Тензоры и тензорное проиведение.

Обозначения. Через V (или V_i) мы всегда обозначаем конечномерное векторное пространство размерности d (или d_i) над полем k *характеристики нуль* (при желании можете всегда считать $k = \mathbb{C}$). Как правило, речь будет идти не об одном пространстве, а о произведении n пространств.

Теоретико-множественное произведение пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ обозначается через $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. Если мы будем рассматривать его как *векторное пространство* (относительно стандартной структуры), то будем писать $\bigoplus\limits_i V_i$.

Если W — ещё одно векторное пространство, то (теоретико-множественное) отображение:

$$\varphi : \ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

мы будем называть *полилинейным*, если оно линейно по каждому из аргументов (при фиксированных остальных). Полилинейные отображения со значениями в одномерном пространстве $W = k$ называются *полилинейными формами*.

ТП1-1. Опишите все случаи, когда полилинейное отображение будет также являться *линейным оператором* из $\bigoplus\limits_i V_i$ в W, и все случаи, когда линейный оператор оказывается полилинейным отображением.

ТП1-2. Докажите, что множество всех полилинейных отображений

$$\varphi : \ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

состаиляет векторное пространство. Найдите его размерность и постройте его базис, если заданы базисы во всех пространствах V_i и W.

ТП1-3. Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. Проверьте, что все v_i тогда и только тогда отличны от нуля, когда существует полилинейная форма, значение которой на этом наборе векторов ненулевое.

ТП1-4. Универсальность тензорного произведения. Для данных пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ постройте такое пространство P вместе с универсальным полилинейным отображением

$$\tau : \ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow P,$$

чтобы *все* полилинейные отображения из $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ в любые W представлялись бы в виде композиции τ и *линейного оператора* из P в W, причём этот оператор определялся бы каждым полилинейным отображением *однозначно*.

Указание: Рассмотрите (бесконечномерное) векторное пространство, состоящее из всевозможных конечных линейных комбинаций формальных символов $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n$, где v_i независимо пробегают V_i, и профакторизуйте его по подпространству, порождённому всеми возможными комбинациями вида

$$v_1 \cdots v_i \cdots v_n - \lambda v_1 \cdots v_i' \cdots v_n - \mu v_1 \cdots v_i'' \cdots v_n \ ,$$

где $v_i = \lambda v_i' + \mu v_i''$.

ТП1-5. Единственность тензорного произведения. Докажите, что для любого другого решения предыдущей задачи

$$\tau' : \ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow P',$$

существует единственный изоморфизм $i: \ P \longrightarrow P'$, такой что $i \circ \tau = \tau'$.

Определение. Единственное с точностью до единственного изоморфизма решение зад. ТП1-4 называется *тензорным произведением* и обозначается $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ или $\bigotimes\limits_i V_i$. Элементы этого пространства зовутся *тензорами*. Образ n-ки векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ при унивесальном полилинейном отображении

$$\tau: \ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

обозначается $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ и называется *тензорным произведением* этих векторов. Все такие тензоры называются *разложимыми*. Тензоры, не попавшие в образ τ, называются *неразложимыми*. Обратите внимание на то, что образ τ не есть подпространство, ибо τ полилинеен, а не линеен!

ТП1-6. Базис тензорного произведения.

а) Докажите, что тензорное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю.

б) Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_d$ линейно-независимы в пространстве V, и W — любое ненулевое пространство. Докажите, что каждое из подпространств

$$\langle e_i \rangle \otimes W \subset V \otimes W$$

изоморфно W, а их сумма является прямой (через $\langle e_i \rangle$ обозначено одномерное подпространство в V, порождённое вектором e_i).

в) Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ и $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q\}$ — базисы пространств V и W. Докажите, что pq разложимых тензоров $e_i \otimes \xi_j$ составляют базис в $V \otimes W$.

г) Обобщите предыдущее на случай n пространств и выразите размерность тензорного произведения через размерности сомножителей.

д) Пусть v_1, v_2 и v_3 — линейно-независимые векторы пространства V. Докажите, что тензор $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_3$ неразложим.

Терминологическое замечание. Условимся называть линейный оператор *естественным*, если его можно задать не прибегая к координатам и базисам, а непосредственно в терминах самих векторов. Например, существует естественный изоморфизм $: \ V \longrightarrow V^{**}$, но не существует естественного изоморфизма $: \ V \longrightarrow V^*$. Точный формальный смысл этого мы обсудим позже.

ТП1-7. Постройте естественные линейные операторы, являющиеся изоморфизмами:

а) $U \otimes (V \otimes W) \longrightarrow U \otimes V \otimes W$

б) $(U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes V \otimes W$

в) $(U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes V \otimes W$

г) $U \otimes (V \oplus W) \longrightarrow (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$

ТП1-8. Полилинейные формы как тензоры.

а) Докажите, что существует естественный линейный изоморфизм

$$U^* \otimes V^* \longrightarrow (U \otimes V)^* \,,$$

переводящий всякий разложимый тензор $\varphi \otimes \psi$ в функционал, действующий на разложимые тензоры по правилу

$$u \otimes v \longmapsto \varphi(u) \cdot \psi(v) \,.$$

б) Докажите, что пространство билинейных форм на $U \times V$ естественно изоморфно двум рассмотренным только что пространствам.

в) Обобщите предыдущее на случай n пространств, в частности, постройте естественный изоморфизм

$$V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \longrightarrow (V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n)^* .$$

г) Докажите, что пространство билилинейных отображений из $U \times V$ в W естественно изоморфно пространствам $\hom(U \otimes V, W)$ и $\hom(U, \hom(V, W))$.

ТП1-9. Линейные операторы как тензоры.

а) Докажите, что существует естественный линейный изоморфизм

$$U^* \otimes V \longrightarrow \hom(U, V) ,$$

переводящий всякий разложимый тензор $\varphi \otimes v$ в линейный оператор, действующий вектор $u \in U$ по правилу

$$u \longmapsto \varphi(u) \cdot v .$$

б) Пусть $\{e_i\}$ и $\{x_i\}$ — сопряжённые базисы в V и в V^*. Докажите, что *тензор Казимира*

$$\sum_i x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$$

не зависит от выбора базиса.

в) Пусть операторы f и g при отождествлении $\hom(V, V)$ с $V^* \otimes V$ записываются, соответственно, тензорами $\sum\limits_i \varphi_i \otimes u_i$ и $\sum\limits_j \psi_j \otimes v_i$. Проверьте, что их композицию $f \circ g$ можно записать в виде $\sum\limits_j \psi_j \otimes w_i$ или в виде $\sum\limits_i \eta_i \otimes u_i$, и получите явные выражения для w_j и η_i.

ТП1-10. Постройте естественный линейный изоморфизм $\hom(U, V) \longrightarrow \hom(V, U)^*$.

ТП1-11. Если в предыдущей задаче положить $U = V$, то получится корреляция $\hom(V, V) \longrightarrow \hom(V, V)^*$. Какой билинейной форме на $\hom(V, V)$ она соответствует? Будет ли эта форма симметрической? Как она вычисляется в терминах матриц?

ТП1-12. Тензорное произведение операторов. Пусть заданы линейные операторы $f_i : \ U_i \longrightarrow V_i$. Докажите, что существует единственный линейный оператор

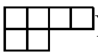
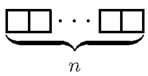
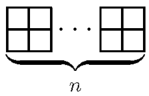
$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : \ U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

переводящий тензорные произведения векторов в тензорные произведения их образов.

ТП1-13. Пусть F — вложение, а E — ненулевой тождественный оператор. Докажите, что $F \otimes E$ — вложение.

ТП1-14. В базисах из зад. ТП1-6в) выразите матрицу тензорного произведения двух операторов $f : \ V \longrightarrow V$ и $g : \ W \longrightarrow W$ через матрицы f и g.

ТП1-15. Пусть цикловой тип нильпотентного оператора $f : \ V \longrightarrow V$ задаётся диаграммой Юнга

а)  Y **б)**  **в)**  .

Каков цикловой тип $f \otimes f$ и $f \otimes f \otimes f$?

ТП1-16*. Опишите цикловой тип тензорного квадрата нильпотентного оператора в терминах диаграммы Юнга самого оператора в общем случае.

ТП1-17. Пусть операторы f и g диагонализуемы и имеют собственные значения $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d\}$ и $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d\}$ (все числа λ_i и μ_j попарно-различные). Найдите собственные значения $f \otimes g$ и их кратности..

Тензорные степени одного пространства

Обозначения. Фиксируем до конца этого параграфа *одно* d-мерное пространство V. Произведение

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$$

называется *n-той тензорной степенью* пространства V. Под $V^{\otimes 0}$ всегда понимается одномерное пространство k.

Отметим, что прямая сумма $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0} V^{\otimes k}$ представляет собой ассоциативную некоммутативную алгебру над полем k (произведение индуцировано тензорным произведением векторов). Она называется *свободной ассоциативной алгеброй над k, порождённой пространством V*.

ТС-1. Докажите, что $V^{\otimes n}$ естественно изоморфно пространству полилинейных форм на $\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n}$.

ТС-2. Свёртки. Рассмотрим произведение

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q}$$

и фиксируем два подмножества индексов

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, p\} \qquad J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, q\}$$

одинаковой мощности $\#I = \#J = k$.

а) Докажите, что существует единственный линейный оператор

$$c_{IJ} : \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \longrightarrow \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-k} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-k},$$

действующий на разложимые тензоры по правилу

$$c_{IJ}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) = \prod_{\nu=1}^{k} \varphi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \varphi_i \otimes \bigotimes_{j \notin J} v_j\,.$$

б) Опишите действие свёртки на языке полилинейных форм (т.е. когда $V^{*\otimes p}$ или $V^{\otimes q}$ интерпретируется как пространство полилинейных форм на двойственном пространстве).

в) Опишите действие свёртки в координатах.

Терминология. Оператор c_{IJ} с $\#I = \#J = k$ называется k-кратной свёрткой по индексам I и J. Наиболее важными для нас будут два крайних случая. Если $p = q = n$ и $I = J = \{1, 2, \cdots, n\}$, то свёртка называется *полной* и обозначается

$$\langle \tau, t\rangle \overset{\text{def}}{=} c_{\{1,2,\cdots,n\}\{1,2,\cdots,n\}}(\tau \otimes t) \quad \text{, где} \quad \tau \in V^{*\otimes n}\ ,\ t \in V^{\otimes n}\ .$$

Если $p = 1$, а q — любое (или, соответственно, $q = 1$, а p — любое), и $I = J = \{1\}$, то свёртка называется *внутренним произведением* вектора и полилинейной формы на V (соотетственно, ковектора и полилинейной формы на V^*) и обозначается

$$i_v(\varphi) \overset{\text{def}}{=} c_{11}(v \otimes \varphi) \quad \text{, где} \quad v \in V\ ,\ \varphi \in V^{*\otimes n}\ ,$$

или, соответственно,

$$i_\xi(t) \overset{\text{def}}{=} c_{11}(\xi \otimes t) \quad \text{, где} \quad \xi \in V^*\ ,\ t \in V^{\otimes n}\ .$$

ТС-3. Опишите полную свёртку в $V^* \otimes V$ на языке линейных операторов.

ТС-4. Докажите, что полная свёртка $\langle V^{*\otimes n}, V^{\otimes n}\rangle$ определяет двойственность между этими пространствами, причём эта двойственность согласована с изоморфизмом из зад. ТП1-8.

Терминологическое замечание. Индуцированную полной свёрткой двойственность между $V^{*\otimes n}$ и $V^{\otimes n}$ мы будем называть *каноническим спариванием* или *канонической двойственностью*.

ТС-5. Опишите внутреннее произведение на языке полилинейных форм и задайте его действие в координатах.

ТС-6. Пусть $\xi \in V^*$ — фиксированный ковектор. Докажите, что внутреннее умножение на ξ:

$$i_\xi :\ V^{\otimes(n+1)} \longrightarrow V^{\otimes n}$$

представляет собой эпиморфный линейный оператор, двойственный (относительно канонического спаривания) вложению

$$\mu_\xi :\ V^{*\otimes n} \longrightarrow V^{*\otimes(n+1)} :\ \tau \longmapsto \xi \otimes \tau$$

задаваемому при помощи левого тензорного умножения на ξ.

ТС-7. (действие симметрической группы на тензорной степени) Докажите, что для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ существует единственный линейный автоморфизм $\sigma :\ V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$, действущий на разложимые тензоры по правилу

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Докажите, что таким образом возникает действие группы S_n на $V^{\otimes n}$. Опишите это действие, если тензоры из $V^{\otimes n}$ интерпретируются как полилинейные формы на V^*.

Симметрическая алгебра.

Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $\sigma(t) = t \quad \forall \sigma \in S_n$. Симметрические тензоры составляют подпространство в $V^{\otimes n}$. Оно обозначается $S^n(V)$ и называется n-той *симметрической степенью* пространства V. Если $f :\ V \longrightarrow V$ — линейный оператор, то

$f^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{n}$ переводит $S^n(V)$ в себя. Соответствующее ограничение обозначается $S^n(f)$ и называется n-той *симметрической степенью* оператора f.

CA-1. Пусть в V выбран базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ (напомним: $\dim V = d$). Для произвольного набора неотрицательных целых чисел $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d)$ с суммой $|\nu| = \sum \nu_i = n$ обозначим через t_ν сумму всех различных разложимых тензоров, являющихся произведением ν_1 векторов e_1, ν_2 векторов e_2, ..., ν_d векторов e_d. Докажите, что эти тензоры сотавляют базис в $S^n(V)$ и найдите размерность этого пространства.

CA-2. Докажите, что $S^n(V)$ естественно отождествляется с пространством полилинейных *симметричных* форм на произведении $\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n}$ (т.е. таких форм, значение которых не меняется при любой перестановке аргументов).

CA-3. Вычислите $\mathrm{Tr}(S^2(f))$ и $\mathrm{Tr}(S^3(f))$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора $f: V \longrightarrow V$ для случаев $\dim V = 2, 3$.

CA-4*. Докажите, что производящая функция для выражений $\mathrm{Tr}(S^k(f))$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора f вычисляется по формуле

$$\sum_{k \geqslant 0} \mathrm{Tr}(S^k(f)) \cdot z^k = \frac{1}{\det(E - zf)} \, .$$

Вычислите эту функцию в дву- и трёхмерном случае (и проверьте ответы в предыдущей задаче).

CA-5. Симметризация. Докажите, что линейный оператор

$$\mathrm{Sym}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma : \; V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$$

является проектором $V^{\otimes n}$ на $S^n(V)$.

CA-6. Симметрическая степень как фактор Образуем фактор-пространство $V^{\otimes n}$ по подпространству $\mathcal{S}$ порождённому всевозможными тензорами вида $t - \sigma(t)$. Пусть

$$\mathrm{sym}_n : \; V^{\otimes n} \longrightarrow \frac{V^{\otimes n}}{\mathcal{S}}$$

каноническая проекция на этот фактор. Докажите, что ограничение sym_n на $S^n(V) \subset V^{\otimes n}$ является изоморфизмом.

CA-7. Симметрическое произведение. Пусть $t_k \in S^k(V)$, $t_m \in S^m(V)$ — два симметричных тензора. По-определению, *симметрическое произведение* $t_k \cdot t_m \in S^{(k+m)}$ есть единственный (по предыдущей задаче) симметрический тензор, удовлетворяющий равенству

$$\mathrm{sym}_n(t_k \otimes t_m) = \mathrm{sym}_n(t_k \cdot t_m) \, .$$

а) Верно ли, что $t_k \cdot t_m = \mathrm{Sym}_n(t_r \otimes t_m)$.

б) Выразите симметричеслие произведения базисных симметрических тензоров $m_\nu \cdot m_\nu$ через m_α (где $|\nu| + |\mu| = |\alpha|$).

в) Убедитесь, что $S^{\cdot}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} S^k(V)$ с симметрическим произведением является *коммутативной* ассоциативной алгеброй (она называется *симметрической алгеброй* пространства V) и установите изоморфизм этой алгебры с алгеброй многочленов от $d = \dim V$ переменных .

г) Опишите симметрическое произведение на языке симметрических полилинейных форм.

СА-8. Симметрическая двойственность. Докажите, что ограничение канонической двойственности на подпространства симметрических тензоров $S^n(V) \subset V^{\otimes n}$ и $S^n(V^*) \subset V^{*\otimes n}$ определяет каноническую двойственность между этими подпространствами. Кроме того:

а) вычислите базис, канонически двойственный базису m_α из зад. СА-1;

б) найдите оператор канононически двойственный оператору симметричного умножения на вектор;

в) докажите, что оператор i_v внутреннего умножения на вектор $v \in V$ эпиморфно отображает $S^n(V^*)$ на $S^{n-1}(V^*)$ и найдите канононически двойственный ему оператор.

г) В условиях предыдущего пункта проверьте, что $i_v \circ i_w = i_w \circ i_v$.

д) Вычислите действие оператора i_v на базис m_α.

СА-9. Пространство однородных полиномов. Функция $F: \ V \longrightarrow k$ называется *однородным полиномом n-той степени*, если в некотором базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ значение $F(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d)$ является однородным многочленом степени n от переменных x_i.

а) Докажите, что свойство функции быть однородным полиномом n-той степени не зависит от выбора базиса, что такие функции составляют векторное пространство, и вычислите размерность этого пространства.

б) Сопоставим каждой симметричной полилинейной полилинейной форме $\varphi \in S^n(V^*)$ функцию

$$\varphi_\Delta: \ V \longrightarrow k \quad : \ \varphi_\Delta(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v, v, \ldots, v)$$

(т.н. "ограничение формы на диагональ"). Докажите, что таким образом устанавливается линейный изоморфизм пространства полилинейных симметричных форм с пространством однородных полиномов.

в) Фиксируем в V базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ с координатами $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$. Опишите базис в $S^n(V^*)$, являющийся прообразом (относительно описанного выше изоморфизма) стандартного базиса пространства однородных многочленов степени n, состоящего из мономов $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$

г) Докажите, что описанный выше изоморфизм индуцирует изоморфизм симметрической алгебры пространства V^* с алгеброй всех полиномиальных функций на V (т.е. проверьте, что симметрическое произведение тензоров переходит в обычное произведение полиномов).

д) Какой операции на полиномах соответствует операция внутреннего произведения полилинейной формы с данным вектором $v \in V$?

Определение. Пусть F — однородный полином n-той степени. Симметричная полилинейная форма φ, ограничение которой на диагональ совпадает с F (т.е. $\varphi_\Delta = F$) называется *полной поляризацией* многочлена F и обозначается $\mathrm{pl}^n F$. По предыдущей задаче всякий однородный многочлен имеет единственную полную поляризацию.

СА-10. Проверьте, что поляризация квадратичной формы (однородного полинома второй степени) F вычисляется по формуле

$$\mathrm{pl}^2 F(v,w) = \frac{1}{2}(F(v+w) - F(v) - F(w)) ,$$

и попробуйте придумать похожую формулу для поляризации кубической формы.

СА-11. Докажите, что подпространство $S^n(V) \in V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{v \otimes v \otimes \cdots \otimes v}_{n}$. Для подтверждения представьте в виде линейной комбинации тензорных степеней следующие симметрические тензоры

а) $v \otimes w + w \otimes v$

б) $u \otimes v \otimes w + v \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes v - v \otimes u \otimes w - u \otimes w \otimes v - w \otimes v \otimes u$.

СА-12. Докажите, что линейные операторы из $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ перестановочные с действием всех перестановок $\sigma \in S_n$ составляют линейное подпространство, которое порождается операторами вида $f^{\otimes n}$ по всем $f \in \mathrm{End}(V)$.

Поляры. Пусть F — полином степени n на V, $\varphi \in S^n(V)$ —его полная поляризация и $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ — произвольный набор векторов. Свёртка φ с $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ (по первым k индексам) является симметрическим тензором. Его ограничение на диагональ называется *k-той полярой F относительно векторов* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ и обозначается $\mathrm{pl}^k_{v_1,v_2,\ldots,v_k} F$. Вместо pl^1 пишут просто pl, а если набор векторов состоит из k экземпляров одного и того же вектора v, то пишут pl^k_v и называют такую поляру k-той полярой относительно v.

СА-13. Докажите следующие свойства поляр

а) Отображение $(v, F) \longmapsto \mathrm{pl}_v F$ билинейно по v и F.

б) $\mathrm{pl}_v \circ \mathrm{pl}_w = \mathrm{pl}_w \circ \mathrm{pl}_v = \mathrm{pl}^2_{vw} = \mathrm{pl}^2_{wv}$

в) $\mathrm{pl}^n_v F = F(v) \in k$

г) В координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ относительно базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ имеем

$$\mathrm{pl}_v F = \frac{1}{\deg F}\frac{\partial F}{\partial v} \quad , \qquad \text{где} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \sum_{i=1}^{d} v_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} ,$$

если $v = \sum v_i e_i$.

Замечание. Из предыдущей задачи следует, что операция "дифференцирования в направлении вектора" *естественна* (или *ковариантна*), т.е. что $\frac{\partial F}{\partial v}$ зависит только от F и v, но не от выбора базиса.

Если применить формулу бинома к равенству $\mathrm{pl}^k_{u+v} = (\mathrm{pl}_u + \mathrm{pl}_v)^k$, то получим другое следствие:

СА-14. Формула Тэйлора. Для любого полинома F

$$F(v+w) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F}{\partial v^k}(w).$$

Внешняя алгебра.

Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *кососимметрическим*, если $\sigma(t) = \mathrm{sgn}\,\sigma t \quad \forall \sigma \in S_n$, где $\mathrm{sgn}\,\sigma$ — это знак перестановки. Кососимметрические тензоры составляют подпространство в

$V^{\otimes n}$. Оно обозначается $\Lambda^n(V)$ и называется n-той *внешней степенью* пространства V. Если $f:\ V \longrightarrow V$ — линейный оператор, то $f^{\otimes n}$ переводит $\Lambda^n(V)$ в себя. Соответствующее ограничение обозначается $\Lambda^n(f)$ и называется n-той *внешней степенью* оператора f.

ВА-1. Пусть в V выбран базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$. Для произвольного набора *строго возрастающих* натуральных чисел $I = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$ обозначим e_I альтернированную сумму

$$e_I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} .$$

а) Докажите, что эти тензоры сотавляют базис в $\Lambda^n(V)$ при $n \leqslant d$ и найдите размерность этого пространства.

б) Докажите, что $\Lambda^n(V) = 0$ при $n > d$.

ВА-2. Докажите, что $\Lambda^n(V)$ естественно отождествляется с пространством полилинейных *кососимметричных* форм на произведении $\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n}$ (т.е. таких форм значение которых меняет знак при любой нечётной перестановке аргументов).

ВА-3. Уточните формулировку и докажите, что "матрица оператора $\Lambda^k(f)$ есть матрица миноров k-того порядка матрицы f.

ВА-4. Выразите $\operatorname{Tr}(\Lambda^k(f))$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора $f:\ V \longrightarrow V$.

ВА-5. Постройте канонический изоморфизм

$$\bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(U) \otimes \Lambda^{n-k}(V) \longrightarrow \Lambda^n(U \oplus V) .$$

ВА-6. Альтернирование. Докажите, что линейный оператор

$$\operatorname{Alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma :\ V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$$

является проектором $V^{\otimes n}$ на $\Lambda^n(V)$.

ВА-7. Внешняя степень как фактор. Образуем фактор-пространство $V^{\otimes n}$ по подпространству $\mathcal{A}$ порождённому всевозможными тензорами вида $t - \operatorname{sgn} \sigma\sigma(t)$. Пусть

$$\operatorname{alt}_n :\ V^{\otimes n} \longrightarrow \frac{V^{\otimes n}}{\mathcal{A}}$$

каноническая проекция. Докажите, что ограничение $\mathrm{alt_n}$ на $\Lambda^n(V)$ является изоморфизмом.

ВА-8. Внешнее произведение. Пусть $t_k \in \Lambda^k(V)$, $t_m \in \Lambda^m(V)$ — два кососимметричных тензора. По-определению, *внешнее произведение* $t_k \wedge t_m \in \Lambda^{(k+m)}$ есть единственный (по предыдущей задаче) кососимметрический тензор, удовлетворяющий равенству

$$\operatorname{alt}_n(t_k \otimes t_m) = \operatorname{alt}_n(t_k \wedge t_m) .$$

а) Верно ли, что $t_k \wedge t_m = \operatorname{Alt}_n(t_k \otimes t_m)$?

б) Выразите внешнее произведения базисных симметрических тензоров $e_I \wedge e_J$ через e_K.

в) Убедитесь, что $\Lambda^{\cdot}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \Lambda^k(V)$ с внешним произведением является *суперкоммутативной* ассоциативной алгеброй (суперкоммутативность означает, что $t_k \wedge t_m = (-1)^{km} t_m \wedge t_k$). Эта алгебраа называется *внешней алгеброй* пространства V).

г) Найдите размерность внешней алгебры размерность её центра.

д) Опишите внешнее произведение на языке кососимметрических полилинейных форм.

ВА-9. Опишите центр внешней алгебпы и найдите его размерность.

ВА-10. **(двойственность в кососимметрическом случае)** Докажите, что ограничение канонической двойственности на подпространства кососимметрических тензоров $\Lambda^n(V) \subset V^{\otimes n}$ и $\Lambda^n(V^*) \subset V^{*\otimes n}$ определяет каноническую двойственность между этими подпространствами. Кроме того:

а) вычислите базис, канонически двойственный базису e_I из зад. ВА-1;

б) найдите оператор канононически двойственный оператору внешнего умножения на вектор;

в) Докажите, что оператор i_v внутреннего умножения на вектор $v \in V$ переводит $\Lambda^n(V^*)$ в $\Lambda^{n-1}(V^*)$ и найдите канононически двойственный ему оператор.

г) В условиях предыдущего пункта проверьте, что $i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v$.

д) Вычислите действие оператора i_v на базис e_I.

ВА-11. Пусть

$$i_v: \ \Lambda^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)\text{и} \qquad \wedge_v: \ \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(V)$$

операторы внутреннего и внешнего умножения на вектор v. Докажите, что длинные последовательности

$$0 \xrightarrow{i_v} \Lambda^n(V^*) \xrightarrow{i_v} \Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{i_v} \cdots \xrightarrow{i_v} \Lambda^2(V^*) \xrightarrow{i_v} \Lambda^1(V^*) \xrightarrow{i_v} \Lambda^0(V^*) \xrightarrow{i_v} 0$$

$$0 \xrightarrow{\wedge_v} \Lambda^0(V) \xrightarrow{\wedge_v} \Lambda^1(V) \xrightarrow{\wedge_v} \cdots \xrightarrow{\wedge_v} \Lambda^{n-2}(V) \xrightarrow{\wedge_v} \Lambda^{n-1}(V) \xrightarrow{\wedge_v} \Lambda^n(V) \xrightarrow{\wedge_v} 0$$

точны.

ВА-12. **(комплексы ДеРама и Кошуля)** Обозначим через

$$d_{k,m}: \ \Lambda^k(V^*) \otimes S^m(V^*) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(V^*) \otimes S^{m-1}(V^*)$$

композицию операторов

$$\Lambda^k(V^*) \otimes S^m(V^*) \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\Delta} \Lambda^k(V^*) \otimes V^* \otimes S^{m-1}(V^*)$$

и

$$\Lambda^k(V^*) \otimes V^* \otimes S^{m-1}(V^*) \xrightarrow{\wedge\otimes\mathrm{Id}} \Lambda^{k+1}(V) \otimes S^{m-1}(V^*)\,,$$

где $\Delta: \ S^m(V^*) \longrightarrow V^* \otimes S^{m-1}(V^*)$ — оператор, канонически двойственный к симметрическому умножению, а $\wedge: \ \Lambda^k(V^*) \otimes V^* \longrightarrow \Lambda^{k+1}(V)$ — внешнее умноженее.

а) Докажите, что $\mathrm{im}(d_{k,m}) = \ker(d_{k+1,m-1})$, т.е. что последовательное применение $d_{\cdot,\cdot}$ как и в предыдущей задаче приводит к длинной точной последовательности (она называется *комплекс ДеРама*).

б) Докажите, что если фиксировать координаты и отождествить симметрическую алгебру с алгеброй многочленов, то действие $d_{\cdot,\cdot}$ будет даваться формулой:

$$d_{k,m}(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \otimes F) = \sum_{i=1}^{d} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \wedge x_i \otimes \frac{\partial F}{\partial x_i} .$$

в) Пользуясь канонической двойственностью, постройте (инвариантно и в координатах) операторы

$$\partial_{k,m} : \ \Lambda^k(V) \otimes S^m(V) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(V) \otimes S^{m+1}(V)$$

и докажите, что их композиции также составляют точный комплекс (он называется *комплексом Кошуля*).

г) Замените в конструкции комплекса ДеРама V^* на V и вычислите коммутатор

$$\partial_{k+1,m-1} \circ d_{k,m} - d_{k-1,m+1} \circ \partial_{k,m}$$

Разложимые поливекторы. Элементы пространства $\Lambda^k(V)$ называют *поливекторами* (в данном случае k-*векторами*). Поливектор $\omega \in \Lambda^k(V)$ называется *разложимым*, если он равен внешнему произведению обычных векторов: $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$.

ВА-13. Докажите, что бивектор ω в четырёхмерном пространстве V тогда и только разложим, когда $\omega \wedge \omega = 0$. Выведите отсюда, что классы разложимых бивекторов заметают неособую квадрику в $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ и напишите явное уравнение этой квадрики (она называется *квадрикой Плюккера в* $\mathbb{P}^5$.

ВА-14. По данному $\omega \in \Lambda^k(V)$ построим два подпространства

$$\Omega = \{\xi |! \in V^* \mid i_\xi(\omega) = 0\} \subset V^*$$

$$W = \{w \in V \mid w \wedge \omega = 0\} \subset V$$

Докажите, что ω тогда и только тогда разложим, когда $\operatorname{Ann} \Omega = W$.

ВА-15. Докажите, что следующие условия на поливектор $\omega \in \Lambda^k(V)$ попарно элвивалентны:

а) ω разложим

б) $\forall \xi \in \Lambda^{k+1}(V) \qquad c_{11}(c_{\{1,2,\ldots,k\}\{1,2,\ldots,k\}}(\xi \otimes \omega) \otimes \omega) = 0$ в $\Lambda^{k-1}(V)$

в) $\forall \xi \in \Lambda^{k-1}(V) \qquad c_{\{1,2,\ldots,k\}\{1,2,\ldots,k\}}(\xi \otimes \omega) \wedge \omega) = 0$ в $\Lambda^{k+1}(V)$

ВА-16. Перепишите условия из последних двух пунктов предыдущей задачи в виде явного конечного набора квадратичных соотнощений на координаты поливектора в стандартом базисе e_I.