Лекция 1
Тензоры

▷Тензорное произведение ▷Стандартные базисы ▷Каноническая двойственность ▷Тензорное произведение линейных операторов ▷Тензорная алгебра векторного пространства ▷Умножения и свёртки ▷Симметрические тензоры ▷Поляризация однородных многочленов ▷Кососимметрические тензоры ▷Внешнее умножение

§1. Тензорное произведение векторных пространств

1.1. Полилинейные отображения. Через V (или V_i) мы всегда будем обозначать конечномерное векторное пространство размерности d (или d_i) над произвольным полем k[1]. Если речь будет идти не об одном пространстве, а о нескольких, то количество этих пространств обозначается через n.

Теоретико-множественное произведение пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ обозначается через $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. Если мы будем рассматривать его как *векторное пространство* (относительно стандартной структуры), то будем писать $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Если W — ещё одно векторное пространство, то теоретико-множественное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ мы будем называть *полилинейным*, если оно линейно по каждому из аргументов (при фиксированных остальных). Полилинейные отображения со значениями в одномерном пространстве $W = k$ называются *полилинейными формами*.

Подчеркнём, что полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$, как правило, не является *линейным оператором* из $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ в W.

Задача 1.1. Опишите все случаи, когда полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ будет одновременно являться линейным оператором из $\bigoplus\limits_i V_i$ в W, и все случаи, когда линейный оператор оказывается полилинейным отображением.

Задача 1.2. Докажите, что множество всех полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ составляет векторное пространство и найдите его размерность.

1.1.1. Базис в пространстве полилинейных отображений. Пусть в каждом из пространств V_i зафиксирован базис $\{e_\alpha^{(i)}\}_{1 \leqslant \alpha \leqslant \dim V_i}$. Всякое полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ однозначно восстанавливается по своим значениям

$$\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, e_{\alpha_n}^{(n)}) \in W$$

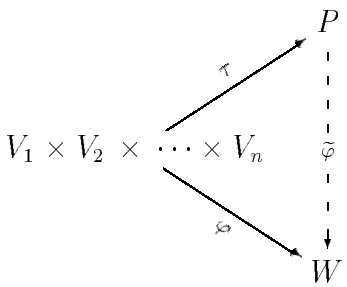
[1] желающие могут почти везде без ущерба для понимания полагать $k = \mathbb{C}$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов, и ясно, что этот набор значений может быть задан произвольно. Таким образом, в качестве базиса в пространстве полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{f} W$ можно взять $\dim W \cdot \prod \dim V_i$ отображений $\varepsilon^{\beta}_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}$, каждое из которых переводит соответствующий набор базисных векторов $(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, e^{(n)}_{\alpha_n})$ в базисный вектор e^{β} пространства W, а все остальные наборы базисных векторов — в нуль.

Задача 1.3. Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ — некий набор векторов. Проверьте, что все v_i отличны от нуля тогда и только тогда, когда существует полилинейная форма, принимающая ненулевое значение на этом наборе векторов.

1.2. Определение. *Пространство P вместе с полилинейным отображением $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} P$ называется тензорным произведением данных пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$, если выполняется следующее свойство: всякое полилинейные отображения из $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ в любое W единственным способом представляется в виде композиции τ и линейного оператора из P в W.*

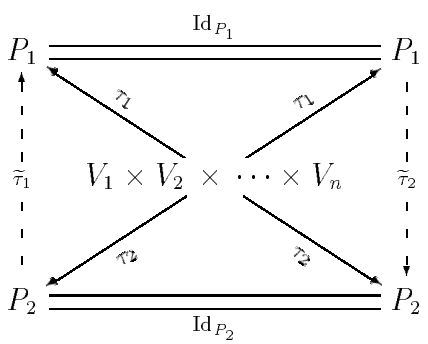
Иначе говоря, для любого полилинейного $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ существует единственный линейный оператор $P \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} W$, включающийся в коммутативную диаграмму:



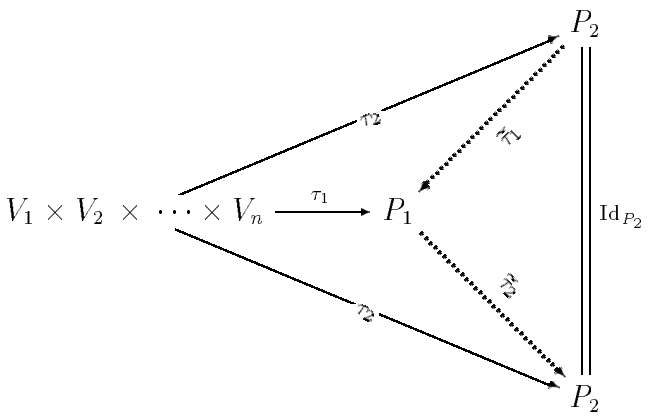
Интуитивно, тензорное произведение есть «универсальное полилинейное отображение», позволяющее единственным образом «линеаризовать»произвольное полилинейное отображение.

У приведённого нами определения имеется неприятная особенность, — оно неявное, т. е. не указывает способ построения определяемого объекта, и значит, не гарантирует его существования. Тем не менее, у этого определения есть и сильная сторона.

1.2.1. Единственность тензорного произведения (при условии, что оно существует) тавтологически вытекает из его универсальности. В самом деле, пусть $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_1} P_1$ и $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_2} P_2$ — два объекта, удовлетворяющие определению Опр.1.2. Тогда из универсальности P_1 и P_2 соответственно возникают линейные операторы $P_1 \xrightarrow{\widetilde{\tau}_2} P_2$ и $P_2 \xrightarrow{\widetilde{\tau}_1} P_1$, включающиеся в диаграмму:



Композиция $P_2 \xrightarrow{\widetilde{\tau}_2\widetilde{\tau}_1} P_2$ является линейным оператором, замыкающим диаграмму



и в силу единственности такого оператора (из универсальности P_2) должна совпадать с тождественным оператором: $\widetilde{\tau}_2\widetilde{\tau}_1 = \mathrm{Id}_{P_2}$. По аналогичным причинам $\widetilde{\tau}_1\widetilde{\tau}_2 = \mathrm{Id}_{P_1}$, т. е. τ_1 и τ_2 – взаимно обратные изоморфизмы. Итак, тензорное произведение, буде оно существует, *единственно с точностью до единственного изоморфизма перестановочного с универсальным полилинейным отображением* τ.

1.2.2. Инвариантная конструкция тензорного произведения. В отличие от единственности, существование никак не обусловлено чистой логикой Опр.1.2, и для явного построения тензорного произведения мы должны явно воспользоваться свойствами векторных пространств.

Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство $\mathcal{V}$, состоящее из конечных линейных комбинаций бесконечного семейства базисных векторов, которые взаимно однозначно соответствуют всевозможным формальным выражениям вида $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n$, где v_i независимо пробегают V_i. Рассмотрим в $\mathcal{V}$ подпространство $\mathcal{E}$, порождённое всевозможными комбинациями вида

$$v_1 \cdots v_i \cdots v_n \quad - \quad \lambda v_1 \cdots v_i' \cdots v_n \quad - \quad \mu v_1 \cdots v_i'' \cdots v_n \ ,$$

где $v_i = \lambda v_i' + \mu v_i''$. Положим $P_{\text{инв}} = \mathcal{V}/\mathcal{E}$ и зададим $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} P_{\text{инв}}$ правилом

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\,\mathcal{E}) \ .$$

Покажем, что $P_{\text{инв}}$ и τ удовлетворяют определению тензорного произведения.

Пусть $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ — произвольное полилинейное отображение. Чтобы разложить φ в композицию $\varphi = \widetilde{\varphi}\tau$, необходимо и достаточно определить линейный оператор $\widetilde{\varphi}$ так, чтобы он переводил классы $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\,\mathcal{E})$ в $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Поскольку векторы $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\,\mathcal{E})$ порождают $P_{\text{инв}}$, такой оператор $\widetilde{\varphi}$ автоматически единствен, если существует. Вместе с тем правило $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \longmapsto \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, сопоставляя базисным векторам пространства $\mathcal{V}$ векторы пространства W, определяет некий линейный оператор из $\mathcal{V}$ в W, причём из полилинейности φ немедленно следует, что подпространство $\mathcal{E}$ лежит в его ядре, и следовательно, он корректно факторизуется до линейного оператора $P_{\text{инв}} = \mathcal{V}/\mathcal{E} \to W$, переводящего классы $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n \,(\mathrm{mod}\,\mathcal{E})$ в $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, что и требовалось.

1.3. Обозначения и терминология. Тензорное произведение пространств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ обозначается $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ или $\bigotimes\limits_i V_i$. Элементы этого пространства называются *тензорами*.

Образ n-ки векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ при универсальном полилинейном отображении $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ обозначается $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ и называется *тензорным произведением* этих векторов. Все такие тензоры называются *разложимыми*.

Напротив, тензоры, не попавшие в образ τ, называются *неразложимыми*. Обратите внимание на то, что образ τ *не является векторным подпространством*, ибо τ полилинеен, а не линеен.

Задача 1.4. Докажите, что тензорное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю.

Задача 1.5. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_d$ линейно независимы в пространстве V, и W — любое ненулевое пространство. Докажите, что каждое из подпространств

$$\langle e_i \rangle \otimes W \subset V \otimes W$$

изоморфно W, а их сумма является прямой (через $\langle e_i \rangle$ обозначено одномерное подпространство в V, порождённое вектором e_i).

Задача 1.6. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ и $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q\}$ — базисы пространств V и W. Докажите, что pq разложимых тензоров $e_i \otimes \xi_j$ составляют базис в $V \otimes W$.

1.4. Базис тензорного произведения. Пусть в каждом из пространств V_i зафиксирован базис $\{e_\alpha^{(i)}\}_{1 \leqslant \alpha \leqslant \dim V_i}$. Чтобы построить базис в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, мы приведём ещё одну (неинвариантную) конструкцию этого пространства — в следствие единственности оно будет совпадать с построенным выше $P_{\text{инв}}$.

Рассмотрим векторное пространство $P_{\text{крд}}$ размерности $\prod \dim V_i$, базисом в котором являются формальные символы $e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}$, в которых $e_{\alpha_i}^{(i)}$ независимо пробегают фиксированные выше базисы пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$. Согласно n° 1.1.1, правило, сопоставляющее каждому набору базисных векторов $(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)})$ вектор

$$\tau(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)} \in P_{\text{крд}}$$

однозначно продолжается до полилинейного отображения $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \xrightarrow{\tau} R$. Универсальность этого отображения также немедленно следует из n° 1.1.1. Таким образом, мы ещё раз явно предъявили тензорное произведение.

Согласно n° 1.2.1, имеется единственный изоморфизм $P_{\text{крд}} \xrightarrow{\sim} P_{\text{инв}}$, переводящий наш базис $e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}$ в тензорные произведения базисных векторов, понимаемые в смысле n° 1.3. В частности, *размерность тензорного произведения равна произведению размерностей пространств-сомножителей*, а *базис в тензорном произведении составляют всевозможные тензорные произведения базисных векторов пространств-сомножителей*.

§2. Естественные изоморфизмы

2.1. Что понимать под «естественностью»? Условимся называть линейный оператор из пространства V *естественным*[2], если его можно задать правилом, которое описывает образ произвольного вектора $v \in V$ только в «инвариантных» терминах самого этого вектора, без

[2] точное формальное определение естественности см. в [КМ] или в любом учебнике по гомологической алгебре

использования координат, базисов или каких либо других дополнительных структур на V. Например, существует естественный изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$, но не существует естественного изоморфизма $V \xrightarrow{\sim} V^*$.

Задача 1.7. Постройте естественные линейные операторы, задающие изоморфизмы:

а) $U \otimes (V \otimes W)$ с $U \otimes V \otimes W$;

б) $(U \otimes V) \otimes W$ с $U \otimes V \otimes W$;

в) $(U \otimes V) \otimes W$ с $U \otimes V \otimes W$;

г) $U \otimes (V \oplus W)$ с $(U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$;

2.2. Полилинейные формы как тензоры. Рассмотрим отображение из $V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_n^*$ в пространство полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, переводящее набор функционалов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в их произведение, которое как форма на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ действует по правилу

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto \prod_i \xi_i(v_i) \ . \tag{2-1}$$

Отображение это, очевидно, полилинейно, а потому определяет линейный оператор из $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ в пространство полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, переводящий разложимые тензоры $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$ в формы-произведения (2-1).

Задача 1.8. Убедитесь, что таким способом устанавливается изоморфизм между $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ и пространством полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

В дальнейшем мы без каких-либо специальных оговорок постоянно будем отождествлять эти два пространства посредством построенного только что изоморфизма. В частности, запись $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ будет использоваться и как обозначение для пространства полилинейных форм на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

2.3. Канонический изоморфизм $\big(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\big)^* \to V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$. Прямо из определения тензорного произведения вытекает, что имеется биекция между линейными операторами из $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ в основное поле k и k-значными полилинейными формами на $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$. С учётом предыдущего пункта это даёт канонический линейный изоморфизм между $\big(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\big)^*$ и $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$, при котором результатом спаривания разложимого тензора $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ с разложимым тензором $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ является произведение

$$\big\langle\, v \ , \ \xi \,\big\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_i \xi_i(v_i) \ .$$

Это спаривание называется *полной свёрткой* тензора из $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ с тензором из $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$.

2.4. Линейные операторы как тензоры. Зададим отображение из $V^* \times W$ в пространство $\operatorname{Hom}(V, W)$ линейных отображений из V в W отправив каждую пару (ξ, w) в соответствующий оператор проектирования на w вдоль $\operatorname{Ann} \xi$, который действует по правилу

$$v \longmapsto \big\langle\, v \ , \ \xi \,\big\rangle \cdot w \ . \tag{2-2}$$

Это отображение, очевидно, полилинейно, а стало быть определяет единственный линейный оператор $V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W)$, переводящий разложимые тензоры $\xi \otimes w$ в операторы (2-2).

Задача 1.9. Убедитесь, что таким способом устанавливается изоморфизм между $V^* \otimes W$ и $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Задача 1.10. Пусть $\{e_i\}$ и $\{x_i\}$ — сопряжённые базисы в V и в V^*. Докажите, что *тензор Казимира*

$$\sum_i x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$$

не зависит от выбора базиса. Какому линейному оператору на V он соответствует?

Задача 1.11. Пусть операторы f и g при отождествлении $\mathrm{Hom}(V,V)$ с $V^* \otimes V$ записываются, соответственно, тензорами $\sum_i \varphi_i \otimes u_i$ и $\sum_j \psi_j \otimes v_i$. Проверьте, что их композицию $f \circ g$ можно записать в виде $\sum_j \psi_j \otimes w_i$ и в виде $\sum_i \eta_i \otimes u_i$, и получите явные выражения для w_j и η_i.

Задача 1.12. Постройте естественный линейный изоморфизм $\mathrm{Hom}(W,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W)^*$. Укажите явно в терминах матриц, как вычислять значение оператора из $\mathrm{Hom}(W,V)$ как функционала на $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Задача 1.13. Если в предыдущей задаче положить $W = V$, то получится корреляция

$$\mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)^* \ .$$

Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ она соответствует? Будет ли эта форма симметрической? Как она вычисляется в терминах матриц?

2.4.1. Тензорное произведение операторов. Пусть задан набор линейных операторов $V_i \xrightarrow{f_i} W_i$. Тогда существует единственный линейный оператор

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n} W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n \ ,$$

переводящий тензорные произведения векторов в тензорные произведения их образов:

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : \quad v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$$

(как и раньше, это следует из полилинейности отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$, переводящего $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ в $f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$). Оператор $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ называется *тензорным произведением* операторов f_i.

Задача 1.14. Проверьте, что с учётом изоморфизма

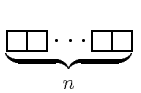
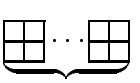
$$U_1^* \otimes U_2 \otimes V_1^* \otimes V_2 \simeq (U_1 \otimes V_1)^* \otimes (U_2 \otimes V_2) \simeq \mathrm{Hom}(U_1 \otimes V_1, U_2 \otimes V_2)$$

тензорное произведение операторов $U_1 \xrightarrow{f} U_2$ и $V_1 \xrightarrow{g} V_2$ есть не что иное как тензорным произведением соответствующих им тензоров из $U_1^* \otimes U_2$ и $V_1^* \otimes V_2$.

Задача 1.15. Пусть F — вложение, а Id — ненулевой тождественный оператор. Докажите, что $F \otimes \mathrm{Id}$ — вложение.

Задача 1.16. В стандартном базисе из зад.1.6 выразите матрицу тензорного произведения двух операторов $f : V \longrightarrow V$ и $g : W \longrightarrow W$ через матрицы f и g.

Задача 1.17. Пусть цикловой тип нильпотентного оператора $V \xrightarrow{F} V$ задаётся диаграммой Юнга

а) **б)**  **в)**  .

Каков цикловой тип $f \otimes f$ и $f \otimes f \otimes f$?

Задача 1.18. Пусть операторы F и G диагонализуемы и имеют собственные числа $\{\lambda_i\}$ и $\{\mu\}$. Верно ли, что $F \otimes G$ диагонализуем? Каковы его собственные числа? Могут ли они быть кратными, если все собственные числа исходных операторов были однократны?

§3. Тензорная алгебра векторного пространства

3.1. Тензорные степени. Фиксируем до конца этого параграфа *одно* d-мерное пространство V. Произведение

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$$

называется *n-той тензорной степенью* пространства V. Под $V^{\otimes 0}$ всегда понимается одномерное пространство k.

Отметим, что прямая сумма $\mathsf{T}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\limits_{k \geqslant 0} V^{\otimes k}$ представляет собой ассоциативную некоммутативную алгебру над полем k (произведение индуцировано тензорным произведением векторов). Она называется *свободной ассоциативной алгеброй над k, порождённой пространством V*.

3.2. Свёртки. Рассмотрим произведение

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q}$$

и зафиксируем два подмножества индексов

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, p\} \qquad J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, q\}$$

одинаковой мощности $\#I = \#J = k$. Существует единственный линейный оператор

$$\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \xrightarrow{c_{IJ}} \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-k} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-k},$$

который действует на разложимые тензоры по правилу

$$c_{IJ}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q) = \prod_{\nu=1}^{k} \varphi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \varphi_i \otimes \bigotimes_{j \notin J} v_j \ .$$

Этот оператор c_{IJ} называется *k-кратной свёрткой* по индексам из I и J.

Задача 1.19. Проверьте корректность определения c_{IJ} и опишите его действие в координатах.

3.2.1. Свёртка произведения векторов с полилинейной формой. Если, следуя n° 2.3, интерпретировать $V^{*\otimes p}$ или как пространство полилинейных форм на V, то свёртку можно воспринимать как отображение, которое переводит тензорное произведение

$$\psi \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q$$

p-линейной формы $\psi = \psi(w_1, w_2, \dots, w_p)$ на разложимый тензор из $V^{\otimes q}$ в тензорное произведение вида

$$\widetilde{\psi} \otimes \widetilde{v} \ ,$$

в котором $\widetilde{\psi}$ получается из ψ фиксацией векторов v_{j_ν} с $j_\nu \in J$ в качестве аргументов с номерами $i_\nu \in I$ и представляет собой полилинейную форму от остальных $(p-k)$ аргументов, а $\widetilde{v}$ получается из $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q$ выкидыванием всех этих v_{j_ν}, «переехавших» в зафиксированные аргументы формы ψ.

Задача 1.20. Убедитесь, что свёртки по непересекающимся множествам индексов перестановочны.

Свёртки часто возникают в двух своих крайних проявлениях.

3.2.2. Полная свёртка соответствует случаю $p = q = n$, $I = J = \{1, 2, \cdots, n\}$ и обозначается

$$\left\langle\, \tau \,,\, t \,\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} c_{\{1,2,\cdots,n\}\{1,2,\cdots,n\}}(\tau \otimes t) \quad \text{, где} \quad \tau \in V^{*\otimes n} \,,\, t \in V^{\otimes n} \ .$$

Она задаёт каноническую двойственность между пространствами $V^{*\otimes n}$ и $V^{\otimes n}$ и уже обсуждалась нами в 2-1.

Задача 1.21. Опишите полную свёртку в $V^* \otimes V$ на языке линейных операторов.

3.2.3. Внутреннее произведение. Если $p = 1$, а q — любое, и $I = J = \{1\}$, то свёртка называется *внутренним произведением* вектора $v \in V$ и полилинейной формы $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Она обозначается

$$V^{*\otimes n} \xrightarrow{\ i_v\ } V^{*\otimes(n-1)} : \quad \varphi \longmapsto i_v(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} c_{11}(v \otimes \varphi) \ ,$$

и представляет собой фиксацию вектора v в качестве первого аргумента формы φ.

Двойственным образом, при $q = 1$ и любом p возникает свёртка ковектора $\xi \in V^*$ и полилинейной формы $t \in V^{\otimes n}$ на V^*:

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\ i_\xi\ } V^{\otimes(n-1)} : \quad t \longmapsto i_\xi(t) \stackrel{\text{def}}{=} c_{11}(\xi \otimes t) \ .$$

3.3. Утверждение. *Пусть $\xi \in V^*$ — фиксированный ковектор. Операторы*

$$\begin{array}{lcll} V^{\otimes n} & \xrightarrow{\ i_\xi\ } & V^{\otimes(n-1)} : & v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \longmapsto \left\langle\, \xi \,,\, v_1 \,\right\rangle v_2 \otimes \dots \otimes v_n \\ V^{*\otimes n} & \xleftarrow{\ \mu_\xi\ } & V^{\otimes(n-1)} : & \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \dots \otimes \zeta_{n-1} \longmapsto \xi \otimes \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \dots \otimes \zeta_{n-1} \end{array}$$

внутреннего и левого тензорного умножения на ξ двойственны друг другу относительно канонического спаривания между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$, индуцированного полной свёрткой.

Доказательство. Это получается прямо из определений:

$$\begin{aligned} \left\langle\, \mu_\xi\left(\zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \dots \otimes \zeta_{n-1}\right) \,,\, v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \,\right\rangle = \\ = \left\langle\, \xi \,,\, v_1 \,\right\rangle \left\langle\, \zeta_1 \,,\, v_2 \,\right\rangle \cdots \left\langle\, \zeta_{n-1} \,,\, v_n \,\right\rangle = \\ = \left\langle\, \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \dots \otimes \zeta_{n-1} \,,\, i_\xi(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) \,\right\rangle \quad \square \end{aligned}$$

Задача 1.22. Сформулируйте и докажите двойственный вариант этого утверждения, а также его обобщения на свёртки по большему количеству индексов.

3.4. Действие симметрической группы на $\mathbf{V^{\otimes n}}$. Каждой перестановке $\sigma \in S_n$ соответствует единственный линейный автоморфизм $V^{\otimes n} \xrightarrow{\sigma} V^{\otimes n}$, действующий на разложимые тензоры по правилу

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} ,$$

т. е. попросту переставляющий сомножители.

Задача 1.23. Докажите, что таким образом возникает линейное представление группы S_n на $V^{\otimes n}$.

Канонически двойственное (в смысле полной свёртки) к только что рассмотренному действие $\mathfrak{S}_n$ на $V^{*\otimes n}$ происходит посредством обратных перестановок, поскольку $\langle\, \xi\,,\, \sigma(t)\,\rangle = \langle\, \sigma^{-1}(\xi)\,,\, t\,\rangle$, т. к.

$$\prod_i \langle\, \xi_i\,,\, t_{\sigma(i)}\,\rangle = \prod_j \langle\, \xi_{\sigma^{-1}(j)}\,,\, t_j\,\rangle$$

В частности действие $\mathfrak{S}_n$ на полилинейную форму φ происходит по правилу

$$\sigma\varphi\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \varphi(v_{\sigma^{-1}(1)}, v_{\sigma^{-1}(2)}, \ \ldots\ , v_{\sigma^{-1}(n)})$$

и сводится к перестановке аргументов.

§4. Симметрические тензоры.

Всюду в этом параграфе предполагается, что характеристика основного поля k равна нулю.

4.1. Симметричные тензоры и симметричные полилинейные формы. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $\sigma(t) = t \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ относительно естественного действия $\mathfrak{S}_n$ на $V^{\otimes n}$, описанного в n° 3.4. Аналогично, полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ называется *симметричным*, если

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ \ldots\ , v_{\sigma(n)}) = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Задача 1.24. Докажите, что симметричность полилинейного отображения φ равносильна тому, что значение $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ не изменяется при перестановке

а) любой пары аргументов v_i и v_j

б) любой пары *соседних* аргументов v_i

причём эти условия достаточно проверять только на базисных векторах.

Задача 1.25. Убедитесь, что любая композиция $f \circ \varphi$, где f – линейный оператор, а φ – полилинейное симметричное отображение, является полилинейным симметричным отображением.

Симметрические тензоры в $V^{\otimes n}$ составляют подпространство, называемое пространством *симметрических тензоров степени n над V*. Полная свёртка отождествляет его с пространством симметричных n-линейных форм на $V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow k$. Как правило, мы не будем делать разницы между этими пространствами, и будем обозначать их одинаково: $\mathsf{Sym}^n(V)$.

Задача 1.26. Постройте канонический изоморфизм между пространством полилинейных симметричных отображений из $V \times V \times \cdots \times V$ в W и $\mathsf{Sym}^n(V^*) \otimes W$.

Задача 1.27. Убедитесь, что тензорная степень $f^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{n}$ любого линейного оператора $V \xrightarrow{f} V$ переводит подпространство $\mathsf{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ в себя.

4.2. Стандартный базис симметрических тензоров. Для произвольного набора неотрицательных целых чисел $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d)$ с суммой $|\nu| = \sum \nu_i = n$ обозначим через $e^{[\nu]}$ сумму всех разложимых тензоров, являющихся произведением ν_1 векторов e_1, ν_2 векторов e_2, ..., ν_d векторов e_d, т. е. сложим все базисные разложимые тензоры, составляющие одну орбиту симметрической группы.

Задача 1.28. Сколько слагаемых будет в этой сумме?

Поскольку в разложение симметрического тензора по базису $e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}$ вместе с каждым базисным тензором войдут (с теми же коэффициентами) и все тензоры, получающиеся из него перестановками, суммы $e^{[\nu]}$ составляют базис в $\mathsf{Sym}^n(V)$. В частности,

$$\dim \mathsf{Sym}^n(V) = C^n_{n+d-1}$$

(число способов разбить d в сумму n упорядоченных целых неотрицательных слагаемых).

4.3. Поляризация однородных полиномов. Функция $F : V \longrightarrow k$ называется *однородным полиномом n-той степени*, если в некотором базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ значение $F(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d)$ является однородным многочленом степени n от переменных x_i. Совокупность всех однородных полиномов n-той степени мы будем обозначать через $\mathsf{Pol}^n(V)$

Задача 1.29. Докажите, что свойство функции быть однородным полиномом n-той степени не зависит от выбора базиса.

Задача 1.30. Докажите, что $\mathsf{Pol}^n(V)$ является векторным пространством, и вычислите его размерность.

4.3.1. Теорема. *Отображение* $\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{res_\Delta} \mathsf{Pol}^n$, *сопоставляющее симметричной полилинейной полилинейной форме* $\varphi \in \mathsf{Sym}^n(V^*)$ *её ограничения на диагональ в* $V \times V \times \cdots \times V$, *т. е. функцию* $V \xrightarrow{\varphi_\Delta} k$: $\varphi_\Delta(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v, v, \ldots, v)$, *является изоморфизмом векторных пространств (при* $\operatorname{char} k = 0$*).*

Доказательство. Фиксируем в V базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ с координатами $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$, составляющими двойственный базис в V^*. Для каждого $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d)$ с $\sum \nu_i = n$ образуем симметричный тензор $x^{[\nu]}$, равный сумме всех различных произведений ν_1 ковекторов x_1, ν_2 ковекторов x_2, ..., ν_d ковекторов x_d. Согласно n° 4.2 эти тензоры составляют базис в $\mathsf{Sym}^n(V^*)$. При ограничении на диагональ каждое слагаемое $x^{[\nu]}$ превратится в одночлен $x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d}$. С учётом общего количества слагаемых в $e^{[\nu]}$, получаем

$$x^{[\nu]}_\Delta = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_d!}\, x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d} \ ,$$

т. е. с точностью до ненулевых натуральных множителей образами стандартных базисных симметричных форм из$\mathsf{Sym}^n(V)$ являются базисные мономы в $\mathsf{Pol}^n(V)$. □

4.3.2. Определение. *Единственная симметричная полилинейная форма, ограничение которой на диагональ совпадает с заданным однородным полиномом n-той степени F называется полной поляризацией многочлена F и обозначается* $\mathrm{pl}^n F$.

Задача 1.31. Какой операции на полиномах соответствует операция внутреннего произведения полилинейной формы с данным вектором $v \in V$?

Задача 1.32. Проверьте, что если F – квадратичная форма (т. е. однородный полином второй степени), то

$$\mathrm{pl}^2 F(v,w) = \frac{1}{2}(F(v+w) - F(v) - F(w)) \ ,$$

и попробуйте придумать похожую формулу для поляризации кубической формы.

4.3.3. Поляры. Пусть F — полином степени n на V, а $\varphi = \mathrm{pl}^n F \in \mathsf{Sym}^n(V^*)$ – его полная поляризация. Для произвольного набора векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ свёртка φ с $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k$ по первым k индексам является симметрическим тензором из $\mathsf{Sym}^{n-k}(V^*)$. Его ограничение на диагональ называется *k-той полярой F относительно векторов* $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ и обозначается $\mathrm{pl}^k_{v_1,v_2,\dots,v_k} F \in \mathsf{Pol}^{n-k}(V)$.

Для первых поляр обычно вместо pl^1 пишут просто pl. Если же набор векторов состоит из k экземпляров одного и того же вектора v, то пишут pl^k_v и называют такую поляру k-той полярой F относительно v.

Задача 1.33. Докажите следующие свойства поляр

а) Отображение $(v, F) \longmapsto \mathrm{pl}_v F$ билинейно по v и F.

б) $\mathrm{pl}_v \circ \mathrm{pl}_w = \mathrm{pl}_w \circ \mathrm{pl}_v = \mathrm{pl}^2_{vw} = \mathrm{pl}^2_{wv}$.

в) $\mathrm{pl}^n_v F = F(v) \in k$.

г) Если $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ и $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ – двойственные базисы в V^* и в V соответственно, и $v = \sum v_i e_i$, то $\mathrm{pl}_v F = \dfrac{1}{\deg F} \dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{d} v_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$.

Из последней задачи следует, во-первых, что операция дифференцирования в направлении вектора *естественна* (или *ковариантна*) в том смысле, что $\partial F/\partial v$ зависит только от F и v, но не от выбора базиса. Во-вторых, мы получаем, что полная поляризация однородного многочлена F степени n от переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ может быть получена формальным дифференцированием по правилу

$$\mathrm{pl}^n F(\, v^{(1)},\, v^{(2)},\, \dots\, ,\, v^{(1)}\,) = \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^{d} v^{(1)}_{i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \sum_{i_2=1}^{d} v^{(2)}_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \ \cdots \ \sum_{i_n=1}^{d} v^{(n)}_{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} F(x) \ ,$$

где $v^{(i)} = (v^{(i)}_1, v^{(i)}_2, \dots, v^{(i)}_d)$ суть новые n наборов d-мерных переменных, от которых (полилинейно и симметрично) зависит форма $\mathrm{pl}^n F$.

Задача 1.34. Пользуясь свойствами поляр, разложите оператор $\mathrm{pl}^k_{u+v} = (\mathrm{pl}_u + \mathrm{pl}_v)^n$ по формуле бинома и докажите *формулу Тэйлора*: $F(v+w) = \sum\limits_{k=0} \deg F \dfrac{1}{k!} \dfrac{\partial^k F}{\partial v^k}(w) \quad \forall F \in \mathsf{Pol}^n(V)$.

4.4. Симметрическая двойственность. Рассмотрим ограничение канонического спаривания между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$, индуцированного полной свёрткой, на подпространства симметрических тензоров $\mathsf{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ и $\mathsf{Sym}^n(V^*) \subset V^{*\otimes n}$. Пусть $\{e^{[\nu]}\}$ и $\{x^{[\nu]}\}$ – стандартные базисы из n° 4.2, ассоциированные с парой двойственных базисов $\{e_1, e_2, \dots, e_d\} \subset V$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_d\} \subset V^*$.

Каждое слагаемое тензора $e^{[\nu]}$ аннулируют при свёртке любое слагаемое произвольного $e^{[\mu]}$ с $\mu \neq \nu$:

$$\left\langle\, e^{[\mu]}\,,\, e^{[\nu]}\,\right\rangle = 0 \ , \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu$$

При $\mu = \nu$ каждое из $\dfrac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}$ слагаемых $e^{[\nu]}$ сворачивается ненулевым образом ровно с одним слагаемым[3] из $x^{[\nu]}$, и эта нетривиальная свёртка равна 1. В результате

$$\left\langle\, e^{[\nu]}\,,\, x^{[\nu]}\,\right\rangle = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,.$$

мы получаем

4.4.1. Утверждение. *Над полем характеристики нуль полная свёртка задаёт каноническую двойственность между* $\mathsf{Sym}^n(V)$ *и* $\mathsf{Sym}^n(V^*)$. *При этом двойственным к базису* $\{e^{[\nu]}\} \subset \mathsf{Sym}^n(V)$ *будет базис* $\left\{\dfrac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,x^{[\nu]}\right\} \subset \mathsf{Sym}^n(V^*)$. □

4.5. Принцип Аронгольда. Двойственным в смысле Утв.4.4.1 фактом к Теор.4.3.1 является следующая

4.5.1. Теорема. *Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров* $\mathsf{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ *линейно порождается чистыми* n*-тыми степенями векторов из* V, *т. е. тензорами вида* $v^{\otimes n} = \underbrace{v \otimes v \otimes \cdots \otimes v}_{n}$.

Доказательство. Проверим, что любой линейный функционал на $\mathsf{Sym}^n(V)$, который обращается в нуль на всех чистых степенях, равен нулю тождественно. По Утв.4.4.1 всякий функционал на $\mathsf{Sym}^n(V)$ представляет собой полную свёртку с симметричной полилинейной формой $\varphi \in \mathsf{Sym}^n(V^*)$, и его значение на чистой тензорной степени $v^{\otimes n}$ есть не что иное как многочлен $\varphi_\Delta(v)$. Но над бесконечным только нулевой многочлен может принимать нулевые значения во всех точках. Поэтому $\varphi_\Delta = 0$, а значит и $\varphi = 0$. □

Задача 1.35. Представьте в виде линейной комбинации тензорных степеней следующие симметрические тензоры

а) $v \otimes w + w \otimes v$

б) $u \otimes v \otimes w + v \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes v - v \otimes u \otimes w - u \otimes w \otimes v - w \otimes v \otimes u$.

Практическим следствием доказанной теоремы является *принцип Аронгольда*: всякое *полилинейное* соотношение между симметрическими тензорами (или однородными многочленами) достаточно проверять только на тензорах вида $v^{\otimes n}$ (или, соответственно, на многочленах вида $\ell(x)^n$, где $\ell(x)$ – линейная форма). Другим важным следствием является

4.5.2. Следствие. *Над полем характеристики нуль векторное подпространство*

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_n}\left(V^{\otimes n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\, V^{\otimes n} \xrightarrow{F} V^{\otimes n} \mid F\sigma = \sigma F \;\; \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n \;\right\} \subset \mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)\,,$$

состоящее из всех тех линейных операторов, которые перестановочны с действием симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, *линейно порождается операторами вида* $F = f^{\otimes n}$ *с* $f \in \mathrm{End}(V)$.

Доказательство. Перепишем $\mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)$ в виде

$$\mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right) \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq \left(V^* \otimes V\right)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}\,.$$

[3] тем, в котором сомножители x_i стоят в таком же порядке, как e_i

Действие симметрической группы на $\mathrm{End}\,(V^{\otimes n})$, заданное правилом $F \longmapsto \sigma F \sigma^{-1}$, в терминах $\mathrm{End}(V)^{\otimes n}$ представляет собой в точности перестановку сомножителей в разложимых тензорах. Операторы, инвариантные относительно этого действия – это в точности симметрические тензоры $\mathsf{Sym}^n\,(\mathrm{End}(V)) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$. Как мы видели в Теор.4.5.1, пространство симметрических тензоров линейно порождается чистыми n-тыми степенями $F = f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{End}(V)$. □

4.6. Симметризация и симметрическое произведение. Линейный оператор

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} V^{\otimes n} \quad : \qquad t \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(t)\,, \tag{4-3}$$

называется *полной симметризацией* тензоров. Он тождественно действует на подпространстве симметрических тензорах и переводит произвольный тензор в симметрический. Тем самым, это проектор $V^{\otimes n}$ на $\mathsf{Sym}^n(V)$. Подчеркнём, что при $\mathrm{char}\,k > 0$ число $n!$ может оказаться делящимся на характеристику, и в этом случае симметризация будет аннулировать $\mathsf{Sym}^n(V)$!

Задача 1.36. Докажите, что канонически двойственным (в смысле полной свёртки) оператором к оператору $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} V^{\otimes n}$ будет оператор $V^{*\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} V^{*\otimes n}$.

Определим симметрическое произведение тензоров $t_1 \in \mathsf{Sym}^n(V)$ и $t_1 \in \mathsf{Sym}^n(V)$ связано с их тензорным произведением формулой

$$t_1 \cdot t_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sym}_{m+n}(t_1 \otimes t_2) \in \mathsf{Sym}^{m+n}(V) \tag{4-4}$$

Задача 1.37. Как устроена полилинейная форма, равная симметрическому произведению двух данных симметрических полилинейных форм?

Задача 1.38. Докажите, что оператор *симметрического* умножения на вектор v:

$$\mathsf{Sym}^{n-1}(V) \xrightarrow{s_v} \mathsf{Sym}^n(V)$$

канонически двойственен (в смысле полной свёртки) оператору внутреннего умножения

$$\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Sym}^{n-1}(V^*)\,.$$

(Эту задачу поучительно сопоставить с предыдущей Утв.3.3 и с Утв.5.4.1 ниже.)

Задача 1.39. Докажите, что симметрические умножения на векторы коммутативны и ассоциативны: $s_v s_w = s_w s_v$ и $s_u(s_v s_w) = (s_u s_v) s_w$ $forall\, u, v, w \in V$.

Задача 1.40. Проверьте, что симметрическое произведение ν_1 базисных векторов e_1, ν_2 базисных векторов $e_2, \ldots,$ ν_d базисных векторов e_d равно $\dfrac{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}{n!}\,e^{[\nu]}$ и что $e^{[\nu]}$ перемножаются по правилам: $e^{[\mu]} \cdot e^{[\nu]} = \dfrac{C^{\nu}_{\mu+\nu}}{C^{|\nu|}_{|\mu|+|\nu|}}\,e^{[\mu+\nu]}$, где

$$\mu + \nu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d) + (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d) = (\,(\mu_1 + \nu_1)\,,\,(\mu_2 + \nu_2)\,, \ldots\,(\mu_d + \nu_d)\,)\ ,$$

а $C^{\nu}_{\mu+\nu} = C^{\nu_1}_{\mu_1+\nu_1} C^{\nu_2}_{\mu_2+\nu_2}\,, \cdots C^{\nu_d}_{\mu_d+\nu_d}$.

4.7. Алгебра симметрических тензоров. Бесконечномерное векторное пространство [4]

$$\mathsf{Sym}(V^*) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathsf{Sym}^n(V^*)$$

вместе с описанным выше симметрическим произведением тензоров называется *алгеброй симметрических тензоров*. Согласно предыдущим задачам, изоморфизмы ограничения на диагональ $\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{res_\Delta} \mathsf{Pol}^n$ канонически отождествляют её с алгеброй $\mathsf{Pol}(V) = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{Pol}^n(V)$ всех полиномиальных функций на V, которая, в свою очередь, тавтологически изоморфна алгебре многочленов $k[x_1, \ldots, x_d]$ от координат (в произвольном базисе).

§5. Кососимметрические тензоры

Всюду в этом параграфе мы, как и в предыдущем, считаем, что характеристика основного поля k равна нулю.

5.1. Кососимметрические тензоры и кососимметричные полилинейные отображения. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *кососимметрическим*, если $\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ относительно естественного действия $\mathfrak{S}_n$ на $V^{\otimes n}$, описанного в n° 3.4. Аналогично полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ называется *кососимметричным*, если

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Задача 1.41. Докажите, что кососимметричность полилинейного отображения φ (над полем любой характеристики) равносильна тому, что значение $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ меняет знак при перестановке

а) любой пары аргументов v_i и v_j

б) любой пары *соседних* аргументов v_i

а над полем характеристики нуль — также и тому, что $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$, когда среди аргументов есть одинаковые. Убедитесь также, что эти условия достаточно проверять только на базисных векторах.

Задача 1.42. Убедитесь, что любая композиция $f \circ \varphi$, где f – линейный оператор, а φ – полилинейное кососимметричное отображение, является полилинейным кососимметричным отображением.

Кососимметрические тензоры в $V^{\otimes n}$ составляют подпространство, называемое пространством *симметрических тензоров степени n над V*. Полная свёртка отождествляет его с пространством кососимметричных n-линейных форм на $V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \to k$. Мы не делаем разницы между этими пространствами и обозначаем их одинаково: $\mathsf{Alt}^n(V)$.

Задача 1.43. Постройте канонический изоморфизм между пространством полилинейных кососимметричных отображений из $V \times V \times \cdots \times V$ в W и $\mathsf{Alt}^n(V^*) \otimes W$.

В разложение кососимметрического тензора t по стандартным базисным тензорам $e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes \cdots \otimes e_{in} \in V^{\otimes n}$ не могут входить произведения, содержащие хоть одну пару одинаковых

[4] мы полагаем ниже $\mathsf{Sym}^0(V) \stackrel{\text{def}}{=} k$

сомножителей, поскольку любое такое произведение инвариантно относительно их транспозиции σ, что исключает возможность равенства $t = -\sigma(t)$. В частности, кососимметричных тензоров степени $n > d = \dim V$ не существует вообще.

5.2. Стандартный базис кососимметрических тензоров. Пусть в V выбран базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$. Для произвольного набора *строго возрастающих* натуральных чисел $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, 2, \dots, d\}$ обозначим $e_{[I]}$ альтернированную сумму

$$e_{[I]} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} \ .$$

Задача 1.44. Сколько слагаемых будет в этой сумме?

Задача 1.45. Убедитесь, что тензоры $e_{[I]}$ с $\#I = n$ составляют базис в $\mathsf{Alt}^n(V)$.

Таким образом, $\dim \mathsf{Alt}^n(V) = C_d^e$ (т. е. количеству различных n-элементных подмножеств в d-элементном множестве). В частности, $\mathsf{Alt}^n(V) = 0$ при $n > d$.

Задача 1.46. Постройте естественный изоморфизм $\bigoplus_{\alpha=0}^{n} \mathsf{Alt}^\alpha(U) \otimes \mathsf{Alt}^{n-\alpha}(V) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Alt}^n(U \oplus V)$.

Задача 1.47. Докажите, что если базисы $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$ в V связаны посредством матрицы перехода $(a_{ij}$, то элементы A_{IJ} матрицы перехода между базисами $\{e'_{[I]}\}$ и $\{e_{[J]}\}$ в $\mathsf{Alt}^n(V)$ будут IJ-минорами матрицы $(a_{ij}$.

5.3. Кососимметрическая двойственность. Вычислим как действует полная свёртку между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ на стандартные базисы $e_{[I]}$ и $x_{[I]}$ из n° 5.2, ассоциированные с парой двойственных базисов $\{e_1, e_2, \dots, e_d\} \subset V$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_d\} \subset V^*$. При $I \neq J$ каждое слагаемое тензора $e_{[I]}$ аннулирует любое слагаемое $e_{[J]}$, а при $I = J$ каждое из $n!$ слагаемых $e_{[I]}$ имеет единичную свёртку с тем слагаемым из $x_{[I]}$, в котором сомножители x_i стоят в таком же порядке, как и e_i, и нулевую со всеми прочими. В результате

$$\left\langle\, e_{[I]}\,,\, x_{[J]} \,\right\rangle = n!\, \delta_{IJ} \ .$$

5.3.1. Следствие. *Полная свёртка между $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ индуцирует каноническую двойственность между $\mathsf{Alt}^n(V)$ и $\mathsf{Alt}^n(V^*)$. При этом двойственным к базису $\{e_{[I]}\} \subset \mathsf{Alt}^n(V)$ будет базис $\left\{\dfrac{1}{n!}\, x_{[I]}\right\} \subset \mathsf{Alt}^n(V^*)$.* □

5.4. Альтернирование и произведения. Определим линейный оператор *полного альтернирования* тензоров формулой

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\operatorname{alt}_n} V^{\otimes n} \quad : \qquad t \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sigma(t) \ , \tag{5-5}$$

Задача 1.48. Убедитесь, что alt_n является проектором $V^{\otimes n}$ на $\mathsf{Alt}^n(V)$ (т. е.тождественно действует на подпространстве кососимметричных тензоров и переводит произвольный тензор в кососимметрический).

Задача 1.49. Докажите, что канонически двойственным (в смысле полной свёртки) оператором к оператору $V^{\otimes n} \xrightarrow{\operatorname{alt}_n} V^{\otimes n}$ будет оператор $V^{*\otimes n} \xrightarrow{\operatorname{alt}_n} V^{*\otimes n}$.

Определим *внешнее произведение* кососимметрических тензоров $t_1 \in \mathsf{Alt}^n(V)$ и $t_1 \in \mathsf{Alt}^m(V)$ формулой

$$t_1 \wedge t_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{alt}_{m+n}(t_1 \otimes t_2) \in \mathsf{Alt}^{m+n}(V) \tag{5-6}$$

Задача 1.50. Как устроена кососимметрическая полилинейная форма, равная внешнему произведению двух данных кососимметрических полилинейных форм?

Наконец, отметим, что внутреннее произведение $V^{*\otimes n} \xrightarrow{i_v} V^{*\otimes(n-1)}$ переводит кососимметрические тензоры в кососимметрические, ибо при фиксации первого аргумента полилинейная кососимметричная форма продолжает таковой оставаться.

Задача 1.51. Поверьте, что $i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v$.

5.4.1. Утверждение. *Пусть $\xi \in V^*$ — фиксированный ковектор. Операторы*

$$Alt^n(V) \xrightarrow{i_\xi} Alt^{n-1}(V) \qquad \text{и} \qquad Alt^{n-1}(V^*) \xrightarrow{\lambda_\xi} Alt^n(V^*)$$

внутреннего и левого внешнего умножения на ξ двойственны друг другу в смысле Сл.5.3.1

Доказательство. Поскольку двойственным к внутреннему умножению на ξ оператором из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $V^{*\otimes n}$ является согласно Утв.3.3 оператор μ_ξ левого тензорного умножения на ξ, находим $\lambda_\xi^* = (\mathrm{alt}_n \circ \mu_\xi)^* = \mu_\xi^* \circ \mathrm{alt}_n^* = i_\xi \circ \mathrm{alt}_n = i_\xi$. □

Задача 1.52. Проверьте, что внешние произведения на векторы антикоммутируют $\lambda_v \circ \lambda_w = -\lambda_w \circ \lambda_v$ и выведите из этого, что для любых $t_1 \in \mathsf{Alt}^n(V)$ и $t_1 \in \mathsf{Alt}^m(V)$

$$t_1 \wedge t_2 = (-1)^{mn} t_2 \wedge t_1$$

(это свойство одно время было модно называть *суперкоммутативностью*.

Задача 1.53. Проверьте, что $e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \cdots \wedge e_{in} = \dfrac{1}{n!} e_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}$ при $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ и напишите таблицу умножения базисных кососимметричных тензоров.

Задача 1.54. Докажите, что длинные последовательности линейных операторов

$$0 \longrightarrow \mathsf{Alt}^n(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^{n-1}(V^*) \xrightarrow{i_v} \cdots \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^2(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^1(V^*) \xrightarrow{i_v} \mathsf{Alt}^0(V^*) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{Alt}^0(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^1(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^2(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \cdots \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^{n-1}(V) \xrightarrow{v\wedge\cdot} \mathsf{Alt}^n(V) \longrightarrow 0$$

точны (т. е. образ каждой стрелки совпадает с ядром следующей).

5.4.2. Алгебра кососимметрических тензоров. Как и в симметричном случае, беря прямую сумму $\mathsf{Alt}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{d} \mathsf{Alt}^n(V$ (где опять под $\mathsf{Alt}^0(V)$ понимается основное поле k) мы получим ассоциативную, но на этот раз *суперкоммутативную* и *конечномерную* k-алгебру. Эта алгебра называется *алгеброй кососимметрических тензоров* пространства V).

5.4.3. Форма объёма. Пространство кососимметрических форм максимально возможной степени $\mathsf{Alt}^d(V^*)$ одномерно, и выбор базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ в V индуцирует стандартную базисную форму $\omega_e = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_d$ в этом пространстве. Эта форма называется *формой ориентированного объёма*, ассоциированной с базисом e.

Задача 1.55. Убедитесь, что при выборе другого базиса в V форма объёма делится на определитель матрицы перехода.

Таким образом группа всех замен базисов в V, не изменяющих форму объёма, — это *специальная линейная группа* SL_d матриц с определителем 1.

Лекция 2
Симметрическая и внешняя алгебры

▷Симметрическая алгебра, алгебра многочленов и алгебра симметрических тензоров ▷Симметрические степени линейного оператора ▷Внешняя алгебра, грассмановы многочлены и кососимметрические тензоры ▷Соотношения Лапласа ▷Внешние степени линейного оператора ▷Разложимые поливекторы и соотношения Плюккера ▷Комплексы ДеРама и Кошуля

§1. Симметрическая алгебра векторного пространства

В этом параграфе мы дадим основанное на использовании тензорной алгебры $\mathcal{T}(V^*)$ «бескоординатное» определение алгебры полиномиальных функций на данном векторном пространстве V над любым полем.

1.1. Симметризующие соотношения. Обозначим через $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(V)$ двусторонний идеал, порождённый подпространством $\mathcal{S}_2 \subset V \otimes V \subset \mathcal{T}(V)$, которое по определению представляет собой линейную оболочку всевозможных тензоров вида

$$v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \quad , \qquad v_1, v_2 \in V \ .$$

Как векторное пространство идеал $\mathcal{S}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S} \cap V^{\otimes n} \subset V^{\otimes n} \ .$$

Подпространство $\mathcal{S}_n$ линейно порождается всевозможными тензорами вида

$$\begin{aligned} \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad - \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad = \\ = \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (v_i \otimes v_j - \otimes v_j \otimes v_i) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \end{aligned} \tag{1-1}$$

(соответственные сомножители, обозначенные многоточиями, одинаковы во всех трёх произведениях).

Задача 2.1. Докажите, что в $\mathcal{S}_n$ содержатся все тензоры вида

$$t - \sigma(t) \ , \quad \text{где} \quad t \in V^{\otimes n} \ , \ \sigma \in \mathfrak{S}_n \ ,$$

1.2. Определение. *Фактор-алгебра* $S(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(V)/\mathcal{S} = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} \left(V^{\otimes n} / \mathcal{S}_n \right)$ *называется симметрической алгеброй пространства* V, *а её однородные компоненты* $S^n V = V^{\otimes n}/\mathcal{S}_n$ *называются симметрическими степенями пространства* V.

1.2.1. Свойства умножения. Умножение в симметрической алгебре по построению *коммутативно*. Оно обозначается точкой (или никак не обозначается). Произведения вида $v_1^{m_1}v_2^{m_2}\cdots v_d^{m_d}$, т. е. результаты приведения по модулю $\mathcal{S}$ разложимых тензоров, представляющих собой тензорное произведение m_1 векторов v_1, m_2 векторов v_2, …, m_d векторов v_d (всё равно в каком порядке) линейно порождают n-тую симметрическую степень S^nV

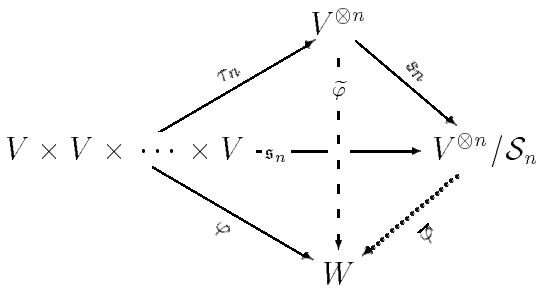
1.3. Универсальность симметрических степеней. Отображение

$$V\times V\times\cdots\times V\xrightarrow{\mathfrak{s}_n}S^n$$
$$(v_1,v_2,\dots,v_n)\xmapsto{\mathfrak{s}_n}v_1\cdot v_2\cdot\cdots\cdot v_n$$

полилинейно, симметрично и универсально в следующем смысле.

1.3.1. Лемма. *Для любого пространства W отображение $\operatorname{Hom}(S^nV,W)\xrightarrow{\sim}\mathsf{Sym}^n(V^*)\otimes W$, переводящее линейный оператор $S^nV\xrightarrow{f}W$ в композицию $V\times V\times\cdots\times V\xrightarrow{f\circ\mathfrak{s}_n}W$, устанавливает канонический изоморфизм пространства линейных операторов из S^nV в W с пространством полилинейных симметричных отображений $V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\to W$.*

Доказательство. Любое полилинейное отображение $V\times V\times\cdots\times V\xrightarrow{\varphi}W$ единственным образом пропускается через n-тую тензорную степень:



Симметричность φ равносильна тому, что все тензоры вида (1-1) лежат в ядре $\widetilde{\varphi}$, ибо

$$\widetilde{\varphi}(\cdots\otimes v_i\otimes v_j\otimes\cdots-\cdots\otimes v_j\otimes v_i\otimes\cdots)=$$
$$\widetilde{\varphi}(\cdots\otimes v_i\otimes v_j\otimes\cdots)-\widetilde{\varphi}(\cdots\otimes v_i\otimes v_j\otimes\cdots)=$$
$$=\varphi(\dots,v_i,v_j,\cdots)-\varphi(\dots,v_j,v_i,\cdots)=0\,,$$

поэтому линейный оператор $\widetilde{\varphi}$ пропускается через факторизацию по $\mathcal{S}_n$, т. е. $\widetilde{\varphi}=f\circ\mathfrak{s}_n$ для некоторого линейного оператора f. Единственность φ вытекает из того, что $V^{\otimes n}/\mathcal{S}_n$ порождается образами разложимых тензоров $t=v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n$, а их $\overline{\varphi}$ обязан переводить в $\varphi(v_1,v_2,\dots,v_n)$. □

Задача 2.2. Докажите, что симметрическая степень S^nV определяется условиями леммы однозначно с точностью до единственного изоморфизма. перестановочного с $\mathfrak{s}_n$.

1.4. Базис симметрической алгебры. Пусть векторы $e_1,e_2,\dots,e_d$ составляют базис в пространстве V. Рассмотрим пространство W однородных многочленов степени n от d переменных $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_d$ и отображение $V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\xrightarrow{\varphi}W$, переводящее n-ку векторов $v_i=\sum\alpha_{ij}e_j$ в произведение n линейных форм от ξ:

$$(v_1,v_2,\dots,v_n)\longmapsto\prod_i\left(\sum_j\alpha_{ij}\xi_j\right)\,,$$

полученных заменой базисных векторов e_ν на соответствующие переменные ξ_ν. Это отображение полилинейно и симметрично, а значит, пропускается через S^nV. Симметрические произведения базисных векторов $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_d^{m_d}$, порождающие S^nV, при этом будут переходить в (линейно независимые по определению) базисные мономы $\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\cdots\xi_d^{m_d}\in W$. Тем самым, произведения

$$e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_d^{m_d}$$

составляют базис в S^nV.

Задача 2.3. Убедитесь, что построенные только что отображения в действительности устанавливают *изоморфизм алгебр* $S(V)\xrightarrow{\sim} k[e_1,\dots,e_d]$, а не только векторных пространств.

Иначе говоря, понятие симметрической алгебры есть не что иное как «бескоординатная» версия понятия алгебры многочленов, и последняя получается из первой спецификацией базиса в пространстве V.

1.5. Симметрическая алгебра и полиномиальные функции. Всякий многочлен $f(x)\in k[x_1,\dots,x_d]$ задаёт полиномиальную функцию на пространстве V. Эта функция сопоставляет вектору $v=\sum\alpha_ie_i$ число $f(\alpha)\in k$. На бескоординатном языке, всякий элемент $\varphi\in S^n(V^*)$ задаёт на V функцию, сопоставляющую вектору $v\in V$ число из k, равное полной свёртке $v^{\otimes n}$ с любым тензором $t\in V^{*\otimes n}$, который сравним с φ по модулю $\mathcal{S}_n$.

Задача 2.4. Убедитесь, что результат свёртки не зависит от выбора тензора t, поднимающего φ из S^nV в $V^{\otimes n}$, и что получающаяся функция является полиномиальной.

Такое сопоставление элементам $S(V^*)$ полиномиальных функций на V является, очевидно, эпиморфизмом алгебры $S(V^*)$ на алгебру $\mathsf{Pol}(V)$. Этот эпиморфизм инъективен тогда и только тогда, когда основное поле *бесконечно*.

Задача 2.5. Приведите над конечным полем пример двух различных симметрических тензоров, задающих одинаковые функции на V.

Задача 2.6. Докажите, что над бесконечным полем алгебра $S(V^*)$ изоморфна алгебре полиномиальных функций на V.

1.6. Двойственность между $S^n(V)$ и $S^n(V^*)$. Ограничение симметричных полилинейных форм на диагональ $\mathsf{Sym}^n(V^*)\xrightarrow{res_\Delta}\mathsf{Pol}^n(V)$, переводящее форму $\varphi(v_1,v_2,\dots,v_n)$ функцию $\varphi_\Delta(v)=\varphi(v,v,\dots,v)$, после канонических отождествлений $\mathsf{Sym}^n(V^*)\simeq(S^nV)^*$ (универсальность симметрической степени) и $\mathsf{Pol}^n(V)\simeq S^n(V^*)$ (сопоставление многочлену полиномиальной функции) индуцирует отображение

$$(S^nV)^*\to S^n(V^*)\ ,$$

которое, как мы видели в прошлой лекции, является изоморфизмом над полем характеристики нуль. Таким образом, при $\operatorname{char}k=0$ между пространствами $S^n(V^*)$ с (S^nV) имеется *каноническая двойственность*, спаривающая стандартные базисные мономы по формуле

$$\left\langle\, e_1^{\mu_1}e_2^{\mu_2}\cdots e_d^{\mu_d}\ ,\ x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\cdots x_d^{\mu_d}\,\right\rangle=\frac{(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_d)!}{\mu_1!\,\mu_2!\cdots\mu_d!}\ ,$$

и $\left\langle\, e^{[\mu]}\,,\,x^{[\nu]}\,\right\rangle=0$ при $[\mu]\neq[\nu]$.

Задача 2.7. Покажите, что при $\operatorname{char}k=p|n$ оператор ограничения n-формы на диагональ не является ни мономорфным ни эпиморфным.

1.7. Симметрическая алгебра и симметрические тензоры. Над полем характеристики нуль ограничение проекции $V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^n V$ на подпространство симметрических тензоров $\mathsf{Sym}^n(V) \subset \mathcal{T}^n(V)$ переводит стандартный базис $e^{[\nu]} \in \mathsf{Sym}^n(V)$ в

$$\mathfrak{s}_n(e^{[\nu]}) = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\, e_1^{\nu_1} e_2^{\nu_2}\,\cdots\, e_d^{\nu_d}$$

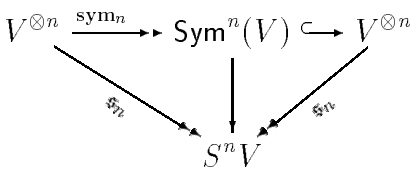
и следовательно, индуцирует канонический изоморфизм $\mathsf{Sym}^n V \xrightarrow{\sim} S^n V$. Более того, т. к. оператор полной симметризации

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{sym}_n} \mathsf{Sym}^n(V) \quad : \qquad t \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(t)\,,$$

переводит всякий тензор t в тензор, который сравним с t по модулю $\mathcal{S}_n$, поскольку

$$t - \mathrm{sym}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Big(t - \sigma(t)\Big) \in \mathcal{S}_n\,,$$

имеет место коммутативная диаграмма



Задача 2.8. Убедитесь, что с учётом канонического отождествления $S^n V^* \simeq \mathsf{Pol}^n(V)$ (сопоставление многочлену полиномиальной функции) проекция $\mathsf{Sym}^n(V^*) \xrightarrow{\mathfrak{s}_n} S^n V^*$ есть не что иное как ограничение полиномиальной формы на диагональ.

Задача 2.9. Убедитесь, что над полем характеристики нуль проекция $\mathsf{Sym}(V) \xrightarrow{\oplus \mathfrak{s}_n} S(V)$ является изоморфизмом алгебр (алгебра симметрических тензоров рассматривается с определённым на прошлой лекции *симметрическим произведением*, равным симметризации тензорного).

1.8. Симметрические степени линейного оператора. Поскольку тензорная степень $f^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{n}$ любого линейного оператора $V \xrightarrow{f} W$ переводит подпространство соотношений $\mathcal{S}_n(V) \subset V^{\otimes n}$ в подпространство соотношений $\mathcal{S}_n(W) \subset W^{\otimes n}$, корректно определён фактор-оператор $S^n V \xrightarrow{S^n(f)} S^n(W)$, который называется n-той *симметрической степенью* оператора f.

Задача 2.10. Докажите, что выражения для $\mathrm{tr}\,(\Lambda^k(f))$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора f при $k = 1, 2, 3\ldots$ можно вычислять при помощи производящей функции

$$\sum_{k \geqslant 0} \mathrm{tr}\,(\Lambda^k(f)) \cdot z^k = \frac{1}{\det(E - zf)}\,.$$

Указание: без ограничения общности можно считать, что оператор диагонализуем и имеет попарно разные собственные числа (почему?)

§2. Внешняя алгебра векторного пространства

В этом параграфе мы дадим определение алгебры *грассмановых* многочленов от *антикоммутирующих* переменных. Всюду в этом параграфе предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2$.

2.1. Антисимметризующие соотношения. Обозначим через $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}(V)$ двусторонний идеал, порождённый подпространством $\mathcal{A}_2 \subset V \otimes V \subset \mathcal{T}(V)$, которое, по определению, представляет собой линейную оболочку всевозможных тензоров вида

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \quad , \qquad v_1,\, v_2 \in V \ .$$

Как векторное пространство идеал $\mathcal{S}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{A}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A} \cap V^{\otimes n} \subset V^{\otimes n} \ .$$

Подпространство $\mathcal{A}_n$ линейно порождается всевозможными тензорами вида

$$\begin{aligned} \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad + \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \quad = \\ = \quad \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (v_i \otimes v_j + \otimes v_j \otimes v_i) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \end{aligned} \tag{2-2}$$

(соответственные сомножители, обозначенные многоточиями, одинаковы во всех трёх произведениях).

Задача 2.11. Убедитесь, что в $\mathcal{A}_n$ содержатся все тензоры вида

$$t - \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sigma(t) \ , \quad \text{где} \quad t \in V^{\otimes n} \ , \ \sigma \in \mathfrak{S}_n \ ,$$

2.2. Определение. *Фактор-алгебра* $\Lambda(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(V)/\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} (V^{\otimes n}/\mathcal{A}_n)$ *называется внешней или грассмановой алгеброй пространства* V, *а её однородные компоненты* $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/\mathcal{A}_n$ *называются внешними степенями пространства* V.

2.3. Свойства внешнего умножения. Умножение во внешней алгебре обозначается значком $\wedge$. Внешняя алгебра линейно порождается произведениями вида $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$ — образами разложимых тензоров $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$. При перестановке местами любых двух сомножителей такое произведение сменит знак. В частности, $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$, если среди сомножителей v_i встречаются одинаковые.

Задача 2.12. Докажите, что $\Lambda^n V = 0$ при $n > d = \dim V$, и выведите отсюда, что внешняя алгебра *конечномерна*.

При перестановке однородных сомножителей $\omega_1 \in \Lambda^k V$ и $\omega_2 \in \Lambda^m V$ знак произведения меняется по правилу

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{km} \omega_2 \wedge \omega_1 \ .$$

(ибо для превращения левой части в правую потребуется mn транспозиций линейных сомножителей). Это свойство называют *суперкоммутативностью*. Отметим, что однородные элементы чётной степени перестановочны со всеми элементами внешней алгебры и составляют в ней *коммутативный* идеал.

Задача 2.13. Докажите, что $\dim \Lambda^d V = 1$, где $d = \dim V$.

Задача 2.14. Опишите центр внешней алгебры.

2.4. Универсальность внешних степеней. Отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\mathfrak{a}_n} \Lambda^n V$ заданное правилом

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge v_2 \wedge \ \cdots \ \wedge v_n$$

полилинейно, кососимметрично и универсально в следующем смысле.

2.4.1. Лемма. *Для любого пространства W отображение* $\operatorname{Hom}(\Lambda^n V, W) \longrightarrow \mathsf{Alt}^n(V^*) \otimes W$, *переводящее линейный оператор $\Lambda^n V \xrightarrow{f} W$ в композицию $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{f \circ \mathfrak{a}_n} W$, устанавливает канонический изоморфизм пространства линейных операторов из $\Lambda^n V$ в W с пространством полилинейных кососимметричных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$.* $\square$

Задача 2.15. Докажите, лемму и проверьте, что внешняя степень $\Lambda^n V$ определяется её условиями однозначно с точностью до единственного изоморфизма. перестановочного с $\mathfrak{a}_n$.

Задача 2.16. Постройте канонические изоморфизм $\bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Lambda^k(U) \otimes \Lambda^{n-k}(V) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(U \oplus V)$.

2.5. Базис внешней алгебры Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_d$ составляют базис в пространстве V. Рассмотрим векторное пространство W, базис в котором составляют C_d^n символов вида ξ_I, где $I = \{i_1 < i_2 < \ \cdots \ < i_n\}$ пробегает всевозможные упорядоченные по возрастанию n-индексные поднаборы упорядоченного набора индексов $\{1, 2, \ldots, d\}$. Существует единственное полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \ \cdots \ \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} W \ ,$$

которое действует на наборы попарно различных базисных векторов по правилу

$$(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}) \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma)\, \xi_I$$

(где $I = \{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \ldots, i_{\sigma(n)}\}$ получается из $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ упорядочением индексов i_ν по возрастанию, и $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ – необходимая для этого перестановка номеров ν), а все остальные наборы базисных векторов отображает в нуль. Это отображение кососимметрично, и значит, пропускается через $\Lambda^n V$. При этом векторы

$$e_I \stackrel{\text{def}}{=} e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \ \cdots \ \wedge e_{in} \in \Lambda^n V \qquad (\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ \cdots \ < i_n \leqslant d\ ) \tag{2-3}$$

перейдут в базисные векторы пространства W, откуда следует из линейная независимость. С другой стороны, будучи фактором $V^{\otimes n}$, пространство $\Lambda^n V$, порождается образами разложимых базисных тензоров, которые вследствие суперкоммутативности исчерпываются произведениями (2-3). Таким образом C_d^n векторов (2-3) составляют базис во внешней алгебре.

Внешние произведения этих базисных векторов задаются формулами:

$$e_I \wedge e_J = \big(e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \ \cdots \ \wedge e_{im}\big) \wedge \big(\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \ \cdots \ \wedge \varepsilon_{j_n}\big) = \\ = \begin{cases} 0 & , \quad \text{при} \quad I \cap J \neq \varnothing \\ \operatorname{sgn}(\sigma_{IJ})\, e_K & , \quad \text{при} \quad I \cap J = \varnothing\,,\ I \cup J = K \end{cases} \tag{2-4}$$

где перестановка $\sigma_{IJ} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{m+n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{m+n}$ упорядочивает индексы по возрастанию, а $e_K = k_{i1} \wedge k_{i2} \wedge \cdots \wedge k_{im+n}$.

Задача 2.17. Пусть $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ и $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_{d-n}\}$ два дополнительных[1] друг другу набора возрастающих индексов. Докажите, что знак перестановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n & j_1 & j_2 & \cdots & j_{d-n} \\ 1 & 2 & \cdots & n & (n+1) & (n+2) & \cdots & d \end{pmatrix}$$

равен $(-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_n-n)} = (-1)^{|I|-\#I(\#I-1)/2}$.

2.5.1. Двойственность между дополнительными внешними степенями. Естественный изоморфизм

$$\Lambda^n V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}\left(\Lambda^{d-n}V,\ \Lambda^d V\right) = \left(\Lambda^{d-n}V\right)^* \otimes \Lambda^d V \qquad (\ d = \dim V\ ),$$

сопоставляющий каждому $\omega \in \Lambda^n V$ оператор левого внешнего умножения на $\wedge$:

$$\zeta \longmapsto \omega \wedge \zeta\ ,$$

переводит базисный вектор $e_I = e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \cdots \wedge e_{in} \in \Lambda^n V$ в «матричную единицу»:

$$\left(e_{\widehat{I}}\right)^* \otimes e_{\{1,2,\ldots,d\}} \ :\quad e_J \longmapsto \begin{cases} (-1)^{|I|-n(n-1)/2} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d & ,\quad \text{при} \quad J = \widehat{I} \\ 0 & ,\quad \text{при} \quad J \neq \widehat{I} \end{cases}$$

где $\widehat{I} = \{1, 2, \ldots, d\} \setminus I$.

2.5.2. Грассмановы многочлены. Если в пространстве V зафиксирован базис, то внешняя алгебра $\Lambda(V)$ может восприниматься как алгебра *грассмановых многочленов* $k\langle e_1, \ldots, e_d\rangle$ от базисных векторов пространства V. Как и обычная алгебра многочленов $k[x_1, \ldots, x_d]$, алгебра грассмановых многочленов $k\langle \xi_1, \ldots, \xi_d\rangle$ может быть определена как векторное пространство, базис в котором составляют грассмановы мономы

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k} \qquad \text{с} \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant d\ , \tag{2-5}$$

которые перемножаются по правилам (2-4), и по дистрибутивности это умножение распространяется на их линейные комбинации. Тавтологический изоморфизм $k\langle \xi_1, \ldots, \xi_d\rangle \simeq \Lambda(V)$, переводящий грассмановы переменные в базисные векторы пространства V, показывает, что алгебра грассмановых многочленов ассоциативна и суперкоммутативна.

Задача 2.18. Убедитесь, что в отличие от n° 1.5, сопоставление грассманову многочлену $\gamma(\xi)$ функции $V \longrightarrow k$, переводящей вектор $v = \sum a_i e_i$ в число $\gamma(a)$, всегда определяет *тождественно нулевую* функцию.

2.5.3. Замены базиса и соотношения Лапласа. При линейной замене грассмановых переменных по формулам $\eta_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\,\xi_j$ базисные мономы $\eta_I = \eta_{i_1} \wedge \eta_{i_2} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_n}$ будут

[1] т. е. $I \cap J = \varnothing$ и $I \cup J = \{1, 2, \ldots, d\}$

выражаться через базисные мономы $\xi_J = \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_n}$ по формулам

$$\eta_I = \eta_{i_1} \wedge \eta_{i_2} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_n} = \left(\sum_{j_1} a_{1j}\,\xi_j\right) \wedge \left(\sum_{j_2} a_{2j_2}\,\xi_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n} a_{nj_n}\,\xi_j\right) =$$
$$= \sum_{\substack{J:\\ \#J=n}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{i_1 j_{\sigma(1)}} a_{i_2 j_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_n j_{\sigma(n)}}\, \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_n} = \sum_{\substack{J:\\ \#J=n}} a_{IJ}\,\xi_J\ ,$$

где a_{IJ} — это $(n\times n)$-минор матрицы (a_{ij}), сосредоточенный в строках с номерами из I и столбцах с номерами из J.

Если зафиксировать два дополнительных набора индексов I и $\widehat{I}$ и проделать только что описанную замену переменных в тождестве

$$\eta_I \ \wedge \eta_{\widehat{I}} = (-1)^{|I|+\frac{1}{2}\#I(\#I+1)} \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_d$$

то в левой части получится

$$\eta_I \ \wedge \eta_{\widehat{I}} = \Big(\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} a_{I\ K}\,\xi_K\Big) \wedge \Big(\sum_{\substack{L:\\ \#L=(d-\#I)}} a_{L\widehat{I}}\,\xi_L\Big) =$$
$$= (-1)^{\#I(\#I+1)/2} \sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|} a_{IK} a_{\widehat{I}\widehat{K}}\, \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_d\ ,$$

где $\widehat{K} = \{1, 2, \ldots, d\} \setminus K$ – это дополнительный к K набор возрастающих индексов. В правой же части получится

$$(-1)^{\#I(\#I+1)/2} (-1)^{|I|} \det(a_{ij}) \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_d\ .$$

Таким образом, для произвольной матрицы (a_{ij}) справедливо тождество

$$\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK} \widehat{a}_{IK} = \det(a_{ij})\ , \tag{2-6}$$

в котором через $\widehat{a}_{IK} = a_{\widehat{I}\widehat{K}}$ обозначен $(d-n)\times(d-n)$-минор, дополнительный[2] к $(n\times n)$-минору a_{IK} и суммирование происходит по всем $(n\times n)$-минорам a_{IK}, стоящим в строках с номерами из I.

Если же $I \cap J \neq \varnothing$, то аналогичное предыдущему вычисление с тождеством $\eta_I \wedge \eta_J = 0$ приводит к равенству

$$\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK} \widehat{a}_{JK} = 0\ , \tag{2-7}$$

Число $(-1)^{|I|+|J|}\widehat{a}_{IJ}$ называется алгебраическим дополнением к минору a_{IJ}. Тождества (2-6) и (2-7) известны как *соотношения Лапласа* или формула для разложения определителя по набору строк (равенство (2-6)) и теорема об умножении на чужие алгебраические дополнения

[2] т. е. стоящий в строках и столбцах с дополнительными номерами

(равенство (2-7)). Если организовать $(n\times n)$-миноры в $C_d^n\times C_d^n$- матрицу $A=(a_{IJ})$, а алгебраические дополнения – в матрицу $\widehat{A}=\big((-1)^{|I|+|J|}\widehat{a}_{IJ}\big)$ (того же размера), то все соотношения Лапласа можно изобразить одним матричным соотношением

$$A\,\widehat{A}^t=\widehat{A}^t\,A=\det(a_{ij})\,E\ .$$

Задача 2.19. Опираясь на канонический изоморфизм из n°2.5.1 дайте другое (и более концептуальное) доказательство этого матричного тождества.

Задача 2.20. Пусть верхнетреугольные матрицы A и B таковы, что $AB=E$. Докажите, что всякий минор матрицы A равен своему алгебраическому дополнению в матрице B^t.

2.6. Внешние степени линейного оператора. Поскольку тензорная степень

$$f^{\otimes n}\stackrel{\text{def}}{=}\underbrace{f\otimes f\otimes\cdots\otimes f}_{n}$$

любого линейного оператора $V\xrightarrow{\ f\ }W$ переводит подпространство соотношений $\mathcal{A}_n(V)\subset V^{\otimes n}$ в подпространство соотношений $\mathcal{A}_n(W)\subset W^{\otimes n}$ (см. (2-2)), корректно определён фактор-оператор $\Lambda^nV\xrightarrow{\Lambda^n(f)}\Lambda^n(W)$, который называется n-той *внешней степенью* оператора f.

Задача 2.21. Пусть оператор $V\xrightarrow{\ f\ }W$ задаётся матрицей (f_{ij} столбцы которой суть столбцы координат образов $f(v_j)$ неких базисных векторов $v_j\in V$ в некотором базисе $w_i\in W$. Выразите матричные элементы f_{IJ} оператора $\Lambda^k(f)$ в базисах

$$v_J=v_{j_1}\wedge v_{j_2}\wedge\cdots\wedge v_{j_k}\in\Lambda^kV\qquad\text{и}\qquad w_I=w_{i1}\wedge w_{i2}\wedge\cdots\wedge w_{ik}\in\Lambda^kW\ .$$

Задача 2.22. Выразите $\operatorname{tr}\big(\Lambda^k(f)\big)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора $V\xrightarrow{\ f\ }V$.

2.7. Внешняя алгебра и кососимметрические тензоры. Над полем характеристики нуль проекция $V^{\otimes n}\xrightarrow{\ \mathfrak{a}_n\ }\Lambda^nV$ индуцирует канонический изоморфизм $\mathsf{Alt}^n(V)\xrightarrow{\ \sim\ }\Lambda^n(V)$ подпространства симметрических тензоров с внешней алгеброй и переводит базисные кососимметричные тензоры

$$e_{[I]}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,e_{i_{\sigma(1)}}\otimes e_{i_{\sigma(2)}}\otimes\ \cdots\ \otimes e_{i_{\sigma(n)}}\subset\mathsf{Alt}^n(V)$$

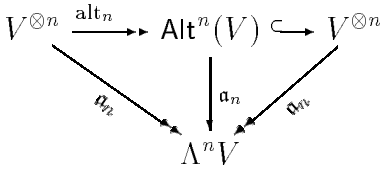
в базисные грассмановы мономы $n!\,e_{i1}\wedge e_{i2}\wedge\cdots\wedge e_{in}$. Более того, поскольку оператор полного альтернирования

$$V^{\otimes n}\xrightarrow{\ \operatorname{alt}_n\ }\mathsf{Alt}^n(V)\quad:\qquad t\longmapsto\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,\sigma(t)\ ,$$

переводит всякий тензор t в тензор, который сравним с t по модулю $\mathcal{A}_n$, ибо

$$t-\operatorname{alt}_n(t)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\Big(t-\operatorname{sgn}(\sigma)\,\sigma(t)\Big)\in\mathcal{A}_n\ ,$$

возникает коммутативная диаграмма:



Задача 2.23. Убедитесь, что над полем характеристики нуль проекция $\mathsf{Alt}(V) \xrightarrow{\oplus a_n} \Lambda(V)$ является изоморфизмом алгебр (т. е. переводит определённое в прошлой лекции кососимметрическое произведение на $\mathsf{Alt}(V)$ во внешнее произведение).

2.7.1. Двойственность между $\Lambda^n(V)$ и $\Lambda^n(V^*)$. Над полем характеристики нуль композиция проекции $\mathsf{Alt}^n(V^*) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(V^*)$ и канонического изоморфизма $\mathsf{Alt}^n(V^*) \simeq (\Lambda^n V)^*$ (универсальность внешнего степени) задаёт отождествление

$$(\Lambda^n V)^* \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(V^*) \ ,$$

Таким образом, при $\operatorname{char} k = 0$ пространства $(\Lambda^n(V))$ и $\Lambda^n(V^*)$ канонически двойственны друг другу, и при этой двойственности стандартные базисные векторы спариваются по правилу

$$\langle e_I \, , \, x_J \rangle = n! \cdot \delta_{IJ}$$

2.8. Критерий разложимости поливектора. Всюду в этом пункте мы предполагаем, что $\operatorname{char} k = 0$. Векторы $\omega \in \Lambda^n V$ иногда называют *поливекторами* или n-векторами в V.

Задача 2.24. Проверьте, что $\Lambda^n(U \cap W) = \Lambda^n U \cap \Lambda^n W \quad \forall\, U, W \subset V$.

С каждым n-вектором ω можно связать его *оболочку* $Span(\omega)$ — минимальное по включению подпространство в V, удовлетворяющее условию $\omega \in \Lambda^n W$. Его можно задать как пересечение всех удовлетворяющих этому условию подпространств:

$$Span(\omega) = \bigcap_{\omega \in \Lambda^n W \subset V} W$$

Поливектор $\omega \in \Lambda^n V$ называется разложимым, если он представим в виде произведения

$$\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$$

n «обычных» векторов пространства V.

Задача 2.25. Докажите, что следующие условия на поливектор $\omega \in \Lambda^n V$ эквивалентны:
(а) ω разложим; (б) $\dim Span(\omega) = n$; (в) $v \wedge \omega = 0 \quad \forall\, v \in , Span(\omega)$.

Чтобы описать $Span(\omega)$ конструктивно, рассмотрим линейный оператор свёртки с ω:

$$\Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{i_\omega} V \ ,$$

который переводит поливекторы $\zeta \in \Lambda^{n-1}(V^*) \simeq \mathsf{Alt}^{n-1}(V^*) \subset V^{*\otimes(n-1)}$, рассматриваемые как кососимметричные тензоры, в их свёртки по первым $(n-1)$ индексам с ω, который также рассматривается как кососимметричный тензор из $V^{\otimes n}$:

$$i_\omega : \zeta \longmapsto c_{\{1,2,\ldots,(n-1\},\{1,2,\ldots,(n-1\}}(\zeta \otimes \omega) \in V$$

Поскольку $\omega \subset \Lambda^n Span(\omega) \subset Span(\omega)^{\otimes n}$, свёртка ω с любым тензором из $V^{*\otimes(n-1)}$ будет вектором из $Span(\omega)$. Поэтому $\operatorname{im} i_\omega \subset Span(\omega)$.

2.8.1. Лемма. $Span(\omega) = \operatorname{im} i_\omega$.

Доказательство. Достаточно проверить, что любой функционал $\xi \in V^*$, который аннулирует $\operatorname{im} i_\omega$, будет аннулировать и $Span(\omega)$. Дополним ξ до базиса в V^*, и запишем поливектор ω в двойственном базисе пространства V как

$$\omega = \omega' \wedge e + \omega'' \qquad \text{с} \quad \omega' \in \Lambda^{n-1}\operatorname{Ann}\xi\,, \quad \omega'' \in \Lambda^n \operatorname{Ann}\xi\,,$$

где $e \in V$ – это базисный вектор, двойственный ξ. Если $\operatorname{im} i_\omega \subset \operatorname{Ann}\xi$, то для любого $\zeta \in \Lambda^{n-1}V$ будем иметь тривиальную полную свёртку:

$$0 = \left\langle \xi\,,\, i_\omega(\zeta) \right\rangle = \left\langle \zeta \otimes \xi\,,\, \omega \right\rangle = \left\langle \zeta \otimes \xi\,,\, \omega'' \right\rangle + \left\langle \zeta \otimes \xi\,,\, \omega' \wedge e \right\rangle = \left\langle \zeta\,,\, \omega' \right\rangle\,,$$

Поэтому $\omega' = 0$ и $Span(\omega) = Span(\omega'') \subset \operatorname{Ann}\xi$. □

2.8.2. Следствие. *Поливектор $\omega \in \Lambda^n V$ разложим тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе квадратных уравнений*

$$i_\omega(\zeta) \wedge \omega = 0 \qquad \forall\, \zeta \in \Lambda^{n-1}(V^*) \tag{2-8}$$

(они называются соотношениями Плюккера). □

Поскольку соотношения (2-8) линейны по ζ их достаточно проверять только для C_d^{n-1} базисных тензоров $\zeta = x_I$. Таким образом, множество разложимых тензоров представляет собой пересечение C_d^{n-1} квадрик. Но даже и эти «базисные» квадрики в действительности зависимы, и для описания множества разложимых поливекторов часто бывает можно обойтись ещё меньшим числом уравнений. Геометрическая точка зрения на сей счёт будет развита в следующих двух лекциях.

Задача 2.26. Докажите, что бивектор ω на четырёхмерном пространстве разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

2.9. Комплексы ДеРама и Кошуля. В этом пункте мы снова считаем, что $\operatorname{char} k = 0$. Рассмотрим линейный оператор $d_{m,n}$, определяемый как композиция

$$\begin{array}{ccccc} S^m(V^*) \otimes \Lambda^n(V^*) & & \xrightarrow{\quad d_{m,n} \quad} & & S^{m-1}(V^*) \otimes \Lambda^{n+1}(V^*) \\ & \searrow^{\Delta\otimes \mathrm{Id}} & & \nearrow_{\mathrm{Id}\otimes\wedge} & \\ & & S^{m-1}(V^*) \otimes V^* \otimes \Lambda^n(V^*) & & \end{array}$$

где $S^m(V^*) \xrightarrow{\Delta} S^{m-1}(V^*) \otimes V^*$ — оператор, двойственный к симметрическому умножению $S^{m-1}V \otimes V \xrightarrow{\mu} S^m V$, а $V^* \otimes \Lambda^n(V^*) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{n+1}(V)$ — внешнее умножение.

Задача 2.27. Убедитесь, что $\operatorname{im}(d_{m,n}) \subset \ker(d_{m-1,n+1})$, т. е. что последлвательность операторов

$$\cdots S^{m+1}(V^*) \otimes \Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{d} S^m(V^*) \otimes \Lambda^n(V^*) \xrightarrow{d} S^{m-1}(V^*) \otimes \Lambda^{n+1}(V^*) \cdots$$

является *комплексом*.

Складывая все такие последовательности и группируя вместе одинаковые внешние степени, мы с учётом отождествления $\bigoplus_{m\geqslant 0} S^m(V^*) \simeq k[x_1,\dots,x_d]$ получаем комплекс бесконечномерных векторных пространств:

$$\cdots k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n-1}(V^*) \xrightarrow{d} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n}(V^*) \xrightarrow{d} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n+1}(V^*)\cdots .$$

Он называется *комплексом ДеРама*, а входящие в него пространства — модулями *дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами*, поскольку они представляют собой свободные модули конечного ранга над кольцом $k[x_1,\dots,x_d]$. Отображения d, однако, не являются гомоморфизмами $k[x_1,\dots,x_d]$-модулей, поскольку не перестановочны с умножением на многочлены, отличные от констант. Операция d называется *внешним дифференцированием* и представляет собой дифференциальный оператор. Она увеличивает внешнюю степень формы, одновременно уменьшая степень её коэффициентов.

Задача 2.28. Убедитесь, что в координатах нешнее дифференцирование происходит по формуле:

$$d\Big(F(x)\otimes x_{i1}\wedge x_{i2}\wedge\cdots\wedge x_{in}\Big) = \sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\partial F(x)}{\partial x_\alpha}\otimes x_\alpha\wedge x_{i1}\wedge x_{i2}\wedge\cdots\wedge x_{in} .$$

Двойственным к дерамовскому дифференциалу $d_{m+1,n-1}$ будет оператор

$$S^m(V)\otimes\Lambda^n(V) \xrightarrow{\partial_{m,n}} S^{m+1}(V)\otimes\Lambda^{n-1}(V);,$$

представляющий собой композицию симметрического произведения и внешнего коумножения. Это отображение называется *дифференциалом Кошуля*.

Задача 2.29. Проверьте, что $\operatorname{im}\partial_{m,n}\subset\ker\partial_{m+1,n-1}$ и что кошулевские дифференциалы можно сгруппировать в *комплекс Кошуля*

$$\cdots \longrightarrow S(V)\otimes\Lambda^{n+1}V \xrightarrow{\partial} S(V)\otimes\Lambda^{n}V \xrightarrow{\partial} S(V)\otimes\Lambda^{n+1}V \longrightarrow \cdots$$

Если теперь написать комплекс Кошуля для пространства V^* вместо пространства V, то мы получим комплекс, состоящий из тех же модулей над кольцом многочленов, что и комплекс ДеРама, но со стрелками, идущими в противоположную сторону:

$$\cdots k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n+1}(V^*) \xrightarrow{\partial} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n}(V^*) \xrightarrow{\partial} k[x_1,\dots,x_d]\otimes\Lambda^{n-1}(V^*)\cdots .$$

Задача 2.30. Вычислите явно $\partial\Big(F(x)\otimes x_{i1}\wedge x_{i2}\wedge\cdots\wedge x_{in}\Big)$.

Задача 2.31. Докажите, что ∂ является гомоморфизмом $k[x_1,\dots,x_d]$-модулей, т. е. перестановочен с умножением на многочлены.

Задача 2.32. Вычислите коммутатор $\gamma = \partial_{m-1,n+1}\circ d_{m,n} - d_{m+1,n-1}\circ\partial_{m,n}$:

$$\begin{array}{ccc} S^m(V^*)\otimes\Lambda^n(V^*) & \xrightarrow{d_{m,n}} & S^{m-1}(V^*)\otimes\Lambda^{n+1}(V^*) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_{m,n}} & \overset{\gamma}{\searrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_{m-1,n+1}} \\ S^{m+1}(V^*)\otimes\Lambda^{n-1}(V^*) & \xrightarrow[d_{m+1,n-1}]{} & S^{m}(V^*)\otimes\Lambda^{n}(V^*) \end{array}$$

Задача 2.33. Докажите, что оба комплекса – Кошуля и ДеРама – являются *точными*, т. е. $\ker d_{m,n} = \operatorname{im} d_{m+1,n-1}$ и $\ker\partial_{m,n} = \operatorname{im}\partial_{m-1,n+1}$.

Лекция 3
Проективная геометрия.

▷Проективное пространство и однородные координаты. ▷Аффинные карты и клеточное разбиение. ▷Проектирование ▷Линейные проективные преобразования ▷Пространство коник ▷Коника Веронезе ▷Гексограмма Паскаля ▷Геометрия проективных квадрик ▷Полярное соответствие ▷Квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$. ▷Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$. ▷Циклы Шуберта ▷Пучки и связки прямых в $\mathbb{P}_3$ ▷Звёздочка Ходжа

§1. Проективное пространство.

1.1. Аффинные карты и клеточное разбиение. Пусть V – $(n+1)$-мерное векторное пространство над полем k. Точечное пространство, точки которого взаимно однозначно соответствуют классам пропорциональности ненулевых векторов из V, называется *проективизацией* пространства V и обозначается $\mathbb{P}(V)$ или $\mathbb{P}_n$, если важна только размерность.

Иными словами, точки n-мерного проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ – это прямые в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве $Aff(V)$, проходящие через «начальную» точку 0, соответствующую нулевому вектору. Чтобы наблюдать их в виде настоящих точек, надо разместить в $Aff(V)$ экран – любую n-мерную аффинную гиперплоскость, не проходящую через нуль. Такие гиперплоскости называются *аффинными картами* на $\mathbb{P}_n$. Прямые, пересекающие экран изобразятся на аффинной карте обычными точками (см. рис. 1).

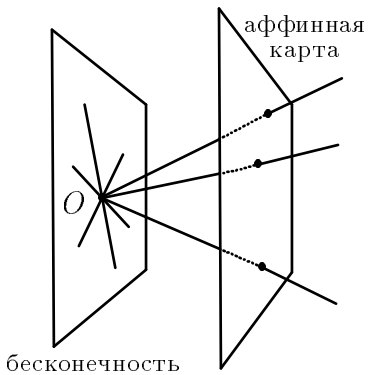


Рис. 1. Проективный мир.

Отметим, что никакая аффинная карта не покрывает $\mathbb{P}_n$ целиком – вне неё остаются все параллельные ей прямые, составляющие, проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$. Оно называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* по отношению к выбранной аффинной карте. Таким образом мы получаем разбиение $\mathbb{P}_n$ в дизъюнктное объединение открытых аффинных «клеток»:

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

в котором последнее $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ – это одна точка.

Задача 3.1. Сколько точек в проективном пространстве над конечным полем $\mathbb{F}_q$? Подсчитайте количество точек в левой и правой частях предыдущей формулы независимо (получится формула суммирования).

Задача 3.2. Опишите топологические пространства $\mathbb{RP}_n$ и $\mathbb{CP}_n$ хотя бы для $n = 1, 2$. Какие у них группы гомологий и фундаментальные группы?

1.2. Однородные и аффинные координаты. Фиксируем базис $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ с координатами $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Наборы отношений $(t_0 \colon t_1 \colon \ldots \colon t_n)$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ и называются *однородными координатами* в $\mathbb{P}_n$. Работают с однородными координатами как и с обычными, помня, однако, что геометрически корректными являются только те формулы, смысл которых не меняется при умножении всех координат на общую константу. Например, если $F(t)$ — однородный многочлен, скажем, m-той степени, то уравнение $F(t) = 0$ корректно определяет геометрическую фигуру на $\mathbb{P}_n$, поскольку для пропорционального набора координат λt, который изображает ту же точку на $\mathbb{P}_n$, также имеем $F(\lambda t) = \lambda^m F(t) = 0$. Напротив, уравнение типа $t_0^2 + t_1 = 3$ никакой геометрической фигуры не задаёт.

Кроме однородных координат, определённых глобально на всём $\mathbb{P}_n$, можно использовать при вычислениях *локальные аффинные* координаты, выбирая базис отдельно в каждой аффинной карте. При этом необходимо помнить, что одна и та же точка $\mathbb{P}_n$ будет изображаться в различных аффинных картах различными координатами. В частности, задавая глобальный объект локальными уравнениями надо проверять, что эти уравнения согласованы на пересечениях карт.

1.2.1. Стандартное аффинное покрытие. Обозначим через U_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, аффинную карту в $\mathbb{P}_n$, заданную аффинной гиперплоскостью $\{t_\nu = 1\} \subset V$, и зафиксируем в ней аффинные координаты $x_i^{(\nu)}$ относительно параллельных U_ν базисных векторов e_i с $i \neq \nu$ (всего будет n координат, индекс $i = \nu$ останется незадействован в $x_i^{(\nu)}$). Такие карты U_ν называются *стандартными аффинными картами*. Карта U_ν покрывает все точки $t \in \mathbb{P}_n$, у которых $t_\nu \neq 0$, и сопоставляет каждой такой точке набор аффинных координат $x_i = t_i/t_\nu$ (где $i \neq \nu$). Таким образом, $\mathbb{P}_n = \bigcup_{\nu=0}^{n} U_\nu$, и $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из точек t, у которых $t_\mu, t_\nu \neq 0$ одновременно. Внутри U_μ это пересечение в локальных аффинных координатах описывается условием $x_\nu^{(\mu)} \neq 0$, а внутри U_ν — условием $x_\mu^{(\nu)} \neq 0$. Набор локальных координат $x^{(\mu)}$ тогда и только тогда описывает ту же точку $t \in U_\nu \cap U_\mu \subset \mathbb{P}_n$, что и набор локальных координат $x^{(\nu)}$, когда

$$\begin{aligned} x_\nu^{(\mu)} &= 1/x_\mu^{(\nu)} \\ x_i^{(\mu)} &= x_i^{(\nu)}/x_\mu^{(\nu)} \quad \text{при} \quad i \neq \mu, \nu \end{aligned}$$

Правые части этих формул называются *функциями перехода* от координат $x^{(\nu)}$ к координатам $x^{(\mu)}$ на $U_\mu \cap U_\nu$.

Задача 3.3. Задайте плоскую конику $t_0^2 + t_1^2 = t_2^2$ локальными аффинными уравнениями в стандартных картах U_1 и U_2, а также в карте $U = \{\, t \mid t_0 = t_1 + 1 \,\}$ (в каких хотите аффинных координатах). Какие аффинные кривые второго порядка при этом получатся?

1.3. Подпространства. Проективным подпространством в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называется проективизация $\mathbb{P}(W)$ произвольного ненулевого векторного подпространства $W \subset V$. Подчеркнём,

что *нульмерное* проективное подпространство (т. е. проективизация одномерного векторного) – это одна точка. Отметим также, что *коразмерность* $\mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}(V)$ совпадает с *коразмерностью* W в V. Поэтому коразмерность пересечения k-мерного и m-мерного проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$ не превышает $n-k+n-m$, и стало быть размерность такого пересечения не меньше $k+m-n$. В частности, любые два подпространства размерностей k и $n-k$ имеют в $\mathbb{P}_n$ непустое пересечение. Например, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются.

1.4. Двойственность. Сопоставляя каждому подпространству $W \subset V$ его аннулятор $\operatorname{Ann}(W) \subset V^*$, мы получаем биекцию между k-мерными подпространствами в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и подпространствами коразмерности k в $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$. Эта биекция, очевидно, оборачивает включения, ибо $U \subset W \iff \operatorname{Ann}(U) \supset \operatorname{Ann}(W)$.

Задача 3.4. Убедитесь, что $(n+1)$ точек в $\mathbb{P}_n^\times$ лежат в одной гиперплоскости тогда и только тогда, когда соответствующие им $(n+1)$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$ пересекаются. Обобщите это утверждение в таком духе: m точек на $\mathbb{P}_n$ лежат в одной k-мерной плоскости тогда и только тогда, когда соответствующие им ....

1.5. Проектирование. Разложению векторного пространства в прямую сумму $V = U \oplus W$ двух ненулевых подпространств соответствует выбор в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ двух *непересекающихся* подпространств $C = \mathbb{P}(U)$ и $H = \mathbb{P}(W)$ с максимально возможной суммой размерностей $\dim C + \dim L = n-1$. Такие проективные подпространства называются *дополнительными*.

Поскольку всякий вектор $v \in V$ имеет единственное представление в виде $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, для каждого $v \in V \setminus (U \cup W)$ существует единственное содержащее v двумерное подпространство $L \subset V$, имеющая ненулевое пересечение как с U, так и с W. Это подпространство — линейная оболочка тех u и w, для которых $u + w = v$. Геометрически это означает, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \setminus (C \cup H)$ существует ровно одна прямая $\ell = \mathbb{P}(L)$, которая проходит через p и пересекает как C, так и H.

1.5.1. Определение. *Пусть $C, H \subset \mathbb{P}_n$ – дополнительные проективные подпространства. Отображение $(\mathbb{P}_n \setminus H) \xrightarrow{\pi_C} H$, переводящее каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus H$ в точку пересечения с H той единственной проходящей через p прямой, которая задевает как C, так и H, называется линейным проектированием на H из C.*

1.6. Линейные проективные преобразования — это отображения $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{f} \mathbb{P}(V)$, индуцированные *невырожденными* линейными операторами $f \in GL(V)$. Группа линейных проективных преобразований пространства $\mathbb{P}(V)$ обозначается $PGL(V)$ и называется *проективной линейной группой*. Если V – это стандартное координатное пространство k^{n+1}, то наряду с $PGL(V)$ пишут также $PGL_{n+1}(k)$.

Задача 3.5. Докажите, что $f \in GL(V)$ действует на $\mathbb{P}(V)$ тождественно тогда и только тогда, когда $f = \lambda \operatorname{Id}_V$ – гомотетия.

Задача 3.6. Докажите, что два невырожденных линейных оператора тогда и только тогда индуцируют одно и то же линейное проективное преобразование, когда они пропорциональны.

Задача 3.7. Сколько элементов в $PGL_n(\mathbb{F}_q)$?[1]

1.6.1. Пример: дробно-линейные преобразования прямой. Проективная прямая $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(t_0 : t_1)$ есть объединение аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ – аффинной

[1] хотя бы для $n = 2, 3, 4$ и $q = 2, 3$

карты $\{t_0 = 1\}$ с аффинной координатой $x = t_1/t_0$ – и бесконечно удалённой точки $t = (0\colon 1)$, которой соответствует значение $x = \infty$. Линейный оператор $f \in GL_2$, который действует на однородные координаты по правилу

$$f\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,t_0 + b\,t_1 \\ c\,t_0 + d\,t_1 \end{pmatrix}$$

индуцирует линейное проективное преобразование, которое в локальной карте $\mathbb{A}^1$ изображается дробно-линейным преобразованием аффинной координаты x

$$f(x) = \frac{a + b\,x}{c + d\,x}\,.$$

Например, преобразование

$$x \longmapsto \frac{x_1 - x_\infty}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_\infty}$$

замечательно тем, что переводит заданные три точки x_0, x_1 и x_∞ в точки 0, 1 и ∞ соответственно.

Задача 3.8. Докажите, что существует единственное линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_1$, которое переводит произвольно заданные три различных точки в любые другие произвольно заданные три различных точки.

Задача 3.9. Существует ли линейное проективное преобразование плоскости

а) переводящее произвольно заданные четыре прямые общего положения[2] в какие-либо другие произвольно заданные четыре прямые общего положения?

б) сохраняющее заданный треугольник и переводящее произвольно заданную точку внутри него в любую другую заданную внутри него точку?

Задача 3.10. Можно ли на «школьной» евклидовой плоскости одной линейкой построить центр заданного круга?

Задача 3.11. Даны шесть точек A, B, C, A', B', C'. Докажите, что если три прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, то три точки пересечений $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ и $CA \cap C'A'$ лежат на одной прямой (*теорема Дезарга*).

Задача 3.12. Сформулируйте и докажите двойственное к предыдущему утверждение в $\mathbb{P}_2^\times$ (*теорему Паппа*).

1.6.2. Теорема. *Существует единственное линейное проективное преобразование $\mathbb{P}_n$, переводящее произвольно заданные $(n+2)$ точек общего положения[3] в любые другие произвольно заданные $(n+2)$ точек общего положения.*

Доказательство. Всякий оператор, задающий линейное проективное преобразование, которое переводит $(n+1)$ точек $\mathbb{P}(V)$, соответствующих базисным векторам $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, в другие $(n+1)$ точек, соответствующих другим базисным векторам $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$, действует на V по правилу $v_i \longmapsto \lambda_i w_i$, где $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — набор ненулевых констант. Если

[2] в том смысле, что никакие три из них не пересекаются в одной точке

[3] в том смысле, что никакие $(n+1)$ из них не лежат в одной гиперплоскости

$(n+2)$-ая точка, отвечающая вектору $v = \sum \alpha_i v_i$ с ненулевыми[4] α_i, переходит в точку, отвечающую вектору $w = \sum \beta_i w_i$ с ненулевыми β_i, то набор констант λ_i фиксируется однозначно с точностью до пропорциональности: $\lambda_i = \lambda \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$, где λ одно и то же для всех i. □

Задача 3.13. Докажите, что существует линейное проективное преобразование, переводящее заданную пару непересекающихся подпространств в любую другую заданную пару непересекающихся подпространств тех же размерностей.

1.6.3. Неподвижные точки проективного преобразования, индуцированного линейным оператором f, — это классы пропорциональности собственных векторов оператора f. Таким образом, множество неподвижных точек проективного преобразования есть объединение не более чем $(n+1)$ непересекающихся проективных подпространств, являющихся проективизациями собственных подпространств оператора f. В частности, диагонализуемый оператор с попарно разными собственными значениями имеет ровно $(n+1)$ различных неподвижных точек.

Задача 3.14. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем любое линейное проективное преобразование имеет хоть одну неподвижную точку.

Задача 3.15. Докажите, что любое линейное проективное преобразование вещественного чётномерного проективного пространства имеет хоть одну неподвижную точку.

Задача 3.16. Рассмотрим пару прямых ℓ и ℓ' и отметим на каждой из них по три точки A, B, C и A', B', C'. Докажите, что существует единственное линейное проективное преобразование $\ell \longrightarrow \ell'$, переводящее соответственные точки друг в друга, и при помощи линейки постройте образ произвольной точки $p \in \ell$ при этом преобразовании.

Указание: этот сюжет более систематически будет разработан в n° 2.4.1.

§2. Коники.

2.1. Пространство коник. Пусть V – трёхмерное комплексное пространство, $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ – его проективизация, и q — квадратичная форма на V. С формой q связаны следующие три объекта:

поляризация — симметричная билинейная форма $\widetilde{q}(v,w) = \dfrac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w)\right)$;

корреляция — линейный оператор $\widehat{q}: V \longrightarrow V^*$, переводящий $v \in V$ в свёртку $i_v(q) \in V^*$, действующую на $w \in V$ по правилу $w \longmapsto \widetilde{q}(v,w)$;

проективная коника — множество нулей $Q = \{\, v \in \mathbb{P}(V) \mid q(v) = 0 \,\} \subset \mathbb{CP}_2$.

Задача 3.17. Убедитесь, что оператор, двойственный к корреляции

$$(V^*)^* \simeq V \xrightarrow{\widehat{q}^*} V^*$$

совпадает с $\widehat{q}$.

[4]условие $\alpha_i = 0$ означает, что $(n+1)$ векторов: вектор v и n векторов v_ν с $\nu \neq i$ лежат в одном n-мерном подпространстве, что запрещается условием

Задача 3.18. Докажите, что две коники совпадают тогда и только тогда, когда задающие их квадратичные формы пропорциональны.

Таким образом, коники взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathcal{Q} = \mathbb{P}(S^2V^*) \simeq \mathbb{P}_5$, которое называется *пространством коник*. Множество всех коник, проходящих через данную точку v, представляет собой гиперплоскость (коразмерности 1) в этом пространстве, ибо уравнение $q(v) = 0$ при фиксированном v *линейно* по q. В частности, через любые пять точек на $\mathbb{P}_2$ всегда можно провести конику.

Задача 3.19. При каком условии на точки эта коника единственна? Как написать её уравнение, если заданы координаты пяти точек?

По теореме Лагранжа любая коника подходящим линейным проективным преобразованием может быть приведена к одному из трёх видов:

1) $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 = 0$ – *неособая* или *гладкая* коника;

2) $t_0^2 + t_1^2 = 0$ – *распавшаяся* коника, т. е. пара пересекающихся прямых $t_0 = i\,t_1$ и $t_0 = -i\,t_1$;

3) $t_0^2 = 0$ – *двойная прямая*;

коники последних двух типов называются *особыми* или *вырожденными*. В пятимерном пространстве всех коник четырёхмерный локус особых коник выделяется *кубическим* уравнением $\det q = 0$. Вне двумерного подмножества, отвечающего двойным прямым, множество особых коник представляет собой гладкое многообразие.

Задача 3.20. Докажите это и проверьте, что касательное пространство к локусу особых коник в точке, соответствующей распавшейся конике, которая представляет собой пару прямых, пересекающихся в точке $p \in \mathbb{P}_2$, естественно отождествляется с множеством всех коник, проходящих через точку p.

2.2. Коника Веронезе. Реализуем пространство V как пространство квадратичных форм $V = S^2U^*$ на двумерном пространстве U. Плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ при этом интерпретируется как пространство квадрик на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Таковых квадрик имеется ровно два типа: *неособые*, вроде $t_0^2 + t_1^2 = 0$, представляющие собой пару различных точек, и *особые*, вроде $t_0^2 = 0$, представляющие собой одну «двойную» точку. Множество особых квадрик можно, с одной стороны, задать квадратичным уравнением $\det(q) = 0$, а с другой стороны, представить как образ *отображения Веронезе* из $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*)$ в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, заданного правилом $\xi \longmapsto \xi^2$.

Если выбрать в U^* базис x_0, x_1 и соответствующий базис x_0^2, $2\,x_0x_1$, x_1^2 в $V = S^2U^*$, то квадрика $q(t) = a\,x_0^2 + 2\,b\,x_0x_1 + c\,x_1^2$ будет представляться однородными координатами $(a\colon b\colon c)$. Образ отображения Веронезе состоит из квадрик вида

$$q = (t_0x_0 + t_1x_1)^2 = t_0^2\,x_0^2 + 2\,t_0t_1\,x_0x_1 + t_1^2\,x_1^2$$

имеющих $a = t_0^2$, $\quad b = t_0t_1$, $\quad c = t_0^2$ — это параметрическое представление коники Веронезе. Явное же её уравнение $\det(q) = ac - b^2 = 0$.

Задача 3.21. Докажите, что отображение Веронезе

$$\mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)\ ,$$

которое переводит линейные формы от *трёх* переменных в квадратичные по правилу $\xi \longmapsto \xi^{\otimes 2}$, устанавливает биекцию между точками $\mathbb{P}_2^\vee$ и множеством особых точек (отвечающих

двойным прямым на $\mathbb{P}_2$) локуса особых коник в пространстве всех коник. Задайте множество двойных прямых в пространстве коник квадратными уравнениями.

2.3. Полярное соответствие. Корреляция $V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*$, отвечающая невырожденной квадратичной форме q, является изоморфизмом и индуцирует биекцию между точками $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ и точками $\mathbb{P}_2^\times = \mathbb{P}(V^*)$, т. е. прямыми на исходном $\mathbb{P}_2$. Эта биекция называется *полярным соответствием* относительно коники q, а соответственные точка и прямая называются *полюсом* и *полярой* друг друга. Полярное соответствие симметрично и оборачивает включения. Первое означает, что точка v лежит на поляре точки w тогда и только тогда, когда w лежит на поляре v. Второе означает, что и точка пересечения двух прямых является полюсом прямой, проходящей через полюса этих двух прямых.

Задача 3.22. Убедитесь в этом!

Задача 3.23. Убедитесь, что для коники и прямой имеются ровно три возможных взаимных расположения: прямая лежит на конике, прямая пересекает конику по двум разным точкам и прямая *касается*[5] коники.

Задача 3.24. Проверьте также, что через каждую точку v неособой коники q проходит ровно одна касательная прямая, которая может быть описана как $\{\, w \in \mathbb{P}_2 |\ \widetilde{q}(v,w) = 0 \,\}$.

Задача 3.25. Проверьте, что через данную точку, не лежащую на неособой конике, проходят ровно две касательных прямых к этой конике, и прямая, соединяющая точки их касания с коникой, – это в точности поляра исходной точки относительно этой коники.

Задача 3.26. Опишите геометрическое место полюсов пучка прямых, проходящих через данную точку.

Задача 3.27. Докажите, то точки в $\mathbb{P}_2^\times$, соответствующие касательным к неособой конике $Q \subset \mathbb{P}_2$, тоже составляют неособую конику (она называется *двойственной* к данной), и напишите её уравнение, если известно уравнение исходной коники..

Задача 3.28. Сколько коник касается пяти данных прямых общего положения?

2.4. Гомографии. Пусть заданы два экземпляра $\mathbb{P}_1$, один с координатами $(x_0 \colon x_1)$, другой – с координатами $(y_0 \colon y_1)$. Отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_1$ называется *алгебраическим*, если в координатах оно задаётся формулами $y_i = \varphi_i(x_0, x_1)$, где φ_i – два однородных многочлена от x одинаковой степени и не обращающиеся в нуль одновременно. Взаимно однозначное алгебраическое отображение $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_1$ называется *гомографией*.

Задача 3.29. Докажите, что всякая гомография $\mathbb{P}(U_1) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(U_2)$ индуцируется линейным оператором $U_1 \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} U_2$.

Задача 3.30. Докажите, что существует единственная гомография, переводящая три заданных различных точки в три заданных различных точки.

2.4.1. Построение коник линейкой. Зафиксируем на $\mathbb{P}_2$ гладкую конику Q и прямую ℓ. Линейная проекция из произвольной точки $C \in Q$ на прямую ℓ устанавливает биекцию между точками коники Q и точками прямой ℓ, сопоставляя каждой точке $P \in Q$ точку пересечения ℓ с прямой CP, а самой точке C – точку пересечения ℓ с касательной, проходящей через C.

[5] т. е. пересекает её ровно по одной точке с кратностью два: ограничение квадратичной формы на прямую есть полный квадрат с единственным нулём в этой точке.

Если на плоскости задана коника Q и на ней отмечены две точки C_1 и C_2, то можно построить биективное отображение $\ell_1 \xrightarrow{\Gamma} \ell_2$ между любыми двумя прямыми $\ell_{1,2}$ сначала «свернув» прямую ℓ_1 на конику Q посредством проекции с центром в C_1, а затем «развернув» конику Q на ℓ_2 посредством проекции с центром в C_2 как на рис. 2. Если известны уравнения коники и прямых и явно указаны координаты точек $C_1, C_2 \in Q$, то координаты образа ΓP могут быть выражены через координаты P посредством решения одних только *линейных* уравнений.

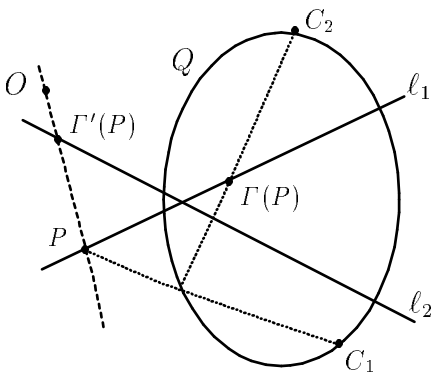


Рис. 2. Две гомографии.

Задача 3.31. Докажите, что Γ – гомография. Куда она переводит точки пересечения прямых между собой и с коникой?

Задача 3.32. Пусть имеются две прямые ℓ_1 и ℓ_2 и две точки C_1, C_2 не лежащие на них, и пусть $\ell_1 \xrightarrow{\Gamma} \ell_2$ – произвольная гомография. Докажите, что геометрическое место точек пересечения прямых (PC_1) и $(\Gamma P C_1)$ при $P \in \ell_1$ представляет собой квадрику, возможно, распавшуюся. Выясните, когда эта квадрика распадается.

Указание: Постройте 5 точек на этой квадрике, проследив за тремя точками $P_1, P_2, P_3 \in \ell_1$.

Задача 3.33. Пусть даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2 и точка O вне них. Докажите, что отображение $\ell_1 \xrightarrow{\Gamma'} \ell_2$, переводящее точку $P \in \ell_1$ в точку $(OP) \cap \ell_2$ (см. рис. 2) является гомографией.

Задача 3.34. Укажите как одной линейкой построить плотное множество точек коники, проходящей через данные пять точек общего положения.

Указание: Скомбинируйте утверждения двух предыдущих задач, проведя квадрику Q через точку пересечения прямых $\ell_{1,2}$.

Задача 3.35. Докажите, что три точки пересечений продолжений противоположных сторон шестиугольника, вписанного в неособую конику, лежат на одной прямой (*теорема Паскаля*).

Задача 3.36. Сформулируйте о докажите двойственную теорему в $\mathbb{P}_2^\times$ (*теорему Брианшона*).

Задача 3.37. Как устроено в $\mathbb{P}_2^\times$ геометрическое место точек, отвечающих семейству прямых на $\mathbb{P}_2$, соединяющих соответственные пары точек заданной гомографии $\ell_1 \xrightarrow{\varphi} \ell_2$?

2.4.2. Пучки коник. Прямые и плоскости в пространстве коник $\mathcal{Q}$ называются, соответственно, *пучками* и *связками* коник. Например, множество всех коник, проходящих через четыре точки общего положения представляет собой пучок. В этом пучке есть три распавшихся коники, соответствующие трём различным способам провести пару прямых через четыре данные точки общего положения. Других особых коник в нём нет, поскольку кубическое уравнение $\det(q) = 0$ имеет не более трёх корней, когда q бегает по прямой.

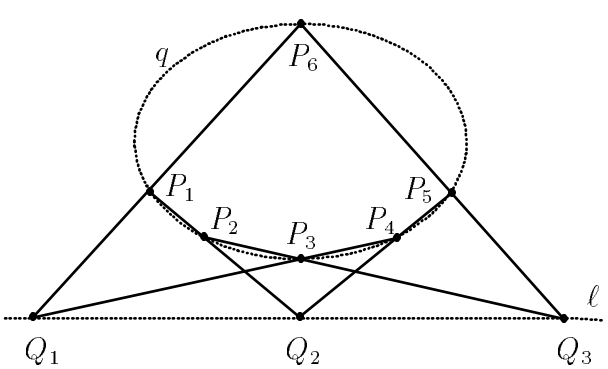


Рис. 3. К теореме Паскаля

Задача 3.38. Напишите семейство уравнений[6], описывающих все коники, проходящие через четыре точки с заданными координатами.

Задача 3.39. Докажите, что две неособых коники либо пересекаются по четырём точкам (с учётом кратностей), либо совпадают.

Задача 3.40. Сколько вырожденных коник содержится (а) в общем (б) в любом пучке коник?

Задача 3.41. Как устроено множество особых коник в общей связке коник?

§3. Комплексные проективные квадрики.

3.1. Обозначения. Пусть V – $(n+1)$-мерное комплексное пространство, $S^2(V^*)$ – пространство квадратичных форм на V. Как и в предыдущем параграфе, через q, $\widetilde{q}$ и $\widehat{q}$ мы будем обозначать, соответственно, квадратичную форму, её поляризацию и её корреляцию, а через $Q \subset \mathbb{P}_n$ – соответствующую *квадрику* $Q = \{\, v \in \mathbb{P}(V) \mid q(v) = 0 \,\}$.

Задача 3.42. Докажите, что квадрики взаимно однозначно соответствуют точкам проективного *пространства квадрик* $\mathcal{Q} = \mathbb{P}(S^2V^*)$ (т. е. проверьте, что $Q = Q'$ тогда и только тогда, когда $q = \lambda\, q'$).

Прямые и плоскости в проективном пространстве квадрик называются, как и ранее, *пучками* и *связками*. По теореме Лагранжа всякая квадрика в $\mathbb{P}_n$ линейной заменой координат приводится к сумме квадратов

$$t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_{r-1}^2 = 0\,.$$

Число r квадратов, входящих в эту сумму, называется *рангом* квадрики. Квадрики полного ранга $(n+1)$ называются *неособыми*, *невырожденными* или *гладкими*.

3.2. Касательное пространство. Для квадрики Q и прямой $\ell = \mathbb{P}(U)$, где $U \subset V$ – некое двумерное векторное подпространство, имеются ровно три возможных взаимных расположения:

1) $\operatorname{rk} q|_U = 2$, т. е. $q|_U$ – неособая квадрика на $\mathbb{P}_1$ и $Q \cap \ell$ – это пара различных точек;

2) $\operatorname{rk} q|_U = 1$, т. е. $q|_U$ – *двойная точка* на $\mathbb{P}_1$ и $Q \cap \ell$ – это одна точка «кратности два»;

3) $\operatorname{rk} q|_U = 0$, т. е. $q|_U \equiv 0$ и $\ell \subset Q$ — прямая лежит на квадрике;

в двух последних случаях прямая называется *касательной* к квадрике. Совокупность всех прямых, которые касаются квадрики в заданной точке $p \in Q$ называется *касательным пространством* к Q в точке p и обозначается T_pQ.

3.2.1. Лемма. *Прямая ℓ, проходящая через точку $v \in Q$ и произвольную точку $w \neq v$, касается Q тогда и только тогда, когда* $\widetilde{q}(v,w) = 0$.

Доказательство. Ограничение билинейной формы $\widetilde{q}$ на двумерное подпространство L, порождённое векторами v и w имеет матрицу Грама

$$G_{\widetilde{q}|_U} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}(v,v) & \widetilde{q}(v,w) \\ \widetilde{q}(w,v) & \widetilde{q}(w,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(v,w) \\ \widetilde{q}(v,w) & * \end{pmatrix} \tag{3-1}$$

[6] т. е. одно уравнение, линейно зависящее от пары параметров – координат на $\mathbb{P}_1$

и условие касания $\operatorname{rk}\widetilde{q}|_U \leqslant 1 \iff \det G_{\widetilde{q}|_U} = 0 \iff \widetilde{q}(v,w) = 0$ □

3.2.2. Следствие. *Касательное пространство к точке $v \in Q$ задаётся уравнением*

$$T_vQ = \{\, w \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(v,w) = 0 \,\} = \left\{ (w_0 \colon w_1 \colon \ \ldots \ \colon w_n) \;\middle|\; \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \frac{\partial q}{\partial t_\nu}(v) = 0 \right\} \qquad (3\text{-}2)$$

и если $v \in \ker\left(V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*\right)$, то $T_vQ = \mathbb{P}_n$, а если $v \notin \ker\left(V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*\right)$, то T_vQ представляет собой гиперплоскость, задаваемую ненулевым линейным функционалом $\widehat{q}(v)$.

3.3. Строение особой коники. Точки $p \in Q$, для которых T_pQ представляет собой гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, называются *гладкими*. Остальные точки называются *особыми*.

Множество особых точек обозначается $\mathit{Sing}\, Q$ и называется *вершиной* квадрики Q. Оно представляет собой проективное подпространство $\mathbb{P}\left(\ker\left(V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*\right)\right)$ и может быть описано уравнениями

$$\mathbb{P}(\ker\widetilde{q}) = \left\{ p \;\middle|\; \frac{\partial q}{\partial t_i}(p) = 0 \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

3.3.1. Следствие. *Всякая прямая, проходящая через особую точку $v \in \mathit{Sing}\, Q$ и содержащая ещё хотя бы одну точку $w \in Q$, отличную от v, лежит на квадрике целиком.*

Доказательство. Матрица Грама (3-1) ограничения $\widetilde{q}$ на линейную оболочку векторов u и v будет тождественно нулевой. □

Задача 3.43. Докажите, что размерность вершины особой квадрики ранга r равна $(n-r)$.

Задача 3.44. Докажите, что пересечение $Q_H = Q \cap H$ квадрики Q ранга r с любым дополнительным к вершине $(r-1)$-мерным подпространством $H \subset \mathbb{P}_n$ является неособой квадрикой в этом подпространстве.

Задача 3.45. Докажите, что вершина квадрики может быть описана как пересечение всех касательных гиперплоскостей к её гладким точкам.

3.3.2. Следствие. *Комплексная проективная квадрика ранга r представляет собой конус*[7] *с вершиной $\mathit{Sing}\, Q$ и основанием в неособой квадрике Q_H, высекаемой Q на любой $(r-1)$-мерной плоскости H, дополнительной к $\mathit{Sing}\, Q$.* □

Задача 3.46. Докажите, что в пространстве всех квадрик локус особых квадрик является гладким многообразием в окрестности любой квадрики, которая является простым[8] конусом, и что касательное пространство к локусу особых квадрик в такой точке состоит состоит из всех квадрик, проходящих через вершину конуса.

3.4. Полярное соответствие. Другое следствие Лем.3.2.1 состоит в том, что видимый из точки $w \notin Q$ *контур*[9] квадрики Q, представляет собой сечение квадрики Q гиперплоскостью

$$\mathrm{pl}_w Q = \{\, u \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(u,w) = 0 \,\} = \left\{ (u_0 \colon u_1 \colon \ \ldots \ \colon u_n) \;\middle|\; \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \frac{\partial q}{\partial t_\nu}(w) = 0 \right\} \qquad (3\text{-}3)$$

[7] т. е. объединение всех прямых, пересекающих как *вершину* так и *основание* конуса

[8] т. е. с вершиной в одной точке

[9] т. е. геометрическое место точек соприкосновения с Q всевозможных касательных, проходящих через точку $w \notin Q$

Гиперплоскость $\mathrm{pl}_w Q$ называется *полярой* точки w относительно квадрики Q и представляет собой проективизацию ядра линейного функционала $\widehat{q}(w) : u \longmapsto q(w,u)$. Если квадрика неособая, то корреляция $V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*$ является изоморфизмом, и индуцирует взаимно однозначное *полярное соответствие* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\widehat{q}} \mathbb{P}_n^\times$. При этом сама квадрика Q может быть охарактеризована как геометрическое место точек, лежащих на своих полярах.

Задача 3.47. На «школьной» евклидовой плоскости нарисован круг. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки, лежащей внутри круга, и полюс данной прямой, не пересекающей круг.

3.5. Подпространства, лежащие на неособой квадрике. Подпространство $L = \mathbb{P}(W)$ лежит на квадрике $Q \subset \mathbb{P}(V)$ тогда и только тогда, когда корреляция $V \xrightarrow{\widehat{q}} V^*$ переводит подпространство $W \subset V$ внутрь его аннулятора $\mathrm{Ann}(W) \subset V^*$. Поскольку для неособой квадрики $\widehat{q}$ является изоморфизмом, имеем:

$$\dim W = \dim \widehat{q}(W) \leqslant \dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V - \dim W \ ,$$

откуда $\dim W \leqslant \dfrac{1}{2} \dim V$. Таким образом, имеет место

3.5.1. Лемма. *Невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_n$ не содержит проективных подпространств размерности большей, чем $[(n-1)/2]$.* □

3.5.2. Лемма. *Пересечение неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ с касательным пространством к произвольной точке $P \in Q$ представляет собой конус с вершиной в точке P над неособой квадрикой, высекаемой исходной квадрикой Q на любом $(n-2)$-мерном подпространстве дополнительном к P в $T_P Q$.*

Доказательство. Пусть P соответствует вектору $v \in V$. Тогда $T_P Q = \mathbb{P}(W)$, где $W = \{\, w \mid \widetilde{q}(v,w) = 0 \,\}$. Множество особых точек квадрики $Q \cap W$ состоит из всех векторов $u \in W$, таких что $\widetilde{q}(u,w) = 0$ для всех $w \in W$. Но аннулирующий заданную гиперплоскость линейный функционал на V единствен с точностью до пропорциональности. Тем самым, в следствие невырожденности $\widehat{q}$ всякий такой вектор u пропорционален вектору v. Последний же по определению аннулирует W и лежит в W. Мы проверили, что ограничение квадратичной формы q на W имеет одномерное ядро, что и требовалось. □

3.5.3. Следствие. *Через каждую точку P невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_n$ проходит непустое множество $[(n-1)/2]$-мерных плоскостей. Мощность этого множества одна и та же для всех точек P, и его элементы взаимно однозначно соответствуют всевозможным $[(n-3)/2]$-мерным плоскостям, лежащим на невырожденной квадрике в $\mathbb{P}_{n-2}$.*

Доказательство. Действительно, каждая $[(n-1)/2]$-мерная плоскость лежащая на Q и проходящая через точку $P \in Q$ лежит в касательном пространстве, и по предыдущей лемме представляет собой линейную оболочку точки P и любой плоскости размерности $[(n-1)/2] - 1 = [(n-3)/2]$, лежащей на неособой квадрике, высекаемой исходной квадрикой Q на любом дополнительном к P $(n-2)$-мерном подпространстве в $T_P Q$. □

Например, через каждую точку невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_3$ проходит две прямые, а через каждую точку невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_4$ проходит однопараметрическое семейство прямых, естественно параметризуемое гладкой коникой. Двумерных же плоскостей на этих квадриках нет.

3.6. Квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$. Интерпретируем комплексное четырёхмерное пространство V как пространство линейных операторов

$$V = \operatorname{Hom}(U_-, U_+) \simeq U_-^* \otimes U_+$$

между двумя двумерными комплексными пространствами $U_\pm$ и рассмотрим в нём подмножество *ненулевых вырожденных операторов*. Всякий такой оператор f имеет $\operatorname{rk} f = 1$, и стало быть, разложим, т. е. представляется в виде $\zeta \otimes u$, где $u \in U_+$ порождает $\operatorname{im} f$, а $\zeta \in U_-^*$ является аннулятором подпространства $\ker f$ (такие u и ζ определены однозначно с точностью до пропорциональности).

Следовательно, проективизация множества ненулевых вырожденных операторов, с одной стороны, задаётся в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ квадратичным уравнением $\det f = 0$, а с другой стороны, является образом *отображения Сегре* из $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+)$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(U_-^* \otimes U_+)$, действующего по правилу $(\zeta, u) \longmapsto \zeta \otimes u$. Отметим, что отображение Сегре переводит «координатные» прямые вида $\mathbb{P}_1 \times \{u\}$ и $\{\zeta\} \times \mathbb{P}_1$, лежащие на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, в прямые вида $\mathbb{P}(U_-^* \otimes u)$ и $\mathbb{P}(\zeta \otimes U_+)$, содержащиеся в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(U_-^* \otimes U_+)$. Из сказанного вытекает

3.6.1. Лемма. *Отображение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и невырожденной квадрикой $\mathbb{P}_3$, при которой два семейства прямолинейных образующих $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых, заметающих квадрику так, что все прямые, лежащие в одном семействе попарно скрещиваются, любые две прямые из разных семейств пересекаются, и через каждую точку квадрики проходит ровно одна прямая из одного семейства и ровно одна прямая из другого.* □

Задача 3.48. Докажите, что через девять точек в $\mathbb{P}_3$ всегда можно провести квадрику. При каком условии на точки эта квадрика будет (а) невырожденной (б) единственной?

Задача 3.49. Докажите, что через три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ можно провести единственную квадрику, и что эта квадрика будет невырождена.

Задача 3.50. Опишите геометрическое место точек, заметаемых всевозможными прямыми, пересекающими каждую из трёх заданных попарно скрещивающихся прямых в $\mathbb{P}_3$.

Задача 3.51. Сколько прямых пересекает четыре заданных попарно скрещивающихся прямых (а) в проективном пространстве $\mathbb{CP}_3$ (б) в аффинном пространстве $\mathbb{R}_3$?
Укажите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы относительно малых шевелений исходных четырёх прямых.

3.6.2. Формулы в координатах. Если выбрать в U_- и U_+ базисы и записывать операторы матрицами $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в этих базисах, то квадрика Сегре будет задаваться уравнением $ad - bc = 0$. Отображение Сегре сопоставляет линейной форме $\zeta = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1$ и вектору $u = t_0 e_0 + t_1 e_1$ оператор

$$\xi \otimes u = \xi_0 t_0\, x_0 \otimes e_0 + \xi_0 t_1\, x_0 \otimes e_1 + + \xi_1 t_0\, x_1 \otimes e_0 + \xi_1 t_1\, x_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix}$$

и тем самым задаёт параметризацию квадрики $ac - bd = 0$ по формулам

$$a = \xi_0 t_0\ , \quad b = \xi_0 t_1\ , \quad c = \xi_1 t_0\ , \quad d = \xi_2 t_0\ .$$

Две прямолинейных образующих, проходящих через точку $(\xi_0 t_0 \colon \xi_0 t_1 \colon \xi_1 t_0 \colon \xi_2 t_0)$ задаются в однородных координатах $(a : b : c : d)$ системами уравнений

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{t_0}{t_1} \qquad \text{и} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\xi_0}{\xi_1} \ .$$

так что движению вдоль прямолинейной образующей одного типа соответствует изменение коэффициента пропорциональности между строками вырожденной 2×2-матрицы, а движению вдоль прямолинейной образующей другого типа соответствует изменение коэффициента пропорциональности между столбцами.

3.6.3. Ещё раз о дробно линейных преобразованиях прямой. Поскольку всякая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ может быть заменой координат превращена в детерминантальную квадрику $ac - bd = 0$, задание невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_3$ отождествляет $\mathbb{P}_3$ с пространством линейных проективных преобразований из прямой $\mathbb{P}_1^-$, параметризующей одно семейство прямолинейных образующих Q, в прямую $\mathbb{P}_1^+$, параметризующую другое семейство. При этом точки квадрики Q будут изображать вырожденные операторы (они задают проекции, сжимающие всё $\mathbb{P}_1^-$ в точку на $\mathbb{P}_1^+$), а точки дополнения $\mathbb{P}_3 \setminus Q$ будут изображать взаимно однозначные линейные проективные преобразования.

Задача 3.52. Укажите явную геометрическую конструкцию, сопоставляющую точке $P \in \mathbb{P}_3 \setminus Q$ гомографию $\mathbb{P}_1^- \longrightarrow \mathbb{P}_1^+$.

§4. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$.

4.1. Плюккерово вложение. Множество прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, или, что то же самое, множество двумерных подпространств U в четырёхмерном пространстве V, называется *грассманианом* $\mathrm{Gr}(2,4)$. *Отображение Плюккера* $\mathrm{Gr}(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V) = \mathbb{P}_5$ сопоставляет двумерному подпространству $U \subset V$ одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$.

Задача 3.53. Докажите, что отображение Плюккера инъективно.

Если выбрать в U базис $\{u_1, u_2\}$, то $\Lambda^2 U$ будет порождаться разложимым бивектором $\omega_U = u_i \wedge u_2 \in \Lambda^2 V$. При выборе другого базиса в U этот бивектор будет умножаться на ненулевую константу – определитель матрицы перехода. Таким образом, отображения Плюккера устанавливает биекцию между $\mathrm{Gr}(2,4)$ и проективизацией множества разложимых бивекторов в $\Lambda^2 V$.

4.2. Плюккерова квадрика. На $\Lambda^2 V$ имеется естественный класс пропорциональных билинейных симметричных форм $\widetilde{q}$, заданных правилом

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \widetilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \qquad \forall\, \omega_1 . \omega_2 \in \Lambda^2 V \ , \tag{4-4}$$

где $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ фиксированный базисный вектор в одномерном пространстве $\Lambda^4 V$. При выборе другого базисного 4-вектора форма $\widetilde{q}$ будет умножаться на ненулевую константу. Квадрика, задаваемая классом пропорциональных форм $\widetilde{q}$ называется *квадрикой Плюккера*. Её инвариантное определение таково:

$$Q = \{\, \omega \in \Lambda^2 V \mid q(\omega) = \omega \wedge \omega = 0 \,\}$$

Задача 3.54. Убедитесь, что форма $\widetilde{q}$ невырождена и симметрична, и укажите базис, двойственный относительно этой формы к стандартному базису $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ в $\Lambda^2 V$.

Задача 3.55. Какова в вещественном случае сигнатура формы $\widetilde{q}$?

Если зафиксировать в V базис e_i, а в $\Lambda^2 V$ – базис $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, то в координатах x_{ij} относительно последнего квадрика Плюккера будет задаваться уравнением

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0 \ .$$

4.3. Лемма. *Квадрика Плюккера совпадает с проективизацией множества разложимых бивекторов.*

Доказательство. Рассмотрим ненулевой бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ как билинейную кососимметричную форму на V^* и приведём её к каноническому виду, т. е. выберем в V^* базис x_i, в котором её матрица Грама состоит из 2×2-блоков и имеет вид

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad , \qquad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если e_i – двойственный к x_i базис в V, то в первом случае $\omega = e_1 \wedge e_2$ разложим и $\omega \wedge \omega = 0$, а во втором случае $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ неразложим и $\omega \wedge \omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. □

4.3.1. Следствие. *Отображение Плюккера отождествляет множество прямых в $\mathbb{P}_3$ с точками невырожденной квадрики в $\mathbb{P}_5$ — квадрики Плюккера.* □

Задача 3.56. Могут ли числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ представлять собой полный набор максимальных миноров какой-нибудь комплексной 2×4-матрицы?

4.4. Циклы Шуберта. Проекция квадрики Плюккера Q из любой точки $p \in Q$ на любую дополнительную к p гиперплоскость H устанавливает гомеоморфизм между четырёхмерным аффинным пространством $\mathbb{A}^4 = H \setminus (H \cap T_pQ)$ и плотным открытым подмножеством в Q, дополнительным к трёхмерному замкнутому подмножеству $Q \cap T_pQ$, которое мы обозначим через $\sigma_{1,0}$. Оно представляет собой конус с вершиной в точке p над неособой квадрикой G, которую Q высекает на любом *дополнительном* к p трёхмерном подпространстве $\mathbb{P}_3 \subset T_pQ$ (см. рис. 4).

Выберем на G произвольную точку $q \in G$ и проведём пару плоскостей $\sigma_{2,0}$ и $\sigma_{1,1}$, натянутых на p и две проходящих через q прямолинейных образующих квадрики G. Эти плоскости пересекутся по прямой (pq), которую мы обозначим $\sigma_{2,1}$. Проектируя G из q на плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_3$, мы получаем, как и выше, гомеоморфизм между $G \setminus (\sigma_{2,0} \cup \sigma_{1,1}) = G \setminus (G \cap T_qG)$ и $\mathbb{A}^2$. Стало быть, $\sigma_{1,0} \setminus (\sigma_{2,0} \cup \sigma_{1,1}) \simeq \mathbb{A}^3$, ибо представляет собой прямое произведение предыдущего $\mathbb{A}^2$ на $\mathbb{P}_1 \setminus \{p\} = \mathbb{A}^1$. Дополнения $\sigma_{2,0} \setminus \sigma_{2,1}$ и $\sigma_{1,1} \setminus \sigma_{2,1}$ гомеоморфны $\mathbb{A}^2$, и наконец, $\sigma_{2,1} = \mathbb{A}^1 \sqcup \sigma_{2,2}$, где $\sigma_{2,2} = \{p\}$.

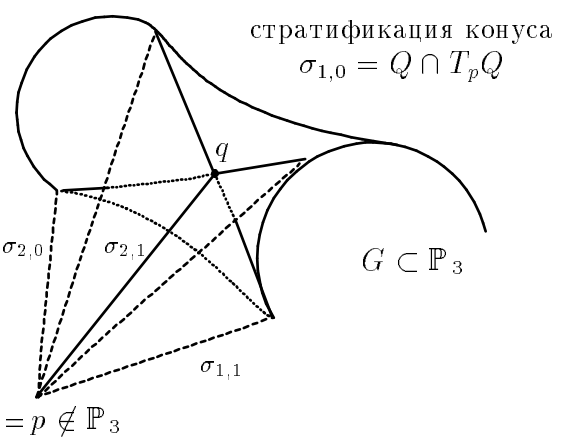


Рис. 4. Циклы Шуберта.

Итак, мы имеем разложение квадрики Плюккера в дизъюнктное объединение открытых в своём замыкании клеток

$$\mathrm{Gr}(2,4) = \mathbb{A}^4 \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

называемых *клетками Шуберта*. Их замыкания $\sigma_{\lambda_1,\lambda_2}$ называются *циклами Шуберта*[10], и примыкают друг к другу в соответствии с диаграммой (4-5) ниже.

Задача 3.57. Убедитесь, что целочисленные гомологии $\mathrm{Gr}(2,4)$ свободно порождаются циклами Шуберта, т. е. все нечётные группы тривиальны, а чётные суть $H_0 = H_2 = H_6 = H_8 = \mathbb{Z}$ и $H_4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

4.5. Геометрия Плюккеровой квадрики. Предыдущую картину можно существенно обогатить, поскольку будучи естественными геометрическими фигурами на Плюккеровой квадрике, циклы Шуберта изображают замечательные семейства прямых в $\mathbb{P}_3$.

4.5.1. Лемма. *Пусть ω_1 и ω_2 — разложимые бивекторы, соответствующие двум разным двумерным подпространствам $U_1, U_2 \subset V$. Тогда условие $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ равносильно условию $\widetilde{q}(\omega_1, \omega_2) = 0$.*

Доказательство. Два разных двумерных подпространства в четырёхмерном пространстве либо составляют прямую сумму, либо имеют одномерное пересечение. В первом случае в V имеется базис e_i, в котором $\omega_1 = e_1 \wedge e_2$, а $\omega_2 = e_3 \wedge e_4$, и стало быть, $\omega_1 \wedge \omega_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ Во втором случае можно считать, что $\omega_1 = e_1 \wedge e_2$, а $\omega_2 = e_1 \wedge e_3$, и легко проверить, что $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. □

4.5.2. Трёхмерный цикл Шуберта $Q \cap T_pQ$, согласно лемме, изображает множество всех прямых в $\mathbb{P}_3$, пересекающих прямую ℓ, изображаемую точкой p. Локализованный таким образом цикл $\sigma_{1,0}$ мы будем обозначать $\sigma_{1,0}(\ell)$.

4.5.3. Пучки и связки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множества прямых в $\mathbb{P}_3$, изображаемые на Q прямыми или плоскостями, называются, соответственно *пучками* и *связками* прямых. Через каждую точку $p_\ell \in Q$ проходят два 1-параметрических семейства плоскостей, отвечающих двум семействам прямолинейных образующих квадрики на рис. 4 и одно 2-параметрическое семейство прямых, параметризованное точками этой квадрики. Согласно Лем.4.5.1 любые две прямые из одной связки пересекаются. С другой стороны, связка однозначно восстанавливается по любой тройке прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, таких что соответствующие им точки $p_1, p_2, p_3 \in Q$ не лежат на одной прямой. Будучи попарно пересекающимися, эти три прямые либо проходят через одну точку $P \in \mathbb{P}_3$, либо лежат в одной плоскости $\pi \subset \mathbb{P}_3$.

Задача 3.58. Докажите, что в первом случае связка будет состоять из всех прямых в $\mathbb{P}_3$, проходящих через P.

Задача 3.59. Докажите, что во втором случае связка состоит из всех прямых, содержащихся в плоскости π.

Связка первого типа называется α-связкой, и соответствующий цикл Шуберта обозначается $\sigma_{2,0}(P)$. Связка второго типа называется β-связкой, а соответствующий цикл Шуберта

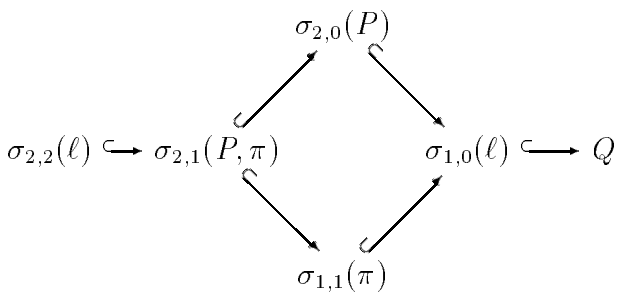
[10] причина, по которой мы используем для них столь витиеватые обозначения $\sigma_{\lambda_1,\lambda_2}$ выяснится в следующей лекции; на самом деле индексы λ_1, λ_2 пробегают всевозможные диаграммы Юнга, умещающиеся в прямоугольнике 2×2

обозначается через $\sigma_{1,1}(\pi)$. Тем самым, на квадрике Плюккера лежит *два разных* семейства 2-плоскостей. При этом любые две плоскости одного типа пересекаются по точке

$$\sigma_{2,0}(P) \cap \sigma_{2,0}(R) = \sigma_{2,2}((PR)) \quad , \qquad \sigma_{1,1}(\pi) \cap \sigma_{1,1}(\varrho) = \sigma_{2,2}(\pi \cap \varrho) \ ,$$

а любые две плоскости разных типов либо вообще не пересекаются (так происходит в общем случае, когда $P \notin \pi$), либо пересекаются по прямой – так происходит, когда $P \in \pi$. Тем самым, всякий пучок прямых в $\mathbb{P}_3$, будучи пересечением двух связок, состоит из всех прямых, которые проходят через одну точку P и лежат в одной плоскости π. Соответствующий цикл Шуберта обозначается $\sigma_{2,1}(P,\pi)$.

Итак, для каждого *флага* $P \in \ell \subset \pi \subset \mathbb{P}_3$ мы имеем диаграмму вложений



(4-5)

и задача

> Задача 3.60. Докажите, что проективная группа $PGL(\mathbb{P}_3)$ транзитивно действует на множестве всех *флагов* $P \in \ell \subset \pi \subset \mathbb{P}_3$.

показывает, что локализованные в разных местах квадрики Q однотипные циклы Шуберта конгруэнтны в самом сильном смысле слова (в частности, гомологичны).

4.5.4. Пересечения циклов Шуберта в кольце (ко)гомологий грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ легко вычисляются из геометрических соображений. Мы уже видели, что $\sigma_{2,0}^2 = \sigma_{1,1}^2 = \sigma_{22}$, и что $\sigma_{2,0}\sigma_{1,1} = 0$. Очевидно, что 0-мерный цикл $\sigma_{2,2}$ пересекается нулевым образом со всеми прочими циклами положительной коразмерности, а 1-мерный цикл имеет ненулевое пересечение только с трёхмерным.

> Задача 3.61. Убедитесь, что $\sigma_{2,1}\sigma_{1,0} = \sigma_{2,2}$.

> Задача 3.62. Убедитесь, что $\sigma_{1,0}\sigma_{2,0} = \sigma_{1,0}\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$ явно предъявив пучки прямых, по которым заданные α- и β-связки пересекаются с множеством всех прямых, пересекающих заданную прямую ℓ.

Наконец, самопересечение трёхмерного цикла гомологично сумме двух двумерных:

$$\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}$$

Действительно, пересечение $\sigma_{1,0}(\ell_1) \cap \sigma_{1,0}(\ell_2)$ двух достаточно общих трёхмерных циклов представляет собой невырожденную квадрику G (как на рис. 4), высекаемую квадрикой Q в трёхмерном пространстве $T_{p_1}Q \cap T_{p_2}Q$, где p_1 и p_2 — это изображения прямых ℓ_1 и ℓ_2 на Q. Точки G — это прямые в $\mathbb{P}_3$, пересекающие пару скрещивающихся прямых ℓ_1, ℓ_2. Рассмотрим какую-нибудь одну такую прямую ℓ (см. рис. 5), изображаемую на G точкой q.

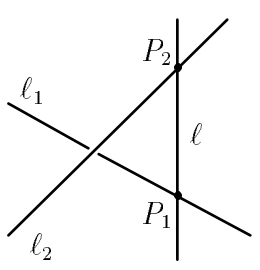


Рис. 5.

Задача 3.63. Убедитесь, что две прямолинейных образующих квадрики G, проходящие через точку q — это пучок прямых с центром в $P_1 = \ell \cap \ell_1$, лежащий в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_1, и пучок прямых с центром в $P_2 = \ell \cap \ell_2$, лежащий в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_2.

Задача 3.64. Убедитесь, что две плоскости, натянутые на p_1 и проходящие через точку q прямолинейные образующие G, — это α-связка с центром в $P_1 = \ell \cap \ell_1$, и β-связка в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_1.

Будем поворачивать прямую ℓ_2 вокруг P_2 до тех пор, пока она не совпадёт с ℓ. При этом точка p_2 продеформируется в точку q, цикл $\sigma_{1,0}(\ell_2)$ – в цикл $\sigma_{1,0}(\ell)$, а пересечение $G = \sigma_{1,0}(\ell_1) \cap \sigma_{1,0}(\ell_2)$ – в особую квадрику, изображающую множество всех прямых из $\mathbb{P}_3$, пересекающих как ℓ, так и ℓ_1, и представляющую собой объединение α-связки с центром в $P_1 = \ell \cap \ell_1$, и β-связки, лежащей в плоскости, натянутой на ℓ и ℓ_2, что и утверждалось.

4.5.5. Исчисление Шуберта. Умножение классов гомологий грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$, индуцированное полученной выше «таблицей умножения» базисных циклов называется *исчислением Шуберта* и бывает полезно при решении геометрических задач. Например, для подсчёта числа прямых, которое пересекают данные четыре прямые общего положения в $\mathbb{P}_3$, достаточно заметить, что искомое число есть количество нульмерных циклов $\sigma_{2,2}$ в разложении четырёхкратного самопересечения $\sigma_{1,0}^4$. Действуя по предыдущим формулам, получаем:

$$\sigma_{1,0}^4 = (\sigma_{2,0} + \sigma_{1,1})^2 = \sigma_{2,0}^2 + \sigma_{1,1}^2 = 2\,\sigma_{22}\ .$$

4.6. Взаимодействие Плюккера, Сегре и Веронезе. Пусть теперь пространство V интерпретируется по Сегре как $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$. Разложим $V^{\otimes 2} = U_-^{*\otimes 2} \otimes U_+^{\otimes 2}$ в сумму симметрической и кососимметрической составляющих:

$$\overbrace{\left(S^2U_-^* \oplus \Lambda^2 U_-^*\right)}^{U_-^*\otimes U_-^*} \otimes \overbrace{\left(S^2U_+ \oplus \Lambda^2 U_+\right)}^{U_+\otimes U_+} \simeq$$
$$\simeq \underbrace{\left(\left(S^2U_-^* \otimes S^2U_+\right) \oplus \left(\Lambda^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+\right)\right)}_{S^2V} \bigoplus \underbrace{\left(\left(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+\right) \oplus \left(\Lambda^2 U_-^* \otimes S^2U_+\right)\right)}_{\Lambda^2 V} \quad (4\text{-}6)$$

Вложение Сегре $\mathbb{P}_1^- \times \mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+) \xrightarrow{(\zeta,u)\mapsto\zeta\otimes u} \mathbb{P}(U_-^* \otimes U_+)$, переводит координатные прямые на $\mathbb{P}_1^- \times \mathbb{P}_1^+$ в прямолинейные образующие квадрики Сегре $G \subset \mathbb{P}(V)$ по формулам

$$\mathbb{P}_1^- \times u \longmapsto \mathbb{P}(U_-^* \otimes u) \qquad\qquad \zeta \times \mathbb{P}_1^+ \longmapsto \mathbb{P}(\zeta \otimes U_+)\ .$$

Вложение Плюккера превращает эти прямые в точки плюккеровой квадрики по формулам

$$\mathbb{P}(U_-^* \otimes u) \longmapsto \mathbb{P}(\Lambda^2 U_-^* \otimes u^{\otimes 2}) \in \mathbb{P}(\Lambda^2 U_-^* \otimes S^2U_+) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_+ \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$
$$\mathbb{P}(\zeta \otimes U_+) \longmapsto \mathbb{P}(\zeta^{\otimes 2} \otimes \Lambda^2 U_+) \in \mathbb{P}(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_- \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$

Таким образом, первое семейство прямолинейных образующих, параметризованное точками $u \in \mathbb{P}_1^+$, изобразится на плюккеровой квадрике плоской коникой

$$\Lambda_+ \cap Q \stackrel{\text{def}}{=} q_+ \simeq \mathbb{P}_1^+\ ,$$

вложенной по Веронезе как $u \mapsto u^{\otimes 2}$ в двумерную плоскость $\Lambda_+ \simeq \mathbb{P}(S^2U_+)$, а второе семейство, параметризованное точками $\zeta \in \mathbb{P}^-_1$, изобразится коникой

$$\Lambda_- \cap Q \overset{\text{def}}{=} q_- \simeq \mathbb{P}^-_1 ,$$

вложенной по Веронезе как $\zeta \mapsto \zeta^{\otimes 2}$ в двумерную плоскость $\Lambda_- \simeq \mathbb{P}(S^2U_-^*)$. Условно это можно изобразить коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}(U_+) & \xhookrightarrow{\text{Веронезе}} & & & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ \\
\uparrow{\scriptstyle \pi_+} & & & & \downarrow \\
\mathbb{P}^+_1 \times \mathbb{P}^-_1 & \xrightarrow[\sim]{\text{Сегре}} & G \subset \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-, U_+) & \overset{\text{Плюккер}}{\dashrightarrow} & Q \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+ \\ \oplus \\ S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+ \end{pmatrix} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_-} & & & & \uparrow \\
\mathbb{P}(U_-^*) & \xhookrightarrow[\text{Веронезе}]{} & & & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_-
\end{array}$$

где Плюккер отображает *прямые* на $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ в *точки* квадрики $Q \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2\mathrm{Hom}(U_-, U_+))$.

Задача 3.65. Чем изобразится на плюккеровой квадрике

а) пучок прямых с центром в точке $p = (\zeta, u) \in G$, лежащий в T_pG?

б) множество всех прямых, касающихся G?

(последнее множество называется *специальным квадратичным комплексом* прямых в $\mathbb{P}_3$).

Симметричная билинейная форма $\widetilde{g}$ на V, задающая невырожденную квадрику $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ стандартным образом индуцирует симметричную билинейную форму $\Lambda^2\widetilde{g}$ на Λ^2V, действующую на разложимых бивекторах по правилу

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\, v_1 \wedge v_2 \,,\, w_1 \wedge w_2 \,) = \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix}$$

Соответствующая квадратичная форма задаёт в $\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ невырожденную квадрику, обозначаемую Λ^2G.

Задача 3.66. Докажите, что $Q \cap \Lambda^2G$ изображает множество всех касательных к G прямых в $\mathbb{P}_3$.

Задача 3.67. Докажите, что в пучке квадрик, натянутом на Λ^2G и Q в $\mathbb{P}_5$, есть ровно две особых квадрики: конус с вершиной Λ_- над коникой q_+ и конус с вершиной Λ_+ над коникой q_-.

4.6.1. Координатная запись: Ходжева звёздочка. Если в пространстве V зафиксировать *ортонормальный*[11] базис для $\widetilde{g}$, то бивекторы $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $i < j$ составят ортонормальный базис для $\Lambda^2\widetilde{g}$ в Λ^2V. Зафиксируем в Λ^4V элемент объёма $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, построенный по ортонормальному базису e_i, и рассмотрим плюккерову билинейную форма $\widetilde{q}$, ассоциированную с этим элементом объёма.

[11] обратите внимание, что базис Сегре, где квадрика задаётся детерминантным уравнением *не является* ортонормальным

Пара форм $\widetilde{q}$ и $\Lambda^2\widetilde{g}$ стандартным образом индуцирует линейный оператор $\Lambda^2 V \xrightarrow{*} \Lambda^2 V$, однозначно задаваемый условием $\widetilde{q}(\omega_1, *\omega_2) = \Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1, \omega_2)$, или более явно, формулой

$$\omega_1 \wedge *\omega_2 = \Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \qquad \forall \omega_1, \omega_2$$

Этот оператор называется *звёздочкой Ходжа* и действует на ортонормальный базис по правилам:

$$e_{12} \longleftrightarrow e_{34} \qquad e_{13} \longleftrightarrow -e_{24} \qquad e_{14} \longleftrightarrow e_{23}$$

Задача 3.68. Проверьте, что $*$ является инволюцией с трёхмерным собственным подпространством с собственным значением $+1$ и трёхмерным собственным подпространством с собственным значением -1. Укажите собственный базис явно.

Эти собственные подпространства называются пространствами *автодуальных* и *антиавтодуальных* бивекторов. В $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ они изображаются парой дополнительных двумерных плоскостей.

Задача 3.69. Проверьте, что эти плоскости совпадают с описанными выше плоскостями Λ_+ и Λ_-, которые высекают на квадрика Плюккера коники q_+ и q_-, изображающие два семейства прямолинейных образующих квадрики Сегре.

Отметим, что выбор знака у $\Lambda_\pm$ при ходжевом координатном подходе диктуется выбором ориентирующего 4-вектора на V. При перемене местами, скажем, векторов e_2 и e_3, собственные подпространства оператора $*$ поменяются ролями. При геометрическом подходе Сегре этот выбор знака определяется тем, какое из двух семейств прямолинейных образующих квадрики Сегре считать первым, а какое вторым: пространства $\Lambda_\pm$ поменяются ролями, если переставить местами пространства $U_\pm$.

Связь между двумя подходами на координатном языке состоит в замене ортонормального базиса e_i, где $\widetilde{g}$ записывается как $\sum x_i^2 = 0$, на «матричный» базис $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$, где $\widetilde{g}$ записывается как $y_{11}y_{22} = y_{12}y_{21}$.

Задача 3.70. Опишите явными формулами

(а) хоть одну (б) все

такие замены базиса.

Лекция 4
Группы и алгебры Ли, кватернионы и спиноры.

▷Группы Ли и линейные алгебраические группы ▷Алгебры Ли ▷Унитарные, ортогональные и спинорные группы малых рангов ▷Евклидова, эрмитова и вещественная структуры на пространстве комплексных 2×2 - матриц ▷SU_2 и кватернионы ▷Накрытия $SU_2 \twoheadrightarrow SO_3$ и $SU_2 \times SU_2 \twoheadrightarrow SO_4$ ▷Разложение $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{su}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ▷Спинорное разложение четырёхмерного евклидова пространства ▷Гомоморфизмы и представления групп и алгебр Ли

§1. Группы и алгебры Ли.

1.1. Группы Ли Топологическая группа — это группа G, наделённая такой топологией, в которой отображения умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного элемента $G \to G$ непрерывны. Если G — (вещественное) гладкое многообразие, и эти отображения — гладкие, то G называется *группой Ли*. Например, группы $GL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{C})$ являются группами Ли.

Задача 4.1. Докажите, что группы $PGL_n(\mathbb{R})$ и $PGL_n(\mathbb{R})$ также являются группами Ли

Если группа Ли G является комплексно аналитическим многообразием, а умножение и обращение — комплексно аналитическими отображениями, то G называется *комплексной группой Ли*. Например, $GL_n(\mathbb{C})$ и $PGL_n(\mathbb{C})$ — это комплексне группы Ли. Под *гомоморфизмами групп Ли* всегда подразумеваются гладкие (а для комплексных групп – аналитические) гомоморфизмы.

Условимся через $D_g(F)$ обозначать *дифференциал* гладкого отображения $G \xrightarrow{F} H$ в точке $g \in G$. В локальных координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в окрестности g действие дифференциала на касательный вектор состоит в умножении столбца координат вектора слева на *матрицу Якоби* $\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right|_g F_i \right)$, в которой F_i – это функции, задающие координаты образа отображения F в окрестности точки $F(g)$.

1.1.1. Пример. Отображение $GL_n \xrightarrow{\det} GL_1$ является гомоморфизмом групп Ли. Беря в качестве координат на GL_n матричные элементы x_{ij}, и разлагая определитель по i-той строке, находим

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det X = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\sum_\nu x_{i\nu} X_{i\nu} \right) = X_{ij} \ ,$$

где X_{ij} суть алгебраическое дополнение до (ij)-того элемента в матрице $X = (x_{ij})$. Таким образом, якобиева матрица $\left.\dfrac{\partial \det}{\partial x_{ij}}\right|_g$, представляющая собой строку длины n^2, имеет своими компонентами элементы присоединённой к g матрицы $g^\vee$, что обычно записывают[1] в виде $D_g(\det) = g^\vee$. В частности, в единице значение $D_e(\det)$ на касательном векторе с координатами $X = (x_{ij})$ равно $\sum x_{ii} = \operatorname{tr} X$.

1.2. Сдвиги и сопряжение. Условимся обозначать через $G \xrightarrow{\lambda_g} G$ отображение левого умножения на g: $h \longmapsto gh$, через $G \xrightarrow{\varrho_g} G$ — правое умножение на g^{-1}: $h \longmapsto hg^{-1}$, а через $G \xrightarrow{\sigma_g} G$ – сопряжение $\lambda_g \circ \varrho_g = \varrho_g \circ \lambda_g$: $h \longmapsto ghg^{-1}$. При любом g все три отображения являются диффеоморфизмами группы G на себя.

> Задача 4.2. Убедитесь, что в группе $G = GL_n$ действие действие дифференциалов $D_h(\lambda_g)$, $D_h(\varrho_g)$ и $D_h(\sigma_g)$ на касательный вектор $X = (x_{ij}) \in T_hG$ не зависит от h и переводит X, соответственно, в $g\,X$, $X\,g^{-1}$ и $g\,X\,g^{-1}$.

Дифференцируя равенство $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \mathrm{Id}_G$, получаем, что $D_{g^{-1}h}(\lambda_g) \circ D_h(\lambda_{g^{-1}} = \mathrm{Id} T_hG$ есть тождественное преобразование касательного пространства T_hG для любого h. В частности линеный оператор $D_h(\lambda_g)$ всегда невырожден.

1.3. Подгруппы Ли. Подгруппа $H \subset G$ называются *подгруппой Ли*, если она является одновременно *гладким подмногообразием* в G, По определению, это означает, что у каждой точки $h \in H$ существует окрестность $U \subset G$, где $U \cap H$ описывается как множество всех решений некоторой системы из k уравнений $\{F_i(x) = 0\}$, у которой в точке h матрица Якоби $D_h(F) = \left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right|_h F_i\right)$ невырождена в том смысле, что имеет максимальный ранг k.

> Задача 4.3. Пусть G – произвольное гладкое n-мерное многообразие (необязательно группа), а $H \subset X$ – любое подмножество. Докажите, что при выполнении предыдущего условия H будет гладким $(n-k)$-мерным многообразием относительно гладкой структуры, индуцированной с G,
>
> Указание: Для введения атласа на H надо воспользоваться (многомерной) теоремой о неявной функции.

> Задача 4.4. В условиях предыдущей задачи убедитесь, что касательное пространство T_hH к подмногообразию H в точке $h \in H \subset G$ как подпространство в T_hG совпадает с ядром якобиевой матрицы: $T_hH = \ker D_h(F) \subset T_hG$.

Если G – группа Ли, а $H \subset G$ – подгруппа, то предыдущее условие достаточно проерить только в некоторой окрестности единицы $e \subset U \subset G$. Действительно, если пересечение $H \cap U$ заданётся невырожденной системой из m уравнений $f_i(g) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, то и у любой другой точки $h \in H$ есть окрестность $hU = \lambda_h(U) \subset G$, где пересечение $hU \cap H = \lambda_h(H \cap U)$ тоже задаётся системой m уравнений $\widetilde{f}_i(g) = f_i(h^{-1}g) = 0$ с якобиевой матрицей $D_h(\widetilde{f}) = D_h(f\lambda_{h^{-1}}) = D_e(f)D_h(\lambda_{h^{-1}})$ ранга m.

В этих лекциях мы будем иметь дело только с группами Ли, которые являются подгруппами в полной линеной группе, и более того, выделяются в ней явными полиномиальными уравнениями с невырожденными якобианами.

1.3.1. Пример. Специальная линеная группа $SL_n \subset GL_n$ выделяется одним уравнением $\det X = 1$, дифференциал которого в единице невырожден согласно n° 1.1.1. Таким образом,

[1] допуская известную вольность в обращении с форматами матриц

это группа Ли (а над полем $\mathbb{C}$ — комплексная группа Ли). Отметим, что её касательное пространство в единице

$$\mathfrak{sl}_n \stackrel{\text{def}}{=} T_eSL_n = \{\, X \in Mat_n \,|\, D_e(\det)X = \operatorname{tr} X = 0 \,\}$$

состоит из всех матриц с нулевым следом.

1.3.2. Пример. Пусть k – произвольное коммутативное кольцо. Подмножество $G \subset Mat_n(k)$, заданное системой полиномиальных уравнений $f_i(X) = 0$, называется *линейной алгебраической группой* (над k), если для любой коммутативной k-алгебры K множество G_K решений той же самой системы уравнений $f_i(X) = 0$ в $Mat_n(K)$ будет подгруппой в $GL_n(K)$. Например, специальная линейная группа SL_n является алгебраической группой (над $\mathbb{Z}$).Другими примерами алгебраических групп (над $\mathbb{Z}$)являются *ортогональная*, *специальная ортогональная* и *симплектическая* группы

$$\begin{aligned} O_n &= \{\, g \in Mat_n \,|\, g\, g^t = E \,\} \\ SO_n &= \{\, g \in SL_n \,|\, g\, g^t = E \,\} \\ Sp_{2n} &= \{\, g \in SL_{2n} \,|\, g\, J\, g^t = J \,\}\,, \end{aligned}$$

где E — единичная $n \times n$ - матрица, а $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ — симплектическая единица размера $2n \times 2n$. Подчеркнём, что эти группы можно рассматривать над любой $\mathbb{Z}$ -алгеброй,т. е. над любым коммутативным кольцом K. В частности для $K = \mathbb{R}$ мы получаем группы Ли, а для $K = \mathbb{C}$ — комплексно аналитические группы.

Задача 4.5. Докажите, что якобианы $D_e(X\, X^t)$ и $D_e(X\, J\, X^t)$ невырождены.

Задача 4.6. Докажите, что касательные пространства в единице к предыдущим подгруппам состоят, соответственно, из матриц вида:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_eO_n = \{\, X \in Mat_n \,|\, X = -X^t \,\} \\ \mathfrak{so}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_eSO_n = \{\, X \in \mathfrak{sl}_n \,|\, X = -X^t \,\} \\ \mathfrak{sp}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_eSp_n = \{\, X \in Mat_n \,|\, XJ = -JX^t \,\} \end{aligned}$$

1.3.3. Пример. *Унитарная* и *специальная унитарная* группы

$$\begin{aligned} U_n &= \{\, g \in Mat_n(\mathbb{C}) \,|\, g\ \overline{g}^t = E \,\} \\ SU_n &= \{\, g \in SL_n(\mathbb{C}) \,|\, g\ \overline{g}^t = E \,\} \end{aligned}$$

являются вещественными группами Ли.

Задача 4.7. Докажите это, и убедитесь, что их касательные пространства в единице состоят, соответственно, из косоэрмитовых матриц и косоэрмитовых матриц с нулевым следом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_eU_n = \{\, X \in Mat_n(\mathbb{C}) \,|\, X\ = -\overline{X}^t \,\} \\ \mathfrak{su}_n &\stackrel{\text{def}}{=} T_eSU_n = \{\, X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \,|\, X\ = -\overline{X}^t \,\} \end{aligned}$$

Подчеркнём, что эти группы *не являются* комплексно аналитическими, а уж тем более, алгебраическими (над $\mathbb{R}$).

1.4. Алгебра Ли группы Ли — это касательное пространство к этой группе в единице. Традиционно алгебра Ли обозначается маленькой готической буквой, одноимённой с большой латинской буквой, обозначающей группу: $\mathfrak{g} = T_eG$. На этом пространстве имеется каноническая структура (неассоциативной) алгебры, возникающая так. Сопряжение $G \xrightarrow{\sigma_g} G$ фиксированным элементом $g \in G$ представляет собой гладкое отображение $h \longmapsto ghg^{-1}$, которое оставляет на месте единицу $e \in G$. Его дифференциал в единице $T_eG \xrightarrow{D_e(\sigma_g)} T_eG$ является невырожденным линейным эндоморфизмом касательного пространства. Этот эндоморфизм обозначается $Ad\,(g)$ и называется *присоединённым действием* элемента $g \in G$ на T_eG. Поскольку дифференциал композиции равен композиции дифференциалов, отображение $g \longmapsto Ad\,(g)$ представляет собой *гомоморфизм групп Ли*

$$G \xrightarrow{Ad} GL(\mathfrak{g}) = GL(T_eG)\ ,$$

который называется *присоединённым представлением* группы G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Дифференциал гомоморфизма Ad в единице $e \in G$ обозначается через

$$\mathrm{ad}\ :\ \mathfrak{g} = \mathcal{T}_eG \xrightarrow{D_e(Ad} T_{\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}}GL(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

и сопоставляет каждому вектору $x \in \mathfrak{g}$ линейный эндоморфизм $\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}(x)} \mathfrak{g}$, который и принимают за левое умножение на x в алгебре g.

1.4.1. Пример. Группа SU_2, как мы видели, представляет собой единичную сферу S^3 в вещественном четырёхмерном пространстве кватернионов $\mathbb{H}$. Её алгебра Ли $\mathfrak{su}_2 = T_eS^3$ — это трёхмерное векторное пространство $\boldsymbol{e}^\perp$ чисто мнимых кватернионов (как аффинное подпространство в H касательная плоскость к S^3 в точке $\boldsymbol{e}$ получается сдвигом векторного пространства $\boldsymbol{e}^\perp$ на вектор $\boldsymbol{e}$).

1.5. Экспоненциальное отображение. Пусть $G = GL_n$ — это полная линейная группа, так что соответствующая алгебра Ли суть пространство $\mathfrak{gl}_n = Mat_n$ всех матриц разера $n \times n$. Сопоставляя произвольной матрице $x \in \mathfrak{gl}_n$ её экспоненту:

$$\exp\ :\quad x \longmapsto e^x \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \ \cdots = \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{1}{\nu!}\,x^\nu\ ,$$

получаем гладкое отображение $\mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\exp} GL_n$.

Задача 4.8. Докажите, что над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ написанный ряд абсолютно сходится для каждого x по любой норме на $\mathfrak{gl}_n$, и что экспоненциальное отображение обладает свойством $\exp(t_1x + t_2x) = \exp(t_1x)\exp(t_2x)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathfrak{gl}_n$, но вообще говоря, *не обладает* свойством $e^(x + y) = e^xe^y$.

Задача 4.9. Докажите, что отображение $\mathbb{R}^1_+ \xrightarrow{t \longmapsto e^{tx}} GL_n$ при любом фиксированном $x \in \mathfrak{gl}_n$ является инъективным гомоморфизмом групп Ли (из аддитивной группы вещественных чисел), и что его дифференциал в нуле переводит стандартный единичный базисный касательный вектор к $\mathbb{R}_1$ в x (иначе говоря, что $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tx} = x$).

Задача 4.10. Докажите, что $\mathrm{im}\ \exp$ содержит некоторую открытую окрестность единицы $e \in GL_n$ и является диффеоморфизмом этой окрестности с некоторой открытой окрестнотью нуля в $\mathfrak{gl}_n$.

Указание: При достаточно малой $||x||$ определён логарифм $\log(1 + x) = \sum_{\nu \geqslant 1} \dfrac{1}{\nu}\,x^\nu$, и $e^{\log(1+x)} = x$.

При практическом вычислении экспонент конкретных матриц, полезно иметь в виду, что $\exp(gxg^{-1}) = g\,\exp(x)\,g^{-1}$ для любой невырожденной матрицы g.

1.5.1. Пример. Поскольку любая унитарная матрица сопряжена диагональной матрице с собственными значениями вида $e^{i\varphi}$, она является экспонентой диагональной чисто мнимой, а значит, косоэрмитовой матрицы, причём если определитель исходной матрицы был 1, то соответствующая косоэрмитова матрица будет бесследной. Таким образом, ограничение экспоненциального отображения на подалгебры косоэрмитовых и специальных косоэрмитовых матриц суть эпиморфизмы

$$\mathfrak{u}_n \xrightarrow{\exp}\!\!\!\!\rightarrow\, U_n \quad , \qquad \mathfrak{su}_n \xrightarrow{\exp}\!\!\!\!\rightarrow\, SU_n$$

§2. Комплексные матрицы размера 2×2.

2.1. Инволюции. В этой лекции мы будем заниматься алгеброй M комплексных 2×2 - матриц. На пространстве M имеются три естественных инволюции. Первая $\mathbb{C}$линейна и переводит матрицу в присоединённую:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^\vee = \Lambda^2\eta^t = \begin{pmatrix} \eta_{22} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{11} \end{pmatrix}$$

Поскольку $\eta^{\vee\vee} = \eta$ и $(\eta\zeta)^\vee = \zeta^\vee\eta^\vee$, это *антиинволюцией алгебры* M. По формуле

$$(\eta, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\eta^\vee\,\zeta)\ ,$$

она индуцирует на M симметрическую $\mathbb{C}$билинейную форму, которая является поляризацией квадратичной формы $(\eta, \eta) = \det(\eta)$. Другая инволюция $\mathbb{C}$антилинейна и переводит матрицу η в эрмитово сопряжённую

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^h = \overline{\eta}^t = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{11} & \overline{\eta}_{21} \\ \overline{\eta}_{12} & \overline{\eta}_{22} \end{pmatrix}$$

Она коммутирует с предыдущей, тоже переставляет сомножители в произведениях, и индуцирует на M *эрмитову* форму

$$(\eta, \zeta)_h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\eta^h\,\zeta)\ ,$$

которой отвечает норма $||\eta||^2 = (\eta, \eta)_h = \sum |\eta_{ij}|^2$. Композиция $\sigma{=}\vee{\circ}h{=}h{\circ}\vee$ этих двух инволюций действует на матрицы по правилу

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^\sigma = \eta^{\vee h} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{22} & -\overline{\eta}_{12} \\ -\overline{\eta}_{21} & \overline{\eta}_{11} \end{pmatrix}\ .$$

и является $\mathbb{C}$антилинейной инволюцией ялгебры M. Она задаёт на векторном пространстве M *вещественную структуру*, которая однозначно характеризуется тем, то переводит предыдущие билинейную и эрмитову формы на M друг в друга: $(\eta, \zeta)_h = (\eta^\sigma, \zeta)$.

Задача 4.11. Докажите, что комплексное векторное пространство W тогда и только тогда является комплексификацией вещественного векторного пространства[2] V, когда на W имеется $\mathbb{R}$-линейный оператор σ, такой что $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$ и $\sigma(zw) = \overline{z}\,\sigma(w) \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ w \in W$.
Указание: Оператор σ – это комплексное сопряжение. Вещественное подпространство V в W восстанавливается как $\ker(\sigma - \mathrm{Id}_W)$, и надо только проверить, что над $\mathbb{R}$ имеется разложение $W = V \oplus iV$.

Задача 4.12. Пусть на комплексном векторном пространстве W имеется билинейная симметричная форма g и эрмитова форма h. Проверьте, что существует единственный $\mathbb{C}$-антилинейный оператор $W \xrightarrow{\sigma} \overline{W}$, удовлетворяющий условию $h(w_1, w_2) = g(\eta^\sigma, \zeta)$, и что этот оператор тогда и только тогда задаёт вещественную структуру на W, когда формы h и g одновременно приводятся к единичному виду (т. е. имеют общий ортонормальный базис).

2.2. Вещественное подпространство $\mathrm{Re}(M)$ относительно структуры σ состоит из всех матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_3 + i\,x_4 \\ -x_3 + i\,x_4 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix}, \quad z_\nu \in \mathbb{C}, \quad x_\nu \in \mathbb{R}.$$

Ограничения эрмитовой и билинейной форм на это четырёхмерное вещественное подпространство совпадают и в координатах x_i представляют собой стандартную евклидову норму $(x, x) = \sum x_\nu^2$. Ортонормальный базис евклидова пространства $\mathrm{Re}(M)$ состоит из матриц

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2-1}$$

Задача 4.13. Составьте таблицу умножения матриц $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ в M и таблицу их попарных коммутаторов.

2.3. Кватернионы. Из зад.4.13 вытекает, что матрицы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ перемножаются по правилам

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1\,, \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}\,, \tag{2-2}$$

и значит, пространство $\mathrm{Re}(M)$ замкнуто относительно умножения, т. е. представляет собой четырёхмерную алгебру над полем $\mathbb{R}$ с единицей $1 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}$. Будуи подалгеброй в алгебре матриц, она ассоциативна, однако, не коммутативна. Эта алгебра называется *алгеброй кватернионов* и обозначается через $\mathbb{H}$.

2.3.1. Норма. Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, евклидова норма $||x||^2 = \sum x_\nu^2 = \det(x)$ на $\mathbb{H}$ мультипликативна: $||xy|| = ||x||\,||y||$, что приводит к любопытному тождеству

Задача 4.14. Докажите *тождество Эйлера*[3]

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \quad & (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)^2 + \\ & + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 + \\ & + (x_1y_3 + x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 + \\ & + (x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2\end{aligned}$$

[2]это означает, что имеет место изоморфизм вещественных векторных пространств $W = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$

[3]Эйлер использовал его в своём доказательстве того, что произведение двух чисел, представимых в виде суммы четырёх квадратов, тоже представимо в таком виде

2.3.2. Сопряжение. Антинволюция $\vee$ оставляет на месте $\boldsymbol{e}$ и меняет знак у матриц $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, т. е. переводит кватернион $q = \boldsymbol{e}\, x_1 + \boldsymbol{i}\, x_2 + \boldsymbol{j}\, x_3 + \boldsymbol{k}\, x_4$ в кватернион

$$q^\vee = ||q||\, q^{-1} = \boldsymbol{e}\, x_1 - \boldsymbol{i}\, x_2 - \boldsymbol{j}\, x_3 - \boldsymbol{k}\, x_4 \ .$$

В таком контексте она называется *кватернионным сопряжением*.

2.3.3. Деление. В силу соотношений Лапласа $\eta\, \eta^\vee = \det(\eta)\, E$ для любой матрицы $\eta \in M$. Поэтому $q\, q^\vee = ||q||$, и следовательно, всякий ненулевой кватернион q обратим

$$q^{-1} = ||q||^{-1}\, q^\vee \ ,$$

так что $\mathbb{H}$ – это некоммутативная ассоциативная *алгебра с делением*, т. е. *тело*.

2.3.4. Кватернионы с нормой 1 составляют мультипликативную подгруппу в алгебре $\mathbb{H}$. Геометрически она представляет собой единичную трёхмерную сферу $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. В терминах M эта группа состоит из всех матриц η, удовлетворяющих соотношениям $(\eta^h)^\vee = \eta$ (вещественность) и $\det \eta = 1$. При наличии второго, первое равносильно равенству $\eta^h = \eta^{-1}$, т. е. группа кватернионов с нормой 1 — это специальная унитарная группа

$$SU_2 = \{\, \eta \in SL_2(\mathbb{C}) \mid\ \eta\, \overline{\eta}^t = 1 \,\} \ .$$

2.3.5. Комплексные структуры на пространсте кватернионов. Кватернионы вида $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i}\, x_2 + \boldsymbol{j}\, x_3 + \boldsymbol{k}\, x_4$ называются *чисто мнимыми*. Чисто мнимые кватернионы нормы 1 составляют двумерную сферу в трёхмерном пространстве всех чисто мнимых кватернионов, и выделяются в $\mathbb{H}$ условиями $q^\vee = -q$ и $||q|| = 1$, которые равносильны одному уравнению $q^2 = -1$. Таким образом, оператор левого умножения на любой чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{m}$ единичной нормы задаёт *комплексную структуру* на четырёхмерном вещественном пространстве $\mathbb{H}$.

> Задача 4.15. Докажите, что $2n$-мерное вещественное векторное пространство тогда и только тогда получается овеществлением[4] n-мерного комплексного векторным пространства , когда на нём имеется вещественно линейный оператор I, удовлетворяющий условию $I^2 = -\mathrm{Id}$.
>
> Указание: Оператор I есть оператор умножения на комплексное число i. Умножение на комплексные числа восстанавливается из него по формуле $(x + i\, y)\, w \stackrel{\text{def}}{=} x\, w + y\, I(w) \quad \forall\, w \in W\,,\ (x + i\, y) \in \mathbb{C}$

относительно которой $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^\perp$, где первое слагаемое — это вещественная линейная оболочка векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{m}$, отождествлённая с *полем* $\mathbb{C}$ посредством отображения

$$\{1, i\} \longmapsto \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}\} \ ,$$

а второе суть евклидово ортогональное дополнение к первому и является *одномерным комплексным векторным пространством*, на котором умножение на комплексные числа определяется как *левое* умножение на кватернионы из первого слагаемого $\mathbb{C}$ (оно переводят $\mathbb{C}^\perp$ в себя, поскольку левое умножение и на $\boldsymbol{e}$ и на $\boldsymbol{m}$ сохраняют евклидову норму, а с ней и ортогональность).

Произвольно фиксировав чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{n} \in \mathbb{C}^\perp$ с $||\boldsymbol{n}|| = 1$, мы можем писать

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{n} \ = \{\, z_1 + z_2\, \boldsymbol{n} \mid\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}\, \boldsymbol{e} + \mathbb{R}\, \boldsymbol{m} \} \ .$$

[4] т. е. сужением поля констант с $\mathbb{C}$ до $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Поскольку $\boldsymbol{mn} = -\overline{\boldsymbol{mn}} = -\overline{\boldsymbol{n}}\,\overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}\,\overline{\boldsymbol{m}}$, мы видим, что левое и правое кватернионное умножение на комплексные числа связаны соотношением $z\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\overline{z}$. Поэтому

$$z\,q = q\,\overline{z}\;, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\;\; q \in \mathbb{C}^{\perp}\;\;.$$

Иначе говоря, правое кватернионное умножение элементов из $\mathbb{C}^{\perp}$ на $z \in \mathbb{C}$ соответствует умножению векторов одномерного комплексного пространства $\mathbb{C}^{\perp}$ на сопряжённые комплексные числа $\overline{z}$ ([5]).

2.4. Накрытие $\boldsymbol{SU_2 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow SO_3}$. Рассмотрим действие группы $SU_2 = S^3$ кватернионов единичной нормы сопряжениями на $\mathbb{H}$

$$q\;:\; x \longmapsto q\,x\,q^{-1}\;,\quad q \in S^3 = SU_2\;,\quad x \in \mathbb{H}\;.$$

Поскольку такие сопряжения сохраняют евклидову норму (детерминант) и оставляют на месте единицу $\boldsymbol{e}$, они переводят в себя ортогональное дополнение к ней — трёхмерное вещественное пространство $\boldsymbol{e}^{\perp}$ чисто мнимых кватернионов. В результате возникает гомоморфизм групп $SU_2 \xrightarrow{Ad} O_3 = O(\boldsymbol{e}^{\perp})$.

Задача 4.16. Проверьте, что в координатах он задаётся формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_3 + i\,x_4 \\ -x_3 + i\,x_4 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Ad} \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 & 2\,(x_1x_4 + x_2x_3) & 2\,(x_2x_4 - x_1x_3) \\ 2\,(x_2x_3 - x_1x_4) & x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 & 2\,(x_3x_4 + x_1x_2) \\ 2\,(x_2x_4 + x_1x_3) & 2\,(x_3x_4 - x_1x_2) & x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 \end{pmatrix}\;.$$

где $\sum |x_\nu|^2 = 1$.

2.4.1. Утверждение. $\operatorname{im} Ad = SO_3$ *и* $\ker Ad = \{\pm E\} \simeq \mathbb{Z}\,/2\mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку сопряжение кватернионом q тождественно действует на вещественной двумерной плоскости π, проходящей через 1 и q, оператор $Ad(q)$ тождественно действует на прямой, высекаемой плоскостью π в пространстве чисто мнимых кватернионов. Эта прямая пересекается со сферой чисто мнимых кватернионов единичной длины по в двух точках $\pm\boldsymbol{m}$. Вводя на $\mathbb{H}$ комплексную структуру $\{1, i\} \longmapsto \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}\}$, мы отождествляем π с полем $\mathbb{C}$ а ортогонал $\pi^{\perp}$ – с одномерным комплексным пространством, на котором левое и правое умножения на кватернионы из π, интерпретируются, соответственно, как умножения векторов на комплексные числа z и $\overline{z}$, $z \in \mathbb{C} = \pi$. В частности, $Ad(q)$ действует на $\pi^{\perp}$ как умножение на комплексное число q^2, т. е. представляет собой поворот плоскости $\pi^{\perp}$ на угол $2\,Arg(q)$.

Таким образом, $\operatorname{im}(Ad)$ состоит из всевозможных поворотов вокруг прямых, т. е. совпадает с SO_3. Поскольку поороты производятся на удвоенные углы $Arg(q)$, одному повороту соответствуют ровно два кватерниона $\pm q$. □

2.5. Накрытие $\boldsymbol{SU_2 \times SU_2 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow SO_4}$. Обобщая предыдущие рассуждения, рассмотрим на $\mathbb{H}$ действие группы $SU_2 \times SU_2$:

$$(q_1, q_2)\;:\; x \longmapsto q_1\,x\,q_2^{-1}\;,\quad q_1, q_2 \in S^3 = SU_2\;,\quad x \in \mathbb{H}\;.$$

[5] в частности, аналогично тому, как $\mathbb{C}$ получается из $\mathbb{R}$, тело кватернионов $\mathbb{H}$ можно воспринимать как результат некоммутативного двумерного расширения поля $\mathbb{C}$, т. е. как множесто символов вида $z_1 + z_2\,\boldsymbol{m}$, перемножаемых по правилам $(z_1 + z_2\,\boldsymbol{m})(\zeta_1 + \zeta_2\,\boldsymbol{m}) = (z_1\zeta_1 - z_2\overline{\zeta}_2) + (z_1\zeta_2 + \overline{z}_2\zeta_1)\,\boldsymbol{m}$

Это действие является гомоморфизмом из $SU_2 \times SU_2$ в группу O_4 всех евклидовых изометрий пространства $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$.

2.5.1. Утверждение. *При этом гомоморфизме $SU_2 \times SU_2$ эпиморфно накрывает SO_4 с ядром $\{\pm E\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Оператор $x \longmapsto q_1\, x\, q_2^{-1} = q_1 q_2^{-1}\, q_2 x q_2^{-1}$ является композицией левого умножения на кватернион $q_1 q_2^{-1} \in S^3$ и сопряжения кватернионом $q_2 \in S^3$.

Задача 4.17. Убедитесь, что оператор левого умножения на кватернион единичной длины лежит в SO_4 (т. е. сохраняет ориентацию).

Второе преобразование оставляет на месте $\boldsymbol{e} \in \mathbb{H}$ и представляет собой оператор из группы $SO_3 \subset SO_4$ ортогональных преобразований пространства $\boldsymbol{e}^\perp$ чисто мнимых кватернионов. Таким образом, образ $SU_2 \times SU_2$ лежит в SO_4.

Наоборот, всякий оператор $f \in SO_4$ единственным образом представляется в виде композиции $f = \lambda_q \circ \widetilde{f}$ оператора левого умножения на кватернион $q = f(\boldsymbol{e})$ и оператора $\widetilde{f} = \lambda_q^{-1} \circ f$, оставляющего на месте $\boldsymbol{e}$, и потому лежащего в $SO_3 = SO(\boldsymbol{e}^\perp) \subset SO_4$. Согласно Утв.2.4.1, существует единственный с точностью до знака кватернион $h \in S^3$, такой что $\widetilde{f}(x) = h\, x\, h^{-1} \quad \forall\, x \in, \mathbb{H}$ Но тогда $f(x) = qh\, x\, h^{-1}$, т. е. f попадает в образ $SU_2 \times SU_2$, и его прообраз (qh, h) определён однозначно с точностью до знака. □

Задача 4.18. Покажите, что как топологическое пространство $SO_4 = S^3 \times SO_3$.

2.6. Подалгебры Ли. Векторное подпространство в матричной алгебре называется *подалгеброй Ли*, если вместе с каждыми двумя матрицами x, y оно содержит и их коммутатор $[x, y] = xy - yx$.

Задача 4.19. Докажите, что коммутаторы бесследны: $\operatorname{tr}([xy]) = 0 \quad \forall\, x, y$.

Множество всех бесследных маитриц размера $n \times n$ над полем k составляет подалгебру Ли, которая обозначается $\mathfrak{sl}_n(k)$. Если n не делится на характеристику основного поля k, линейный оператор

$$x \longmapsto x - \frac{1}{n} \operatorname{tr}(x)$$

проектирует все матрицы на бесследные вдоль скалярных и задаёт каноническое разложение матричной алгебры в прямую сумму одномерной коммутативной подалгебры гомотетий и подалгебры Ли $\mathfrak{sl}$.

В нашем случае имеем $M = \mathbb{C}\boldsymbol{e} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, где второе слагаемое порождается над $\mathbb{C}$ матрицами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из (2-1). Отметим, что это разложение инвариантно относительно вещественной структуры σ. Трёхмерное вещественное пространство $\operatorname{Re}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ состоит из всех матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} i\, x_2 & x_3 + i\, x_4 \\ -x_3 + i\, x_4 & -i\, x_2 \end{pmatrix} , \quad x_\nu \in \mathbb{R} ,$$

т. е. всех *косоэрмитовых матриц со следом нуль*. Оно обозначается $\mathfrak{su}_2$ и порождается над $\mathbb{R}$ всё теми же матрицами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Согласно зад.4.13, они коммутируют по правилам

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = 2\,\boldsymbol{k} , \quad [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = 2\,\boldsymbol{i} , \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = 2\,\boldsymbol{j} , \tag{2-3}$$

так что $\mathfrak{su}_2$ представляет собой трёхмерную вещественную алгебру Ли, комплексификация которой — трёхмерная комплексная алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

2.7. Изоморфизм $\Lambda^2 M \xrightarrow{(\lambda_+,\lambda_-)} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Отображения

$$\begin{aligned} \lambda_+(\eta\wedge\zeta) &\longmapsto \zeta^\vee\eta - \eta^\vee\zeta \\ \lambda_-(\eta\wedge\zeta) &\longmapsto \zeta\,\eta^\vee - \eta\,\zeta^\vee \end{aligned} \tag{2-4}$$

действуют из $\Lambda^2 M$ в подалгебру Ли бесследных операторов $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \subset M$. Образы стандартных базисных векторов $\Lambda^2 M$, происходящих из кватернионного базиса $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, при этом суть

$$\begin{aligned} \lambda_+(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{i}) &= -\lambda_-(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{i}) = 2\,\boldsymbol{i} & -\lambda_+(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}) &= \lambda_-(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}) = 2\,\boldsymbol{k} \\ \lambda_+(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{j}) &= -\lambda_-(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{j}) = 2\,\boldsymbol{j} & -\lambda_+(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}) &= \lambda_-(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}) = 2\,\boldsymbol{i} \\ \lambda_+(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{k}) &= -\lambda_-(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{k}) = 2\,\boldsymbol{k} & -\lambda_+(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}) &= \lambda_-(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}) = 2\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{im}(\lambda_+) = \operatorname{im}(\lambda_-) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, тогда как $\ker(\lambda_+)$ и $\ker(\lambda_-)$ суть два дополнительных трёхмерных подпространства, порождённых, соответственно, бивекторами

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j} \quad \in \quad \ker\lambda_+ \\ &\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j} \quad \in \quad \ker\lambda_+ \end{aligned}$$

Отметим, что $\lambda_\pm$ изоморфно отображает $\ker(\lambda_\mp)$ на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, переводя написанные выше образующие в учетверённые базисные кватернионы. Таким образом, $\lambda_+ \oplus \lambda_-$ устанавливает изоморфизм

$$\Lambda^2 M \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \quad .$$

2.8. Спиноры. Рассмотрим два двумерных комплексных векторных пространства $U_\pm$ и зафиксируем *эрмитову* форму $h_\pm$ на каждом из них, а также изоморфизм $\Lambda^2 U_- \xrightarrow{\;\mathfrak{d}\;} \Lambda^2 U_+$ между их внешними степенями, согласованный с эрмитовыми структурами в том смысле, что существует бивектор $e_1^- \wedge e_2^-$, построенный по ортонормальному базису формы h_-, который переводится им в бивектор $e_1^+ \wedge e_2^+$, построенный по ортонормальному базису формы h_+. Ортонормальные базисы $\{e_1^\pm, e_2^\pm\} \subset U_\pm$ с таким свойством называются *согласованными*. Пространства $U_\pm$ вместе с набором данных $\{h_\pm, \mathfrak{d}\}$ называются пространствами $\pm$ - спиноров.

Отождествляя операторы с их матрицами в согласованных базисах, мы получаем изоморфизмы алгебры комплексных 2×2 матриц M с алгебрами $\operatorname{End}(U_-)$ и $\operatorname{End}(U_+)$, а также с векторными пространствами $W = \operatorname{Hom}(U_-, U_+)$ и $W^* = \operatorname{Hom}(U_+, U_-)$. При этом рассмотренные выше структуры на M преобретают геометрическую интерпретацию, с которой мы уже имели дело в конце третьей лекции.

Задача 4.20. Проверьте. что делённая на 2 полная свёртка между двойственными векторными пространствами $W = U_-^* \otimes U_+$ и $W^* = U_- \otimes U_+^*$ в терминах матриц означает спаривание $\langle\,\eta\,,\,\zeta\,\rangle = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\eta\zeta) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\zeta\eta)$.

Задача 4.21. Докажите, что сопоставляя оператору $U_- \xrightarrow{\eta} U_-$, $U_- \xrightarrow{\eta} U_+$ или $U_- \xrightarrow{\eta} U_+$ эрмитово сопряжённый оператор[6] $U_- \xleftarrow{\eta^h} U_-$, $U_- \xleftarrow{\eta^h} U_+$ или $U_- \xleftarrow{\eta^h} U_+$, мы в терминах матриц получим $\mathbb{C}$-антилинейную антиинволюцию h из n° 2.1, индуцирующую на M эрмитову форму $(*\,,*)_h$.

[6] он определяется равенством $h_?(u, \eta v) = h_?(\eta^h u, v)\ \forall\, u, v$

Задача 4.22. Докажите, что тензор $\mathfrak{d} \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2 U_+, \Lambda^2 U_-) = \mathbb{C}\mathfrak{d}$, канонически вложенный в $S^2 W^*$ в соответствии с разложением $W^{*\otimes 2} = \mathrm{Hom}(W, W^*)$ по типам симметрии

$$W^* \otimes W^* \cong U_+^* \otimes U_+^* \otimes U_- \otimes U_- \cong \left(S^2 U_+^* \oplus \Lambda^2 U_+^*\right) \otimes \left(S^2 U_- \oplus \Lambda^2 U_-\right) \cong$$
$$\cong \underbrace{\left(S^2 U_+^* \otimes \Lambda^2 U_-\right) \oplus \left(\Lambda^2 U_+^* \otimes S^2 U_-\right)}_{\Lambda^2 W^*} \oplus \underbrace{\mathrm{Hom}(\Lambda^2 U_+, \Lambda^2 U_-) \oplus \mathrm{Hom}(S^2 U_+, S^2 U_-)}_{S^2 W^*} ,$$

и рассматриваемый как корреляция $\mathrm{Hom}(U_-, U_+) = W \xleftrightarrow{\sim} W^* = \mathrm{Hom}(U_+, U_-)$, на языке матриц изображается $\mathbb{C}$линейной антиинволюцией $\vee$ из n° 2.1 и индуцирует на M симметричную форму $(*\,,*)$.

Задача 4.23. Обозначим через $\mathrm{ad}(U_\pm) \subset \mathrm{End}(U_\pm)$ подалгебру Ли всех бесследных эндоморфизмов. Убедитесь, что имеет место канонический изоморфизм

$$\Lambda^2 W^* \xrightarrow{(\lambda_+, \lambda_-)} \mathrm{ad}(U_+) \oplus \mathrm{ad}(U_-) ,$$

где $\Lambda^2 \mathrm{Hom}(U_+, U_-) \xrightarrow{\lambda_\pm} \mathrm{ad}(U_\pm)$ заданы правилами (2-4).

Задача 4.24. Убедитесь, что подпространства $\ker \lambda_\pm \subset \Lambda^2 W^*$ совпадают с рассматривавшимися в конце прошлой лекции подпространствами $\Lambda_\pm$ автодуальных и антиавтодуальных бивекторов относительно звёздочки Ходжа, построенной по квадратичной форме $\mathfrak{d} = \det$.

2.8.1. Спинорное разложение. Пусть V — вещественное четырёхмерное евклидово пространство, и $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ — его комплексификация. $\mathbb{C}$линейный изоморфизм

$$V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$$

называется *спинорным разложением* V, если он отождествляет билинейное и эрмитово продолжения евклидова скалярного произведения с V на $V_{\mathbb{C}}$ соответстенно с поляризацией детерминанта $(\cdot,\cdot)$ и эритовой формой $(\cdot,\cdot)_h$ на W. Само вещественное пространство V при этом автоматически отождествится с вещественным подпространством в W, т. е. с кватернионами.

2.8.2. Спинорные группы. Группа $GL(U_+) \times GL(U_-)$ действует заменами координат на наборы данных $\{\, U_\pm\,,\, h_\pm\,,\, \mathfrak{d}\,\}$, задающие спинорное разложение. А именно, пара операторов (f_+, f_-) переводит согласованную пару базисов e^+ и e^- в пару базисов $f_+\,(e^+)$ и $f_-\,(e^-)$, эрмитовы формы $h_\pm$ — в формы $f_\pm h_\pm \overline{f}_\pm^t$, а тензор $\mathfrak{d}$ – в $\det f_+\, \mathfrak{d}\, \det f_-^{-1}$. Максимальная подгруппа в $GL(U_+) \times GL(U_-)$, сохраняющая обе эрмитовы формы $h_\pm$ и тензор $\mathfrak{d}$, называется *комплексной спинорной группой* и обозначается $Spin^{\mathbb{C}}(4)$. Она состоит из всевозможных пар унитарных матриц с одинаковым детерминантом:

$$Spin^{\mathbb{C}}(4) = \{(f_+, f_-) \in U(2) \times U(2) \,|\, \det f_+ = \det f_- \,\} .$$

Задача 4.25. Докажите, что $Spin^{\mathbb{C}}(4)$ есть образ эпиморфного гомоморфизма

$$SU(U_+) \times SU(U_-) \times U(1) \xrightarrow{(f_+, f_-, \vartheta) \longmapsto (\vartheta f_+, \vartheta f_-)} U(U_+) \times U(U_-) ,$$

ядро которого есть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})\}$.

$Spin^{\mathbb{C}}(4)$ действует на W по правилу $(f_+, f_-) \;:\; \eta \longmapsto f_+ \eta f_-^{-1}$, сохраняя билинейную и эрмитову формы, а с ними и вещественную структуру. Это действие не является свободным: пары гомотетий с одинаковым коэффициентом $\vartheta \in U(1)$ действуют тривиально, так что

образ $Spin^{\mathbb{C}}(4)$ в $\mathrm{End}(W)$ совпадает с образом подгруппы $SU(U_+) \times SU(U_-) \subset Spin^{\mathbb{C}}(4)$, которая в этом контексте называется *вещественной спинорной группой* и обозначается $Spin(4)$. В Утв.2.5.1 мы видели, что ограничение этого действия на вещественное подпространство $\mathrm{Re}(W)$ даёт эпиморфизм $Spin(4) \twoheadrightarrow SO(\mathrm{Re}(W))$ с ядром $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 4.26. Докажите, что имеется точная последовательность групп

$$1 \hookrightarrow U(1) \xhookrightarrow{\vartheta \mapsto (\vartheta,\vartheta)} Spin^{\mathbb{C}}(4) \twoheadrightarrow SO_4 \twoheadrightarrow 1$$

Вычислим умножение в алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$ полной линейной группы GL_n (а таким образом – и в алгебре Ли любой подгруппы Ли $G \subset GL_n$, ибо она будет подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}_n$). Векторное пространство $\mathfrak{gl}_n$ есть пространство всех матриц размера $n \times n$, и как мы видели в зад.4.2, присоединённое представление $GL_n \xrightarrow{Ad} GL(\mathfrak{gl}_n)$ сопоставляет невырожденной матрице $g \in GL_n$ автоморфизм сопряжения

$$Ad(g) \ : \quad x \longmapsto g\,x\,g^{-1} \qquad \forall\, x \in , \mathfrak{gl}_n \ .$$

Лекция 5
Пространства с операторами.

▷модули над множеством операторов, их гомоморфизмы, изоморфизмы, прямые суммы, подмодули и фактор модули ▷действие групп и алгебр Ли на тензорных произведениях, двойственных пространствах и пространствах гомоморфизмов ▷приводимость, разложимость и полупростота ▷представления одного оператора ▷лемма Шура ▷свойства простых и полупростых модулей ▷$B=\mathbf{End}_A(V) \Longleftrightarrow A=\mathbf{End}_B(V)$ ▷теорема Бернсайда ▷неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули ▷полупростота $\mathfrak{sl}_2$-модулей

§1. Основные понятия, относящиеся к пространствам с операторами.

1.1. Пространство с операторами — это векторное пространство V, рассматриваемое вместе с действием на нём некоторого фиксированного множества M линейных операторов, или говоря более формально, вместе с отображением множеств $M \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$. В таком контексте отображение ϱ называется *линейным представлением* множества M на пространстве V, а V называется *M-модулем*. Если множество M несёт дополнительную алгебраическую структуру, например, представляет собой группу, ассоциативную алгебру или алгебру Ли, а ϱ является гомоморфизмом относительно этой структуры, то ϱ называется линейным представлением соответствующей группы, ассоциативной алгебры или алгебры Ли.

Многие математические теории приводят к необходимости классифицировать M-модули над тем или иным фиксированным множеством M с той или иной дополнительной структурой. В этой лекции мы обсудим самые общие понятия, связанные с этой задачей, и разберём несколько характерных примеров. В следующей лекции мы подробно изучим важный специальный случай — модули над конечными группами.

Теория пространств с операторами отличается от «обычной» линейной алгебры тем, что содержательный смысл в ней имеют только такие линейные операторы, подпространства, прямые суммы и т. п., которые инварианты относительно действия операторов из M.

1.2. Гомоморфизмы. Линейный оператор $U \xrightarrow{\varphi} V$ между двумя M-модулями

$$M \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}(U) \qquad \text{и} \qquad M \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$$

называется *M-гомоморфизмом* (или *гомоморфизмом M-модулей*), если он перестановочен со

всеми операторами из M, т. е. если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ {\scriptstyle\lambda(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varrho(g)} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$$

коммутативна $\forall\, g \in M$. Совокупность всех M-гомоморфизмов представляет собой векторное подпространство в пространстве всех линейных операторов $\operatorname{Hom}(U,V)$, и обозначается $\operatorname{Hom}_M(U,V)$. Два M-модуля называются *изоморфными*, если существует M-гомоморфизм $V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$, являющийся изоморфизмом векторных пространств.

1.3. Подмодули и фактор модули. Подпространство U в M-модуле V называется *инвариантным подпространством* или *подмодулем* , если все операторы из M переводят его в себя. Ограничение операторов M с V на U снабжает U канонической структурой M-модуля, относительно которой вложение $U \hookrightarrow V$ является M-гомоморфизмом.

Если U является инвариантным подпространством в M-модуле V, то все операторы из M корректно действуют на фактор пространстве V/U, наделяя его канонической структурой M-модуля, относительно которой отображение факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$ является M-гомоморфизмом.

> Задача 5.1. Докажите, что ядро и образ любого M-гомоморфизма $V \xrightarrow{\varphi} W$ являются подмодулями, и что φ канонически раскладывается в композицию эпиморфизма M-модулей $V \twoheadrightarrow V/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ и вложения M-модулей $V/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi \hookrightarrow W$.

1.4. Прямые суммы. Для любых M-модулей U, V прямая сумма векторных пространств $U \oplus V$ канонически наделяется структурой M-модуля называемого *прямой суммой* исходных модулей. Действие операторов из M определяется по стандартным правилам

$$g(u,v) = (gu, gv) \qquad \forall\, g \in G \ , \quad \forall\, u \in U,\, v \in V \ .$$

Относительно этой структуры вложения слагаемых и проекции на них:

$$U \hookrightarrow U \oplus V \hookleftarrow V \qquad\qquad U \twoheadleftarrow U \oplus V \twoheadrightarrow V$$

являются M-гомоморфизмами.

> Задача 5.2. Пусть M-модуль W разложен в прямую сумму векторных подпространств $W = U \oplus V$, причём подпространство U является подмодулем. Докажите, что V тогда и только тогда являются подмодулем, когда проектор W на U вдоль V является M-гомоморфизмом.

1.5. Двойственные модули и тензорные произведения. Если U и V — два M-модуля, то на тензорном произведении векторных пространств $U \otimes V$ и на двойственных пространствах U^*, V^* можно различными способами задавать структуру M-модуля, и выбор того или иного способа обычно диктуется нуждами конкретной теории, из которой происходят рассматриваемые пространства с операторами. В дальнейшем нам понадобятся два примера, в которых M — это группа G или алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G.

1.5.1. Представление группы на $U \otimes V$ определяется формулой

$$g\,(u \otimes v) = g\,u \otimes g\,v \qquad \forall\, g \in G \ , \quad \forall\, u \in U,\, v \in V \ ,$$

т. е. так, чтобы операторы из G были *мультипликативными гомоморфизмами* тензорной алгебры (переводили тензорные произведения векторов в тензорные произведения векторов). Действие G на U^* определяется правилом

$$g \,:\, \xi \longmapsto g^{*-1}\xi \ ,$$

т. е. матрицы, задающие действие G в двойственном базисе пространства U^*, транспонированы и обратны к матрицам, задающим действие G на U.

Задача 5.3. Проверьте, что это правило действительно задаёт *гомоморфизм* из группы G в $GL(U^*)$, а также что оно эквивалентно требованию, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна в том смысле, что

$$\big\langle\, g(\xi)\,,\, g(v)\,\big\rangle = \big\langle\, \xi\,,\, v\,\big\rangle \qquad \forall\, g\in G \ , \quad \forall\, u\in U \ , \quad \forall\, \xi\in U^* \ .$$

Задача 5.4. Убедитесь, что в определённом по предыдущими правилам представлении группы G на пространстве $\mathrm{Hom}(U,V) = U^*\otimes V$ элемент g переводит оператор φ в оператор $g\varphi g^{-1}$. В частности операторы, *неподвижные* относительно этого действия составляют подпространство $\mathrm{Hom}_G(U,V)$.

1.5.2. Представления алгебры Ли на U^* и $U\otimes V$ задаются дифференциалами описанных выше представлений соответствующей группы Ли. Элемент $x\in\mathfrak{g} = T_eG$ действует на тензорном произведении по правилу

$$x(u\otimes v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(e^{tx}u\otimes e^{tx}v\right) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tx}u\right)\otimes v + u\otimes\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tx}v\right) = (xu)\otimes v + u\otimes(xv)\ ,$$

а на двойственном пространстве — по правилу

$$x(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{-tx^*}\xi = -x^*\xi$$

Задача 5.5. Проверьте, что эти правила действительно задают *гомоморфизмы* алгебр Ли $\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{End}(U\otimes V)$ и $\mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{End}(U^*)$.

Задача 5.6. Докажите, что в определённом по предыдущими правилам представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на пространстве $\mathrm{Hom}(U,V) = U^*\otimes V$ элемент x переводит оператор φ в оператор $x\varphi - \varphi x$. В частности операторы, *аннулируемые* этим этим действием составляют подпространство $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,V)$.

1.6. Неприводимость. M-модуль W называется *неприводимым* или *простым*, если он не имеет нетривиальных[1] подмодулей. Поскольку пересечение подмодулей, очевидно, тоже является подмодулем, любые два неприводимых подмодуля в данном модуле либо совпадают либо пересекаются по нулю.

Задача 5.7. Докажите, что всякий ненулевой гомоморфизм между двумя неприводимыми модулями является изоморфизмом.

1.6.1. Лемма Шура. *Если V простой M-модуль над алгебраически замкнутым полем k, то $\mathrm{End}_M(V)\simeq k\,\mathrm{Id}_M$, т. е. M-эндоморфизмы исчерпываются гомотетиями.*

[1] т. е. отличных от 0 и самого W

Доказательство. Действительно, над алгебраически замкнутым полем всякий эндоморфизм $V \xrightarrow{\varphi} V$ обладает собственным вектором, т. е. $\ker(\varphi - \mu \operatorname{Id}_V) \neq 0$ для некоторого $\mu \in k$. Но если $\varphi \in \operatorname{End}_M(V)$, то и $\varphi - \mu \operatorname{Id}_V \in \operatorname{End}_M(V)$, и стало быть, подмодуль $\ker(\varphi - \mu \operatorname{Id}_V) = V$ из-за простоты V, т. е. $\varphi = \mu \operatorname{Id}_V$. □

Задача 5.8. Докажите, что пространство M-гомоморфизмов между двумя неприводимыми M-модулями над алгебраически замкнутым полем либо нулевое, либо одномерное.

1.7. Разложимость. Модуль называется *разложимым*, если он представим в виде прямой суммы своих собственных подмодулей. Всякий M-модуль является прямой суммой неразложимых. Модуль называется *вполне приводимым* или *полупростым*, если он является прямой суммой неприводимых (т. е. простых) модулей. Неприводимые модули неразложимы. Обратное неверно, и неразложимые модули могут быть приводимы.

Вообще, как показывает лемма Шура, простые M-модули являются аналогами одномерных векторных пространств, и их, как правило, можно явно перечислить. Полная классификация заданного типа пространств с операторами (буде она имеется) обычно строится по такой схеме: перечисляются все неприводимые M-модули и указывается, как из них «собираются» неразложимые модули; произвольный модуль есть прямая сумма неразложимых. Мы проиллюстрируем эту схему на примере, известном из прошлого семестра.

1.8. Пример: представление одного эндоморфизма. Если множество $M = \{\varphi\}$ состоит из одного элемента, то классификация M-модулей представляет собой классификацию линейных операторов, которая обсуждалась в прошлом семестре. Над алгебраически замкнутым полем k любой оператор имеет собственный вектор, так что в этом случае неприводимые модули — это одномерные пространства и только они, а полупростота означает диагонализуемость оператора φ.

Задача 5.9. Приведите пример неразложимого приводимого (и стало быть, неполупростого) пространства с одним оператором.

Задача 5.10. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем k всякое неразложимое пространство с одним оператором изоморфно пространству, на котором оператор в подходящем базисе задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix} \quad , \qquad \mu \in k$$

Над произвольным полем k теория конечномерных пространств с одним оператором тождественна теории конечномерных $k[t]$-модулей, поскольку задание оператора $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ равносильно заданию гомоморфизма k-алгебр $k[t] \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \operatorname{End}(V)$, переводящего t в φ, и при этом инвариантность, разложимость и приводимость относительно φ и относительно $k[t]$ будут означать одно и то же. Всякий гомоморфизм бесконечномерной алгебры $k[t]$ в конечномерную алгебру $\operatorname{End}(V)$ обладает ненулевым ядром, которое, поскольку $k[t]$ является областью главных идеалов, имеет вид $\ker\widetilde{\varphi} = (f)$, где $f \in k[t]$ есть многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий оператор φ. Такой многочлен называется *минимальным многочленом* оператора φ.

Задача 5.11. Пусть оператор φ на пространстве V аннулируется многочленом $f \in k[t]$, который раскладывается в $k[t]$ в произведение s попарно взаимно простых множителей

$$f(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \cdots \cdot q_s(t) \ .$$

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$ обозначим через $f_j(t) = f(t)/q_j(t)$ соответствующее произведение $(s-1)$ из них. Докажите, что V разлагается в прямую сумму φ-инвариантных подпространств $\ker q_j(\varphi) = \operatorname{im} f_j(\varphi)$ (некоторые из которых могут оказаться нулевыми).
Указание: Из равенства $0 = f(\varphi)V = q_j(\varphi)f_j(\varphi)V$ вытекает, что

$$\operatorname{im} f_j(\varphi) \subset \ker q_j(\varphi) \qquad \forall j \ .$$

Из взаимной простоты q_i и q_j вытекает, во-первых, что $1 = x(t)\, q_i(t) + y(t)\, q_j(t)$ для подходящих $x(t), y(t) \in k[t]$, так что подставив вместо t оператор φ и применив к $v \in \ker q_i(\varphi) \cap \ker q_j(\varphi)$, получим

$$q_i(\varphi) \cap \ker q_j(\varphi) = 0 \ ,$$

а во-вторых, что наибольший общий делитель всех f_j равен 1 и $1 = \sum\limits_{\nu=1}^{s} f_\nu(t) g_\nu(t)$ для подходящих $g_\nu(t) \in k[t]$, так что подставив вместо t оператор φ и применив к произвольному $v \in V$, получим

$$V \subset \bigoplus_{\nu} \operatorname{im} f_\nu(\varphi) \ .$$

Из этой задачи следует, что над алгебраически замкнутым полем k, где минимальный многочлен f_φ оператора φ раскладывается в произведение линейных множителей $f_\varphi(t) = \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{m_\lambda}$ пространство V как φ-модуль распадается в прямую сумму подпространств $W_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_v)$, называемых *корневыми подпространствами*.

Задача 5.12. Докажите, что если на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$, то $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$, и π суть проектор V на $\operatorname{im} \pi$ вдоль $\ker \pi$.

Задача 5.13. Докажите, что оператор φ диагонализуем над полем k тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $k[t]$ на попарно разные линейные множители.

Задача 5.14. Докажите, что над произвольным полем k всякое неприводимое пространство с одним оператором изоморфно пространству $k[t]/(p)$, а всякое неразложимое — пространству $k[t]/(p^n)$, где $p \in k[t]$ – неприводимый многочлен, а действие оператора состоит в умножении на t.
Указание: См. лекцию про метод Гаусса над кольцом многочленов (первый семестр) или про жорданову нормальную форму (второй семестр).

1.9. Пример: представления коммутирующих операторов. Если множество $M \subset \operatorname{End}(V)$ состоит из попарно коммутирующих операторов, то $\forall\, \varphi \in M$ все операторы из M являются φ-гомоморфизмами пространства V как пространства с одним оператором φ и переводят в себя каждое собственное и корневое подпространство оператора φ:

$$(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n v = 0 \ \Rightarrow \ (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n \psi v = \psi\, (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n v = 0 \ ,$$

т. е. $\psi\, (\ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n) \ \subset \ \ker(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \ , \ \forall\, \psi \in M$. Отсюда сразу следуют следующие факты.

1.9.1. Утверждение. *Любое множество попарно перестановочных операторов над алгебраически замкнутым полем имеет общий собственный вектор.*

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Это так при $\dim V = 1$ или если все операторы — гомотетии. Если же хоть один из операторов φ не является гомотетией, то он имеет нетривиальное собственное подпространство $0 \neq V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi v = \lambda v\} \neq V$, которое переводится в себя всеми остальными операторами, так что к нему применимо индуктивное предположение. □

1.9.2. Следствие. *Над алгебраически замкнутым полем всякий неприводимый модуль над любым множеством коммутирующих операторов одномерен.* □

Задача 5.15. Докажите, что любое множество попарно перестановочных диагонализуемых операторов может быть приведено к диагональному виду одновременно в одном базисе.

1.9.3. Следствие. *Всякое представление конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем является прямой суммой одномерных.*

Доказательство. Все операторы из конечной абелевой группы G аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1 = 0$ без кратных корней, и стало быть, диагонализуемы. □

§2. Свойства полупростых модулей.

2.1. Лемма. *Следующие условия на конечномерный*[2] *M-модуль W равносильны:*

(1) *W полупрост;*
(2) *W линейно порождается простыми подмодулями;*
(3) *для всякого подмодуля $U \subset W$ существует дополнительный подмодуль $V \subset M$, такой что $W = U \oplus V$;*
(4) *для всякого подмодуля $U \subset W$ существует гомоморфизм модулей $W \xrightarrow{\pi} U$, ограничение которого на U тождественно*[3]*: $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$.*

Доказательство. Если W линейно порождается набором простых подмодулей V_α, то для любого подмодуля $U \subset W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1, V_2, \ldots, V_m$, что $W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$. А именно, в качестве V_1 берём произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U. Пересечение $V_1 \cap U$, будучи подмодулем в V_1, является нулевым, так что сумма U и V_1 — прямая. Затем выбираем неприводимый модуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$. Пересечение $V_2 \cap (U \oplus V_1)$, будучи подмодулем в V_2, снова является нулевым, так что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая, и т. д. пока создаваемая прямая сумма не исчерпает всё пространство W. Таким образом, из второго условия вытекают как третье, так и (при $U = 0$) первое условия.

Наоборот, первое условие включает в себя второе, а при выполнении третьего условия модуль W очевидным образом раскладывается в прямую сумму неприводимых подмодулей. Наконец, четвёртое условие равносильно третьему по зад.5.2. □

2.1.1. Следствие. *Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.*

---

[2]требование конечномерности не является существенным, и преодолевается стандартными теоретико-множественными ухищрениями типа леммы Цорна или трансфинитной индукции (основанной на аксиоме выбора и теореме Цермело)

[3]линейный оператор $\pi \in \mathrm{End}(V)$, для которого $\mathrm{im}\,\pi = U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ называется *проектором* пространства V на подпространство U

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом M-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами неприводимых подмодулей исходного модуля, а образ неприводимого модуля либо нулевой, либо изоморфен ему самому (и тем самым, тоже неприводим). □

Задача 5.16. В теории пространств с одним оператором приведите пример, в котором подмодуль $U \subset V$ и фактор модуль V/U просты, но V не полупрост.

2.2. Ассоциативные алгебры, связанные с множеством операторов. Со всяким множеством операторов $M \subset \mathrm{End}(V)$ можно связать наименьшую ассоциативную подалгебру с единицей $A_M \subset \mathrm{End}(V)$, содержащую M. Мы будем называть её *ассоциативной оболочкой* множества $M \subset \mathrm{End}(V)$. Она может быть определена как пересечение всех подалгебр в $\mathrm{End}(V)$, содержащих M и Id_V, или как линейная оболочка всевозможных произведений операторов из M и гомотетий. Если M — группа, то A_M — это просто линейная оболочка операторов из M. Инвариантность, разложимость и приводимость относительно M и относительно A_M означают, одно и то же, так что свойства V как M-модуля тождественны свойствам V как A_M-модуля.

Другая ассоциативная подалгебра, связанная с множеством M операторов на пространстве V, — это алгебра M-гомоморфизмов $B = \mathrm{End}_M(V) = \mathrm{End}_{A_M}(V)$. Если теперь рассмотреть пространство V как B-модуль и образовать ещё одну алгебру $\mathrm{End}_B(V)$, мы обнаружим замечательную двойственность.

2.3. Теорема. *Если пространство V полупросто как модуль над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$, то $A = \mathrm{End}_B(V)$.*

Доказательство. Поскольку все операторы из B по определению перестановочны с операторами из A, имеется тавтологическое включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$. Чтобы доказать обратное включение рассмотрим произвольный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства V и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ существует такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i. Для этого рассмотрим полупростой A-модуль $W = \underbrace{V \oplus V \oplus \dots \oplus V}_{n}$, на котором A действует по правилу

$$a\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = (av_1, av_2, \dots, av_n)\ ,$$

и определим на нём оператор $W \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} W$ по формуле

$$\widetilde{\varphi}\ :\quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto (\varphi v_1, \varphi v_2, \dots, \varphi v_n)\ .$$

Нам надо доказать, что $\widetilde{\varphi} e \in A\,e$, где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$. Поскольку W полупрост, существует проектор $\pi \in \mathrm{End}_A(W)$ модуля W на A-подмодуль $A\,e$. Если бы π был перестановочен с оператором $\widetilde{\varphi}$, мы бы имели $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{\varphi}(\pi e) = \pi(\widetilde{\varphi} e) \in A\,e$, что и требуется. Таким образом, для завершения доказательства остаётся проверить равенство $\pi\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}\pi$.

Действие любого эндоморфизма $W \xrightarrow{F} W$ можно описывать матрицей (F_{ij}) с элементами $F_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, так что

$$F\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left(\sum_\nu F_{1\nu} v_\nu\ ,\ \sum_\nu F_{2\nu} v_\nu\ ,\ \dots\ ,\ \sum_\nu F_{n\nu} v_\nu \right)\ ,$$

Подставляя в равенство $\pi a(w) = a\pi(w)$ вектор w, у которого j-тая координата равна $v \in V$, а остальные координаты нулевые, мы получим, что матричные элементы проектора π удовлетворяют соотношениям

$$(\pi_{1j} a\, v\ ,\ \pi_{2j} a\, v\ ,\ \ldots\ ,\ \pi_{nj} a\, v\ ) = (a\, \pi_{1j} v\ ,\ a\, \pi_{2j} v\ ,\ \ldots\ ,\ a\, \pi_{nj} v\ )$$

при любом $1 \leqslant j \leqslant n$ и любом $v \in V$. Это означает, что все матричные элементы (π_{ij}) перестановочны с A, т. е. лежат в $B = \mathrm{End}_A(V)$, и тем самым, π перестановочен с любым оператора вида $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto (\varphi v_1, \varphi v_2, \ldots, \varphi v_n)$ с $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, что и утверждалось. □

Задача 5.17. Пусть V — векторное пространство. Докажите, что имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\,(V^{\oplus n}) \simeq Mat_n\,(\mathrm{End}(V))$.

2.4. Теорема Бернсайда. *Если V — неприводимое пространство с операторами над алгебраически замкнутым полем, то линейная оболочка всевозможных композиций этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов* $\mathrm{End}(V)$.

Доказательство. Поскольку V неприводимо как модуль над ассоциативной оболочкой $A_M \subset \mathrm{End}(V)$ множества операторов M, по лемме Шура имеем $B = \mathrm{End}_A(V) = k$, откуда по предыдущей теореме $A = \mathrm{End}_B(V) = \mathrm{End}(V)$. □

§3. $\mathfrak{sl}_2$ - модули.

Всюду в этом параграфе предполагается, что $\mathrm{char}\, k = 0$.

3.1. Обозначения и терминология. Напомню, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(k) \subset Mat_2(k)$ состоит из всех 2×2 - матриц с нулевым следом и представляет собой трёхмерное векторное пространство. В качестве базиса в $\mathfrak{sl}_2(k)$ мы в этом параграфе будем использовать матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X, Y] = H \quad , \qquad [H, X] = 2\, X \quad , \qquad [H, Y] = -2\, Y \tag{3-1}$$

Структура $\mathfrak{sl}_2(k)$-модуля на пространстве V задаётся *гомоморфизмом алгебр Ли*[4]

$$\mathfrak{sl}_2(k) \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)\ .$$

или, что равносильно, тремя операторами X, Y, $Z \subset \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям (3-1).

3.2. Стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули. Простейшими $\mathfrak{sl}_2$-модулями являются *тривиальный* одномерный модуль $\mathcal{V}_0 \simeq k$, на котором все три оператора действуют умножением на нуль, и *тавтологический* двумерный модуль $\mathcal{V}_1 = k^2$ на котором $\mathfrak{sl}_2 \subset Mat_2(k)$ действует левыми умножениями:

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad Y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} \quad , \qquad H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

[4] т. е. линейным оператором, который переводит коммутаторы в коммутаторы

Эти два модуля являются первыми членами из серии представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ на пространствах однородных бинарных форм, с которыми мы уже встречались в лекции 5. А именно, дифференциальные операторы

$$X \longmapsto x\,\frac{\partial}{\partial y} \quad , \qquad Y \longmapsto y\,\frac{\partial}{\partial x} \quad , \qquad H \longmapsto x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\ ,$$

задают действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве многочленов $k[x,y]$.

Задача 5.18. Убедитесь прямым вычислением, что эти дифференциальные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (3-1).

Поскольку все три оператора сохраняют степень каждого монома, $k[x,y]$ является прямой суммой конечномерных $\mathfrak{sl}_2$-модулей $\mathcal{V}_n \simeq S^n\mathcal{V}_1$, состоящих из однородных форм n-той степени, так что $\dim \mathcal{V}_n = (n+1)$. Модули $\mathcal{V}_n$ называются *стандартными*. В мономиальном базисе $\{\, e_p = x^p y^{n-p} \,\}$ действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$\begin{aligned} X &: \ e_p \ \longmapsto (n-p)\, e_{p+1} \\ Y &: \ e_p \ \longmapsto p\, e_{p-1} \\ H &: \ e_p \ \longmapsto (2\,p - n)\, e_p \end{aligned} \tag{3-2}$$

3.2.1. Утверждение. *Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули $\mathcal{V}_n$ неприводимы.*

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v \in \mathcal{V}_n$ по стандартному базису из (3-2), и пусть e_s – это последний базисный вектор (с наибольшим s) реально присутствующий в этом разложении. Тогда $X^m Y^k v$ будет пропорционален (с ненулевым коэффициентом) базисному вектору e_m при всех $0 \leqslant m \leqslant n$, и стало быть, $\mathfrak{sl}_2$-орбита произвольного вектора v порождает всё пространство $\mathcal{V}_n$ □

3.3. Описание неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Чтобы прояснить его строение, мы рассмотрим пространство V над алгебраическим замыканием основного поля и разложим его в прямую сумму $V = \oplus W_\lambda$ корневых подпространств W_λ оператора H, отвечающих всем его попарно разным собственным значениям λ. Напомню, что $W_\lambda \subset V$ инвариантно выделяются как ядра $\ker(H - \lambda\,E)^n$, где n достаточно велико.

3.3.1. Лемма. *Оператор X переводит собственное и корневое подпространства оператора H, отвечающие собственному значению λ, в его собственное и корневое подпространства, отвечающие собственному значению $\lambda + 2$.*

Доказательство. Пользуясь коммутационным соотношением $[H,X] = HX - XH = 2\,X$ находим:

$$X(H - \lambda\,E) = XH - \lambda\,X = H - 2\,X - \lambda\,X = (H - (\lambda+2)\,E)X\ ,$$

откуда $X(H-\lambda\,E)^n = (H-(\lambda+2)\,E)^n X$ при любом $n \geqslant 1$. Таким образом, из $(H-\lambda\,E)^n v = 0$ вытекает, что $(H-(\lambda+2)\,E)^n Xv = X(H-\lambda\,E)^n v = 0$. □

Задача 5.19. Докажите, что оператор Y переводит собственное и корневое подпространства оператора H, отвечающие собственному значению λ, в его собственное и корневое подпространства, отвечающие собственному значению $\lambda - 2$.

3.3.2. Примитивные векторы и веса. Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, попадающие в ядро оператора X называются *примитивными*. Любой неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль обладает примитивным вектором (над алгебраически замкнутым полем). Чтобы его построить, надо взять произвольный весовой вектор, и применять к нему оператор X. Векторы, которые при этом будут получаться, тоже будут весовыми со всё большими весами, что не может продолжаться бесконечно, ибо у H лишь конечное число собственных значений. Последний ненулевой весовой вектор в этой цепочке и будет примитивным.

3.3.3. Лемма. *$\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора изоморфна стандартному модулю $\mathcal{V}_n$ с подходящим n.*

Доказательство. Пусть $v \in V$ примитивный вектор веса λ, так что $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. Согласно зад.5.19 все векторы в цепочке v, Yv, Y^2v, ... являются собственными для H с собственными значениями λ, $(\lambda-2)$, $(\lambda-4)$, ..., так что при каком-то m будем иметь $Y^{m-1}v \neq 0$, а $Y^m v = 0$. Обозначим последний ненулевой вектор $Y^{m-1}v$ через v_0, а предшествующие ему через v_1, v_2, так чтобы цепочка приобрела вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \quad \dots \quad \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на векторы цепочки по формуле $Hv_i = (\lambda - 2\,(m-i))\,v_i$, а зная действие Y и H, мы с помощью соотношения $XY = YX + H$ можем вычислить действие на эту цепочку и третьего оператора X:

$$\begin{aligned}
X\,v_m &= X\,v = 0\\
X\,v_{m-1} &= XY\,v_m = YX\,v_m + H\,v_m = \lambda\,v_m\\
X\,v_{m-2} &= XY\,v_{m-1} = YX\,v_{m-1} + H\,v_{m-1} = (\lambda + (\lambda-2))\,v_{m-1}\\
X\,v_{m-3} &= XY\,v_{m-2} = YX\,v_{m-2} + H\,v_{m-2} = (\lambda + (\lambda-2) + (\lambda-4))\,v_{m-2}\\
&\dots \qquad\qquad\qquad \dots\\
X\,v_{m-i} &= XY\,v_{m-i+1} = YX\,v_{m-i+1} + H\,v_{m-i+1} =\\
&\qquad = (\lambda + (\lambda-2) + \ \cdots\ + (\lambda - 2\,(i-1)))\,v_{m-i+1} = i\,(\lambda - i + 1)\,v_{m-i+1}\\
&\dots \qquad\qquad\qquad \dots\\
X\,v_0 &= m\,(\lambda - m + 1)\,v_1
\end{aligned}$$

Делая ещё один такой же шаг, мы вычислим $X(0) = XY\,v_0 = 0$. Это приводит к соотношению:

$$0 = XY\,v_0 = YX\,v_0 + H\,v_0 = (m\,(\lambda - m + 1) + (\lambda - 2\,m))\,v_0 = (m+1)(\lambda - m)\,v_0\ ,$$

что возможно только при $m = \lambda$. Таким образом, все собственные значения оператора H целые[5], а линейная оболочка векторов v_i представляет собой $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, в котором действие операторов X, Y, H на базис v_i задаётся формулами:

$$\begin{aligned}
X:\ v_p &\longmapsto (m-p)(p+1)\,e_{p+1}\\
Y:\ v_p &\longmapsto v_{p-1}\\
H:\ v_p &\longmapsto (2\,p - n)\,v_p
\end{aligned}\ .$$

[5] и в частности, корневое разложение пространства V по действию оператора H возможно над любым полем!

Отображение $v_p \longmapsto \dfrac{1}{p!}\, e_p = \dfrac{1}{p!}\, x^p y^{n-p}$ устанавливает изоморфизм этого модуля со стандартным модулем $\mathcal{V}_m$. □

3.3.4. Следствие. *Все неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули исчерпываются стандартными модулями $\mathcal{V}_n$.* □

Задача 5.20. Докажите, что в произвольном $\mathfrak{sl}_2$-модуле оператор H диагонализуем и имеет целые собственные значения, а операторы X и Y нильпотентны.

3.4. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. В этом пункте мы докажем, что всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль полупрост. Главным инструментом доказательства будет линейный оператор K, который лежит в *ассоциативной алгебре*, порождённой операторами X, Y, Z, и коммутирует с ними. По лемме Шура такой оператор действует на каждом неприводимом модуле как гомотетия, что и позволит нам построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор на любой неприводимый подмодуль.

3.4.1. Оператор Казимира. Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ естественно вложена как подалгебра Ли в ассоциативную алгебру $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$. Каждому элементу $x \in \mathfrak{sl}_2$ при этом соответствует эндоморфизм $\mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y]$.

Задача 5.21. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ в $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ для любых $x, y \in \mathfrak{sl}_2$, и что $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия $x : \varphi \longmapsto [\mathrm{ad}_x, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная *форма следа* $(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}\,(\varphi\psi)$, ограничение которой на образ $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ невырожденно.

Задача 5.22. Проверьте, что матрица Грама формы $(x, y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$ в базисе $\{X, Y, H\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Двойственным к базису $\{X, Y, H\}$ относительно формы следа является, таким образом, базис

$$\{\, X^* = \frac{1}{4} Y\,,\ Y^* = \frac{1}{4} X\,,\ H^* = \frac{1}{8} X \,\}\,.$$

Наличие скалярного произведения на $\mathfrak{sl}_2$ позволяет отождествить $\mathfrak{sl}_2$ с $\mathfrak{sl}_2^*$, а алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2$ с тензорным квадратом $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$. При таком отождествлении тождественный эндоморфизм пространства $\mathfrak{sl}_2$ изобразится *тензором Казимира*

$$\varkappa = X \otimes X^* + Y \otimes Y^* + H \otimes H^* = \frac{1}{4}\,(X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}\, H \otimes H\ .$$

Всякое представление $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$ индуцирует линейное отображение

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\widetilde{\varrho}} \mathrm{End}(V)\ ,$$

действующее на разложимые тензоры по правилу $\widetilde{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B) \in \mathrm{End}(V)$. Оператор $\widetilde{\varrho}(\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2}) \subset \mathrm{End}(V)$ называется *оператором Казимира* на $\mathfrak{sl}_2$-модуле V.

Задача 5.23. Проверьте, что $\widetilde{\varrho}$ является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Если, опуская символ ϱ, как и ранее, обозначать буквами X, Y, Z сразу сами операторы, действующие на $\mathfrak{sl}_2$-модуле V, то оператор Казимира выразится через них по формуле

$$K = \frac{1}{4}\,(XY + YX) + \frac{1}{8}\,H^2\ .$$

Задача 5.24. При помощи явного вычисления, основанного на соотношениях (3-1), проверьте, что $[X,K] = [Y,K] = [H,K] = 0$, а так же что K действует на стандартном неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\mathcal{V}_m$ как гомотетия с коэффициентом $\dfrac{1}{8}\,(m^2 + 4\,m)$.

3.4.2. Лемма. *Всякий $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль коразмерности 1 обладает дополнительным одномерным тривиальным $\mathfrak{sl}_2$-подмодулем.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что всякий одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль с неизбежностью тривиален, поскольку в коммутативной алгебра эндоморфизмов одномерного векторного пространства $H = [X,Y] = 0$, $2X = [H,X] = 0$, $2Y = -[H,Y] = 0$. Поэтому фактор модуль V/U по любому подмодуля $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, и значит, все три оператора X, Y, Z переводят V в U.

Строить дополнительный тривиальный одномерный подмодуль L к данному подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 мы будем индуктивно по $\dim U$. Если U тривиален (например, если $\dim U = 1$), то V тоже будет тривиален, поскольку по предыдущему замечанию

$$\mathfrak{sl}_2\,V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]\,V \subset \mathfrak{sl}_2\,\mathfrak{sl}_2\,V \subset \mathfrak{sl}_2\,U = 0\ ,$$

и доказывать нечего. Если $U \simeq \mathcal{V}_m$ нетривиальный неприводимый подмодуль, то оператор

$$\frac{8}{m^2 + 4\,m}\,K = \frac{1}{m^2 + 4\,m}\,\big(H^2 + 2\,(XY + YX)\big)$$

будет $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным проектором V на U, так что искомый дополнительный подмодуль — это $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, то мы выберем в U ненулевой неприводимый подмодуль $W \neq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактор модуля

$$(V/W) = (U/W) \oplus (\widetilde{L}/W)\ ,$$

где $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\widetilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \widetilde{L}$, построим инвариантное разложение $\widetilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \widetilde{L} \subset V$ и будет искомым дополнением к U. □

3.4.3. Следствие. *Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль вполне приводим.*

Доказательство. Для того, чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор $\mathfrak{sl}_2$-модуля V на любой его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим подпространства

$$W = \{\,\varphi \in \operatorname{Hom}(V,U) \mid \varphi|_U = \lambda\,\mathrm{Id}_U\ ,\ \lambda \in k\,\} \subset \operatorname{Hom}(V,U)$$
$$W' = \{\,\varphi \in W \mid \varphi|_U = 0\,\} \subset W$$

в $\mathfrak{sl}_2$-модуле $\operatorname{Hom}(V,U)$. По зад.5.6 они являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями, причём коразмерность W' в W равна 1. По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, где L — тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-модуль. По зад.5.6 его образующая, отнормированная так, чтобы её ограничение на U было тождественным оператором, и является искомым проектором.

Лекция 6
Представления конечных групп.

▷Инварианты и полупростота. ▷Представления конечных абелевых групп. ▷Двойственность Понтрягина. ▷Групповая алгебра ▷Регулярные представления ▷Скалярное произведение. ▷Теорема Машке. ▷Соотношения на число и размерности неприводимых представлений. ▷Матричные элементы неприводимых представлений. ▷Базисные идемпотенты и проекторы на изотипные компоненты. ▷Характеры. ▷Кольцо представлений. ▷Тензорное произведение над алгеброй. ▷Ограничение и индуцирование представлений. ▷Двойственность Фробениуса.

Если специально не оговаривается противное, всюду в этой лекции через G обозначается конечная группа, порядок которой $|G|$ не делится на характеристику основного поля k.

§1. Представления конечной группы.

1.1. Представления групп. Линейное представление группы G на векторном пространстве V — это гомоморфизм групп $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$, и буде он задан, пространство V называется *G-модулем*. Представление называется *тривиальным*, если $\operatorname{im}\varrho = \{\mathrm{Id}_V\}$, и *эффективным* или *точным*, если $\ker\varrho = \{e\}$. Если это не приводит к путанице, символ ϱ в обозначении действия обычно опускают и пишут просто gv вместо $\varrho(g)v$.

> Задача 6.1. Докажите, что любая конечная подгруппа $G \subset GL_n(k)$ над алгебраически замкнутым полем k, характеристика которого не делит порядок группы, состоит только из диагонализуемых операторов.

Прямая сумма, тензорное произведение, а так же внешние и симметрические степени G-модулей U, V сами являются G-модулями относительно естественного действия G по правилам $g(u,v) = (gu, gv)$, $g(u\otimes v) = (gu)\otimes(gv)$, $g(u\wedge v) = (gu)\wedge(gv)$ и т. д.

Двойственное представление $G \xrightarrow{\varrho^*} GL(V^*)$ к представлению $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ определяется так, чтобы $\left\langle\, \varrho^*(g)\,\xi \;,\; \varrho(g)\,v \,\right\rangle = \left\langle\, \xi \;,\; v \,\right\rangle$ при всех g, ξ, v, т. е. правилом $\varrho^*(g)\xi \;:\; v \longmapsto \xi\,(g^{-1}v)$. Матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах транспонированы и обратны друг другу.

Действие G на пространстве линейных операторов $\operatorname{Hom}(U,V) = U^*\otimes V$ между двумя G-модулями U и V, согласно предыдущему, происходит по формуле $g \;:\; \varphi \longmapsto g\varphi g^{-1}$. Подпространство неподвижных векторов этого действия суть $\operatorname{Hom}_G(U,V)$.

Задача 6.2. Докажите, что если образ d-мерного представления ϱ лежит в $SL(V)$, то дополнительные внешние степени $\Lambda^k\varrho$ и $\Lambda^{d-k}\varrho$ этого представления изоморфны для всех $0 \leqslant k \leqslant d$.

1.2. Инварианты. G-подмодуль $V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid gv = v \quad \forall\, g \in G \,\} \subset V$ называется *пространством инвариантов* представления $G \to V$.

1.2.1. Теорема. *Над полем, характеристика которого не делит порядок группы $|G|$, оператор*

$$\natural = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$$

задаёт G-инвариантный пректор любого G-модуля на подмодуль инвариантов.

Доказательство. Поскольку при фиксированном $h \in G$ элементы hg и gh взаимно однозначно пробегают G вместе с g, инвариантность оператора $\natural$ проверяется выкладкой

$$h\left(\sum_{g\in G} g\right) = \sum_{g\in G} hg = \sum_{g\in G} g = \sum_{g\in G} gh = \left(\sum_{g\in G} g\right) h \ .$$

Аналогично устанавливается, что образ $v^\natural$ любого вектора $v \in V$ будет G-инвариантен:

$$|G|\, hv^\natural = h\left(\sum_{g\in G} g\, v\right) = \sum_{g\in G} hg\, v = \sum_{g\in G} g\, v = |G|\, v^\natural \ .$$

Наконец, $v^\natural = v$ для любого инвариантного вектора v, поскольку $\sum\limits_{g\in G} gv = |G|\, v$. □

1.3. Полупростота. Любое представление $G \to GL(V)$ конечной группы (над полем характеристика которого не делит порядок этой группы) вполне приводимо, поскольку пользуясь предыдущей теоремой, мы можем построить G-инвариантный проектор на любой подмодуль $U \subset V$. Для этого достаточно убедиться, что проекция на инварианты

$$\mathrm{Hom}(V,U) \xrightarrow{\ \natural\ } \mathrm{Hom}_G(V,U)$$

переводит любой пректор π снова в проектор. Из соотношений $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ и $g^{-1}U \subset U$ вытекает, что

$$\pi^\natural u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi g^{-1}u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gg^{-1}u = \frac{1}{|G|}\,|G|\,u = u \qquad \forall\, u \in U \ ,$$

т. е. $\pi^\natural|_U = \mathrm{Id}_U$.

1.4. Представления конечных абелевых групп. Все неприводимые представления конечной абелевой группы одномерны. Линейный оператор на одномерном пространстве — это умножение на число. Задание неприводимого предсталения конечной абелевой группы равносильно заданию мультипликативного гомоморфизма

$$G \xrightarrow{\ \chi\ } k \ : \ \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2) \ ,$$

сопоставляющего элементу группы то число, на которое он умножает, так что действие G происходит по праилу

$$gv = \chi(g)\, v \ .$$

Гомоморфизм χ называется *характером* абелевой группы G, и соответствующий одномерный неприводимый G-модуль обозначается через V_χ.

Задача 6.3. Докажите, что $V_\chi \simeq V_\psi$ тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$.

В пространстве $k[G]$ всех k-значных функций на группе G характеры образуют абелеву подгруппу относительно поточечного умножения значений. Она называется *двойственной* к G и обозначается $G^\wedge$. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Задача 6.4. Проверьте, что характер тензорного произведения двух одномерных представлений абелевой группы G равен произведению их характеров в $G^\wedge$, а характер двойственного представления обратен в $G^\wedge$ характеру исходного.

Группа G действует на $k[G]$ по правилу $f(x) \overset{g}{\longmapsto} gf(x) \overset{\text{def}}{=} f(xg)$. Разложим это представление в прямую сумму одномерных неприводимых представлений

$$k[G] = \bigoplus_\chi V_\chi^{\oplus m_\chi} \ ,$$

Всякая функция $f \in V_\chi$ удовлетворяет равенству $f(xg) = \chi(g)f(x)$, подставляя в которое $x = e$, получим $f(g) = \dfrac{1}{f(e)}\,\chi(g)$, т. е. f пропорциональна характеру $\chi \in k[G]$. Таким образом, каждое неприводимое представление V_χ входит в $k[G]$ с кратностью $m_\chi = 1$ и соответствующее одномерное подпространство в $k[G]$ натянуто на характер χ. В частности, характеры составляют базис в $k[G]$, и $|G^\wedge| = |G|$.

Отображение $g \longmapsto \mathrm{ev}_g$, сопоставляющее элементу $g \in G$ k-значную функцию ev_g на $G^\wedge$, вычисляющую значение характера в точке

$$\mathrm{ev}_g \ : \ \chi \longmapsto \chi(g)$$

является гомоморфизмом из G в $G^{\vee\vee}$, поскольку

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\mathrm{ev}_g(\chi_2) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\mathrm{ev}_{g_2}(\chi) \ .$$

Если g лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$, т. е. g действет тривиально в любом представлении группы G. В частности, для любой функции $f \in k[G]$ будем иметь $f(xg) = f(x)$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только когда $g = e$. Таким образом, имеется канонический изоморфизм абелевых групп $G \xrightarrow{\sim} G^{\vee\vee}$, известный как *двойственность Понтрягина*.

§2. Групповая алгебра конечной группы.

2.1. Определение групповой алгебры. Со всякой конечной группой G можно канонически связать ассоциативную алгебру, обозначаемую kG и называемую *групповой алгеброй*

группы G над полем k, в которую G вложена в качестве подгруппы, составляющей базис векторного пространства kG. Элементы этой алгебры по определению представляют собой конечные формальные линейные комбинации вида

$$\sum_{g\in G} c_g\, g\ , \quad c_g \in k\ ,$$

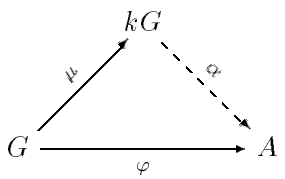
которые складываются и перемножаются по стандартным ассоциативным и дистрибутивным правилам раскрытия скобок, с учётом, однако, того, что умножение элементов группы не обязательно коммутативно.

> Задача 6.5. Докажите, что сопоставление целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между $k\mathbb{Z}$ и кольцом полиномов Лорана $k[t,t^{-1}]$, а также между $k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ и факторкольцом $k[t]/(t^m-1)$.

Всякому представлению группы $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ канонически соответствует представление групповой алгебры $kG \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$, которое является продолжением ϱ по линейности с базиса на всё пространство kG

$$\varrho\left(\sum_g c_g g\right) = \sum_g c_g \varrho(g)\ ,$$

и представляет собой гомоморфизм ассоциативных алгебр, образ которого суть линейная оболочка $A_{\varrho(G)} \subset \mathrm{End}(V)$ операторов из $\varrho(G)$. Таким образом, теория представлений группы G тождественна теории представлений ассоциативной алгебры kG.

> Задача 6.6. Пусть ассоциативная k-алгебра kG вместе с мультипликативным гомоморфизмом $G \xrightarrow{\mu} kG$ обладают следующим свойством универсальности: всякий мультипликативный гоморфизм $G \xrightarrow{\varphi} A$ в ассоциативную k-алгебру A единственным образом представляется в виде композиции
>
> 
>
>
> μ и гомоморфизма k-алгебр $k[G] \xrightarrow{\alpha} A$. Докажите, что kG определяется этим универсальным сойством однозначно с тогностью до единственного изоморфизма, перестановочного с μ.

2.2. Функции на группе и прямое преобразование Фурье. Пространство $k[G]$ функций на группе G является коммутативной ассоциативной алгеброй относительно операций поточечного сложения и умножения значений функций. С другой стороны, функция $\psi \in k[G]$, сопоставляя каждому базисному вектору $g \in kG$ число, определяет на kG линейный функционал $\psi : \sum_g c_g g \longmapsto \sum_g c_g \psi(g)$, так что $k[G]$ канонически изоморфно двойственному пространству групповой алгебры $(kG)^*$. Наконец, для набора чисел $\psi(g)$ имеется и третья интерпретация — его можно рассматривать как набор коэффициентов, задающих линейную комбинацию элементов группы, т. е. как элемент самой групповой алгебры

$$\psi^\wedge = \sum_g \psi(g)\, g \in kG\ .$$

Отображение $(kG)^* = k[G] \to kG$, переводящее ψ в $\psi^\wedge$, мы будем называть *прямым преобразованием Фурье*. Это линейный изоморфизм векторных пространств, превращающий стандартный базис $k[G]$ из δ-функций

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad h = g \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g \end{cases} ,$$

в базис kG, состоящий из элементов группы G. Он не является гомоморфизмом алгебр, и прообраз (некоммутативного) умножения в kG задаёт на $k[G]$ мультипликативную операцию, называемую *свёрткой*

$$\varphi * \psi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h\in G} \varphi(gh^{-1})\,\psi(h) = \sum_{h\in G} \varphi(h)\,\psi(h^{-1}g) = \sum_{h_1h_2=g} \varphi(h_1)\,\psi(h_2) .$$

Задача 6.7. Проверьте, что $(\varphi * \psi)^\wedge = \varphi^\wedge\psi^\wedge$ в kG.

В дальнейшем мы чато будем без специльных оговорок отождествлять kG и $k[G]$ при помощи прямого преобразования Фурье. В частности, каждой функции $\psi \in k[G]$ в любом линейном представлении $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ канонически соответствует линейный оператор[1]

$$\varrho(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(\psi^\wedge) = \sum_g \psi(g)\varrho(g) \in \mathrm{End}(V)$$

и композиция таких операторов соответствует свёртке функций: $\varrho(\varphi)\,\varrho(\psi) = \varrho(\varphi * \psi)$.

2.3. Регулярные представления. Гомоморфизм $G \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(kG)$, сопоставляющий элементу $g \in G$ оператор ℓ_g левого умножения на g: $x \longmapsto gx$, называется *левым регулярными представлениями* группы G. Двойственное представление в $k[G]$ представляет собой левый сдвиг аргумента на g^{-1}:

$$\ell_g^*\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h) .$$

Прямое преобразование Фурье отождествляет их между собой, поскольку

$$\ell_g \sum_h \varphi(h)\,h = \sum_h \varphi(h)\,gh = \sum_t \varphi(g^{-1}t)\,t .$$

Кроме левого, имеется аналогичное *правое регулярное представление* $G \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(kG)$, которое сопоставляет $g \in G$ оператор r_g правого умножения на g^{-1}: $x \longmapsto xg^{-1}$, и на языке функций состоит в правом сдвиге аргумента на g: $r_g^*\varphi(h) = \varphi(hg)$.

2.4. Скалярное произведение на kG. Левое регулярное представление

$$kG \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(kG)$$

вкладывает групповую алгебру kG в алгебру $\mathrm{End}(kG)$, на которой имеется каноническая форма следа. Ограничение этой формы на kG, нормированное по формуле

$$(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|^2}\,\mathrm{tr}\,(\ell_a\ell_b) = \frac{1}{|G|^2}\,\mathrm{tr}\,(\ell_{ab}) ,$$

[1] в классических учебниках по гармоническому анализу преобразованием Фурье, собственно, и называется сопоставление каждой функции на группе набора операторов на всех неприводимых представлениях этой группы, задаваемое по написанной нами формуле

задаёт на kG невырожденное симметричное скалярное произведение, оносительно которого элементы группы G перемножаются по правилу

$$(g,h) = \begin{cases} 1/|G| & , \quad \text{при} \quad h = g^{-1} \\ 0 & , \quad \text{при} \quad h \neq g^{-1} \end{cases} .$$

Задача 6.8. Проверьте, что $\operatorname{tr}(\ell_g) = \begin{cases} |G| & , \quad \text{при} \quad g = e \\ 0 & , \quad \text{при} \quad g \neq e \end{cases}$.

Поскольку $\ell_{ab}\ell_c = \ell_{abc} = \ell_a\ell_{bc}$, скалярное произведение на $k[G]$ обладает свойствами

$$\begin{gathered} (ab,c) = (a,bc) \\ ab = 0 \implies (a,b) = 0 \end{gathered} \qquad \forall\, a,b,c \in k\,[G] \tag{2-1}$$

Задача 6.9. Докажите, что ортогональное дополнение к левому идеалу в kG является правым идеалом и наоборот. В частности, ортогональное дополнение к двустороннему идеалу является также двусторонним идеалом.

Прямое преобразование Фурье переносит скалярное промзведение из kG в $k[G]$, где оно приобретает вид

$$(\varphi,\psi) \overset{\text{def}}{=} (\varphi^\wedge,\psi^\wedge) = \sum_{g,h\in G} \varphi(g)\,\psi(h)\,(g,h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\,\psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\,\varphi * \psi\,(e)\ .$$

2.5. Обратное преобразование Фурье. Изоморфизм $kG \xrightarrow{\sim} (kG)^* = k[G]$, задаваемый следовым скалярным произведением, называется *обратным преобразованием Фурье*[2]. Он переводит $c = \sum\limits_g c_g g \in kG$ в функцию

$$c^\vee \ :\ c^\vee(g) = \frac{1}{|G|}\,c_{g^{-1}}\ .$$

Вопреки названиям, призванным отражать лишь напавления стрелок, прямое и обратное преобразования Фурье

$$kG \underset{\vee}{\overset{\wedge}{\rightleftarrows}} k[G]$$

отнюдь не являются обратными другу линейными операторами. Их композиции действуют на функции и на элементы группы по правилам

$$\psi^{\wedge\vee}(g) = \frac{1}{|G|}\,\psi(g^{-1}) \qquad \text{и} \qquad g^{\vee\wedge} = \frac{1}{|G|}\,g^{-1}\ .$$

Обратное преобразование Фурье отождествляет левое регулярное представление ℓ на kG с правым регулярным представлением r^* на $k[G]$, а правое r — с левым ℓ^*.

2.6. Строение групповой алгебры. Разложим левое регулярное представление в прямую сумму неприводимых: $kG = \bigoplus\limits_\varrho V_\varrho^{m_\varrho}$. Каждое неприводимое относительно левого умножения инвариантное подпространство $V_\varrho \subset kG$ представляет собой *минимальный левый идеал*[3] ал-

[2]Прямое преобразование Фурье $k[G] \xrightarrow{\wedge} kG\ :\ \varphi \longmapsto \varphi^\wedge$, разумеется, тоже соответствует скалярному прозведению, которое в терминах $k[G]$ задаётся формулой $\langle\, \varphi\,,\,\psi\,\rangle = \varphi(\psi^\wedge)$ (вычисление значения функции в точке). δ-функции и элементы группы составляют по отношению к нему *ортонормальные* базисы. Однако, это произведение не играет существенной роли в теории представлений, и в этих лекциях не рассматривается.

[3]идеал называется *минимальным*, если он не содержит ненулевых идеалов, отличных от него самого

гебры kG. Поскольку правое умножение на любой элемент $y \in kG$ перестановочно с левым действием G, по лемме Шура $V_\varrho y \subset \bigoplus\limits_\varrho V_\varrho^{m_\varrho}$ может нетривиально проектироваться только на прямые слагаемые, изоморфные V_ϱ. Поэтому сумма $I_\varrho = V_\varrho^{m_\varrho}$ всех минимальных левых идеалов, изоморфных данному неприводимому представлению V_ϱ, является двусторонним идеалом в $k[G]$. Из равенства $I_\varrho I_\lambda \subset I_\varrho \cap I_\lambda = 0$ и соотношения (2-1) следует, что идеалы I_ϱ попарно ортогональны относительно скалярного произведения на kG. Таким образом, алгебра kG представляет собой ортогональную прямую сумму своих двусторонних идеалов I_ϱ.

Задача 6.10. Докажите, что I_r являются минимальными двусторонними идеалами алгебры $k[G]$, и что все двусторонние идеалы в $k[G]$ исчерпываются прямыми суммами идеалов I_ϱ.

2.6.1. Теорема Машке. *Групповая алгебра конечной группы над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит порядок группы, изоморфна прямой сумме* $\bigoplus\limits_\varrho \operatorname{End}(V_\varrho)$ *алгебр эндоморфизмов всех различных неприводимых представлений. При этом изоморфизме каждый двусторонний идеал* I_ϱ *изоморфно отображается на соответсвующую алгебру* $\operatorname{End}(V_\varrho)$.

Доказательство. Всякому представлению $G \xrightarrow{\varrho} GL(V_\varrho)$ отвечает гомоморфизм алгебр $kG \xrightarrow{\varrho} \operatorname{End}(V_\varrho)$, который переводит $\sum c_g g$ в $\sum c_g \varrho(g)$. Образ этого гомоморфизма совпадает с линейной оболочкой $A_{\varrho(G)}$ операторв из подгруппы $\varrho(G) \subset \operatorname{End}(V_\varrho)$. Если представление V_ϱ неприводимо, то по теореме Бернсайда $A_{\varrho(G)} = \operatorname{End}(V_\varrho)$, и стало быть, гомоморфизм $kG \xrightarrow{\varrho} \operatorname{End}(V_\varrho)$ эпиморфен. Прямая сумма этих эпиморфизмов по всем различным неприводимым представлениям группы G представляет собой эпиморфизм алгебр

$$kG \xrightarrow{\oplus\varrho} \bigoplus_\varrho \operatorname{End}(V_\varrho)\ , \tag{2-2}$$

переводящий элемент g в набор эндоморфизмов $\varrho(g)$. Его ядро состоит из таких $x \in kG$, которые действуют нулевым оператором во всех неприводимых представлениях. Раскладывая левое регулярное представление в прямую сумму неприводимых, мы видим, что левое умножение на такой элемент x является нулевым эндоморфизмом kG, откуда $x = \lambda_x(1) = 0$. Поскольку ограничение эпиморфизма $kG \xrightarrow{\varrho} \operatorname{End}(V_\varrho)$ на любой идеал $I_\lambda \neq I_\varrho$ тривиально по лемме Шура, ограничение представления ϱ на I_ϱ является изоморфизмом этого идеала с алгеброй $\operatorname{End}(V_\varrho)$. □

2.6.2. Следствие. *Сумма квадратов размерностей всех различных неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит $|G|$, равна порядку группы $|G|$.* □

2.6.3. Следствие (формула Планшереля). *Для любых $x, y \in kG$*

$$|G|\,(x,y) = \frac{1}{|G|}\sum_\varrho \dim(V_\varrho)\operatorname{tr}\left(\varrho(x)\varrho(y)\right)\ ,$$

где суммирование происходит по всем различным неприводимым представлениям ϱ.

Доказательство. Вычислим $|G|\,(\varphi,\psi) = \dfrac{1}{|G|}\operatorname{tr}(\ell_{xy})$, пользуясь изоморизмом (2-2). В терминах $\oplus\operatorname{End}(V_\varrho)$ действие ℓ_{xy} на прямом слагаемом $\operatorname{End}(V_\varrho)$ состоит в левом умножении на

$\varrho(x)\,\varrho(y)$. Но при умножении слева на матрицу z базисная матричная единица ε_{ij} переходит в $\sum\limits_{\nu} z_{\nu i}\varepsilon_{\nu j}$, так что след левого умножения на z равен $\sum\limits_{j}\sum\limits_{i} z_{ii} = \dim(V_\varrho)\,\mathrm{tr}\,(z)$. □

Задача 6.11. Докажите, что каждое неприводимое представление V_ϱ группы G входит в разложение как левого так и праого регулярного представления с кратностью, равной $\dim V_\varrho$.

2.7. Центр групповой алгебры, т. е. коммутативная подалгебра

$$Z(kG) = \{\, z \in kG \mid zx = xz \quad \forall\, x \in kG \,\}\,,$$

отождествляется посредством прямого преобразования Фурье с подпространством функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. В самом деле, равенство $g\varphi^\wedge = \varphi^\wedge g$ достаточно проверять только для всех $g \in G$, где оно равносильно условию $\varphi(g^{-1}h) = \varphi(hg^{-1})$ $\forall\, g, h \in G$, которое после переобозначения $s = g^{-1}h$ превращается в $\varphi(s) = \varphi(gsg^{-1})$. В частности, размерность $\dim Z(kG)$ равна числу классов сопряжённых элементов в группе G. С другой стороны, центр каждой из алгебр $\mathrm{End}(V)$ одномерен, ибо состоит из гомотетий, а центр прямой суммы алгебр совпадает с прямой суммой их центров, ибо перестановочность сомножителей достаточно проверять отдельно на каждом слагаемом прямой суммы. Мы получаем

2.7.1. Следствие. *Число неприводимых представлений равно числу классов сопряжённых элементов.* □

2.8. Матричные элементы неприводимых представлений. Фиксация базиса в пространстве неприводимого представления V_ϱ позволяет записывать все операторы $\varrho(g)$ матрицами $(\varrho_{ij}(g))$. Матричне элементы $\varrho_{ij}(g)$ являются k-значными функциями на группе G, и тем самым, лежат в $k[G]$.

2.8.1. Утверждение. *Матричные элементы неприводимых представлений образуют в $k[G]$ базис, причём в его матрице Грама $\big((\varrho_{\mu\nu}, \lambda_{\alpha\beta})\big)$ отличны от нуля только скалярные произведения $(\varrho_{ij}, \varrho_{ji}) = \dfrac{1}{\dim V_\varrho}$.*

Доказательство. Рассмотрим базисный линейный оператор $V_\varrho \xrightarrow{\varepsilon_{\alpha\beta}} V_\lambda$, матрица которого имеет 1 в позиции $(\alpha\beta)$ и нули в остальных местах. Его усреднение

$$\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \lambda(g)\varepsilon_{\alpha\beta}\varrho(g^{-1})\,,$$

является G-гомоморфизмом между двумя неприводимыми представлениями, и по лемме Шура при $\lambda \neq \varrho$ записывается нулевой матрицей, а при $\lambda = \varrho$ — скалярной матрицей, у которой на главной диагонали стоит число

$$\frac{1}{\dim V_\varrho}\,\mathrm{tr}\,\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\dim V_\varrho}\,\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\left(g\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,g^{-1}\right) = \frac{1}{\dim V_\varrho}\,\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\left(\varepsilon_{\alpha\beta}\right) =$$

$$\frac{1}{\dim V_\varrho}\mathrm{tr}\,\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1/\dim V_\varrho & , \quad \text{при} \quad \alpha = \beta \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

С другой стороны (ij)-тый элемент матрицы $\widetilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ равен $\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\lambda_{i\alpha}(g)\,\varrho_{\beta j}(g^{-1}) = (\lambda_{i\alpha},\varrho_{\beta j})$, что и даёт нужные соотношения ортогональности. □

2.8.2. Следствие. *Оператор $\varrho^{\wedge}_{ij}\in kG$ действует во всех неприводимых представлениях $\lambda\neq\varrho^*$ нулём, а в неприводимом представлении ϱ^* — оператором, матрица которого в двойственном базисе пространства V^* имеет в позиции (ij) число $|G|/\dim V_\varrho$ и нули в остальных местах.*

Доказательство. Представление $kG\xrightarrow{\lambda}\mathrm{End}(V_\lambda)$ переводит элемент $\varrho^{\wedge}_{ij}=\sum\limits_{g\in G}\varrho_{ij}(g)g\in k[G]$ в оператор $\sum\limits_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\lambda(g)\in\mathrm{End}(V_\lambda)$, матрица которого имеет в позиции (mn) число

$$\sum_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\,\lambda_{mn}(g)=\sum_{g\in G}\varrho_{ij}(g)\,\lambda^*_{nm}(g^{-1})=|G|\,(\varrho_{ij},\lambda^*_{nm})\ ,$$

равное $|G|/\dim V_\varrho$ при $\lambda^*=\varrho$ и $(nm)=(ji)$, и нулю во всех остальных случаях. □

2.8.3. Следствие. *Линейная оболочка всех матричнх элементов неприводимого представления ϱ не зависит от выбора базиса в V_ϱ и при помощи прямого преобразования Фурье отождествляется с идеалом I_{ϱ^*}.* □

Задача 6.12. Докажите, что линейная оболочка элементов каждого столбца матриц неприводимого представлении ϱ образует в $k[G]$ неприводимый подмодуль относительно левого регулярного действия G, и что этот подмодуль изоморфен двойственному неприводимому представлению ϱ^*.
Указание: Левое регулярное действие элемента $g\in G$ переводит функцию $\varrho_{ij}(h)$ в

$$\ell^*_g\varrho_{ij}(h)=\varrho_{ij}(g^{-1}h)=\big(\varrho(g^{-1}\varrho(h)\big)_{ij}=\sum_{\nu}\varrho_{i\nu}(g^{-1})\,\varrho_{\nu j}(h)\ ,$$

Задача 6.13. Докажите, что двойственные представления $G\xrightarrow{\varrho}V$ и $G\xrightarrow{\varrho^*}V^*$ изоморфны тогда и только тогда, когда на пространстве V существует невырожденная G-инвариантная билинейная форма[4], и покажите, что если на неприводимом G-модуле над алгебраически замкнутым полем такая форма существует, то она единственна с точностью до пропорциональности.

Задача 6.14. Докажите, что над полем $\mathbb{R}$ на любом представлении конечной группы G имеется симметричная положительно определённая G-инвариантная форма.

Задача 6.15. Докажите, что над полем $\mathbb{C}$ на любом представлении конечной группы G имеется эрмитова G-инвариантная форма и выведите отсюда, что всякое комплексное линейное представление $G\xrightarrow{\varrho}V$ изоморфно своему эрмитово сопряжённому представлению $G\xrightarrow{\overline{\varrho}^*}\overline{V}^*$, (задаваемому в двойственном базисе матрицами, которые обратны, транспонированы и комплексно сопряжены к матрицам представления ϱ).

2.9. Базисные идемпотенты. Ортогональная прекция $e_\varrho\in I_\varrho$ единицы $e\in kG$ на идеал I_ϱ в любом отличном от ϱ неприводимом представлении действует нулевым, а в представлении ϱ — единичным оператором. Поэтому образ элемента e_ϱ в любом линейном представлении W

[4] билинейная форма b на V называется *G-инвариантной*, если $b(gv,gw)=b(v,w)\quad\forall\,v,w\in V\ ,\ \ \forall\,g\in G$

является проектором на сумму всех тех неприводимых составляющих W, которые изоморфны V_ϱ. Эта сумма называется *ϱ-изотипной компонентой* представления W, а проекторы e_ϱ — *базисными идемпотентами*[5].

Задача 6.16. Покажите, что базисные идемпотенты в kG перемножаются по праилам

$$e_\varrho e_\lambda = \begin{cases} e_\varrho & , \quad \text{при} \quad \lambda = \varrho \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho \end{cases}$$

и составляют ортогональный базис в центре групповой алгебры, имея скалярные квадраты

$$(e_\varrho, e_\varrho) = \frac{1}{|G|^2} \operatorname{tr} \ell_{e_\varrho} = \left(\frac{\dim V_\varrho}{|G|} \right)^2 .$$

Задача 6.17. Докажите, что e_ϱ порождает в kG минимальный левый идеал $kG \cdot e_\varrho \subset kG$, который как G-модуль изоморфен неприводимому представлению V_ϱ.

Задача 6.18. Докажите, что двусторонний идеал $kG \cdot e_\varrho \cdot kG \subset kG$, порождённый e_ϱ в kG совпадает с I_ϱ.

Согласно Сл.2.8.2 базисные идемпотенты выражаются через матричные единицы по формуле

$$e_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_\nu \varrho^*_{\nu\nu}{}^\wedge = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_i \varrho^*_{ii}(g)\, g = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1})\, g$$

2.10. Характеры. Функция $\chi_\varrho(g) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho(g) = \sum_\nu \varrho_{\nu\nu} \in k[G]$ называется *характером представления* ϱ. Характеры неприводимых представлений связаны с базисными идемпотентами соотношением

$$e_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varrho(g^{-1})\, g \ .$$

В частности, проектор произвольного представления $G \xrightarrow{R} GL(W)$ на ϱ-изотипную компонету может быть выражен через матричные элементы по формуле

$$\pi_\varrho = \frac{\dim V_\varrho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varrho(g^{-1})\, R(g) \in \operatorname{End}_G(W)$$

Поскольку след оператора не меняется при сопряжении, характер $\chi_R(g) = \operatorname{tr} R(g)$ любого представления $G \xrightarrow{R} W$ не зависит от выбора базиса в W и постоянен на классах сопряжённых элементов, т. е. его (прямой) Фурье-образ лежит в центре групповой алгебры $k[G]$.

2.10.1. Утверждение. *Прямые Фурье-образы характеров неприводимых представлений составляют ортонормальный базис в центре групповой алгебры.*

Доказательство. В силу соотношений ортогональности из Утв.2.8.1 для неприводимого представления ϱ имеем

$$(\chi_\varrho, \chi_\varrho) = \left(\sum_\nu \varrho_{\nu\nu} \ , \ \sum_\mu \varrho_{\mu\mu} \right) = \sum_\nu \left(\varrho_{\nu\nu} \ , \ \varrho_{\nu\nu} \right) = \sum_\nu \frac{1}{\dim V_\varrho} = 1 \ .$$

и $(\chi_r, \chi_\lambda) = 0$ для неизоморфных неприводимых представлений λ и ϱ. □

[5]всякий элемент кольца, совпадающий со своим квадратом, называется *идемпотентом*

§3. Техника работы с представлениями.

3.1. Пример: некоторые представления симметрических групп. Поскольку классы сопряжённнных элементов симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ взаимно однозначно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга[6], число неприводимых представлений $\mathfrak{S}_n$ равно количеству разбиений числа n.

Задача 6.19. Выясните, сколько элементов в классе сопряжённости $\mathfrak{S}_n$, состоящем из всех перестановок, распадающихся в произведение m_1 независимых циклов длины 1, m_2 независимых циклов длины 2, ..., m_n независимых циклов длины n (где $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu \cdot m_\nu = n$).

Ответ: $\dfrac{n!}{m_1!\,1^{m_1} m_2!\,2^{m_2} \cdots m_n!\,n^{m_n}}$

Задача 6.20. Перечислите классы сопряжённых элементов в знакопеременных группах $\mathfrak{A}_n$ с $n \leqslant 6$ и определите число элементов в каждом из них.

Группа $\mathfrak{S}_3$ имеет ровно три неприводимых представления: тривиальное одномерное, одномерное знаковое (в котором $\sigma v = \operatorname{sgn}(\sigma)\, v$), и двумерное представление группой симметрий треугольника.

Задача 6.21. Нарисуем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ правильный треугольник с центром в нуле и вершиной в единице и рассмотрим риманову сферу $\mathbb{CP}_1$, экватор которой описан вокруг этого треугольника. Стереографическая проекция из северного полюса сферы отождествляет плоскость $\mathbb{C}$ со стандартной аффинной картой на $\mathbb{CP}_1$, так что группа симметрий треугольника, реализованная вращениями сферы, будет действовать на $\mathbb{C}$ дробно линейными заменами координаты z. Напишите явные формулы для всех шести таких замен и найдите хотя бы одну инвариантную относительно них непостоянную рациональную функцию от z.

У группы $\mathfrak{S}_4$ есть ровно пять неприводимых представлений: два одномерных, трёхмерное представление группой симметрий тетраэдра, трёхмерное представление группой вращений (т. е. сохраняющих ориентацию симметрий) куба, и двумерное представление группой треугольника, индуцированное эпиморфизмом $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$, который задаётся факторизацией по нормальной подгруппе Клйна $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \subset \mathfrak{S}_4$.

Задача 6.22. Разложите на неприводимые естественные представления группы вращений куба в пространстве комплекснозначных функций

а) на множестве вершин;

б) на множестве рёбер;

в) на множестве граней.

Задача 6.23. Сделайте то же самое для группы симметрий правильного тетраэдра.

Задача 6.24. Как раскладываются в сумму неприводимых трёхмерные представления группы $\mathfrak{S}_4$ при ограничении на подгруппу $\mathfrak{S}_3$ перестановок первых трёх символов?

У каждой симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ есть два одномерных представления (тривиальное и знаковое) и $(n-1)$-мерное представление симметриями правильного симплекса. Последнее изоморфно подмодулю, заданному уравнением $\sum x_\nu = 0$, в *тавтологическом* представлении $\mathfrak{S}_n$ перестановками базисных векторов координатного пространства k^n.

3.2. Вычисления характеров. Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе

[6] длины строк диаграммы суть длины независимх циклов, на которые раскладывается перестановка

$g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. Так например, характер регулярного представления

$$\chi_\ell(g) = \chi_r(g) = \begin{cases} |G| & , \quad \text{если} \quad g = e \\ 0 & , \quad \text{если} \quad g \neq e \end{cases}$$

Задача 6.25. Вычислите характеры тавтологического и симплициального представлений $\mathfrak{S}_n$.

Проследить за тем, как меняются характеры при стандартных операциях над представлениями, проще всего записывая матрицы операторов в стандартных же базисах, связанных с этими операциями.

Задача 6.26. Докажите, что $\forall\, g \in G$ и для любых представлений ϱ, λ

А) $\chi_{\varrho\oplus\lambda}(g) = \chi_\varrho(g) + \chi_\lambda(g)$

Б) $\chi_{\varrho\otimes\lambda}(g) = \chi_\varrho(g)\chi_\lambda(g)$

В) $\chi_{\varrho^*}(g) = \chi_\varrho(g^{-1})$

Значения характеров симметрических и внешних степеней данного представления ϱ на данном элементе $g \in G$ проще всего вычислять в базисе, где матрица $\varrho(g)$ диагональна.

Задача 6.27. Докажите, что производящая функция для характеров внешних степеней представления ϱ имеет вид

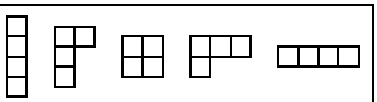
$$\sum_{\nu \geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu \varrho}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\, \varrho(g)) \ .$$

Задача 6.28. Докажите, что производящая функция для характеров симметрических степеней представления ϱ имеет вид

$$\sum_{\nu \geqslant 0} \chi_{S^\nu \varrho}(g)\, t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\, \varrho(g))} \ .$$

Характеры представлений, заданных геометрически, легко вычисляются как суммы собственных значений соответствующих поворотов и отражений.

Задача 6.29. Убедитесь, что значения характеров неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_4$ на классах сопряжённых элеметов задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	−1	−1	0	−1
кубического	3	1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

Задача 6.30. Опишите все неприводимые представления группы симметрий правильного n-угольника и вычислите их характеры.

Задача 6.31. Докажите, что неодномерный неприводимый характер не может быть всюду ненулевым.

3.3. Описание представлений с помощью характеров. Всякое представление W группы G однозначно с точностью до изоморфизма определяется набором кратностей, с которыми неприводимые представления V_ϱ входят в его разложение

$$W = \bigoplus_\varrho V_\varrho^{\oplus m_\varrho}$$

в прямую сумму неприводимых представлений. Согласно зад.6.26 характер такого представления

$$\chi_W = \sum_\varrho m_\varrho \chi_\varrho \ ,$$

т. е. множество всех представлений группы G биективно соответствует линейным комбинациям неприводимых характеров с целыми неотрицательными коэффициентами. В силу ортонормальности неприводимых характеров, кратности m_ϱ неприводимх компонент равны скалярным произведениям:

$$(\chi_\lambda, \chi_W) = \sum_\varrho m_\varrho (\chi_\lambda, \chi_\varrho) = m_\lambda \ .$$

В частности, поскольку все m_ϱ целые, из равенства $(\chi_W, \chi_W) = \sum_\varrho m_\varrho^2$ вытекает, что представление W неприводимо тогда и только тогда, когда скалярный квадрат его характера равен единице.

Задача 6.32. Составьте таблицы неприводимых характеров для знакопеременных групп $\mathfrak{A}_4$ и $\mathfrak{A}_5$.

Указание: Группа $\mathfrak{A}_5$ имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся внешним автоморфизмом $\mathfrak{A}_5$, который задаваётся сопряжением любой транспозицией внутри $\mathfrak{S}_5$) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров $\mathfrak{A}_5$ такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

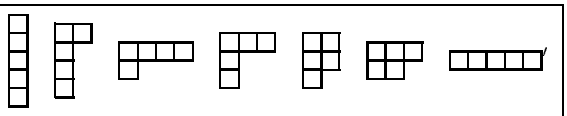
Задача 6.33. Вычислите скалярные квадраты характеров всех внешних степеней тавтологического представления $\mathfrak{S}_n$ и докажите, что все внешние степени симплициального представления неприводимы.

Указание: В стандартном базисе $\{e_I\}$ пространства $\Lambda^m(k^n)$ след перестановки σ равен $\sum\limits_I \{\sigma\}_I$, где

$$\{\sigma\}_I = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) & , \quad \text{при} \quad \sigma(I) \subset I \\ 0 & , \quad \text{при} \quad \sigma(I) \not\subset I \end{cases} .$$

Это значение следует подставить в явную формулу для скалярного произведения и аккуратно вычислить возникающую сумму, имея в виду, что совокупность перестановок σ, для которых $\{\sigma\}_I\{\sigma\}_J \neq 0$, представляет собой прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \setminus (I \cap J)$, $J \setminus (I \cap J)$ и $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus (I \cup J)$.

Задача 6.34. Составьте таблицу неприводимых характеров симметрической группы $\mathfrak{S}_5$.
Указание: $\mathfrak{S}_5$ имеет знаковое одмерное представление α и симплициальное представление ϑ. Представления $\alpha \otimes \vartheta$ и $\Lambda^2\vartheta$ оказываются неприводимы, а $S^2\vartheta = \alpha \oplus \vartheta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

3.3.1. Утверждение. $\dim \operatorname{Hom}_G(U, W) = (\chi_U, \chi_W)$ *для любых представлений* U *и* V.

Доказательство. $\dim \operatorname{Hom}_G(U, W)$ равна кратности вхождения тривиального неприводимого представления в разложение $U^* \otimes W$, т. е. скалярному произведению тривиального характера $\chi_0 \equiv 1$ и характера $\chi_{U^*\otimes W}(g) = \chi_W(g)\chi_U(g^{-1})$:

$$\dim \operatorname{Hom}_G(U, W) = (\chi_{U^*\otimes W}, \chi_0) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g)\chi_U(g^{-1}) \cdot 1 = (\chi_W, \chi_U) ,$$

что и утверждалось. □

Задача 6.35. Некто написал на гранях куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и затем каждый день заменял одновременно на всех гранях старый номер на среднее арифметическое старых номеров четырёх соседних граней. С точностью до второго знака после запятой вычислите те числа, которые будут написаны на гранях через месяц.

Задача 6.36. Пусть V — двумерное неприводимое представление $\mathfrak{S}_3$.

а) Разложите $S^2(V)$ и $S^3(V)$ в сумму неприводимых представлений.

б) Докажите, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R - регулярное представление $\mathfrak{S}_3$.

в) Опишите разложение всех $S^n(V)$.

г) Опишите пространство $\mathfrak{S}_3$-инвариантных полиномов на V.

д) Докажите, что $S^2(S^3(V))$ G-изоморфно $S^3(S^2(V))$.

е) Вычислите характеры всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.

ж) Верно ли, что $S^k(S^m(V))$ G-изоморфно $S^m(S^k(V))$ при любых k и m?

Задача 6.37. Для любого представления $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ конечной группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль рассмотрим пространство G-инвариантных однородных полиномов степени m на пространстве V:

$$\mathsf{Sym}^m_G(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \in \mathsf{Sym}^m(V) \mid f(gv) = f(v) \quad \forall\, g \in G\ ,\ \ \forall\, v \in V \,\}$$

Докажите, что производящая функция для размерностей $d_m = \dim \mathsf{Sym}^m_G(V)$ имеет вид

$$\sum_{m \geqslant 0} d_m t^m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))} \qquad \text{(формула Молина)}\ .$$

Задача 6.38. Докажите, что все неприводимые представления конечной группы встречаются в разложениях тензорных степеней любого её эффективного представления.

3.4. Кольцо представлений. Рассмотрим решётку

$$\mathrm{Rep}\,(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{Z}\ \chi_\varrho \subset k[G]\ ,$$

состоящую из целочисленных линейных комбинаций неприводимх характеров. $\mathrm{Rep}\,(G)$ является коммутативным подкольцом с единицей в коммутативной алгебре $k[G]$ всех функций (относительно операций поточечного сложения и умножения значений) и называется *кольцом представлений* группы G. Элементы G, равные суммам неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. Остальные элементы $\mathrm{Rep}\,(G)$ называются *виртуальными представлениями*, поскольку интуитивно могут восприниматься как «представления», в разложении которых на неприводимые допускаются отрицательные кратности. Согласно зад.6.26, сложению и умножению точек $\mathrm{Rep}\,(G)$ отвечает прямая сумма и тензорное произедение представлений.

§4. Ограничение и индуцирование.

4.1. Левые и правые A-модули. Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра над полем k. A-модули, с которыми мы имели дело до сих пор, по определению, задавались гомоморфизмом алгебр $A \xrightarrow{\lambda} \mathrm{End}(U)$. Аккуратные алгебраисты называют их *левами* A-модулями. Соответственно, *правыми* A-модулями называются антигомоморфизмы[7] алгебр $A \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$, удовлетворяющие соотношению:

$$\varrho(ab)v = \varrho(b)\varrho(a)v \qquad \forall\, a, b \in A\ ,\quad \forall\, v \in V\ .$$

[7] т. е. линейные операторы, переводящие произведения в произведения, у которых порядок сомножителей противоположен исходному

Действие A на правом A-модуле удобнее записывать правым умножением:

$$va \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(a)v \ ,$$

поскольку при такой записи $v\,(ab) = (v\,a)\,b$.

4.2. Тензорное произведение над алгеброй. Если на пространстве U имеется структура правого, а на пространстве V — структура левого A-модуля, то фактор пространство тензорного произведения $U \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными тензорами вида

$$(ua) \otimes v - u \otimes (av) \ , \quad a \in A \ , \ u \in U \ , \ v \in V$$

называется *тензорным произведением U и V над A* и обозначается $U \underset{A}{\otimes} V$. Подчеркнём, что на векторном пространстве $U \underset{A}{\otimes} V$ никакой структуры A-модуля, вообще говоря, уже нет.

4.2.1. Ограничение и индуцирование модулей. Пусть $S \subset A$ – ассоциативная подалгебра, и V – левый S-модуль. Рассмотрим A как *правый* S-модуль относительно правого умножения на элементы из S и образуем тензорное произведение $A \underset{S}{\otimes} V$. На нём имеется естественная структура левого A-модуля: $a\,(b \underset{S}{\otimes} v) \stackrel{\text{def}}{=} (ab) \underset{S}{\otimes} v$. Левый A-модуль $A \underset{S}{\otimes} V$ называется *индуцированным* с левого S-модуля V. Говорят также, что $A \underset{S}{\otimes} V$ получается из V *расширением* или *подъёмом скаляров*[8] от S до A. Таким образом, каждый левый S модуль индуцирует некий левый A-модуль.

Наоборот, каждый левый A-модуль W может очевидным образом рассматриваться как левый модуль над подалгеброй $S \subset A$. В таком контексте он обозначается W_S и называется модулем, полученным из W *ограничением* на S, или, как ещё говорят, *сужением* или *спуском скаляров*[9] с A до S. Операции ограничения и индуцирования сопряжены друг другу в следующем смысле.

4.2.2. Теорема. *Для любых A-модуля W и S-модуля U имеется канонический изоморфизм* $\mathrm{Hom}_A(A \underset{S}{\otimes} U, W) \simeq \mathrm{Hom}_S(U, W_S)$.

Доказательство. Сопоставим A-гомоморфизму $A \underset{S}{\otimes} U \xrightarrow{F} W$ оператор $U \xrightarrow{f} W_S$, заданный правилом $u \xmapsto{f} F(1 \underset{S}{\otimes} u)$. Он является S-гомоморфизмом, поскольку

$$f(su) = F(1 \underset{S}{\otimes} su) = F(s \underset{S}{\otimes} u) = F(s\,(1 \underset{S}{\otimes} u)) = s\,F(1 \underset{S}{\otimes} u) = s\,f(u) \ .$$

Наоборот, S-гомоморфизму $U \xrightarrow{\varphi} W_S$ сопоставим линейный оператор $A \otimes U \xrightarrow{\tilde{\Phi}} W$, действующий на разложимые тензоры по правилу $a \otimes u \xmapsto{\tilde{\Phi}} a\varphi(u)$. Поскольку

$$\Phi((as) \otimes u - a \otimes (su)) = \Phi((as) \otimes v) - \Phi(a \otimes (su)) = as\varphi(u) - a\varphi(su) = 0 \ ,$$

[8] название связано с тем, что простейшим примером этой конструкции является комплексификация вещественного векторного пространства V, представляющая собой не что иное как $\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} V$.

[9] название связано с тем, что простейшим примером этой конструкции является овеществление комплексного векторного пространства W, представляющее собой не что иное как $W_{\mathbb{R}}$.

он корректно факторизуется до линейного оператора $A \underset{S}{\otimes} U \xrightarrow{\Phi} W$, который является A-гомоморфизмом, поскольку

$$\Phi(a\,(b \underset{S}{\otimes} u)) = \Phi((ab) \underset{S}{\otimes} u) = ab\varphi(u) = a\Phi(b \underset{S}{\otimes} u)\ .$$

Сопоставления $F \longmapsto f$ и $\varphi \longmapsto \Phi$ суть взаимно обратные линейные операторы между пространствами $\mathrm{Hom}_A(A \underset{S}{\otimes} U, W)$ и $\mathrm{Hom}_S(U, W_S)$. □

Задача 6.39. Докажите, что ограничение и индуцирование перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями.

4.3. Ограниение и индуцирование представлений. В ситуации, когда $H \subset G$ — подгруппа конечной группы, предыдущие конструкции сопоставляют каждому линейному представлению группы $G \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ его *ограничение*

$$\mathrm{Res}^G_H V \ :\ H \xrightarrow{\mathrm{Res}^G_H \varrho} GL(V)$$

на подгруппу H, а каждому линейному представлению подгруппы $H \xrightarrow{\lambda} GL(U)$ — *индуцированное* представление

$$\mathrm{Ind}^G_H U \ :\ G \xrightarrow{\mathrm{Ind}^G_H \lambda} GL(k[G] \underset{k[H]}{\otimes} U)$$

группы G, так что иммет место канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}^G_H U, V) \simeq \mathrm{Hom}_H(U, \mathrm{Res}^G_H V)\ ,$$

известный в этом контнексте как *двойственность Фробениуса*. На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathrm{Rep}\,(H) \underset{\mathrm{Res}^G_H}{\overset{\mathrm{Ind}^G_H}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}\,(G)\ ,$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения на групповой алгебре:

$$(\mathrm{Ind}^G_H U, V)_{k[G]} = (U, \mathrm{Res}^G_H V)_{k[H]} \qquad \forall\, U \in \mathrm{Rep}\,(H)\ ,\quad \forall\, V \in \mathrm{Rep}\,(G)\ .$$

В частности, неприводимый G-модуль V входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого H-модуля U столько же раз, сколько неприводимый H-модуль U входит в разложение ограничения неприводимого G-модуля V на подгруппу H.

4.4. Структура индуцированного представления. Векторное пространство $k[G] \otimes U$ представляет собой прямую сумму

$$k[G] \otimes U = \bigoplus_{g \in G} g \otimes U\ .$$

При факторизации по соотношениям $(gh) \otimes u = g \otimes (hu)$ все прямые слагаемые $g \otimes U$, у которых g лежат в одном смежном классе gH по подгруппе H, склеятся в одно пространство,

изоморфное U, причём склейка эта задаётся действием H на U: $gh \otimes u \leftrightsquigarrow hu$. Таким образом, зафиксировав ситему представителей $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ классов смежности G/H, мы можем написать следующее разложение в прямую сумму векторных пространств

$$k[G] \underset{k[H]}{\oplus} U = g_1U \oplus g_2U \oplus g_3U \oplus \ \cdots \ \oplus g_sU \ ,$$

в котором каждое $g_\nu U$ представляет собой копию пространства U, а приписанный слева значёк g_ν призван показывать, что эта копия соответствует смежному классу $g_\nu H \subset G$. Если условиться писать $g_\nu(u)$ для обозначения вектора $u \in U$, лежащего в γ_ν-той копии $g_\nu U$ пространства U, то векторы $w \in k[G] \underset{k[H]}{\otimes} U$ будут однозначно представляться суммаи вида

$$\sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(u_\nu) \ .$$

с $u_\nu \in U$. В группе G левое умножение на элемент $g \in G$ осуществляет перестановку смежных классов: для любого $g \in G$ и любого $1 \leqslant \nu \leqslant s$ существуют единственные $h_{g,\nu} \in H$ и $1 \leqslant \mu_{g,\nu} \leqslant s$, такие что $g\, g_\nu = g_{\mu_{g,\nu}} h_{g,\nu}$. В этих обозначениях действие элементов $g \in G$ на $\underset{\nu}{\oplus} g_\nu U$ происходит по правилу

$$g \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(u_\nu) = \sum_{\nu=1}^{s} g_{\mu_{g,\nu}}(h_{g,\nu} u_\nu) \ ,$$

где $h_{g,\nu} u_\nu \in U$ вычисляются в соответствии с действием H на U.

Задача 6.40. Опишите представления $\mathfrak{S}_3$, индуцированные с одномерных представлений подгруппы $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3$, переставляющей первые два символа.

Задача 6.41. Докажите, что индуцированное представление можно описать как пространство

$$\mathrm{Hom}_H(k[G], U) = \{\, G \xrightarrow{f} U \mid f(hg) = hf(g) \ \ \forall\, h \in H \ , \ \ \forall\, g \in G \,\} \ ,$$

на котором G действует по правилу $f(x) \xmapsto{g} gf(x) = f(xg)$.

Задача 6.42. Докажите, что на данном классе сопряжённых элементов $C \subset G$ характер представления, индуцированного тривиальным одномерным представлением любой подгруппы $H \subset G$, принимает значение

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Id}}(C) = \frac{[G:H]}{|C|} \cdot |C \cap H| \ .$$

Задача 6.43. Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение m классов H-сопряжённости

$$C \cap H = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m$$

Докажите, что характер произвольного индуцированного представления $\mathrm{Ind}_H^G U$ принимает на C значение

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G U}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_U(D_i) \ .$$

Задача 6.44. Опишите представления $\mathfrak{S}_4$, индуцированные с

а) двумерного неприводимого представления $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$;

б) одномерного представления циклической подгруппы четвёртого порядка, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на $\sqrt{-1}$

в) одномерного представления циклической подгруппы третьего порядка, в котором образующая этой подгруппы действует умножением на примитивный $\sqrt[3]{1}$

Задача 6.45. Опишите представления $\mathfrak{S}_5$, индуцированные со всех неприводимых представлений знакопеременной подгруппы.