Программа обязательного курса алгебры за третий семестр

«Полилинейная алгебра, геометрия и представления»

Тема 1. *Тензорные произведения.*

$\triangleright$Полилинейные отображения $\triangleright$Тензорное произведение векторных пространств и модулей. $\triangleright$Тензорное произведения операторов. $\triangleright$Двойственность между $(V^*)^{\otimes n}$ и $(V^{\otimes n})^*$ (полилинейные формы как тензоры) $\triangleright$Свёртки. $\triangleright$Стандартные канонические изоморфизмы типа $U^* \otimes V^* \otimes W = Hom(U \otimes V, W) = Hom(V, Hom(U, W))$ (линейные операторы как тензоры).

Практические навыки: отыскание базисов и размерностей тензорных произведений; вычисление тензорных произведений и свёрток полилинейных форм и операторов; жорданова нормальная форма тензорной степени оператора; умение по-разному интерпретировать один и тот же тензор посредством канонических изоморфизмов.

Тема 2. *Симметрическая алгебра.*

$\triangleright$Симметрическая алгебра как фактор тензорной алгебры и как подпространсто (при $\mathrm{char}(k) = 0$) тензорной алгебры. $\triangleright$Симметрическое произведение и симметризация. $\triangleright$Отождествление $S^n(V^*) = (S^n(V))^*$ с симметрическими n-линейными формами на V и с однородными полиномами степени n на V (полная поляризация однородного многочлена). $\triangleright$Свертки, дифференцирования и поляры симметричных форм, формула Тейлора и её геметрический смысл. $\triangleright$Порождаемость $S^n(V)$ чистыми степенями вида $v^{\otimes n}$ (принцип Аронгольда).

Практические навыки: переходы между стандартными базисами в пространстве симметричных n-линеных форм на V, пространстве однородных многочленов степени n на V и пространстве $S^n(V^*)$: умение вычислять симметрические произведения и свёртки в терминах этих базисов; вычисление поляризаций; жордановы нормальная форма симметрической степени линейного оператора.

Тема 3. *Внешняя алгебра.*

$\triangleright$Внешняя алгебра как фактор тензорной алгебры и как подпространсто (при $\mathrm{char}(k) = 0$) тензорной алгебры. $\triangleright$внешнее произведение и альтернирование. $\triangleright$Отождествление $\Lambda^k(V^*) = (\Lambda^k(V))^*$ с косыми k-линейными формами на V и с грассмановыми полиномами степени k на V. $\triangleright$Свертки, кососимметричных форм, спаривание $\Lambda^k V \otimes \Lambda^{n-k} V \longrightarrow \Lambda^n V$ $\triangleright$Внешние степени операторов и матриц, миноры и соотношения Лапласа $\triangleright$Критерии разложимости поливектора

Практические навыки: переходы между стандартными базисами в пространстве кососимметричных k-линеных форм на V, пространстве однородных грассмановых многочленов степени k на V и пространстве $\Lambda^n(V^*)$: умение вычислять внешние произведения и свёртки в терминах этих базисов; жордановы нормальная форма симметрической степени линейного оператора.

Тема 4. *Грассман, Плюккер, Сегре и Веронезе.*

$\triangleright$Проективные пространства и грассманианианы. $\triangleright$Аффинные карты и функции перехода. $\triangleright$Проективные преобразования. $\triangleright$Клеточное разбиение. $\triangleright$Число точек над конечным полем и Гауссовы биномиальные коэффициенты. $\triangleright$Отображение Веронезе. $\triangleright$Отображение Сегре. $\triangleright$Отображение Плюккера.

Практические навыки: размерность грассманиана, число точек грассманиана над конечным полем, размерности клеток, квадрика Веронезе в $\mathbb{P}_2$, квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$, сколько плоских коник касается пяти данных прямых на $\mathbb{P}_2$, геометрия коник и гомографий, гексограмма Паскаля и построения Штейнера.

Тема 5. *$G(2,4)$ и геометрия прямых в $\mathbb{P}_3$.*

▹Классификация и внутренняя геометрия комплексных проективных квадрик. ▹Взаймодействие квадрик Веронезе, Сенре и Плюккера в $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$ и $\mathbb{P}_5$. ▹Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$ как многообразие прямых в $\mathbb{P}_3$. ▹Геометрическая интерпретация циклов Шуберта в терминах прямых в $\mathbb{P}_3$. ▹Пересечение клеток Шуберта.

Практические навыки: чем изобразятся на квадрике Плюккера два семейства прямолиненых образующих невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_3$; какую фигуру заметут в $\mathbb{P}_3$ все прямые, пересекающие каждую их трёх данных; сколько прямых пересекает четыре заданных попарно скрещивающихся прямых в (нашем обычном) пространстве и т. п.

Тема 6. *Примеры групп и алгебр Ли.*

▹Группы Ли и алгебраические группы. ▹Классические матричные группы GL, SL, SO, Sp, SU. ▹Алгебра Ли группы Ли. ▹Подгруппы и подалгебры Ли в пространстве комплексных 2×2 -матриц. ▹Кватернионы. ▹Топологическое строение групп $S0_3$, $S0_4$, SU_2. ▹Накрытия $SU_2 \to S0_3$ и $SU_2 \times SU_2 \to S0_4$. ▹Спинорное разложение четырёхмерного евклидова пространства. ▹Звёздочка Ходжа и разложение $\Lambda^2(\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}^4)$.

Практические навыки: описание алгебр Ли групп GL, SL, SO, SU, строение (и простота) этих групп в размерностях ≤ 3, связь между операциями на группе и в алгебре Ли, дифференциал сопряжения, дифференциал детерминанта, вычисление экспонент от матриц и анализ экспоненциального отображения, отождествление SU_2 с единичными кватернионами, $SL_2(\mathbb{C})$ как комплексификация SU_2. спинорные представления SO_3, разложение бивекторов четырёхмерного пространства на авто- и антиавтодуальные, стандартные представления $\mathfrak{sl}_2$ на бинарных формах.

Тема 7. *Пространства с операторами.*

▹Представления множества операторов, приводимость, разложимость, полупростота и гомоморфизмы представлений ▹Представления ассоциативных алгебр, групп, групп Ли и алгебр Ли. ▹Представления одного оператора. ▹Диагонализуемость операторов, представляющих конечную группу▹Простые модули и лемма Шура. ▹Критерии полупростоты. ▹Кольцо R-эндоморфизмов полупростого R-модуля. ▹Двойственность $End_{End_A(M)}(M) \simeq A)$. ▹Теорема Бернсайда.

Практические навыки: примеры на использование леммы Шура и задание гомоморфизмов $U^{\oplus m} \to V^{\oplus n}$ матрицами над $Hom(U,V)$, следное скалярное произеження на $End(V)$, след оператора умножения на матрицу, полупростые $\mathbb{Z}$-модули, двойственность между действиями $GL(V)$ и $\mathfrak{S}_n$ на $V^{\otimes n}$.

Тема 8. *Примеры пространств с операторами.*

▹Представления множеств коммутирующих операторов и конечных абелевых групп. ▹Действие SL_2 и $\mathfrak{sl}_2$ на пространствах бинарных форм $S^n(\mathbb{C}^2)$. ▹Описание конечномерных неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. ▹Оператор Казимира и полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Практические навыки: примеры на вычисление характеров и двойственность Понтрягина для абелевых грпп; примеры $\mathfrak{sl}_2$-модулей, действие $\mathfrak{sl}_2$ и SL_2 на бинарне формы, вычисления с использованием коммутационных соотношений в $\mathfrak{sl}_2$, приложения к описаниям представлений SO_3 и SO_4.

Тема 9. *Предсталения конечных групп.*

▹Усреднение по группе и полная приводимость представлений ▹Тензорные операции над представлениями. ▹Групповая алгебра и алгебра функций на группеб свёртки. ▹Регулярные представления и следное скалярное произведение.▹Теорема Машке о разложении групповой алгебры в сумму матричных алгебр. ▹Центр групповой алгебры. ▹Матричные элементы неприводимых представлений и соотношения ортогональности. ▹Базисные идемпотенты и характеры. ▹Техника вычисления характеров и исследования представлений с помощью характеров. ▹Тензорное произведение левого и правлого модулей над ассоциативной алгеброй. ▹Ограничение и индуцирование модулей. ▹Различные описания структуры ндуцированного представления. ▹Двойственность Фробениуса. ▹Кольцо представлений.

Практические навыки: умение вычислять характер данного представления и раскладывать его на неприводимые; умение раскладывать оператор, коммутирующий с действием группы, в прямую сумму гомотетий; знание неприводимых представлений и классов сопряжённости для «маленьких» групп ($\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{A}_n$ с $n \leq 5$, $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ при $n, p \leq 3$, групп многогранников, диедров); характеры внешних степеней канонического представления $\mathfrak{S}_n$ самосовмещениями $(n-1)$-мерного симплекса; умение вычислять характеры ограниченных и индуцированных представлений и раскладывать их на неприводимые; понимание конструкции индуцирования.

Тема 10. *Действие S_n на $V^{\otimes n}$.*

▹S_n-инвариантные эндоморфизмы $V^{\otimes n}$ и $GL(V)$-инвариантные эндоморфизмы $V^{\otimes n}$: соответствие между неприводимыми представлениями симметрических и линейных групп. ▹Тип симметрии тензора. ▹Симметризаторы Юнга. ▹Перечисление неприодимых представлений $\mathfrak{S}_n$.

Практические навыки: представление о том, что кроме S^n и Λ^n бывают и другие полиномиальные функторы, взаимно-однозначно соответствующие диаграммам Юнга: поведение неприводимых представлений симметрической группы при ограничении (индуцировании) на меньшую (большую) симметрическую группу хотя бы для S_n с $n \leq 5$.