tilde{C}_q, \mathscr{J})$, где $(\tilde{C}_q)$ — некоторый комплекс пучков на Z, ацикличный в размерностях > 0.

Действительно, обозначим через $\mathfrak{Z}$ пучок, связанный с постоянным предпучком $\mathbf{Z}$; пусть U — переменное открытое множество; положим

$$\tilde{C}_q(U) = \prod_i{}' \Gamma(U \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_q}, \mathfrak{Z}),$$

где штрих указывает, что мы рассматриваем лишь симметрические коцепи. Определим далее дифференциал обычной формулой. Тогда ацикличность $\tilde{C}$ получается с помощью известной гомотопии.

7.11. Доказательство теоремы 7.9. Утверждение теоремы следует теперь из леммы 7.10 с помощью обычных соображений «сохранения характеристики Эйлера в спектральной последовательности».

Точнее говоря, пусть

$$\ldots \subset F^p R^n(fg)_*(\mathscr{F}) \subset F^{p+1} R^n(fg)_*(\mathscr{F}) \subset \ldots$$

— такая фильтрация пучка $R^n(fg)(\mathscr{F})$, что ее p-й фактор изоморфен пучку $E_\infty^{p,\,n-p}$ в спектральной последовательности, для которой $E_2^{p,q} = R^p f(R^q g\, \mathscr{F})$. Тогда

$$(fg)_*(cl.\mathscr{F}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(R^n(fg)_*(\mathscr{F})) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} cl.(E_\infty^{p,\,n-p}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n cl.(E_\infty^n).$$

С другой стороны,

$$g_*(cl_\cdot(\mathcal{F})) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\, cl_\cdot(R^q g_*(\mathcal{F}));$$

$$f_*(g_* cl_\cdot(\mathcal{F})) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q f_*(cl_\cdot(R^q g_*\mathcal{F})) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^q \sum_{q=0}^{\infty} cl_\cdot(R^p f_*(R^q g_*\mathcal{F})) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{p=0}^{n-p} cl_\cdot(R^p f_*(R^{n-p} g_*\mathcal{F})) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{p=0}^{n} cl_\cdot(E_2^n).$$

Но так как комплекс $(E^{\cdot}_{r+1})$ является комплексом гомологий для $(E^{\cdot}_r)$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n cl_\cdot(E_2^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n cl_\cdot(E_3^n) = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n cl_\cdot(E_\infty^n),$$

что и доказывает требуемое.

7.12. Если $K_\cdot = K^\cdot = K$, то гомоморфизм групп f_*: $K(Y) \to K(X)$, вообще говоря, не является гомоморфизмом колец, как легко убедиться хотя бы на примере $Y = \mathbf{P}_k^n$, $X = \operatorname{Spec} k$. Однако следующее частичное свойство мультипликативности справедливо и часто используется, особенно в случае, когда $K_\cdot = K^\cdot$.

7.13. **Предложение** («Формула проекции»). *Пусть f: $X \to Y$ — проективный морфизм, $x \in K_\cdot(X)$, $y \in K^\cdot(Y)$. Тогда*

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y.$$

Доказательство. В силу аддитивности обеих частей по x, y достаточно считать, что $y = cl^\cdot(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на Y и $x = cl_\cdot(\mathfrak{G})$. Тогда, пользуясь доказанным в разделе 5 равенством

$$R^i f_*(f^*(\mathcal{F}) \otimes \mathfrak{G}) = \mathcal{F} \otimes R^i f_*(\mathfrak{G}),$$

получаем

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = \sum_i (-1)^i cl_\cdot(R^i f_*(\mathfrak{G} \otimes f^*(\mathcal{F}))) =$$

$$= \sum_i (-1)^i cl_\cdot(R^i f_*(\mathfrak{G}) \otimes \mathcal{F}) =$$

$$= \sum_i (-1)^i cl_\cdot(R_i f_*(\mathfrak{G}))\, cl^\cdot(\mathcal{F}) = f_*(x) \cdot y.$$

8. γ-фильтрация кольца $K^\cdot(X)$

8.1. Определение. *Операции γ^i: $K^\cdot(X) \to K^\cdot(X)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются формулой*

$$\gamma_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i(x)\, t^i = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(x) = \sum \lambda^i(x)(t + t^2 + \ldots)^i \in 1 + tK(X)[[t]].$$

8.2. Следующие свойства операций γ^i немедленно получаются из определения:

а) $\gamma_t(x+y) = \gamma_t(x) \cdot \gamma_t(y)$, т. е.

$$\gamma^n(x+y) = \sum_{i+j=n}\gamma^i(x) \cdot \gamma^j(y);$$

б) $\gamma_t(1) = 1 + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}$; $\gamma_t(-1) = 1 - t$;

в) Пусть l — класс обратимого пучка; тогда

$$\gamma_t(l-1) = \gamma_t(l)\,\gamma_t(-1) = \left(1 + \frac{t}{1-t}\,l\right) \cdot (1-t) = 1 + t(l-1),$$

$$\gamma_t(1-l) = \frac{1}{\gamma_t(l-1)} = \sum_{i=0}^{\infty}(1-l)^i t^i.$$

8.3. Определение. *Введем в кольце $K^\cdot(X)$ фильтрацию, полагая*

$$F^1K^\cdot(X) = \operatorname{Ker}(K^\cdot(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}),$$

где ε — гомоморфизм, ставящий в соответствие классу локально свободного пучка на X ранг его слоя (X считается связным), и

$$F^nK^\cdot(X) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}\text{—модуль, порожденный элементами } \gamma_1^{r}x_1 \ldots \gamma_k^{r_k}x_k, \\ \text{где } x_i \in F^1K^\cdot(X), \quad \sum r_i \geqslant n. \end{array} \right.$$

(Мотивировка определения см. ниже, п. 8.12.)

8.4. Без труда проверяется, что $\{F^iK^\cdot(X)\}$ — действительно фильтрация кольца; в частности, $F^iK^\cdot(X)$ — идеалы, потому что

$$x(\gamma_1^{r_1}x_1 \ldots \gamma_k^{r_k}x_k) = (x - \varepsilon(x))(\gamma_1^{r_1}x_1 \ldots \gamma_k^{r_k}x_k) + \varepsilon(x)(\ldots)$$

и первый член в этой сумме принадлежит $F^{i+1}K(X)$.

Нашей ближайшей задачей будет подробное изучение этой фильтрации. Начнем с простейшего случая.

8.5. Предложение. *Допустим, что аддитивная группа кольца $K^\cdot(X)$ порождена классами обратимых пучков на X. Тогда*

$$F^iK^\cdot(X) = (F^1K^\cdot(X))^i.$$

Доказательство. Пусть (l_i) — классы обратимых пучков. Так как

$$(l_1 - 1) \ldots (l_i - 1) = \gamma^1(l_1 - 1) \ldots \gamma^1(l_i - 1),$$

то всегда $(F^1K^\cdot(X))^i \subset F^iK^\cdot(X)$. Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что $\gamma^i(x) \in (F^1K^\cdot(X))^i$ при всех $i \geqslant 1$, $x \in F^1K(X)$. В силу формулы 8.2а) можно ограничиться случаем, когда $x = \pm(l-1)$, а этот случай вытекает из формул 8.2а).

8.6. Пример. $F^iK^\cdot(\mathbf{P}_h^r) = ((l-1)^i)$, где $l = k(O(1))$. Следующий результат верен в общем случае.

8.7. Предложение. *Пусть на X есть обильный пучок. Тогда $F^1K^\cdot(X)$ является нильрадикалом кольца $K^\cdot(X)$.*

Доказательство. Из принципа расщепления (5.6) легко следует, что достаточно установить нильпотентность элементов вида $l-1$, где l — класс обратимого пучка.

Так как на X есть обильный пучок $O_X(1)$, относительно которого определена операция скручивания, для достаточно большого целого числа n существует число m и точная последовательность вида

$$O_X^m \to \mathcal{L}^{-1}(n) \to 0,$$

откуда

$$\mathcal{L} \otimes O_X^m(-n) \to O_X \to 0.$$

Пусть $l_1 = cl.(O_X(1))$, тогда ядро последнего гомоморфизма локально свободно ранга $m-1$, откуда в $K^{\cdot}(X)$ имеем

$$0 = \lambda^m (ml l_1^{-n} - 1) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \lambda^i (ml l_1^{-n}) = (-1)^m \lambda_{-1} (ml l_1^{-n}) =$$

$$= (-1)^m (\lambda_{-m} (l l_1^{-n}))^m = (-1)^m (1 - l l_1^{-n})^m.$$

Наконец,

$$(1-l) = 1 - l l_1^{-n} + l (l_1^{-n} - 1),$$

и оба слагаемых нильпотентны, если n достаточно велико.

Следствие. *Если $x \in F^1K(X)$, то $\gamma_t(x)$ является многочленом.* (Действительно, это верно для $x = \pm (l-1)$ в силу формул 8.2в) и доказанного предложения; принцип расщепления дает результат в общем случае.

Вычислим теперь фильтрацию в кольце $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.

8.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок ранга $r+1$ на X, $x = cl(O_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)) - 1$. Тогда*

$$F^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = \sum_{i=0}^{r} F^{k-i} K(X) x^i.$$

Доказательство. а) Сначала мы установим, что

$$F^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E})) = \sum_{i=0}^{\infty} F^{k-i} K(X) x^i.$$

Обозначим группу, стоящую справа, через $\Phi^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Очевидно, $\{\Phi^k\}$ является некоторой фильтрацией кольца $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$, причем $\Phi^k(K(\mathbf{P}(\mathscr{E})) \subset F^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. Для доказательства обратного включения поэтому достаточно установить, что

$$\gamma^k(y) \in \Phi^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$$

для всех $k \geqslant 1$ и всех y из некоторой системы образующих аддитивной группы $F^1K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$. В качестве такой системы образующих возьмем семейство элементов вида

$$a(l^m - 1), \; b,$$

где $a \in K(X)$, $l = x+1$, $m \geqslant 1$, $b \in F^1K(X)$. (Мы отождествляем $K(X)$ с подкольцом $K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$.) (Проверьте, что это действительно система образующих!).

Включение $\gamma^k(K(X)) \subset \Phi^k K(\mathbf{P}(\mathscr{E}))$ очевидно; поэтому достаточно установить, что

$$\gamma^k(a(l^m - 1)) \subset \Phi^k(K(\mathbf{P}(\mathscr{E})).$$

Пусть вообще l_1, l_2 — классы двух обратимых пучков на некоторой схеме. Положим $x_1 = l_1 - 1$, $x_2 = l_2 - 1$, $x_{12} = l_1 l_2 - 1$. Тогда имеем, пользуясь 8.2в) и тем, что $x_{12} = x_1 x_2 + x_1 + x_2$:

$$\gamma^k(x_1 x_2) = \gamma^k(x_{12} - x_1 - x_2) = \sum_{p+q+r=k} \gamma^p x_{12} \gamma^q(-x_1) \gamma^r(-x_2) =$$

$$= \sum_{q+r=k} (-x_1)^q (-x_2)^r + (x_1 x_2 + x_1 + x_2) \sum_{q+r=k-1} (-x_1)^q (-x_2)^r =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{i,k}(x_1) x_2^i,$$

где ненулевой младший член многочлена P_{ik} имеет степень $\geqslant k-i$. Пусть теперь $a = \sum_j (l_1^{(j)} - 1)$. Полагая $x_1^{(j)} = l_1^{(j)} - 1$, имеем тогда, пользуясь 8.2а) и предыдущей формулой:

$$\gamma^k(a x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(x_1^j) x_2^i,$$

где Q_i — *симметрический многочлен* от $\{x_1^{(j)}\}$, у которого младшая ненулевая однородная компонента имеет степень $\geqslant k-i$. Пусть S_n — n-я элементарная симметрическая функция от $x_1^{(j)}$; приписывая ей вес n, получаем, что $Q_i(x_1^{(j)})$ можно представить в виде многочлена $R_i(S_n)$, каждый ненулевой одночлен которого имеет вес $\geqslant k-i$. Но по 8.2а)

$$S_n = \gamma^n(a);$$

поэтому

$$\gamma^k(a(l^m - 1)) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(\gamma^1 a, \ldots, \gamma^k a, \ldots)(l^m - 1)^i,$$

где $R_i(\gamma^1 a, \ldots, \gamma^k a, \ldots) \in F^{k-i}K(X)$. В силу принципа расщепления это же верно для любых элементов $a \in K(X)$, представленных классами $\mathscr{F} - rk\,\mathscr{F}$ в $\mathbf{Z}[\mathscr{F}]$, где $\mathscr{F}$ локально свободен. Достаточно рассматривать лишь такие a, потому что они порождают всю аддитивную группу $K(X)$. Поскольку к тому же

$$(l^m - 1)^i = x^i (l^{m-1} + \ldots + 1)^i = x^i f(x),$$

где f — многочлен с целыми коэффициентами, получаем равенство (1).

б) Теперь мы должны установить, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} F^{k-i} K(X) x^i = \sum_{i=0}^{r} F^{k-i} K(X) x^i.$$

Для этого, конечно, нужно воспользоваться тем, что x над $K(X)$ удовлетворяет некоторому полиномиальному соотношению. Оно приведено в п. 4.6 для l; здесь мы несколько преобразуем его.

8.9. Лемма $\sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \gamma^i (e - r - 1) x^{r+1-i} = 0.$

Доказательство. Напомним, что $e = cl(\mathscr{E})$. Имеем

$$\gamma_t(e - r - 1) = \frac{\gamma_t(e)}{\gamma_t(r+1)} = (1-t)^{r+1} \lambda_{\frac{t}{1-t}}(e) = \sum_{i=0}^{r+1} \lambda^i(e) t^i (1-t)^{r+1-i},$$

так что $\gamma_t(e - r - 1)$ — многочлен степени $\leqslant r+1$.

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{r+1} \gamma^i (e - r - 1) t^{r+1-i} = t^r \gamma_{1/t}(e - r - 1) = \sum_{i=0}^{r+1} \lambda^i(e)(t-1)^{r+1-i}.$$

Подставляя сюда $t = 1 - l = -x$, получаем

$$\sum_{i=0}^{r+1} \gamma^i (e - r - 1)(-1)^i x^{r+1-i} = \sum_{i=0}^{r+1} \lambda^i(e)(-1)^{r+1-i} l^{r+1-i} = 0$$

в силу соотношения п. 4.6, что и доказывает лемму.

Отсюда немедленно следует, что для всех $k \geqslant r+1$ имеем

$$x^k \in \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i}K(X)\,x^i,$$

и, значит, тривиальной индукцией по $k-r$:

$$x^k \in \sum_{i=0}^{r} F^{k-i}K(X)\,x^i.$$

Теорема доказана.

8.10. Следствие. $f_*(F^kK(\mathbf{P}(\mathscr{E}))) \subset F^{k-r}K(X)$.

Доказательство. Так как («формула проекции», п. 7.13)

$$f_*(f^*y\cdot x^i) = yf_*(x^i),$$

имеем

$$f_*(F^iK(X)\cdot x^j) \in F^iK(X).$$

Отсюда и из теоремы следует требуемое.

8.11. *Дополнение к принципу расщепления* 5.6. *В обозначениях* п. 5.6 *Y можно выбрать так, что дополнительно будет выполнено условие*

в) $$\forall i \ \ f^*(F^iK(X)) = f^*K(X) \cap F^iK(Y).$$

В самом деле, если схема Y получается последовательной конструкцией проективизированных расслоений, то условие в) выполнено для нее в силу теорем 8.8 и 4.5.

8.12. Замечания. γ-фильтрация была придумана Гротендиком в качестве замены более естественной топологической фильтрации группы $K_\cdot(X)$, в которой i-я фильтрационная подгруппа порождена классами пучков с коразмерностью носителя $\geqslant i$.

Эта топологическая фильтрация имеет два недостатка:

а) Она переносится на $K^\cdot(X)$ лишь в случае совпадения $K_\cdot = K^\cdot$.

б) Даже в этом случае неясно, совместима ли она с умножением (положительный ответ известен лишь для многообразий над полем).

К γ-фильтрации приводит следующий ход мыслей.

Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X, $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ — его ненулевое сечение. Обозначим через $Y \subset X$ «дивизор нулей» сечение s. Это замкнутая подсхема X, которая локально в окрестности любой точки x определяется главным идеалом $\mathscr{Y}_x = O_x\,\varphi(s_x) \subset O_x$, где φ: $\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} O_x$ — любой изоморфизм. Идеал $\mathscr{Y}_x$, очевидно, не зависит от выбора φ.

Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to O_X^{\psi} \to \mathscr{L} \to O_Y \to 0,$$

так что

$$\gamma^1(cl(\mathscr{L})-1) = clO_Y.$$

С другой стороны, любая подсхема, локально задающаяся одним уравнением, не делителем нуля, является нулем сечения некоторого обратимого пучка. Классы структурных пучков таких подсхем порождают некоторую подгруппу первой топологической фильтрационной группы в $K(X)$. Поэтому можно считать $F^1K(X)$ подходящей заменой этой группы в общем случае. После этого группы $F^nK(X)$ практически однозначно определяются, если мы хотим совместимости определений с f^* и с умножением.

В самом деле, нужно воспользоваться принципом расщепления, чтобы представить элемент $a \in F^1K(X)$ в виде $\sum(l_i-1)$. Тогда k-я симметрическая функция от l_i-1 должна попадать в $F^kK(X)$. Операции γ — лишь удобное алгебраическое оформление этих соображений.

В следующем разделе связь γ-фильтрации с размерностью будет изучена более подробно. Однако топологическая фильтрация, которую мы введем, будет определяться более сложно, что позволит установить ее совместимость с умножением.

9. Фильтрация и размерность

Наша ближайшая цель — доказательство следующей теоремы.

9.1. Теорема. *Пусть X — регулярная нётерова схема размерности d с обильным пучком. Тогда $F^{d+1}K(X) = 0$.*

Для доказательства нам придется сначала ввести другую фильтрацию —«топологическую»— $F^i_{\text{top}}K(X)$. Для нее утверждение, аналогичное теореме 9.1, получается «по определению». Затем мы сравним две фильтрации.

9.2. Определение. $F^i_{\text{top}}K(X)$ — *множество элементов $x \in K(X)$, обладающих следующим свойством.*

Для всякого замкнутого подмножества $Y \subset X$ существует такой конечный комплекс $\mathscr{L}$ локально свободных пучков на X

$$0 \to \ldots \to \mathscr{L}_i \to \mathscr{L}_{i+1} \to \ldots \to 0,$$

что

$$x = \sum(-1)^i\,cl(\mathscr{L}_i) \overset{\text{def}}{=} cl(\mathscr{L}_\cdot)$$

и

$$\operatorname{codim}_Y(\operatorname{supp} H^\cdot(\mathscr{L}) \cap Y) \geqslant i,$$

где $\operatorname{supp} H^\cdot(\mathscr{L}) = \bigcup_i \operatorname{supp} H^i(\mathscr{L})$.

9.3. Предложение. $\{F^i_{\text{top}}K(X)\}$—*фильтрация кольца* $K(X)$, *для которой* $F^{d+1}_{\text{top}}K(X) = 0$.

Доказательство. Напомним, что для любого топологического пространства Y и неприводимого замкнутого подмножества $Z \subset Y$ коразмерность $\operatorname{codim}_Y Z$ определяется как верхняя граница длин цепочек замкнутых неприводимых множеств, содержащих Z. Если $Z = \bigcup Z_i$, где Z_i — неприводимые компоненты, то по определению

$$\operatorname{codim}_Y(Z) = \inf_i \operatorname{codim}_Y(Z_i).$$

Легко проверить, что последняя формула тогда остается справедливой, даже если не предполагать, что Z_i неприводимы.

Отсюда немедленно следует, что $F^i_{\text{top}}K(X)$—группы. Действительно, пусть дано замкнутое множество $Y \subset X$ и элементы x_1, $x_2 \in K(X)$. Если $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$—комплексы, удовлетворяющие условиям 9.2 соответственно для x_1, x_2 и Y, то $\mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$ годится для x_1+x_2. Докажем теперь, что если $x_1 \in F^i_{\text{top}}K(X)$, $x_2 \in F^j_{\text{top}}K(X)$, то

$$x_1x_2 \in F^{i+j}_{\text{top}}K(X).$$

Пусть $Y \subset X$ — замкнутое множество. Найдем такой комплекс $\mathcal{L}_1$, что $x_1 = cl(\mathcal{L}_1)$ и

$$\operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap Y) \geqslant i.$$

Далее, найдем такой комплекс $\mathcal{L}_2$, что $x_2 = cl(\mathcal{L}_2)$ и

$$\operatorname{codim}_{\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1)\cap Y} (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_2) \cap (\operatorname{supp}(\mathcal{L}_1) \cap Y)) \geqslant j.$$

Нетрудно видеть, что

$$x_1 x_2 = cl(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2).$$

Предположим, что мы докажем включение

$$\operatorname{supp} H(L_1 \otimes L_2) \subset \operatorname{supp} H(L_1) \cap \operatorname{supp} H(L_2).$$

Тогда, пользуясь тривиальными неравенствами, верными для $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3$:

$$\operatorname{codim}_{Y_3} Y_1 \geqslant \operatorname{codim}_{Y_3} Y_2$$
$$\operatorname{codim}_{Y_3} Y_1 \geqslant \operatorname{codim}_{Y_2} Y_1 + \operatorname{codim}_{Y_3} Y_2,$$

найдем

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \cap Y) &\geqslant \\ \geqslant \operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) &\cap H(\mathcal{L}_2) \cap Y) \geqslant \\ \geqslant \operatorname{codim}_Y (\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) &\cap Y) + \\ &+ \operatorname{codim}_{\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1 \cap Y)} (M) \geqslant i + j,\end{aligned}$$

где

$$M = \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_2) \cap Y.$$

Остается, следовательно, проверить лемму.

9.4. Лемма $\operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \subset \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_1) \cap \operatorname{supp} H(\mathcal{L}_2)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что для всякой точки $x \in X$, в которой комплекс $(\mathcal{L}_2)_x$ ацикличен, комплекс $(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)_x$ также ацикличен.

Так как $(\mathcal{L}_2)_x$ — комплекс, состоящий из свободных модулей над локальным кольцом O_x, он распадается в прямую сумму комплексов вида

$$\mathcal{L}\colon 0 \to O_x e_i \xrightarrow{d} O_x e_{i+1} \to 0,$$

где $de_i = e_{i+1}$, $\deg e_i = i$, $\operatorname{Ann} e_i = \operatorname{Ann} e_{i+1} = \{0\}$.

Достаточно, следовательно, проверить, что $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}$ ацикличен. Можно считать даже, что $i = 0$. Имеем

$$(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L})_i = \mathcal{L}_{1,i} e_0 \oplus \mathcal{L}_{1,i-1} e_1,$$
$$d(l_i e_0 + l_{i-1} e_1) = dl_i e_0 + (dl_{i-1} + (-1)^i l_i) e_1.$$

Элемент $l_i e_0 + l_{i-1} e_1$ является циклом, если

$$dl_i = 0, \quad dl_{i-1} + (-1)^i l_i = 0.$$

Тогда

$$l_i e_0 + l_{i-1} e_1 = (-1)^{i+1} dl_{i-1} e_0 + l_{i-1} e_1 = (-1)^{i-1} d(l_{i-1} e_0),$$

что и доказывает лемму.

Тем самым умножение в кольце $K(X)$ совместно с $F^i_{\mathrm{top}} K(X)$. Наконец, утверждение

$$F^{d+1}_{\mathrm{top}} K(X) = 0$$

получается прямо из определения, если применить его к $Y = X$ и учесть, что всякий комплекс $\mathcal{L}_\cdot$, для которого

$$\operatorname{codim}_X (\operatorname{supp} H^\cdot(\mathcal{L}_\cdot)) \geqslant d + 1$$

ацикличен, так что $cl(\mathcal{L}_\cdot) = 0$. Предложение 9.3 этим доказано.

9.5. Лемма. *Пусть l_1, l_2 — классы обратимых пучков на квазипроективной схеме конечного типа X. Тогда*

$$l_1 - l_2 \in F^1_{\mathrm{top}} K(X)$$

(ср. п. 8.12).

Прежде, чем доказывать эту лемму, выведем из нее теорему 9.1.

9.6. Доказательство теоремы 9.1. Пусть $\sum_j i_j \geqslant d + 1$; мы хотим доказать, что

$$\gamma^{i_1} x_1 \ldots \gamma^{i_k} x_k = 0$$

для любых $x_j \in F^1 K(X)$.

Согласно принципу расщепления существует морфизм $f\colon Y \to X$ такой, что все элементы $f^*(x_j) \in K(Y)$ содержатся в подкольце $K(Y)$, которое порождено конечным числом классов обратимых пучков на Y. Пусть $x = \gamma_1^{i_1} x_1 \ldots \gamma^{i_k} x_k$; лемма 9.5 и простое рассуждение, как и в п. 8.5, показывают, что

$$f^*(x) \in F^{d+1}_{\mathrm{top}} K(Y).$$

(Учесть, что группы F^i_{top} образуют фильтрацию кольца.)

Заметим теперь, что Y получается из X конечным числом шагов, каждый из которых состоит в построении схемы $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ для некоторого локально свободного пучка $\mathcal{E}$ над предыдущей схемой. Если $\mathcal{E}$ — пучок ранга $r + 1$ над X, то $\dim \mathbf{P}(\mathcal{E}) - \dim X = r$. Кроме того, $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ является свободным $K(X)$-модулем и существует базис $K(\mathbf{P}(\mathcal{E}))$ над $K(X)$, содержащий элемент вида $\prod_{i=1}^{s} (l_i - 1)$, где l_i — классы обратимых пучков. (Например, можно взять $l_i = cl(O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1))$ для всех i). Отсюда следует, что $K(Y)$ является свободным $K(X)$-модулем и что существует элемент базиса этого модуля, имеющий вид $\prod_{i=1}^{s} (l_i - 1)$, где $s = \dim Y - \dim X = \dim X - d$.

Но $f^*(x) \prod_{i=1}^{s} (l_i - 1) \in F^{s+d+1}_{\mathrm{top}} K(Y) = F^{\dim Y+1}_{\mathrm{top}} K(Y) = 0$. Поэтому $f^*(x) = 0$ и $x = 0$, что и требовалось доказать.

9.7. Доказательство леммы 9.5. а) Установим прежде всего следующее вспомогательное утверждение: *пусть $x_1, \ldots, x_r \in X$ — конечное число замкнутых точек: $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X. Существует такое d, что для всех достаточно больших n, делящихся на d, существует сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(n))$, не обращающееся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_r$* (скручивание, как обычно, определяется с помощью фиксированного обильного пучка $O(1)$).

Начнем с частного случая: $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда O_X, очевидно, обилен. Проверим наше утверждение для X и O_X. Пусть $\mathcal{L} = \widetilde{L}$, $\mathcal{J} \subset O_X$ —

наибольший пучок идеалов, определяющий замкнутое множество $\bigcup_{h=1}^{r} x_h$. Тогда эпиморфизм пучков

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}/\mathcal{Y}\mathcal{L} \to 0$$

индуцирует эпиморфизм групп сечений. Но, как нетрудно видеть, пучок $\mathcal{L}/\mathcal{Y}\mathcal{L}$ сосредоточен на $\bigcup_{h=1}^{r} x_h$, и $\Gamma(X, \mathcal{L}/\mathcal{Y}\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{h=1}^{r} k(x_h)$. Рассмотрим сечение, равное единице во всех точках x_h, и поднимем его до сечения пучка $\mathcal{L}$. Оно удовлетворяет нужным условиям.

Перейдем теперь к общему случаю.

В силу [1], гл. II, 4.5.4 можно найти такое d_0, что есть сечение $f \in \Gamma(X, O(d_0))$ со свойствами $\bigcup x_i \subset D_+(f)$ и $D_+(f)$ — аффинное множество.

Пользуясь уже установленным частным случаем, найдем сечение $s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L})$, не обращающееся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_k$. По лемме Серра есть такое число d_1, что сечение $t = f^{\otimes d_1} \otimes s \in \Gamma(D_+(f), \mathcal{L}(d_0 d_1))$ продолжается на все X. Положим $d = d_0 d_1$.

Имеем $f^{\otimes d_1} \in \Gamma(X, O_X(d)) \Rightarrow t \otimes f^{kd_1} \in \Gamma(X, O_X((k+1)d))$ для всех $k \geqslant 0$. Это и есть сечение, которое нам нужно.

б) Будем доказывать теперь, что $l_1 - l_2 \in F^1_{\mathrm{top}} K(X)$. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмножество: Y_i $(i = 1, \ldots, r)$ — его неприводимые компоненты, $x_i \in Y_i$ — замкнутые точки. Тогда для достаточно большого n имеются сечения

$$O_X \to \mathcal{L}_1(n), \quad O_X \to \mathcal{L}_2(n),$$

(где $l_i = cl(\mathcal{L}_i)$), не обращающиеся в нуль в $x_1, \ldots, x_r$.

Складывая получающиеся комплексы

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0 \text{ и } 0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \to 0,$$

находим комплекс

$$0 \to O_X(-n) \to \mathcal{L}_2 \oplus O_X(-n) \to \mathcal{L}_1 \to 0,$$

класс которого (в смысле определения 9.2) в кольце $K(X)$ равен $l_1 - l_2$. С другой стороны, этот комплекс ацикличен в точках x_i, поэтому носитель его гомологий не содержит ни одной из неприводимых компонент множества Y и, значит, его пересечение с Y имеет в Y коразмерность $\geqslant 1$. Это завершает доказательство леммы и теоремы 9.1.

10. Связь между $K(X)$ и Pic X

10.1. Группа Pic X изучена значительно лучше, чем $K(X)$. Между этими двумя объектами существуют тесные связи, которые мы используем в этой лекции для получения дополнительной информации о каждом из них. Pic X и $K(X)$ связаны двумя фундаментальными отображениями. Первое из них i: Pic $X \to K(X)$ ставит в соответствие классу обратимого пучка $\mathcal{L}$ в Pic X его же класс в $K(X)$. Оно является гомоморфизмом Pic X в мультипликативную группу обратимых элементов $K(X)$.

Второе отображение det: $K(X) \to$ Pic X является гомоморфизмом *аддитивной* группы $K(X)$ в мультипликативную группу Pic X и строится менее тривиально. Рассмотрим свободную группу $\mathbb{Z}[\mathcal{L}]$, порожденную классами локально свободных пучков на X (см. 1.2) и определим ее гомоморфизм в Pic X, задав его на образующих так: класс пучка $\mathcal{E}$ переходит в класс $\Lambda^r \mathcal{E}$, где $r = rk\mathcal{E}$. Для любой точной последовательности $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0$ в силу предложения 3.9 имеем $\Lambda^{rk\mathcal{E}}\mathcal{E} \simeq \Lambda^{rk\mathcal{E}_1}\mathcal{E}_1 \otimes \Lambda^{rk\mathcal{E}_2}\mathcal{E}_2$. Отсюда следует, что элементы $\mathcal{E} - \mathcal{E} - \mathcal{E}_2$ лежат в ядре этого гомоморфизма, так что он индуцирует гомоморфизм $K(X) \to$ Pic X, который мы и обозначим det.

10.2. П р е д л о ж е н и е. 1) *Рассмотрим $K(X)$ и Pic X как контравариантные функторы от X; тогда i и* det *определяют морфизмы этих функторов.*

2) *Отображение i*: Pic $X \to K(X)$ *является мономорфизмом, а* det: $K(X) \to$ Pic X — *эпиморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение немедленно следует из определения операции обратного образа пучка. i мономорфно, потому что $(\det \cdot i)(l) = l$ для всех $l \in$ Pic X, по этой же причине det — эпиморфизм.

10.3. У п р а ж н е н и е. Доказать, что для любых локально свободных пучков $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ рангов r_1, r_2 соответственно имеет место изоморфизм

$$\Lambda^{r_1 r_2}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \simeq (\Lambda^{r_1}\mathcal{E}_1)^{r_2} \otimes (\Lambda^{r_2}\mathcal{E}_2)^{r_1}.$$

Пользуясь билинейностью, вывести отсюда формулу, показывающую поведение det относительно умножения в кольце $K(X)$:

$$\det(xy) = (\det(x))^{\varepsilon(y)} (\det(y))^{\varepsilon(x)}.$$

10.4. Т е о р е м а. *В условиях п. 4.5 отображение*

$$\varphi\colon \operatorname{Pic} X \times \mathbb{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E})), \quad \varphi(x, n) = x \cdot l^n, \quad x \in \operatorname{Pic} X, \quad l = cl(P_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)),$$

является изоморфизмом группы Pic $X \times \mathbb{Z}$ *с* Pic $\mathbb{P}(\mathcal{E})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что φ — мономорфизм. Действительно, если $xl^n = 1$ в Pic $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, то в силу предложения 10.2 то же равенство имеет место в $K(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ (мы отождествляем Pic с подмножеством K с помощью i). Умножая обе части этого равенства на l^i и пользуясь леммой 5.3, получаем, что для всех $i \geqslant i_0$ имеет место соотношение в $K(X)$:

$$x\sigma^{n+i}(e) = \sigma^i(e),$$

где $e = cl(\mathcal{E})$. Но при $n \neq 0$ это невозможно, ибо ранги пучков $S^{n+i}(\mathcal{E})$ и $S^i(\mathcal{E})$ не могут совпадать для всех $i \geqslant i_0$, а если $n = 0$, то $x = 1$, откуда и следует мономорфность φ.

Эпиморфность φ следует из того, что класс всякого обратимого пучка в Pic $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ имеет вид $\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right)$ (где $rk\mathcal{E} = r + 1$). Действительно,

$$\det\left(\sum_{i=0}^{r} a_i l^i\right) = \prod_{i=0}^{r} \det(a_i l^i) = \left(\prod_{i=0}^{r} \det a_i\right) l_i^{\sum_i i\varepsilon(a_i)}$$

(мы воспользовались результатом упражнения 10.3).