Действие группы: орбиты, инварианты и стабилизаторы.

Терминология. Говорят, что группа $\mathfrak{G}$ *действует* на множестве M и пишут $\mathfrak{G}\colon M$, если задано отображение

$$\varrho : \mathfrak{G} \times M \longrightarrow M \quad : \ (g, m) \longmapsto g(m)$$

удовлетворяющее тождеству $g(h(m)) = gh(m) \quad \forall g, h \in \mathfrak{G} \quad \forall m \in M$ (т.е. являющееся гомоморфизмом из $\mathfrak{G}$ в группу $\mathrm{Aut}(M)$ взаимно-однозначных отображений M в себя). Если $M = V$ — векторное пространство и $\operatorname{im}\varrho \subset \mathrm{GL}(V)$, то действие называется *линейным представылением* группы $\mathfrak{G}$ в пространстве V, а само пространство V называется $\mathfrak{G}$-*модулем.*

Если $\mu : \ \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ и $\nu : \ \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ — два действия (сооотв. линейных представления), то отображение (соотв. линейный оператор) $F : \ M \longrightarrow N$ называется $\mathfrak{G}$-*эквивариантным* (или *сплетающим оператором*, или $\mathfrak{G}$-*гоморфизмом*), если оно перестановочно с действием $\mathfrak{G}$, т.е. для любых $g \in \mathfrak{G}$ и $m \in M$ выполнено тождество $\nu(g)Fm = F\mu(g)m$. Совокупность всех $\mathfrak{G}$-отображений (соотв. линейных операторов) обозначается $\hom_{\mathfrak{G}}(M, N)$.

Множество всех тех элементов M, которые можно получить применяя всевозможные преобразования из $\mathfrak{G}$ к данному фиксированному элементу $m \in M$ называется *орбитой* этого элемента и обозначается O_m или $\mathfrak{G}m$. Действие называется *транзитивным*, если каждый элемент из M можно перевести в любой другой элемент из M подходящим преобразованием из $\mathfrak{G}$ (т.е. когда все орбиты равны M).

Совокупность всех преобразований из $\mathfrak{G}$, переводящих в себя некое подмножество $\Phi \subset M$ называется *нормализатором* этого подмножества и обозначается N_Φ. Если $N_\Phi = \mathfrak{G}$, то подмножество Φ называется $\mathfrak{G}$-*инвариантным.*

Линейное представление $\varrho : \ \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ называется *неприводимым*, если в V нет инвариантных *подпространств* кроме нулевого и самого V. В противном случае представление называется *приводимым.* Аналогичным образом, представление называется *разложимым* или *неразложимым*, смотря по тому, разлагается ли V в прямую сумму двух собственных $\mathfrak{G}$-*инвариантных* подпространств.

Совокупность всех преобразований из $\mathfrak{G}$, оставляющих на месте каждый элемент из некоторого подмножества $\Phi \subset M$ называется *цетрализатором* этого подмножества и обозначается C_Φ. Если $\Phi = \{m\}$ состоит из одного элемента, то централизатор совпадает с нормализатором и называется в этом случае *стабилизатором* элемента m. Если стабилизаторы всех элементов тривиальны (т.е.состоят из одной единицы группы $\mathfrak{G}$), то действие называется *свободным.*

Нормальная подгруппа $\ker\varrho = \bigcap\limits_{m\in M} C_m \subset \mathfrak{G}$ называется *ядром* действия ϱ. Действие с тривиальным ядром называется *эффективным.*

Соглашения об обозначениях. Всюду далее группа $\mathfrak{G}$ будет предполагаться *конечной*, а основное поле k — полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (если специально не оговорено противное). Количество элементов в конечном множестве I будет обозначаться $|I|$ или $\#I$.

Необходимые сведения о характерах и тензорных операциях над представлениями можно найти ниже в п.п. зад. **КП$\diamond$6** и зад. **ГМ$\diamond$24**.

ДГ$\diamond$1. Докажите, что C_Φ всегда является нормальной подгруппой в N_Φ и фактор N_Φ/C_Φ естественно действует на Φ.

ДГ⋄2. Убедитесь, что множество, на котором действует группа, представляет собой объединение попарно-непересекающихся орбит. Докажите, что стабилизаторы всех элементов одной орбиты сопряжены и выведите *формулу для длины орбиты*

$$|\mathfrak{G}m| = \frac{|\mathfrak{G}|}{|C_m|}\,.$$

ДГ⋄3. Докажите, что в линейном представлении конечной группы все элементы группы представляются диагонализуемыми операторами.

ДГ⋄4. (Присоединённое действие.) Проверьте, что отображение

$$\mathrm{Ad}:\ \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})\,,$$

сопоставляющее всякому $g\in\mathfrak{G}$ *внутрений автоморфизм*

$$\mathrm{Ad}(g):\ h \mapsto ghg^{-1}\,,$$

является действием группы на себе. Оно называется *присоединённым действием*, а его орбиты называются *классами сопряжённых элементов*. Кроме того:

а) докажите, что внутраенние автоморфизмы составляют нормальную подгруппу в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$;

б) докажите, что число подгрупп, сопряженных данной подгруппе равно индексу её нормализатора;

в) докажите, что подгруппа, индекс которой равен наименьшему простому числу, делящему порядок группы, всегда нормальна.

ДГ⋄5. Докажите, что классы сопряжённнных элементов симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ взаимно-однозначно соответствуют диаграммам Юнга из n клеток. Перечислите все эти классы с указанием числа элементов в них для всех групп $\mathfrak{S}_n$ с $n \leqslant 6$.

ДГ⋄6. Перечислите классы сопряжённых элементов с указанием числа элементов в каждом классе для всех знакопеременных групп $\mathfrak{A}_n$ с $n \leqslant 6$.

ДГ⋄7. Используя результаты предыдущей задачи, докажите, что

а) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_5)/\mathrm{Ad}(\mathfrak{A}_5) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и явно укажите автоморфизм $\mathfrak{A}_5$, не являющийся внутренним;

б) докажите, что группа $\mathfrak{A}_5$ проста (т.е. не содержит нетривиальных нормальных подгрупп).

ДГ⋄8. (Инвариантный проектор) Пусть U — инвариантное подпространство в линейном представлении $\varrho:\ \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ конечной группы $\mathfrak{G}$. Постройте $\mathfrak{G}$-эквивариантный проектор V на U и докажите, что всякое приводимое представление конечной группы разложимо.

Указание: Воспользуйтесь "усреднением по группе" произвольного проектора.

ДГ⋄9. Постройте приводимое неразложимое представление аддитивной группы $\mathbb{Z}$.

Указание: Задать представление бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ — это то же самое, что фиксировать в пространстве действие некоего линейного оператора.

ДГ⋄10. (Лемма Шура)

а) Докажите, что всякий $\mathfrak{G}$-эквивариантный эндоморфизм неприводимого комплексного представления произвольной группы является гомотетией.

б) Докажите, что всякий ненулевой $\mathfrak{G}$-эквивариантный оператор, действующий из одного неприводимого представления в другое неприводимое представление, является изоморфизмом этих представлений (причём это верно для любых групп над любым полем).

ДГ◇11. (Каноническая Эрмитова структура)

а) Пусть $\varrho : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ комплексное конечномерное представление конечной группы $\mathfrak{G}$. Докажите, что на пространстве V имеется $\mathfrak{G}$-инвариантная эрмитова форма $\langle *, * \rangle$ ($\mathfrak{G}$-инвариантность означает, что $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall\, v, w \in V$ и $\forall g \in \mathfrak{G}$).

б) Докажите, что если представление в предыдущем пункте является неприводимым, то инвариантная эрмитова структура на V единственна с точностью до пропорциональности.

Групповая алгебра конечной группы. *Групповая алгебра* $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ конечной группы $\mathfrak{G}$ — это векторное пространство с фиксированным базисом, векторы которого взаимно-однозначно соответствуют элементам группы. Умножение на базисных векторах определяется как умножение на группе и продолжается по линейности на всю групповую алгебру.

Два других способа воспринимать групповую алгебру:
– $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ — это формальные линейные комбинации элементов группы, складываемые и перемножаемые по стандартным правилам раскрытия скобок (но с учётом того, что умножение элементов группы не коммутативно, если группа не коммутативна);
– $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ — это пространство $\mathbb{C}$-значных функций на группе $\mathfrak{G}$ (связь с предыдущим устанавливается так: функции $f : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ сопоставляется линейная комбинация $\sum\limits_{g \in \mathfrak{G}} f(g) \cdot g$).

ДГ◇12. Опишите умножение в групповой алгебре на языке $\mathbb{C}$-значных функций на группе. (Разумеется, оно не совпадает с коммутативным поточечным умножением значений функций и потому называется *свёрткой функций на группе*).

ДГ◇13. Докажите, что центр групповой алгебры состоит из функций, постоянных на классах сопряжённых элементов.

ДГ◇14. (Регулярноые представления) *Левым и правым регулярными представлениями* группы $\mathfrak{G}$ называются представления $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$, в которых каждый элемент $g \in \mathfrak{G}$ преводит базисный вектор, отвечающий $h \in \mathfrak{G}$, в базисные векторы, отвечающие элементам gh и hg^{-1} соответственно. Убедитесь, что таким способом действительно задано *действие*.

а) Докажите, что левое и правое регулярные представления $\mathfrak{G}$-изоморфны.

б) Опишите регулярные представления в терминах $\mathbb{C}$-значных функций на $\mathfrak{G}$.

в) Вычислите характеры регулярных представлений.

г) Убедитесь, что эрмитова форма на $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$, относительно которой стандартный базис из элементов группы является ортонормальным, будет $\mathfrak{G}$-инвариантным, и опишите как вычислять скалярное произведение в терминах $\mathbb{C}$-значных функций на $\mathfrak{G}$.

Группы многогранников.

Терминология. Пусть Φ — какое-либо подмножество в евклидовом векторном пространстве E. Нормализатор Φ в группе всех ортогональных линейных операторов $\mathrm{O}(E)$ называется *группой фигуры* Φ, а нормализатор Φ в специальной ортогональной группе $\mathrm{SO}(E)$ называется *собственной группой фигуры* Φ.

Аффинные фигуры, о которых будет идти речь ниже, предполагаются лежащими в аффинизации $\mathrm{Aff}(E)$ так, что их центр симметрии находится в нуле.

По поводу определения и свойств *характеров* см. раздел зад. **КП◇6**.

ГМ◇1. Докажите, что группа правильного треугольника на плоскости изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_3$. Является ли это 2-мерное представление $\mathfrak{S}_3$ неприводимым?

ГМ◇2. Докажите, что группы из предыдущей задачи могут быть описаны как группы

а) порождённые двумя элементами σ и τ с соотношениями $\sigma^2 = \tau^3 = 1$ и $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$;

б) порождённые двумя элементами σ_1 и σ_2 с соотношениями

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1 \qquad \text{и} \qquad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \ .$$

ГМ◇3. (Представления $\mathfrak{S}_3$)

а) Для произвольного линейного представления группы треугольника вычислите возможные собственные значения входящих в эту группу операторов.

б) Выясните, как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпрстранствах оператора, представляющего поворот.

в) Докажите, что группа треугольника имеет ровно три неприводимых представления: два 1-мерных и одно 2-мерное.

г) Разложите (левое) регулярное представление группы треугольника в прямую сумму неприводимых.

ГМ◇4. Разместим правильный треугольник на комплексной плоскости так, чтобы его центр находился в 0, а одна из вершин — в 1. Рассмотрим единичную сферу, диметральным сечением которой является описанная вокруг нашего треугольника окружность. Группу треугольника можно реализовать вращениями этой сферы, и если на сфере ввести структуру комплексной прективной прямой $\mathbb{CP}_1$ (при помощи стереографической проекции из северного полюса), то возникнет действие группы треугольника на $\mathbb{CP}_1$ дробно-линейными заменами координаты z (например, симметрии относительно оси OX будет соответствовать замена переменной $z \mapsto 1/z$).

а) Напишите явные формулы для всех шести возникающих таким образом дробно-линейных подстановок.

б) Постройте непостоянную функцию, инвариантную относительно этих подстановок.

в) Опишите группу дробно-линейных замен вещественной переменной t, порождённую подстановками $t \mapsto 1/t$ и $t \mapsto (1-t)$.

ГМ◇5*. В условиях последнего пункта предыдущей задачи опишите все рациональные функции, инвариантные относительно действия группы треугольника.

ГМ◇6. Задайте образующими и соотношениями группу правильного n-угольника на плоскости (эта группа называется *группой диэдра* и обозначается D_n). Указание: Обобщите зад. **ГМ◇2а)**.

ГМ◇7. Опишите все неприводимые представления группы диэдра и вычислите их характеры.

ГМ◇8*. Задайте образующими и соотношениями симметрическую группу $\mathfrak{S}_n$. Указание: Обобщите зад. **ГМ◇2б)**.

ГМ◇9. (Трёхмерные представления $\mathfrak{S}_4$)

а) Докажите, что собственная группа куба в трёхмерном пространстве изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_4$.

б) Докажите, что собственная группа октаэдра в трёхмерном пространстве изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_4$.

в) Докажите, что (несобственная) группа тетраэдра в трёхмерном пространстве изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}_4$.

г) Будут ли перечисленные выше трёхмерные линейные представления симметрической группы $\mathfrak{S}_4$ неприводимы, и какие из них изоморфны, а какие — нет?

д) Вычислите характеры этих представлений.

ГМ⋄10. Постройте эпиморфизм собственной группы куба на группу треугольника, опишите его ядро (нормальную подгруппу в $\mathfrak{S}_4$, называемую *квадратичной группой Клейна*), вычислите характер возникающего таким образом 2-мерного представления $\mathfrak{S}_4$, и опишите прообраз в $\mathfrak{S}_4$ каждого класса сопряжённых элементов из $\mathfrak{S}_3$.

ГМ⋄11. Опишите все неприводимые представления $\mathfrak{A}_4$ и разложите (левое) регулярное представление на неприводимые.

ГМ⋄12. Опишите все неприводимые представления $\mathfrak{S}_4$ и разложите (левое) регулярное представление на неприводимые.

ГМ⋄13. Опишите как представления из предыдущей задачи раскладываются на неприводимые при ограничении на $\mathfrak{A}_4$.

ГМ⋄14. Разложите представления собственной группы куба в пространствах комплекснозначных функций на множестве

а) вершин

б) рёбер

в) граней куба на неприводимые представления,

ГМ⋄15. Те же вопросы про собственную и несобственную группы тетраэдра.

ГМ⋄16. Те же вопросы про собственную и несобственную группы икосаэдра.

ГМ⋄17. Опишите как раскладывается на неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_3$ каждое из неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_4$ (мы считаем, что $\mathfrak{S}_3$ вложена в $\mathfrak{S}_4$ как группа, переставляющая первые 3 символа).

ГМ⋄18. Докажите, что знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ изоморфна собственной группе икосаэдра и собственной группе додекаэдра. Будут ли эти два трёхмерных представления $\mathfrak{A}_5$ изоморфны? Вычислите характеры этих представлений.

ГМ⋄19. Опишите все неприводимые представления $\mathfrak{A}_5$.

ГМ⋄20. Будут ли (несобственные) группы додекаэдра и икосаэдра изоморфны симметрической группе $\mathfrak{S}_5$?

ГМ⋄21. Опишите все неприводимые представления $\mathfrak{S}_5$.

ГМ⋄22. Опишите как представления из предыдущей задачи раскладываются на неприводимые при ограничении на $\mathfrak{A}_5$.

ГМ⋄23. Опишите как раскладывается на неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_4$ каждое из неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_5$ (мы считаем, что $\mathfrak{S}_4$ вложена в $\mathfrak{S}_5$ как группа, переставляющая первые 4 символа).

ГМ⋄24*. Опишите все конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения.

Естественные конструкции с представлениями.

Тензорные конструкции. Если заданы линейные представления $\eta : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\varrho : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, то беря тензорные произведения операторов этих представлений, мы получаем представление

$$\eta \otimes \varrho : g \longmapsto \eta(g) \otimes \varrho(g)$$

в $U\otimes V$. Оно называется *тензорным произведением* представлений η и ϱ.

Аналогичным образом по данному представлению $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ строятся его тензорные степени $\varrho^{\otimes n}$, симметрические степени $S^n(\varrho)$ и внешние степени $\Lambda^n(\varrho)$

КП◇1. (Сопряжённое представление.) Для любого линейного представления $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ определим двойственное представление $\varrho^*:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ так, чтобы для любых g,ξ,v выполнялось тождество

$$\langle \varrho^*(g)\xi, \varrho(g)v\rangle = \langle \xi, v\rangle\ .$$

Докажите, что такое представление существует и единственно. Как связаны операторы $\varrho^*(g)$ и $(\varrho(g))^*$ (двойственный к $\varrho(g)$)?

КП◇2. Пусть представление $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ таково, что $\operatorname{im}\varrho\subset \mathrm{SL}(V)$. Постройте $\mathfrak{G}$-изоморфизм представлений $\Lambda^k(\varrho)$ и $\Lambda^{d-k}(\varrho)$ для всех $0\leqslant k\leqslant \dim V=d$.

КП◇3. Пусть $\eta:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ — линейные представления. Опишите представление $\eta^*\otimes\varrho$ в пространстве $U^*\otimes V=\hom(U,V)$ в терминах линейных операторов из U в V. В частности,

а) удостоверьтесь, что подпространство инвариантных относительно этого представления операторов в точности совпадает с $\hom_{\mathfrak{G}}(U,V)$;

б) явно опишите в терминах η и ϱ линейный $\mathfrak{G}$-эквивариантный проектор $\hom(U,V)\longrightarrow \hom_{\mathfrak{G}}(U,V)$.

КП◇4. Пусть V — двумерное неприводимое представление $\mathfrak{S}_3$.

а) Разложите $S^2(V)$ и $S^3(V)$ в сумму неприводимых представлений.

б) Докажите, что $S^{n+6}(V)=S^n(V)\oplus R$, где R - регулярное представление $\mathfrak{S}_3$.

в) Опишите разложение всех $S^n(V)$.

г) Опишите пространство $\mathfrak{S}_3$-инвариантных полиномов на V (ср. с зад. **ГМ◇5**).

д) Докажите, что $S^2(S^3(V))$ $\mathfrak{G}$-изоморфно $S^3(S^2(V))$.

е) Вычислите характер всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.

ж) Верно ли, что $S^k(S^m(V))$ $\mathfrak{G}$-изоморфно $S^m(S^k(V))$ при любых k и m?

КП◇5*. Формула Молина (1897 г.) Пусть $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ комплексное представление конечной группы, а d_n — размерность пространства $\mathfrak{G}$-инвариантных однородных полиномов на V степени n (т.е. инвариантных векторов представления $S^n(\varrho^*)$), Докажите, что производящая функция для последовательности $\{d_n\}$ имеет вид

$$\sum_{n\geqslant 0} d_n\cdot t^n = \frac{1}{|\mathfrak{G}|}\sum_{g\in\mathfrak{G}}\det(E-t\varrho(g))^{-1}\ ,$$

где E — единичная матрица.

КП◇6. Пусть $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ — эффективное представление конечной группы $\mathfrak{G}$. Докажите, что в разложениях его тензорных степеней встречается все неприводимые представления $\mathfrak{G}$.

Характеры.

Определение. Пусть $\varrho:\ \mathfrak{G}\longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ — представление. Функция $\chi_\varrho\in\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$, определяемая правилом

$$\chi_\varrho(g)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Tr}(\varrho(g)\ ,$$

называется *характером* представления ϱ.

Х◇1. Докажите, что характеры представлений лежат в центре групповой алгебры и принимают комплексно-сопряжённые значения на парах взаимно-обратных элементов группы.

Х◇2. Выразите через характеры χ_η и χ_ϱ характеры следующих представлений:

а) $\eta \oplus \varrho$;

б) $\eta \otimes \varrho$;

в) ϱ^*;

г) $\Lambda^n(\varrho)$;

д) $S^n((\varrho)$ (хотя бы для $n = 2, 3$, если затрудняетесь получить общую формулу!).

Х◇3. Пусть группа $\mathfrak{G}$ действует (перестановками) на множестве базисных векторов некоторого пространства. Докажите, что характер линейного представления, индуцированного этим действием, сопоставляет каждому элементу группы число его неподвижных точек (при действии на множестве базисных векторов).

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Характеры неприводимых представлений мы будем называть *неприводимыми характерами* группы $\mathfrak{G}$. Множество всех попарно-разных неприводимых характеров обозначим через $\mathrm{Irr}(\mathfrak{G}) \subset \mathbb{C}[\mathfrak{G}]$.

Далее, фиксируем по представителю в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$, а в каждом таком представителе зафиксируем ортонормальный базис канонической $\mathfrak{G}$-инвариантной эрмитовой формы (см. зад. **ДГ◇11б)**). Запишем каждый элемент $g \in \mathfrak{G}$ матрицей в этом базисе и рассмотрим матричные элементы полученных матриц как $\mathbb{C}$-значные функции от $g \in \mathfrak{G}$. Будем называть эти функции *эрмитовыми матричными элементами неприводимых представлений* группы $\mathfrak{G}$.

Х◇4. (Соотношения ортогональности для матричных элементов)

а) Докажите, что различные эрмитовы матричные элементы попарно-ортогональны относительно $\mathfrak{G}$-инвариантного эрмитова произведения на $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ из зад. **ДГ◇14г)**.

б) Вычислите их скалярные квадраты.

в) Докажите, что эрмитовы матричные элементы неприводимых представлений линейно порождают $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$.

г) Докажите, что сумма квадратов размерностей всех попарно-неизоморфных неприводимых представлений равна порядку группы.

УКАЗАНИЕ: Для решения первых двух пунктов воспользуйтесь формулой из зад. **КП◇3б)**, выражающей проекцию $\hom(U, V)$ на $\hom_{\mathfrak{G}}(U, V)$ через матричные элементы представлений U и V и тем, что пространство $\mathfrak{G}$-операторов между неприводимыми представлениями либо нулевое, либо одномерное (по лемме Шура). Для решения третьего пункта разложите регулярное представление в прямую сумму неприводимых и убедитесь что каждое слагаемое этого разложения порождается эрмитовыми матричными элементами подходящего неприводимого представления.

Х◇5. (Соотношения ортогональности для характеров)

а) Докажите, что относительно эрмитова скалярного произведения из зад. **ДГ◇14г)** неприводимые характеры составляют ортонормированный базис центра групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$.

б) Докажите, что $\forall\, g, h \in \mathfrak{G}$.

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{G})} \overline{\chi(g)}\chi(h) = \begin{cases} \dfrac{|\mathfrak{G}|}{c(g)} & , \quad \text{при} \quad h = g \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g \end{cases} ,$$

где через $c(g)$ обозначено количество элементов, сопряжённых с g.

Х◇6. Докажите, что для любых представлений U и V скалярное произведение их характеров в $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ совпадает с $\dim \hom_{\mathfrak{G}}(U, V)$.

Х◇7. Докажите, что два представления тогда и только тогда $\mathfrak{G}$-изоморфны, когда их характеры совпадают.

Х◇8. Вычислите попарные скалярные произведения характеров представлений из зад. **ГМ◇14**, зад. **ГМ◇15** и зад. **ГМ◇16**.

Х◇9. Составьте таблицы неприводимых характеров следующих групп:

а) группы восьми кватернионных единиц $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$;

б) специальной линейной группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$;

в) подгруппы верхних унитреугольных (т.е. с единицами по главной диагонали) матриц в $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ (она называется *группой Гейзенберга* и обозначается $H(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$).

Х◇10. (Преобразование Фурье на конечной группе) Пусть $\varphi \in \mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ воспринимается как $\mathbb{C}$-значная функция на группе $\mathfrak{G}$. Её *преобразованием Фурье* называется отображение $\hat{\varphi}$, сопоставляющее каждому представлению $\varrho : \ \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\varrho)$ эндоморфизм

$$\hat{\varphi}(\varrho) \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in \mathfrak{G}} \varphi(g) \cdot \varrho(g) \ \in \ \mathrm{End}(V_\varrho) \ .$$

а) Докажите, что преобразование Фурье переводит свёртку функций на группе (см. зад. **ДГ◇12**) в композицию операторов.

б) Докажите, что исходная функция на группе восстанавливается по своему преобразованию Фурье при помощи *обратного преобразования Фурье*, которое задаётся формулой

$$\varphi(g) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\varrho \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{G})} \dim(V_\varrho) \cdot \mathrm{Tr}(\varrho(g^{-1} \circ \hat{\varphi}(\varrho))$$

(эта формула известна также как *формула обращения Фурье*).

в) Докажите *формулу Планшереля*

$$\sum_{g \in \mathfrak{G}} \varphi(g^{-1}\psi(g) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\varrho \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{G})} \dim(V_\varrho) \cdot \mathrm{Tr}(\hat{\varphi}(\varrho) \circ \hat{\psi}(\varrho)) \ .$$

Х◇11*. Докажите, что размерность неприводимого представления всегда делит порядок группы.

Х◇12*. Докажите, что характер неодномерного неприводимого представления обращается в нуль на некотором классе сопряжённых элементов.

Историческая справка. Теория характеров была создана в конце XIX Фробениусом в ходе того как он (занимаясь модной в то время теорией определителей и детерминантальных тождеств) решал следующую задачу о разложении на множители.

Х◇13*. Пусть имеется взаимно-однозначное соответствие между номерами $\{1, 2, \dots, n\}$ и элементами некоторой конечной группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим в кольце многочленов $K = \mathbb{C}[\ x_1, x_2, \dots, x_n\ ]$ определитель $n \times n$-матрицы, у которой в пересечении строки, отвечающей $g \in \mathfrak{G}$, и столбца, отвечающего $h \in \mathfrak{G}$, стоит $x_{gh^{-1}}$, (т.е. независимая переменная, номер которой отвечает $gh^{-1} \in \mathfrak{G}$). Обозначим через F этот определитель, умноженный на такую константу, чтобы $F = 1$ при $x_e = 1$, $x_g = 0$ при $g \neq e$ (где e — единица группы $\mathfrak{G}$). Разложим F в K в произведение степеней попарно-различных неприводимых многочленов F_ϱ. Докажите, что

а) неприводимые множители F_ϱ взаимно-однозначно соответствуют неприводимым представлениям V_ϱ группы $\mathfrak{G}$;
б) $\deg F_\varrho = \dim V_\varrho$;
в) показатель, с которым F_ϱ входит в разложение F, также совпадает с $\dim V_\varrho$;
г) значение неприводимого характера χ_ϱ на элементе g равно коэффициенту при $x_g x_e^{(\dim V_\varrho - 1)}$.

Индуцированные представления.

ИП◇1. (Явная конструкция индуцированного представления) Пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ — произвольная подгруппа. Ниже будут приведены две конструкции, сопоставляющие произвольному представлению $\mathfrak{H}$ в пространстве U некое представление группы $\mathfrak{G}$ в некотором новом пространстве. Проверьте, что эти две конструкции корректны и приводят к изоморфным представлениям группы G (они называются *индуцированными представлениями* и обозначаются $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U)$).

а) $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}(U) \cong \hom_{\mathfrak{H}}(\mathbb{C}[\mathfrak{G}], U) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \{f :\ \mathfrak{G} \longrightarrow U \mid f(hg) = hf(g)\ \forall\, h \in \mathfrak{H}, g \in \mathfrak{G}\}\ ,$$

а действие G происходит *справа*:

$$[g \cdot f](g') \stackrel{\text{def}}{=} f(g'g)\ .$$

б) Пусть $\{g_1\mathfrak{H}, g_2\mathfrak{H}, \dots, g_r\mathfrak{H}\}$ — все попарно-различные левые смежные классы группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathfrak{H}$. Рассмотрим прямую сумму r экземпляров пространства U и тот экземпляр каждого вектора $u \in U$, который располагается в ν-том слагаемом этой суммы, мы обозначим через $g_\nu u$. Для каждого $g \in \mathfrak{G}$ и любого из фиксированных выше g_ν существуют единственные $h = h(g,\nu) \in \mathfrak{H}$ и $\mu = \mu(g,\nu) \in \{1, 2, \dots, r\}$, такие что $gg_\nu = g_\mu h$. Определим теперь действие $\mathfrak{G}$ на нашей прямой сумме правилом

$$g \sum_{\nu=1}^{r} g_\nu u_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{r} g_{\mu(g,\nu)} h(g,\nu) u_\nu\ .$$

Это и будет индуцированное представление.

Определение. Отображение $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}$ называется *индуцированием представлений* с подгруппы $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{G}$. Эта операция является, как говорят в гомологической алгебре, *левым сопряжённым функтором* к функтору ограничения $\mathrm{Res}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}}$, сопоставляющему каждому представлению группы $\mathfrak{G}$ его ограничение на подгруппу $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. Содержательный смысл этой фразы раскрывается в следующей задаче

ИП◇2. (Двойственность Фробениуса) Пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ — произвольная подгруппа, и $\mathfrak{H} \colon U$ и $\mathfrak{G} \colon V$ —произвольные линейные представления. Докажите, что имеется естественный изоморфизм

$$\hom_{\mathfrak{H}}(U, \mathrm{Res}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{H}} V) \cong \hom_{\mathfrak{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} U, V)\ .$$

Более того, докажите, что наличие такого изоморфизма определяет индуцированное представление однозначно с точностью до единственного $\mathfrak{G}$-изоморфизма.

ИП◇3. Пусть U — тривиальное одномерное представление подгруппы $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$. Докажите, что значение характера индуцированного представления на данном классе сопряжённых элементов $C\subset\mathfrak{G}$ вычисляется по формуле

$$\chi_{\mathrm{Ind}U}(C)=\frac{[\mathfrak{G}:\mathfrak{H}]}{|C|}\cdot|C\cap\mathfrak{H}|\;.$$

ИП◇4. Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C\subset\mathfrak{G}$ с подгруппой $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$ раскладывается в объединение

$$C\cap\mathfrak{H}=D_1\cup D_2\cup\dots\cup D_s$$

классов $\mathfrak{H}$-сопряжённости. Докажите, что значение характера представления группы $\mathfrak{G}$, индуцированного с произвольного представления $\mathfrak{H}\colon U$, вычисляется по формуле

$$\chi_{\mathrm{Ind}(U)}(C)=\frac{|G|}{|\mathfrak{H}|}\cdot\sum_{i=1}^{s}\frac{|D_i|}{|C|}\chi_U(D_i)\;.$$

Кольцо представлений Множество всех классов изоморфных конечномерных представлений данной конечной группы $\mathfrak{G}$ замкнуто относительно операций прямой суммы и тензорного произведения. Добавляя к каждому представлению его формальное противоположное (относительно прямой суммы), мы получим коммутативное кольцо, обозначаемое $\mathrm{Rep}(\mathfrak{G})$ и называемое *кольцом (виртуальных) представлений* группы $\mathfrak{G}$.

Менее формально эта конструкция описывается следующим образом. Сопоставляя каждому представлению его характер, мы можем отождествить (с сохранением операций) множество классов представлений с частью целочисленной подрешётки в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$, натянутой на характеры неприводимых представлений. Эта подрешётка и будет кольцом виртуальных представлений. "Настоящие" представления выделяются в ней как "первый октант", т.е, как неотрицательные целочисленные комбинации неприводимых характеров.

Отметим, что решётка виртуальных представлений снабжена целочисленной симметричной унимодулярной (т.е. с маприцей Грама, имеющей в любом $\mathbb{Z}$-базисе единичный по модулю определитель) билинейной формой

$$\langle U,V\rangle\stackrel{\mathrm{def}}{=}\dim\hom_{\mathfrak{G}}(U,V)=\langle\chi_U,\chi_V\rangle\;,$$

где последнее произведение — это стандартное Эрмитово $\mathfrak{G}$-инвариантное произведение на $\mathbb{C}[\mathfrak{G}]$ из зад. **ДГ◇14г)**.

ИП◇5. Пусть $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$ — произвольная подгруппа. Убедитесь, что ограничение и индуцирование однозначно продолжаются до гомоморфизмов колец

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{G}}:\ \mathbf{Rep}(\mathfrak{G})\longrightarrow\mathbf{Rep}(\mathfrak{H})\qquad\text{и}\qquad\mathrm{Ind}^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{H}}:\ \mathbf{Rep}(\mathfrak{H})\longrightarrow\mathbf{Rep}(\mathfrak{G})\;,$$

которые сопряжены друг другу в смысле естественного скалярного произведения на кольце представлений:

$$\langle Ind^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{H}}U,V\rangle_{\mathfrak{G}}=\langle U,\mathrm{Res}^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{G}}V\rangle_{\mathfrak{H}}\qquad\forall U\in\mathbf{Rep}(\mathfrak{H})\,,\ \forall V\in\mathbf{Rep}(\mathfrak{G})\;.$$

ИП◇6. Опишите представление $\mathfrak{S}_3$, индуцированное с одномерного знакопеременного представления подгруппы $\mathfrak{S}_2\subset\mathfrak{S}_3$.

ИП◇7. Опишите представления $\mathfrak{S}_4$, индуцированные

а) с двумерного неприводимого представления $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$;

б) с одномерного представления циклической подгруппы порядка 4, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на $\sqrt{-1}$;

в) с одномерного представления циклической подгруппы порядка 3, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на $e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$.

ИП◇8. Опишите представления $\mathfrak{S}_5$, индуцированные со всех неприводимых представлений знакопеременной подгруппы.