Лекция 5
Пространства с операторами.

$\triangleright$модули над множеством операторов, их гомоморфизмы, изоморфизмы, прямые суммы, подмодули и фактор модули $\triangleright$действие групп и алгебр Ли на тензорных произведениях, двойственных пространствах и пространствах гомоморфизмов $\triangleright$приводимость, разложимость и полупростота $\triangleright$представления одного оператора $\triangleright$лемма Шура $\triangleright$свойства простых и полупростых модулей $\triangleright$$\boldsymbol{B = \mathrm{End}_A(V) \iff A = \mathrm{End}_B(V)}$ $\triangleright$теорема Бернсайда $\triangleright$неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули $\triangleright$полупростота $\mathfrak{sl}_2$-модулей

§1. Основные понятия, относящиеся к пространствам с операторами.

1.1. Пространство с операторами — это векторное пространство V, рассматриваемое вместе с действием на нём некоторого фиксированного множества M линейных операторов, или говоря более формально, вместе с отображением множеств $M \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$. В таком контексте отображение ϱ называется *линейным представлением* множества M на пространстве V, а V называется *M-модулем*. Если множество M несёт дополнительную алгебраическую структуру, например, представляет собой группу, ассоциативную алгебру или алгебру Ли, а ϱ является гомоморфизмом относительно этой структуры, то ϱ называется линейным представлением соответствующей группы, ассоциативной алгебры или алгебры Ли.

Многие математические теории приводят к необходимости классифицировать M-модули над тем или иным фиксированным множеством M с той или иной дополнительной структурой. В этой лекции мы обсудим самые общие понятия, связанные с этой задачей, и разберём несколько характерных примеров. В следующей лекции мы подробно изучим важный специальный случай — модули над конечными группами.

Теория пространств с операторами отличается от «обычной» линейной алгебры тем, что содержательный смысл в ней имеют только такие линейные операторы, подпространства, прямые суммы и т. п., которые инварианты относительно действия операторов из M.

1.2. Гомоморфизмы. Линейный оператор $U \xrightarrow{\varphi} V$ между двумя M-модулями

$$M \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}(U) \qquad \text{и} \qquad M \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$$

называется *M-гомоморфизмом* (или *гомоморфизмом M-модулей*), если он перестановочен со всеми операторами из M, т. е. если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ {\scriptstyle\lambda(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varrho(g)} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$$

коммутативна $\forall\, g \in M$. Совокупность всех M-гомоморфизмов представляет собой векторное подпространство в пространстве всех линейных операторов $\mathrm{Hom}(U,V)$, и обозначается $\mathrm{Hom}_M(U,V)$. Два M-модуля называются *изоморфными*, если существует M-гомоморфизм $V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$, являющийся изоморфизмом векторных пространств.

1.3. Подмодули и фактор модули. Подпространство U в M-модуле V называется *инвариантным подпространством* или *подмодулем* , если все операторы из M переводят его в себя. Ограничение операторов M с V на U снабжает U канонической структурой M-модуля, относительно которой вложение $U \hookrightarrow V$ является M-гомоморфизмом.

Если U является инвариантным подпространством в M-модуле V, то все операторы из M корректно действуют на фактор пространстве V/U, наделяя его канонической структурой M-модуля, относительно которой отображение факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$ является M-гомоморфизмом.

Задача 5.1. Докажите, что ядро и образ любого M-гомоморфизма $V \xrightarrow{\varphi} W$ являются подмодулями, и что φ канонически раскладывается в композицию эпиморфизма M-модулей $V \twoheadrightarrow V/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi$ и вложения M-модулей $V/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi \hookrightarrow W$.

1.4. Прямые суммы. Для любых M-модулей U, V прямая сумма векторных пространств $U \oplus V$ канонически наделяется структурой M-модуля называемого *прямой суммой* исходных модулей. Действие операторов из M определяется по стандартным правилам

$$g(u,v) = (gu, gv) \qquad \forall\, g\in G\ , \quad \forall\, u\in U,\, v\in V\ .$$

Относительно этой структуры вложения слагаемых и проекции на них:

$$U \hookrightarrow U \oplus V \hookleftarrow V \qquad\qquad U \twoheadleftarrow U \oplus V \twoheadrightarrow V$$

являются M-гомоморфизмами.

Задача 5.2. Пусть M-модуль W разложен в прямую сумму векторных подпространств $W = U \oplus V$, причём подпространство U является подмодулем. Докажите, что V тогда и только тогда являются подмодулем, когда проектор W на U вдоль V является M-гомоморфизмом.

1.5. Двойственные модули и тензорные произведения. Если U и V — два M-модуля, то на тензорном произведении векторных пространств $U \otimes V$ и на двойственных пространствах U^*, V^* можно различными способами задавать структуру M-модуля, и выбор того или иного способа обычно диктуется нуждами конкретной теории, из которой происходят рассматриваемые пространства с операторами. В дальнейшем нам понадобятся два примера, в которых M — это группа G или алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G.

1.5.1. Представление группы на $U \otimes V$ определяется формулой

$$g\,(u \otimes v) = g\,u \otimes g\,v \qquad \forall\, g\in G\ , \quad \forall\, u\in U,\, v\in V\ ,$$

т. е. так, чтобы операторы из G были *мультипликативными гомоморфизмами* тензорной алгебры (переводили тензорные произведения векторов в тензорные произведения векторов). Действие G на U^* определяется правилом

$$g \,:\, \xi \longmapsto g^{*-1}\xi\,,$$

т. е. матрицы, задающие действие G в двойственном базисе пространства U^*, транспонированы и обратны к матрицам, задающим действие G на U.

Задача 5.3. Проверьте, что это правило действительно задаёт *гомоморфизм* из группы G в $GL(U^*)$, а также что оно эквивалентно требованию, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна в том смысле, что

$$\left\langle\, g(\xi)\,,\, g(v)\,\right\rangle = \left\langle\, \xi\,,\, v\,\right\rangle \qquad \forall\, g\in G\ , \quad \forall\, u\in U\ , \quad \forall\, \xi\in U^*\ .$$

Задача 5.4. Убедитесь, что в определённом по предыдущими правилам представлении группы G на пространстве $\mathrm{Hom}(U,V) = U^*\otimes V$ элемент g переводит оператор φ в оператор $g\varphi g^{-1}$. В частности операторы, *неподвижные* относительно этого действия составляют подпространство $\mathrm{Hom}_G(U,V)$.

1.5.2. Представления алгебры Ли на U^* и $U\otimes V$ задаются дифференциалами описанных выше представлений соответствующей группы Ли. Элемент $x\in\mathfrak{g}=T_eG$ действует на тензорном произведении по правилу

$$x(u\otimes v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(e^{tx}u\otimes e^{tx}v\right) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tx}u\right)\otimes v + u\otimes\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tx}v\right) = (xu)\otimes v + u\otimes(xv)\,,$$

а на двойственном пространстве — по правилу

$$x(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-tx^*}\xi = -x^*\xi$$

Задача 5.5. Проверьте, что эти правила действительно задают *гомоморфизмы* алгебр Ли $\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{End}(U\otimes V)$ и $\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{End}(U^*)$.

Задача 5.6. Докажите, что в определённом по предыдущими правилам представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на пространстве $\mathrm{Hom}(U,V)=U^*\otimes V$ элемент x переводит оператор φ в оператор $x\varphi-\varphi x$. В частности операторы, *аннулируемые* этим этим действием составляют подпространство $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,V)$.

1.6. Неприводимость. M-модуль W называется *неприводимым* или *простым*, если он не имеет нетривиальных[1] подмодулей. Поскольку пересечение подмодулей, очевидно, тоже является подмодулем, любые два неприводимых подмодуля в данном модуле либо совпадают либо пересекаются по нулю.

Задача 5.7. Докажите, что всякий ненулевой гомоморфизм между двумя неприводимыми модулями является изоморфизмом.

1.6.1. Лемма Шура. *Если V простой M-модуль над алгебраически замкнутым полем k, то $\mathrm{End}_M(V)\simeq k\,\mathrm{Id}_M$, т. е. M-эндоморфизмы исчерпываются гомотетиями.*

[1] т. е. отличных от 0 и самого W

Доказательство. Действительно, над алгебраически замкнутым полем всякий эндоморфизм $V \xrightarrow{\varphi} V$ обладает собственным вектором, т. е. $\ker(\varphi - \mu\,\mathrm{Id}_V) \neq 0$ для некоторого $\mu \in k$. Но если $\varphi \in \mathrm{End}_M(V)$, то и $\varphi - \mu\,\mathrm{Id}_V \in \mathrm{End}_M(V)$, и стало быть, подмодуль $\ker(\varphi - \mu\,\mathrm{Id}_V) = V$ из-за простоты V, т. е. $\varphi = \mu\,\mathrm{Id}_V$. □

Задача 5.8. Докажите, что пространство M-гомоморфизмов между двумя неприводимыми M-модулями над алгебраически замкнутым полем либо нулевое, либо одномерное.

1.7. Разложимость. Модуль называется *разложимым*, если он представим в виде прямой суммы своих собственных подмодулей. Всякий M-модуль является прямой суммой неразложимых. Модуль называется *вполне приводимым* или *полупростым*, если он является прямой суммой неприводимых (т. е. простых) модулей. Неприводимые модули неразложимы. Обратное неверно, и неразложимые модули могут быть приводимы.

Вообще, как показывает лемма Шура, простые M-модули являются аналогами одномерных векторных пространств, и их, как правило, можно явно перечислить. Полная классификация заданного типа пространств с операторами (буде она имеется) обычно строится по такой схеме: перечисляются все неприводимые M-модули и указывается, как из них «собираются» неразложимые модули; произвольный модуль есть прямая сумма неразложимых. Мы проиллюстрируем эту схему на примере, известном из прошлого семестра.

1.8. Пример: представление одного эндоморфизма. Если множество $M = \{\varphi\}$ состоит из одного элемента, то классификация M-модулей представляет собой классификацию линейных операторов, которая обсуждалась в прошлом семестре. Над алгебраически замкнутым полем k любой оператор имеет собственный вектор, так что в этом случае неприводимые модули — это одномерные пространства и только они, а полупростота означает диагонализуемость оператора φ.

Задача 5.9. Приведите пример неразложимого приводимого (и стало быть, неполупростого) пространства с одним оператором.

Задача 5.10. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем k всякое неразложимое пространство с одним оператором изоморфно пространству, на котором оператор в подходящем базисе задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix} , \qquad \mu \in k$$

Над произвольным полем k теория конечномерных пространств с одним оператором тождественна теории конечномерных $k[t]$-модулей, поскольку задание оператора $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ равносильно заданию гомоморфизма k-алгебр $k[t] \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathrm{End}(V)$, переводящего t в φ, и при этом инвариантность, разложимость и приводимость относительно φ и относительно $k[t]$ будут означать одно и то же. Всякий гомоморфизм бесконечномерной алгебры $k[t]$ в конечномерную алгебру $\mathrm{End}(V)$ обладает ненулевым ядром, которое, поскольку $k[t]$ является областью главных идеалов, имеет вид $\ker\widetilde{\varphi} = (f)$, где $f \in k[t]$ есть многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий оператор φ. Такой многочлен называется *минимальным многочленом* оператора φ.

Задача 5.11. Пусть оператор φ на пространстве V аннулируется многочленом $f \in k[t]$, который раскладывается в $k[t]$ в произведение s попарно взаимно простых множителей

$$f(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \dots \cdot q_s(t) \ .$$

Для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ обозначим через $f_j(t) = f(t)/q_j(t)$ соответствующее произведение $(s-1)$ из них. Докажите, что V разлагается в прямую сумму φ-инвариантных подпространств $\ker q_j(\varphi) = \operatorname{im} f_j(\varphi)$ (некоторые из которых могут оказаться нулевыми).
Указание: Из равенства $0 = f(\varphi)V = q_j(\varphi)f_j(\varphi)V$ вытекает, что

$$\operatorname{im} f_j(\varphi) \subset \ker q_j(\varphi) \qquad \forall j \ .$$

Из взаимной простоты q_i и q_j вытекает, во-первых, что $1 = x(t)\,q_i(t) + y(t)\,q_j(t)$ для подходящих $x(t), y(t) \in k[t]$, так что подставив вместо t оператор φ и применив к $v \in \ker q_i(\varphi) \cap \ker q_j(\varphi)$, получим

$$q_i(\varphi) \cap \ker q_j(\varphi) = 0 \ ,$$

а во-вторых, что наибольший общий делитель всех f_j равен 1 и $1 = \sum\limits_{\nu=1}^{s} f_\nu(t)g_\nu(t)$ для подходящих $g_\nu(t) \in k[t]$, так что подставив вместо t оператор φ и применив к произвольному $v \in V$, получим

$$V \subset \bigoplus_\nu \operatorname{im} f_\nu(\varphi) \ .$$

Из этой задачи следует, что над алгебраически замкнутым полем k, где минимальный многочлен f_φ оператора φ раскладывается в произведение линейных множителей $f_\varphi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)^{m_\lambda}$ пространство V как φ-модуль распадается в прямую сумму подпространств $W_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_v)$, называемых *корневыми подпространствами*.

Задача 5.12. Докажите, что если на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$, то $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$, и π суть проектор V на $\operatorname{im} \pi$ вдоль $\ker \pi$.

Задача 5.13. Докажите, что оператор φ диагонализуем над полем k тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $k[t]$ на попарно разные линейные множители.

Задача 5.14. Докажите, что над произвольным полем k всякое неприводимое пространство с одним оператором изоморфно пространству $k[t]/(p)$, а всякое неразложимое — пространству $k[t]/(p^n)$, где $p \in k[t]$ – неприводимый многочлен, а действие оператора состоит в умножении на t.
Указание: См. лекцию про метод Гаусса над кольцом многочленов (первый семестр) или про жорданову нормальную форму (второй семестр).

1.9. Пример: представления коммутирующих операторов. Если множество $M \subset \operatorname{End}(V)$ состоит из попарно коммутирующих операторов, то $\forall\, \varphi \in M$ все операторы из M являются φ-гомоморфизмами пространства V как пространства с одним оператором φ и переводят в себя каждое собственное и корневое подпространство оператора φ:

$$(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n v = 0 \ \Rightarrow \ (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n \psi v = \psi\, (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n v = 0 \ ,$$

т. е. $\psi\,(\ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n) \subset \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ \forall\, \psi \in M$. Отсюда сразу следуют следующие факты.

1.9.1. Утверждение. *Любое множество попарно перестановочных операторов над алгебраически замкнутым полем имеет общий собственный вектор.*

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Это так при $\dim V = 1$ или если все операторы — гомотетии. Если же хоть один из операторов φ не является гомотетией, то он имеет нетривиальное собственное подпространство $0 \neq V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi v = \lambda v\} \neq V$, которое переводится в себя всеми остальными операторами, так что к нему применимо индуктивное предположение. □

1.9.2. Следствие. *Над алгебраически замкнутым полем всякий неприводимый модуль над любым множеством коммутирующих операторов одномерен.* □

> Задача 5.15. Докажите, что любое множество попарно перестановочных диагонализуемых операторов может быть приведено к диагональному виду одновременно в одном базисе.

1.9.3. Следствие. *Всякое представление конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем является прямой суммой одномерных.*

Доказательство. Все операторы из конечной абелевой группы G аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1 = 0$ без кратных корней, и стало быть, диагонализуемы. □

§2. Свойства полупростых модулей.

2.1. Лемма. *Следующие условия на конечномерный*[2] *M-модуль W равносильны:*

(1) *W полупрост;*

(2) *W линейно порождается простыми подмодулями;*

(3) *для всякого подмодуля $U \subset W$ существует дополнительный подмодуль $V \subset M$, такой что $W = U \oplus V$;*

(4) *для всякого подмодуля $U \subset W$ существует гомоморфизм модулей $W \xrightarrow{\pi} U$, ограничение которого на U тождественно*[3]*: $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$.*

Доказательство. Если W линейно порождается набором простых подмодулей V_α, то для любого подмодуля $U \subset W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1, V_2, \dots, V_m$, что $W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$. А именно, в качестве V_1 берём произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U. Пересечение $V_1 \cap U$, будучи подмодулем в V_1, является нулевым, так что сумма U и V_1 — прямая. Затем выбираем неприводимый модуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$. Пересечение $V_2 \cap (U \oplus V_1)$, будучи подмодулем в V_2, снова является нулевым, так что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая, и т. д. пока создаваемая прямая сумма не исчерпает всё пространство W. Таким образом, из второго условия вытекают как третье, так и (при $U = 0$) первое условия.

Наоборот, первое условие включает в себя второе, а при выполнении третьего условия модуль W очевидным образом раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Наконец, четвёртое условие равносильно третьему по зад.5.2. □

2.1.1. Следствие. *Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.*

---

[2] требование конечномерности не является существенным, и преодолевается стандартными теоретико-множественными ухищрениями типа леммы Цорна или трансфинитной индукции (основанной на аксиоме выбора и теореме Цермело)

[3] линейный оператор $\pi \in \mathrm{End}(V)$, для которого $\operatorname{im}\pi = U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ называется *проектором* пространства V на подпространство U

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом M-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами неприводимых подмодулей исходного модуля, а образ неприводимого модуля либо нулевой, либо изоморфен ему самому (и тем самым, тоже неприводим). □

Задача 5.16. В теории пространств с одним оператором приведите пример, в котором подмодуль $U \subset V$ и фактор модуль V/U просты, но V не полупрост.

2.2. Ассоциативные алгебры, связанные с множеством операторов. Со всяким множеством операторов $M \subset \mathrm{End}(V)$ можно связать наименьшую ассоциативную подалгебру с единицей $A_M \subset \mathrm{End}(V)$, содержащую M. Мы будем называть её *ассоциативной оболочкой* множества $M \subset \mathrm{End}(V)$. Она может быть определена как пересечение всех подалгебр в $\mathrm{End}(V)$, содержащих M и Id_V, или как линейная оболочка всевозможных произведений операторов из M и гомотетий. Если M — группа, то A_M — это просто линейная оболочка операторов из M. Инвариантность, разложимость и приводимость относительно M и относительно A_M означают, одно и то же, так что свойства V как M-модуля тождественны свойствам V как A_M-модуля.

Другая ассоциативная подалгебра, связанная с множеством M операторов на пространстве V, — это алгебра M-гомоморфизмов $B = \mathrm{End}_M(V) = \mathrm{End}_{A_M}(V)$. Если теперь рассмотреть пространство V как B-модуль и образовать ещё одну алгебру $\mathrm{End}_B(V)$, мы обнаружим замечательную двойственность.

2.3. Теорема. *Если пространство V полупросто как модуль над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$, то $A = \mathrm{End}_B(V)$.*

Доказательство. Поскольку все операторы из B по определению перестановочны с операторами из A, имеется тавтологическое включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$. Чтобы доказать обратное включение рассмотрим произвольный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства V и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ существует такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i. Для этого рассмотрим полупростой A-модуль $W = \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$, на котором A действует по правилу

$$a\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = (av_1, av_2, \dots, av_n)\,,$$

и определим на нём оператор $W \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} W$ по формуле

$$\widetilde{\varphi}\ :\quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto (\varphi v_1, \varphi v_2, \dots, \varphi v_n)\,.$$

Нам надо доказать, что $\widetilde{\varphi} e \in A\,e$, где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$. Поскольку W полупрост, существует проектор $\pi \in \mathrm{End}_A(W)$ модуля W на A-подмодуль $A\,e$. Если бы π был перестановочен с оператором $\widetilde{\varphi}$, мы бы имели $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\varphi}(\pi e) = \pi(\widetilde{\varphi} e) \in A\,e$, что и требуется. Таким образом, для завершения доказательства остаётся проверить равенство $\pi\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}\pi$.

Действие любого эндоморфизма $W \xrightarrow{F} W$ можно описывать матрицей (F_{ij}) с элементами $F_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, так что

$$F\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left(\sum_{\nu} F_{1\nu} v_\nu\,,\ \sum_{\nu} F_{2\nu} v_\nu\,,\ \dots\ ,\ \sum_{\nu} F_{n\nu} v_\nu \right)\,,$$

Подставляя в равенство $\pi a(w) = a\pi(w)$ вектор w, у которого j-тая координата равна $v \in V$, а остальные координаты нулевые, мы получим, что матричные элементы проектора π удовлетворяют соотношениям

$$(\,\pi_{1j}a\,v\,,\ \pi_{2j}a\,v\,,\ \dots\ ,\ \pi_{nj}a\,v\,) = (\,a\,\pi_{1j}v\,,\ a\,\pi_{2j}v\,,\ \dots\ ,\ a\,\pi_{nj}v\,)$$

при любом $1 \leqslant j \leqslant n$ и любом $v \in V$. Это означает, что все матричные элементы (π_{ij}) перестановочны с A, т. е. лежат в $B = \mathrm{End}_A(V)$, и тем самым, π перестановочен с любым оператора вида $(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto (\varphi v_1, \varphi v_2, \dots, \varphi v_n)$ с $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, что и утверждалось. □

Задача 5.17. Пусть V — векторное пространство. Докажите, что имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\,(V^{\oplus n}) \simeq Mat_n\,(\mathrm{End}(V))$.

2.4. Теорема Бернсайда. *Если V — неприводимое пространство с операторами над алгебраически замкнутым полем, то линейная оболочка всевозможных композиций этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов* $\mathrm{End}(V)$.

Доказательство. Поскольку V неприводимо как модуль над ассоциативной оболочкой $A_M \subset \mathrm{End}(V)$ множества операторов M, по лемме Шура имеем $B = \mathrm{End}_A(V) = k$, откуда по предыдущей теореме $A = \mathrm{End}_B(V) = \mathrm{End}(V)$. □

§3. $\mathfrak{sl}_2$ - модули.

Всюду в этом параграфе предполагается, что $\mathrm{char}\,k = 0$.

3.1. Обозначения и терминология. Напомню, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(k) \subset Mat_2(k)$ состоит из всех 2×2 - матриц с нулевым следом и представляет собой трёхмерное векторное пространство. В качестве базиса в $\mathfrak{sl}_2(k)$ мы в этом параграфе будем использовать матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X, Y] = H \quad , \qquad [H, X] = 2\,X \quad , \qquad [H, Y] = -2\,Y \tag{3-1}$$

Структура $\mathfrak{sl}_2(k)$-модуля на пространстве V задаётся *гомоморфизмом алгебр Ли*[4]

$$\mathfrak{sl}_2(k) \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)\,.$$

или, что равносильно, тремя операторами X, Y, $Z \subset \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям (3-1).

3.2. Стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули. Простейшими $\mathfrak{sl}_2$-модулями являются *тривиальный* одномерный модуль $\mathcal{V}_0 \simeq k$, на котором все три оператора действуют умножением на нуль, и *тавтологический* двумерный модуль $\mathcal{V}_1 = k^2$ на котором $\mathfrak{sl}_2 \subset Mat_2(k)$ действует левыми умножениями:

$$X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad Y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} \quad , \qquad H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

[4] т. е. линейным оператором, который переводит коммутаторы в коммутаторы

Эти два модуля являются первыми членами из серии представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ на пространствах однородных бинарных форм, с которыми мы уже встречались в лекции 5. А именно, дифференциальные операторы

$$X \longmapsto x\,\frac{\partial}{\partial y} \quad , \qquad Y \longmapsto y\,\frac{\partial}{\partial x} \quad , \qquad H \longmapsto x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y} \, ,$$

задают действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве многочленов $k[x,y]$.

Задача 5.18. Убедитесь прямым вычислением, что эти дифференциальные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3-1).

Поскольку все три оператора сохраняют степень каждого монома, $k[x,y]$ является прямой суммой конечномерных $\mathfrak{sl}_2$-модулей $\mathcal{V}_n \simeq S^n\mathcal{V}_1$, состоящих из однородных форм n-той степени, так что $\dim \mathcal{V}_n = (n+1)$. Модули $\mathcal{V}_n$ называются *стандартными*. В мономиальном базисе $\{\, e_p = x^p y^{n-p} \,\}$ действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$\begin{aligned} X:\ e_p &\longmapsto (n-p)\,e_{p+1} \\ Y:\ e_p &\longmapsto p\,e_{p-1} \\ H:\ e_p &\longmapsto (2\,p-n)\,e_p \end{aligned} \tag{3-2}$$

3.2.1. Утверждение. *Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули $\mathcal{V}_n$ неприводимы.*

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v \in \mathcal{V}_n$ по стандартному базису из (3-2), и пусть e_s – это последний базисный вектор (с наибольшим s) реально присутствующий в этом разложении. Тогда $X^m Y^k v$ будет пропорционален (с ненулевым коэффициентом) базисному вектору e_m при всех $0 \leqslant m \leqslant n$, и стало быть, $\mathfrak{sl}_2$-орбита произвольного вектора v порождает всё пространство $\mathcal{V}_n$ $\square$

3.3. Описание неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Чтобы прояснить его строение, мы рассмотрим пространство V над алгебраическим замыканием основного поля и разложим его в прямую сумму $V = \oplus W_\lambda$ корневых подпространств W_λ оператора H, отвечающих всем его попарно разным собственным значениям λ. Напомню, что $W_\lambda \subset V$ инвариантно выделяются как ядра $\ker(H - \lambda\,E)^n$, где n достаточно велико.

3.3.1. Лемма. *Оператор X переводит собственное и корневое подпространства оператора H, отвечающие собственному значению λ, в его собственное и корневое подпространства, отвечающие собственному значению $\lambda + 2$.*

Доказательство. Пользуясь коммутационным соотношением $[H,X] = HX - XH = 2\,X$ находим:

$$X(H - \lambda\,E) = XH - \lambda\,X = H - 2\,X - \lambda\,X = (H - (\lambda+2)\,E)X \ ,$$

откуда $X(H-\lambda\,E)^n = (H-(\lambda+2)\,E)^n X$ при любом $n \geqslant 1$. Таким образом, из $(H-\lambda\,E)^n v = 0$ вытекает, что $(H-(\lambda+2)\,E)^n X v = X(H-\lambda\,E)^n v = 0$. $\square$

Задача 5.19. Докажите, что оператор Y переводит собственное и корневое подпространства оператора H, отвечающие собственному значению λ, в его собственное и корневое подпространства, отвечающие собственному значению $\lambda - 2$.

3.3.2. Примитивные векторы и веса. Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, попадающие в ядро оператора X называются *примитивными*. Любой неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль обладает примитивным вектором (над алгебраически замкнутым полем). Чтобы его построить, надо взять произвольный весовой вектор, и применять к нему оператор X. Векторы, которые при этом будут получаться, тоже будут весовыми со всё большими весами, что не может продолжаться бесконечно, ибо у H лишь конечное число собственных значений. Последний ненулевой весовой вектор в этой цепочке и будет примитивным.

3.3.3. Лемма. *$\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора изоморфна стандартному модулю $\mathcal{V}_n$ с подходящим n.*

Доказательство. Пусть $v \in V$ примитивный вектор веса λ, так что $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. Согласно зад.5.19 все векторы в цепочке v, Yv, Y^2v, ... являются собственными для H с собственными значениями λ, $(\lambda-2)$, $(\lambda-4)$, ..., так что при каком-то m будем иметь $Y^{m-1}v \neq 0$, а $Y^m v = 0$. Обозначим последний ненулевой вектор $Y^{m-1}v$ через v_0, а предшествующие ему через v_1, v_2, так чтобы цепочка приобрела вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \ \ \dots \ \ \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на векторы цепочки по формуле $Hv_i = (\lambda - 2\,(m-i))\,v_i$, а зная действие Y и H, мы с помощью соотношения $XY = YX + H$ можем вычислить действие на эту цепочку и третьего оператора X:

$$\begin{aligned}
X\,v_m &= X\,v = 0\\
X\,v_{m-1} &= XY\,v_m = YX\,v_m + H\,v_m = \lambda\,v_m\\
X\,v_{m-2} &= XY\,v_{m-1} = YX\,v_{m-1} + H\,v_{m-1} = (\lambda + (\lambda-2))\,v_{m-1}\\
X\,v_{m-3} &= XY\,v_{m-2} = YX\,v_{m-2} + H\,v_{m-2} = (\lambda + (\lambda-2) + (\lambda-4))\,v_{m-2}\\
\dots & \qquad\qquad\qquad \dots\\
X\,v_{m-i} &= XY\,v_{m-i+1} = YX\,v_{m-i+1} + H\,v_{m-i+1} =\\
&\qquad\qquad = (\lambda + (\lambda-2) + \ \cdots\ + (\lambda - 2\,(i-1)))\,v_{m-i+1} = i\,(\lambda - i + 1)\,v_{m-i+1}\\
\dots & \qquad\qquad\qquad \dots\\
X\,v_0 &= m\,(\lambda - m + 1)\,v_1
\end{aligned}$$

Делая ещё один такой же шаг, мы вычислим $X(0) = XY\,v_0 = 0$. Это приводит к соотношению:

$$0 = XY\,v_0 = YX\,v_0 + H\,v_0 = (m\,(\lambda - m + 1) + (\lambda - 2\,m))\,v_0 = (m+1)(\lambda - m)\,v_0\ ,$$

что возможно только при $m = \lambda$. Таким образом, все собственные значения оператора H целые[5], а линейная оболочка векторов v_i представляет собой $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, в котором действие операторов X, Y, H на базис v_i задаётся формулами:

$$\begin{aligned}
X:\ v_p &\longmapsto (m-p)(p+1)\,e_{p+1}\\
Y:\ v_p &\longmapsto v_{p-1}\\
H:\ v_p &\longmapsto (2\,p - n)\,v_p
\end{aligned}\qquad .$$

[5]и в частности, корневое разложение пространства V по действию оператора H возможно над любым полем!

Отображение $v_p \longmapsto \dfrac{1}{p!}\,e_p = \dfrac{1}{p!}\,x^p y^{n-p}$ устанавливает изоморфизм этого модуля со стандартным модулем $\mathcal{V}_m$. $\square$

3.3.4. Следствие. *Все неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули исчерпываются стандартными модулями $\mathcal{V}_n$.* $\square$

Задача 5.20. Докажите, что в произвольном $\mathfrak{sl}_2$-модуле оператор H диагонализуем и имеет целые собственные значения, а операторы X и Y нильпотентны.

3.4. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. В этом пункте мы докажем, что всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль полупрост. Главным инструментом доказательства будет линейный оператор K, который лежит в *ассоциативной алгебре*, порождённой операторами X, Y, Z, и коммутирует с ними. По лемме Шура такой оператор действует на каждом неприводимом модуле как гомотетия, что и позволит нам построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор на любой неприводимый подмодуль.

3.4.1. Оператор Казимира. Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ естественно вложена как подалгебра Ли в ассоциативную алгебру $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$. Каждому элементу $x \in \mathfrak{sl}_2$ при этом соответствует эндоморфизм $\mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y]$.

Задача 5.21. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ в $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ для любых $x, y \in \mathfrak{sl}_2$, и что $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия $x : \varphi \longmapsto [\mathrm{ad}_x, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная *форма следа* $(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}\,(\varphi\psi)$, ограничение которой на образ $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ невырожденно.

Задача 5.22. Проверьте, что матрица Грама формы $(x, y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$ в базисе $\{X, Y, H\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Двойственным к базису $\{X, Y, H\}$ относительно формы следа является, таким образом, базис

$$\{\, X^* = \frac{1}{4} Y \,,\ Y^* = \frac{1}{4} X \,,\ H^* = \frac{1}{8} X \,\} \,.$$

Наличие скалярного произведения на $\mathfrak{sl}_2$ позволяет отождествить $\mathfrak{sl}_2$ с $\mathfrak{sl}_2^*$, а алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2$ с тензорным квадратом $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$. При таком отождествлении тождественный эндоморфизм пространства $\mathfrak{sl}_2$ изобразится *тензором Казимира*

$$\varkappa = X \otimes X^* + Y \otimes Y^* + H \otimes H^* = \frac{1}{4}\,(X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}\, H \otimes H \,.$$

Всякое представление $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$ индуцирует линейное отображение

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\widetilde{\varrho}} \mathrm{End}(V) \,,$$

действующее на разложимые тензоры по правилу $\widetilde{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B) \in \mathrm{End}(V)$. Оператор $\widetilde{\varrho}(\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2}) \subset \mathrm{End}(V)$ называется *оператором Казимира* на $\mathfrak{sl}_2$-модуле V.

Задача 5.23. Проверьте, что $\widetilde{\varrho}$ является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Если, опуская символ ϱ, как и ранее, обозначать буквами X, Y, Z сразу сами операторы, действующие на $\mathfrak{sl}_2$-модуле V, то оператор Казимира выразится через них по формуле

$$K = \frac{1}{4}\,(XY + YX) + \frac{1}{8}\,H^2\ .$$

Задача 5.24. При помощи явного вычисления, основанного на соотношениях (3-1), проверьте, что $[X, K] = [Y, K] = [H, K] = 0$, а так же что K действует на стандартном неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathcal{V}_m$ как гомотетия с коэффициентом $\dfrac{1}{8}\,(m^2 + 4\,m)$.

3.4.2. Лемма. *Всякий $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль коразмерности 1 обладает дополнительным одномерным тривиальным $\mathfrak{sl}_2$-подмодулем.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что всякий одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль с неизбежностью тривиален, поскольку в коммутативной алгебра эндоморфизмов одномерного векторного пространства $H = [X, Y] = 0$, $2X = [H, X] = 0$, $2Y = -[H, Y] = 0$. Поэтому фактор модуль V/U по любому подмодуля $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, и значит, все три оператора X, Y, Z переводят V в U.

Строить дополнительный тривиальный одномерный подмодуль L к данному подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 мы будем индуктивно по $\dim U$. Если U тривиален (например, если $\dim U = 1$), то V тоже будет тривиален, поскольку по предыдущему замечанию

$$\mathfrak{sl}_2\,V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]\,V \subset \mathfrak{sl}_2\,\mathfrak{sl}_2\,V \subset \mathfrak{sl}_2\,U = 0\ ,$$

и доказывать нечего. Если $U \simeq \mathcal{V}_m$ нетривиальный неприводимый подмодуль, то оператор

$$\frac{8}{m^2 + 4\,m}\,K = \frac{1}{m^2 + 4\,m}\,\left(H^2 + 2\,(XY + YX)\right)$$

будет $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным проектором V на U, так что искомый дополнительный подмодуль — это $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, то мы выберем в U ненулевой неприводимый подмодуль $W \neq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактор модуля

$$(V/W) = (U/W) \oplus (\widetilde{L}/W)\ ,$$

где $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\widetilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \widetilde{L}$, построим инвариантное разложение $\widetilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \widetilde{L} \subset V$ и будет искомым дополнением к U. □

3.4.3. Следствие. *Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль вполне приводим.*

Доказательство. Для того, чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор $\mathfrak{sl}_2$-модуля V на любой его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим подпространства

$$\begin{aligned} W &= \{\,\varphi \in \mathrm{Hom}(V, U) \mid \varphi|_U = \lambda\,\mathrm{Id}_U\ ,\ \lambda \in k\,\} \subset \mathrm{Hom}(V, U) \\ W' &= \{\,\varphi \in W \mid \varphi|_U = 0\,\} \subset W \end{aligned}$$

в $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathrm{Hom}(V, U)$. По зад.5.6 они являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями, причём коразмерность W' в W равна 1. По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, где L — тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-модуль. По зад.5.6 его образующая, отнормированная так, чтобы её ограничение на U было тождественным оператором, и является искомым проектором.

Лекция 6
Представления конечных групп.

▷Инварианты и полупростота. ▷Представления конечных абелевых групп. ▷Двойственность Понтрягина. ▷Групповая алгебра ▷Регулярные представления ▷Скалярное произведение. ▷Теорема Машке. ▷Соотношения на число и размерности неприводимых представлений. ▷Матричные элементы неприводимых представлений. ▷Базисные идемпотенты и проекторы на изотипные компоненты. ▷Характеры. ▷Кольцо представлений. ▷Тензорное произведение над алгеброй. ▷Ограничение и индуцирование представлений. ▷Двойственность Фробениуса.

Если специально не оговаривается противное, всюду в этой лекции через G обозначается конечная группа, порядок которой $|G|$ не делится на характеристику основного поля k.

§1. Представления конечной группы.

1.1. Представления групп. Линейное представление группы G на векторном пространстве V — это гомоморфизм групп $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$, и буде он задан, пространство V называется G-*модулем*. Представление называется *тривиальным*, если $\operatorname{im}\varrho = \{\mathrm{Id}_V\}$, и *эффективным* или *точным*, если $\ker\varrho = \{e\}$. Если это не приводит к путанице, символ ϱ в обозначении действия обычно опускают и пишут просто gv вместо $\varrho(g)v$.

Задача 6.1. Докажите, что любая конечная подгруппа $G \subset GL_n(k)$ над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не делит порядок группы, состоит только из диагонализуемых операторов.

Прямая сумма, тензорное произведение, а так же внешние и симметрические степени G-модулей U, V сами являются G-модулями относительно естественного действия G по правилам $g(u,v) = (gu, gv)$, $g(u\otimes v) = (gu)\otimes(gv)$, $g(u\wedge v) = (gu)\wedge(gv)$ и т. д.

Двойственное представление $G \xrightarrow{\varrho^*} GL(V^*)$ к представлению $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ определяется так, чтобы $\left\langle \varrho^*(g)\xi\ ,\ \varrho(g)v \right\rangle = \left\langle \xi\,,\, v \right\rangle$ при всех g, ξ, v, т. е. правилом $\varrho^*(g)\xi\ :\ v \longmapsto \xi\,(g^{-1}v)$. Матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах транспонированы и обратны друг другу.

Действие G на пространстве линейных операторов $\mathrm{Hom}(U,V) = U^*\otimes V$ между двумя G-модулями U и V, согласно предыдущему, происходит по формуле $g\ :\ \varphi \longmapsto g\varphi g^{-1}$. Подпространство неподвижных векторов этого действия суть $\mathrm{Hom}_G(U,V)$.

Задача 6.2. Докажите, что если образ d-мерного представления ϱ лежит в $SL(V)$, то дополнительные внешние степении $\Lambda^k\varrho$ и $\Lambda^{d-k}\varrho$ этого представления изоморфны для всех $0 \leqslant k \leqslant d$.

1.2. Инварианты. G-подмодуль $V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid gv = v \quad \forall g \in G \} \subset V$ называется *пространством инвариантов* представления $G \to V$.

1.2.1. Теорема. *Над полем, характеристика которого не делит порядок группы $|G|$, оператор*

$$\natural = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

задаёт G-инвариантный пректор любого G-модуля на подмодуль инвариантов.

Доказательство. Поскольку при фиксированном $h \in G$ элементы hg и gh взаимно однозначно пробегают G вместе с g, инвариантность оператора $\natural$ проверяется выкладкой

$$h \left(\sum_{g \in G} g \right) = \sum_{g \in G} hg = \sum_{g \in G} g = \sum_{g \in G} gh = \left(\sum_{g \in G} g \right) h \;.$$

Аналогично устанавливается, что образ $v^\natural$ любого вектора $v \in V$ будет G-инвариантен:

$$|G|\, hv^\natural = h \left(\sum_{g \in G} g\, v \right) = \sum_{g \in G} hg\, v = \sum_{g \in G} g\, v = |G|\, v^\natural \;.$$

Наконец, $v^\natural = v$ для любого инвариантного вектора v, поскольку $\sum\limits_{g \in G} gv = |G|\, v$. □

1.3. Полупростота. Любое представление $G \to GL(V)$ конечной группы (над полем характеристика которого не делит порядок этой группы) вполне приводимо, поскольку пользуясь предыдущей теоремой, мы можем построить G-инвариантный проектор на любой подмодуль $U \subset V$. Для этого достаточно убедиться, что проекция на инварианты

$$\mathrm{Hom}(V, U) \xrightarrow{\natural} \mathrm{Hom}_G(V, U)$$

переводит любой пректор π снова в проектор. Из соотношений $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ и $g^{-1}U \subset U$ вытекает, что

$$\pi^\natural u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi g^{-1} u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g g^{-1} u = \frac{1}{|G|}\, |G|\, u = u \qquad \forall\, u \in U \;\;,$$

т. е. $\pi^\natural|_U = \mathrm{Id}_U$.

1.4. Представления конечных абелевых групп. Все неприводимые представления конечной абелевой группы одномерны. Линейный оператор на одномерном пространстве — это умножение на число. Задание неприводимого предсталения конечной абелевой группы равносильно заданию мультипликативного гомоморфизма

$$G \xrightarrow{\chi} k \;:\; \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2) \;,$$

сопоставляющего элементу группы то число, на которое он умножает, так что действие G происходит по праилу

$$gv = \chi(g)\, v\ .$$

Гомоморфизм χ называется *характером* абелевой группы G, и соответствующий одномерный неприводимый G-модуль обозначается через V_χ.

Задача 6.3. Докажите, что $V_\chi \simeq V_\psi$ тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$.

В пространстве $k[G]$ всех k-значных функций на группе G характеры образуют абелеву подгруппу относительно поточечного умножения значений. Она называется *двойственной* к G и обозначается $G^\wedge$. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Задача 6.4. Проверьте, что характер тензорного произведения двух одномерных представлений абелевой группы G равен произведению их характеров в $G^\wedge$, а характер двойственного представления обратен в $G^\wedge$ характеру исходного.

Группа G действует на $k[G]$ по правилу $f(x) \xmapsto{g} gf(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(xg)$. Разложим это представление в прямую сумму одномерных неприводимых представлений

$$k[G] = \bigoplus_\chi V_\chi^{\oplus m_\chi}\ ,$$

Всякая функция $f \in V_\chi$ удовлетворяет равенству $f(xg) = \chi(g)f(x)$, подставляя в которое $x = e$, получим $f(g) = \dfrac{1}{f(e)}\chi(g)$, т. е. f пропорциональна характеру $\chi \in k[G]$. Таким образом, каждое неприводимое представление V_χ входит в $k[G]$ с кратностью $m_\chi = 1$ и соответствующее одномерное подпространство в $k[G]$ натянуто на характер χ. В частности, характеры составляют базис в $k[G]$, и $|G^\wedge| = |G|$.

Отображение $g \longmapsto \mathrm{ev}_g$, сопоставляющее элементу $g \in G$ k-значную функцию ev_g на $G^\wedge$, вычисляющую значение характера в точке

$$\mathrm{ev}_g\ :\ \chi \longmapsto \chi(g)$$

является гомоморфизмом из G в $G^{\vee\vee}$, поскольку

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\mathrm{ev}_g(\chi_2) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\mathrm{ev}_{g_2}(\chi)\ .$$

Если g лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$, т. е. g действет тривиально в любом представлении группы G. В частности, для любой функции $f \in k[G]$ будем иметь $f(xg) = f(x)$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только когда $g = e$. Таким образом, имеется канонический изоморфизм абелевых групп $G \xrightarrow{\sim} G^{\vee\vee}$, известный как *двойственность Понтрягина*.

§2. Групповая алгебра конечной группы.

2.1. Определение групповой алгебры. Со всякой конечной группой G можно канонически связать ассоциативную алгебру, обозначаемую kG и называемую *групповой алгеброй* группы G над полем k, в которую G вложена в качестве подгруппы, состалющей базис векторного пространства kG. Элементы этой алгебры по определению представляют собой конечные формальные линейные комбинации вида

$$\sum_{g\in G} c_g\, g\ , \quad c_g \in k\ ,$$

которые складываются и перемножаются по стандартным ассоциативным и дистрибутивным правилам раскрытия скобок, с учётом, однако, того, что умножение элементов группы не обязательно коммутативно.

Задача 6.5. Докажите, что сопосталение целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между $k\mathbb{Z}$ и кольцом полиномов Лорана $k[t,t^{-1}]$, а также между $k(\mathbb{Z}\,/n\mathbb{Z}\,)$и фактор-кольцом $k[t]/(t^m-1)$.

Всякому представлению группы $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ канонически соответствует представление групповой алгебры $kG \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$, которое является продолжением ϱ по линейности с базиса на всё пространство kG

$$\varrho\left(\sum_g c_g g\right) = \sum_g c_g \varrho(g)\ ,$$

и представляет собой гомоморфизм ассоциативных алгебр, образ которого суть линейная оболочка $A_{\varrho(G)} \subset \mathrm{End}(V)$ операторов из $\varrho(G)$. Таким образом, теория представлений группы G тождественна теории представлений ассоциативной алгебры kG.

Задача 6.6. Пусть ассоциативная k-алгебра kG вместе с мультипликативным гомоморфизмом $G \xrightarrow{\mu} kG$ обладают следующим свойстом универсальности: всякий мультипликативный горморфизм $G \xrightarrow{\varphi} A$ в ассоциативную k-алгебру A единствененным образом представляется в виде композиции

$$\begin{tikzcd}
 & kG \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
G \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & A
\end{tikzcd}$$

μ и гомоморфизма k-алгебр $k[G] \xrightarrow{\alpha} A$. Докажите, что kG определяется этим универсальным сойством однозначно с тогностью до единственного изоморфизма, перестановочного с μ.

2.2. Функции на группе и прямое преобразование Фурье. Пространство $k[G]$ функций на группе G является коммутативной ассоциативной алгеброй относительно операций поточечного сложения и умножения значений функций. С другой стороны, функция $\psi \in k[G]$, сопоставляя каждому базисному вектору $g \in kG$ число, определяет на kG линейный функционал $\psi\ :\ \sum\limits_g c_g g \longmapsto \sum\limits_g c_g\psi(g)$, так что $k[G]$ канонически изоморфно двойственному пространству групповой алгебры $(kG)^*$. Наконец, для набора чисел $\psi(g)$ имеется и третья интерпретация — его можно рассматривать как набор коэффициентов, задающих линейную комбинацию элементов группы, т. е. как элемент самой групповой алгебры

$$\psi^\wedge = \sum_g \psi(g)\, g \in kG\ .$$

Отображение $(kG)^* = k[G] \to kG$, переводящее ψ в $\psi^\wedge$, мы будем называть *прямым преобразованием Фурье*. Это линейный изоморфизм векторных пространств, превращающий стандартный базис $k[G]$ из δ-функций

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad h = g \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g \end{cases} ,$$

в базис kG, состоящий из элементов группы G. Он не является гомоморфизмом алгебр, и прообраз (некоммутативного) умножения в kG задаёт на $k[G]$ мультипликативную операцию, называемую *свёрткой*

$$\varphi * \psi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h \in G} \varphi(gh^{-1})\, \psi(h) = \sum_{h \in G} \varphi(h)\, \psi(h^{-1}g) = \sum_{h_1 h_2 = g} \varphi(h_1)\, \psi(h_2) \;.$$

Задача 6.7. Проверьте, что $(\varphi * \psi)^\wedge = \varphi^\wedge \psi^\wedge$ в kG.

В дальнейшем мы чато будем без специльных оговорок отождествлять kG и $k[G]$ при помощи прямого преобразования Фурье. В частности, каждой функции $\psi \in k[G]$ в любом линейном представлении $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ канонически соответствует линейный оператор[1]

$$\varrho(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(\psi^\wedge) = \sum_g \psi(g)\varrho(g) \in \operatorname{End}(V)$$

и композиция таких операторов соответствует свёртке функций: $\varrho(\varphi)\,\varrho(\psi) = \varrho(\varphi * \psi)$.

2.3. Регулярные представления. Гомоморфизм $G \xrightarrow{\ell} \operatorname{End}(kG)$, сопоставляющий элементу $g \in G$ оператор ℓ_g левого умножения на g: $x \longmapsto gx$, называется *левым регулярными представлениями* группы G. Двойственное представление в $k[G]$ представляет собой левый сдвиг аргумента на g^{-1}:

$$\ell_g^* \varphi(h) = \varphi(g^{-1}h) \;.$$

Прямое преобразование Фурье отождествляет их между собой, поскольку

$$\ell_g \sum_h \varphi(h)\, h = \sum_h \varphi(h)\, gh = \sum_t \varphi(g^{-1}t)\, t \;.$$

Кроме левого, имеется аналогичное *правое регулярное представление* $G \xrightarrow{\ell} \operatorname{End}(kG)$, которое сопоставляет $g \in G$ оператор r_g правого умножения на g^{-1}: $x \longmapsto xg^{-1}$, и на языке функций состоит в правом сдвиге аргумента на g: $r_g^* \varphi(h) = \varphi(hg)$.

2.4. Скалярное произведение на kG. Левое регулярное представление

$$kG \xrightarrow{\ell} \operatorname{End}(kG)$$

вкладывает групповую алгебру kG в алгебру $\operatorname{End}(kG)$, на которой имеется каноническая форма следа. Ограничение этой формы на kG, нормированное по формуле

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|^2} \operatorname{tr}\,(\ell_a \ell_b) = \frac{1}{|G|^2} \operatorname{tr}\,(\ell_{ab}) \;,$$

[1] в классических учебниках по гармоническому анализу преобразованием Фурье, собственно, и называется сопоставление каждой функции на группе набора операторов на всех неприводимых представлениях этой группы, задаваемое по написанной нами формуле

задаёт на kG невырожденное симметричное скалярное произведение, оносительно которого элементы группы G перемножаются по правилу

$$(g,h) = \begin{cases} 1/|G| & , \quad \text{при} \quad h = g^{-1} \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g^{-1} \end{cases} .$$

Задача 6.8. Проверьте, что $\operatorname{tr}(\ell_g) = \begin{cases} |G| & , \quad \text{при} \quad g = e \\ 0 & , \quad \text{при} \quad g \neq e \end{cases}$.

Поскольку $\ell_{ab}\ell_c = \ell_{abc} = \ell_a\ell_{bc}$, скалярное произведение на $k[G]$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} (ab,c) &= (a,bc) \\ ab = 0 \implies (a,b) &= 0 \end{aligned} \qquad \forall\, a,b,c \in k\,[G] \tag{2-1}$$

Задача 6.9. Докажите, что ортогональное дополнение к левому идеалу в kG является правым идеалом и наоборот. В частности, ортогональное дополнение к двустороннему идеалу является также двусторонним идеалом.

Прямое преобразование Фурье переносит скалярное промзведение из kG в $k[G]$, где оно приобретает вид

$$(\varphi,\psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi^\wedge,\psi^\wedge) = \sum_{g,h\in G} \varphi(g)\,\psi(h)\,(g,h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\,\psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\,\varphi*\psi\,(e)\,.$$

2.5. Обратное преобразование Фурье. Изоморфизм $kG \xrightarrow{\sim} (kG)^* = k[G]$, задаваемый следовым скалярным произведением, называется *обратным преобразованием Фурье*[2]. Он переводит $c = \sum\limits_g c_g g \in kG$ в функцию

$$c^\vee \,:\, c^\vee(g) = \frac{1}{|G|}\,c_{g^{-1}}\,.$$

Вопреки названиям, призванным отражать лишь напавления стрелок, прямое и обратное преобразования Фурье

$$kG \underset{\vee}{\overset{\wedge}{\rightleftarrows}} k[G]$$

отнюдь не являются обратными другу линейными операторами. Их композиции действуют на функции и на элементы группы по правилам

$$\psi^{\wedge\vee}(g) = \frac{1}{|G|}\,\psi(g^{-1}) \qquad \text{и} \qquad g^{\vee\wedge} = \frac{1}{|G|}\,g^{-1}\,.$$

Обратное преобразование Фурье отождествляет левое регулярное представление ℓ на kG с правым регулярным представлением r^* на $k[G]$, а правое r — с левым ℓ^*.

2.6. Строение групповой алгебры. Разложим левое регулярное представление в прямую сумму неприводимых: $kG = \bigoplus\limits_\varrho V_\varrho^{m_\varrho}$. Каждое неприводимое относительно левого умножения инвариантное подпространство $V_\varrho \subset kG$ представляет собой *минимальный левый идеал*[3] ал-

[2]Прямое преобразование Фурье $k[G] \xrightarrow{\wedge} kG \;:\; \varphi \longmapsto \varphi^\wedge$, разумеется, тоже соответствует скалярному прозведению, которое в терминах $k[G]$ задаётся формулой $\langle\, \varphi\,,\,\psi\,\rangle = \varphi(\psi^\wedge)$ (вычисление значения функции в точке). δ-функции и элементы группы составляют по отношению к нему *ортонормальные* базисы. Однако, это произведение не играет существенной роли в теории представлений, и в этих лекциях не рассматривается.

[3]идеал называется *минимальным*, если он не содержит ненулевых идеалов, отличных от него самого

гебры kG. Поскольку правое умножение на любой элемент $y \in kG$ перестановочно с левым действием G, по лемме Шура $V_\varrho y \subset \bigoplus_\varrho V_\varrho^{m_\varrho}$ может нетривиально проектироваться только на прямые слагаемые, изоморфные V_ϱ. Поэтому сумма $I_\varrho = V_\varrho^{m_\varrho}$ всех минимальных левых идеалов, изоморфных данному неприводимому представлению V_ϱ, является двусторонним идеалом в $k[G]$. Из равенства $I_\varrho I_\lambda \subset I_\varrho \cap I_\lambda = 0$ и соотношения (2-1) следует, что идеалы I_ϱ попарно ортогональны относительно скалярного произведения на kG. Таким образом, алгебра kG представляет собой ортогональную прямую сумму своих двусторонних идеалов I_ϱ.

Задача 6.10. Докажите, что I_r являются минимальными двусторонними идеалами алгебры $k[G]$, и что все двусторонние идеалы в $k[G]$ исчерпываются прямыми суммами идеалов I_ϱ.

2.6.1. Теорема Машке. *Групповая алгебра конечной группы над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит порядок группы, изоморфна прямой сумме $\bigoplus_\varrho \mathrm{End}(V_\varrho)$ алгебр эндоморфизмов всех различных неприводимых представлений. При этом изоморфизме каждый двусторонний идеал I_ϱ изоморфно отображается на соответсвующую алгебру $\mathrm{End}(V_\varrho)$.*

Доказательство. Всякому представлению $G \xrightarrow{\varrho} GL(V_\varrho)$ отвечает гомоморфизм алгебр $kG \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V_\varrho)$, который переводит $\sum c_g g$ в $\sum c_g \varrho(g)$. Образ этого гомоморфизма совпадает с линейной оболочкой $A_{\varrho(G)}$ операторв из подгруппы $\varrho(G) \subset \mathrm{End}(V_\varrho)$. Если представление V_ϱ неприводимо, то по теореме Бернсайда $A_{\varrho(G)} = \mathrm{End}(V_\varrho)$, и стало быть, гомоморфизм $kG \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V_\varrho)$ эпиморфен. Прямая сумма этих эпиморфизмов по всем различным неприводимым представлениям группы G представляет собой эпиморфизм алгебр

$$kG \xrightarrow{\oplus\varrho} \bigoplus_\varrho \mathrm{End}(V_\varrho) , \tag{2-2}$$

переводящий элемент g в набор эндоморфизмов $\varrho(g)$. Его ядро состоит из таких $x \in kG$, которые действуют нулевым оператором во всех неприводимых представлениях. Раскладывая левое регулярное представление в прямую сумму неприводимых, мы видим, что левое умножение на такой элемент x является нулевым эндоморфизмом kG, откуда $x = \lambda_x(1) = 0$. Поскольку ограничение эпиморфизма $kG \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V_\varrho)$ на любой идеал $I_\lambda \neq I_\varrho$ тривиально по лемме Шура, ограничение представления ϱ на I_ϱ является изоморфизмом этого идеала с алгеброй $\mathrm{End}(V_\varrho)$. □

2.6.2. Следствие. *Сумма квадратов размерностей всех различных неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит $|G|$, равна порядку группы $|G|$.* □

2.6.3. Следствие (формула Planшереля). *Для любых $x, y \in kG$*

$$|G|\,(x,y) = \frac{1}{|G|}\sum_\varrho \dim(V_\varrho)\,\mathrm{tr}\,(\varrho(x)\varrho(y)) \,,$$

где суммирование происходит по всем различным неприводимым представлениям ϱ.

Доказательство. Вычислим $|G|\,(\varphi,\psi) = \dfrac{1}{|G|}\mathrm{tr}\,(\ell_{xy})$, пользуясь изоморизмом (2-2). В терминах $\oplus\mathrm{End}(V_\varrho)$ действие ℓ_{xy} на прямом слагаемом $\mathrm{End}(V_\varrho)$ состоит в левом умножении на

$\varrho(x)\,\varrho(y)$. Но при умножении слева на матрицу z базисная матричная единица ε_{ij} переходит в $\sum\limits_{\nu} z_{\nu i}\varepsilon_{\nu j}$, так что след левого умножения на z равен $\sum\limits_{j}\sum\limits_{i} z_{ii} = \dim(V_\varrho)\,\mathrm{tr}\,(z)$. □

Задача 6.11. Докажите, что каждое неприводимое представление V_ϱ группы G входит в разложение как левого так и праого регулярного представления с кратностью, равной $\dim V_\varrho$.

2.7. Центр групповой алгебры, т. е. коммутативная подалгебра

$$Z(kG) = \{\, z \in kG \mid zx = xz \quad \forall\, x \in kG \,\}\,,$$

отождествляется посредством прямого преобразования Фурье с подпространством функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. В самом деле, равенство $g\varphi^\wedge = \varphi^\wedge g$ достаточно проверять только для всех $g \in G$, где оно равносильно условию $\varphi(g^{-1}h) = \varphi(hg^{-1})$ $\forall\, g,h \in G$, которое после переобозначения $s = g^{-1}h$ превращается в $\varphi(s) = \varphi(gsg^{-1})$. В частности, размерность $\dim Z(kG)$ равна числу классов сопряжённых элементов в группе G. С другой стороны, центр каждой из алгебр $\mathrm{End}(V)$ одномерен, ибо состоит из гомотетий, а центр прямой суммы алгебр совпадает с прямой суммой их центров, ибо перестановочность сомножителей достаточно проверять отдельно на каждом слагаемом прямой суммы. Мы получаем

2.7.1. Следствие. *Число неприводимых представлений равно числу классов сопряжённых элементов.* □

2.8. Матричные элементы неприводимых представлений. Фиксация базиса в пространстве неприводимого представления V_ϱ позволяет записывать все операторы $\varrho(g)$ матрицами $(\varrho_{ij}(g))$. Матричне элементы $\varrho_{ij}(g)$ являются k-значными функциями на группе G, и тем самым, лежат в $k[G]$.

2.8.1. Утверждение. *Матричные элементы неприводимых представлений образуют в $k[G]$ базис, причём в его матрице Грама $(\,(\varrho_{\mu\nu},\lambda_{\alpha\beta})\,)$ отличны от нуля только скалярные произведения $(\varrho_{ij},\varrho_{ji}) = \dfrac{1}{\dim V_\varrho}$.*

Доказательство. Рассмотрим базисный линейный оператор $V_\varrho \xrightarrow{\varepsilon_{\alpha\beta}} V_\lambda$, матрица которого имеет 1 в позиции $(\alpha\beta)$ и нули в остальных местах. Его усреднение

$$\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lambda(g)\varepsilon_{\alpha\beta}\varrho(g^{-1})\,,$$

является G-гомоморфизмом между двумя неприводимыми представлениями, и по лемме Шура при $\lambda \neq \varrho$ записывается нулевой матрицей, а при $\lambda = \varrho$ — скалярной матрицей, у которой на главной диагонали стоит число

$$\frac{1}{\dim V_\varrho}\,\mathrm{tr}\,\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\dim V_\varrho}\,\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\left(g\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,g^{-1}\right) = \frac{1}{\dim V_\varrho}\,\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\right) =$$

$$\frac{1}{\dim V_\varrho}\mathrm{tr}\,\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1/\dim V_\varrho & , \quad \text{при} \quad \alpha = \beta \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

С другой стороны (ij)-тый элемент матрицы $\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ равен $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\lambda_{i\alpha}(g)\,\varrho_{\beta j}(g^{-1})=(\lambda_{i\alpha},\varrho_{\beta j})$, что и даёт нужные соотношения ортогональности. $\square$

2.8.2. Следствие. *Оператор $\varrho^{\wedge}_{ij}\in kG$ действует во всех неприводимых представлениях $\lambda\neq\varrho^*$ нулём, а в неприводимом представлении ϱ^* — оператором, матрица которого в двойственном базисе пространства V^* имеет в позиции (ij) число $|G|/\dim V_\varrho$ и нули в остальных местах.*

Доказательство. Представление $kG\xrightarrow{\lambda}\mathrm{End}(V_\lambda)$ переводит элемент $\varrho^{\wedge}_{ij}=\sum\limits_{g\in G}\varrho_{ij}(g)g\in k[G]$ в оператор $\sum\limits_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\lambda(g)\in\mathrm{End}(V_\lambda)$, матрица которого имеет в позиции (mn) число

$$\sum_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\,\lambda_{mn}(g)=\sum_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\,\lambda^*_{nm}(g^{-1})=|G|\,(\varrho_{ij},\lambda^*_{nm})\;,$$

равное $|G|/\dim V_\varrho$ при $\lambda^*=\varrho$ и $(nm)=(ji)$, и нулю во всех остальных случаях. $\square$

2.8.3. Следствие. *Линейная оболочка всех матричнх элементов неприводимого представления ϱ не зависит от выбора базиса в V_ϱ и при помощи прямого преобразования Фурье отождествляется с идеалом I_{ϱ^*}.* $\square$

Задача 6.12. Докажите, что линейная оболочка элементов каждого столбца матриц неприводимого представлении ϱ образует в $k[G]$ неприводимый подмодуль относительно левого регулярного действия G, и что этот подмодуль изоморфен двойственному неприводимому представлению ϱ^*.

Указание: Левое регулярное действие элемента $g\in G$ переводит функцию $\varrho_{ij}(h)$ в

$$\ell^*_g\varrho_{ij}(h)=\varrho_{ij}(g^{-1}h)=\left(\varrho(g^{-1}\varrho(h)\right)_{ij}=\sum_{\nu}\varrho_{i\nu}(g^{-1})\varrho_{\nu j}(h)\;,$$

Задача 6.13. Докажите, что двойственные представления $G\xrightarrow{\varrho}V$ и $G\xrightarrow{\varrho^*}V^*$ изоморфны тогда и только тогда, когда на пространстве V существует невырожденная G-инвариантная билинейная форма[4], и покажите, что если на неприводимом G-модуле над алгебраически замкнутым полем такая форма существует, то она единственна с точностью до пропорциональности.

Задача 6.14. Докажите, что над полем $\mathbb{R}$ на любом представлении конечной группы G имеется симметричная положительно определённая G-инвариантная форма.

Задача 6.15. Докажите, что над полем $\mathbb{C}$ на любом представлении конечной группы G имеется эрмитова G-инвариантная форма и выведите отсюда, что всякое комплексное линейное представление $G\xrightarrow{\varrho}V$ изоморфно своему эрмитово сопряжённому представлению $G\xrightarrow{\overline{\varrho}^*}\overline{V}^*$, (задаваемому в двойственном базисе матрицами, которые обратны, транспонированы и комплексно сопряжены к матрицам представления ϱ).

2.9. Базисные идемпотенты. Ортогональная прекция $e_\varrho\in I_\varrho$ единицы $e\in kG$ на идеал I_ϱ в любом отличном от ϱ неприводимом представлении действует нулевым, а в представлении ϱ — единичным оператором. Поэтому образ элемента e_ϱ в любом линейном представлении W

[4]билинейная форма b на V называется *G-инвариантной*, если $b(gv,gw)=b(v,w)\quad\forall\,v,w\in V\;,\;\;\forall\,g\in G$

является проектором на сумму всех тех неприводимых составляющих W, которые изоморфны V_ϱ. Эта сумма называется *ϱ-изотипной компонентой* представления W, а проекторы e_ϱ — *базисными идемпотентами*[5].

Задача 6.16. Покажите, что базисные идемпотенты в kG перемножаются по праилам

$$e_\varrho e_\lambda = \begin{cases} e_\varrho & , \quad \text{при} \quad \lambda = \varrho \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho \end{cases}$$

и составляют ортогональный базис в центре групповой алгебры, имея скалярные квадраты

$$(e_\varrho, e_\varrho) = \frac{1}{|G|^2} \operatorname{tr} \ell_{e_\varrho} = \left(\frac{\dim V_\varrho}{|G|} \right)^2 .$$

Задача 6.17. Докажите, что e_ϱ порождает в kG минимальный левый идеал $kG \cdot e_\varrho \subset kG$, который как G-модуль изоморфен неприводимому представлению V_ϱ.

Задача 6.18. Докажите, что двусторонний идеал $kG \cdot e_\varrho \cdot kG \subset kG$, порождённый e_ϱ в kG совпадает с I_ϱ.

Согласно Сл.2.8.2 базисные идемпотенты выражаются через матричные единицы по формуле

$$e_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_\nu {\varrho^*_{\nu\nu}}^\wedge = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_i \varrho^*_{ii}(g)\, g = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g\in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1})\, g$$

2.10. Характеры. Функция $\chi_\varrho(g) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho(g) = \sum_\nu \varrho_{\nu\nu} \in k[G]$ называется *характером представления* ϱ. Характеры неприводимых представлений связаны с базисными идемпотентами соотношением

$$e_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_\varrho(g^{-1})\, g .$$

В частности, проектор произвольного представления $G \xrightarrow{R} GL(W)$ на ϱ-изотипную компонету может быть выражен через матричные элементы по формуле

$$\pi_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_\varrho(g^{-1})\, R(g) \in \operatorname{End}_G(W)$$

Поскольку след оператора не меняется при сопряжении, характер $\chi_R(g) = \operatorname{tr} R(g)$ любого представления $G \xrightarrow{R} W$ не зависит от выбора базиса в W и постоянен на классах сопряжённых элементов, т. е. его (прямой) Фурье-образ лежит в центре групповой алгебры $k[G]$.

2.10.1. Утверждение. *Прямые Фурье-образы характеров неприводимых представлений составляют ортонормальный базис в центре групповой алгебры.*

Доказательство. В силу соотношений ортогональности из Утв.2.8.1 для неприводимого представления ϱ имеем

$$(\chi_\varrho, \chi_\varrho) = \left(\sum_\nu \varrho_{\nu\nu}\, , \, \sum_\mu \varrho_{\mu\mu} \right) = \sum_\nu (\, \varrho_{\nu\nu}\, , \, \varrho_{\nu\nu}\,) = \sum_\nu \frac{1}{\dim V_\varrho} = 1 .$$

и $(\chi_r, \chi_\lambda) = 0$ для неизоморфных неприводимых представлений λ и ϱ. □

[5]всякий элемент кольца, совпадающий со своим квадратом, называется *идемпотентом*

§3. Техника работы с представлениями.

3.1. Пример: некоторые представления симметрических групп. Поскольку классы сопряжённных элементов симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ взаимно однозначно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга[6], число неприводимых представлений $\mathfrak{S}_n$ равно количеству разбиений числа n.

Задача 6.19. Выясните, сколько элементов в классе сопряжённости $\mathfrak{S}_n$, состоящем из всех перестановок, распадающихся в произведение m_1 независимых циклов длины 1, m_2 независимых циклов длины 2, ..., m_n независимых циклов длины n (где $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \cdot m_\nu = n$).

Ответ: $\dfrac{n!}{m_1!\,1^{m_1} m_2!\,2^{m_2} \cdots m_n!\,n^{m_n}}$

Задача 6.20. Перечислите классы сопряжённых элементов в знакопеременных группах $\mathfrak{A}_n$ с $n \leqslant 6$ и определите число элементов в каждом из них.

Группа $\mathfrak{S}_3$ имеет ровно три неприводимых представления: тривиальное одномерное, одномерное знаковое (в котором $\sigma v = \mathrm{sgn}(\sigma)\, v$), и двумерное представление группой симметрий треугольника.

Задача 6.21. Нарисуем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ правильный треугольник с центром в нуле и вершиной в единице и рассмотрим риманову сферу $\mathbb{CP}_1$, экватор которой описан вокруг этого треугольника. Стереографическая проекция из северного полюса сферы отождествляет плоскость $\mathbb{C}$ со стандартной аффинной картой на $\mathbb{CP}_1$, так что группа симметрий треугольника, реализованная вращениями сферы, будет действовать на $\mathbb{C}$ дробно линейными заменами координаты z. Напишите явные формулы для всех шести таких замен и найдите хотя бы одну инвариантную относительно них непостоянную рациональную функцию от z.

У группы $\mathfrak{S}_4$ есть ровно пять неприводимых представлений: два одномерных, трёхмерное представление группой симметрий тетраэдра, трёхмерное представление группой вращений (т. е. сохраняющих ориентацию симметрий) куба, и двумерное представление группой треугольника, индуцированное эпиморфизмом $\mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_3$, который задаётся факторизацией по нормальной подгруппе Клйна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \subset \mathfrak{S}_4$.

Задача 6.22. Разложите на неприводимые естественные представления группы вращений куба в пространстве комплекснозначных функций

а) на множестве вершин;

б) на множестве рёбер;

в) на множестве граней.

Задача 6.23. Сделайте то же самое для группы симметрий правильного тетраэдра.

Задача 6.24. Как раскладываются в сумму неприводимых трёхмерные представления группы $\mathfrak{S}_4$ при ограничении на подгруппу $\mathfrak{S}_3$ перестановок первых трёх символов?

У каждой симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ есть два одномерных представления (тривиальное и знаковое) и $(n-1)$-мерное представление симметриями правильного симплекса. Последнее изоморфно подмодулю, заданному уравнением $\sum x_\nu = 0$, в *тавтологическом* представлении $\mathfrak{S}_n$ перестановками базисных векторов координатного пространства k^n.

3.2. Вычисления характеров. Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе

[6] длины строк диаграммы суть длины независимх циклов, на которые раскладывается перестановка

$g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. Так например, характер регулярного представления

$$\chi_\ell(g) = \chi_r(g) = \begin{cases} |G| & , \text{ если } \; g = e \\ 0 & , \text{ если } \; g \neq e \end{cases}$$

Задача 6.25. Вычислите характеры тавтологического и симплициального представлений $\mathfrak{S}_n$.

Проследить за тем, как меняются характеры при стандартных операциях над представлениями, проще всего записывая матрицы операторов в стандартных же базисах, связанных с этими операциями.

Задача 6.26. Докажите, что $\forall g \in G$ и для любых представлений ϱ, λ

а) $\chi_{\varrho\oplus\lambda}(g) = \chi_\varrho(g) + \chi_\lambda(g)$

б) $\chi_{\varrho\otimes\lambda}(g) = \chi_\varrho(g)\chi_\lambda(g)$

в) $\chi_{\varrho^*}(g) = \chi_\varrho(g^{-1})$

Значения характеров симметрических и внешних степеней данного представления ϱ на данном элементе $g \in G$ проще всего вычислять в базисе, где матрица $\varrho(g)$ диагональна.

Задача 6.27. Докажите, что производящая функция для характеров внешних степеней представления ϱ имеет вид

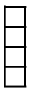
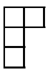
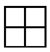
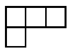
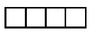
$$\sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu\varrho}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g))\,.$$

Задача 6.28. Докажите, что производящая функция для характеров симметрических степеней представления ϱ имеет вид

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu\varrho}(g)\, t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))}\,.$$

Характеры представлений, заданных геометрически, легко вычисляются как суммы собственных значений соответствующих поворотов и отражений.

Задача 6.29. Убедитесь, что значения характеров неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_4$ на классах сопряжённых элеметов задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	−1	−1	0	−1
кубического	3	1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

Задача 6.30. Опишите все неприводимые представления группы симметрий правильного n-угольника и вычислите их характеры.

Задача 6.31. Докажите, что неодномерный неприводимый характер не может быть всюду ненулевым.

3.3. Описание представлений с помощью характеров. Всякое представление W группы G однозначно с точностью до изоморфизма определяется набором кратностей, с которыми неприводимые представления V_ϱ входят в его разложение

$$W = \bigoplus_\varrho V_\varrho^{\oplus m_\varrho}$$

в прямую сумму неприводимых представлений. Согласно зад.6.26 характер такого представления

$$\chi_W = \sum_\varrho m_\varrho \chi_\varrho \ ,$$

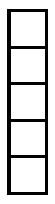
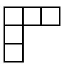
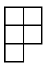
т. е. множество всех представлений группы G биективно соответствует линейным комбинациям неприводимых характеров с целыми неотрицательными коэффициентами. В силу ортонормальности неприводимых характеров, кратности m_ϱ неприводимх компонент равны скалярным произведениям:

$$(\chi_\lambda, \chi_W) = \sum_\varrho m_\varrho (\chi_\lambda, \chi_\varrho) = m_\lambda \ .$$

В частности, поскольку все m_ϱ целые, из равенства $(\chi_W, \chi_W) = \sum_\varrho m_\varrho^2$ вытекает, что представление W неприводимо тогда и только тогда, когда скалярный квадрат его характера равен единице.

Задача 6.32. Составьте таблицы неприводимых характеров для знакопеременных групп $\mathfrak{A}_4$ и $\mathfrak{A}_5$.

Указание: Группа $\mathfrak{A}_5$ имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся внешним автоморфизмом $\mathfrak{A}_5$, который задаваётся сопряжением любой транспозицией внутри $\mathfrak{S}_5$) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров $\mathfrak{A}_5$ такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

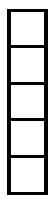
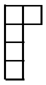
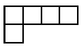
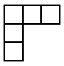
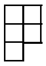
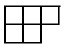
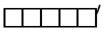
Задача 6.33. Вычислите скалярные квадраты характеров всех внешних степеней тавтологического представления $\mathfrak{S}_n$ и докажите, что все внешние степени симплициального представления неприводимы.

Указание: В стандартном базисе $\{e_I\}$ пространства $\Lambda^m(k^n)$ след перестановки σ равен $\sum_I \{\sigma\}_I$, где

$$\{\sigma\}_I = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma|_I) & , \text{ при } \sigma(I) \subset I \\ 0 & , \text{ при } \sigma(I) \not\subset I \end{cases} .$$

Это значение следует подставить в явную формулу для скалярного произведения и аккуратно вычислить возникающую сумму, имея в виду, что совокупность перестановок σ, для которых $\{\sigma\}_I\{\sigma\}_J \neq 0$, представляет собой прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \setminus (I \cap J)$, $J \setminus (I \cap J)$ и $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (I \cup J)$.

Задача 6.34. Составьте таблицу неприводимых характеров симметрической группы $\mathfrak{S}_5$.
Указание: $\mathfrak{S}_5$ имеет знаковое одмерное представление α и симплициальное представление ϑ. Представления $\alpha \otimes \vartheta$ и $\Lambda^2\vartheta$ оказываются неприводимы, а $S^2\vartheta = \alpha \oplus \vartheta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

3.3.1. Утверждение. $\dim \mathrm{Hom}_G(U, W) = (\chi_U, \chi_W)$ *для любых представлений* U *и* V.

Доказательство. $\dim \mathrm{Hom}_G(U, W)$ равна кратности вхождения тривиального неприводимого представления в разложение $U^* \otimes W$, т. е. скалярному произведению тривиального характера $\chi_0 \equiv 1$ и характера $\chi_{U^*\otimes W}(g) = \chi_W(g)\chi_U(g^{-1})$:

$$\dim \mathrm{Hom}_G(U, W) = (\chi_{U^*\otimes W}, \chi_0) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g)\chi_U(g^{-1}) \cdot 1 = (\chi_W, \chi_U) ,$$

что и утверждалось. □

Задача 6.35. Некто написал на гранях куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и затем каждый день заменял одновременно на всех гранях старый номер на среднее арифметическое старых номеров четырёх соседних граней. С точностью до второго знака после запятой вычислите те числа, которые будут написаны на гранях через месяц.

Задача 6.36. Пусть V — двумерное неприводимое представление $\mathfrak{S}_3$.

а) Разложите $S^2(V)$ и $S^3(V)$ в сумму неприводимых представлений.

б) Докажите, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R - регулярное представление $\mathfrak{S}_3$.

в) Опишите разложение всех $S^n(V)$.

г) Опишите пространство $\mathfrak{S}_3$-инвариантных полиномов на V.

д) Докажите, что $S^2(S^3(V))$ G-изоморфно $S^3(S^2(V))$.

е) Вычислите характеры всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.

ж) Верно ли, что $S^k(S^m(V))$ G-изоморфно $S^m(S^k(V))$ при любых k и m?

Задача 6.37. Для любого представления $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ конечной группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль рассмотрим пространство G-инвариантных однородных полиномов степени m на пространстве V:

$$\mathsf{Sym}^m_G(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathsf{Sym}^m(V) \mid f(gv) = f(v) \quad \forall g \in G , \quad \forall v \in V \}$$

Докажите, что производящая функция для размерностей $d_m = \dim \mathsf{Sym}^m_G(V)$ имеет вид

$$\sum_{m \geqslant 0} d_m t^m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))} \qquad \text{(формула Молина)} .$$

Задача 6.38. Докажите, что все неприводимые представления конечной группы встречаются в разложениях тензорных степеней любого её эффективного представления.

3.4. Кольцо представлений. Рассмотрим решётку

$$\mathrm{Rep}\,(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{Z}\ \chi_\varrho \subset k[G] ,$$

состоящую из целочисленных линейных комбинаций неприводимх характеров. $\mathrm{Rep}\,(G)$ является коммутативным подкольцом с единицей в коммутативной алгебре $k[G]$ всех функций (относительно операций поточечного сложения и умножения значений) и называется *кольцом представлений* группы G. Элементы G, равные суммам неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. Остальные элементы $\mathrm{Rep}\,(G)$ называются *виртуальными представлениями*, поскольку интуитивно могут восприниматься как «представления», в разложении которых на неприводимые допускаются отрицательные кратности. Согласно зад.6.26, сложению и умножению точек $\mathrm{Rep}\,(G)$ отвечает прямая сумма и тензорное произедение представлений.

§4. Ограничение и индуцирование.

4.1. Левые и правые A-модули. Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра над полем k. A-модули, с которыми мы имели дело до сих пор, по определению, задавались гомоморфизмом алгебр $A \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}(U)$. Аккуратные алгебраисты называют их *левами* A-модулями. Соответственно, *правыми* A-модулями называются антигомоморфизмы[7] алгебр $A \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющие соотношению:

$$\varrho(ab)v = \varrho(b)\varrho(a)v \qquad \forall\, a, b \in A \ , \quad \forall\, v \in V \ .$$

[7] т. е. линейные операторы, переводящие произведения в произведения, у которых порядок сомножителей противоположен исходному

Действие A на правом A-модуле удобнее записывать правым умножением:

$$va \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(a)v\ ,$$

поскольку при такой записи $v\,(ab) = (v\,a)\,b$.

4.2. Тензорное произведение над алгеброй. Если на пространстве U имеется структура правого, а на пространстве V — структура левого A-модуля, то фактор пространство тензорного произведения $U \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными тензорами вида

$$(ua) \otimes v - u \otimes (av)\ , \quad a \in A\ ,\ u \in U\ ,\ v \in V$$

называется *тензорным произведением* U *и* V *над* A и обозначается $U \underset{A}{\otimes} V$. Подчеркнём, что на векторном пространстве $U \underset{A}{\otimes} V$ никакой структуры A-модуля, вообще говоря, уже нет.

4.2.1. Ограничение и индуцирование модулей. Пусть $S \subset A$ – ассоциативная подалгебра, и V – левый S-модуль. Рассмотрим A как *правый* S-модуль относительно правого умножения на элементы из S и образуем тензорное произведение $A \underset{S}{\otimes} V$. На нём имеется естественная структура левого A-модуля: $a\,(b \underset{S}{\otimes} v) \stackrel{\text{def}}{=} (ab) \underset{S}{\otimes} v$. Левый A-модуль $A \underset{S}{\otimes} V$ называется *индуцированным* с левого S-модуля V. Говорят также, что $A \underset{S}{\otimes} V$ получается из V *расширением* или *подъёмом скаляров*[8] от S до A. Таким образом, каждый левый S модуль индуцирует некий левый A-модуль.

Наоборот, каждый левый A-модуль W может очевидным образом рассматриваться как левый модуль над подалгеброй $S \subset A$. В таком контексте он обозначается W_S и называется модулем, полученным из W *ограничением* на S, или, как ещё говорят, *сужением* или *спуском скаляров*[9] с A до S. Операции ограничения и индуцирования сопряжены друг другу в следующем смысле.

4.2.2. Теорема. *Для любых A-модуля W и S-модуля U имеется канонический изоморфизм* $\mathrm{Hom}_A(A \underset{S}{\otimes} U, W) \simeq \mathrm{Hom}_S(U, W_S)$.

Доказательство. Сопоставим A-гомоморфизму $A \underset{S}{\otimes} U \xrightarrow{F} W$ оператор $U \xrightarrow{f} W_S$, заданный правилом $u \overset{f}{\longmapsto} F(1 \underset{S}{\otimes} u)$. Он является S-гомоморфизмом, поскольку

$$f(su) = F(1 \underset{S}{\otimes} su) = F(s \underset{S}{\otimes} u) = F(s\,(1 \underset{S}{\otimes} u)) = s\,F(1 \underset{S}{\otimes} u) = s\,f(u)\ .$$

Наоборот, S-гомоморфизму $U \xrightarrow{\varphi} W_S$ сопоставим линейный оператор $A \otimes U \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} W$, действующий на разложимые тензоры по правилу $a \otimes u \overset{\widetilde{\Phi}}{\longmapsto} a\varphi(u)$. Поскольку

$$\Phi((as) \otimes u - a \otimes (su)) = \Phi((as) \otimes v) - \Phi(a \otimes (su)) = as\varphi(u) - a\varphi(su) = 0\ ,$$

[8]название связано с тем, что простейшим примером этой конструкции является комплексификация вещественного векторного пространства V, представляющая собой не что иное как $\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$.

[9]название связано с тем, что простейшим примером этой конструкции является овеществление комплексного векторного пространства W, представляющее собой не что иное как $W_{\mathbb{R}}$.

он корректно факторизуется до линейного оператора $A \underset{S}{\otimes} U \xrightarrow{\Phi} W$, который является A-гомоморфизмом, поскольку

$$\Phi(a\,(b \underset{S}{\otimes} u)) = \Phi((ab) \underset{S}{\otimes} u) = ab\varphi(u) = a\Phi(b \underset{S}{\otimes} u)\ .$$

Сопоставления $F \longmapsto f$ и $\varphi \longmapsto \Phi$ суть взаимно обратные линейные операторы между пространствами $\mathrm{Hom}_A(A \underset{S}{\otimes} U, W)$ и $\mathrm{Hom}_S(U, W_S)$. □

Задача 6.39. Докажите, что ограничение и индуцирование перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями.

4.3. Ограниение и индуцирование представлений. В ситуации, когда $H \subset G$ — подгруппа конечной группы, предыдущие конструкции сопоставляют каждому линейному представлению группы $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ его *ограничение*

$$\mathrm{Res}_H^G V\ :\ H \xrightarrow{\mathrm{Res}_H^G \varrho} GL(V)$$

на подгруппу H, а каждому линейному представлению подгруппы $H \xrightarrow{\lambda} GL(U)$ — *индуцированное* представление

$$\mathrm{Ind}_H^G U\ :\ G \xrightarrow{\mathrm{Ind}_H^G \lambda} GL(k[G] \underset{k[H]}{\otimes} U)$$

группы G, так что иммет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G U, V) \simeq \mathrm{Hom}_H(U, \mathrm{Res}_H^G V)\ ,$$

известный в этом контнексте как *двойственность Фробениуса*. На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathrm{Rep}\,(H) \underset{\mathrm{Res}_H^G}{\overset{\mathrm{Ind}_H^G}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}\,(G)\ ,$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения на групповой алгебре:

$$(\mathrm{Ind}_H^G U, V)_{k[G]} = (U, \mathrm{Res}_H^G V)_{k[H]} \qquad \forall\, U \in \mathrm{Rep}\,(H)\ ,\quad \forall\, V \in \mathrm{Rep}\,(G)\ .$$

В частности, неприводимый G-модуль V входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого H-модуля U столько же раз, сколько неприводимый H-модуль U входит в разложение ограничения неприводимого G-модуля V на подгруппу H.

4.4. Структура индуцированного представления. Векторное пространство $k[G] \otimes U$ представляет собой прямую сумму

$$k[G] \otimes U = \bigoplus_{g \in G} g \otimes U\ .$$

При факторизации по соотношениям $(gh) \otimes u = g \otimes (hu)$ все прямые слагаемые $g \otimes U$, у которых g лежат в одном смежном классе gH по подгруппе H, склеятся в одно пространство, изоморфное U, причём склейка эта задаётся действием H на U: $gh \otimes u \leftrightsquigarrow hu$. Таким образом, зафиксировав ситему представителей $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ классов смежности G/H, мы можем написать следующее разложение в прямую сумму векторных пространств

$$k[G] \underset{k[H]}{\oplus} U = g_1U \oplus g_2U \oplus g_3U \oplus \;\cdots\; \oplus g_sU \ ,$$

в котором каждое $g_\nu U$ представляет собой копию пространства U, а приписанный слева значёк g_ν призван показывать, что эта копия соответствует смежному классу $g_\nu H \subset G$. Если условиться писать $g_\nu(u)$ для обозначения вектора $u \in U$, лежащего в γ_ν-той копии $g_\nu U$ пространства U, то векторы $w \in k[G] \underset{k[H]}{\otimes} U$ будут однозначно представляться суммаи вида

$$\sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(u_\nu) \ .$$

с $u_\nu \in U$. В группе G левое умножение на элемент $g \in G$ осуществляет перестановку смежных классов: для любого $g \in G$ и любого $1 \leqslant \nu \leqslant s$ существуют единственные $h_{g,\nu} \in H$ и $1 \leqslant \mu_{g,\nu} \leqslant s$, такие что $g\, g_\nu = g_{\mu_{g,\nu}} h_{g,\nu}$. В этих обозначениях действие элементов $g \in G$ на $\bigoplus\limits_{\nu} g_\nu U$ происходит по правилу

$$g \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(u_\nu) = \sum_{\nu=1}^{s} g_{\mu_{g,\nu}}(h_{g,\nu}u_\nu) \ ,$$

где $h_{g,\nu}u_\nu \in U$ вычисляются в соответствии с действием H на U.

Задача 6.40. Опишите представления $\mathfrak{S}_3$, индуцированные с одномерных представлений подгруппы $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3$, переставляющей первые два символа.

Задача 6.41. Докажите, что индуцированное представление можно описать как пространство

$$\mathrm{Hom}_H(k[G], U) = \{\, G \xrightarrow{f} U \mid f(hg) = hf(g) \ \ \forall\, h \in H \ , \ \ \forall\, g \in G \,\} \ ,$$

на котором G действует по правилу $f(x) \overset{g}{\longmapsto} gf(x) = f(xg)$.

Задача 6.42. Докажите, что на данном классе сопряжённых элементов $C \subset G$ характер представления, индуцированного тривиальным одномерным представлением любой подгруппы $H \subset G$, принимает значение

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Id}}(C) = \frac{[G:H]}{|C|} \cdot |C \cap H| \ .$$

Задача 6.43. Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение m классов H-сопряжённости

$$C \cap H = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m$$

Докажите, что характер произвольного индуцированного представления $\mathrm{Ind}_H^G U$ принимает на C значение

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G U}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_U(D_i) \ .$$

Задача 6.44. Опишите представления $\mathfrak{S}_4$, индуцированные с а) двумерного неприводимого представления $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$;

б) одномерного представления циклической подгруппы четвёртого порядка, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на $\sqrt{-1}$

в) одномерного представления циклической подгруппы третьего порядка, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на примитивный $\sqrt[3]{1}$

Задача 6.45. Опишите представления $\mathfrak{S}_5$, индуцированные со всех неприводимых представлений знакопеременной подгруппы.