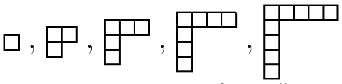
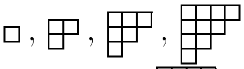
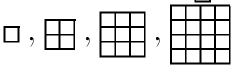
Геометрическое суммирование

... Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука ... Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь, до бесконечности. Так вот, среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя — число же это называется стороной квадрата; затем кубы ... Каждое из возрастающих от единицы чисел, начиная с трёх, является первым после единицы многоугольником и имеет столько углов, сколько в нём содержится единиц, стороной же его будет 2. Так, 3 будет треугольником, 4 — четырёхугольником, 5 — пятиугольником и т. д.

из книги Диофанта Александрийскго «Арифметика»
и его же учения «О многоугольных числах»

M1◇1. Рассмотрим последовательность  , ... (древние греки называли Г-образные фигурки *гномонами*). Сколько клеток в k-той фигурке и чему равна суммарная площадь первых k гномонов?

M1◇2. Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? Вычислите суммы 300 нечётных чисел, начиная с 57 и 200 чётных чисел, начиная с 444.

M1◇3. Треугольные числа Диофанта:  — это 1, 3, 6, 10, ... Четырёхугольные числа:  — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Чему равно $T_n + T_n$? Выразите T_n через n.

M1◇4. Найдите сумму первой тысячи натуральных чисел.

M1◇5° **(пифагорова таблица умножения).** Докажите тождество $mk = km$ (т. е. что $\underbrace{k+k+\cdots+k}_{m} = \underbrace{m+m+\cdots+m}_{k}$). Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1.1?

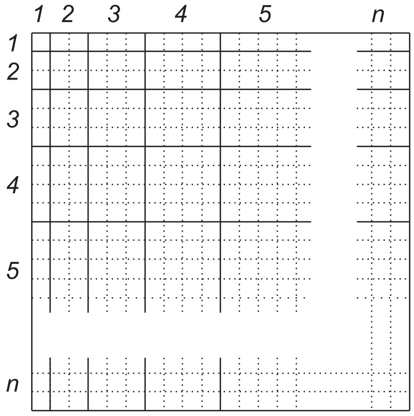


Рис. 1.1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

M1◇6. Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне, вершина которого представляет k^2, а стороны суть произведения k на 1, 2, ... , $(k-1)$?

M1◇7. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, $13+15+17+19=4^3$, ...

M1◇8. Вычислите суммы:

а) $1^3+2^3+\cdots+n^3$; **б)** $T_1+2T_2+\cdots+nT_n$;
в*) $1^2+2^2+\cdots+n^2$; **г*)** $T_1+T_2+\cdots+T_n$.

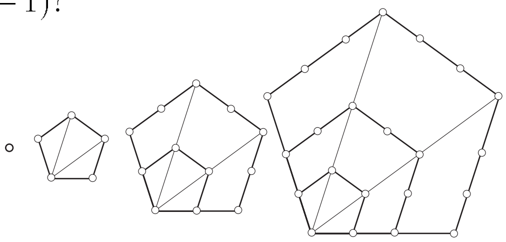


Рис. 1.2. Пятиугольные числа.

M1◇9*. Вычислите суммы квадратов первых n чётных чисел и первых n нечётных чисел.

M1◇10. Пятиугольные числа Диофанта: $P_1=1$, $P_2=5$, $P_3=12$, $P_4=22$, ... изображены на рис. 1.2. Чему равно $P_k - P_{k-1}$? Выразите P_n через n.

Суммирование разностей

Арифметическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$ занумерованных чисел, в котором разность $d = a_k - a_{k-1}$ между двумя соседними числами одинакова для всех k; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

М2⋄1°. Будет ли арифметической прогрессией последовательность с k-тым членом, равным:
а) $\underbrace{11\ldots1}_{k}$, **б)** $\dfrac{1+2+\cdots+k}{k}$, **в)** k-тому натуральному числу, оканчивающемуся на 13?

М2⋄2°. Выразите n-тый член произвольной арифметической прогрессии через первый член и разность. Чему равно 91-е натуральное число, большее 444, с остатком 43 от деления на 57?

М2⋄3. В некой арифметической прогрессии $a_m = -a_n$ для каких-то $m < n$. При каких m, n эта прогрессия содержит нуль и под каким номером?

М2⋄4°. Какие из перечисленных ниже свойств набора чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ необходимы, а какие — достаточны для того, чтобы этот набор был арифметической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних), есть среднее арифметическое двух соседних;
б) $2\,a_i = a_{i-2} + a_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $a_i = 2\,a_{i-1} - a_{i-2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n$;
г) сумма $a_i + a_{n-i}$ одна и та же для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

М2⋄5°. Выразите сумму всех элементов конечной арифметической прогрессии[1]
а) через два крайних члена и количество слагаемых;
б) через начальный член, количество слагаемых и приращение.

М2⋄6. Найдите сумму всех трёхзначных чисел с остатком 7 от деления на 43.

М2⋄7. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы размера $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых равна S.

М2⋄8. Как связаны арифметические прогрессии с m-угольными числами Диофанта? Чему равно n-тое m-угольное число?

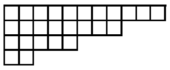
М2⋄9*. Можно ли разбить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в объединение (возможно, бесконечного) набора попарно непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий с разностями $d_1, d_2, \ldots$, удовлетворяющими неравенству $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < 0{,}9$?

Суммирование разностей. Часто сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ удаётся вычислить, представив каждое слагаемое в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел некоего другого набора $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Более общим образом эта идея выглядит так: заменим каждое b_i подходящей суммой $b_i = \pm c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{im_i}$ так, чтобы при подстановке в исходную сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ бóльшая часть c_{ij} либо сокращалась, либо легко складывалась.

М2⋄10. Вычислите суммы: **а)** $\dfrac{1}{1\cdot2} + \dfrac{1}{2\cdot3} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$; **б)** $1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n\,(n+1)$;
в) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ – арифметическая прогрессия с разностью d);
г) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$; **д)** $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + n\,(n-1)\,(n+2)$;
е) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$.

М2⋄11. Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

М2⋄12. Пользуясь предыдущей задачей, вычислите сумму k-тых степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

[1] на клетчатой бумаге прогрессию, скажем, $2, 5, 8, 11$, удобно рисовать в виде 

НОД, НОК и деление с остатком

В решениях задач этого листка словосочетания «простое число» и «простые множители» запрещены.

Прошу — забудь всё, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.
(Э. Ландау, «Основы анализа»)

М3◇1°. Какое наименьшее расстояние можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины **а)** 13 *см* и 29 *см*; **б)** 21 *см* и 30 *см*?

М3◇2. Пусть $A, B \in \mathbb{Z}$ — два фиксированных целых числа. Обозначим через $\mathfrak{I} \subset \mathbb{Z}$ множество всех чисел n, которые можно отложить на числовой прямой от нуля, используя шаблоны[1] A и B. Пусть D — это *наименьшее положительное* число в $\mathfrak{I}$. Верно ли, что:

а) A, B, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из $\mathfrak{I}$ лежат в $\mathfrak{I}$?

б) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, A и B) нацело делятся на D?

в) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, D) нацело делятся на любой общий делитель чисел A и B?

НОД и НОК. Наибольшее натуральное число D, которое делит каждое из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Аналогично, наименьшее натуральное число K, которое делится на все числа A_i называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

М3◇3. Рассуждая как в зад. М3◇2, покажите, что $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делится нацело на любой другой общий делитель чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и представляется в виде $z_1A_1 + z_2A_2 + \cdots + z_nA_n$ с целыми z_ν. Верно ли, что $\text{нод}(A \pm B, B) = \text{нод}(A, B)$?

М3◇4. Докажите, что $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делит нацело любое другое общее кратное чисел A_i и что $\text{нок}(A, B) \cdot \text{нод}(A, B) = A \cdot B$.

М3◇5 (алгоритм Евклида). Пусть $A > B$ — два фиксированных натуральных числа. Определим последовательность чисел $E_0, E_1, E_2, E_3, \ldots$ правилами: $E_0 = A$, $E_1 = B$, $E_k =$ (остатку от деления E_{k-2} на E_{k-1}) при $k \geqslant 2$. Докажите, что все числа E_ν лежат в множестве $\mathfrak{I}$ из зад. М3◇2 и монотонно убывают до тех пор, пока очередное $E_{\nu+1}$ не обратится в нуль (т. е. пока $E_{\nu-1}$ не разделится нацело на E_ν). Как связано это последнее ненулевое E_ν с $\text{нод}(A, B)$?

М3◇6. Вычислите $\text{нод}(A, B)$ и подберите целые x, y так, чтобы $x\,A + y\,B = \text{нод}(A, B)$, для следующих пар (A, B): **а)** $(17,\ 13)$; **б)** $(44\,863,\ 70\,499)$; **в)** $(8\,385\,403,\ 2\,442\,778)$.

Взаимная простота. Если $\text{нод}(a, b) = 1$ для $a, b \in \mathbb{Z}$, то числа a, b называются *взаимно простыми*.

М3◇7. Докажите, что взаимная простота a и b равносильна существованию таких $x, y \in \mathbb{Z}$, что $a\,x + b\,y = 1$, и равносильна возможности представить любой $z \in \mathbb{Z}$ в виде $z = a \cdot k + b \cdot m$ с подходящими $k, m \in \mathbb{Z}$.

М3◇8. Пусть c взаимно просто с a, а b – любое. Докажите, что

а) если произведение ab делится на c, то b делится на c;

б) если b делится как на a, так и на c, то b делится и на произведение ac.

М3◇9. Верно ли, что несократимая дробь p/q (где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) может быть корнем многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, только если $a_0 \,\vdots\, q$ и $a_n \,\vdots\, p$?

М3◇10. Верно ли, что $\text{нок}(a, b)/a$ и $\text{нок}(a, b)/b$ взаимно просты при любых $a, b \in \mathbb{N}$?

М3◇11. Верно ли, что $\forall\, a \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $b \in \mathbb{N}$, таких что $b + a$ и $b - a$ взаимно просты? Всегда ли взаимно просты a и $a + 1$?

М3◇12. Найдите *все* целые решения уравнений:

а) $1537\,x + 1387\,y = 1$ **б)** $5\,x + 7\,y = 11$ **в)** $26\,x + 32\,y = 60$ **г)** $169\,x + 221\,y = 26$

М3◇13. Чему равно k-е натуральное число, одновременно дающее остатки:

а) 1, 2, 3 от деления, соответственно, на 2, 3 и 5?

б) 2, 4, 6, 8 от деления, соответственно, на 5, 9, 11 и 14?

[1] иначе говоря, $\mathfrak{I}$ состоит из всех чисел n, представимых в виде $n = k\,A + m\,B$ с целыми k и m

Равносоставленность и площади

М4◇1. Нарисуйте на листе клетчатой бумаги оси координат и отметьте точки $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(2,5)$, $E(0,5)$, $F(-7,7)$, $G(-5,4)$. Допустим, что на закрашивание одной клетки тратится 1 пиколитр чернил. Сколько чернил уйдёт на закрашивание многоугольников: CED, ADE, AEC, ECG, $ABDE$, $GCEF$, $ACEFG$?

М4◇2. Рассмотрим на координатной плоскости точки $O(0,0)$ и $A(4,3)$. Достройте отрезок OA до квадрата $OABC$ и вычислите $S(OABC)$ и $|OA|$.

М4◇3. Чему равен квадрат расстояния от начала координат до произвольной точки P с координатами (p_1,p_2) и чему равен квадрат расстояния между P и другой произвольной точкой $Q(q_1,q_2)$?

М4◇4. Нарисуйте ГМТ с координатами (x,y), удовлетворяющими соотношениям:
а) $x^2+y^2=1$ **б)** $(x-3)^2+(y+5)^2=16$ **в)** $x^2+y^2+1=2\,(y-3\,x)$

М4◇5. Вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(1,5)$, $B(-3,2)$, $C(4,-1)$. Найдите координаты вершины D и $S(ABCD)$.

М4◇6*. Вершины параллелограмма $OAPB$ имеют координаты $O(0,0)$, $A(a_1,a_2)$ и $B(b_1,b_2)$. Выразите координаты вершины P и $S(OAPB)$ через a_1, a_2, b_1 и b_2.

Свойства площадей. Многие плоские фигуры $\mathfrak{F}$ имеют площадь $S(\mathfrak{F})$. Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Площади равных фигур равны. Фигуры равной площади называются *равновеликими*. Если фигура $\mathfrak{F}$ разрезана прямолинейным разрезом на две части $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и из трёх фигур $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ какие-то две имеют площадь, то её имеет и третья, причём $S(\mathfrak{F})=S(\mathfrak{F}_1)+S(\mathfrak{F}_2)$. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно конечным числом прямолинейных разрезов разбить на части, из которых складывается другая фигура. Площади равносоставленных фигур равны.

М4◇7. Равновелики ли на рис. 4.1 параллелограммы соответствующим прямоугольникам? Выразите площадь параллелограмма через основание и высоту.

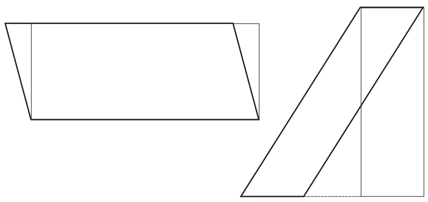


Рис. 4.1.

М4◇8. Выразите площади треугольника и трапеции через высоты и основания.

М4◇9. Существует ли такой треугольник с высотами h_1, h_2, периметром P и площадью S, что: **а)** $P>1\,\text{м}$ $S<1\,\text{см}^2$? **б)** $S>1\,\text{м}^2$ $P<1\,\text{см}$? **в)** $h_1\geqslant 1\,\text{м}$ $h_2\geqslant 1\,\text{м}$ $S\leqslant 1\,\text{см}^2$?

М4◇10. Пусть длины последовательных сторон (скажем, по часовой стрелке) произвольного выпуклого четырёхугольника равны a, b, c, d. Может ли его площадь быть больше, чем
а) $(ab+cd)/2$? **б)** $(ac+bd)/2$?

М4◇11. Выразите площадь произвольного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями через длины диагоналей.

М4◇12. Выразите площадь треугольника через длины сторон и радиус
а) вписанного **б)** вневписанного круга.

М4◇13. Зависит ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон от выбора этой точки?

М4◇14. Верно ли, что медианы разрезают треугольник на 6 равновеликих треугольников?

М4◇15*. Треугольник разрезали на три меньших, соединив вершины с некой внутренней точкой. Верно ли, что они равновелики только если эта точка — пересечение медиан?

Геометрия на клетчатой бумаге

М$4\frac{1}{2}$◇1*. Математический бильярд — это квадрат $ABCD$ с точечными лузами в вершинах. Точечный шар выпустили из середины стороны AD в направлении точки E, которая делит противоположную сторону в отношении $BE : EC = 43 : 57$. Попадёт ли он когда-нибудь в лузу? Если нет – почему, если да – после скольких отражений[1] от стенок?

М$4\frac{1}{2}$◇2*. Существует ли параллелограмм площади 4 кл. с центром в узле клетчатой бумаги, не содержащий никаких других узлов ни внутри, ни на границе?

Формула Пика сопоставляет любому (не обязательно выпуклому) несамопересекающемуся многоугольнику $\mathfrak{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги число

$$\Pi(\mathfrak{M}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\text{ число узлов внутри } \mathfrak{M}\,) + \frac{1}{2}\,(\text{ число узлов на границе } \mathfrak{M}\,) - 1\ .$$

и утверждает, что $S(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M})$. Она доказывается в следующих двух задачах:

М$4\frac{1}{2}$◇3. Многоугольник $\mathfrak{M}$ разрезали прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ тоже с вершинами в узлах. Верно ли, что $\Pi(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M}_1) + \Pi(\mathfrak{M}_2)$?

М$4\frac{1}{2}$◇4. Последовательно докажите формулу Пика для:

а) прямоугольника со сторонами по линиям клеток;

б) для прямоугольного треугольника с катетами по линиям клеток;

в) для любого треугольника; **г)** для выпуклого многоугольника; **д*)** в общем виде.

М$4\frac{1}{2}$◇5. Может ли треугольник с площадью 1 кл. и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр?

М$4\frac{1}{2}$◇6. Верно ли, что любой отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри себя, можно достроить до треугольника площади 1 кл. с вершинами в узлах?

М$4\frac{1}{2}$◇7. Может ли параллелограмм с площадью 1 кл. и вершинами в узлах накрывать какие-либо узлы кроме вершин? Может ли расстояние между наиболее удалёнными друг от друга вершинами такого параллелограмма быть сколь угодно большим?

М$4\frac{1}{2}$◇8. Прямая ℓ соединяет узлы с координатами $(0,0)$ и (p,q), причём между этими узлами на прямой ℓ нет других узлов. Есть ли среди не лежащих на ℓ узлов ближайшие к ней и много ли их может быть? Найдите расстояние от такого узла до прямой ℓ.

М$4\frac{1}{2}$◇9 (задача о кузнечиках). Трёх кузнечиков посадили в точки с координатами $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$ и позволили прыгать друг через друга в первом квадранте по следующему правилу: в каждый момент один из векторов, соединяющих начало координат с кузнечиками, находится между двумя другими, и любой из двух «крайних» кузнечиков может центрально симметрично отразиться от этого «среднего». Покажите, что:

а) начало координат и кузнечики всегда находятся в вершинах параллелограмма единичной площади, и никаких других целых точек этот параллелограмм не накрывает;

б) кузнечики могут побывать только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с взаимно простыми координатами имеется единственный способ прыгания, приводящий одного из кузнечиков в эту точку.

М$4\frac{1}{2}$◇10*. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле а радиус в 1999^{2000} раз меньше ширины клеток. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного (кроме накрывающего начало) круга?

М$4\frac{1}{2}$◇11. Пусть p_1, p_2 — любые, а q_1, q_2 — положительные числа. Опишите все случаи, когда $\dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$. Какими неравенствами связаны эти три дроби в остальных случаях?

[1] предполагается, что при каждом ударе о стенку «угол падения равен углу отражения»

Важные квадратичные соотношения

M5◇1. Пользуясь тем, что из четырёх одинаковых прямоугольных треугольников с катетами a, b и гипотенузой c можно сложить квадрат как на рис. 5.1, докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

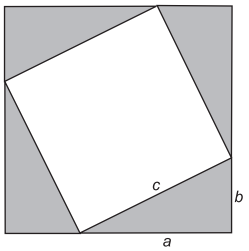


Рис. 5.1.

M5◇2. Докажите, что у пифагоровых штанов на рис. 5.2 квадрат гипотенузы равносоставлен сумме квадратов катетов (этот факт известен как *теорема Пифагора*).

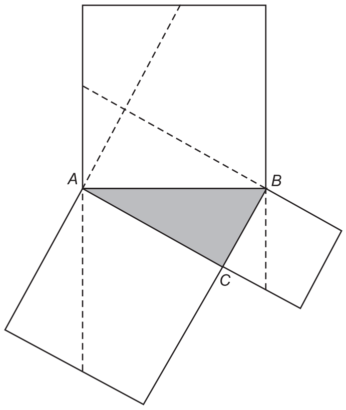


Рис. 5.2.

Среднее геометрическое (или среднее пропорциональное) двух положительных чисел m и n — это такое положительное число q, что $q^2 = mn$ (или иначе $n : q = q : m$).

M5◇3. Докажите, что если положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $c^2 = a^2 + b^2$, то можно построить единственный треугольник со сторонами a, b и c, и этот треугольник автоматически будет прямоугольным.

M5◇4. Докажите, что на рис. 5.3 квадрат высоты прямоугольного треугольника равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть отрезки, на которые высота разбивает гипотенузу.

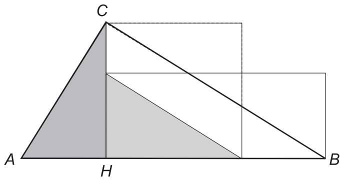


Рис. 5.3.

M5◇5. Докажите, что на рис. 5.4 квадрат катета равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть гипотенуза и её отрезок, заключённый между этим катетом и высотой.

M5◇6. Двумя способами — с помощью предыдущих задач и через подходящие подобные треугольники — выясните, выполняются ли в произвольном прямоугольном $\triangle ABC$ с гипотенузой AB и высотой CH соотношения: **а)** $|AH| : |CH| = |CH| : |HB|$; **б)** $|AH| : |AC| = |AC| : |AB|$ **в)** $|BH| : |CB| = |CB| : |AB|$.

M5◇7. Глядя на рис. 5.5 циркулем и линейкой постройте арифметическое и геометрическое средние двух отрезков $a = AP$ и $b = PB$. Докажите, что геометрическое среднее двух положительных чисел не превосходит арифметического, и опишите все случаи их равенства.

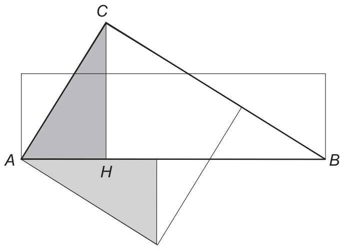


Рис. 5.4.

M5◇8. Даны отрезок длины 1 и отрезок длины a. Циркулем и линейкой постройте отрезок, длина которого равна **а)** $\sqrt{3}$ **б)** $\sqrt{19}$ **в)** $\sqrt{a}$ **г)** a^2.

M5◇9. Дан квадрат. Циркулем и линейкой постройте новый квадрат, площадь которого относится к площади данного как $m : n$.

M5◇10. Даны отрезки длины 1, p и q. Циркулем и линейкой постройте корни уравнений $x^2 + px - q = 0$ и $x^2 - px - q = 0$.

M5◇11. Докажите, что в любом $\triangle ABC$ с высотой AH выполнено соотношение $|AB|^2 - |AC|^2 = |BH|^2 - |CH|^2$.

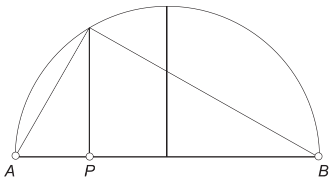


Рис. 5.5.

M5◇12. Выразите сумму квадратов диагоналей параллелограмма через его стороны.

M5◇13. Выразите диаметр круга, вписанного в равнобокую трапецию, через её основания.

M5◇14. Выразите **а)** медиану **б)** высоту **в*****)** биссектрису **г*****)** площадь произвольного треугольника через длины его сторон.

Геометрические прогрессии

В банке живут бактерии и каждый день их число удваивается, так что за неделю банка заполняется бактериями целиком. За сколько дней бактерии заполнят полбанки?

Геометрическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор занумерованных *ненулевых* чисел $\ldots, g_1, g_2, g_3, \ldots$, в котором отношение $q = g_k/g_{k-1}$ между двумя соседними числами одинаково для всех k; оно называется *знаменателем* прогрессии.

М6◇1°. Будет ли геометрической прогрессией последовательность, k-тый член которой равен: **а)** $0,\underbrace{0\ldots0}_{k}3$; **б)** 3^{-k}; **в)** $\underbrace{33\ldots3}_{k}$; **г)** $\sqrt[k]{3}$; **д)** $g'_k \cdot g''_k$, где g'_k, g''_k – геометрические прогрессии; **е)** ϑ^{a_k}, где $\vartheta \neq 0$, и a_k — арифметическая (скажем, целочисленная) прогрессия.

М6◇2. Можно ли разбить $\mathbb{N}$ в объединение **а)** конечного **б)** бесконечного набора попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий?

М6◇3. Какие из перечисленных ниже свойств набора положительных чисел $g_0, g_1, \ldots, g_n$ необходимы, а какие достаточны для того, чтобы этот набор был геометрической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних) есть среднее геометрическое двух соседних;
б) $g_i^2 = g_{i-2}g_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $g_i g_{n-i}$ одинаково для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

М6◇4. Верно ли, что $a^m - b^m$ делится на $(a-b)$, буде эта разность ненулевая? Если да, то чему равно частное? Что можно утверждать про $a^m + b^m$?

М6◇5. Вычислите сумму $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Обобщение: выразите сумму всех элементов конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

М6◇6. Найдите суммы: **а)** $1+2q+3q^2+\cdots+(n+1)q^n$ **б)** $1\cdot2+2\cdot3q+3\cdot4q^2+\cdots+(n+1)(n+2)q^n$.

М6◇7. Из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/час вышел Толя, а через три часа вслед за ним со скоростью 7 км/час отправился Коля и – со скоростью 12 км/час – его собачка Жучка, которая догнала Толю, мгновенно развернулась и побежала назад к Коле, встретив его, снова развернулась и снова догнала Толю и т. д. Какое расстояние пробежит Жучка пока Коля догонит Толю? Какая прогрессия при этом просуммировалась?

М6◇8. Догнав Толю, Коля стал делиться с ним завтраком: в первую минуту он разделил его пополам и успел съесть треть своей половины, а Толя свою – целиком. В следующие полминуты Коля разделил пополам остатки своей доли и опять успел съесть треть, а Толя – всё. Далее процесс повторялся (и каждая следующая стадия происходила вдвое быстрее предыдущей). Через какое время завтрак будет съеден и какая его часть достанется Коле, а какая – Толе?

М6◇9. Назовём *суммой* бесконечной убывающей положительной геометрической прогрессии $g_0, g_1, g_2, \ldots$ наименьшее число, большее любой конечной суммы $g_0 + \cdots + g_n$. Докажите, что такое число существует и выразите его через начальный член и знаменатель прогрессии.

М6◇10. К большему катету прямоугольного треугольника со сторонами 1, 2, $\sqrt{3}$ подклеили равную ему по длине гипотенузу подобного треугольника. Затем к большему катету второго треугольника аналогичным образом подклеили гипотенузу третьего треугольника, подобного первым двум, и так далее до бесконечности. Чему равна площадь получающегося завитка?

М6◇11. Всегда ли при делении натуральных чисел «уголком» получится либо конечная, либо бесконечная *периодическая* десятичная дробь? Можно ли таким образом получить дроби
а) $0,575757\ldots$; **б)** $19,9919991999\ldots$; **в)** $2,43575757\ldots$?

М6◇12. Докажите, что периодическая дробь $\overline{0,a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m\,b_1\ldots b_m\,\ldots}$ есть результат деления числа $\overline{a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m} - \overline{a_1\ldots a_n}$ на число $\underbrace{9\ldots9}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{n}$.

Как организовать полный перебор

Чтобы управиться с классом, его надо выстроить по росту и перекликнуть по алфавиту.
(из Школьных Заповедей)

М7◇1. Сколько различных **а)** двух- **б)** четырёх- **в)** n-буквенных слов[1] можно написать тридцатью тремя буквами русского алфавита?

М7◇2. Можно ли закодировать русский алфавит азбукой Морзе так, чтобы каждая буква передавалась не более, чем четырьмя сигналами? Какое число сигналов на символ достаточно отводить для передачи 3000 различных иероглифов?

М7◇3. Сколько всего разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах `ОК, рок, урок, шнурок`?

М7◇4. Как изменится ответ в зад. М7◇1, если потребовать, чтобы буквы не повторялись?

М7◇5. Можно ли упорядочить все сто двухразрядных чисел от 00 до 99 так, чтобы каждые два соседних числа отличались ровно в одной цифре, причём ровно на единицу? Тот же вопрос про трёх- и n-разрядные числа.

Факториалы. Произведение $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$ обозначается $n!$ (читается «n-факториал»). По определению, $\boxed{0! = 1! = 1}$.

М7◇6. При каких n: **а)** $n! \geqslant 3^n$; **б)** $2^n \geqslant n^3$?

Математическая индукция — это способ доказать бесконечную серию занумерованных утверждений за два хода: **(1)** – *база индукции* – доказывается утверждение №1 ; **(2)** – *индуктивный переход* – доказывается, что при любом n из утверждения №n вытекает утверждение №$(n+1)$.

М7◇7. Верно ли, что при разрезании выпуклого n-угольника на треугольники по диагоналям число получившихся треугольников будет одним и тем же, как бы не резали? Чему оно может равняться? Какова сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

М7◇8. На сколько кусков разбивается плоскость n прямыми, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны?

М7◇9. Всегда ли плоскость, разбитая на части прямыми и окружностями, раскрашивается в два цвета так, чтобы имеющие общую сторону куски были разноцветными?

М7◇10*. Даны n точек. Верно ли, что они либо лежат на одной прямой, либо их соединяет не менее n разных прямых?

М7◇11. Сколько разных m-буквенных слов можно написать n-буквенным алфавитом, если буквы в словах **а)** могут **б)** не могут повторяться?

М7◇12. В бесконечный лабиринт на рис. 7.1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

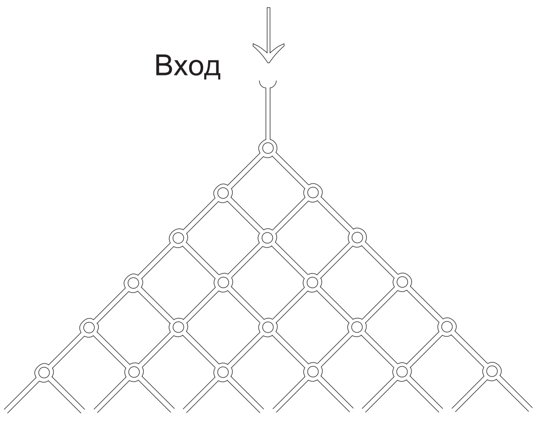


Рис. 7.1. Лабиринт Паскаля

М7◇13. Для $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в $(1+x)^k$ и $(a+b)^k$. Сформулируйте и докажите теорему, сравнивающую полученные ответы с ответами зад. М7◇12.

М7◇14. Число $x + 1/x$ является целым. Будет ли целым $x^n + 1/x^n$? (Начните с $n = 2, 3, \dots$)

[1] слова не обязаны быть осмысленными и буквы в словах могут повторяться

Знакомьтесь, граф ...

Граф — это конечное множество точек на плоскости (*вершин графа*), некоторые из которых соединены отрезками (*рёбрами графа*). Количество выходящих из данной вершины A рёбер называется *степенью* вершины и обозначается $\deg A$.

М$7\frac{1}{2}$◇1 (лемма о рукопожатиях). Выразите сумму степеней всех вершин произвольного графа через общее число его рёбер.

М$7\frac{1}{2}$◇2. В любом ли графе с более чем одной вершиной есть пара вершин одинаковой степени?

М$7\frac{1}{2}$◇3. Все 28 Петиных одноклассников имеют по различному числу друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

М$7\frac{1}{2}$◇4 (уроки демократии - 1). Каждый из 450 думцев врезал по физиономии ровно одному своему коллеге. Наберётся ли 150 думцев, из которых никто никого по лицу не бил?

М$7\frac{1}{2}$◇5* (теорема Холла). В некой компании n юношей и при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ для любых k юношей в этой компании найдётся не менее k девушек, знакомых хотя бы с одним из рассматриваемых k юношей. Можно ли просватать всех юношей за знакомых девушек?

Путь в графе — это последовательность его вершин $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ и рёбер $[A_1, A_2], \dots, [A_n, A_{n+1}]$, соединяющих соседние вершины в этой последовательности; число n называют *длиной* пути. Если все рёбра пути различны и начальная вершина совпадает с конечной: $A_1 = A_{n+1}$, то путь называют *циклом*. Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём. Связный граф без циклов называется *деревом*.

М$7\frac{1}{2}$◇6°. Нарисуйте какое-нибудь дерево. Пусть между любыми двумя вершинами графа имеется ровно один путь из неповторяющихся рёбер. Является ли это условие

а) необходимым **б)** достаточным для того, чтобы граф был деревом?

М$7\frac{1}{2}$◇7°. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

М$7\frac{1}{2}$◇8° (остовы). Всегда ли из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево с тем же множеством вершин, что и исходный граф[1]?

М$7\frac{1}{2}$◇9* (теорема Кели). Докажите, что полный[2] граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

М$7\frac{1}{2}$◇10°. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным?

М$7\frac{1}{2}$◇11. Могут ли степени всех вершин несвязного n-вершинного графа быть $\geqslant (n-1)/2$?

М$7\frac{1}{2}$◇12. Из столицы выходит 101 авиалиния, из г. Дальний — одна, а из остальных городов — по 100. Можно ли, пусть с пересадками, долететь из столицы в Дальний?

М$7\frac{1}{2}$◇13 (эйлеровы графы). Докажите, что в связном графе тогда и только тогда есть цикл, проходящий ровно один раз по каждому рёбру, когда степени всех вершин чётны.

Плоские графы — это графы, рёбра которых не пересекают друг друга нигде кроме вершин. Части, на которые делит плоскость такой граф, называются *гранями графа*.

М$7\frac{1}{2}$◇14. Докажите, что грани плоского графа тогда и только тогда раскрашиваются в два цвета так, чтобы грани с общим ребром получались разноцветными, когда этот граф эйлеров (см. зад. М$7\frac{1}{2}$◇13).

М$7\frac{1}{2}$◇15. Многоугольник разрезают на треугольники непересекающимися (нигде кроме вершин) диагоналями. Может ли при этом получиться меньше двух треугольников с парой сторон, бывших сторонами исходного многоугольника?

[1] такое дерево называется *остовом* графа

[2] граф называется *полным*, если любая его вершина соединена с любой другой ровно одним ребром

Разные задачи о графах

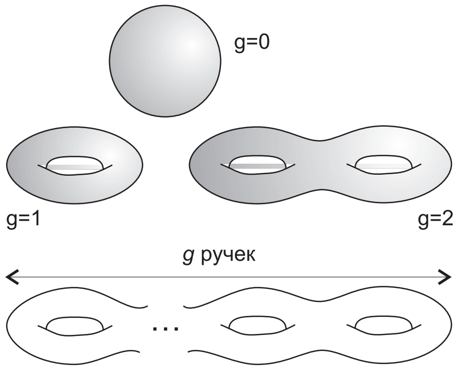


Рис. 7.1. Сферы с ручками

М$7\frac{2}{3}\diamond$1 (формула Эйлера). Всегда ли $в-р+г=2$ в плоском связном графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями[1]? Справедливо ли это равенство для вершин, рёбер и граней произвольного выпуклого многогранника[2]?

М$7\frac{2}{3}\diamond$2. Можно ли нарисовать на сфере полный граф с пятью вершинами, чтобы его рёбра не пересекались?

М$7\frac{2}{3}\diamond$3*. Как изменится формула Эйлера, если граф с непересекающимися рёбрами нарисован не на сфере, а на

а) торе («сфере с ручкой»)? **б)** крендели («сфере с 2 ручками»)? **в)** сфере с g ручками?

М$7\frac{2}{3}\diamond$4. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и проложить попарно непересекающиеся тропинки от каждого дома к каждому колодцу?

М$7\frac{2}{3}\diamond$5. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют отрезками любые две из ещё не соединённых точек так, чтобы эти отрезки не пересекались нигде кроме отмеченных точек. Тот, кто не может сделать ход, — проиграл. Зависит ли исход этой игры от того, как ходят соперники?

М$7\frac{2}{3}\diamond$6*. Трёхзначный кодовый замок откроется как только будут последовательно набраны три правильные цифры подряд (вне зависимости от того, какие цифры набирались до этого). Можно ли, набирая по одной цифре в секунду, открыть такой замок за 17 минут?

М$7\frac{2}{3}\diamond$7. В некой компании поровну юношей и девушек и каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что всех их можно пережениить друг на друге в рамках этих знакомств.

k-дольные графы. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром. Граф называется *k-дольным*, если правильная раскраска его вершин возможна k цветами и не меньше.

М$7\frac{2}{3}\diamond$8. Равносильна ли двудольность отсутствию циклов нечётной длины?

М$7\frac{2}{3}\diamond$9. В любом ли k-дольном графе есть путь из ровно k разноцветных вершин?

М$7\frac{2}{3}\diamond$10. Существует ли граф с n вершинами $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и n рёбрами $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, такими что A_i соединяется ребром с A_j тогда и только тогда, когда b_i и b_j выходят из одной вершины? Если да, то какова степень каждой вершины?

М$7\frac{2}{3}\diamond$11. Города страны соединены $k \cdot m$ прямыми авиалиниями, и некие m юридических лиц вознамерились прихватизировать ровно по k линий, однако антимонопольная служба зорко следит за тем, чтобы ни в одном из городов ни одному лицу не досталось бы сразу две линии, выходящие из этого города. Возможно ли осуществить такую прихватизацию?

М$7\frac{2}{3}\diamond$12. В кубической коробке $n \times n \times n$ лежали n^3 единичных кубиков. Кубики высыпали, каждый просверлили по диагонали, затем все плотно нанизали на нить и связали в кольцо (соединили вершину первого кубика с вершиной последнего). При каких n получившееся «ожерелье» можно обратно убрать в коробку?

М$7\frac{2}{3}\diamond$13*. В гости ожидается либо n, либо m человек, причём $\text{НОД}(n, m) = 1$. На какое минимальное число секторов нужно разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как n, так и m одинаковых кусков?

М$7\frac{2}{3}\diamond$14*. Всегда ли среди 50 человек найдутся двое с чётным (возможно, нулевым) числом общих знакомых среди 48 остальных?

[1] ср. с зад. М$4\frac{1}{2}\diamond$3 и зад. М$4\frac{1}{2}\diamond$4

[2] который есть не что иное, как связный граф с непересекающимися рёбрами, нарисованный на сфере

Множества и отображения

(памятка начинающему пользователю)

Понятие *множества* в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а «как объект, удовлетворяющий аксиомам» (этот список *аксиом теории множеств* мы пока не будем уточнять). Как *прямая* и *точка* формализуют известные пространственные образы, так *множества* формализуют житейские представления о совокупностях предметов произвольной природы. Множество состоит из *элементов*. Элементы могут быть любые: числа, стулья, другие множества ... Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$. Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Все элементы в любом множестве, по определению, *различны*. Множество задано, как только про любой объект можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент $a \in A$ лежит также и в B. Для любых двух множеств A и B множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, которые не содержатся в B, называется их *разностью*.

М8◇1. Сколько всего подмножеств у множества, содержащего n элементов?

М8◇2. Какие из перечисленных ниже свойств справедливы для любых множеств A, B и C:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ **б)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

в) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$ **г)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

д) $A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow A = B$ **е)** $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

ж) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **з)** $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$

М8◇3. Выражаются ли:

а) пересечение через разность? **б)** разность через пересечение и объединение?

Отображение $A \xrightarrow{f} B$ из множества A в множество B — это правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ *ровно один* элемент $f(a) \in B$, зависящий от a и называемый *образом* a. Подмножество $f(A) \subset B$, состоящее из образов элементов множества A, называется *образом* отображения f. Отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $A \xrightarrow{g} B$ *равны*, если $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$. Отображение $B \xrightarrow{g} A$ называется *обратным* к отображению $A \xrightarrow{f} B$, если $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ и одновременно $f(g(y)) = y \quad \forall b \in B$; в этой ситуации отображение f (и отображение g) называют *обратимым* и пишут $g = f^{-1}$. Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *отображением «на»* (или *сюръективным*, или *эпиморфным*, или *наложением*), если у каждого элемента $b \in B$ есть прообраз в A, т. е. $f(A) = B$. Отображение называется *отображением «в»* (или *инъективным*, или *мономорфным*, или *вложением*), если никакие два элемента из A не переходят в один и тот же элемент B, т. е. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение, являющееся одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (или *изоморфизмом*, или *биекцией*).

М8◇4. Нарисуйте все отображения: **а)** из $\{0,1,2\}$ в $\{0,1\}$; **б)** из $\{0,1\}$ в $\{0,1,2\}$.

М8◇5. Из отображений: $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{Z}$ (с $p \in \mathbb{Z}$); $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{R}$ (с $p \in \mathbb{R}$) выберите все **а)** биекции, **б)** инъекции, **в)** сюръекции.

М8◇6. Равносильна ли взаимная однозначность обратимости?

М8◇7. Достаточно ли для того, чтобы f было обратно к g, только одного условия

а) $f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$? **б)** $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$?

М8◇8. Некое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: чётных или нечётных?

М8◇9. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше: с периметром 1999 или 2002?

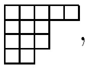
Как сравнивать множества

По пыльной тропинке далёкой планеты бредёт стадо семиногих пятихвосток.
Сколько ног приходится на каждую сотню хвостов ?
(детская загадка)

M9⋄1. Сколько всего разных **а)** любых **б)** инъективных **в)** сюрьективных **г)** биективных отображений можно построить из n-элементного множества в m-элементное?

Прообразы. Если задано отображение $A \xrightarrow{f} B$, то $\forall\, b \in B$ множество $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) = b\,\} \subset A$ называется *полным прообразом* b, а его элементы — *прообразами* b. У разных $b \in B$ может быть разное число (в том числе и нуль) прообразов. Если каждый $b \in B$ имеет ровно m прообразов, то отображение f называется *m-листным накрытием*[1].

M9⋄2. Как изменятся ответы в зад. M7⋄3, если букву о и букву к обе заменить буквой ы? Сколько слов можно получить переставляя буквы в словах: **а)** кок, **б)** курок, **в)** СССР, **г)** колобок, **д)** рефрижератор, **е)** $\underbrace{\mathtt{аа\ldots а}}_{\alpha}\underbrace{\mathtt{бб\ldots б}}_{\beta}$, **ж)** $\underbrace{\mathtt{a}_1\mathtt{a}_1\ldots\mathtt{a}_1}_{m_1}\underbrace{\mathtt{a}_2\mathtt{a}_2\ldots\mathtt{a}_2}_{m_2}\ldots\underbrace{\mathtt{a}_k\mathtt{a}_k\ldots\mathtt{a}_k}_{m_k}$?

Диаграмма Юнга — это картинка типа , состоящая из выровненных по левому краю горизонтальных клеточных полосок, длина которых сверху вниз не возрастает.

M9⋄3. Имеется 5 разноцветных чашек, 7 разноцветных соломинок, 4 одинаковых стакана и 6 одинаковых кусков сахара. Сколькими способами можно разложить[2]: **а)** сахар по чашкам? **б)** соломинки по чашкам? **в*)** сахар по стаканам? **г*)** соломинки по стаканам?

M9⋄4. Как изменятся ответы в зад. M9⋄3, если запретить пустые ёмкости?

M9⋄5. Сколько имеется одночленов степени d от **а)** двух **б)** трёх **в)** n переменных?

M9⋄6. Цело ли число $1000!/10!^{100}$?

M9⋄7. Сколько получится слагаемых, если тупо раскрыть скобки у $(a+b+c)^3$? Какие одночлены и с какими коэффициентами останутся после приведения подобных?

M9⋄8. Между какими из перечисленных ниже множеств имеется изоморфизм? Постройте эти изоморфизмы явно. Сколько элементов в каждом множестве?

а) значки, которые можно высвечивать, зажигая ровно 12 лампочек на прямоугольном табло, имеющем 5 рядов по 4 лампочки в каждом;

б) способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам;

в) слова, которые получаются при перестановке букв в слове ааааааааббббббббббббб;

г) маршруты из зад. M7⋄12, приводящие шарик в 12-ю комнату на 20-м этаже (этажи и комнаты нумеруются сверху вниз и слева направо, начиная с нулевого номера);

д) одночлены a^8b^{12}, которые получатся если тупо раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные слагаемые;

е) диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

M9⋄9*. Грани кубика раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные – в разные). Сколько разных кубиков может получиться?

M9⋄10*. Как изменится ответ, если шестью цветами раскрашивать не кубик, а тетраэдр?

M9⋄11*. Сколько разных игрушек получится, если в предыдущих двух задачах склеивать крашеные кубики (соотв. тетраэдры) по два грань к грани?

[1] в частности, однолистные накрытия — это в точности взаимно однозначные отображения

[2] две раскладки одинаковы, если они получаются друг из друга передвиганием ёмкостей по столу без изменения их содержимого.

Мультиномиальные коэффициенты

М10◇1. Сколько слагаемых получится, если раскрыть скобки и привести подобные у $(a+b+c)^5$? Будут ли среди них a^2bc^2 и ab^2c^3, и если да, то с каким коэффициентом?

М10◇2. Какие одночлены и с какими коэффициентами получатся после раскрытия скобок и приведения подобных у **а)** $(1+x)^n$; **б)** $(a+b)^n$; **в)** $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^2$; **г)** $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$; **д)** $(1+x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$.

Биномиальные коэффициенты и числа сочетаний. Коэффициент при x^k, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых у $(1+x)^n$, называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k}$ (обратите внимание, что $\binom{n}{k}=0$ при $k<0$ и $k>n$ и $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\binom{0}{0}=1$). Количество слов, которые можно получить, переставляя буквы в n-буквенном слове `аа...абб...б`, содержащем k букв `а` и $(n-k)$ букв `б`, называется *числом сочетаний* из n по k и обозначается C_n^k.

М10◇3°. Докажите, что $\binom{n}{k}=C_n^k$ и совпадает с числом путей из зад. М7◇12, ведущих в k-тую комнату на n-том этаже. Верно ли, что $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$?

М10◇4°. Выразите $\binom{n}{k}$ явно через n и k и вычислите для $0\leqslant n\leqslant 15$ и всех $0\leqslant k\leqslant n$.

М10◇5. Из произвольной последовательности чисел $A_0, A_1, \ldots, A_n$ строят новую последовательность $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \ldots, A_{n-1}^{(1)}$, состоящую из сумм соседних элементов: $A_i^{(1)}=A_i+A_{i+1}$. Затем строят следующую последовательность $A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, \ldots, A_{n-2}^{(2)}$ с $A_i^{(2)}=A_i^{(1)}+A_{i+1}^{(1)}$ и т. д. пока не получится последовательность $A_0^{(n)}$, состоящая из одного числа. Выразите его через исходные числа $A_0, A_1, \ldots, A_n$ явной формулой.

Треугольник Паскаля — это бесконечный вниз числовой треугольник на рис. 10.1. Его строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в каждой строке — слева направо, также начиная с нуля; k-е число n-того этажа — это $C_n^k=\binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & & \ddots & & \ddots
\end{array}
$$

Рис. 10.1. Треугольник Паскаля

М10◇6. Найдите в треугольнике Паскаля числа: натуральные 1, 2, 3, …, треугольные: T_1, T_2, T_3, … и «пирамидальные» $\varPi_1$, $\varPi_2$, $\varPi_3$, … (они составляются из треугольных по правилу $\varPi_k \stackrel{\text{def}}{=} T_1+T_2+\cdots+T_k$). Вычислите сумму[1]: $C_k^0+C_{k+1}^1+\cdots+C_{k+n}^n$.

М10◇8. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$; **б)** $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n$.

М10◇9. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots$ **б)** $C_n^0+C_{n+1}^2+C_{n+2}^4+\cdots$ **в)** $C_n^1+2\,C_n^2+\cdots+n\,C_n^n$ **г)** $C_n^0+2\,C_n^1+\cdots+(n+1)\,C_n^n$ **д*)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$.

М10◇10. Выразите $(n+1)^{k+1}-n^{k+1}$ в виде многочлена от n. Покажите, что сумма k-тых степеней первых n натуральных чисел является многочленом $(k+1)$-ой степени от n. Найдите его старший коэффициент и свободный член.

М10◇11*. Для $k=5$ выпишите многочлены из зад. М10◇10 явно.

---

[1]С этой задачей связана такая многомерная геометрия:

М10◇7*. Двумерная пирамида высоты k — это треугольник: $\varPi_k^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} T_k$. Трёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку треугольников $\varPi_k^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} T_1+T_2+\cdots+T_k$. Четырёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку вдоль «четвёртой координатной оси» трёхмерных пирамид: $\varPi_k^{(4)} \stackrel{\text{def}}{=} \varPi_1^{(3)}+\varPi_2^{(3)}+\cdots+\varPi_k^{(3)}$. Что такое m-мерная пирамида высоты k и сколько m-мерных кубиков уйдёт на её постройку? Из двух двумерных пирамид складывается прямоугольник: $T_k+T_k=k\times(k+1)$. Можно ли из шести трёхмерных пирамид $\varPi_k^{(3)}$ сложить параллелепипед $k\times(k+1)\times(k+2)$? Из скольких m-мерных пирамид высоты k следует пытаться собирать m-мерный параллелепипед и каковы будут его размеры?

Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»
(Якоб Бернулли (1654–1705), «Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно)

М$10\frac{1}{2}$◇1. Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в 1 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 27 *г*, ... (по одной гире каждого веса)?

***m*-ичная позиционная система счисления** использует m цифр, коими служат символы: $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{m-1}$. Под n-разрядным числом m-ичной системы мы понимаем любую последовательность из n m-ичных цифр (возможно, начинающуюся с нулей). Для $\ell \in \mathbb{N}$ запись $\ell = \overline{\mu_0\mu_1\dots\mu_{n-1}}$ означает, по определению, что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \dots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$. Количество всех n-разрядных чисел m-ичной системы с суммой цифр k мы будем обозначать через $\beta_m(n,k)$.

М$10\frac{1}{2}$◇2. Запишите десятичные числа 43, 57 и 1999 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

М$10\frac{1}{2}$◇3. Покажите, что при заданном натуральном $m \geqslant 2$, каждое натуральное число ℓ может быть единственным образом записано в m-ичной позиционной системе счисления, т. е. что существует единственный набор целых чисел $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\mu_{n-1} \neq 0$, такой что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \dots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$.

М$10\frac{1}{2}$◇4. Сколько всего n-разрядных чисел в m-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

М$10\frac{1}{2}$◇5*. Докажите, что $\beta_m(n,k)$ равно коэффициенту при x^k в разложении

$$\left(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}\right)^n$$

и удовлетворяет соотношениям $\beta_m(n,k) = \beta_m(n,\, n\,(m-1)-k)$ и

$$\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \dots + \beta_m(n-1,k-m+1)\,.$$

М$10\frac{1}{2}$◇6*. Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел? ([1])

Числа Бернулли B_k начинаются с $B_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и определяются реккурентно[2] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0 + C^1_{k+1}B_1 + \dots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇7*. Покажите, что сумма k-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0\, n^{k+1} + C^1_{k+1}B_1\, n^k + \dots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\, n\right).$$

М$10\frac{1}{2}$◇8*. Вычислите первые 14 чисел Бернулли и сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + (n-1)^{10}$.

М$10\frac{1}{2}$◇9*. Что Вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

М$10\frac{1}{2}$◇10*. Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

---

[1] Подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$.

[2] Предупреждение: «явного» выражения B_n через n не существует!

Арифметика вычетов

М11⋄1 (остаток суммы и произведения). Выразите остатки от деления на n чисел $A+B$ и AB через остатки a и b самих чисел A, B.

М11⋄2. Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у 1998^{1999} и $1998^{1999^{2000}}$.

М11⋄3. Верно ли, что $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7, а $2^{70}+3^{70}$ — на 13?

М11⋄4. Может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 от деления на 6? Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел от деления на 8?

М11⋄5. Имеет ли уравнение $x^2+y^2+z^2=2\,xyz$ ненулевые решения в целых числах?

М11⋄6. Верно ли, что: **а)** $a^2+b^2 \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$ и $b \vdots 7$? **б*)** $a^3+b^3+c^3 \vdots 7 \Rightarrow abc \vdots 7$? **в*)** $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \vdots 9 \Rightarrow abcde \vdots 9$?

Арифметика вычетов по модулю 7 (или ***7-арифметика***) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ состоит из семи «чисел» — остатков от деления на 7 (мы будем обозначать их $[0]_7$, $[1]_7$, … , $[6]_7$). По определению, $[x]_7+[y]_7$ есть остаток от деления на 7 суммы $x+y$, а $[x]_7\cdot[y]_7$ — остаток произведения xy.

М11⋄7. Составьте для 7-арифметики таблицы сложения и умножения и проверьте, что эти операции подчиняются обычным переместительному, сочетательному и распределительному законам. Дайте определение противоположного числа $-a$ и обратного числа a^{-1} к данному числу $a\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Составьте таблицы противоположных и обратных чисел. Справедливы ли в 7-арифметике тождества $(-1)\cdot a=-a$ и $(-a)\cdot(-b)=ab$?

М11⋄8. Дайте определение n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и составьте таблицы сложения и умножения для 5-, 6- и 8-арифметик. Верно ли, что при умножении в n-арифметике
а) у всех ненулевых чисел есть обратные **б)** «минус» на «минус» даёт «плюс»
в) $a\neq 0$ и $b\neq 0 \Rightarrow ab\neq 0$ **г)** $ab=ac$ и $a\neq 0\Rightarrow b=c$ **д)** $a\neq 0\Rightarrow a^n\neq 0\ \forall\, n\geqslant 1$
е) степени a^0, a^1, a^2, a^3, … любого $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ всегда «зацикливаются»?

М11⋄9. Вычислите сумму всех чисел n-арифметики. Делится ли $1^3+2^3+\cdots+28^3$ на 29?

М11⋄10 (позиционные признаки делимости). Вычислите остатки всех степеней десятки от деления на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7 и скажите, как глядя на цифры десятичной записи данного числа (скажем, $\overline{abcdefghi}$) узнать, делится ли оно на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7?

М11⋄11. У каких чисел 5-, 6- и 8-арифметик есть обратные (такие числа называются *обратимыми*)? Укажите эти обратные явно.

М11⋄12. Докажите, что следующие свойства $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ попарно эквивалентны:
а) a обратим; **б)** отображение умножения на a: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\xrightarrow{x\mapsto ax}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ взаимно однозначно;
в) $ax=0\Rightarrow x=0$; **г)** $ax=ay\Rightarrow x=y$; **д)** $\forall y\ \exists x:\ ax=y$; **е)** $\text{НОД}(a,n)=1$.

М11⋄13* (теорема Вильсона). Чему равно произведение всех ненулевых чисел n-арифметики при простом и составном n? Верно ли, что натуральное число $p\geqslant 2$ просто, если и только если оно делит $(p-1)!+1$?

М11⋄14* (гомоморфизм Фробениуса). Пусть p – простое. Докажите, что C_p^k делится на p при всех $1<k<p$ и что в p-арифметике выполнено тождество $(a+b)^p=a^p+b^p$.

М11⋄15* (малая теорема Ферма). Докажите, что для любого $a\in\mathbb{N}$ и простого p степень a^p имеет тот же остаток от деления на p, что и a.

Простые числа и разложение на множители

Число $p\in\mathbb{Z}$ называется *простым*, если оно делится только на ±1 и $\pm p$.

M$11\frac{1}{2}\diamond$1. Найдите все простые числа, которые одновременно представляются в виде суммы и в виде разности двух простых чисел.

M$11\frac{1}{2}\diamond$2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

M$11\frac{1}{2}\diamond$3. Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?

M$11\frac{1}{2}\diamond$4*. Верно ли, что среди чисел вида **а)** $2^{2^k}-1$ **б)** $1\overbrace{00\ldots00}^{k}3$ **в)** $\overbrace{33\ldots33}^{k}1$ имеется бесконечно много составных?

M$11\frac{1}{2}\diamond$5 (основное свойство простых чисел). Пусть $p\in\mathbb{Z}$ простое. Докажите, что $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$ произведение ab делится на p только если a или b делится на p. Бывают ли непростые числа p с таким свойством?

M$11\frac{1}{2}\diamond$6. Пусть $p>0$ простое. Существуют ли $x,y\in\mathbb{N}: x^2=p\,y^2$?

M$11\frac{1}{2}\diamond$7*. Существуют ли $n\geqslant1$ различных простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_n$ и рациональные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, для которых $\lambda_1\sqrt{p_1}+\lambda_2\sqrt{p_2}+\cdots+\lambda_n\sqrt{p_n}$ рационально? Это весьма трудная задача. Попытайтесь решить её хотя бы для $n=1,2,3$.

M$11\frac{1}{2}\diamond$8 (факториальность $\mathbb{Z}$). Докажите, что любое целое число z можно представить в виде произведения $z=\pm p_1p_2p_3\cdots p_s$, в котором все сомножители суть натуральные простые числа (не обязательно разные), и любые два таких разложения (например, полученные разными способами) могут различаться *только порядком следования множителей*.

M$11\frac{1}{2}\diamond$9. Разложите на простые множители все числа A, B из зад. M3$\diamond$6.

M$11\frac{1}{2}\diamond$10. Сколько различных натуральных делителей у числа: **а)** 27; **б)** 35; **в)** 67500; **г)** $p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν — попарно разные простые).

M$11\frac{1}{2}\diamond$11. Найдите все кратные 30 числа с ровно тридцатью натуральными делителями.

M$11\frac{1}{2}\diamond$12*. Перечислите все $n\in\mathbb{N}$, имеющие не менее $\sqrt{n}$ натуральных делителей.

Функция Эйлера. Обозначим через $\varphi(n)$ количество обратимых чисел в n-арифметике (т. е. количество всех не превосходящих n натуральных чисел, взаимно простых с n, см. зад. M11$\diamond$12). Отображение $n\mapsto\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.

M$11\frac{1}{2}\diamond$13. Изобразим числа n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точками, зафиксируем какое-либо одно число $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, и из каждой точки $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ проведём стрелку в точку ax. Докажите, что если a обратим, то на этой картинке движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы, причём каждый цикл, содержащий хоть одно обратимое число, весь состоит из обратимых чисел, и все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину.

M$11\frac{1}{2}\diamond$14 (теорема Эйлера). Используя предыдущую задачу, докажите, что для любых взаимно простых $a,b\in\mathbb{N}$ число $a^{\varphi(b)}$ имеет остаток 1 от деления на b.

M$11\frac{1}{2}\diamond$15. Вычислите $\varphi(n)$ для **а)** $n=36$ **б)** $n=p^k$ (p – простое) **в)** $n=p_1p_2p_3\cdots p_s$ **г***) $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_s^{m_s}$ (p_ν попарно разные простые).

Бесконечные множества

М12◇1°. Придумайте множество A, вложение $A \xhookrightarrow{\varphi} A$ и наложение $A \xrightarrow{\psi} A$, которые, однако, не являются *биекциями*. Возможно ли такое для конечного множества A?

М12◇2. Толя рисует на доске 10 крестиков, после чего Коля стирает один из них, затем Толя рисует ещё 10 крестиков, а Коля стирает ещё один крестик и т. д. На первую пару ходов уходит 1 сек., на вторую — пол секунды, на третью — четверть и т. д. Толя выигрывает, если через 2 сек. на доске будет хоть один крестик; в противном случае выигрывает Коля. Кто победит при правильной игре?

М12◇3. Бесконечный направо и вниз лист клетчатой бумаги сплошь заполнен крестиками и ноликами. Всегда ли, глядя на этот лист, можно построить последовательность крестиков-ноликов, не совпадающую ни с одной из строк?

Счётные множества. Множество M называется *счётным*, если оно изоморфно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Иначе говоря, множество M счётно, если все его элементы можно занумеровать разными натуральными числами, так что все натуральные числа будут при этом израсходованы.

М12◇4. Счётно ли множество: **а)** простых **б)** целых **в)** рациональных чисел?

М12◇5. Счётно ли множество точек координатной плоскости, обе координаты которых **а)** целые **б)** рациональные?

М12◇6. Всегда ли бесконечное подмножество счётного множества счётно?

М12◇7. Является ли счётным объединение **а)** счётного множества с конечным множеством; **б)** конечного числа (например, двух или трёх) счётных множеств; **в)** счётного множества счётных множеств?

М12◇8. Пусть при отображении множеств $A \xrightarrow{f} B$ у каждого $b \in B$ имеется непустое **а)** конечное **б)** конечное или счётное множество прообразов.
Верно ли, что A счётно тогда и только тогда, когда B счётно?

М12◇9. Счётно ли множество **а)** конечных **б)** бесконечных слов из букв а и б ?

М12◇10. Счётно ли множество всех: **а)** конечных **б)** счётных подмножеств счётного множества?

Мощность. Про изоморфные множества говорят, что они *равномощны*. Если множество A изоморфно некоторому подмножеству множества B, но не изоморфно самому B, то говорят, что B *мощнее* A.

М12◇11*. Докажите, что множество отображений из произвольного множества A в любое множество, содержащее не менее двух элементов, мощнее, чем A.

М12◇12*. Докажите, что множество всех подмножеств непустого множества A мощнее, чем A.

М12◇13. Постройте биекцию между отрезком $[0,1]$ и полуинтервалом $[0,1)$.

М12◇14* (теорема Кантора - Бернштейна). Докажите, что если множество B равномощно подмножеству множества A, а множество A равномощно подмножеству множества B, то A и B равномощны.

О противоречиях. Высказывание *противоречиво*, если из него следует *ложное утверждение* (т. е. высказывание типа «A и не A»). Из ложного утверждения следует всё что угодно.

М12◇15* (уроки демократии - 2). Был, помнится, в Думе такой меж депутатами разговор:
Ж: «*На следующей неделе думу точно распустят!*» З: «*В какой же день?*»
Ж: «*Об этом не будет известно даже накануне!*».
Докажите, что высказывания г-на Ж противоречивы.

М12◇16*. Докажите противоречивость таких понятий: **а)** «множество всех множеств»; **б)** «множество всех множеств, задающихся фразой из $\leqslant 2000$ типографских знаков».

Действительные числа и БДД

Бесконечная десятичная дробь (БДД) — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида $\pm\overline{b_{-n}\dots b_{-1}b_0, b_1b_2\dots b_m\dots}$. Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, и их обычно не пишут.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер $i \in \mathbb{Z}$, такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее i-того совпадают, в i-том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей i-той цифрой имеет справа от i-того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки. Иными словами, $\overline{b_\beta\dots b_{i-1}\,b_i\,9999\dots} = \overline{b_\beta\dots b_{i-1}\,(b_i+1)\,0000\dots}$ как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

М13⋄1. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Неравенства. Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$.

Ограниченность. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M \subset \mathbb{R}$, если $b \geqslant x \quad \forall\, x \in M$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

М13⋄2°. Не употребляя отрицаний, дайте определения:

а) числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$;

б) множества, неограниченного сверху **в)** неограниченного множества.

Максимальные элементы. Число $m \in M$, такое что $m \geqslant x \quad \forall\, x \in M$, называется *максимальным элементом* множества $M \subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: ТНГ) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

М13⋄3°. Дайте определение *минимального* элемента и *точной верхней грани* (сокращённо: ТВГ) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

М13⋄4. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

М13⋄5. Вычислите ТВГ множеств: **а)** $\{0,3;\ 0,33;\ 0,333;\ 0,3333;\ 0,33333;\ \dots\}$;

б) сумм $1 + q + q^2 + \dots + q^m$ с фиксированным $0 < q < 1$ (скажем, $q = 1/2$) и любым $m \in \mathbb{N}$.

М13⋄6. Верно ли, что любая БДД $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ множества:

а) всех БДД, меньших b; **б)** всех конечных БДД, меньших b;

в) всех конечных БДД, являющихся начальными кусками b.

М13⋄7 (теорема о полноте). Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу – точную нижнюю.

М13⋄8 (сложение и умножение). Суммой БДД $a, b \in \mathbb{R}$ называется ТВГ чисел вида $\alpha + \beta$, где $\alpha < a$ и $\beta < b$ — всевозможные *конечные* БДД. Аналогично, произведение ab двух *положительных* БДД — это ТВГ чисел вида $\alpha\beta$ с *конечными положительными* $\alpha < a$ и $\beta < b$ (на неположительные БДД произведение распространяется по стандартному правилу «−» на «−» даёт «+»). Докажите, что эти определения корректны (т. е. нужные ТВГ существуют), дают для конечных a и b то же, что и раньше, и проверьте, что $a(b + c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

М13⋄9 (корни). Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть ТВГ конечных БДД β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2.

Об упорядочении

Три уровня порядка. Множество называется *частично упорядоченным* (ЧУМом), если про некоторые пары его элементов a, b можно сказать $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, так что при этом выполнены три свойства:

(1) $a \leqslant a\ \forall a$, **(2)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$, **(3)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Подмножество $[\ldots x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, m \in M \mid m \leqslant x \,\}$ ЧУМа M называется *начальным отрезком M до x*. ЧУМ называется *упорядоченным* (или *линейно упорядоченным*), если отношение порядка определено *для любой* пары элементов. В линейно упорядоченном множестве можно ввести отношение $a < b$ означающее, что $a \neq b$ и $a \leqslant b$; тогда $\forall a, b$ будет выполнена альтернатива: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$. Элемент $\mu \in M$ ЧУМа M называется *минимальным*, если $\forall\, x \in M$ из неравенства $x \leqslant \mu$ вытекает равенство $x = \mu$. Линейно упорядоченное множество называется *вполне* или *индуктивно* упорядоченным, если в любом его подмножестве имеется *минимальный* элемент. Два вполне упорядоченных множества называются *подобными*, если между ними имеется взаимно однозначное соответствие, *сохраняющее порядок*. Классы подобных вполне упорядоченных множеств называются *трансфинитными числами*.

М$13\frac{1}{2}\diamond$1°. Выясните, какие из указанных ниже отношений «$\preccurlyeq$» на множествах M являются упорядочениями и какого типа: **а)** $M = \mathbb{N}$ и $a \preccurlyeq b \iff b$ делится на a; **б)** то же для $M = \mathbb{Z}$;
в) $M = \mathbb{N},\ \mathbb{Z}\,,\ \mathbb{Q}$ с обычным $\leqslant$ для чисел; **г)** то же для $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\infty \geqslant n\ \forall n \in \mathbb{N}$;
д) M есть множество всех подмножеств некоторого множества A и $a \preccurlyeq b \iff a \subseteq b$;
е) M есть множество вершин ориентированного графа Γ и $a \preccurlyeq b \iff$ в Γ есть ребро $\overrightarrow{ab}$.

М$13\frac{1}{2}\diamond$2°. Дайте определение максимального элемента ЧУМа и приведите пример ЧУМа с несколькими максимальными элементами.

М$13\frac{1}{2}\diamond$3°. Верно ли, что любой начальный отрезок произвольного ЧУМа линейно упорядочен?

М$13\frac{1}{2}\diamond$4 (принцип трансфинитной индукции). Пусть множество M вполне упорядочено, и про его элементы высказано некое утверждение $\mathfrak{U}$, которое истинно для минимального элемента множества M, и при всех $m \in M$ из того, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall\, x < m$, следует, что $\mathfrak{U}$ истинно для m. Докажите, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall\, m \in M$.

М$13\frac{1}{2}\diamond$5. Может ли вполне упорядоченное множество быть подобно своему начальному отрезку, отличному от всего множества?

М$13\frac{1}{2}\diamond$6. Докажите, что отношение $a \preccurlyeq b \iff$ «a подобно начальному отрезку b» вполне упорядочивает трансфинитные числа.

Полные ЧУМы. ЧУМ M называется *полным*, если для каждого линейно упорядоченного подмножества $U \subset M$ существует элемент $m \in M$, такой что $u \leqslant m\ \forall\, u \in U$.

М$13\frac{1}{2}\diamond$7* (теорема о неподвижной точке). Докажите, что любое отображение $M \xrightarrow{f} M$ из полного ЧУМа в себя, обладающее свойством $x \leqslant f(x)\ \ \forall\, x \in M$, имеет неподвижную точку (т. е. $f(x_0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in M$).

Аксиома выбора входит в список аксиом «строгой» теории множеств и утверждает, что в любом множестве непустых множеств можно выбрать по одному элементу из каждого множества (иначе говоря, для любого множества $\mathfrak{M}$, элементы которого сами суть непустые множества, существует отображение f из $\mathfrak{M}$ в объединение всех множеств $M \in \mathfrak{M}$, такое что $f(M) \in M\ \ \forall\, M \in \mathfrak{M}$).

М$13\frac{1}{2}\diamond$8*. Выведите из аксиомы выбора и зад. М$13\frac{1}{2}\diamond$7 следующие два утверждения[1]:
а) (лемма Цорна) В любом полном ЧУМе есть максимальный элемент.
б) (теорема Цермело) Любое множество можно вполне упорядочить.

---

[1]решение этих (весьма трудных) задач не стыдно подглядеть в книгах: *Ван Дер Варден. Алгебра.* М. «Мир» (1976), стр. 246–249 или *П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию.*. М. «Наука» (1977), стр. 80–83.

Континуум

Координатные пространства. Координатная прямая $\mathbb{R}^1$ — это множество всех действительных чисел. Аналогично, координатные плоскость $\mathbb{R}^2$, 3-мерное пространство $\mathbb{R}^3$, … , n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, … суть множества упорядоченных пар (x_1, x_2), троек (x_1, x_2, x_3), … , n-ок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, … чисел $x_i \in \mathbb{R}$. Множество $\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \ \forall i \in \ \}$ называется *единичным n-мерным кубом* в $\mathbb{R}^n$.

М14◇1. Сколько у n-мерного куба **а)** вершин; **б)** рёбер; **в)** $(n-1)$-мерных граней, **г*)** k-мерных граней ($0 \leqslant k \leqslant (n-1)$).

М14◇2. Нарисуйте 3-мерную развёртку и общую 2-мерную проекцию 4-мерного куба.

Несчётность и континуальность. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно. Про множество, равномощное единичному отрезку говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

М14◇3. Всегда ли $N \setminus M$ равномощно M, если M счётно, а N несчётно?

М14◇4. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся
а) интервалов на прямой? **б*)** восьмёрок[1] на плоскости? **в*)** букв Т на плоскости?

М14◇5. Имеют ли мощность континуума: **а)** множество бесконечных слов из букв а и б; **б$^\circ$)** любой отрезок $[a, b]$ (с $a < b$); **в)** любой непустой интервал (a, b); **г)** вся прямая; **д)** m-мерный куб; **е)** множество бесконечных последовательностей вещественных чисел?

Целые и рациональные числа. БДД с нулевой дробной частью называются *целыми*. На координатной прямой множество целых БДД $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ получается откладыванием от 0 всевозможных целых кратных единичного отрезка. БДД $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональной*, если $\exists\, k, m \in \mathbb{Z} : kr = m$ в $\mathbb{R}$. Подмножество рациональных БДД $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ на числовой прямой изображается откладыванием от 0 всевозможных отрезков, соизмеримых[2] с единичным.

М14◇6. Докажите, что конечные БДД рациональны. Верно ли, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, такие что $\alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$?

М14◇7. Докажите, что множества: **а)** иррациональных **б*)** трансцендентных[3] действительных чисел имеют мощность континуума.

Дедекиндовы сечения. Разбиение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ в объединение двух непересекающихся подмножеств, таких что $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, называется *сечением* множества $\mathbb{Q}$.

М14◇8. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ имеет место равенство $\sup A_1 = \inf A_2$ и выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в A_1 есть максимальный элемент, либо в A_2 есть минимальный элемент, либо действительное число $\sup A_1 = \inf A_2$ иррационально.

М14◇9. Забудем на время про БДД, будем понимать $\mathbb{Q}$ как множество обыкновенных дробей p/q с $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и назовём действительным числом Дедекинда любое сечение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$, в котором A_1 не имеет максимального элемента. Дайте определение суммы и произведения действительных чисел Дедекинда (это должно быть сечение нужного типа) и установите сохраняющий арифметические операции изоморфизм между множеством дедекиндовых действительных чисел и множеством действительных чисел, определённом в предыдущем листке посредством БДД[4].

М14◇10. Исходя только из дедекиндова определения действительных чисел (т. е. не пользуясь БДД, но в терминах сечений) докажите теорему о полноте (ср. с зад. М13◇7) и определите квадратные корни (ср. с зад. М13◇9).

---

[1] *восьмёркой* называется любая пара соприкасающихся внешним образом окружностей

[2] два отрезка называются *соизмеримыми*, если они допускают общую единицу измерения — третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них

[3] число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами; числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*

[4] ПОДСКАЗКА: сопоставьте каждому классу эквивалентных БДД $\alpha \in \mathbb{R}$ сечение $\mathbb{Q} = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha \} \sqcup \{ q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant \alpha \}$

Окрестности и покрытия

М15◇1 (лемма о вложенных отрезках). Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

М15◇2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

М15◇3. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти **а)** 5 *м* ? **б)** 10 *м* ? **в)** 12 *м* ?

М15◇4 (лемма о конечном покрытии). Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок.

М15◇5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?

М15◇6. Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?

М15◇7. Всегда ли из покрытия отрезка **а)** конечным **б)** любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?

Внутренние точки и открытые множества. Для любого положительного числа ε будем называть ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал

$$D_\varepsilon(x_0) \overset{\text{def}}{=} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, |x - x_0| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \,\}$$

длины 2ε с центром в x_0. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall\, u \in U \;\; \exists\, \varepsilon > 0 : D_\varepsilon(u) \subset U$ (величина ε может зависеть от точки u). Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

М15◇8°. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, -\infty)$ и (a, b) открыты. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

М15◇9. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

М15◇10. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. Так ли это для пересечений бесконечных наборов?

М15◇11. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Изолированные точки и дискретные множества. Точка $a \in M \subset \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

М15◇12. Может ли бесконечное дискретное множество быть:
а) ограниченным? **б)** несчётным?

Предельные точки множеств

Предельные точки. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.

М$15\frac{1}{2}$◇1. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **а)** пусто; **б)** состоит из одной точки; **в)** состоит из двух точек; **г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

М$15\frac{1}{2}$◇2. Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$?

М$15\frac{1}{2}$◇3. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

Замкнутые множества. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

М$15\frac{1}{2}$◇4°. Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и открытый луч — нет. Бывают ли дискретные незамкнутые множества?

М$15\frac{1}{2}$◇5°. Бывают ли бесконечные дискретные компакты?

М$15\frac{1}{2}$◇6°. Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

М$15\frac{1}{2}$◇7. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin Z \,\}$ открыто.

М$15\frac{1}{2}$◇8. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

М$15\frac{1}{2}$◇9. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. Так ли это для бесконечных наборов?

М$15\frac{1}{2}$◇10 (лемма о вложенных компактах). Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_\nu \neq \varnothing$.

М$15\frac{1}{2}$◇11* (лемма о конечном покрытии). Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

Канторово множество. Определим по индукции последовательность компактов $K_\nu \subset [0,1]$ следующим образом. Каждый K_ν является объединением 2^ν отрезков: $K_{\nu+1}$ получается из K_ν выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в K_ν, а $K_0 = [0,1]$. Пересечение $\mathfrak{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_\nu K_\nu$ называется *канторовым множеством* (в честь Георга Кантора). Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно определить как множество всех чисел $\varkappa \in [0,1]$, которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).

М$15\frac{1}{2}$◇12. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

М$15\frac{1}{2}$◇13. Содержит ли канторово множество: **а)** интервалы? **б)** изолированные точки?

Конденсация несчётных множеств. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его *точкой конденсации*, если $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно $\forall\, \varepsilon > 0$.

М$15\frac{1}{2}$◇14*. Докажите, что множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.

М$15\frac{1}{2}$◇15*. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

М$15\frac{1}{2}$◇16*. Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.

М$15\frac{1}{2}$◇17*. Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.

Радикальные преобразования

(напоминания из алгебры)

… здесь вам не университет: тут головой думать надо!
(из армейского юмора)

Напомним, что через $|a-b|$ (читается «модуль a минус b») обозначается расстояние между точками a и b на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Таким образом, $|a-b| = |b-a|$ равно той из двух разностей $(a-b)$, $(b-a)$, которая неотрицательна. Вместо $|a-0| = |0-a|$ пишут просто $|a|$.

М16◇1°. Из перечисленных ниже утверждений верные докажите, а неверные опровергните и, по возможности, исправьте: **а)** $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\alpha+a}{\beta+b} < \dfrac{a}{b}$ $\forall\, \alpha, a, \beta, b \in \mathbb{R}$ с $\beta, b > 0$; **б)** $a \leqslant b$ и $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \dfrac{a}{\beta} \leqslant \dfrac{b}{\alpha}$ $\forall\, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; **в)** $|a-b| + |b-c| = |a-c|$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$; **г)** $|a| - |b| \leqslant |a-b|$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; **д)** $|a| + |b| \geqslant |a+b|$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; **е)** $\sqrt{x^2} = x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

М16◇2. Без помощи калькулятора выясните, что больше:
а) $\sqrt{37} - 6$ или $1/10$; **б)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ или $\sqrt{5} - 2$ **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ или 5; **г)** $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$.

М16◇3. Какие из перечисленных ниже пар чисел обратны друг другу:
а) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; **б)** $\left(2\sqrt{20}+9\right)^{100}$ и $\left(2\sqrt{20}-9\right)^{100}$; **в)** $\left(7+5\sqrt{2}\right)^3$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^3$,; **г)** $\left(7+5\sqrt{2}\right)^4$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^4$; **д)** $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt[3]{9} - 3$ и $3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4$.

М16◇4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: **а)** $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; **в)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$; **г)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; **д)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; **е*)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$; **ж*)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

М16◇5 (формулы Виета). В произведении $(x-\vartheta_1)(x-\vartheta_2)\cdots(x-\vartheta_m)$ раскрыли скобки и сгруппировали слагаемые по степеням x. Чему будет равен коэффициент при x^k? Из скольких слагаемых он состоит?

М16◇6. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, среди корней которого есть:
а) $1+\sqrt{7}$; **б)** $5-2\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

М16◇7. Какими должны быть α, β, чтобы $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2 = a + \sqrt{b}$ для данных a, b? Выделяя полный квадрат или куб, избавьтесь от наружнего радикала в выражениях:
а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{67+12\sqrt{7}}$; **г)** $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$; **д)** $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$; **е)** $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}$; **ж)** $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; **з)** $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$; **и)** $\sqrt[3]{21\sqrt{6}-23\sqrt{5}}$.

М16◇8. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Верно ли, что при $\alpha \neq \beta$ числа $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ либо оба рациональны, либо оба иррациональны?

М16◇9. Рациональны ли числа: **а)** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; **в)** $\left(\sqrt{5}+1\right)^3 - \left(\sqrt{5}-1\right)^3$; **г)** $\left(1+\sqrt{2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{2}\right)^5$; **д)** $\left(1+\sqrt{3}\right)^{11} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{11}$; **е)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{10} - \left(\sqrt{3}-1\right)^{10}$.

М16◇10. Вычислите первую тысячу знаков после запятой у
а) $\left(12-\sqrt{143}\right)^{2000}$; **б*)** $\left(7+\sqrt{48}\right)^{1999}$; **в*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2000}$; **г*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2001}$.

М16◇11*. Чётна или нечётна целая часть числа $\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$?

Графики и кривые

М17◇1. Функция $y = f(x)$ имеет график, изображённый на рис. 17.1. Нарисуйте (поточнее) графики функций:

а) $2\,f(x)$; **б)** $f(2x)$; **в)** $f(x+2)$; **г)** $f(x)+2$; **д)** $f(-x)$;
е) $f(|x|)$; **ж)** $-|f(-|x|)|$; **з)** $3\,f(x)+2$; **и)** $3-f(2-x)$;
к) $f\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$; **л)** $f\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)$; **м)** $3-2f(3-2x)$;
н) $1-\left|f\left(\dfrac{1-|x|}{3}\right)\right|$; **о)** $x\,f(x)$; **п)** $\dfrac{1}{f(x)}$; **р)** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

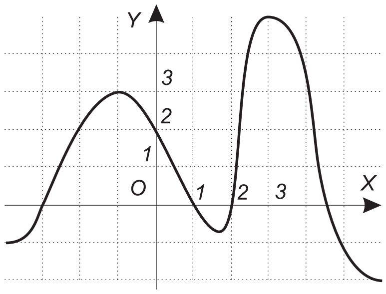


Рис. 17.1. График $y = f(x)$

М17◇2. Решите неравенство $\Big|\,3\,\big|\,1-2\,|x-1|\,\big|-5\,\Big| \geqslant 2$.

М17◇3. Выразите функцию $g(x)$ через функцию $f(x)$, если известно, что график g получается из графика f **а)** параллельным переносом на вектор $(3,5)$; **б)** сжатием в 2 раза к оси OY;
в) симметрией относительно оси OX; **г)** симметрией относительно прямой $x=3$;
д) растяжением в 3 раза от прямой $y=-1$;
е) центральной симметрией относительно начала координат;
ж) гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат;
з) гомотетией с коэффициентом $-1/3$ относительно точки $(-3,2)$.

М17◇4. Постройте графики: **а)** $\dfrac{1}{x}$; **б)** $1-\dfrac{2}{x+1}$; **в)** $\dfrac{x+1}{x-1}$; **г)** $\dfrac{2x+3}{2-3x}$; **д)** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$.

М17◇5. Постройте графики: **а)** x^2; **б)** $3-2(x-5)^2$; **в)** ax^2+bx+c, где $a \neq 0$.

М17◇6. Где лежат середины любого семейства параллельных хорд данной параболы?

М17◇7. Чтоб познакомиться с Машенькой, Вовочка стёр в её тетрадке оси координат у графиков **а)** $y=x^2$ **б)** $y=1/x$. Как Машеньке точно восстановить их циркулем и линейкой?

М17◇8. Множество всех решений (x,y) уравнения $\Phi(x,y)=0$ представляет собой кривую на рис. 17.2. Нарисуйте (поточнее) кривые, заданные уравнениями: **а)** $\Phi(x+2,y-1)=0$;
б) $\Phi(y,x)=0$; **в)** $\Phi(-x,-y)=0$; **г)** $\Phi(2x,y)=0$;
д) $\Phi\left(\dfrac{x}{2},2y\right)=0$; **е)** $\Phi(|y|,x)=0$; **ж)** $\Phi(x+y,x-y)=0$.

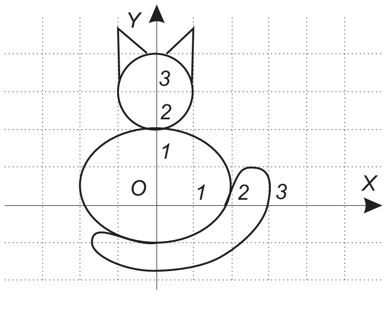


Рис. 17.2. Кривая $\Phi(x,y)=0$

М17◇9. Напишите какое-нибудь уравнение, задающее кривую, получающуюся из показанной на рис. 17.2 кривой $\Phi(x,y)=0$:
а) параллельным переносом на вектор $(-2,3)$;
б) растяжением в 2 раза от оси OX;
в) симметрией относительно оси OY;
г) симметрией относительно прямой $y=-2$;
д) центральной симметрией относительно начала координат;
е) гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат;
ж) поворотом на 45° вокруг начала координат; **з)** сжатием в 3 раза к прямой $x=1$;
и) гомотетией с коэффициентом $-\frac{1}{3}$ относительно точки $(1,-1)$.

М17◇10. Нарисуйте кривые: **а)** $x^2-y^2=1$; **б)** $4\,x^2+9\,y^2=36$; **в)** $16\,x^2-25\,y^2=400$.

М17◇11. Напишите уравнение, задающее **а)** окружность радиуса 3 с центром в точке $(-5,2)$;
б) гиперболу $y=1/x$, сдвинутую и повёрнутую так, что её центр находится в точке $(-5,2)$, а асимптоты составляют углы в 45° с осью OX;
в) параболу $y=x^2$, сдвинутую и повёрнутую так, что её вершина находится в точке $(-1,-1)$, а ось идёт под углом 45° к оси OX.

Получение оценок

Матанализ есть искусство получения точных результатов посредством приближённых оценок.
(из профессорско - преподавательского фолькьлора)

M18◇1 (неравенство Бернулли). Верно ли, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\,\alpha \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ и произвольного действительного $\alpha > -1$?

M18◇2. Укажите какое-нибудь[1] $m \in \mathbb{N}$, чтобы при всех целых $n \geqslant m$ выполнялась оценка:

а) $1000 \cdot 2^n < n!$; **б)** $100 \cdot n^2 < 2^n$; **в)** $10 \cdot n^3 < 2^n$; **г)** $n^{10} < 2^n$; **д)** $(1+10^{-4})^n > 10^6$; **е)** $(1-10^{-4})^n < 10^{-6}$; **ж)** $1/(k+1) + 1/(k+2) + \cdots + 1/(k+n) > 1/2$.

Оценки функций. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве X, называется *ограниченной сверху* (соотв. *ограниченной снизу* и просто *ограниченной*) на X, если таковым является множество её значений $f(X) \subset \mathbb{R}$. Иначе говоря, f ограничена сверху, если $\exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) < c \quad \forall\, x \in X$; f ограничена снизу, если $\exists\, c \in \mathbb{R} : f(x) > c \quad \forall\, x \in X$; f ограничена, если $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} : c_1 < f(x) < c_2 \quad \forall\, x \in X$.

M18◇3. Исследуйте каждую из функций: $x^3 - 10\,x$, $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^4 + 1}$, $\dfrac{x^4 - x + 1}{x^4 + 1}$, $\dfrac{x^5 - x + 1}{x^4 + 1}$ на ограниченность **а)** на отрезке $[-100, 100]$; **б)** на всей прямой.

M18◇4. Какие из перечисленных ниже функций ограничены на своей области определения и с какой стороны: **а)** $\sqrt{x^2+1} - x$; **б)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{5\,x}{\sqrt{2\,x+1} - \sqrt{2\,x-1}}$; **г)** $\dfrac{3 + 2\,x}{3\,x - 2}$.

M18◇5. Ограничены ли сверху последовательности: **а)** $a_n = C_n^{100}/n^{100}$? **б)** $b_n = \left(1 + 1/n\right)^n$?

Оценки рядов. Бесконечные суммы типа $\sum\limits_{\nu \geqslant 1} a_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ называются *рядами*. Конечная сумма первых m членов такого ряда $s_m = \sum\limits_{\nu=1}^{m} a_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ называется его *частичной суммой*. Ряд *неотрицательных* действительных чисел называется *сходящимся*, если множество значений его частичных сумм ограничено сверху; твг этого множества называется *суммой* ряда. Если частичные суммы не ограничены, то говорят, что ряд *расходится*.

M18◇6. Докажите, что сумма положительной убывающей бесконечной геометрической прогрессии сходится и выразите её (если Вы до сих пор этого не сделали) через первое слагаемое и знаменатель.

M18◇7. Верно ли, что любая ε-окрестность любого числа содержит бесконечно много рациональных чисел? Можно ли покрыть все рациональные числа системой интервалов, суммарная длина которых меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$?

M18◇8 (число *e*). Докажите, что число $e \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k \geqslant 0} 1/k! = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + \cdots$

а) существует ; **б)** удовлетворяет неравенствам $2,7 < e < 2,8$; **в*)** иррационально.

M18◇9 (гармонический ряд). Сходится ли ряд: $\sum\limits_{k \geqslant 1} 1/k = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$?

M18◇10. Сходиться ли ряд, составленный из квадратов членов гармонического ряда?

M18◇11 (задача о стирке). Имеется 10 *кг* грязного белья и 10 *кг* чистой воды. При погружении любой части белья в любое количество воды грязь распределяется в их общей массе равномерно. Можно ли уменьшить количество грязи в белье более чем в **а)** 3 **б*)** 2000 раз?

M18◇12*. Из гармонического ряда выкинули все слагаемые, в десятичной записи которых участвует цифра 9. Докажите, что сумма оставшихся слагаемых не превышает 100.

[1] подчеркнём, что «какое-нибудь» вовсе не означает «как можно меньшее»

Последовательности

Последовательность элементов множества X — это отображение $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$. Вместо $x(n)$ обычно пишут x_n и называют его *n-тым членом* последовательности. Последовательность x_1, x_2, x_3, ... коротко обозначается через (x_n). Отметим, что *последовательность* не следует путать с *множеством* её значений, и неверно думать о последовательности как о «занумерованном множестве». Всюду в этом листке речь будет идти о *числовых* последовательностях, т. е. о последовательностях $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$.

М19◇1°. Дайте определения числовых последовательностей: **а)** ограниченной; **б)** неограниченной; **в)** монотонно возрастающей; **г)** монотонно невозрастающей.

М19◇2. Изобразите последовательности и исследуйте их на ограниченность и монотонность:
а) $x_n = 1$; **б)** $x_n = n$; **в)** $x_n = (-1)^n/n$; **г)** $0,\ 1/2,\ 0,\ 1/3,\ 0,\ 1/4,\ \dots$; **д)** $x_n = (n-3)/(2n+5)$; **е)** $x_n = (n^2+1)/(2n+1)$; **ж)** $x_n = (n+1)/(2n^2-1)$.

М19◇3. Дайте определение *подпоследовательности* последовательности x_1, x_2, x_3, ...

Пределы. Число p называется *пределом* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит все члены этой последовательности, кроме конечного числа; более формально это записывается так: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |x_n - p| < \varepsilon$. Обозначение: $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to p$ при $n \to \infty$. Последовательность, у которой есть предел, называется *сходящейся*, а у которой нет — *расходящейся*.

М19◇4°. Без отрицаний скажите, что значит, что $q \in \mathbb{R}$ не есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и что значит, что (x_n) расходится. Бывают ли неограниченные сходящиеся последовательности?

М19◇5°. Может ли последовательность не иметь ни одного или иметь несколько пределов?

М19◇6. Выясните, какие из последовательностей сходятся и для сходящихся найдите предел и явно укажите для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ какой-либо номер N, после которого все x_n заведомо лежат в ε-окрестности предела **а)** $1/2,\ -1,\ 1/4, ; -1/3,\ 1/8,\ -1/5,\ \dots$; **б)** $1/n$; **в)** $(-1)^n$; **г)** $2^n/n!$; **д)** $((-1)^n \cos n)/n^2$; **е)** $n/(n^2+1)$; **ж)** q^n, $q \in \mathbb{R}$; **з)** $1 + q + q^2 + \dots + q^n$, $q \in \mathbb{R}$; **и)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **к)** $\sqrt{n^2+n} - n$;; **л)** $(n^a)/(b^n)$; **м*)** $\sqrt[n]{n}$.

М19◇7*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + {}^{1}\!/_{n}\right)^n = e$ (число e определялось в зад. М18◇8).

М19◇8°. Дайте определение тому, что при $n \to \infty$ **а)** $a_n \to +\infty$, **б)** $a_n \to -\infty$, **в)** $a_n \to \infty$. Верно ли, что $(a_n) \to \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$?

М19◇9. Можно что-либо утверждать о сходимости последовательностей: $a_n \pm b_n$; $a_n \cdot b_n$ b_n/a_n; a_n/b_n (у двух последних предполагается, что $a_n, b_n \neq 0\ \forall\ n \gg 0$), если известно, что последовательность b_n ограничена, а a_n стремится **а)** к 0 **б)** к ∞?

Предельные точки. Число p называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит бесконечно много членов этой последовательности; иначе это записывается так: $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N : |x_n - p| < \varepsilon$.

М19◇10°. Убедитесь, что эти два определения действительно эквивалентны. Обязана ли предельная точка быть пределом? А предел — предельной точкой?

М19◇11. Может ли множеством всех предельных точек последовательности быть:
а) $\varnothing$? **б)** n различных точек ($n = 1, 2, \dots$)? **в)** $\mathbb{Z}$? **г)** $\mathbb{Q}$? **д)** $\mathbb{R}$?

М19◇12. У последовательности (a_n) нет предельных точек. Верно ли, что $a_n \to \infty$?

М19◇13. Обязана ли сходиться **а)** произвольная **б)** ограниченная последовательность, у которой есть ровно одна предельная точка?

М19◇14. Слева или справа от любого $x \in \mathbb{R}$ лежит лишь конечное число членов последовательности (a_n). Верно ли, что (a_n) либо сходится либо стремится к $\pm\infty$?

Пределы последовательностей

М20◇1 (теоремы Больцано - Вейерштрасса). Любая ли ограниченная последовательность:
а) имеет предельную точку? **б)** содержит подпоследовательность, имеющую предел?
в) если монотонно неубывает (или монотонно невозрастает), то имеет предел?

М20◇2. Пусть (a_n) и (b_n) имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Докажите, что
а) $a_n \pm b_n$, **б)** $a_n \cdot b_n$, **в)** $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, а если $\beta \neq 0$, то и **г)** $1/b_n$, **д)** a_n/b_n тоже сходятся, и выразите их пределы через α и β.

М20◇3. Вычислите пределы (при $n \to \infty$) или докажите расходимость последовательностей:
а) $(3n^3 - 5n + 7)/(5n^3 + 7n^2 - 11)$; **б)** $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-5n}$; **в)** $\sqrt{n^2+2n^3} - \sqrt{2n^2+n^3}$;
г) $\sqrt[n]{n!}$; **д*)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$; **е*)** $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}$; **ж*)** $(1-1/n)^n$; **з*)** $(1+3/n)^n$.

М20◇4. Будем называть *перемешиванием* последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$ её композицию с произвольным взаимно однозначным отображением $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Влияет ли перемешивание на сходимость/расходимость и значение предела (в том числе, когда $a_n \to \pm\infty, \infty$)?

М20◇5 (критерий Коши). Последовательность a_n называется *последовательностью Коши*, если $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon\ \forall\, n_1, n_2 > N$. Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

М20◇6*. Две последовательности Коши (a_n) и (b_n) называются *эквивалентными*, если любое перемешивание последовательности $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots$ тоже является последовательностью Коши. Назовём действительным числом Коши класс эквивалентных рациональных последовательностей Коши. Определите сумму и произведение действительных чисел Коши и докажите, что множество действительных чисел Коши изоморфно (с сохранением операций) множеству действительных чисел, определённых через БДД или дедекиндовы сечения (см. зад. М14◇9).

Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ произвольных чисел $a_i \in \mathbb{R}$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ имеет конечный предел (он называется *суммой ряда*). Сходящийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если его ряд абсолютных величин $\sum\limits_{i\geqslant 1} |a_i|$ тоже сходится; в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

М20◇7. Убедитесь, что для ряда неотрицательных чисел новое определение сходимости, данное в этом листке, согласуется с определением из позапрошлого листка.

М20◇8. Чему равен $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$, если ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i$ сходится?

М20◇9. Сходится ли ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ **а)** абсолютно? **б)** условно?

М20◇10 (критерий Коши). Докажите, что ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда
$\forall\,\varepsilon > 0\quad \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}| < \varepsilon$ для всех номеров $n_2 > n_1 > N$.

М20◇11*. Докажите, что при помощи подходящего перемешивания слагаемых условно сходящегося ряда его сумму можно сделать равной любому наперёд заданному числу, а также сделать ряд расходящимся.

М20◇12. Можно ли перемешать слагаемые ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ так, чтоб он стал сходиться?

М20◇13*. Изменяется ли сумма абсолютно сходящегося ряда при перемешивании слагаемых?

Цепные дроби

М$20\frac{1}{2}\diamond 1^\circ$ (продолжение зад. М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ о кузнечиках). Нарисуем в первом координатном квадранте луч $y=\alpha x$ с *иррациональным* $\alpha>0$ и рассмотрим ломаные, ограничивающие выпуклые оболочки целых точек, лежащих, соответственно, выше и ниже этого луча (см. рис. 20.1). Занумеруем вершины T_i нижней ломаной чётными, а верхней — нечётными целыми индексами подряд слева направо так, чтобы $[T_0T_2]$ был первым невертикальным ребром на нижней ломаной, и обозначим через (p_n,q_n) координаты точки T_n, а через a_n — число кусков, на которые делится ребро $[T_{n-2}T_n]$ лежащими на нём целыми точками. Попросим теперь кузнечиков в зад. М$4\frac{1}{2}\diamond 9$ прыгать из начального положения так, чтобы прыжок каждый раз совершал тот крайний кузнечик, который находится по ту же сторону от луча $y=\alpha x$, что и средний. Убедитесь, что кузнечики побывают во всех целых точках обеих граничных ломаных (и только в этих точках), и докажите что:

а) последовательности $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ и $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ монотонны;

б) $\begin{cases} p_n = a_np_{n-1}-p_{n-2} \\ q_n = a_nq_{n-1}-q_{n-2}\end{cases}$ **в)** $\begin{cases} p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n \\ p_{n-2}q_n - p_nq_{n-2} = (-1)^{n-1}a_n\end{cases}$

г) $\dfrac{1}{q_n\,(q_n+q_{n+1})} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$; **д)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=\alpha$.

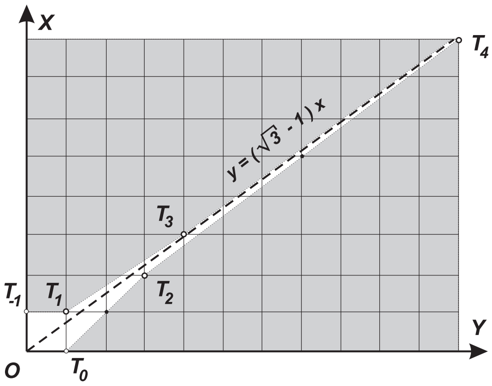


Рис. 20.1.

М$20\frac{1}{2}\diamond 2$. Что изменится, если в зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$ взять $\alpha\in\mathbb{Q}$?

М$20\frac{1}{2}\diamond 3$. Для произвольного $\alpha\in\mathbb{R}$ образуем последовательности (a_n) и (r_n), полагая $\forall\, i\geqslant 0\ a_i=[r_i]$ (целая часть r_i), $r_{i+1}=(r_i-a_i)^{-1}$ и $r_0=\alpha$. Как связаны эти a_i с одноимёнными числами из зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$, если $\alpha>0$?

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$$

Рис. 20.2.

Цепная дробь — это конечное или бесконечное выражение $a_0+1/(a_1+1/(a_2+\dots))$ (см. рис. 20.2). Величины a_i называются *элементами* цепной дроби (последний элемент конечной цепной дроби всегда предполагается отличным от 1). Если $a_i\in\mathbb{R}$ и существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a_0+1/(a_1+1/(a_2+\dots+1/(a_{n-1}+1/a_n)\dots))=\alpha$, то дробь (20.2) называется *сходящейся*, а α называется её *значением*. Будем называть цепную дробь *канонической*, если $a_0\in\mathbb{Z}$, и $a_i\in\mathbb{N}$ при $i\geqslant 1$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 4$. Докажите, что все бесконечные канонические цепные дроби сходятся, и, сопоставляя каноническим цепным дробям (как конечным, так и бесконечным) их значения, мы получаем биекцию между множеством таких дробей и $\mathbb{R}$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 5$. Вычислите $1+1/(2+1/(3+1/(1+1/(2+1/(3+\cdots)))))$. Всякая ли периодическая каноническая дробь удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами?

М$20\frac{1}{2}\diamond 6$. Разложите в канонические цепные дроби числа **а)** $\sqrt{3}$, **б)** $\sqrt{5}$, **в)** $\sqrt{43}$, **г)** $\sqrt{57}$.

Остатки и конвергенты. Любой начальный отрезок $a_0+1/(a_1+1/(a_2+\dots+1/(a_{n-1}+1/a_n)\dots))$ цепной дроби (20.2) можно формально свернуть в обыкновенную дробь p_n/q_n, последовательно выполнив (без «сокращений») все предписанные справа налево действия. Так, $p_0/q_0=a_0/1$, $p_1/q_1=(a_0a_1+1)/a_1$ и т. д. Такая p_n/q_n называется n-той *подходящей дробью* (или *конвергентой*) цепной дроби (20.2). Если (20.2) сходится, то числа $r_n\in\mathbb{R}$, такие что $a_0+1/(a_1+1/(a_2+\dots))=a_0+1/(a_1+1/(a_2+\dots+1/(a_{n-1}+1/r_n)\dots))$, называются её *остатками*; иными словами, $r_n=a_n+1/(a_{n+1}+1/(a_{n+2}+\dots))$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 7$. Как связаны конвергенты канонической цепной дроби с (p_n,q_n) из зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$?

М$20\frac{1}{2}\diamond 8$. Какие из соотношений зад. М$20\frac{1}{2}\diamond 1$ верны для цепных дробей с произвольными $a_i\in\mathbb{R}$? Докажите, что если (20.2) сходится к α, то $\alpha=(r_np_{n-1}-p_{n-2})\,/\,(r_nq_{n-1}-q_{n-2})\ \forall n$.

М$20\frac{1}{2}\diamond 9^*$. Докажите, что цепная дробь (20.2) с положительными $a_i\in\mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum a_i$.

Квадратичные иррациональности

М$20\frac{2}{3}\diamond$1. Пусть иррациональное $\alpha \in \mathbb{R}$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Проверьте, что все остатки r_n канонического разложения α в цепную дробь также являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами. Верно ли, что:
а) у всех этих уравнений один и тот же дискриминант?
б) множество коэффициентов этих уравнений ограничено?

М$20\frac{2}{3}\diamond$2 (теорема Лагранжа). Докажите, что вещественное число тогда и только тогда является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, когда его каноническое представление цепной дробью периодично.

Диофантовы приближения. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Рациональное число p/q ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) называется *наилучшим приближением* к α, если для любого другого рационального числа $m/n \neq p/q$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$) со знаменателем $m \leqslant q$ имеет место строгое неравенство $|\alpha n - m| > |\alpha q - p|$.

М$20\frac{2}{3}\diamond$3°. Докажите, что любое иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ обладает наилучшими приближениями со сколь угодно большим знаменателем, а также что все наилучшие приближения несократимы и исчерпываются подходящими дробями канонического разложения α в цепную дробь.

М$20\frac{2}{3}\diamond$4°. Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много несократимых дробей ${}^{x}\!/_{y}$ с $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $\left|\alpha - {}^{x}\!/_{y}\right| < {}^{1}\!/_{y^2}$.

М$20\frac{2}{3}\diamond$5. Нарисуйте кривые $x^2 - y^2 = 1$ и $x^2 - 3\,y^2 = 1$. Есть ли на них целые точки кроме $(\pm1, 0)$, и если да, то конечно ли множество таких точек?

М$20\frac{2}{3}\diamond$6. Для любого ли натурального d, не делящегося на квадраты, можно подобрать $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы **а)** неравенство $x^2 - dy^2 \leqslant m$ **б)** уравнение $x^2 - dy^2 = m$ имело бесконечно много целых решений (x, y) с $x, y \neq 0$?

Квадратичные расширения, норма и сопряжение. Пусть $d\in\mathbb{N}$ не делится на квадраты; положим $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \overset{\text{def}}{=} \{\, x + y\sqrt{d} \mid x, y, \in \mathbb{Q}\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \{\, p + q\sqrt{d} \mid p, q, \in \mathbb{Z}\}$. Отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \xrightarrow{\alpha\mapsto\overline{\alpha}} \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, переводящее $\alpha = x + y\sqrt{d}$ в $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{d}$ называется *сопряжением*, а отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \xrightarrow{N} \mathbb{Q}$, переводящее α в $N(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \alpha\overline{\alpha} = x^2 - dy^2$ называется *нормой*.

М$20\frac{2}{3}\diamond$7°. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ замкнуты относительно сложения, вычитания и умножения. Для $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ выразите α^{-1} через $\overline{\alpha}$ и $N(\alpha)$. Верно ли, что:
а) $\overline{\alpha_1 \pm \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \pm \overline{\alpha_2}$? **б)** $\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2}$? **в)** $N(\overline{\alpha}) = N(\alpha)$? **г)** $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$?
д) $\vartheta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ тогда и только тогда обратим в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, когда $N(\vartheta) = \pm1$?
е) множество всех элементов $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1 замкнуто относительно умножения?

М$20\frac{2}{3}\diamond$8* (уравнение Пелля). Пусть целое $d \geqslant 2$ не делится на квадраты; *уравнение Пелля*: $x^2 - dy^2 = 1$ описывает все числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1; у него, разумеется, есть 2 тривиальных решения $(\pm1, 0)$, и вместе с каждым решением (x, y) решениями будут и все $(\pm x, \pm y)$. Решение (x_0, y_0) с *натуральными* x_0, y_0 называется *фундаментальным*, если вещественное число $x_0 + y_0\sqrt{d}$ минимально среди всех чисел $x + y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x, y \in \mathbb{N}$. Докажите, что:
а) фундаментальное решение (x_0, y_0) существует и единственно;
б) ${}^{x_0}\!/_{y_0}$ есть подходящая дробь канонического разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь;
в) все $x + y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x, y \in \mathbb{N}$ исчерпываются числами $\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$ с $n\in\mathbb{N}$.

М$20\frac{2}{3}\diamond$9. Найдите фундаментальные решения и опишите все целые решения уравнений[1]:
а) $x^2 - 5y^2 = 1$; **б)** $x^2 - 19y^2 = 1$; **в)** $x^2 - 43y^2 = 1$; **г)** $x^2 - 57y^2 = 1$.

[1] если Вы любите программирование, то можете написать программы для отыскания фундаментальных решений уравнения Пелля и разложения в цепные дроби чисел вида $x + y\sqrt{d}$ с $x, y, d \in \mathbb{Z}$