Образцы экзаменационных задач по алгебре за третий семестр

3◇**1 (6 баллов).** Докажите, что для любого многочлена[1] f на векторном пространстве V над полем k характеристики нуль имеет место формула

$$f(v+w) = \sum_{\nu=0}^{\deg f} \frac{1}{\nu!}\,\frac{\partial^\nu f}{\partial w^\nu}(v).$$

3◇**2 (7 баллов).** Пусть u, $v \in V$ – пара векторов. Представьте класс тензора

$$u\otimes v\otimes v + v\otimes u\otimes v + v\otimes v\otimes u$$

в S^3V линейной комбинацией тензоров вида $w^{\otimes 3}$ (т.е.«чистых кубов»). Верно ли, что над полем нулевой характеристики S^dV линейно порождается чистыми d-тыми степенями векторов из V при любом $d \geqslant 1$?

3◇**3 (9 баллов).** Проверьте, что все многочлены от элементов матрицы $A \in GL(n,\mathbb{C})$, которые не меняются при любых заменах вида $A \longmapsto CAC^{-1}$ с $C \in GL(n,\mathbb{C})$ составляют подкольцо в кольце всех многочленов от матричных элементов матрицы A, и опишите это кольцо в терминах образующих и соотношений.

3◇**4 (8 баллов).** Пусть $V \xrightarrow{F} V$ – линейный оператор в n-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$. Выразите $tr(S^2F)$ и $tr(S^3F)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора F хотя бы при $n = 2,3$. Докажите, что производящая функция для полиномов, дающих выражение $tr(S^kF)$ $(k = 0,1,2,\dots)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора F, имеет вид

$$\sum_{k\geqslant 0} tr(S^kF)\cdot z^k = \frac{1}{\det(E-zF)}$$

3◇**5 (8 баллов).** Рассмотрим в $\mathbb{P}_3$ шесть точек A,B,C,D,E,F линейно общего положения. Обозначим через ℓ_{AB}, ℓ_{BC} и ℓ_{CA} три пучка плоскостей, проходящих, соответственно через прямые (AB), (BC) и (CA). Установим между этими пучками взаимно однозначные дробно линейные соответствия $\ell_{AB} \xleftrightarrow{\sim} \ell_{BC} \xleftrightarrow{\sim} \ell_{CA}$, так чтобы три плоскости из пучка ℓ_{AB}, проходящие через точки D,E,F, отождествлялись с тройками проходящих через эти же три точки плоскостей из пучков ℓ_{BC} и ℓ_{CA}. Докажите, что ГМТ пересечения троек соответственных плоскостей представляет собой кривую Веронезе, т. е. в подходящих координатах отождествляется с образом отображения

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^3\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}_3 \qquad v \longmapsto v^{\otimes n}\ .$$

3◇**6 (6 баллов).** Покажите, что два семейства прямолинейных образующих невырожденной квадрики Q в $\mathbb{CP}_3 = \mathbb{P}(V)$ при плюккеровом вложении множества прямых в $\mathbb{P}(V)$ в $\mathbb{CP}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ изобразятся двумя невырождеными кривыми второго порядка, возникающими как сечения квадрики Плюккера парой непересекающихся двумерных проективных подпространств, натянутых на собственные (с собственными значениями ± 1) векторы линейного оператора $*:\Lambda^2V \longrightarrow \Lambda^2V$, определяемого тем, что

$$\forall v_1,v_2,v_3,v_4 \in V \qquad (v_1\wedge v_2)\ \wedge\ *(w_1\wedge w_2) = \det\begin{pmatrix} q(v_1,w_1) & q(v_1,w_2)\\ q(v_2,w_1) & q(v_2,w_2)\end{pmatrix}\ e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\ ,$$

[1]функция $V \xrightarrow{f} k$ называется *многочленом*, если в некотором базисе значение $f(v)$ является многочленом от координат вектора v

где q – это симметричная билинейная форма на V, определяющая квадрику Q, а $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – произвольный ортонормальный базис для q в V.

3◇**7 (8 баллов).** Как изобразится на квадрике Плюккера в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$ множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$, которые **а)** лежат **б)** касаются данной невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_3$?

3◇**8 (8 баллов).** Из скольки точек состоит грассманиан $G(k, n)$ над полем из q элементов?

3◇**9 (6 баллов).** Связна ли группа SO_n?

3◇**10 (6 баллов).** Для каждого $F \in \mathfrak{sl}_2$ обозначим через $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\mathrm{ad}(F)} \mathfrak{sl}_2$ линейное отображение, действующее на $G \in \mathfrak{sl}_2$ по правилу

$$G \longmapsto \mathrm{ad}(F)G \stackrel{\mathrm{def}}{=} [F, G] = FG - GF\ .$$

Проверьте, что формула $\langle\, A\,,\, B\, \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} tr\ (\mathrm{ad}(A)\circ\mathrm{ad}(B))$ задаёт невырожденную симметричную билинейную форму на $\mathfrak{sl}_2$ и вычислите базис $\{H^*, X^*, Y^*\}$ пространства $\mathfrak{sl}_2$, двойственный к стандартному базису базису $\{H, X, Y\}$ относительно этой формы (т.е. выразите H^*, X^* и Y^* через H, X и Y). Вычислите, как действует оператор $X^*X + Y^*Y + H^*H$ на стандартном неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле V_n.

3◇**11 (10 баллов).** Верно ли, что все конечномерные комплексные представления группы $SL_2(\mathbb{Z})$ вполне приводимы?

3◇**12 (8 баллов).** Пусть некая подгруппа $G \subset GL(V)$ состоит только из унипотентных[2] операторов. Покажите, что если V неприводимо над G, то $\dim V \leqslant 1$, и что в любом случае все операторы из G в подходящем базисе могут быть одновременно записаны верхнетреугольными матрицами с единицей по главной диагонали.

3◇**13 (8 баллов).** Опишите все конечнопорождённые полупростые $\mathbb{Z}$-модули.

3◇**14 (8 баллов).** Может ли конечная подгруппа $G \subset GL_{\mathbb{C}}(V)$ иметь неприводимое представление, не входящее в разложение ни одной из тензорных степеней $V^{\otimes n}$?

3◇**15 (10 баллов).** Может ли комплексный неодномерный неприводимый характер конечной группы нигде не обращаться в нуль?

3◇**16 (10 баллов).** Пусть $\mathfrak{G} \xrightarrow{\varrho} GL(V)$ – комплексное представление конечной группы $\mathfrak{G}$, и i_d — размерность пространства $\mathfrak{G}$-инвариантных однородных полиномов степени d на V (т.е. таких $f \in S^dV^*$, что $f(gv) = f(v)$ тождественно по v $\forall\, g \in$, $\mathfrak{G}$, или, если угодно, инвариантных векторов представления $S^d(\varrho^*)$). Докажите, что производящая функция для последовательности целых чисел $\{i_d\}$ имеет вид

$$\sum_{n \geqslant 0} i_d \cdot z^n = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{g \in \mathfrak{G}} \frac{1}{\det(E - z \cdot \varrho(g))}\ .$$

3◇**17 (8 баллов).** Верно ли, что знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ изоморфна собственной группе икосаэдра и собственной группе додекаэдра? Если да, то будут ли эти два трёхмерных представления $\mathfrak{A}_5$ изоморфны? Будут ли несобственные группы додекаэдра и икосаэдра изоморфны симметрической группе $\mathfrak{S}_5$?

3◇**18 (10 баллов).** Опишите все неприводимые представления $\mathfrak{A}_5$ и составьте таблицу их характеров. Разложите на неприводимые естественное представление группы икосаэдра в пространстве комплекснозначных функций на множестве его вершин.

3◇**19 (8 баллов).** Приводимо ли представление симметрической группы $\mathfrak{S}_5$, индуцированное икосаэдральным представлением знакопеременной группы?

3◇**20 (10 баллов).** Опишите все неприводимые представления групп $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$. Выясните, как устроены ограничения неприводимых представлений $\mathfrak{S}_4$ на $\mathfrak{S}_3$, и как устроены представления

[2] линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ называется *унипотентным*, если разность $F - \mathrm{Id}_V$ нильпотентна

$\mathfrak{S}_4$, индуцированные с неприводимых представлений $\mathfrak{S}_3$ (предполагается, что $\mathfrak{S}_3$ вложена в $\mathfrak{S}_4$ как стабилизатор 4-го элемента).

3◇**21 (8 баллов).** Обозначим через L левое регулярное, а через V — двумерное неприводимое представление симметрической группы $\mathfrak{S}_5$. Верно ли, что **а)** $\forall\, n \quad S^{n+6}V = S^nV \oplus L$?
б) $S^2(S^3V) = S^3(S^2V)$? (желающие могут сразу заняться и более трудным вопросом о $S^n(S^mV) =$ и $S^m(S^nV)$)

3◇**22 (12 баллов).** Докажите, что для всех $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$ k-тая внешняя степень стандартного $(n-1)$-мерного представления симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ симметриями правильного симплекса изоморфна представлению Шура[3], построенному по Г-образной диаграмме Юнга высоты $(k+1)$ (т. е. по разбиению $\lambda = (\,(n-k)\,,\underbrace{1\,,\,1\,,\,\dots\,,\,1\,,\,1}_{k})$).

[3]в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ рассматривается левый идеал $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot c_\lambda$, порождённый элементом

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = (\sum p)\,(\sum \operatorname{sgn}(q)\,q) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\,,$$

где p пробегает все перестановки, переставляющие номера внутри строк, а q — все перестановки, переставляющие номера внутри столбцов некоторой диаграммы Юнга λ, в клетки которой произвольным образом расставлены числа от 1 до n; *представление Шура* – это ограничение левого регулярного представления $\mathfrak{S}_n$ на этот левый идеал