Элементарные вычисления

Терминологические соглашения. Условимся называть *тавтологическим* n-мерное представление симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, при котором переставляются базисные векторы стандартного базиса. Тавтологическое представление является прямой суммой тривиального одномерного представления и $(n-1)$-мерного представления (несобственной) группой стандартного правильного $(n-1)$-мерного симплекса. Это последнее представление мы будем называть *стандартным* или *симплициальным*.

ЭВ◇1. Докажите, что симплициальное представление симметрической группы неприводимо и вычислите его характер.

ЭВ◇2. Вычислите скалярный квадрат (относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$) характера k-той внешней степени тавтологического представления симметрической группы. Указание: Выберем в $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ обычный базис $\{e_I\}$, занумерованный всевозможными k-элементными подмножествами

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad : \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k \quad .$$

Записывая действие перестановок матрицами в этом базисе, вычислим значение искомого характера χ на перестановке σ:

$$\chi(\sigma) = \sum_I \{\sigma\}_I \ , \quad \text{где} \quad \{\sigma\}_I = \begin{cases} \operatorname{sgn}\sigma|_I & , \text{ если } \sigma(I) \subset I \\ 0 & , \text{ если } \sigma(I) \subset I \end{cases} \quad .$$

Это значение следует подставить в явную формулу для скалярного произведения и аккуратно вычислить возникающую сумму. При этом полезно иметь в виду, что совокупность перестановок σ, для которых $\{\sigma\}_I\{\sigma\}_J \neq 0$ есть прямое произведение симметрических групп — независимых перестановок элементов в инвариантных подмножествах $I \cap J$, $I \setminus I \cap J$, $J \setminus I \cap J$ и $\{1, 2, \dots, n\} \setminus I \cup J$.

ЭВ◇3. Выведите из предыдущей задачи, что все внешние степени симплициального представления симметрической группы неприводимы (для этого разложите внешнюю степень тавтологического представления в сумму подходящих внешних степеней симплициального представления).

ЭВ◇4. Укажите явно такой ненулевой тензор $\tau \in V^{\otimes 3}$, для которого

$$\mathrm{Sym}_3(\tau) = \mathrm{Alt}_3(\tau) = 0 \ .$$

ЭВ◇5. Разложите на неприводимые все представления $\mathfrak{S}_4$, индуцированные со всевозможных неприводимых представлений $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$.

ЭВ◇6. Докажите, что в классе сопряжённости из $\mathfrak{S}_n$, состоящем из всех перестановок, разлагающихся в произведение независимых i_1 1-циклов, i_2 2-циклов, …, i_n n-циклов, имеется ровно

$$\frac{n!}{1^{i_1} \cdot i_1! \cdot 2^{i_2} \cdot i_2! \cdot \dots \cdot n^{i_n} \cdot i_n!}$$

элементов.

ЭВ◇7. Торговец газировкой коротает время манипулируя пятнадцатью пластмассовыми стаканчиками, сложенными перед ним вверх дном на прилавке в несколько стопок. А именно, он снимает верхний стаканчик из каждой стопки и составляет из них новую стопку. Как разложатся стаканчики после 1995 таких манипуляций? Что изменится, если манипулировать тринадцатью стаканчиками?

Симметризаторы Юнга.

Терминология и обозначения. Диаграмма Юнга веса n, все n клеток которой как-либо заполнены без пропусков и повторений числами $1, 2, \ldots, n$, называется *таблицей Юнга*.

Для произвольной таблицы Юнга мы будем рассматривать в симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ две подгруппы: $\mathfrak{R}$, — состоящую из всех перестановок, которые переводят в себя все подмножества номеров из строк диаграммы Юнга, и $\mathfrak{C}$, — переводящую в себя все столбцы.

Кроме того, с каждой таблицей Юнга, построенной по диаграмме Юнга λ, мы свяжем следующие три элемента групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$:

$$a_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{R}} \sigma \qquad\qquad b_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{C}} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\sigma$$

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda$$

В ситуции, когда явный вид диаграммы Юнга не существенен, мы будем опускать индекс λ у a, b и c.

Элемент c_λ называется *симметризатором Юнга*. Если рассмотреть представление симметической группы $\mathfrak{S}_n$ в тензорной степени $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей разложимых тензоров, то (левое) действие симметризатора Юнга на тензор будет состоять в альтернировании по всем сомножителям, номера которых находятся в столбцах диаграммы Юнга, и последующей симметризацией результата по сомножителям, номера которых лежат в строках. В частности, если диаграмма Юнга представляет собой одну строку или один столбец, то мы получим обычные симметризацию и альтернирование.

Левый идеал, порождённый c_λ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, мы будем обозначать через

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_\lambda \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\ .$$

Умножение элементов V_λ слева на перестановки $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ определяет линейное представление симметрической группы на пространстве V_λ. Мы будем называть это представление *представлением типа* λ. Такая процедура сооотнесения каждой диаграмме Юнга λ представления симметрической группы на пространстве V_λ называется *конструкцией Шура*.

СЮ$\diamond$1. Докажите, что конструкция Шура и в самом деле зависит только от диаграммы Юнга, а не от таблицы Юнга (в том смысле, что при выборе другого способа заполнения клеток диаграммы Юнга числами мы получим *изоморфное* представление V_λ).

СЮ$\diamond$2. Докажите, что одномерные тривиальное и знакопеременное представления симметрической группы получаются применением конструкции Шура к диаграммам

$$\underbrace{\square\square\cdots\square\square}_{n} \qquad\text{и}\qquad n\left\{\begin{array}{c}\square\\ \vdots\\ \square\end{array}\right.$$

соответственно.

СЮ$\diamond$3. (Элементарные свойства симметризаторов Юнга) Докажите, что

а) $\varrho a = a\varrho = a \qquad \forall\varrho\in\mathfrak{R}$;

б) $\operatorname{sgn}\zeta\zeta\cdot b = b\cdot\operatorname{sgn}\zeta\zeta = b \qquad \forall\zeta\in\mathfrak{C}$.

в) $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_\lambda = c_\lambda\cdot\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$;

г) $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot a_\lambda b_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot b_\lambda a_\lambda$;

д) V_λ является образом ограничения на подпространство $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot a_\lambda$ оператора умножения справа на b_λ;

е) V_λ является образом ограничения на подпространство $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot b_\lambda$ оператора умножения справа на a_λ;

СЮ◇4. (Конструкция Шура и индуцирование)

а) Зададимся некоей таблицей Юнга λ и рассмотрим в $\mathfrak{S}_n$ подгруппу

$$\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\mathfrak{S}_{\lambda_2}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_k}\ ,$$

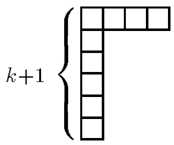
независимо переставлющую числа внутри строк диаграммы λ. Убедитесь, что представление $\mathfrak{S}_n$, индуцированное с тривиального одномерного представления этой подгруппы, изоморфно представлению $\mathfrak{S}_n$ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot a_\lambda$.

б) Дайте аналогичное описание для представления $\mathfrak{S}_n$ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot b_\lambda$.

СЮ◇5. Докажите, что при прменении конструкции Шура к сопряжённым диаграммам Юнга получатся представления, отличающиеся друг от друга тензорным умножением на одномерное знакопеременное представление.

СЮ◇6. Установите соответствие между представлениями Шура групп $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ и $\mathfrak{S}_5$ и неприводимыми представлениями этих групп, описанными геометрически в задачах из прошлой темы.

СЮ◇7. Докажите, что k-тая внешняя степень стандартного симплициального представления симметрической группы получается применением конструкции Шура к диаграмме-крюку



.

СЮ◇8. (Основная комбинаторная лемма)

а) Пусть таблица T' получается из таблицы T применением перестановки σ к заполняющим таблицу номерам (диаграмма Юнга у T и T' одна и та же). Докажите, что либо в некоей строке T можно указать пару чисел, располагающихся в одном столбце T', либо $\sigma=\varrho\zeta$ для неких $\varrho\in\mathfrak{R}$, $\zeta\in\mathfrak{C}$.

б) Выведите из предыдущего, что подмножество

$$\{s\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\mid \quad \varrho\cdot s\cdot\operatorname{sgn}\zeta\zeta=s\quad\forall\,\varrho\in\mathfrak{R}\quad\forall\,\zeta\in\mathfrak{C}\,\}$$

представляет собой *одномерное* подпространство в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порождённое симметризатором Юнга c.

СЮ◇9. Введём на множестве диаграмм Юнга лексикографический порядок при котором $\lambda>\mu$, если первая сверху из отличающихся по длине строк у диаграммы λ длинее. Докажите, что если $\lambda>\mu$, то $a_\lambda\cdot z\cdot b_\mu=0\quad\forall z\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

СЮ◇10. Докажите, что

а) $c_\lambda\cdot z\cdot c_\lambda=m_\lambda c_\lambda\qquad\forall z\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\ $, где $m_\lambda\in\mathbb{C}$ — некоторая константа, зависящая только от диаграммы Юнга λ;

б) $c_\lambda\cdot z\cdot c_\mu=0\qquad\forall z\in\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ всякий раз, когда $\lambda\neq\mu$.

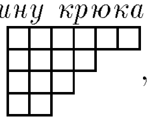
СЮ◇11. (Основная теорема о представлениях симметрических групп) Докажите, что представления Шура V_λ

а) неприводимы;

б) попарно-неизоморфны при разных λ;

в) составляют полный набор неприводимых представлений симметрической группы;

г) имеют размерности $\dim V_\lambda = n!/m_\lambda$, где m_λ — это константы из зад. **СЮ$\diamond$10а)**.

СЮ$\diamond$12*. Сопоставим каждой клетке диаграммы Юнга *длину крюка с вершиной в этой клетке*, т.е. число клеток в Г-образной поддиаграмме вида , состоящей из самой клетки и остатков строки и столбца, в которых она стоит, соответственно, вправо и вниз до границ диаграммы.

Докажите, что размерность неприводимого предсталения V_λ есть $n!$, делённое на произведение всех длин крюков.

Эта формула известна как *правило крюков* (*hook lengths rule*).

Детерминантальные тождества.

Стандартные симметрические полиномы. В этом параграфе мы будем рассматривать пространство однородных симметрических полиномов степени d от k переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$. Существует несколько естественных базисов этого пространства. Базисные векторы в большинстве базисов нумеруются *диаграммами Юнга* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ из d клеток и не более, чем k строк. (Т.е. *разбиениями* $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ на целые неотрицательные $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$).

Полные симметрические многочлены

$$H_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} H_{\lambda_1} \cdot H_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot H_{\lambda_k} ,$$

где H_m при целых $m \geqslant 0$ есть сумма всех различных мономов степени m от $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Мономиальные симметрические функции

$$M_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \cdots x_{\sigma(k)}^{\lambda_k} .$$

Полиномы Шура

$$S_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\det\left(x_j^{\lambda_i + k - i}\right)}{\Delta} ,$$

где $\Delta = \det(x_j^{k-i}) = \prod\limits_{i<j} (x_i - x_j)$ — определитель Ван дер Монда (или *дискриминант*). Определитель, стоящий в числителе отличается от определителя Ван дер Монда тем, что показатели в i-той строке увеличены на λ_i — длину i-той строки диаграммы λ.

Элементарные симметрические полиномы (в отличие от всех предыдущих) нумеруется диаграммами μ, у которых не количество строк, а ширина $\ell(\mu) = \mu_1$ (равная количеству строк в *сопряжённой* диаграмме $\lambda = \mu'$) не превосходит числа переменных k. По определению,

$$E_\mu \stackrel{\text{def}}{=} E_{\mu_1} \cdot E_{\mu_2} \cdot \dots \cdot E_{\mu_{\ell(\mu')}} ,$$

где при целых $m \geqslant 0$

$$E_m = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_m \leqslant k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$$

есть m-тая элементарная симметрическая функция (сумма всех *полилинейных* мономов степени m от $x_1, x_2, \ldots, x_k$). Обратите внимание, что $E_m = 0$ при $m > k$.

Полиномы Ньютона или произведения *степенных сумм* нумеруются произвольными последовательностями $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$ неотрицательных целых чисел с условием $\sum\limits_{\alpha} \alpha i_\alpha = d$

$$P^{\mathbf{i}} \stackrel{\text{def}}{=} P_1^{i_1} \cdot P_2^{i_2} \cdot \cdots \cdot P_d^{i_d} \,,$$

где $P_m = \sum\limits_i x_i^m$ при целых $m \geqslant 1$.

В заключение условимся об обозначениях. Если семейство полиномов $\{X_\lambda\}$ нумеруется диаграммами Юнга, то запись $X_{(4,3,1)}$ означает полином, соответствующий диаграмме $\lambda = \ydiagram{4,3,1}$. Запись X_m с $m \in \mathbb{Z}$ отвечает диаграмме $\underbrace{\ydiagram{2}\cdots\ydiagram{2}}_{m}$ (или соответствующему мультииндексу).

ДТ$\diamond$1. Напишите явные выражения для полиномов M_λ, H_λ и S_λ, отвечающих всевозможным двуклеточным и трёхклеточным λ.

ДТ$\diamond$2. При помощи явного вычисления проверьте тождества:

а) $S_{(1,1)} = E_{(2.0)} = H_1^2 - H_2$;

б) $S_{(2,0)} = H_{(2,0)} = E_1^2 - E_2$;

в) $S_{(1,0)} \cdot S_{(1,0)} = S_{(1,1)} + S_{(2,0)}$.

ДТ$\diamond$3. (Основная теорема об элементарных симметрических функциях)

а) Убедитесь, что мономиальные симметрические функции составляют целочисленный базис в $\mathbb{Z}$-модуле всех симметрических полиномов с целыми коэффициентами.

б) Убедитесь, что при подходящем (лексикографическом) упорядочении диаграмм Юнга семейство полиномов E_μ будет выражаться через семейство полиномов M_λ при помощи верхнетреугольной матрицы с единицами по главной диагонали.

в) Выведите из предыдущего, что полиномы E_λ составляют целочисленный базис в $\mathbb{Z}$-модуле всех симметрических полиномов с целыми коэффициентами.

ДТ$\diamond$4. (Производящие функции)

а) Убедитесь, что последовательность полиномов H_m можно задать формальной производящей функцией

$$\mathcal{H}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m \geqslant 0} H_m(x) \cdot z^m = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x_i \cdot z} \,.$$

б) Убедитесь, что последовательность полиномов E_m можно задать формальной производящей функцией

$$\mathcal{E}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m \geqslant 0} E_m(x) \cdot z^m = \prod_{i=1}^{k} (1 + x_i \cdot z) = \frac{1}{\mathcal{H}(-z)} \,.$$

в) Убедитесь, что последовательность полиномов P_m можно задать формальной производящей функцией

$$\mathcal{P}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m \geqslant 1} P_m(x) \cdot z^{m-1} = \frac{d}{dz} \log \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x_i \cdot z} = \frac{\mathcal{H}'(z)}{\mathcal{H}(z)} \,.$$

ДТ⋄5. (Реккурентные соотношения) Пользуясь производящими функциями докажите тождества:

а) $H_m - E_1 H_{m-1} + E_2 H_{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1} E_{m-1} H_1 + (-1)^m E_m = 0$;

б) $mH_m = \sum\limits_{i=1}^{m} P_i H_{m-i}$;

в) (*формулы Ньютона*) $mE_m = \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} P_i E_{m-i}$;

г) $x_i^m - E_1 \cdot x_i^{m-1} + E_2 \cdot x_i^{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1} E_{m-1} \cdot x_i^1 + (-1)^m E_m = 0 \qquad \forall\, i, m.$

ДТ⋄6. Выведите из зад. **ДТ⋄5**, что полные симметрические многочлены составляют $\mathbb{Z}$-базис в модуле симметрических многочленов с целыми коэффициентами, а степенные суммы $P^{\mathbf{i}}$ вместе с 1 составляют $\mathbb{Q}$-базис пространства симметрических многочленов с рациональными коэффициентами.

ДТ⋄7. (Матричные соотношения) Для произвольного натурального m рассмотрим следующие две верхних унитреугольных $(m+1)\times(m+1)$-матрицы, по надглавным диагоналям которых стоят, соответственно, полные и элементарные симметрические функции:

$$\mathbf{H}_m \overset{\text{def}}{=} \Big(H_{j-i} \Big) = \begin{pmatrix} 1 & H_1 & H_2 & \cdots & H_m \\ & 1 & H_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & H_2 \\ & 0 & & \ddots & H_1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_m \overset{\text{def}}{=} \Big((-1)^{j-i} E_{j-i} \Big) = \begin{pmatrix} 1 & -E_1 & E_2 & \cdots & (-1)^m E_m \\ & 1 & -E_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & E_2 \\ & 0 & & \ddots & -E_1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

а) Докажите, что эти матрицы обратны друг другу.

б) Докажите, что для любого натурального $N \geqslant m$ при $m \geqslant k$ имеем

$$\begin{pmatrix} H_N \\ H_{N-1} \\ \vdots \\ H_{N-m+1} \\ H_{N-m} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_m^{N-m} \begin{pmatrix} H_m \\ H_{m-1} \\ \vdots \\ H_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в) Докажите, что для любого натурального $N \geqslant m$ при $m \geqslant k$ имеем

$$\begin{pmatrix} x_j^N \\ x_j^{N-1} \\ \vdots \\ x_j^{N-m+1} \\ x_j^{N-m} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_m^{N-m} \begin{pmatrix} x_j^m \\ x_j^{m-1} \\ \vdots \\ x_j^1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ДТ⋄8. (Формулы Джамбелли) Пусть λ — диаграмма Юнга из (не более чем) k строк. Выведите из предыдущей задачи следующие тождества между $k\times k$ матрицами, элементы которых нумеруются индексами $i, j, \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

а) $\left(x_j^{\lambda_i+k-i}\right) = \left(H_{\lambda_i+\alpha-i}\right)\cdot\left((-1)^{\beta-\alpha}E_{\beta-\alpha}\right)\cdot\left(x_j^{k-\beta}\right)$;

б) (*первая формула Джамбелли* или *тождество Якоби-Труди*)

$$S_\lambda = \det\left(H_{\lambda_i+j-i}\right)$$

(матрица в правой части устроена так, что по главной диагонали стоят $H_{\lambda 1}, H_{\lambda 2}, \dots, H_{\lambda k}$ и индексы убывают сверху вниз по столбцам на 1 за шаг точно так же, как показатели в определителе Ван дер Монда);

в) (*вторая формула Джамбелли*)

$$S_\lambda = \det\left(E_{\mu_i+j-i}\right) ,$$

где $\mu = \lambda'$ — сопряжённая диаграмма Юнга.

Указание: Вторая формула Джамбелли следует из первой и фундаментального детерминантального тождества

$$\det\left(H_{\lambda_i+j-i}\right) = \det\left(E_{\mu_i+j-i}\right) ,$$

которое, в свою очередь легко следует из матричного соотношения зад. **ДТ⋄7а)** и формул Лапласа: в матрице с определителем 1 всякий минор равен взятому с надлежащим знаком дополнительному минору в матрице, транспонированной к обратной.

ДТ⋄9. Докажите, что при целых $m \geqslant 0$ $S_m = H_m$.

Обозначения. Сопоставим каждой диаграмме Юнга $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k \geqslant 0)$ строго убывающую последовательность неотрицательных целых чисел $l = (l_1 > l_2 > \dots > l_k \geqslant 0)$, в которой $l_i = \lambda_i + k - i$. Иначе говоря, мы подклеиваем строки диаграммы Юнга λ по левому краю не к вертикальной линии, а к правильной треугольной диаграмме $\delta = (k-1, k-2, \dots, 1, 0)$. Если диаграмма λ варьируется по множеству всех d-клеточных диаграмм из $\leqslant k$ строк, соответствующая последовательность l пробежит в точности множество всех упорядоченных по убыванию k-элементных подмножеств в $\{(d+k-1), (d+k-2), \dots, 2, 1, 0\}$ (напомню, что такие подмножества нумеруют стандартный базис в $\Lambda^k(\mathbb{C}^{k+d})$).

ДТ⋄10. (Тождество Коши) Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ и $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ — два набора независимых переменных. Докажите тождества:

а) (*тождество Коши*) $\det\left(\dfrac{1}{1-x_iy_j}\right) = \dfrac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod\limits_{i,j}(1-x_iy_j)}$;

б) $\det\left(\dfrac{1}{1-x_iy_j}\right) = \sum\limits_{l_1>l_2>\dots>l_{k-1}>l_k} \det\left(x_j^{l_i}\right)\det\left(y_j^{l_i}\right)$;

в) $\det\left(\dfrac{1}{1-x_iy_j}\right) = \sum\limits_{\lambda} S_\lambda(x)S_\lambda(y)$, где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга из $\leqslant k$ строк.

Указание: Определитель в левой части тождества Коши вычисляется по индукции: надо вычесть первую строку из всех прочих и вынести общие множители, а затем проделать то же с первым столбцом. Для доказательства второго равенства надо в этом определителе разложить геометрические прогрессии в ряды и раскрыть определитель в лоб. Третье равенство банально следует из первых двух и определения S-функций.

ДТ⋄11. (Правило Пьери)

а) Докажите, что

$$\det\left(x_j^{l_i}\right)\cdot\prod_{j=1}^{k}(1-x_j)^{-1}=\sum_{\mathbf{m}}\det\left(x_j^{m_i}\right)\,,$$

где суммирование происходит по всем наборам $\mathbf{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_k)$, у которых $m_1\geqslant l_1>m_2\geqslant l_2>\cdots>m_k\geqslant l_k$.

б) Докажите, что при умножении полинома Шура S_λ на "образующий" полином Шура $S_m=H_m$ (соответствующий диаграмме-строке) получится в точности сумма всех (взятых с коэффициентом 1) полиномов S_ν, диаграмма ν которых получается дописыванием m клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две из новых клеток не попадали в один столбец (и разумеется, так чтобы ν была диаграммой Юнга). Иначе говоря,

$$S_\lambda\cdot S_m=\sum_{\substack{\nu:\\ |\nu|=m+|\lambda|\\ \nu_1\geqslant\lambda_1\geqslant\nu_2\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\nu_k\geqslant\lambda_k\geqslant0}}S_\nu\,.$$

ДТ⋄12. (Скалярное произведение симметрических функций) Убедитесь, что на модуле симметрических многочленов с целыми коэффициентами[1] существует единственная невырожденная (целочисленная) билинейная форма $\langle *,*\rangle$ относительно которой

$$\langle H_\lambda,M_\mu\rangle=\delta_\mu^\lambda\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}0\quad,\quad\text{при}\quad\lambda\neq\mu\\ 1\quad,\quad\text{при}\quad\lambda=\mu\end{cases}.$$

Докажите, что полиномы Шура составляют ортонормированную систему для этой билинейной формы. (Из этого следует, что форма симметрична и что полиномы Шура составляют ортонормированный *целочисленный базис* в модуле симметрических многочленов.)

Указание: Воспользуйтесь следствиями тождества Коши и соотношением:

$$\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}=\prod_j\left(\sum_{m\geqslant0}H_m(x)y_j^m\right)\,.$$

Определение. Коэффициенты разложения $S_\mu=\sum\limits_\lambda K_{\mu\lambda}M_\lambda$ называются *числами Костки*. Иначе говоря, $K_{\mu\lambda}$ — это коэффициент при $x^\lambda\stackrel{\text{def}}{=}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_k^{\lambda_k}$ у многочлена S_μ.

ДТ⋄13. Убедитесь, что $H_\lambda=\sum\limits_\mu K_{\mu\lambda}S_\mu$ и докажите, что $K_{\mu\lambda}\neq0$ тогда и только тогда, когда при всех $i\geqslant1$

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i\leqslant\mu_1+\mu_1+\cdots+\mu_i\,.$$

ДТ⋄14. (Правило Пьери для вычисления чисел Костки) Индуктивно применяя правило Пьери из зад. **ДТ⋄11** для разложения произведения $H_\lambda=S_{\lambda_1}S_{\lambda_2}\cdots S_{\lambda_k}$ в сумму полиномов Шура, докажите, что число Костки $K_{\mu\lambda}$ рано количеству способов, которыми в клетки

[1] Если вас покоробило от этой фразы, замените слово модуль на векторное пространство, а целые коэффициенты — на рациональные (или комплексные).

диаграммы μ можно записать λ_1 единиц, λ_2 двоек, …, λ_k k-ек так, чтобы эти числа неубывали по строкам и строго возрастали по столбцам (то, что при этом получается иногда называют полустандартной[2] таблицей типа λ в диаграмме μ).

Обозначение. Для всякого симметрического полинома X определим *характеристические числа* $\theta_\lambda(X)$ и $\omega_\lambda(X)$ как коэффициенты разложения X по базисам $\{M_\lambda\}$ и $\{S_\lambda\}$ соответственно:

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\lambda \theta_\lambda(X) M_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\lambda \omega_\lambda(X) S_\lambda \, .$$

В частности, числа Костки суть

$$K_{\mu\lambda} = \theta_\lambda(S_\mu) = \omega_\mu(H_\lambda) \, .$$

ДТ⋄15. Докажите, что:

а) $\theta_\lambda(X)$ есть коэффициент при x^λ у $X(x)$;

б) $\omega_\lambda(X)$ есть коэффициент при x^l у $\Delta(x)\cdot X(x)$, где как и ранее $l = \{l_i\}$ с $l_i = \lambda_i + k - i$, а Δ — определитель Ван дер Монда;

в) $\theta_\lambda(X) = \sum\limits_\mu K_{\mu\lambda}\omega_\mu(X) \qquad \forall X$.

ДТ⋄16. (Ортогональность Ньютоновских полиномов) Для произвольной последовательности $\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$ неотрицательных целых чисел с условием $\sum\limits_\alpha \alpha i_\alpha = d$ обозначим чепез $z(\mathbf{i})$ произведение

$$z(\mathbf{i}) \stackrel{\text{def}}{=} 1^{i_1}\cdot i_1! \cdot 2^{i_2} \cdot i_2! \cdot \cdots \cdot d^{i_d} \cdot i_d!$$

(оно уже встречалось нам в зад. **ЭВ⋄6** при подсчёте количества элементов в соответствующем классе сопряжённости из $\mathfrak{S}_d$). Докажите тождества

а)

$$\sum_{\mathbf{i}} \frac{1}{z(\mathbf{i})} \omega_\lambda(P^{\mathbf{i}})\omega_\mu(P^{\mathbf{i}}) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad \lambda = \mu \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \lambda \neq \mu \end{cases} \, .$$

б) Докажите, что Ньютоновские полиномы $P^{\mathbf{i}}$ составляют ортогональную систему относительно скалярного произведения из зад. **ДТ⋄12** и имеют скалярные квадраты

$$\langle P^{\mathbf{i}}, P^{\mathbf{i}} \rangle = z(\mathbf{i}) \, .$$

в) Докажите, что $\omega_\lambda(P^{\mathbf{i}}) = \sum\limits_\mu \langle S_\lambda, M_i\rangle \cdot \langle H_\mu, P^{\mathbf{i}}\rangle$.

Указание: Ключевым является первое тождество. Для его доказательства надо взять экспоненту от обеих частей соотношения

$$\log\left(\prod_{ij}(1 - x_i y_j)^{-1}\right) = \sum_{m\geqslant 1} P_m(x) P_m(y)$$

и воспользоваться формулой Коши.

Характеры симметрической группы.

[2] Стандартной таблицей называется таблица Юнга. в которой все числа строго возрастают и по строкам и по столбцам.

Обозначения. Будем нумеровать классы сопряжённых элементов в $\mathfrak{S}_n$ последовательностями $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ как в зад. **ЭВ◇6** и обозначать их через $C_{\mathbf{i}} \subset \mathfrak{S}_n$.

Напомню, что для произвольной диаграммы Юнга λ из n клеток и k строк через V_λ мы обозначаем Шурово неприводимое представление типа λ в пространстве $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\lambda$, а через U_λ — представление $\mathfrak{S}_n$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot a_\lambda$ (это представление индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k} \subset \mathfrak{S}_n$, см. зад. **СЮ◇4**).

Хар◇1. Докажите, что V_λ входит в разложение U_λ.

Хар◇2. Докажите, что характеристические числа $\{\omega_\lambda\}$, рассматриваемые как функции классов на $\mathfrak{S}_n$, заданные формулой

$$\omega_\lambda : \quad C_{\mathbf{i}} \longmapsto \omega_\lambda(P^{\mathbf{i}}) ,$$

составляют ортонормированный целочисленный базис в пространстве целозначных функций на множестве классов сопряжённости в $\mathfrak{S}_n$ (относительно стандартной эрмитовой структуры на групповой алгебре).

Указание: См. зад. **ДТ◇16в**).

Хар◇3. (Ключевое вычисление) Обозначим через ψ_λ характер представления U_λ,

а) Пользуясь зад. **СЮ◇4** и формулой для характера индуцированного представления (из темы 2) докажите, что

$$\psi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) = \sum_{r_{\alpha\beta}} \prod_{\beta=1}^{n} \frac{i_\beta!}{r_{1\beta}! r_{2\beta}! \cdots r_{n\beta}!} ,$$

где суммирование ведётся по всем прямоугольным матрицам $(r_{\alpha\beta})$ размера $1 \leqslant \alpha \leqslant k$, $1 \leqslant \beta \leqslant n$, составленным из неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha} r_{\alpha\beta} & = & i_\beta \\ \sum\limits_{\beta} \beta \cdot r_{\alpha\beta} & = & \lambda_\alpha \end{cases} .$$

б) Убедитесь, что $\psi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) = \theta(P^{\mathbf{i}})$ — равен коэффициенту при x^λ у $P_1^{i_1} \cdots P_n^{i_n}$.

в) Докажите, что

$$\psi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) = \omega_\lambda(P^{\mathbf{i}}) + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \omega_\mu(P^{\mathbf{i}}) .$$

Комментарий к основному вычислению. На данный момент мы выяснили, что:

— неприводимые характеры симметрической группы $\{\chi_\lambda\}$ и характеристические функции $\{\omega_\lambda\}$ составляют два ортонормированных целочисленных базиса в модуле целозначных функции на множестве классов сопряжённости в $\mathfrak{S}_n$;

— имеется серия характеров ψ_λ связанная с ω_λ верхнетреугольной матрицей перехода с единицами по главной диагонали (зад. **Хар◇3в)**);

— χ_λ входит в разложение ψ_λ с натуральным (положительным) коэффициентом.

Требуется совсем небольшое (почти формальное) усилие для того, чтобы получить из этого окончательные результаты:

Хар◇4. (Формула Фробениуса для характера) Докажите (используя лексикографически-убывающую индукцию по λ), что значение характера χ_λ неприводимого представления V_λ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ на классе $C_{\mathbf{i}}$ вычисляется по правилу

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) &= \omega_\lambda(P^{\mathbf{i}}) = \\ &= \text{коэффициенту при } x^l \text{ у } \Delta \cdot P^{\mathbf{i}} , \end{aligned}$$

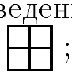
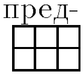
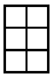
где $l = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$ с $l_\alpha = \lambda_\alpha + k - \alpha$.

Хар◇5. (Правило Юнга) Докажите, что кратность вхождения неприводимого представления V_μ в индуцированное представление U_λ совпадает с числом Костки $K_{\mu\lambda}$.

Хар◇6*. Вычислив значение характера на единице группы, докажите формулу Фробениуса для размерности неприводимого представления:

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{l_1! \cdots l_k!} \prod_{i<j} (l_i - l_j) \ .$$

Хар◇7*. Выведите из предыдущей задачи правило крюков.

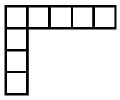
Хар◇8. Докажите, что размерность неприводимого представления $\mathfrak{S}_n$ бывает меньше n лишь в следующих случаях: у тривиального, знакопеременного, стандартного представлений и тензорного произведения стандартного и знакопеременного; 2-мерного представления $\mathfrak{S}_4$ с диаграммой  ; двух 5-мерных представлений $\mathfrak{S}_6$ с диаграммами  и  .

Хар◇9. Вычислите $\chi_\lambda(C_\mathbf{i})$ для

а) $\lambda = (n-1, 1)$;

б) $\lambda = (n-2, 1, 1)$;

в) $\lambda = (n-2, 2)$.

Хар◇10. Докажите, что значение неприводимого характера χ_λ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ на цикле τ максимальной длины n отлично от нуля только если λ — это крюк, и если $\lambda = {}_{(s+1)}\left\{\right.$  , то $\chi_\lambda(\tau) = (-1)^s$

Хар◇11. Докажите, что что имеет место разложение

$$U_{(n-m,m)} = \bigoplus_{\alpha=0}^{m} V_{n-\alpha,\alpha} \ .$$

Хар◇12*. Выясните, как раскладывается на неприводимые тензорный и симметрический квадраты стандартного симплициального представления $\mathfrak{S}_n$.

Хар◇13. (Правило Пьери для разложения индуцированного представления) Пусть $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+m}$ — подгруппа, переставляющая первые n номеров (как обычно). Через λ мы обозначаем далее n-клеточную, а через ν — $(n+m)$-клеточную диаграммы Юнга.

а) Докажите, что V_ν входит в разложение $\mathrm{Ind}(V_\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lambda \subset \nu$, причём кратность вхождения равна количеству способов заполнить клетки дополнения $\nu \backslash \lambda$ числами $1, 2, \ldots, m$ так, чтобы они строго возрастали и по строкам и по столбцам.

б) Докажите, что V_λ входит в разложение $\mathrm{Res}(V_\mu)$ тогда и только тогда, когда $\lambda \subset \nu$, причём кратность вхождения равна количеству способов заполнить клетки дополнения $\nu \backslash \lambda$ числами $1, 2, \ldots, m$ так, чтобы они строго возрастали и по строкам и по столбцам.

в) Выведите из предыдущего, что размерность неприводимого представления V_λ рана числу стандартных таблиц Юнга в диаграмме λ (напомню, что стандартная таблица — это такая, в которой числа строго возрастают по строкам и столбцам).

Заключительные замечания. Эта тема — *сложнейший* раздел современной математики, несмотря на то, что её справедливо будет отнести к комбинаторике, которую многие (несправедливо) считают "элементарной" и "школьной". Мало есть на Земле людей, которые могут объяснить, почему количество стандартных таблиц Юнга можно вычислять по правилу крюков (это следует из последней задачи) и надо быть совсем уж выдающимся "олимпиадчиком", чтобы решить эту "олимпиадную"задачку по-школьному.

Не огорчайтесь, если значительная часть задач оказалась Вам не по силам. Систематическое изложение этого предмета можно найти в книге:
И.Макдональд. *Симетрические функции и многочлены Холла* (М.,"Мир", 1985).