Лекции по линейной алгебре

А.Л.Городенцев

25 декабря 1994 года

Аннотация

Эта книга — несколько расширенная запись обязательного курса линейной алгебры весеннего семестра 1993/94 учебного года для первокурсников НМУ. Текст адаптирован для *чтения*, а не для слушания, и потому его логическое разбиение на “лекции” не вполне соответствует содержанию реально читавшихся лекций. Зато доказательства проводятся более подробно. Все приводимые в тексте задачи *обязательно* следует решать (если специально не указано противное), ибо они необходимы для понимания дальнейшего материала, и именно из их числа составлялась экзаменационная письменная работа.

Содержание

Лекция 1
Векторные пространства

▷Векторные пространства ▷Порождающие наборы ▷Линейная зависимость ▷Базисы и координаты ▷Взаимное расположение подпространств ▷Прямые суммы ▷Сопряжённое пространство ▷Двойственные базисы ▷Аннуляторы векторных и ковекторных подпространств ▷Линейные операторы ▷Ядро и образ ▷Сопряжённый оператор ▷Ранг матрицы ▷Интерполяция

§1. Напоминание основных понятий

Напомню (см. лекцию 5 прошлого семестра), что векторное пространство над полем k — это *модуль* над этим полем, т.е. множество V, на элементах которого имеется ассоциативное, коммутативное и обладающее нулём и противоположными элементами *сложение векторов*, а также ассоциативное и дистрибутивное (как по отношению к сложению векторов, так и по отношению к сложению чисел) *умножение векторов на числа* из поля k, причём $\forall v \in V \;\; 1 \cdot v = v$.

Подпространство в векторном пространстве V — это всякое подмножество, которое само является векторным пространством относительно операций, заданных на V. Чтобы $W \subset V$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы вместе с каждым своим вектором W содержало и все векторы, ему пропорциональные, а вместе с каждыми двумя векторами — их разность.

Гомоморфизмы векторных пространств, т.е. отображения $F\colon\; V \longrightarrow W$, удовлетворяющие условию

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v) \quad \forall \lambda, \mu \in k \; \forall u, v \in V,$$

называются *линейными отображениями* или *линейными операторами*.

1.1. Линейные оболочки. Основными объектами изучения в линейной алгебре являются *линейные комбинации векторов*, т.е. выражения вида

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m, \qquad \text{где} \quad \lambda_\nu \in k\,,\; v_\nu \in V,$$

причём сумма *всегда предполагается конечной*. Наиболее частый вопрос, на который приходится отвечать, — это можно ли данные векторы выразить в виде линейной комбинации других данных векторов, и если да, то "сколькими способами". Для ответа на такой вопрос вводятся следующие понятия.

Набор векторов $\{e_\nu\}$ (возможно и бесконечный) называется *порождающим* подпространство W, если каждый вектор из W равен конечной линейной комбинации векторов e_ν. Всякий набор векторов $\{e_\nu\} \subset V$ всегда порождает некоторое подпространство, обозначаемое $\langle e_\nu \rangle$ и называемое его *линейной оболочкой*. Оно может быть описано как пересечение всех подпространств в V, содержащих набор $\{e_\nu\}$, или более конструктивно, как множество всех конечных линейных комбинаций из векторов e_ν.

> Задача 1.1. Докажите, что оба описания действительно определяют подпространство, причём одно и то же.

Пространство, которое может быть порождено конечным набором $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ называется *конечномерным*. Каждый вектор такого пространства может быть представлен (возможно, многими способами) в матричном виде при помощи столбца из коэффициентов его линейного разложения по образующим:

$$v = \sum_{\nu=1}^{m} x^\nu e_\nu \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

1.1.1. Соглашения об индексах: случай векторов. В этих лекциях мы всегда будем записывать коэффициенты разложений векторов в виде столбцов и нумеровать их внутри столбца верхними индексами.

Наборы из векторов мы, наоборот, всегда будем записывать строчками, а нумеровать векторы в наборе будем нижними индексами.

В этих обозначениях запись $\left(a^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ изображает матрицу по столбцам которой стоят коэффициеты разложения векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ по какой-либо порождающей системе $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ из m векторов, так что a^i_j стоит в i-той строчке и j-том столбце и равен i-тому коэффициенту j-того вектора a_j.

Такая матрица $\left(a^i_j\right)$ называется матрицей набора $\{a_\nu\}$ в наборе $\{e_\mu\}$ или *матрицей перехода* от e к a, и обозначается C_{ea}. В терминах матричной алгебры имеет место равенство

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (e_1, e_2, \dots, e_m) C_{ea},$$

где под произведением вектора на число справа понимается обычное произведение вектора на число, т.е. $v \cdot \lambda \overset{\text{def}}{=} \lambda v$.

1.2. Линейная зависимость. Набор векторов (возможно и бесконечный) называется *линейно зависимым*, если из его векторов можно составить конечную линейную комбинацию, равную нулевому вектору, но имеющую ненулевые коэффициенты. Наоборот, если для любой конечной линейной комбинации векторов из данного набора из обращения её в нуль следует, что равны нулю все её коэффициенты, то такой набор называют *линейно независимым*.

1.2.1. Утверждение. *В пространстве, порождённом набором $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ всякий набор $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ из $n > m$ векторов линейно зависим.*

Доказательство. Вопрос об отыскании чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (не всех нулевых), для которых

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0,$$

в матричных обозначениях эквивалентен задаче отыскания ненулевого решения системы

$$C_{ea}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=0$$

из m линейных уравнений с $n > m$ неизвестными. Применяя к системе метод Гаусса, мы получим на выходе ступенчатую систему содержащую свободные переменные. Задав им ненулевые значения, мы как раз и построим требуемую нетривиальную линейную зависимость. $\square$

1.3. Базисы и размерность. Линейно независимый порождающий набор называется *базисом*. Конечномерное пространство всегда обладает базисом: выкидывая из произвольного порождающего набора векторы, допускающие линейное выражение через остальные, мы в конце концов получим базис. Более того, предложение Утв.1.2.1 показывает, что все базисы данного векторного пространства V состоят из одинакового числа векторов. Это число называют *размерностью* и обозначают $\dim V$. При помощи предложения Утв.1.2.1 нетрудно получить следующие эквивалентные переформулировки понятий базиса и размерности, которые часто бывают удобны, и которыми я далее буду свободно пользоваться:

Задача 1.2. Докажите, чтопопарную эквивалентность всех перечисленных ниже свойств набора векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$:

а) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис в V;

б) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независим и теряет это свойство при добавлении любого вектора (т.е. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — максимальный по включению линейно независимый набор векторов);

в) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независим и в V нет линейно независимых наборов из большего количества векторов (т.е. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — максимальный по количеству векторов линейно независимый набор);

г) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — минимальный по включению порождающий набор;

д) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — минимальный по количеству векторов порождающий набор;

е) Каждый вектор $v \in V$ представляется в виде линейной комбинации векторов e_ν, причём все коэффициенты этой комбинации однозначно определяются по v.

Задача 1.3. Докажите, что следующие числа совпадают:

а) $\dim V$;

б) минимальное число векторов, порождающих V;

в) максимальное число линейно независимых векторов в V;

г) длина n наибольшей цепочки строго вложенных друг в друга подпространств в V:

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_{n-1} \supset V_n = \{0\}.$$

1.4. Координаты. Наборы столбцов высоты n из чисел поля k вида $\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$ составляют

n-мерное векторное пространство относительно покомпонентного сложения и умножения на числа. Оно называется *координатным* пространством и обозначается k^n.

Если в векторном пространстве V выбран базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, то (однозначное) сопоставление вектору его коэффициентов разложения по этому базису:

$$V \ni v = \sum_{\nu=1}^{n} x^\nu e_\nu \qquad \mapsto \qquad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in k^n$$

устанавливает изоморфизм пространства V с координатным пространством k^n. Фиксация такого изоморфизма (зависящего от выбора базиса и только от него) называется *введением координат* на V, а сами столбцы $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ называют *координатами* соответствующих векторов v. Для того, чтобы набор векторов $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ в пространстве с базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ также составлял базис, необходимо и достаточно, чтобы матрица $C_{e\tau}$ будет обратимой. При этом $C_{\tau e} = C_{e\tau}^{-1}$. В прошлом семестре мы видели, что обратимость матрицы равносильна её *невырожденности*, т.е. условию $\det C_{e\tau} \neq 0$.

Столбец координат (x_e) вектора v в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ связан со столбцом координат (x_τ) того же самого вектора, но в другом базисе $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, формулой $(x_e) = C_{e\tau}(x_\tau)$.

Задача 1.4. Проверьте все упомянутые матричные соотношения.

1.5. Подпространства. Если $V \subset W$ — подпространство, то по предложению Утв.1.2.1 $\dim V \leq \dim W$. Любой базис в V можно дополнить до базиса в W, добавляя к нему векторы из произвольной наперёд заданной порождающей W системы векторов. Полученный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в W, в котором первые m векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ составляют базис в подпространстве V, называется *согласованным с подпространством* $V \subset W$.

Если $U, V \subset W$ — пара подпространств, то можно образовать, их *пересечение* $U \cap V = \{w \in W \mid w \in U \text{ и } w \in V\}$ и *сумму* $U + V = \{w = u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$.

Задача 1.5. Докажите, что сумма и пересечение подпространств — подпространства, а также убедитесь, что объединение двух подпространств, как правило, подпространством не является.

Итак, у нас есть цепочка вложений:

$$\{0\} \subset U \cap V \qquad \begin{matrix} U \\ \\ V \end{matrix} \qquad U + V \subset W\ .$$

1.5.1. Утверждение. *Пусть*

$$\begin{array}{rcll} \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} & - & \textit{базис в} & U \cap V, \\ \{e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_s\} & - & \textit{базис в} & U, \\ \{e_1, \ldots, e_m, v_1, \ldots, v_r\} & - & \textit{базис в} & V. \end{array}$$

Тогда $\{e_1,\dots,e_m,u_1,\dots,u_s,v_1,\dots,v_r\}$ *будет базисом в сумме* $U+V$, *согласованным и с* U, *и с* V, *и с* $U\cap V$.

Доказательство. Очевидно, что векторы $\{e_1,\dots,e_m,u_1,\dots,u_s,v_1,\dots,v_r\}$ порождают сумму $U+V$. Проверим, что они линейно независимы. Пусть

$$\underbrace{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_me_m}_{e}+\underbrace{\mu_1u_1+\mu_2u_2+\dots+\mu_su_s}_{u}+\underbrace{\nu_1v_1+\nu_2v_2+\dots+\nu_rv_r}_{v}=0$$

Равенство $u=-e-v$ показывает, что $u\in U\cap V$, а значит должен выражаться только через $\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$. Следовательно в разложении $u=\mu_1u_1+\mu_2u_2+\dots+\mu_su_s$ все коэффициенты — нули, и $u=0$. По тем же причинам равны нулю и все коэффициенты у v, а стало быть предыдущее равенство имеет вид $e=0$. Ввиду линейной независимости векторов e_i это означает, что и у e все коэффициенты нулевые. Предложение доказано.

1.5.2. Следствие. $\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$

1.5.3. Следствие. *Два подпространства в* V, *сумма размерностей которых больше* $\dim V$, *имеют ненулевое пересечение.*

Суммы и пересечения можно определить для любых наборов подпространств

$$U_1,U_2,\dots,U_k\ \subset W\ .$$

Как и выше, они будут подпространствами в W.

1.5.4. Утверждение. *Следующие свойства подпространств* $U_1,U_2,\dots,U_k$ *попарно равносильны:*

(i) $\forall i\ U_i\cap\sum\limits_{\nu\neq i}U_\nu=\{0\}$;

(ii) $\dim(U_1+\dots+U_k)=\dim U_1+\dots+\dim U_k$;

(iii) В представлении вектора $w\in U_1+\dots+U_k$ *в виде* $w=u_1+\dots+u_k$ *все компоненты* u_ν *однозначно определяются по* w.

Доказательство. Мы проделаем круг (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒ (i).

(ii) выводится из (i) многократным применением Сл.1.5.2.

Чтобы получить из (ii) утверждение (iii), выберем в каждом U_ν базис и объединим их все в один набор. Этот набор будет порождать сумму всех U_ν и по (ii) состоять ровно из стольких векторов, какова размерность этой суммы. Тем самым, он будет базисом суммы. Всякий вектор $u_i\in U_i$ при разложении по этому базису будет иметь ненулевые коэффициенты только при базисных векторах пространства U_i, и эти коэффициенты будут координатами u_i в U_i. Следовательно, вектор u_ν в разложении $w=u_1+\dots+u_k$ однозначно определяются по w как сумма тех слагаемых разложения w по только что построенному нами базису, которые содержатся в U_ν.

Наконец, если (i) неверно, и пространства U_i и $\sum\limits_{\nu\neq i}U_\nu$ пересекаются по ненулевому вектору w, то это означает наличие двух разных разложений

$$w=u_i=\sum_{\nu\neq i}u_\nu,$$

противоречащих (iii). Таким образом, из (iii) следует (i), что и завершает доказательство. □

В ситуации, когда подпространства $U_1, U_2, \dots, U_k$ удовлетворяют предыдущему предложению, их сумма называется *прямой* и обозначается

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k \qquad \text{или} \qquad \bigoplus_{\nu=1}^{k} U_\nu .$$

§2. Двойственность

2.1. Линейные функционалы. Пусть в векторном пространстве V выбраны координаты (x^i). Тогда на V можно рассмотреть *линейное уравнение*:

$$\sum a_\nu x^\nu = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0. \tag{2-1}$$

Его решением будет подпространство в V, состоящее из векторов с координатами удовлетворяющими написанному равенству. Важное наблюдение состоит в том, что не только решения, но и сами уравнения, а точнее, — их левые части $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ составляют векторное пространство: их можно складывать друг с другом и умножать на числа. Удобнее, однако, иметь дело не с пространством “левых частей уравнений”, а с пространством функций $\alpha(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, причём неплохо бы определить нужный класс функций *инвариантно*, т.е. не прибегая к координатам (ибо только такие определения имеют геометрический смысл).

2.2. Определение. *Функция* $\alpha\colon\ V \longrightarrow k$ *из векторного пространства в основное поле* k *называется линейным функционалом, если она является гомоморфизмом векторных пространств, т.е. удовлетворяет условиям:*

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda v) &= \lambda\alpha(v) \qquad \forall \lambda \in k,\ \forall v \in V \\ \alpha(v+w) &= \alpha(v) + \alpha(w) \qquad \forall\, v, w \in V \end{aligned}$$

> Задача 1.6. Проверьте, что линейные функционалы составляют векторное пространство относительно стандартных операций поточечного сложения значений и умножения их на числа.

Пространство линейных функционалов на векторном пространстве V называется *двойственным, дуальным* или *сопряжённым* к векторному пространству V и обозначается V^*. Элементы V^* в ситуациях, когда они рассматриваются как элементы векторного пространства, а не как функции, называются *ковекторами* — специально, чтобы подчеркнуть, что векторы и ковекторы лежат в физически разных пространствах (это особенно важно при одновременной работе с V и V^*).

2.2.1. Утверждение. *Если в пространстве* V *выбран базис* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, *то функции координат относительно этого базиса:*

$$e^i : v = \sum x^\nu e_\nu \longmapsto e^i(v) \stackrel{\text{def}}{=} x^i$$

будут линейными функционалами на V *и составят базис в* V^*.

Доказательство. То, что координаты являются линейными функционалами, — очевидно. Далее, для координатных функционалов выполнено равенство:

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j,$$

где через δ_{ij} здесь и далее обозначается так называемый *δ-символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \quad , \quad \text{при} \quad i \neq j \\ 1 \quad , \quad \text{при} \quad i = j \end{cases} .$$

Из написанных равенств легко получить линейную независимость функций e^ν: если какая либо линейная комбинация $\varphi = \sum \lambda_\nu e^\nu$ является тождественно нулевым функционалом на V, то, в частности, нулевыми будут и все значения $\varphi(e_i)$ на базисных векторах, что по предыдущей формуле приводит к равенствам:

$$0 = \varphi(e_i) = \sum_\nu \lambda_\nu e^\nu(e_i) = \lambda_i \qquad \forall i.$$

Аналогично получается и линейное разложение произвольного функционала $\alpha \in V^*$ по функционалам e^i. $\forall v \in V$ имеем:

$$\alpha(v) = \alpha(\sum_\mu x^\mu e_\mu) = \sum_\mu x^\mu \alpha(e_\mu) = \sum_\mu \alpha(e_\mu) e^\mu(v).$$

Это равенство означает, что $\alpha = \sum a_\mu e^\mu$, где константы $a_\mu = \alpha(e_\mu)$ суть значения разлагаемого функционала α на базисных векторах V. $\square$

2.2.2. Следствие. *Если V конечномерно, то $\dim V = \dim V^*$.*

Базис из координатных функционалов $\{e^i\}$ называется *двойственным* или *сопряжённым* базисом к исходному базису $\{e_i\}$ пространства V.

2.3. Рефлексивность. Уравнение (2-1) замечательно симметрично по переменным a-x: мы можем фиксировать ковектор α и решать (2-1) в пространстве V, а можем наоборот — фиксировать v и решать (2-1) относительно α в V^*. Иначе говоря, число $\alpha(v) \in k$ можно воспринимать и как значение функционала α на векторе v и как значение *функционала вычисления* $\mathrm{ev}_v \in \left(V^*\right)^*$ на ковекторе α:

$$\mathrm{ev}_v\colon\ V^* \longrightarrow k \ : \quad \alpha \mapsto \alpha(v).$$

Задача 1.7. Убедитесь, что ev_v действительно является линейным функционалом на V^*.

Пространство $\left(V^*\right)^*$ короче обозначается как V^{**} и называется *дважды двойственным* к V.

2.3.1. Утверждение. *Отображение* $\mathrm{ev} : V \longrightarrow V^{**}$, *сопоставляющее векторам $v \in V$ функционалы вычисления $\mathrm{ev}_v \in V^{**}$, является инъективным линейным оператором, а если V конечномерно, то даже изоморфизмом.*

Доказательство. То, что отображение $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ линейно, проверяется без затей:

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_{\lambda v+\mu w}(\alpha) &= \alpha(\lambda v+\mu w) = \lambda\alpha(v)+\mu\alpha(w) = \lambda\mathrm{ev}_v(\alpha)+\mu\mathrm{ev}_w(\alpha) = \\ &= [\lambda\mathrm{ev}_v+\mu\mathrm{ev}_w](\alpha) \quad \forall\alpha\in V^*\end{aligned}$$

означает, что $\mathrm{ev}_{\lambda v+\mu w} = \lambda\mathrm{ev}_v+\mu\mathrm{ev}_w$.

Чтобы проверить, что ev — вложение, заметим, что равенство $\mathrm{ev}_v = \mathrm{ev}_w$ равносильно равенству $\mathrm{ev}_{v-w} = 0$. которое означает, что $\alpha(v-w) = 0\ \forall\alpha$. Но для любого ненулевого вектора $u\in V$, $u\neq 0$ легко построить линейный функционал $\alpha\in V^*$, такой что $\alpha(u)\neq 0$: достаточно дополнить u до базиса в V и взять в качестве α координату вдоль u (продумайте сами, что всё это означает в бесконечномерном случае!).

Наконец, чтобы убедиться, что в конечномерном случае ev является изоморфизмом между V и V^{**}, выберем в V базис $\{e_\nu\}$, в V^* — двойственный базис $\{e^\nu\}$. Сравнение определений показывает, что отображение ev переводит базисные векторы e_ν в точности в базисные векторы сопряжённого к $\{e^\nu\}$ базиса V^{**}. Предложение доказано.

Итак, все конечномерные пространства разбиваются в пары сопряжённых V-V^*. Роль обоих пространств в каждой такой паре абсолютно симметрична, и каждое из них может рассматриваться как пространство линейных функционалов на другом. При работе с такой парочкой удобно использовать более симметричное обозначение для числа $\alpha(v)$, отражающее обе возможности это число истолковывать. Для $\alpha\in V^*$ и $v\in V$ положим

$$\langle\alpha, v\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha(v)$$

и будем называть это число *свёрткой* вектора v с ковектором α.

2.3.2. Замечания по поводу бесконечномерных пространств. Типичным примером “алгебраического” бесконечномерного векторного пространства является пространство многочленов $k[x]$, изоморфное координатному пространству k^∞ бесконечных вниз столбцов (x^ν), $\nu = 0, 1, 2, \dots$, имеющих лишь конечное число ненулевых координат. Если фиксировать в $k[x]$ стандартный базис $e_\nu = x^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, то координатные функционалы e^ν, сопоставляющие многочлену его коэффициент при x^ν, как и выше, будут линейно независимы, но *не будут порождать* $k[x]^*$: например, функционал, сопоставляющий многочлену сумму его коэффициентов, не представим в виде *конечной* линейной комбинации e^ν. Аналогично усматривается, что каноническое вложение $V\longrightarrow V^{**}$ не эпиморфно.

Философское объяснение перечисленным явлениям состоит в том, что в бесконечномерном случае всегда имеется дополнительное направление для ухода на бесконечность — по номерам базисных векторов. Вот одно из ярких проявлений этой возможности: последовательность стандартных базисных векторов e_ν пространства k^∞ по всем интуитивным признакам располагается на единичной сфере, но при этом не имеет предельных точек (ни в каком интуитивно-разумном смысле), т.е. единичная сфера в бесконечномерном пространстве не компактна!

В функциональном анализе эти проблемы обходятся за счёт введения разного рода предельных условий на поведение значений функционалов при стремлении к бесконечности по ν, инвариантный смысл которых состоит в том, что в качестве V^* берут не всю совокупность линейных функционалов, а например, только функционалы, ограниченные на единичной сфере. Подробности вы узнаете из соответствующего курса анализа.

2.3.3. Соглашения об индексах: случай ковекторов. Для записи ковекторов в матричном виде удобно ввести соглашения, симметричные тем , которые ранее были введены для векторов. А именно, численные коэффициенты разложения ковекторов по ковекторным базисам мы будем записывать матрицами-строками и нумеровать нижними индексами, тогда как наборы ковекторов будем записывать в столбцы и нумеровать в пределах столбца верхними индексами. Именно такой способ записи унифицируется с ранее введённым для векторов, поскольку координаты векторов сами являются ковекторами и наоборот, векторы можно рассматривать как координаты ковекторов в сопряжённом базисе.

2.4. Аннуляторы. Если вместо одного уравнения (2-1) рассматривается ситема линейных однородных уравнений, то её решение в пространстве V есть множество общих нулей набора ковекторов, а её решение в пространстве V^* есть множество ковекторов, зануляющихся на данном наборе векторов. Обе эти интерпретации содержатся в понятии аннулятора.

Пусть $W \subset V$ — некоторое подпространство; его *аннулятором* называется следующее подмножество $\operatorname{Ann}(W)$ в сопряжённом пространстве:

$$\operatorname{Ann} W = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, w\rangle = 0 \ \forall w \in W\}.$$

2.4.1. Утверждение. $\operatorname{Ann} W$ *есть подпространство в* V^* *и* $\dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W$.

Доказательство. Выберем в V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, так чтобы первые k векторов

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

составляли базис в W, и пусть $\{e^\nu\}$ —двойственный базис в V^*. Функционал $\alpha = \sum a_\nu e^\nu$ тогда и только тогда обращается тождественно в нуль на W, когда он зануляется на базисных векторах $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ пространства W, что равносильно выполнению следующих k равенств:

$$0 = \alpha(e_j) = \sum_\nu a_\nu e^\nu(e_j) = a_j \qquad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Таким образом, $\operatorname{Ann} W$ есть линейная оболочка $\langle e^{k+1}, e^{k+2}, \dots, e^n\rangle$ в V^*. Предложение доказано.

2.4.2. Следствие. $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = W$.

Доказательство. Очевидно, $W \subset \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W$ и

$$\dim \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W = \dim V^* - \dim \operatorname{Ann} W = \dim V^* - \dim V + \dim W = \dim W.$$

Итак, между j-мерными подпространствами в V и $(n-j)$-мерными подпространствами в V^* имеется естественная биекция, сопоставляющая друг другу подпространства, являющиеся друг для друга аннуляторами.

Аннулятор можно было бы определить не только для подпространства, но и для любого подмножества векторов в векторном пространстве. Однако это не приведёт к чему-либо существенно новому.

> Задача 1.8. Докажите, что аннулятор произвольного набора векторов совпадает с аннулятором их линейной оболочки (в частности, линейная оболчка произвольного подмножества векторов $M \subset V$ совпадает с $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} M$).

§3. Линейные операторы

Напомню, что *линейным оператором* называется всякое отображене $F\colon\ V \longrightarrow W$ между векторными пространствами V и W, которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= \lambda F(u) && \forall \lambda \in k\ \forall v \in V, \\ F(u+v) &= F(u)+F(v) && \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Если линейный оператор переводит разные векторы в разные, то он называется *вложением*, *мономорфизмом* или *инъективным оператором*. *Эпиморфизмами*, *наложениями* или *сюрьекциями* называются операторы, отображающие V на всё W. Взаимно-однозначпые линейные отображения называются *изоморфизмами*.

Совокупность всех линейных операторов из пространства V в прорстранство W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Задача 1.9. Проверьте, что $\mathrm{Hom}(V, W)$ является векторным пространством относительно стандартных поточечных операций над отображениями.

Задача 1.10. Докажите, что линейный оператор F тогда и только тогда является вложением, когда $F(v) = 0$ лишь для $v = 0$.

3.1. Ядро и образ. Как и со всяким гомоморфизмом, с линейным оператором $F\colon\ V \longrightarrow W$ можно связать

ядро $\ker F = \{v \in V \mid F(v) = 0\} \subset V$,

образ $\mathrm{im}\, F = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\} \subset W$.

Легко проверить, что это векторные пространства.

Задача 1.11. Сделайте эту проверку.

3.2. Лемма. *Для произвольного линейного оператора* $F\colon\ V \longrightarrow W$ *можно так выбрать базисы* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *в* V *и* $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$ *в* W, *чтобы*

$$F(e_\nu) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{при} \quad \nu = 1, \dots, k \\ \tau_{\nu-k} & ,\ \text{при} \quad \nu = (k+1), \dots, n \end{cases},$$

где $k = \dim \ker F$.

Доказательство. Выберем в V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ так, чтобы первые k векторов

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

составляли базис в $\ker F$. Тогда векторы $F(e_\nu)$ с $\nu \geq (k+1)$ будут линейно независимы в W.

Действительно, пусть

$$0 = \sum_{\nu \geq k+1} \lambda_\nu F(e_\nu) = F\Big(\sum_{\nu \geq k+1} \lambda_\nu e_\nu\Big).$$

Тогда вектор $\sum\limits_{\nu \geq k+1} \lambda_\nu e_\nu \in \ker F$, а стало быть лежит в линейной оболочке векторов e_ν с $\nu \leq k$. Это возможно, только когда все коэффициенты нулевые.

Полагая $\tau_\mu = F(e_{\mu-k})$ (где $\mu \geq k$), и дополняя эту линейно независимую систему векторов до базиса в W, получим требуемое.

3.2.1. Следствие. $\dim \ker F + \dim \mathrm{im}\, F = \dim V \quad \forall F\colon\ V \longrightarrow W$.

3.2.2. Следствие. *Пусть* $\dim V = \dim W = n$. *Следующие свойства линейного оператора* $F\colon\ V \longrightarrow W$ *попарно эквивалентны:*

(i) F — *изоморфизм;*

(ii) $\ker F = 0$;

(iii) $\dim \operatorname{im} F = n$.

3.3. Матрицы операторов. Пусть в пространствах V и W фиксированы базисы

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad \text{и} \qquad \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$$

соответственно. Тогда с каждым оператором $F\colon\ V \longrightarrow W$ можно связать матрицу $F_{\tau e} = \left(f^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ по столбцам которой стоят координаты векторов $F(e_j)$ в базисе $\{\tau_i\}$, так что имеет место матричная формула:

$$\Big(F(e_1),\ \ldots,\ F(e_n)\Big) = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)F_{\tau e}.$$

Эта матрица удобна при вычислении координат образов векторов, если заданы координаты самих векторов. Действительно, пользуясь линейностью F, находим $\forall v = \sum x^i e_i \in V$:

$$F(v) = \Big(F(e_1),\ \ldots,\ F(e_n)\Big)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)F_{\tau e}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Поэтому в координатах действие F задаётся формулой:

$$F\colon\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto F_{\tau e}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Задача 1.12. Докажите, что при выборе в V другого базиса $(u) = (e)C_{eu}$, а в W — другого базиса $(\sigma) = (\tau)C_{\tau\sigma}$, матрица оператора F преобразуется по формуле

$$F_{\sigma u} = C_{\sigma\tau}F_{\tau e}C_{eu} = C_{\sigma\tau}F_{\tau e}C^{-1}_{ue} = C^{-1}_{\tau\sigma}F_{\tau e}C_{eu}$$

3.3.1. Матричные единицы. Несколько иной смысл коэффициентам $\left(f^i_j\right)$ матрицы $F_{\tau e}$ оператора F можно придать, если рассмотреть в пространстве $\operatorname{Hom}(V, W)$ специальный базис (построение которого будет зависеть от выбора базисов в V и W). Обозначим через ε^i_j следующее отображение из V в W:

$$\varepsilon^i_j\colon\ v = \sum x^\nu e_\nu \ \longmapsto\ x^i \tau_j \in W.$$

Иными словами, отображение ε_j^i переводит всякий вектор $v \in V$ в базисный вектор τ_j пространства W, умноженный на i-тую координату v в пространстве V (в частности, $\operatorname{im}\, \varepsilon_j^i = \langle \tau_j \rangle$ одномерен).

Задача 1.13. Проверьте, что ε_j^i — линейные операторы.

Операторы ε_j^i называются *матричными единицами* относительно выбранных в V и W базисов. По причинам, которые мы обсудим позднее, их также обозначают через $e^i \otimes \tau_j$.

3.3.2. Утверждение. *Матричные единицы составляют базис в* $\operatorname{Hom}(V, W)$ *(так что, в частности,* $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = \dim V \dim W$*). Коэффициентами разложения произвольного оператора* F *по этому базису являются элементы матрицы этого оператора, взятые с транспонированными индексами:*

$$F = \sum_{i,j} f_j^i \varepsilon_i^j\,, \qquad \text{где } \left(f_j^i\right) = F_{\tau e}.$$

Доказательство. То что F и $\sum_{i,j} f_j^i \varepsilon_j^i$ одинаково действуют на произвольный вектор $v \in V$ проверяется непосредственно: $\forall v = \sum\limits_{\nu} x^\nu e_\nu$ имеем:

$$F(v) = \sum_{\nu} x^\nu F(e_\nu) = \sum_{\nu\,\mu} x^\nu f_\nu^\mu \tau_\mu = \sum_{\nu\,\mu} f_\nu^\mu \varepsilon_\mu^\nu(v).$$

Таким образом, матричные единицы порождают $\operatorname{Hom}(V, W)$. Их линейная независимость проверяется точно также, как линейная независимость ковекторов сопряжённого базиса, если учесть, что

$$\varepsilon_j^i(e_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq i \\ \tau_\nu & \text{при } \nu = i \end{cases}.$$

Если $\sum_{i,j} \lambda_i^j \varepsilon_j^i = 0$, то $\forall k$ имеем:

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_i^j \varepsilon_j^i(e_k) = \sum_j \lambda_k^j \tau_j.$$

Поэтому все $\lambda_k^j = 0$. $\square$

Задача 1.14. Докажите, что отображение, сопоставляющее линейному оператору его матрицу, является изоморфизмом пространства операторов и пространства матриц.

Задача 1.15. Докажите, что матрица композиции операторов равна произведению матриц самих операторов (в том же порядке).

3.4. Сопряжённый оператор. С каждым оператором $F\colon\ V \longrightarrow W$ можно связать так называемый *сопряжённый оператор* $F^* : W^* \longrightarrow V^*$, действующий на двойственные пространства в противоположном направлении. По определению, F^* переводит линейные функционалы на W в их композицию с отображением F. При этом будут получаться линейные функционалы на V, действие которых на векторы $v \in V$ задаётся формулой:

$$F^*\varphi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(F(v)) \qquad \forall \varphi \in W^*,$$

или с использованием более симметричного символа свёртки:

$$\langle F^*\varphi, v\rangle_V = \langle \varphi, Fv\rangle_W, \tag{3-2}$$

(где индексы V и W указывают, в какой паре двойственных пространств делается свёртка).

Задача 1.16. Докажите, что отождествляя пространства V, W с дважды двойственными, мы получим равенство $F^{**} = F \quad \forall F \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Равенство (3-2) показывает, что условие $F^*\varphi = 0$ равносильно условию $\varphi \in \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F$. Поэтому $\ker F^* = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F$. Если подставить в это равенство вместо F оператор F^* и воспользоваться тем, что $F^{**} = F$, мы получим двойственное соотношение $\ker F = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F^*$, которое равносильно, как мы знаем, соотношению $\mathrm{im}\,F^* = \mathrm{Ann}\,\ker F$. Мы доказали

3.4.1. Утверждение. $\ker F^* = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F \qquad \mathrm{im}\,F^* = \mathrm{Ann}\,\ker F$.

Задача 1.17. Докажите, что отображение $F \longmapsto F^*$ является изоморфизмом пространств $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.

Задача 1.18. Докажите, что $\left(F \circ G\right)^* = G^* \circ F^*$.

3.4.2. Матрица сопряжённого оператора. Если выбрать в V и V^* двойственные базисы $\{e_\nu\}$ и $\{e^\nu\}$, а в W и W^* — базисы $\{\tau_\mu\}$ и $\{\tau^\mu\}$, то оператору F^* можно сопоставить матрицу $F^*_{\tau e}$, строки которой будут строками координат образов $F^*\tau^\mu$ базисных ковекторов τ^μ в базисе $\{e^\nu\}$, так что

$$\begin{pmatrix} F^*\tau^1 \\ F^*\tau^2 \\ \vdots \\ F^*\tau^m \end{pmatrix} = F^*_{\tau e} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}.$$

Число f^{*i}_j, стоящее в i-той строчке и j-том столбце матрицы $F^*_{\tau e}$ есть по определению результат действия функционала $e_j \in V = V^{**}$ на ковектор $F^*\tau^i$, что равно

$$\langle F^*\tau^i, e_j\rangle_V = \langle \tau^i, Fe_j\rangle_W = f^i_j,$$

т.е. матрицы $F_{\tau e}$ и $F^*_{\tau e}$ совпадают.

3.5. Пример: ранг матрицы. Произвольную матрицу $\left(a^i_j\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ можно рассматривать как матрицу линейного оператора $A : k^n \longrightarrow k^m$ (и, соответственно, как матрицу двойственного оператора $A^* : k^{m*} \longrightarrow k^{n*}$). При такой интерпретации линейная оболочка строк матрицы A будет образом оператора A^* в k^{n*}, а линейная оболочка столбцов — образом самого оператора A в k^m. Размерности этих пространств иногда называют, соответственно, строчным и столбцовым *рангом* матрицы A. Равенства

$$\dim\,\mathrm{im}\,A^* = m - \dim\,\ker A^* = m - \dim\,\mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,A = m - (m - \dim\,\mathrm{im}\,A) = \dim\,\mathrm{im}\,A$$

показывают. что строчный ранг совпадает со столбцовым. Поэтому это число чаще называют просто *рангом матрицы* A и обозначают $\mathrm{rk}\,A$.

Задача 1.19. Докажите, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов (а следовательно, может быть вычислен приведением матрицы к диагональному виду одновременными преобразованиями строк и столбцов).

Задача 1.20. (Теорема об окаймляющих минорах.) Пусть матрица A содержит невырожденную квадратную подматрицу размера $m \times m$, такую что все содержащие её подматрицы размера $(m+1) \times (m+1)$ вырождены. Докажите, что $\operatorname{rk} A = m$.

3.6. Пример: интерполяция. Задача интерполяции с кратными узлами заключается в следующем. Пусть задан набор точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с целыми положительными кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_k$, и для каждой точки x_j указано m_j значений $y_{j\,0},\ j_{j\,1},\ \ldots,\ y_{j\,m_{j-1}}$. Требуется подобрать такую функцию $y = f(x)$, чтобы в каждой из точек x_j она сама и первые её $m_j - 1$ производных принимали требуемые значения $y_{j\nu}$:

$$f^{(\nu)}(x_j) = y_{j\nu} \qquad \text{при} \quad 0 \le \nu \le m_j - 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

3.6.1. Утверждение. *При сумме кратностей $\sum m_j = N$ задача интерполяции допускает и притом единственное решение на пространстве многочленов степени меньшей N над произвольным полем характеристики нуль.*

Доказательство. Обозначим пространство многочленов степени меньшей N через P_N. Отображение из P_N в k^N, сопоставляющее произвольному многочлену его значения и значения его заданных производных в заданных точках (упорядоченные в столбец каким-либо фиксированным способом) является, очевидно, линейным оператором.

Этот оператор инъективен, поскольку лежащий в ядре многочлен должен иметь точки x_j своими корнями кратности, не меньшей, чем m_j, что невозможно для ненулевого многочлена строго меньшей, чем сумма кратностей, степени.

Поскольку размерности P_N и k^N равны, наше отображение — изоморфизм, что и требовалось доказать. □

Практическое определение интерполяционного многочлена в конкретных задачах, как правило, удобнее всего производить методом неопределённых коэффициентов. Однако можно писать и некоторые общие формулы. Выберем в P_N базис из многочленов $g_{j\nu}$, двойственный к базису в P_N^*, состоящему из ковекторов, которые сопоставляют многочлену f значения $f^{(\nu)}(x_j)$. Тогда решение задачи интерполяции будет задаваться формулой:

$$f = \sum_{j,\nu} y_{j\nu} g_{j\nu}.$$

Многочлены $g_{j\nu}$ определяются тем, что

$$g_{j\nu}^{(\mu)}(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{, при } k = j\,,\ \nu = \mu \\ 0 & \text{, в остальных случаях} \end{cases}.$$

Например, если все узлы простые, т.е. все кратности $m_j = 1$ (а $k = N$), многочлен g_j должен иметь значение 1 в точке x_j, и обращаться в нуль в остальных $N - 1$ точках x_ν. Тем самым

$$g_j = \prod_{\nu \ne j} \frac{(x - x_\nu)}{(x_j - x_\nu)},$$

так что для многочлена, принимающего в заданных точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$ заданные значения $y_1, y_2, \ldots, y_N$, мы получаем известную *интерполяционную формулу Лагранжа*:

$$f = \sum_{j=1}^{N} y_j \prod_{\nu \neq j} \frac{(x - x_\nu)}{(x_j - x_\nu)}.$$

Задача 1.21. Рассмотрите другой крайний случай, когда имеется один узел x_0 кратности N. Что за формула получится в этом случае?

Ответ: Формула Тейлора.

Лекция 2
Аффинные пространства

▷Аффинизация и векторизация ▷Аффинные отображения ▷Аффинные координаты ▷Аффинные подпространства ▷Барицентры и барицентрические координаты ▷Выпуклые фигуры ▷Опорные полупространства ▷Грани и крайние точки ▷Выпуклые многогранники ▷Теорема Минковского-Вейля ▷Максимумы аффинных функционалов на выпуклых многогранниках

§1. Основные понятия

Геометрия изучает свойства *фигур*. Фигуры состоят из *точек* и распологаются в *точечном* пространстве. Имеется много математических конструкций точечного геометрического пространства. В этом курсе мы обсудим две из них: аффинное и проективное пространства. Обе они исходят из данного векторного пространства и объясняют, в сущности, связь между точками и векторами.

Неформально говоря, аффинное пространство — это некоторое множество точек, в котором векторы из данного векторного пространства могут интерпретироваться как направленные отрезки, а точнее, — как классы равных направленных отрезков. Формализовать это можно двумя эквивалентными способами.

1.1. Определение. (Первый способ) *Множество $\mathbb{A}$ называется аффинным*[1] *пространством ассоциированным с векторным пространством $V_{\mathbb{A}}$, если задана операция*

$$\mathbb{A} \times V_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{A}\colon\ (p, v) \longrightarrow p + v \in \mathbb{A}\ ,$$

которая называется откладыванием вектора v от точки p и удовлетворяет аксиомам:

(i) $(p + v) + w = p + (v + w) \qquad \forall v.w \in V_{\mathbb{A}} \quad \forall p \in \mathbb{A}$

(ii) $p + \overrightarrow{0} = p \qquad \forall p \in \mathbb{A}$

(iii) $\forall p, q \in \mathbb{A}$ *вектор* $v \in V_{\mathbb{A}}$*, такой что* $q = p + v$*, сущестует и единственен.*

1.2. Определение. (Второй способ) *Множество $\mathbb{A}$ называется аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством $V_{\mathbb{A}}$, если каждой паре точек $P, Q \in \mathbb{A}$ сопоставлен вектор $\overrightarrow{PQ} \in V_{\mathbb{A}}$, так что выполнены следующие два условия:*

[1] этот термин — калька с английского affine (ассоциированный), чем и обусловлена его негреческая орфография

(i) $\forall v \in V_{\mathbb{A}}$ и $\forall P \in \mathbb{A}$ существует и единственна точка $Q \in \mathbb{A}$, такая что $\overrightarrow{PQ} = v$;

(ii) Для любых трёх точек $A, B, C \in \mathbb{A}$ (необязательно разных) выполнено правило треугольника: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Задача 2.1. Проверьте, что оба определения эквивалентны.

Задача 2.2. Проверьте, что для четырёх точек A, B, C, D аффинного пространства равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ равносильны друг другу (этот факт известен как *правило параллелограмма*).

1.3. Аффинизация и векторизация. Со всяким векторным пространством V можно канонически связать аффинное пространство, называемое его *аффинизацией* и обозначаемое $\mathrm{Aff}(V)$, Точки $\mathrm{Aff}(V)$ взаимно однозначно соответствуют векторам V, и если $A, B \in \mathrm{Aff}(V)$ – две точки, соответствующие векторам $a, b \in V$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ по определению полагают равным $\overrightarrow{AB} = b - a$.

Таким образом, точки $\mathrm{Aff}(V)$ можно воспринимать как концы векторов из V, отложенных от нуля $O \in \mathrm{Aff}(V)$.

Задача 2.3. Убедитесь, что $\mathrm{Aff}(V)$ удовлетворяет аксиомам аффинного пространства.

Обратная процедура представления аффинного пространства $\mathbb{A}$ в виде множества концов векторов ассоциированного с ним векторного пространства $V_{\mathbb{A}}$ называется *векторизацией* и определена неоднозначно — она зависит от выбора в $\mathbb{A}$ точки $O \in \mathbb{A}$, называемой *началом отсчета* или *центром* векторизации. Если такое начало выбрано, то, сопоставляя каждой точке $P \in \mathbb{A}$ её *радиус-вектор* $\overrightarrow{OP} \in V_{\mathbb{A}}$, мы получаем отождествление точек $\mathbb{A}$ с векторами из $V_{\mathbb{A}}$.

В частности, можно определить линейную комбинацию набора точек как точку, радиус-вектор которой равен соответствующей линейной комбинацию радиус-векторов точек из набора относительно некоторой фиксированной начальной точки. Разумеется, результат будет зависеть от выбора начальной точки, за исключением одного замечательного случая, подробнее о котором мы поговорим в следующем параграфе.

Задача 2.4. Докажите, что линейная комбинация точек, в которой сумма коэффициентов равна 1, не зависит от выбора центра векторизации.

Мы будем обозначать векторизацию аффинного пространства $\mathbb{A}$ с центром в точке $O \in \mathbb{A}$ через $\mathrm{Vect}_O(\mathbb{A})$.

1.4. Аффинные отображения. Всякое отображение $F\colon\ \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ между аффинными пространствами порождает отображение $\tilde{F}_O\colon\ \mathrm{Vect}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Vect}_{F(O)}(\mathbb{B})$ между их векторизациями (зависящее, вообще говоря, от выбора центра). По определению

$$\tilde{F}_O(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{F(O)F(P)} \in \mathrm{Vect}_{F(O)}(\mathbb{B}) \qquad \forall\ \overrightarrow{OP} \in \mathrm{Vect}_O(\mathbb{A})$$

Отображение F называется *аффинным* (или гомоморфизмом аффинных пространств), если $\tilde{F}_O$ — линейный оператор. Корректность такого определения даёт следующая

1.4.1. Лемма. *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства, ассоциированные с векторными пространствами $V_{\mathbb{A}}$ и $V_{\mathbb{B}}$. Если отображение $\tilde{F}_O\colon\ V_{\mathbb{A}} \longrightarrow V_{\mathbb{B}}$ линейно хотя бы для одной точки*

$O \in \mathbb{A}$, то оно линейно для любой точки и не зависит от выбора точки (т.е. $\forall O_1, O_2 \in \mathbb{A}$ операторы $\tilde F_{O_1}$ и $\tilde F_{O_2}$ совпадают как элементы $\mathrm{Hom}(V_{\mathbb{A}}, V_{\mathbb{B}})$).

Доказательство. Пусть $O \in \mathbb{A}$ — фиксированная точка. Если $F_O\colon V_{\mathbb{A}} \longrightarrow V_{\mathbb{B}}$ является линейным оператором, то для любой точки $O_1 \in \mathbb{A}$ и для любого вектора $v = \overrightarrow{O_1Q} \in V_{\mathbb{A}}$ получим:

$$\tilde F_{O_1}(v) = \overrightarrow{F(O_1)F(Q)} = \overrightarrow{F(O)F(Q)} - \overrightarrow{F(O)F(O_1)} =$$
$$= \tilde F_O(\overrightarrow{OQ}) - \tilde F_O(\overrightarrow{OO_1}) = \tilde F_O(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OO_1}) = F_O(v)\,.$$

Это значит, что $\tilde F_{O_1} = \tilde F_O$, что и требовалось.

1.4.2. Дифференциал. Поскольку оператор F_O не зависит от выбора точки O, он обозначается через DF и называется *дифференциалом*[2] аффинного отображения F.

Отображение F однозначно восстанавливается, если известен его дифференциал и образ какой-либо точки: $\forall v \in V$ имеем $F(O+v) = F(O) + DF(v)$. В частности, два отображения F и G с одинаковым дифференциалом различаются на *параллельный перенос*: если $DF = DG$ и $\tau = \overrightarrow{F(O)G(O)}$, то $\forall P$ получим

$$G(P) = G(O + \overrightarrow{OP}) = G(O) + DG(\overrightarrow{OP}) = F(O) + DF(\overrightarrow{OP}) + \tau = F(P) + \tau$$

Допуская известную вольность речи, можно сказать,что аффинное отображение есть композиция линейного оператора и параллельного переноса.

1.4.3. Аффинные функционалы. Аффинное отображение $a\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Aff}(k)$, где $\mathrm{Aff}(k)$ — аффинное пространство, ассоциированное с 1-мерным координатным векторным пространством, называется *аффинным функционалом*. Если в $\mathbb{A}$ выбрана начальная точка $O \in \mathbb{A}$, мы, по предыдущему, можем записать $\forall P \in \mathbb{A}$

$$a(P) = \alpha(\overrightarrow{OP}) + a_0\,,$$

где $a_0 = a(O) \in k$ есть значение функционала a в точке O, а $\alpha \in V_{\mathbb{A}}{}^*$ есть дифференциал a, т.е. линейный функционал на $V_{\mathbb{A}}$.

Задача 2.5. Убедитесь, что аффинные функционалы на n-мерном аффинном пространстве составляют $(n+1)$-мерное *векторное* пространство.

---

[2]Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — аффинные пространства над полем $\mathbb{R}$, то для любого отображения $F\colon\ \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ и любой точки $O \in \mathbb{A}$ можно определить дифференциал $D_OF\colon\ V_{\mathbb{A}} \longrightarrow V_{\mathbb{B}}$ как "линейную часть" отображения $\tilde F_O$, а точнее, как такой *линейный оператор* между ассоциированными векторными пространствами, который приближает $\tilde F_O$ с точностью до малых порядка выше первого, так что

$$F(P) = F(O) + D_OF(\overrightarrow{OP}) + o(\overrightarrow{OP})\,.$$

Разумеется, D_OF будет существовать не для всех отображений (те отображения, для которых дифференциал существует, называются в анализе *дифференцируемыми*) и будет зависеть от O. Доказанная выше лемма в этих терминах означает, что *аффинное отображение дифференцируемо и имеет постоянную производную*.

1.5. Аффинные координаты. Аффинизацию $\mathrm{Aff}(k^n)$ координатного векторного пространства называют *аффинным координатным пространством* и обозначают $\mathbb{A}^n$ или $\mathbb{A}^n(k)$, если важно обозначить поле. Произвольное n-мерное аффинное пространство *изоморфно* пространству $\mathbb{A}^n$ в том смысле, что существует биективное аффинное отображение $\mathbb{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$. Каждое такое отображение называется *аффинной системой координат* на $\mathbb{A}$ и однозначно определяется выбором в $\mathbb{A}$ *репера*, т.е. начальной точки $O \in \mathbb{A}$ и базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ в $V_{\mathbb{A}}$. *Аффинные координаты* точки $P \in \mathbb{A}$ относительно репера $\{O, (e_1, e_2, \dots, e_n)\}$ — это столбец координат вектора $\overrightarrow{OP}$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, рассматриваемый как точка в $\mathbb{A}^n = \mathrm{Aff}(k^n)$.

Задача 2.6. Как связаны линейные координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ и аффинные координаты точек P и Q относительно репера $\{O, (e_1, e_2, \dots, e_n)\}$?

Задача 2.7. Пусть (x^ν) — аффинный координатный столбец на $\mathbb{A}^n$. Докажите, что всякий аффинный функционал на $\mathbb{A}^n$ имеет вид $a(x) = a_1x^1 + \dots + a_nx^n + a_0$, где $a_\nu \in k$ — константы, однозначно определяемые по a.

Задача 2.8. Убедитесь, что всякое аффинное отображение $F\colon \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ действует на столбец координат по формуле: $F(x) = M(x^\nu) + (b^\mu)$ (где M — матрица размера $m \times n$, а (b^μ) — столбец координат некой фиксированной точки в $\mathbb{A}^m$), причём и M и b однозначно определяются по F.

1.6. Аффинные подпространства. k-мерным *аффинным подпространством*, или короче, *k-мерной плоскостью* в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ называется всякое подмножество вида

$$\pi(p, U) = p + U = \{q \in \mathbb{A} \mid q = p + u \text{ по всем } u \in U\},$$

где $p \in \mathbb{A}$ — фиксированная точка, а $U \subset V_{\mathbb{A}}$ — векторное подпространство, называемое *направляющим подпространством* плоскости $\pi = \pi(p, U)$.

Неформально, плоскость — это совокупность всех точек, которые можно получить из некоторой данной точки p, откладывая от неё всевозможные векторы из подпространства U.

Задача 2.9. Убедитесь, что $\pi(p, U) = \pi(q, W)$ тогда и только тогда, когда $U = W$ и $\overrightarrow{pq} \in U = W$.

Задача 2.10. Докажите, что подмножество $M \subset \mathbb{A}$ тогда и только тогда является аффинным подпространством, когда векторы $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in M$ составляют векторное подпространство в $V_{\mathbb{A}}$.

Пусть $\pi = \pi(p, U) \subset \mathbb{A}$. Числа $\dim \pi \overset{\text{def}}{=} \dim U$ и $\operatorname{codim} \pi \overset{\text{def}}{=} \dim \mathbb{A} - \dim U$ называются, соответственно, *размерностью* и *коразмерностью* плоскости π. Плоскости коразмерности 1 называют *гиперплоскостями*, а плоскости размерности 1 — прямыми.

Задача 2.11. Докажите, что через любые $k+1$ точек, не лежащих в $(k-1)$-мерной плоскости, проходит и притом только одна k-мерная плоскость (в частности, через любую пару несовпадающих точек можно провести единственную прямую).

Задача 2.12. Докажите, что подмножество в аффинном пространстве тогда и только тогда является подпространством, когда вместе с каждыми двумя точками оно содержит и проходящую через них прямую.

1.6.1. Задание подпространств уравнениями. Всякая плоскость

$$\pi(p, U) = p + U \in \mathrm{Aff}(V)$$

может быть задана как множество решений системы линейных неоднородных уравнений:

$$\pi(p, U) = \{v \in \mathrm{Aff}(V) \mid \alpha(v) = \alpha(p)\ \forall \alpha \in \mathrm{Ann}\, U\}$$

(действительно, условие $v = p + u$, где $u \in U$, равносильно тому, что $\alpha(v) = \alpha(p)\ \forall \alpha \in \mathrm{Ann}\, U$). Выбор в $\mathrm{Ann}\, U$ базиса $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k}\}$ позволяет заменить эту систему равносильной системой из $n-k$ уравнений, так что коразмерность плоскости равна наименьшему числу линейных уравнений, которыми её можно задать.

1.6.2. Взаимное расположение. Пусть π_1 и π_2 — две плоскости в $\mathrm{Aff}(V)$, с направляющими подпространствами U_1 и U_2 соответственно. Тогда имеются две возможности: $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ и $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$.

В первром случае плоскости называются *скрещивающимися*, если $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, и *параллельными с кратностью* k, — если $U_1 \cap U_2 = W$ и $\dim W = k > 0$.

В случае, когда пересечение плоскостей не пусто, оно является плоскостью, ассоциированной с векторным пространством $U_1 \cap U_2$. В частности, если $U_1 \cap U_2 = 0$, но $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, то $\pi_1 \cap \pi_2$ — одна точка (т.е. нульмерная плоскость), и в этом случае плоскости называются *трансверсальными*.

1.6.3. Аффинные оболочки. Наименьшая плоскость, содержащая данное мноожество точек $M \subset \mathrm{Aff}(V)$ называется *аффинной оболочкой* множества M и обозначается $\mathrm{aff}(M)$. Эту плоскость можно также описать как пересечение всех аффинных подпространств, содержащих M, либо как плоскость вида $\pi(p, U) = p + U$, где $p \in M$, а U есть линейная оболочка всевозможных векторов $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in M$.

Задача 2.13. Проверьте корректность и эквивалентность этих двух описаний.

Задача 2.14. Найдите размерность аффинной оболочки двух скрещивающихся плоскостей размерностей m и k.

Задача 2.15. Проверьте, что функционалы вычисления значения на некотором множестве точек порождают пространство, сопряжённое к векторному пространству аффинных функционалов на аффинной оболочке этих точек.

§2. Барицентрические координаты

2.1. Центр тяжести системы точек. Предположим. что в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ над полем k задан набор точек $p_1, p_2, \dots, p_s$, и каждой точке p_ν приписан *вес* $\lambda_\nu \in k$. Точка c называется *центром тяжести* (или *центром масс*) этого набора взвешенных точек, если

$$\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_\nu\ \overrightarrow{cp_\nu} = 0 \tag{2-1}$$

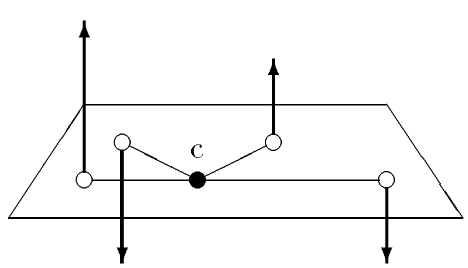


Рис. 2–A. Моменты сил.

Это название происходит из механики и связано с тем, что при $k = \mathbb{R}$ сумма в левой части (2-1) есть не что иное, как *алгебраическая сумма моментов* относительно точки c сил λ_ν, приложенных к точкам p_ν в направлениях, перпендикулярных их аффинной оболочке, как на рис.рис. 2–A (если эта оболочка — всё пространство, то его следует вложить в качестве гиперплоскости в некоторое большее пространство).

Как известно из механики, равенство нулю такой суммы означает, что плоскость закреплённая в точке c не будет вращаться под действием этих сил.

2.1.1. Лемма. *Для любого набора точек* $p_1, p_2, \dots, p_s$ *с весами* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ *, такими что* $\sum \lambda_\nu \neq 0$, *центр тяжести существует и единственен.*

Доказательство. Рассмотрим какие-либо две различные точки c и e и сравним суммы моментов (2-1), посчитанные относительно этих двух точек:

$$\sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{ep_\nu} = \sum \lambda_\nu (\ \overrightarrow{ec} \ + \ \overrightarrow{cp_\nu} \ ) = \left(\sum \lambda_\nu \right) \ \overrightarrow{ec} \ + \sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{cp_\nu}$$

Таким образом, при $\sum \lambda_\nu \neq 0$ суммы различаются на ненулевой вектор $\left(\sum \lambda_\nu\right) \ \overrightarrow{ec}$. Поэтому, зафиксировав произвольную точку e, мы получим нулевую сумму моментов в точности для единственной точки c, связанной с e по формуле: $c = e + \sum_i \dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_\nu \lambda_\nu} \ \overrightarrow{ep}_i$. □

2.1.2. Следствие. *Для любого набора чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \ \in k$ *с суммой* $\sum \lambda_\nu = 1$ *и любого набора точек* $p_1, p_2, \dots, p_s$ *точка*

$$c = e + \sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{ep_\nu}$$

не зависит от выбора точки e *(и является центром тяжести для точек* p_ν *с весами* λ_ν*).*

2.2. Барицентрические комбинации. При условии, что сумма весов $\sum \lambda_\nu = 1$ точка $c = e + \sum \lambda_\nu \ \overrightarrow{ep_\nu}$ из предыдущего следствия называется *барицентром* системы точек p_ν с весами λ_ν и обозначается через $\sum \lambda_\nu p_\nu$. Подчеркну, что это обозначение предполагает, что $\sum \lambda_\nu = 1$. Сумма $\sum \lambda_\nu p_\nu$ называется *барицентрической комбинацией* и во многих случаях ведёт себя по отношению к аффинным объектам точно также, как линейная комбинация векторов ведёт себя по отношению к линейным объектам.

> Задача 2.16. Докажите, что для любой барицентрической комбинации $\sum \lambda_\nu p_\nu$ и для любого аффинного отображения F справедливо равенство:
>
> $$F(\sum \lambda_\nu p_\nu) = \sum \lambda_\nu F(p_\nu)$$

2.2.1. Утверждение. *Пусть* $(n+1)$ *точек* $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ *не содержатся в* $(n-1)$*-мерной плоскости (иными словами,* $\dim \mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n) = n$*). Тогда любая точка* $q \in \mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ *допускает и притом единственное представление в виде барицентрической комбинации:*

$$q = \sum \lambda_\nu p_\nu.$$

Доказательство. Условия означают, что n векторов $\overrightarrow{p_0 p}_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, составляют базис в векторном пространстве $\mathrm{Vect}_{p_0} \mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$. Тем самым для любой точки q из аффинной оболочки $\mathrm{Aff}(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ вектор $\overrightarrow{p_0 q}$ допускает и притом единственное представление в виде

$$\overrightarrow{p_0 q} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \ \overrightarrow{p_0 p_\nu} \ .$$

Это равенство эквивалентно равенству $q = p_0 + \sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \ \overrightarrow{p_0p_\nu}$, которое при условии, что $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu = 1$ (т.е. что величина λ_0 вычисляется из равенства $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu$), и означает, по определению, что q — это барицентр. □

2.3. Барицентрические координаты. Если в n-мерном аффинном пространстве фиксировать $(n+1)$ точек $(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, которые его аффинно порождают, то как показывает предыдущее предложение, точки пространства можно однозначно параметризовать наборами из $n+1$ чисел $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, подчинённых условию $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu = 1$. Такие наборы назыются *барицентрическими координатами* точек аффинного пространства относительно *аффинного базиса* $(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Барицентрические координаты естественно возникают во многих задачах и ведут себя аналогично аффинным координатам.

> Задача 2.17. Убедитесь, что плоскости задаются в барицентрических координатах системами линейных уравнений, и наоборот, — системы линейных уравнений на барицентрические координаты (вместе с условием $\sum \lambda_\nu = 1$) описывают плоскости.

При вычислениях с барицентрическими комбинациями черезвычайно полезна следующая теорема, представающая собой своего рода закон ассоциативности (с точки зрения механической интуиции — очевидный!).

2.4. Теорема о группировании масс. *Пусть точки $p_1, p_2, \ldots, p_s$ с весами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ имеют центр тяжести p, а точки $q_1, q_2, \ldots, q_r$ с весами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ имеют центр тяжести q. Если объединение этих двух наборов точек*[3]*, имеет центр тяжести c, то c будет также и центром тяжести для пары точек p и q, взятых с весами $\sum \lambda_i$ и $\sum \mu_j$ соответственно.*

Доказательство. Поскольку c — центр тяжести объединённого набора, имеем равенство:

$$\sum_i \lambda_i \ \overrightarrow{cp_i} + \sum_j \mu_j \ \overrightarrow{cq_j} = 0$$

Подставляя в него $\overrightarrow{cp_i} = \overrightarrow{cp} + \overrightarrow{pp_i}$ и $\overrightarrow{qq_j} = \overrightarrow{cq} + \overrightarrow{qq}_j$, и пользуясь равенствами $\sum \lambda_i \ \overrightarrow{pp_i} = 0$ и $\sum \mu_j \ \overrightarrow{qq_j} = 0$, получим: $\left(\sum \lambda_i\right) \ \overrightarrow{cp} + \left(\sum \mu_j\right) \ \overrightarrow{cq} = 0$. □

2.4.1. Следствие. *Барицентрическая комбинация от барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией исходных точек, т.е. если точки $\{r_i\}$ барицентрически выражаются через точки $\{q_j\}$, а эти последние — через точки $\{p_k\}$, то $\{r_i\}$ представимы в виде барицентрических комбинаций $\{p_k\}$.*

2.4.2. Пример. Пусть на аффинной плоскости нарисован треугольник ABC, и на его сторонах (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1, C_1 (см. рис. 2–Б). Набор весов α, β, γ, которые следует поместить в его вершины, так чтобы центр тяжести точек A и B оказался в точке C_1, центр тяжести точек B и C — в точке A_1, а центр тяжести точек C и A — в точке B_1, существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1 \qquad (2\text{-}2)$$

[3] В условии теоремы допускается, чтобы наборы имели общие точки. При объединении наборов в таких точках веса складываются.

(где под отношением двух пропорциональных векторов понимается коэффициент пропорциональности). Если написанное условие выполнено, то по теореме о группировании масс центр тяжести треугольника должен лежать на каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1, и следовательно они будут пересекаться в одной точке. С другой стороны, при фиксированных точках A_1 и B_1 условие (2-2) однозначно фиксирует и точку C_1. Поэтому прямая CC_1 будет проходить через точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 *только* при выполнении равенства (2-2) и никогда более.

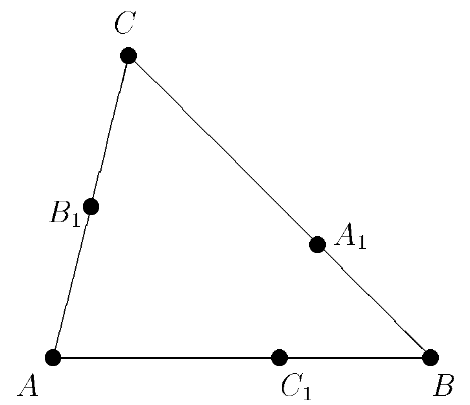


Рис. 2–Б. К теореме Чевы.

Итак, условие (2-2) равносильно тому, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Этот факт известен как *теорема Чевы*.

Задача 2.18. Пусть в аффинном пространстве над полем $\mathbb{R}$ задан произвольный набор из n точек. Его *медианой* с вершиной в одной из заданных точек называется отрезок[4], соединяющий эту точку с центром тяжести остальных точек, взятых с единичными весами. Докажите, что все медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $(n-1):1$, считая от вершин.

§3. Выпуклая геометрия.

С этого момента и до конца следующей лекции мы будем заниматься только аффинными пространствами над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (все исключения будут специально оговариваться). Аффинная геометрия вещественных пространств представляет особый интерес, поскольку именно она, собственно, и составляет содержание геометрии в традиционном понимании этого слова и наиболее привычна для "массовой" геометрической интуиции. Формальная же её специфика состоит в том, что на прямой $\mathbb{R}^1$ имеется *порядок*, т.е. вещественные числа разбиваются на *отрицательные* и *положительные*, а также в том, что на вещественных аффинных пространствах имеется *топология*, хорошо известная из курса анализа.

3.1. Кубы и стандартная топология в $\mathbb{R}^n$. Фиксируем в вещественном аффинном пространстве какие-либо аффинные координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

3.1.1. Кубы. Будем называть *ε-кубом* с центром в точке $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n)$ фигуру

$$Q(p,\varepsilon) = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid |x^i - p^i| \le \varepsilon \ \forall i\},$$

где под ε всегда понимается вещественное *положительное* число. При этом куб $Q(0,1)$ мы будем называть *стандартным кубом*.

Задача 2.19. Сколько у n-мерного куба k-мерных граней (при каждом $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$) и сколько у него внутренних диагоналей?

Задача 2.20. Нарисуйте проекцию 4-мерного куба на 2-мерную плоскость (любую, но такую, чтобы разные вершины проектировались в разные точки плоскости).

[4]точное определение отрезка (если оно Вам и так не очевидно) см. немного ниже

Задача 2.21. Поверхность 4-мерного куба состоит из 3-мерных кубов-граней, а стало быть в трёхмерном пространстве можно сделать развёртку 4-мерного куба, подобную известной плоской развёртке для склеивания трёхмерного кубика. Нарисуйте 3-мерную развёртку 4-мерного куба и снабдите её указаниями по склейке (разумеется, реализация этих указаний будет возможна лишь в 4-мерном пространстве).

3.1.2. Топология. *Стандартной топологией* на конечномерном аффинном вещественном пространстве мы будем называть ту, в которой *открытыми* являются множества, содержащие вместе с каждой своей точкой и некоторый ε-куб с центром в этой точке. Формально, такое определение зависит от фиксации координат.

Задача 2.22. Докажите, что при фиксированных координатах описанный только что класс открытых множеств действительно удовлетворяет аксиомам топологии, а также докажите, что при выборе других координат получится тот же самый класс открытых множеств.

Дополненеия до открытых множеств называются *замкнутыми* множествами.

Задача 2.23. Докажите, что замкнутость равносильна тому, что в месте с каждой сходящейся последовательностью точек множество содержит также и предел этой последовательности.

Легко видеть, что сходимость в стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^n$ означает в точности покоординатную сходимость.

Для всякой фигуры Φ определим совокупность её *внутренних* точек

$$\mathring{\Phi} = \{ x \in \Phi \mid \exists \varepsilon > 0 : Q(x,\varepsilon) \subset \Phi \}$$

и *замыкание* $\bar{\Phi}$ — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих Φ. *Внешними* точками Φ будем называть внутренние точки дополнения до Φ. Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат ли они фигуре Φ.

Задача 2.24. Убедитесь, что точка является граничной тогда и только тогда, когда в любом ε-кубе с центром в этой точке лежат как точки из Φ, так и точки, не принадлежащие Φ.

3.2. Выпуклые оболочки. Будем называть барицентрическую комбинацию

$$\sum \lambda_\nu p_\nu \,, \quad \text{где} \quad \sum \lambda_\nu = 1 \,,$$

точек p_ν *выпуклой*, если все её коэффициенты неотрицательны: $\lambda_\nu \geq 0 \, \forall \nu$. Совокупность всех выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{Conv}\Phi$.

3.2.1. Симплексы. Выпуклая оболочка $k+1$ точек $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$, не лежащих ни в какой $(k-1)$-мерной плоскости, называется k-мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, p_2, \dots, p_k] = \{ q = \sum \lambda_\nu p_\nu \mid \quad \sum \lambda_\nu = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_\nu \geq 0 \ \forall \nu \}.$$

В частности 1-мерный симплекс

$$[ab] = \{ q = \lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1, \, \lambda \geq 0, \, \mu \geq 0 \}$$

называется *отрезком* с концами в точках a и b.

Задача 2.25. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n\ ]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1},\ p_{\nu_2},\ \ldots,\ p_{\nu_m}]$ с $m < n$ и $\nu_i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ и подсчитайте количесиво граней в каждой размерности.

3.3. Определение. *Множество точек в вещественном аффинном пространстве называется выпуклым, если вместе с каждыми двумя точками оно содержит и отрезок с концами в этих точках.*

3.4. Простейшие свойства выпуклых множеств. Прежде всего заметим, что выпуклое множество содержит не только любые отрезки с концами в принадлежащих этому множеству точках, но и вообще любые выпуклые комбинации своих точек (надо воспользоваться индукцией по количеству точек, участвующих в комбинации и применить теорему о группировании масс).

Задача 2.26. Убедитесь, что пересечение выпуклых множеств выпукло, и что выпуклая оболочка фнгуры может быть определена как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих эту фигуру.

Далее, если точки a_i сходятся к a, а точки b_i — к b, то при любых фиксированных λ, μ с единичной суммой точки $\lambda a_i + \mu b_i$ сходятся к точке $\lambda a + \mu b$. Поэтому *замыкание выпуклого множества выпукло*.

Если точки a и b лежат в выпуклом множестве M вместе с некоторыми своими кубическими окрестностями, то множеству M будут принадлежать и кубические окрестности всех точек отрезка $[ab]$ (см. рис. 2–B). Поэтому *внутренность выпуклого множества выпукла*.

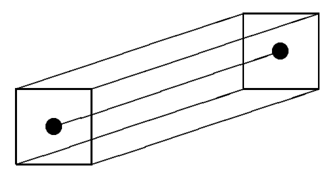


Рис. 2–B. Выпуклость внутренности.

Задача 2.27. Пусть U —открытое выпуклое множество, и $O \notin U$. Убедитесь, что конус $C(O, U)$, являющийся объединением всех открытых лучей $]OP)$ с $P \in U$, также будет открытым выпуклым множеством.

Конус, о котором шла речь в задаче, обладает замечательным свойством: каждая прямая, проходящая через O либо вообще его не пересекает, либо пересекает так, что по одну сторону от O все точки этой прямой будут внутренними для $C(O, U)$, а по другую сторону от O — все точки будут внешними (это вытекает из выпуклости конуса и того, что точка O ему не принадлежит). Отсюда сразу следует такая

3.4.1. Лемма. *В аффинном пространстве, размерность которого не менее 2, через точку, не принадлежащую открытому выпуклому множеству, можно провести прямую, не пересекающую это множество.*

Доказательство. Воспользуемся предыдущими обозначениями и рассмотрим замыкание Z конуса $C(O, U)$. Предыдущее замечание показывает, что имеется точка X, внешняя для Z. Проведя через неё прямую, отличную от (OX), но пересекающую Z, мы сможем найти на этой прямой точку $Q \neq O$, граничную для Z. Прямая (OQ) — искомая, т.к. если бы она пересекала $C(O, U)$, то точка Q была бы для $C(O, U)$ либо внешней, либо внутренней, но не граничной. □

Задача 2.28. Убедитесь, что для одномерных пространств лемма неверна, и укажите в доказательстве место, где использовалась многомерность.

3.5. Опорные полупространства. Для всякого аффинного функционала a на аффинном пространстве $\mathbb{A}$ рассмотрим множества:

$$\begin{aligned} H_a &= \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) = 0\} \ , \\ H_a^+ &= \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) \geq 0\} \ , \\ H_a^- &= \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) \leq 0\} \ . \end{aligned}$$

H_a является гиперплоскостью в $\mathbb{A}$. Она разбивает $\mathbb{A}$ на два непустых открытых выпуклых подмножества

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{H}{}_a^+ &= \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) > 0\} \\ \overset{\circ}{H}{}_a^- &= \{p \in \mathbb{A} \mid a(p) < 0\} \end{aligned}$$

общей границей которых сама и является.

Всё сказанное вытекает из следующей альтернативы для ограничения аффинного линейного функционала a на отрезок $[pq]$: либо a тождественно зануляется на $[pq]$, либо имеет всюду на $[pq]$ постоянный знак, либо обращается в нуль в *единственной* точке, причём эта точка тогда и только тогда является внутренней для отрезка, когда a имеет разные знаки на концах. Далее мы всё время будем использовать эту альтернативу.

Исключительную важность для дальнейшего имеет

3.5.1. Лемма. *Через любую (в том числе нульмерную) аффинную плоскость π, не пересекающую открыторого выпуклого множества U, можно провести гиперплоскость, также не пересекающую U.*

Доказательство. Можно считать, что дело происходит в аффинизации $\mathrm{Aff}(V)$ векторного пространства V, и что $\pi = \mathrm{Aff}(W)$ для некоторого векторного подпространства $W \subset V$. Пусть $H \subset V$ — подпространство наибольшей размерности из всех, содержащих W и не пересекающих U. Представим V в виде $V = H \oplus H_1$ с подходящим H_1, и выберем в V базис, согласованный с таким разложением. Нам надо показать, что $\dim H_1 = 1$.

Спроектируем V на H_1 вдоль H. Поскольку отрезки при этом перейдут в отрезки, а кубы — в кубы, множество U спроектируется в открытое выпуклое множество, которое не содержит нуля (т.к. прообраз нуля H не пересекался с U), но пересекается с каждой прямой, проходящей через O (по максимальности H). В предыдущем пункте мы видели, что такое бывает только в одномерном пространстве. $\square$

3.5.2. Следствие. *Через каждую граничную точку x выпуклого множества M проходит замкнутое полупространство H_a^+, содержащее M.*

Доказательство. Случай, когда M лежит в плоскости, очевиден. В остальных случаях у M есть непустая внутренность (ибо у полномерного симплекса есть внутренность). Проведём через x гиперплоскость H_a, не пересекающую внутренность M. Функционал a не может менять знак на $\overset{\circ}{M}$ вследствии выпуклости $\overset{\circ}{M}$ (ибо соединив точки разного знака отрезком, получим на этом отрезке нуль функционала, т.е. точку из H_a). Меняя, если надо, знак у a, получаем $M \subset H_a^+$, что и требовалось.

Полупространство H_a^+ называется *опорным полупространством*, а функционал a — *опорным функционалом* множества M в точке x. Аналогично, опорной называется и гиперплоскость H_a.

3.6. Теорема. *Всякое замкнутое выпуклое множество является пересечением своих опорных полупространств.*

Доказательство. Индукция по размерности сводит всё к случаю, когда рассматриваемое множество M имеет непустую внутренность. Мы должны проверить, что каждая внешняя точка $q \notin M$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств. Соединим q отрезком $[qp]$ с некоторой внутренней точкой p множества M и проведём опорное полупространство H_a^+ к M в граничной точке x множества M, лежащей на отрезке $[qp]$. Тогда $a(p) > 0$ и $a(x) = 0$ влекут, что $a(q) < 0$, т.е. $q \notin H_a^+$, что и требовалось.

Поскольку пересечение полупространств, очевидно, является замкнутым выпуклым множеством, мы получаем, что *классы замкнутых выпуклых множеств и множеств, представимых в виде пересечения полупространств, совпадают*.

3.7. Грани и крайние точки. Пусть M — замкнутое выпуклое множество. Пересечение M с любой своей опорной гиперплоскостью называется *гранью*[5] M. Всякая грань также является замкнутым выпуклым множеством, причём лежит в аффинном пространстве меньшей размерности, чем исходное. Размерностью грани называется размерность её аффинной оболочки. По отношению к стандартной топологии этой аффинной оболочки имеет смысл говорить о внутренних, внешних и граничных точках грани. Нульмерные грани (т.е. грани-точки) называются *вершинами*.

> Задача 2.29. Приведите пример, показывающий, что грань грани может не быть гранью для исходной фигуры.

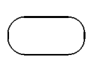
Точка $p \in M$ называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком содержащегося в M. Если M замкнуто и выпукло, то его крайние точки — это вершины и только они. Действительно, если $p = H_a \cap M$ — вершина, то функционал a строго положителен на M всюду вне p, а значит p может быть лишь концом для отрезка из M (вспомните альтернативу!). Обратно, всякая крайняя точка лежит на границе M, а значит — на грани. Аналогично, она лежит и на границе этой грани, т.е. на грани грани и т.д. Грани, не имеющие нетривиальных граней — это вершины.

Приведённое только что рассуждение называется "выдавливанием на грань" и часто используется при исследовании выпуклых фигур (обычно в сочетании с индукцией по размерности).

3.8. Теорема. *Выпуклое замкнутое ограниченное множество совпадает с выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Доказательство. Внутренние точки ограниченного замкнутого выпуклого множества лежат в выпуклой оболочке граничных (для данной внутренней точки можно взять, к примеру, концы отрезка, высекаемого множеством на произвольной прямой, проходящей через эту точку). Все граничные точки лежат в гранях, а стало быть в выпуклой оболочке граней граней и т.д. пока не дойдём до вершин. □

---

[5] Возможно, термин «грань» в контексте общих выпуклых фигур (не многогранников) не слишком удачен. К примеру, у окружности бесконечно много граней и все они нульмерны. Ещё более странно дело обстоит с фигурами типа .

§4. Выпуклые многогранники.

4.1. Определение. *Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа замкнутых полупространств.*

На языке формул, выпуклый многранник является множеством решений конечной системы нестрогих линейных неоднородных неравенств. Отметим, что многранник не обязан быть ограниченным. Например, многранниками являются плоскости, ибо комбинация из двух неравенств, отличающихся знаком, равносильна уравнению.

Другим примером неограниченных многогранников являются *выпуклые полиэдральные конусы* — пересечения конечных наборов полупространств, проходящих через фиксированную точку — *вершину конуса*. Вместе со всякой точкой такой конус содержит и замкнутый луч с началом в вершине, проходящий через эту точку. Если ввести аффинные координаты с центром в вершине конуса, то выпуклый полиэдральный конус запишется системой линейных *однородных* неравенств.

4.2. Грани многранников. Пусть многогранник M задан как пересечение полупространств $H_1^+, H_2^+, \dots, H_m^+$, отвечающих функционалам $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тогда его грани также легко описать явно. В самом деле, всякое непустое пересечение

$$H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap M$$

каких-либо из ограничивающих многогранник гиперплоскостей с самим многогранником будет гранью для M, поскольку функционал $b = a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$ при условии непустоты пересечения является опорным для M и
$$H_b \cap M = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap M.$$

Наоборот, всякая грань $\Gamma \subset M$ представляется в таком виде. Чтобы получить это представление, занумеруем функционалы a_ν так, чтобы первые k из них тождественно обращались в нуль на Γ, а остальные $m-k$ были положительны хотя бы в одной точке на Γ. Тогда в центре тяжести $p \in \Gamma$ этих точек будет положителен каждый из них. Таким образом, грань Γ содержится в грани $\Phi = H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_k} \cap M$ и содержит точку p, которая является для этой грани Φ внутренней. Но тогда опорная плоскость, высекавшая Γ обязана содержать Φ: если функционал, задающий эту плоскость окажется положительным в какой либо точке $q \in \Phi$, то немного продлив отрезок $[qp]$ за точку p, мы построим точку $r \in \Phi$, для которой этот функционал станет отрицательным, что для опорной плоскости невозможно. Следовательно,

$$\Gamma = \Phi = H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_k} \cap M.$$

Сказанное можно подытожить в виде такого предложения:

4.2.1. Утверждение. *У выпуклого многогранника имеется лишь конечное число граней, и все они могут быть заданы как решения систем, получающихся из системы неравенств, определяющей сам многогранник, заменой некоторых неравенств на равенства.*

4.2.2. Следствие. *Выпуклый ограниченный многранник является выпуклой оболочкой конечного числа точек — своих вершин.*

Замечательно, что верно и обратное.

4.3. Теорема. *Минковского-Вейля В классе ограниченных замкнутых выпуклых множеств выпуклыми многогранниками являются выпуклые оболочки конечных наборов точек и только они.*

Доказательство. Мы должны проверить, что выпуклую оболочку конечного набора точек $p_1, p_2, \ldots, p_m$ можно задать конечным числом неравенств. При этом можно предполагать, что их аффинная оболочка — это всё пространство. Ясно, что $\mathrm{conv}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ является пересечением бесконечного семейства полупространств H_a^+ со всевозможными a, удовлетворяющими условию $a(p_\nu) \geq 0\ \forall \nu$. Так как точки не лежат в гиперплоскости, для каждого такого функционала a число $\sum a(p_\nu)$ строго положительно. Поскольку отличающиеся положительным множителем функционалы определяют одно и то же полупространство, мы можем (деля a на $\sum a(p_\nu)$) считать дополнительно, что $\sum a(p_\nu) = 1\ \forall a$.

Следовательно, набор функционалов a, задающий $\mathrm{conv}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, изображается в аффинном пространстве $\mathbb{F}$, ассоциированном с векторным пространством всех аффинных функционалов, фигурой

$$A = \{a \in \mathbb{F} \mid \sum a(p_\nu) = 1 \text{ и } a(p_\nu) \geq 0\ \forall \nu\},$$

которая является выпуклым многогранником. Выбирая среди функционалов вычисления ev_{p_ν} аффинные координаты на $\mathbb{F}$, мы видим, что в этих координатах многогранник A оказывается лежащим в стандартном кубе (т.к. $\mathrm{ev}_{p_\nu}(a) = a(p_\nu) \leq 1$). Тем самым A — ограниченный многогранник, и является выпуклой оболочкой конечного числа своих вершин $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Это означает, что произвольный $a \in A$ представим в виде $a = \sum \lambda_\mu a_\mu$ с $\lambda_\mu \geq 0$, а стало быть, бесконечная система неравенств $a \geq 0$ является следствием конечной подсистемы $a_\mu \geq 0$, что и требовалось.

Задача 2.30. Докажите, что выпуклая оболочка конечного набора точек ограничена.

4.4. Максимумы аффинных функционалов. Из соображений непрерывности, всякий аффинный функционал a достигает максимального значения на ограниченном многограннике. Практическому отысканию этого максимума очень помогает то обстоятельство, что среди точек, в которых он достигается, обязательно имеются вершины. Действительно, записывая произвольную точку p многогранника в виде выпуклой барицентрической комбинации вершин p_ν, получаем

$$a(p) = a(\sum \lambda_\nu p_\nu) = \sum \lambda_\nu a(p_\nu),$$

что является выпуклой комбинацией точек на прямой $\mathbb{R}$ и лежит внутри отрезка с концами в максимальном и минимальном значении a на вершинах.

Реальный алгоритм для ЭВМ, вычисляющий максимальное значение функционала на многограннике, называется *симплекс-методом*, и состоит в движении по рёбрам многогранника до тех пор, пока при этом строго возрастает значение функционала. В вершине, из которой дальнейшее такое продвижение невозможно, и достигается максимум.

Задача 2.31. Обоснуйте правильность алгоритма и попытайтесь его запрограммировать.

Лекция 3
Евклидовы пространства

▷Метрики ▷Однородность и трансляционная инвариантность ▷Нормы ▷Шары и топология ▷Эквивалентность норм на конечномерном пространстве ▷Геометрическое задание нормы ▷Скалярное произведение ▷Ортогонализация Грама-Шмидта ▷Матрицы Грама и определители Грама ▷Неравенство Буняковского-Коши-Шварца ▷Евклидовы метрики ▷Углы ▷Евклидов объём ▷Ортогональное проектирование и вычисление расстояний

В этой лекции мы по-прежнему будем заниматься конечномерными аффинными и векторными пространствами над полем $\mathbb{R}$ и обсудим вопросы, связанные с измерением длин, углов и объёмов в таких пространствах.

§1. Метрики и нормы

Аксиоматизация свойств *расстояния* приводит к общему теоретико-множественному понятию *метрического пространства*.

1.1. Определение. *Множество X, называется* метрическим пространством, *если задана функция $\varrho: \ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}: \ (x, y) \mapsto \varrho(x, y)$, которая называется* расстоянием *(или* метрикой*) и обладает свойствами:*

(i) симметричность: $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \qquad \forall x, y \in X$

(ii) положительность: $\varrho(x, y) \geq 0 \qquad \forall x, y \in X$

(iii) невырожденность: $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$

(iv) неравенство треугольника: $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z) \qquad \forall x, y, z \in X$

Если X — аффинное пространство, то, занимаясь аффинной геометрией на X, естественно рассматривать только метрики, согласованные с аффинной структурой на X. Геометрически эта структура проявляется в наличии на X *параллельных переносов* и *гомотетий*.

Метрика ϱ на аффинном пространстве X называется *инвариантной относительно сдвигов*, если

$$\varrho(x, y) = \varrho(x + v, y + v) \quad \forall x, y \in X \quad \text{и} \quad \forall v \in V_X.$$

Метрика называется *однородной*, если

$$\overrightarrow{xy} = \lambda\ \overrightarrow{pq} \implies \varrho(x,y) = |\lambda|\varrho(p,q).$$

Всюду далее мы будем рассматривать на аффинных просранствах только однородные и инвариантные относительно сдвигов метрики. Наличие такой метрики на аффинном пространстве X можно переформулировать в терминах векторного пространства V_X.

1.2. Определение. *Функция* $\|\cdot\|: \ V \longrightarrow \mathbb{R}: \ v \mapsto \|v\|$ *на вещественном векторном пространстве* V *называется* **нормой**, *если она обладает свойствами:*

(i) *положительность:* $\|v\| \geq 0 \qquad \forall v \in V$
(ii) *невырожденность:* $\|v\| = 0 \quad \iff \quad v = 0$
(iii) *однородность:* $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
(iv) *неравенство треугольника:* $\|v\| + \|w\| \geq \|v + w\| \quad \forall v \in V.$

1.3. Биекция между метриками и нормами. Если метрика ϱ на аффинном пространстве X инвариантна относительно сдвигов и однородна, то, полагая

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(x, x+v),$$

мы корректно определим функцию из V в $\mathbb{R}$ (поскольку правая часть не зависит от x из-за инвариантности ϱ). Сравнение свойств метрики и нормы немедленно показывает, что $\|\cdot\|$ будет нормой на V.

Задача 3.1. Проверьте это.

Обратно, любая норма $\|\cdot\|$ на V индуцирует инвариантную относительно сдвигов и однородную функцию от двух точек из $\mathrm{Aff}(V)$: $\varrho(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|\ \overrightarrow{xy}\ \|$.

Задача 3.2. Убедитесь, что ϱ — метрика.

Таким образом, имеется биекция между нормами на V и инвариантными относительно сдвигов однородными метриками на $\mathrm{Aff}(V)$.

1.4. Другая форма неравенства треугольника. Мы записали неравенство треугольника в "геометрической" форме, однако иногда бывает удобен другой его вариант. Полагая $v = a$, $w = b - a$, получим $\|a\| + \|b - a\| \geq \|b\|$, или, перенося в другую часть, $\|b - a\| \geq \|b\| - \|a\|$. Меняя a и b местами и пользуясь тем, что $\|b - a\| = \|a - b\|$, получаем также, что $\|b - a\| \geq \|a\| - \|b\|$. Откуда окончательно $\|b - a\| \geq \Big|\|b\| - \|a\|\Big|$.

Задача 3.3. Проверьте, что это неравенство в действительности равносильно неравенству треугольника.

1.5. Шары и топология. Пусть X — метрическое пространство, и ε — вещественное положительное число. Будем называть ε-шаром с центром в точке $p \in X$ множество

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p,q) \leq \varepsilon\}.$$

Если X — аффинное пространство и метрика ϱ индуцирована нормой $\|\cdot\|$ на V_X, то шар можно описать как

$$B_\varepsilon(p) = \{q = p + v \mid \|v\| \leq \varepsilon,\ v \in V_X\}.$$

Если объявить в X *открытыми* те и только те подмножества, которые вместе с каждой своей точкой содержат и некоторый ε-шар с центром в этой точке, то мы зададим на X *топологию*.

> Задача 3.4. Убедитесь, что из свойств метрики вытекает выполнение аксиом топологии для описанной системы открытых множеств.

Эта топология на метрическом пространстве называется *топологией, индуцированной метрикой*.

1.5.1. Пример: стандартная топология на $\mathbb{R}^n$. Если фиксировать в V базис $\{e_\nu\}$ с координатами $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, то функция

$$\|v\| = \|\sum x^i e_i\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_i |x^i|$$

будет, очевидно, нормой. ε-шар с центром в точке p, построенный относительно этой нормы, есть не что иное, как ε-куб с центром в p (см. прошлую лекцию).

$$B_\varepsilon(p) = Q(p, \varepsilon) = \{q \mid \quad |q^i - p^i| \le \varepsilon \quad \forall\, i = 1, \dots, n\}\ .$$

Поэтому топология, индуцированная этой нормой, совпадает со *стандартной топологией* на $\mathbb{R}^n$, которую мы обсуждали в прошлой лекции. Мы будем называть норму $\max\limits_i |x^i|$ *стандартной* и обозначать $\|\cdot\|_{st}$.

§2. Свойства норм

2.1. Эквивалентность норм. Мы собираемся проверить, что на *конечномерном* векторном пространстве все нормы задают одну и ту же топологию[1]. Для бесконечномерных пространств *это неверно* и читателю очень поучительно будет проследить, где в наших рассуждениях будет использована конечномерность, а также построить бесконечномерные контрпримеры.

2.1.1. Лемма. *Произвольная норма на $\mathbb{R}^n$ непрерывна в стандартной топологии.*

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_{st}$ — стандартная, а $\|\cdot\|$ — произвольная нормы, и пусть $M = \max\limits_i \|e_i\|$. Оценка

$$\|v\| = \|\sum x^i e_i\| \le \sum \|x^i e_i\| = \sum |x^i|\|e_i\| \le nM \max_i |x^i| = nM\|v\|_{st}$$

показывает, что при малых $\|v\|_{st}$ норма $\|v\|$ также мала: $\forall \varepsilon > 0$ при $\|v - w\|_{st} < \varepsilon/2nM$ получим

$$\Big|\|v\| - \|w\|\Big| \le \|v - w\| < nM\|v - w\|_{st} < \varepsilon\ ,$$

что и означает непрерывность функции $\|v\|$.

2.1.2. Следствие. *Для любой нормы $\|\cdot\|$ существуют вещественные положительные константы μ и M, такие, что $\forall v \in V \qquad \mu\|v\|_{st} \le \|v\| \le M\|v\|_{st}$.*

[1] Что, в частности, даст "обходное" решение зад.2.22 о независимости стандартной топологии от выбора координат.

Доказательство. Рассмотрим множество $K = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_{st} = 1\}$. Это в точности граница стандартного 1-куба с центром в нуле. K является компактным множеством, и $0 \notin K$. Непрерывная функция $\|\cdot\|$ имеет на компакте K конечные точные нижнюю и верхнюю грани $M = \sup(\|v\| \mid v \in K)$ и $\mu = \inf(\|v\| \mid v \in K)$, причём имеет место строгое неравенство $\mu > 0$, — иначе существовала бы последовательность $v_i \in K$ с $\|v_i\| \to 0$, содержащая (в силу компактности K) подпоследовательность, имеющую в K предел, что невозможно, ибо из-за непрерывности $\|\cdot\|$ и свойства $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ таким пределом мог бы быть лишь $0 \notin K$.

Итак, $\forall v \in K$ имеем $0 < \mu \le \|v\| \le M < \infty$. Но $\forall v \in K$ вектор $\dfrac{v}{\|v\|_{st}}$ лежит в K. Следовательно, $\left\|\dfrac{v}{\|v\|_{st}}\right\| = \dfrac{\|v\|}{\|v_{st}\|}$ лежит между μ и M $\forall v \in K$, что и требовалось. □

Беря в качестве $\|\cdot\|$ две любые нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ получим:

2.1.3. Следствие. *Для любых двух норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ на конечномерном вещественном векторном пространстве существеют вещественные положительные константы c и C такие, что*

$$c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$$

Геометрически это свойство означает, что всякий ε-шар для первой нормы содержится в $C\varepsilon$-шаре и содержит $c\varepsilon$-шар для второй нормы. Тем самым справедливо

2.1.4. Следствие. *Любые две нормы на конечномерном вещественном пространстве индуцируют одну и ту же топологию, совпадающую с топологией покоординатной сходимости.*

2.2. Геометрическое описание норм.

Если интересоваться не топологией, а самими нормами, то совокупность всех норм на конечномерном пространстве допускает удобное геометрическое описание.

Сопоставим каждой норме $\|\cdot\|$ её единичный шар с центром в нуле

$$\Phi = B_1(0) = \{v \in V \mid \|v\| \le 1\}.$$

По предыдущему, Φ является ограниченным замкнутым множеством (замкнутость вытекает из непрерывности нормы), для которого нуль является внутренней точкой. Более того, Φ – выпукло. В самом деле, если $\lambda, \mu > 0$ и $\lambda + \mu = 1$, то $\forall\, v, w$ с $\|v\| \le 1$ и $\|w\| \le 1$ имеем

$$\|\lambda v + \mu w\| \le \lambda\|v\| + \mu\|w\| \le 1 \; .$$

Заметим, что норма $\|\cdot\|$ однозначно восстанавливается по фигуре Φ, поскольку

$$\|v\| = \inf(\lambda \in \mathbb{R} \mid v \in \lambda\Phi)$$

2.2.1. Утверждение. *Сопоставление $\Phi \longmapsto \|v\|_\Phi$, где*

$$\|v\|_\Phi \overset{\text{def}}{=} \inf(\lambda \in \mathbb{R} \mid v \in \lambda\Phi) \tag{2-1}$$

является биекцией между множеством замкнутых выпуклых ограниченных подмножеств в $\mathrm{Aff}(V)$, содержащих некоторую окрестность нуля, и множеством всех норм на V.

Доказательство. Остаётся проверить лишь, что формула 2-1 действительно задаёт норму, если Φ замкнуто, выпукло, ограничено и содержит нуль внутри.

Положительность, невырожденность и однородность функции $\|v\|_\Phi$ очевидна (их достаточно проверить в одномерном случае).

Неравенство треугольника следует из выпуклости: $\forall v, w \in V$ точка $q = \dfrac{v+w}{\|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi}$ является выпуклой комбинацией точек $\dfrac{v}{\|v\|_\Phi}$ и $\dfrac{w}{\|w\|_\Phi}$. Последние две точки лежат в Φ, поэтому $q \in \Phi$, откуда $\|v+w\|_\Phi \le \|v\|_\Phi + \|w\|_\Phi$.

§3. Скалярное произведение

При всей геометрической наглядности, понятие угла не слишком хорошо поддаётся аксиоматизации в контексте линейной алгебры. Гораздо удобнее аксиоматизировать свойства тесно связанного с ним понятия *скалярного произведения* (я напомню, что в школе скалярным произведением векторов u, v называют число

$$(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между u и v).

3.1. Определение. *Вещественное векторное пространство V называется* евклидовым, *если на нём задано* скалярное произведение[2], *т.е. функция*

$$(\cdot,\cdot):\ V\times V \longrightarrow \mathbb{R}:\ v, w \longmapsto (v, w) \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющая свойствам:

(i) симметричность: $(v, w) = (w, v) \qquad \forall v, w \in V$

(ii) положительность: $(v, w) \ge 0 \quad \forall v \in V$

(iii) невырожденность: $(v, v) = 0 \quad \iff \quad v = 0$

(iv) билинейность:

$$(\lambda v, w) = \lambda(v, w) = (v, \lambda w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall v, w \in V$$

$$\begin{matrix} (v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) = (v, w_1 + w_2) \end{matrix} \qquad \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$$

3.1.1. Пример. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты относительно этого базиса. Очевидно, что для $v = \sum x^i e_i$ и $w = \sum y^i e_i$ формула

$$(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v x^v y^v$$

определяет скалярное произведение. Оно называется *стандартным евклидовым произведением на* $\mathbb{R}^n$ и замечательно тем, что базисные векторы e_i перемножаются по правилу

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

т.е. они *ортогональны* друг другу и имеют скалярные квадраты 1. Базис в евклидовом пространстве, обладающий такими свойствами, называются *ортонормированным*.

[2] Его называют также *евклидовой структурой*.

3.1.2. Пример. Непосредственным бесконечномерным обобщением предыдущего примера является скалярное произведение

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

на пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.

Задача 3.5. Найдите какой-либо ортонормальный базис для этого скалярного произведения в подпространстве многочленов степени $\leqslant 3$ на $[0,1]$.

3.2. Теорема. *Пусть V — евклидово пространство и $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ — произвольный базис в нём. Тогда в V существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, матрица которого $C_{\tau e}$ в исходном базисе имеет верхнетреугольный вид:*

$$C_{\tau e} = \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$

Доказательство. Доказательство основано на двух идеях: для того, чтобы сделать из вектора a вектор $\tilde{a}$ с $(\tilde{a},\tilde{a}) = 1$, надо разделить a на $\sqrt{(a,a)}$, а для того, чтобы сделать из вектора b вектор, ортогональный данному вектору e с $(e,e) = 1$, надо вычесть из b его *ортогональную проекцию по* e, которая равна $(e,b)e$. Точное рассуждение проводится по индукции.

Положим $e_1 = \tau_1/\sqrt{(\tau_1,\tau_1)}$. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$, такие, что их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой векторов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, и такие, что $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Положим

$$\tilde{e}_{k+1} = \tau_{k+1} - (\tau_{k+1}, e_1)e_1 - (\tau_{k+1}, e_2)e_2 - \dots - (\tau_{k+1}, e_k)e_k = \tau_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{k} (\tau_{k+1}, e_\nu)e_\nu$$

Тогда вектор $\tilde{e}_{k+1}$ ортогонален каждому из векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ и линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \dots, e_k, \tilde{e}_{k+1}$ совпадает с линейной оболочкой $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}$ (в частности, $\tilde{e}_{k+1} \neq 0$). Остаётся положить

$$e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\sqrt{(\tilde{e}_{k+1}, \tilde{e}_{k+1})}}$$

□

Процедура построения ортонормированного базиса, использованная в доказательстве, называется *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.*

3.3. Матрицы Грама. Свойство билинейности позволяет вычислять скалярные произведения между любыми векторами, если известны скалярные произведения между базисными векторами. При этом последние удобно организовать в матрицу

$$G_e = (g_{ij}) = ((e_i, e_j))$$

называемую *матрицей Грама скалярного произведения в базисе* e (или просто *матрицей Грама базиса* e).

Если $(x) = \sum x^i e_i$, $(y) = \sum y^i e_i$, то $((x),(y)) = \sum_{ij} x^i \cdot (e_i, e_j) \cdot y^j = (x)^t G_e(y)$, где $(x)^t$ — означает транспонированный столбец (т.е. строку) координат вектора x, (y) — столбец координат вектора (y), а G_e — матрицу Грама.

Если $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — другой базис, то координаты (x_a) и (x_e) связаны, как мы знаем, по формуле $(x_e) = C_{ea}(x_a)$, где C_{ea} — матрица базиса $\{a\}$ в базисе $\{e\}$. Подставляя это в предыдущую формулу, получаем, что $\forall x, y \in V$

$$(x, y) = (x_a)^t C_{ea}^t G_e C_{ea} (y_a)^t$$

Поэтому матрицы Грама G_a и G_e связаны формулой $G_a = C_{ea}^t G_e C_{ea}$.

Отметим два следствия этой формулы:

3.3.1. Следствие. *Если базис $\{e\}$ ортонормированный, то базис $\{a\}$ тогда и только тогда будет ортонормированным, когда его матрица C_{ea} в базисе $\{e\}$ удовлетворяет соотношению*

$$C_{ea}^t = C_{ea}^{-1}$$

Доказательство. Матрица Грама ортонормированного базиса — единичная, так что по предыдущей формуле $E = C_{ea}^t E C_{ea} = C_{ea}^t C_{ea}$. □

Матрицы, транспонированные к своим обратным, называются *ортогональными*.

3.3.2. Следствие. *При переходе к другому базису определитель матрицы Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода.*

3.4. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Матрицу Грама $G_a = ((a_i, a_j))$ можно рассмотреть для любого набора векторов $\{a_1, \ldots, a_m\}$.

3.4.1. Утверждение. *Определитель матрицы Грама удовлетворяет неравенству*

$$\det((a_i, a_j)) \geqslant 0$$

и равенство равносильно линейной зависимости векторов $(a_1, \ldots, a_m)$

Доказательство. Если векторы линейно зависимы, скажем $a_1 = \sum_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu a_\nu$, то при всех k мы будем иметь $(a_1, a_k) = \sum\limits_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu (a_\nu, a_k)$, т. е. первая строка матрицы Грама G_a будет линейной комбинацией остальных. Поэтому $\det G_a = 0$.

Если векторы линейно-независимы, то они составят базис в своей линейной оболочке W. Ограничивая скалярное произведение на W мы, очевидно, получим опять скалярное произведение. Выбирая в W ортонормированный базис $\{e\}$, будем иметь $\det G_e = \det E = 1$, а значит

$$\det G_a = (\det C_{ea})^2 > 0.$$

□

Частный случай этого неравенства для системы из двух векторов (v, w):

$$\det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = (v,v)(w,w) - (v,w)^2 \geqslant 0$$

в формулировке: *квадрат скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения их скалярных квадратов (причём равенство равносильно пропорциональности векторов)*, известен как *неравенство Коши-Буняковского-Шварца*.

3.4.2. Пример. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^n$ означает, что для любых наборов вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

Аналогично, для функций на отрезке $[a, b]$ получаем

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx$$

3.5. Углы. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца позволяет в евклидовом пространстве определить *угол* φ между векторами v и w как действительное число, удовлетворяющее условию

$$(v, w) = \sqrt{(v, v)(w, w)} \cdot \cos\varphi$$

Такое определение задаёт φ с точностью до замены φ на $-\varphi$ и добавления целых кратных 2π, и для однозначной фиксации можно определить геометрический угол $\varphi_{геом}$ как значение φ, попадающее в отрезок $[0, \pi]$. Заинтересованный читатель без труда проверит, что такое определение угла согласуется со всеми ожидаемыми геометрическими свойствами углов (типа аддитивности).

3.6. Евклидовы метрики.

3.6.1. Лемма. *Формула* $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ *определяет норму на евклидовом пространстве* V.

Доказательство. Положительность, невырожденность и однородность немедленно следуют из свойств скалярного произведения. Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$(\|v\| + \|w\|)^2 = (v, v) + (w, w) + 2\sqrt{(v, v)(w, w)} \geqslant (v, v) + (w, w) + 2(v, w) = \|v + w\|^2 .$$

□

Обратное утверждение, что всякая норма индуцирована некоторым скалярным произведением, *неверно*. Действительно, если $\|v\|^2 = (v, v) \quad \forall v \in V$, то $\forall v, w \in V$ должно выполняться тождество параллелограмма:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

(сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон).

> Задача 3.6. Приведите пример нормы, для которой тождество параллелограмма нарушается.

С другой стороны, если норма $\|\cdot\|$ всё-таки возникает из скалярного произведения, то равенство

$$\|v + w\| - \|v - w\| = 4(v, w)$$

показывает, что скалярное произведение однозначно восстанавливается по норме. Более того, определив для произвольной нормы $\|\cdot\|$ функцию (v,w) правилом

$$(v,w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\| - \|v-w\|\right)\,,$$

мы видим, что эта функция симметрична, положительна и невырождена.

> Задача 3.7. Докажите, что если для $\|\cdot\|$ выполнено тождество параллелограмма, то функция $(\cdot,\cdot)$ будет удовлетворять тождеству $(v_1+v_2,w) = (v_1,w)+(v_2,w)$.

В силу симметрии аналогичное тождество будет справедливо и для второго аргумента. Из этих тождеств следует билинейность функции (v,w) относительно умножения на целые, а стало быть, и рациональные числа. Вследствие непрерывности нормы, функция (v,w) оказывается тогда билинейной и над $\mathbb{R}$.

Таким образом, для того, чтобы *норма была индуцирована скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла тождеству параллелограмма*. При этом скалярное произведение однозначно восстанавливается по норме.

§4. Евклидова геометрия

4.1. Объём. Я напомню, что на последней лекции прошлого семестра было аксиоматически определено понятие *ориентированного объёма* $\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1,v_2,\dots,v_n$. Аксиомы формализовали два геометрических свойства объёма: он должен умножаться на λ при умножении любого из векторов на λ и не должен меняться при параллельном заваливании параллелепипеда на бок (т.е, при замене любого из векторов v_i на его сумму с вектором, пропорциональным какому-либо из оставшихся $v_j\neq v_i$).

Было показано, что такая функция $\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n)$ обязана быть *полилинейной* (т.е. линейной по каждому из v_i) и *кососимметричной* (т.е. менять знак при перестановке аргументов, или, что равносильно, обращаться в нуль, если $v_i=v_j$ для некоторых $i\neq j$). Было показано также, что такие функции составляют *одномерное* векторное пространство и однозначно определяются указанием значения на каком-либо базисе $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ по формуле

$$\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n) = \det C_{e,v}\cdot \mathrm{Vol}(e_1,e_2,\dots,e_n).$$

Таким образом, для фиксации формы объёма на V достаточно указать *эталоннный базис* $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, для которого объём будет единичным. Если пространство V евклидово, то в качестве эталонного базиса выбирают *ортонормированный базис*. Любые два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве связаны при помощи ортогональной матрицы перехода, определитель которй равен либо $+1$, либо -1. В первом случае базисы называются *одинаково ориентированными*, а во втором случае — *противоположно ориентированными*. Форма объёма, таким образом, не изменяется при замене эталонного базиса на базис той же ориентации, и меняет знак при смене ориентации. Абсолютпая величина формы объёма вообще не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса и называется *евклидовым* (неориентированным) *объёмом* параллелепипеда. Мы сохраним для него обозначение $\mathrm{Vol}(v_1,v_2,\dots,v_n)$.

4.1.1. Лемма. *Евклидов объём параллелепипеда, натянутого на n векторов, равен корню из определителя матрицы Грама этой системы векторов*

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sqrt{\det G_v}$$

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно зависимы, то обе части написанного равенства — нулевые. Если $\{v\}$ — базис, то для какого-либо ортонормального базиса $\{e\}$ имеем $\det G_v = (\det C_{ev})^2$ и $\mathrm{Vol}(v) = |\det C_{ev}|$, что и доказывает лемму. □

4.2. Ортогональное проектирование. Пусть $U \subset V$ — подпространство в евклидовом пространстве. Тогда существует и единственен линейный оператор

$$\mathrm{ortpr}_U : V \longrightarrow U : v \longrightarrow \mathrm{ortpr}_U(v),$$

обладающий свойством

$$(v, u) = (\mathrm{ortpr}_U(v), u) \qquad \forall\, v \in V,\ u \in U. \tag{4-2}$$

Единственность такого оператора следует из невырожденности скалярного произведения, ограниченного на подпространство U: если $(u_1, u) = (u_2, u)\ \forall u \in U$, то $(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, откуда $u_1 = u_2$.

> Задача 3.8. Убедитесь аналогичным образом, что произвольное теоретико-множественное отображение ortpr_U, удовлетворяющее равенству (4-2), автоматически будет линейным оператором.

Построение ортогональной проекции ortpr_U аналогично процессу Грама-Шмидта. Для произвольного базиса $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ в подпространстве U положим

$$\mathrm{ortpr}_U(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(v, u_\nu)}{\|u_\nu\|} \cdot u_\nu\,. \tag{4-3}$$

> Задача 3.9. Убедитесь в справедливости равенства (4-2).

Оператор ortpr_U называется оператором *ортогонального проектирования* на подпространство U. Согласно (4-2) он тождественным образом действует на U, а ядром имеет подпространство

$$U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0\ \forall u \in U\},$$

которое называется *ортогональным дополнением* к пространству U в V. Из (4-2) следует также, что для любого вектора $v \in V$ разность

$$v_{U^\perp} \stackrel{\mathrm{def}}{=} v - \mathrm{ortpr}_U(v)$$

лежит в ортогональном дополнении к U. Поскольку $U \cap U^\perp = 0$ (ввиду невырожденности скалярного произведения), мы получаем, что $V = U \oplus U^\perp$, и ortpr_U действительно проектирует V на U вдоль $U^\perp$.

Разложение $v = \mathrm{ortpr}_U(v) + v_{U^\perp}$ называют *ортогональным разложением* вектора v. Из всех точек пространства U конец вектора $\mathrm{ortpr}_U(v)$ является ближайшей точкой к концу вектора v. Действительно, $\forall u \in U$

$$\|v - (\mathrm{ortpr}_U(v) + u)\| =$$
$$= \|v_{U^\perp} - u\| = \sqrt{(v_{U^\perp} - u, v_{U^\perp} - u)} = \sqrt{\|v_{U^\perp}\|^2 + \|u\|^2} \geq$$
$$\|v_{U^\perp}\| =$$
$$= \|v - \mathrm{ortpr}_U(v)\| \,.$$

Вектор $v_{U^\perp}$ можно интерпретировать как *высоту* $(k+1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v,\, u_1, u_2, \dots, u_k$, опущенную из вершины v на грань $(u_1, u_2, \dots, u_k) \subset U$.

Задача 3.10. Докажите, что объём этого $(k+1)$-мерного параллелепипеда равен k-мерному объёму грани $(u_1, u_2, \dots, u_k)$, умноженному на длину опущенной на неё высоты.

Указание: Как мы видели, высоту $v_{U^\perp}$ можно получить, отнимая из v подходящие кратные векторов u_ν. Значит, $\mathrm{Vol}(v,\, u_1, u_2, \dots, u_k\,) = \mathrm{Vol}(v_{U^\perp},\, u_1, u_2, \dots, u_k\,)$. Вычисление последнего объёма при помощи разложения определителя матрицы Грама по первому столбцу и даёт нужную формулу.

4.2.1. Следствие. *Кратчайшее расстояние от конца вектора v до подпространства с базисом $u_1, u_2, \dots, u_k$ равно отношению определителей Грама систем векторов $(v,\, u_1, u_2, \dots, u_k)$ и $(u_1, u_2, \dots, u_k)$.*

Ортогональное проектирование часто возникает в вычислительной математике при приближённом решении некорректных (т.е. несовместных) систем линейных уравнений. Пусть требуется решить систему линейных уравнений, геометрический смысл которой состоит в том, чтобы найти коэффициенты разложения заданного вектора v по некоторой заданной линейно-независимой системе $\{u_1, u_2, \dots, u_\nu\}$, и пусть эта система несовместна, т.е. вектор v на самом деле не лежит в линейной оболочке векторов u_ν. Тогда формула (4-3) даёт наилучшее (в естественном смысле) приближённое решение поставленной задачи, а следствие Сл.4.2.1 позволяет оценить погрешность этого приближения. Описываемый приём известен как *метод наименьших квадратов*.

Задача 3.11. Найдите кубический многочлен от переменной x, интеграл которого по отрезку $[-1, 1]$ был бы наиболее близок к интегралу от функции $\cos(3x)$.

Лекция 4
Собственные векторы и комплексификация

▷Собственные векторы и собственные значения ▷Характеристический многочлен ▷Трансверсальность собственных подпространств ▷Комплексификация и овеществление ▷Вещественная геометрия комплексных собственных векторов ▷Сравнение вещественной и комплексной линейности: условия Коши-Римана ▷Комплексная и вещественная структуры ▷Кватернионы

Основной темой нескольких ближайших лекций будет исследование строения линейных операторов, действующих на фиксированном векторном пространстве, и в частности, приведение операторов к разного рода «стандартным формам» при помощи подходящего выбора базиса. И хотя все эти вопросы могут быть переформулированы в терминах линейных уравнений, которые, казалось бы, одинаково хорошо решаются над любым полем, в случае алгебраически замкнутого поля теория получается гораздо более прозрачной. Причина этого частично прояснится в следующем параграфе.

§1. Собственные векторы

1.1. Проблема диагонализуемости оператора. Безусловно, простейшими линейными операторами на векторном пространстве V над полем k являются гомотетии

$$\lambda E : \ V \longrightarrow V : \ v \mapsto \lambda v \,, \quad \text{где } \lambda \in k \text{ — константа}$$

(здесь и далее через E мы будем обозначать как единичную матрицу, так и тождественный оператор). Следующими по сложности своего устройства являются *диагонализуемые* операторы, которые в некотором базисе записываются диагональной матрицей. Увы, не всякий оператор диагонализуем.

Задача 4.1. Докажите, что оператор d/dx на пространстве многочленов степени $\leq n$ и оператор поворота евклидовой плоскости на угол $\neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не диагонализуемы.

При исследовании диагонализуемости важнейшую роль играет следующее понятие.

1.2. Определение. *Пусть $F: V \longrightarrow V$ — линейный оператор. Ненулевой вектор $v \in V$ называется* собственным *для F, если $Fv = \lambda v$ для некоторого числа $\lambda \in k$, которое называется* собственным значением *оператора F.*

1.3. Характеристический многочлен. Итак, для того, чтобы диагонализовать оператор, мы должны построить в V базис из его собственных векторов. Чтобы выяснить, имеет ли F собственный вектор v с собственным значением λ, выберем в V базис $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и запишем F матрицей F_e. Тогда столбец координат v должен быть нетривиальным решением системы однородных линейных уравнений $F_e v = \lambda v$ или $(\lambda E - F_e)v = 0$. В первом семестре мы видели, что наличие нетривиального решения у такой системы равносильно условию $\det(\lambda E - F_e) = 0$. Функция

$$\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - F_e)$$

является многочленом степени $\dim V$ от t. Он называется *характеристическим многочленом* оператора F, поскольку не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица F_e. В самом деле, если $\tau = eC_{e\tau}$ — другой базис, то $F_\tau = C_{\tau e} F_e C_{e\tau} = C_{e\tau}^{-1} F_e C_{e\tau}$ и

$$\begin{aligned}\det(tE - F_e) &= \\ &= \det(tE - C_{e\tau}^{-1} F_e C_{e\tau}) = \det(C_{e\tau}^{-1}(tE - F_e)C_{e\tau}) = \det C_{e\tau}^{-1} \det(tE - F_e) \det C_{e\tau} = \\ &= \det(tE - F_e)\,.\end{aligned}$$

Мы доказали

1.3.1. Утверждение. *Число $\lambda \in k$ тогда и только тогда является собственным числом оператора F, когда оно является корнем его характеристического многочлена $\chi_F(t)$.*

1.3.2. Следствие. *В пространстве над алгебраически замкнутым полем любой оператор обладает хотя бы одним собственным вектором.*

Поскольку коэффициент σ_k характеристического многочлена

$$\chi_F(t) = \det(tE - F) = \sigma_0 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 + \dots + \sigma_{n-1} t^{n-1} + t^n$$

равен взятой со знаком $(-1)^{n-k}$ сумме всех главных миноров[1] порядка $n - k$ матрицы оператора F, мы получаем, что эта сумма не зависит от выбора базиса, т.е. является инвариантом матрицы оператора. В частности, инвариантом будет *след* оператора F:

$$\operatorname{tr}(F) = \sum f_{\nu\nu} = -\sigma_{n-1}$$

(сумма всех элементов на главной диагонали матрицы $F_e = (f_{ij})$).

Задача 4.2. Докажите, что след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей (иная формулировка: $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0\ \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$).

1.4. Подпространства, порождённые собственными векторами. Подпространство $W \subset V$, которое переходит в себя под действием оператора $F: V \longrightarrow V$, называется *инвариантным подпространством*. В частности, инвариантным будет всякое подпространство W,

[1] Минор называется *главным*, если его главная диагональ находится на главной диагонали матрицы.

порождённое каким-либо набором $v_1, v_2, \ldots, v_m$ собственных векторов оператора F. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения этих векторов, то композиция

$$(F - \lambda_1 E)(F - \lambda_2 E) \cdots (F - \lambda_m E)$$

будет переводить всё W в ноль. Из этого следует, что всякий собственный вектор w оператора F, лежащий в W, может иметь в качестве собственного значения μ лишь одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, т.к.

$$0 = (F - \lambda_1 E)(F - \lambda_2 E) \cdots (F - \lambda_m E)w = (\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2) \cdots (\mu - \lambda_m)w.$$

Тем самым, справедливо

1.4.1. Утверждение. *Набор собственных векторов с попарно разными собственными значениями всегда линейно независим.*

1.4.2. Следствие. *Если характеристический многочлен оператора имеет* $\dim V$ *попарно-разных корней, то оператор диагонализуем.*

Пример тождественного оператора E с $\chi_E(t) = (t-1)^{\dim V}$ показывает, что это условие отнюдь не необходимо.

Все собственные векторы, имеющие одно и то же собственное значение λ составляют, как легко видеть, подпространство в V. Оно называется *собственным подпространством*, отвечающим собственному значению λ, и обозначается V_λ. Из предыдущего вытекает, что сумма всех собственных подпространств является прямой (но, возможно, не совпадает со всем пространством).

1.5. Пример: изометрии трёхмерного евклидова пространства. Линейный оператор в евклидовом пространстве V называется *изометрией*, если он сохраняет длину векторов:

$$||F(v)|| = ||v|| \quad \forall v \in V.$$

Формула $2(v, w) = (||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$ показывает, что изометрия сохраняет не только длину, но и скалярное произведение:

$$(Fv, Fw) = (v, w) \quad \forall v, w \in V,$$

а стало быть, переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис. Поэтому изометрический оператор в ортонормированном базисе задаётся ортогональной матрицей. В частности, определитель изометрии равен либо $+1$, либо -1. В первом случае изометрия называется *собственной*, во втором — *несобственной*.

Если V — двумерная плоскость, то, записывая матрицу изометрии в ортонормальном базисе в виде

$$C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C^{-1} = C^t,$$

в случае $\det C = 1$ находим

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{откуда} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

В случае $\det C = -1$ получаем

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -d & c \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \text{откуда} \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 = 1$$

Полагая $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, мы можем записать эти изометрии, соответственно, матрицами

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Первая из них задаёт поворот, а вторая (см.рис. 4–А) — симметрию относительно бисектриссы угла между векторами e_1 и Fe_1. Следовательно, вторая матрица заменой ортогонального базиса приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в чём можно убедиться и чисто алгебраически — вычисляя характеристический многочлен

$$\chi_F(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

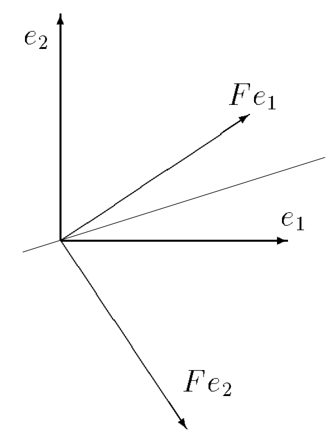


Рис. 4–А. Несобственная изометрия

Мы получаем

1.5.1. Утверждение. *Собственная изометрия плоскости является поворотом, а несобственная — осевой симметрией.*

Поскольку кубический многочлен над полем действительных чисел всегда имеет корень, изометрия трёхмерного пространства обладает собственным вектором e_1 (который можно выбрать с $||e_1|| = 1$), а так как изометрия сохраняет длину, собственное значение у e_1 обязано быть равным ± 1. Плоскость, перпендикулярная e_1 будет переходить в себя (т.к. изометрия сохраняет скалярное произведение), и в ней будет индуцироваться поворот или осевая симметрия. Сопоставление всех этих возможностей друг с другом доказывает

1.5.2. Утверждение. *Ссобственная изометрия трёхмерного пространства является поворотом вокруг некоторой прямой, а несобственная — композицией такого поворота с отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота. В подходящем ортонормальном базисе они могут быть записаны матрицами:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить аналогичные результаты и о других классах пространств и операторов нам надо более внимательно изучить связь между вещественной и комплексной геометрией, чему и будет посвящён остаток лекции.

§2. Комплексификация

Если задана система линейных уравнений с вещественными коэффициентами, то решение этой системы можно искать не только в $\mathbb{R}^n$, но и в $\mathbb{C}^n$, причём в последнем случае при преобразовании уравнений можно пользоваться умножением на комплексные числа. Эта процедура называется *окомплексиванием* векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

2.1. Построение $\mathbb{C} \otimes V$. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим *прямую сумму* $V \oplus V$, т.е. множество пар

$$\{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V\}$$

с покомпонентными операциями сложения и умножения на числа. Вместо (v_1, v_2) мы по традиции будем писать $v_1 + iv_2$, а вместо $V \oplus V$ — $V \oplus iV$, где i — это формальный атрибут, приписываемый к векторам из второго слагаемого для того, чтобы отличать их от векторов из первого слагаемого (подчеркну, что равенство $v_1 + iv_2 = w_1 + iw_2$ означает, по определению, пару равенств $v_1 = w_1$ и $v_2 = w_2$).

Определим теперь на пространстве $V \oplus iV$ умножение на комплексные числа по формуле

$$(x + iy) \cdot (v_1 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (xv_1 - yv_2) + i(yv_1 + xv_2) \in V \oplus iV,$$

где $z = x + iy \in \mathbb{C}, \ v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$.

Задача 4.3. Убедитесь, что такое умножение наделяет $V \oplus iV$ структурой векторного пространства над полем $\mathbb{C}$ (т.е. проверьте выполнение аксиом ассоциативности и дистрибутивности для умножения векторов на комплексные числа).

Пространство $V \oplus iV$, рассматриваемое как пространство над полем $\mathbb{C}$, называется *комплексификацией* вещественного векторного пространства V и обозначается $\mathbb{C} \otimes V$. Векторы $v \in V \subset \mathbb{C} \otimes V$ называются *вещественными*, а векторы вида iv (где $v \in V \subset \mathbb{C} \otimes V$) — *чисто мнимыми*.

2.1.1. Утверждение. *Размерность комплексного векторного пространства $\mathbb{C} \otimes V$ равна размерности вещественного векторного пространства V, и любой базис V над $\mathbb{R}$ будет базисом $\mathbb{C} \otimes V$ над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ составляют базис в V над полем $\mathbb{R}$, то векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n$ составят базис над $\mathbb{R}$ в $V \oplus iV$. Поэтому $\forall w \in V \oplus iV$ существует и единственно разложение

$$w = \sum x^\nu \cdot e_\nu + \sum y^\nu \cdot ie_\nu$$

с вещественными x^ν, y^ν. Но по определению операции умножения на комплексные числа это равносильно существованию и единственности разложения над $\mathbb{C}$:

$$w = \sum (x^\nu + iy^\nu) \cdot e_\nu = \sum z^\nu \cdot e_\nu$$

с $z^\nu = x^\nu + iy^\nu \in \mathbb{C}$. □

Чтобы уточнить, над каким полем вычисляется размерность того или иного пространства, символ этого поля указывают в качестве индекса у dim. К примеру, из предыдущего предложения получаем равенство

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes V).$$

Базисы $\mathbb{C} \otimes V$, происходящие из базисов V, называются *вещественными*. Разумеется, в $\mathbb{C} \otimes V$ имеется много и невещественных базисов (можно даже сказать что «общий» базис является именно невещественным!).

Задача 4.4. Пусть векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ составляют (возможно, невещественный) базис $\mathbb{C} \otimes V$ над $\mathbb{C}$. Докажите, что векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, $iv_1, iv_2, \dots, iv_n$ составят базис $\mathbb{C} \otimes V$ над $\mathbb{R}$.

2.2. Комплексификация оператора. Если $F: V \longrightarrow V$ — линейный оператор, то его можно *продолжить по линейности* до комплексно-линейного оператора

$$F_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C} \otimes V,$$

полагая $F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} F(v_1) + iF(v_2) \in V \oplus iV$.

Задача 4.5. Убедитесь, что $F_{\mathbb{C}}(zw) = zF_{\mathbb{C}}(w) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ и $\forall w \in \mathbb{C} \otimes V$.

2.2.1. Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ и $F = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ — поворот на угол φ. Тогда $\mathbb{C} \otimes V = \mathbb{C}^2$ и в стандартном базисе $F_{\mathbb{C}}$ будет задаваться той же матрицей, что и F. Её характеристический многочлен $\chi_{F_{\mathbb{C}}}(t) = t^2 - 2\cos\varphi \cdot t + 1$ имеет два различных комплексных корня $\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ и $\lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi} = {\lambda_1}^{-1} = \bar{\lambda}_1$, и значит, в $\mathbb{C}^2$ можно выбрать базис, в котором $F_{\mathbb{C}}$ запишется диагональной матрицей $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$.

Задача 4.6. Напишите матрицу координат векторов этого базиса в стандартном базисе $\mathbb{C}^2$.

Этот пример иллюстрирует общий принцип: у комплексифицированного оператора $F_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C} \otimes V$ больше собственных векторов, чем у исходного F на V. Поскольку операторы, обладающие большим количеством собственных векторов, изучать проще, стандартная программа исследования свойств вещественного линейного оператора состоит в том, чтобы сначала изучить свойства его комплексификации, а затем «спустить» их в исходное вещественное пространство. На этом последнем шаге в игру вступает тот факт, что у вещественного оператора характеристический многочлен имеет вещественные коэффициенты, а стало быть его невещественные корни естественно группируются в пары.

2.2.2. Утверждение. *Пусть $F: V \longrightarrow V$ — линейный оператор на вещественном векторном пространстве и $F_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \otimes V \longrightarrow \mathbb{C} \otimes V$ — его комплексификация. Вектор $w = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C} \otimes V$ с $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда будет собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\lambda = a + ib = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$, когда вещественная линейная оболочка векторов v_1, v_2 в V будет инвариантным подпространством для F и действие F на этом подпространстве будет в образующих $\{v_1, v_2\}$ задаваться матрицей*

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Доказательство. По определению $F_{\mathbb{C}}$ имеем:

$$F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = F(v_1) + iF(v_2), \quad \text{где} \quad F(v_1), F(v_2) \in V.$$

Условие, что $v_1 + iv_2$ — собственный записывается в виде:

$$F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2).$$

Сравнивая компоненты вещественного прямого разложения $\mathbb{C} \otimes V = V \oplus iV$, немедленно получаем требуемую эквивалентность.

2.2.3. Следствие. *Всякий линейный оператор в вещественном векторном пространстве обладает двумерным инвариантным подпространством.*

2.2.4. Следствие. *Если вектор $w = v_1 + iv_2$ ($v_1, v_2 \in V$) является собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$, то сопряжённый вектор $\bar{w} = v_1 - iv_2$ также будет собственным для $F_{\mathbb{C}}$ с сопряжённым собственным значением $\bar{\lambda}$. При этом комплексная линейная оболочка векторов w, $\bar{w}$ в $\mathbb{C} \otimes V$ будет совпадать с комплексификацией вещественной линейной оболочки векторов v_1, v_2 в V, а эта последняя будет инвариантным подпространством оператора F.*

2.2.5. Следствие. *Всякое собственное подпространство комплексифицированного оператора, отвечающее вещественному собственному значению, является комплексификацией вещественного собственного пространства той же размерности и с тем же собственным значением у исходного вещественного оператора.*

Задача 4.7. Докажите, что любая изометрия евклидова пространства в подходящем ортонормированном базисе может быть записана блочно-диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\Pi(\varphi_1)} & & & & & & & \\
& \boxed{\Pi(\varphi_2)} & & & & & 0 & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \boxed{\Pi(\varphi_k)} & & & & \\
& & & & \pm 1 & & & \\
& & & & & 1 & & \\
& 0 & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & 1
\end{pmatrix},$$

где знак выбирается в соответствии с тем, является ли изометрия собственной, а через $\Pi(\varphi_\nu)$ обозначены 2×2-матрицы поворотов на углы $0 < \varphi_\nu < 2\pi$.

§3. Овеществление

Посмотрим теперь на предыдущую конструкцию под противоположным углом. Пусть W — n-мерное комплексное пространство. Поскольку $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, возможность умножать векторы пространства W на комплексные числа включает в себя возможность умножать их и на вещественные числа. Если мы примем во внимание только эту последнюю, забыв про умножение на невещественные комплексные числа, то преарвтим W в пространство над полем $\mathbb{R}$, которое называется *овеществлением* комплексного пространства W и обозначается $W_{\mathbb{R}}$. Подчеркну, что оно состоит из физически тех же векторов, что и W, и отличается от W только смыслом, который вкладывается в понятие *линейности* — вместо комплексной линейности мы начинаем рассматривать вещественную линейность.

3.1. Базисы и размерность. Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляли базис W над $\mathbb{C}$, то векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, $ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ составят базис $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Действительно, существование и единственность представления произвольного вектора $w \in W$ в виде

$$w = \sum z^\nu e_\nu$$

с комплексными $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$ равносильны существованию и единственности разложения

$$w = \sum x^\nu e_\nu + \sum y^\nu ie_\nu$$

с вещественными коэффициентами. Таким образом, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W$. Мы будем называть вещественный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, $ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ *ассоциированным* с комплексным базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$.

3.2. Сравнение линейных групп. Все обратимые линейные операторы $F: V \longrightarrow V$, действующие на векторном пространстве V над произвольным полем k, составляют группу, которая называется *полной линейной группой пространства V над полем k* и обозначается $GL_k(V)$ или просто $GL(V)$, если поле нет нужды уточнять. Фиксация в V базиса позволяет сопоставить каждому оператору его матрицу в этом базисе, что задаёт изоморфизм полной линейной группы с группой по умножению невырожденных квадратных матриц размера $n \times n$ (где $n = \dim V$). Эта группа обозначается $GL_n(k)$ или просто GL_n.

Вернёмся вновь к n-мерному комплексному пространству W и фиксируем в нём базис $\{e_\nu\}$ над полем $\mathbb{C}$, отождествив тем самым группу $GL_{\mathbb{C}}(W)$ комплексно-линейных операторов с группой $GL_n(\mathbb{C})$ комплексных невырожденных матриц размера $n \times n$. Аналогично, при помощи ассоциированного вещественного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, $ie_1, ie_2, \dots, ie_n$ отождествим группу $GL_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ обратимых вещественно-линейных операторов с группой $GL_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $2n \times 2n$. Поскольку комплексно-линейные операторы являются также и вещественно-линейными, перезапись комплексного оператора в вещественном базисе определяет инъективный гомоморфизм групп $GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{2n}(\mathbb{R})$. Опишем образ этого гомоморфизма. Пусть $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W)$ задаётся в комплексном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ комплексной матрицей $Z = (z^\mu_\nu) = (x^\mu_\nu + iy^\mu_\nu) = X + iY$, где $X = (x^\mu_\nu)$, $Y = (y^\mu_\nu)$ — вещественные $n \times n$-матрицы. Тогда

$$F(e_\nu) = \sum z^\mu_\nu e_\mu = \sum x^\mu_\nu e_\mu + \sum y^\mu_\nu ie_\mu,$$

и, вследствие комплексной линейности F, $F(ie_\nu) = iF(e_\nu) = \sum -y^\mu_\nu e_\mu + \sum x^\mu_\nu ie_\mu$. Тем самым, переразложение комплексно-линейного оператора по вещественному базису будет блочной $2n \times 2n$-матрицей из $n \times n$-блоков

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \tag{3-1}$$

Задача 4.8. Проверьте, что и наоборот, всякий вещественно-линейный оператор такого вида перестановочен с умножением на комплексные числа.

Мы получаем

3.2.1. Утверждение. *Вещественно-линейный оператор на овеществлённом комплексном пространстве тогда и только тогда является образом комплексно-линейного, когда его матрица в вещественном базисе, ассоциированном с некоторым комплексным базисом, имеет* *блочный вид (3-1), при этом соответствующий комплексный оператор в комплексном базисе будет задаваться матрицей $X + iY$.*

3.3. Пример: условия Коши-Римана. Пусть $W = \mathbb{C}$. Тогда $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ и вещественным базисом, ассоциированным с комплексным базисом $\{1\} \subset \mathbb{C}$ будет базис $\{1, i\}$. Комплексно-линейные операторы в этом тривиальном случае — это в точности операторы умножения на какое либо комплексное число $z = a + ib$. В вещественном базисе такие (и только такие) операторы записываются матрицами

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Всякая функция $f : \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ может быть описана на двух языках. Либо как функция $w = f(z)$ одной комплексной переменной, либо (после разделения вещественных и мнимых частей у $w = u + iv$ и $z = x + iy$) как пара функций

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

пары вещественных переменных.

Функция называется *комплексно-дифференцируемой*, если её приращение (как функции от одной комплексной переменной) приближается с точностью до высшего порядка малости комплексно-линейным оператором от приращения аргумента.

Вещественно-дифференцмруемое отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ (задаваемое парой функций от пары вещественных переменных) определяется аналогично, только линейность приращения при этом имеется в виду вещественная.

Несложно проверить, что операторы, задающие линейную часть приращения, имеют в этих двух случаях, соответственно, вид

$$\Delta z \longmapsto \frac{df}{dz} \cdot \Delta z \qquad \text{и} \qquad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

В анализе доказывается также, что если все четыре частные производные из правого соотношения существуют и непрерывны в некоторой области, то функция будет в этой области вещественно дифференцируемой. Сопоставляя это с предыдущими наблюдениями о матрицах комплексно-линейных операторов, мы заключаем, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций от пары вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно-дифференцируемую функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, когда выполняются *дифференциальные уравнения Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

§4. Комплексная и вещественная структуры

4.1. Вещественная структура. Пусть W — n-мерное пространство над полем $\mathbb{C}$. Если оно получено как результат комплексификации некоего вещественного векторного пространства

V, то на нём имеется дополнительная структура: его овеществление $W_{\mathbb{R}}$ разложено в прямую сумму вещественных векторных подпространств $W = V \oplus iV$. Наличие такого разложения иногда бывает удлбно переформулировать в терминах наличия на W линейного оператора со специальными свойствами.

4.1.1. Утверждение. *Для задания на комплексном векторном пространстве структуры комплексифицированного вещественного векторного пространства необходимо и достаточно указать такой вещественно-линейный оператор $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}})$, который бы удовлетворял условиям $\sigma^2 = E$ и $\sigma(iw) = -i\sigma(w)$.*

Терминологическое эамечание. В сочетании с вещественной линейностью последнее соотношение означает, что $\sigma(zw) = \bar{z}\sigma(w)\ \forall z \in \mathbb{C}$. Это свойство называется *комплексной антилинейностью*. Оператор σ, удовлетворяющий условиям предложения, называется *оператором вещественной структуры* (или просто *вещественной структурой*) на комплексном пространстве W.

Доказательство. Если $W = \mathbb{C} \otimes V = V \oplus iV$, то в качестве σ надо взять оператор комплексного сопряжения векторов: $\sigma: \ v_1 + iv_2 \longmapsto v_1 - iv_2 \quad \forall v_1, v_2 \in V$.

Обратно, если на $W_{\mathbb{R}}$ имеется оператор σ с квадратом единица, то пространство $W_{\mathbb{R}}$ как вещественное пространство разлагается в прямую сумму вещественных подпространств

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}}^{+} &= \{w \in W_{\mathbb{R}} \mid \sigma w = w\} \\ W_{\mathbb{R}}^{-} &= \{w \in W_{\mathbb{R}} \mid \sigma w = -w\}, \end{aligned}$$

которые являются собственными подпространствами для σ, отвечающими собственным значениям ± 1. Действительно, эти подпространства пересекаются только по нулю, а их сумма порождает всё $W_{\mathbb{R}}$, т.к. любой вектор $w \in W_{\mathbb{R}}$ представим в виде $w = w_{+} + w_{-}$ с

$$w_{+} = \frac{w + \sigma w}{2} \in W_{\mathbb{R}}^{+} \quad \text{и} \quad w_{-} = \frac{w - \sigma w}{2} \in W_{\mathbb{R}}^{-}.$$

> Задача 4.9. Докажите, что точно такое же разложение имеется для любого оператора с квадратом единица, действующего в любом векторном пространстве над любым полем, характеристка которого отлична от 2.

Далее, из условия $\sigma(iw) = -i\sigma(w)$ следует, что $w \in W_{\mathbb{R}}^{+}$ тогда и только тогда, когда $iw \in W_{\mathbb{R}}^{-}$. Действительно:

$$\sigma(iw) = -i\sigma(w) = -iw \Longleftrightarrow \sigma(w) = w.$$

Значит, $W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}}^{+} \oplus iW_{\mathbb{R}}^{+}$, что и требовалось. □

4.2. Комплексная структура. Пусть теперь V — вещественное пространство, которое является овеществлением некоего комплексного пространства W. Такое пространство также обладает специальными свойствами, и это тоже можно сформулировать на операторном языке.

4.2.1. Утверждение. *Для того, чтобы на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ задать структуру комплексного векторного пространства, овеществлением которого оно является, необходимо и достаточно задать на V вещественно-линейный оператор I с $I^2 = -E$.*

Доказательство. Если $V = W_{\mathbb{R}}$ для некоторого векторного пространства W над полем $\mathbb{C}$, то в качестве оператора I выступает оператор умножения на комплексное число i.

Обратно, если задан $\mathbb{R}$-линейный оператор $I: \ V \longrightarrow V$ с $I^2 = -E$, то можно определить операцию умножения векторов из V на комплексные числа формулой $(x+iy)v \stackrel{\text{def}}{=} xv + yI(v)\ \forall v \in V$.

Проверка аксиом умножения векторов на числа делается непосредственно. Дистрибутивность и действие единицы очевидны, а ассоциативность доказывается выкладкой:

$$\begin{aligned}
z_1(z_2v) &= \\
&= (x_1+iy_1)(x_2v+y_2I(v)) = x_1x_2v + x_1y_2I(v) + y_1x_2I(v) + +y_1y_2I^2(v) = \\
&= (x_1x_2-y_1y_2)v + (y_1x_2+x_1y_2)I(v) = \Big((x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)\Big)I(v) = \\
&= (z_1z_2)v
\end{aligned}$$

Таким образом, V становится комплексным векторным пространством, а исходная структура пространства над полем $\mathbb{R}$ может быть получена как результат овеществления этого комплексного пространства. □

Оператор $I: \ I^2 = -E$ называется *оператором комплексной структуры* (или просто *комплексной структурой*) на вещественном векторном промтранстве V.

Задача 4.10. Докажите, что вещественно-линейный оператор на вещественном пространстве с комплексной структурой тогда и только тогда будет комплексно-линейным, когда он перестановочен с оператором комплексной структуры.

§5. Кватернионы

На вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ существует бесконечное семейство комплексных структур, параметризуемое точками стандартной двумерной сферы. Эти структуры красивейшим образом согласованы между собой в одну *гиперкомплексную* или так называемую *кватернионную* структуру.

5.1. Кватернионное умножение. Обозначим стандартные базисные векторы координатного вещественного пространства $\mathbb{R}^4$ через $1, i, j, k$, так что векторы $\mathbb{R}^4$ будут записываться в виде:

$$q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k.$$

Мы собираемся ввести на векторах q умножение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ так, чтобы оно было $\mathbb{R}$-билинейным оператором, т.е. удовлетворяло соотношениям

$$\begin{aligned}
&(\lambda q_1)q_2 = q_1(\lambda q_2) = \lambda(q_1q_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{R}^4 \\
&\left.\begin{aligned} (q_1+q_2)q_3 &= q_1q_3 + q_2q_3 \\ q_1(q_2+q_3) &= q_1q_2 + q_1q_3 \end{aligned}\right. \qquad \forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}^4.
\end{aligned}$$

Такое умножение однозначно определяется заданием девяти попарных произведений базисных векторов между собой. Мы определим их так, чтобы вектор 1 был двусторонней единицей для конструируемого умножения, квадраты остальных трёх базисных векторов были бы равны -1:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

а попарные произведения были бы кососимметричны и вычислялись по правилам:

$$\begin{array}{ccccccccc} ij & = & k & jk & = & i & ki & = & j \\ ji & = & -k & kj & = & -i & ik & = & -j \end{array}$$

(для их запоминания удобно ввести на множестве $\{i, j, k\}$ циклический порядок:

$$\cdots j < k < i < j < k < i < j \cdots;$$

тогда произведение двух соседних букв равно следующей за ними со знаком «+», если первый сомножитель меньше второго, и со знаком «−» — в противном случае).

Продолжая эти правила по вещественной билинейности, мы получаем для произвольных двух

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad \text{и} \quad p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

следующую формулу для их произведения:

$$\begin{aligned} p \cdot q = \ & (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \ + \\ & + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\, i \ + \\ & + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\, j \ + \\ & + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\, k \end{aligned} \tag{5-2}$$

5.2. Определение. *Введённая только что операция на векторах $\mathbb{R}^4$ называется кватернионным умножением, а сами векторы — кватернионами.*

При рассмотрении кватернионов вместо $\mathbb{R}^4$ используется обозначение $\mathbb{H}$.

5.2.1. Ассоциативность и дистрибутивность. Из формул (5-2) видно, что как левое так и правое умножения на фиксированный кватернион являются линейным оператором на $\mathbb{R}^4$, из чего вытекает дистрибутивность умножения по отношению к сложению. Кватернионное умножение также ассоциативно. Благодаря билинейности проверка ассоциативности сводится к проверке ассоциативности перемножения базисных кватернионов, которую нетрудно сделать непосредственно.

Задача 4.11. Обязательно проделайте эту проверку!

5.3. Норма и сопряжение. Кватернионы из линейной оболочки векторов $i, j.k$ называются *чисто мнимыми*, а кватернионы, пропорциональные 1 — *вещественными*. Произвольный кватернион однозначно представляется в виде суммы вещественного и чисто мнимого кватернионов, называемых его вещественной и мнимой частями. Вещественно-линейный оператор, меняющий знак у всех мнимых кватернионов называется *кватернионным сопряжением* и обозначается чертой сверху, так что

$$\overline{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k} \stackrel{\text{def}}{=} q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k.$$

Легко усмотреть, что одновременная смена знака у p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 в формулах (5-2) равносильна перемене букв p и q между собой и смене знака у мнимой части произведения. Это выражается формулой

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = \overline{qp}.$$

Тем самым, сопряжение является *антигомоморфизмом* по отношению к умножению кватернионов, т.е. переводит произведения в произведения, вычисляемые в противоположнои порядке.

Из написанной формулы следует, что кватернион $q \cdot \bar{q}$ не меняется при сопряжении: $\overline{q \cdot \bar{q}} = \bar{\bar{q}} \cdot \bar{q} = q \cdot \bar{q}$, а стало быть, является вещественным при любом $q \in \mathbb{H}$. Вычисляя вещественную часть $q \cdot \bar{q}$ по формуле (5-2), получаем: $q \cdot \bar{q} = \mathrm{Re}(q \cdot \bar{q}) = \sum q_\nu^2 = ||q||$, где под нормой понимается стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^4$. Из сказанного вытекает

5.3.1. Утверждение. *Стандартная евклидова норма на $\mathbb{R}^4$ мультипликативна относительно кватернионного умножения:* $||pq|| = ||p|| \cdot ||q|| \quad \forall p, q \in \mathbb{H}$.

Доказательство. $||pq||^2 = pq \cdot \overline{pq} = pq\bar{q}\bar{p} = p\,||q||^2\,\bar{p} = ||p||^2\,||q||^2$. □

5.3.2. Следствие. (Тождество Эйлера)

$$\begin{aligned}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \quad & (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 + \\ + \; & (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 + \\ + \; & (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)^2 + \\ + \; & (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)^2\end{aligned}$$

Тождество Эйлера играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, поскольку редуцирует её к задаче о представимости простых чисел.

5.4. Деление. Множество, на элементах которого определены две бинарные операции (сложение и умножение), называется *телом*, если эти операции удовлетворяют всем аксиомам поля, за исключением коммутативности умножения[2].

Мы уже видели, что умножение кватернионов ассоциативно, дистрибутивно и обладает единицей. Из предыдущего предложения вытекает, что у каждого кватерниона $q \neq 0$ имеется двусторонний обратный

$$q^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{||q||^2} \cdot \bar{q}.$$

Мы получаем

5.4.1. Следствие. *Множество кватернионов $\mathbb{H}$ с операциями сложения векторов и кватернионного умножения является телом.*

Задача 4.12. Сколько решений имеет в $\mathbb{H}$ уравнение $q^2 = -1$?

Задача 4.13. Убедитесь, что оператор умножения на любой мнимый кватернион с нормой единица является оператором комплексной структуры.

Задача 4.14. Убедитесь, что $\mathbb{H}$ может быть определено как множество формальных записей вида $q = z + wj$, где $z, w \in \mathbb{C}$, а умножение определяется по обычным правилам раскрытия скобок с учётом равенств:

$$j^2 = -1 \qquad \text{и} \qquad zj = j\bar{z} \;\forall z \in \mathbb{C}.$$

---

[2]Говоря точнее, требуется, чтобы сложение удовлетворяло обычным аксиомам сложения векторов, а умножение было бы ассоциативно, возможно, некоммутативно, но аксиомы дистрибутивности, существования единицы и существования обратного элемента выполняются как для умножения на произвольный элемент слева так и для умножения справа.

Лекция 5
Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением

▷Эрмитовы пространства ▷Эрмитова геометрия ▷Нормальные операторы в эрмитовом и в евклидовом пространстве ▷Самосопряжённость, антисамосопряжённость и изометричность ▷Собственные подпространства коммутирующих операторов ▷Другие приложения леммы о коммутирующих операторах

§1. Эрмитовы пространства

В этой лекции мы изучим строение некоторых естественных классов операторов на евклидовом пространстве. При этом мы будем следовать намеченной в прошлой лекции схеме рассуждений: сначала исследуем строение комплексифицированных операторов, а затем спустим эти свойства в исходное вещественное пространство.

1.1. Комплексификация евклидова пространства. Пусть V — евклидово пространство, и $\mathbb{C} \otimes V = V \oplus iV$ — его комплексификация. Нам бы хотелось комплексифицировать также и евклидову структуру на V до некоторого "скалярного произведения" на $\mathbb{C} \otimes V$. Если воспользоваться тем же приёмом, что и при комплексификации линейного оператора, т.е. продолжить форму (v, w) на векторы вида $v_1 + iv_2$ по комплексной билинейности, полагая:

$$(v_1 + iv_2, w_1 + iw_2)_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, w_1) - (v_2, w_2) + i\Big((v_1, w_2) + (v_2, w_1)\Big),$$

то получится симметричная комплексно-билинейная форма $(*, *)_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C} \otimes V$, называемая *комплексификацией* исходной вещественной билинейной формы на V. Увы, эта форма не обладает свойствами скалярного произведения: скалярные квадраты комплексных векторов будут, как правило, невещественны, а у чисто мнимых векторов вещественны, но отрицательны!

Задача 5.1. Убедитесь, что над полем комплексных чисел не существует положительно определённых билинейных форм.

Тем самым, комплексно-билинейные формы не пригодны для того, чтобы определить метрику на $\mathbb{C} \otimes V$ и заниматься в этом пространстве ортогональной геометрией. Чтобы обойти эту неприятность, евклидову форму продолжают по первому аргументу линейно, а по второму — *антилинейно*, т.е. так, чтобы мнимая единица выносилась из второго аргумента со знаком минус. Получающаяся при таком продолжени форма на $\mathbb{C}\otimes V$ обозначается также, как и исходное скалярное произведение. Итак, мы полагаем:

$$(v_1+iv_2, w_1+iw_2) \stackrel{\text{def}}{=} (v_1,w_1)+(v_2,w_2)+i\Big((v_2,w_1)-(v_1,w_2)\Big).$$

Задача 5.2. Убедитесь, что построенная форма обладает следующими свойствами:
(i) вещественная билинейность
(ii) $(zv,w)=z(v,w)=(v,\bar z w)\quad \forall z\in\mathbb{C}\ \ \forall v,w\in\mathbb{C}\otimes V$
(iii) $(v,w)=\overline{(w,v)}\quad \forall v,w\in\mathbb{C}\otimes V$
(iv) $(v,v)\in\mathbb{R}$ и *положительно* для любого ненулевого $v\in\mathbb{C}\otimes V$

Свойства (i) и (ii) в совокупности называются *комплексной полуторалинейностью*, свойство (iii) — *эрмитовой симметричностью* (или просто *эрмитовостью*), свойство (iv) — *положительной определённостью.*

1.2. Определение. *Векторное пространство W, над полем комплексных чисел называется эрмитовым, если на нём фиксирована полуторалинейная положительно-определённая эрмитово симметричная форма $(v,w):\ W\times W\longrightarrow\mathbb{C}$.*

Эта форма называется *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой*.

1.2.1. Примеры Если $V=\mathbb{R}$ со стандартной евклидовой структурой $(x,y)=\sum x^\nu y^\nu$, то эрмитовым продолжением этой структуры на $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}^n$ будет форма, действующая на столбцы комплексных чисел w,z по правилу:

$$(w,z)=\sum w^\nu \bar z^\nu$$

Она называется *стандартной эрмитовой структурой* на $\mathbb{C}^n$.

Если V — это пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(t)g(t)dt,$$

то $C\otimes V$ естественно отождествляется с пространством *комплекснозначных* непрерывных функций $[a,b]\mapsto\mathbb{C}$, а эрмитово продолжение скалярного произведения задаётся формулой

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Наличие эрмитовой формы позволяет развить на *комплексном* векторном пространстве ортогональную и метрическую геометрию, вполне аналогичную евклидовой. Опишем вкратце её основные понятия.

1.3. Матрицы Грама. Эрмитова структура на пространстве, порождённом векторами $v_1,v_2,\dots,v_m$, вполне определяется (как и евклидова) заданием *матрицы Грама* $G_v=((v_i,v_j))$. Такая матрица обязательно *эрмитово-симметрична*, т.е. удовлетворяет равенству

$$G_v^t=\bar G_v$$

(где черта означает комплексное сопряжение всех элементов).

Задача 5.3. Проверьте, что если (z) и (w) — это столбцы коэффициентов разложения векторов по образующим $v_1, v_2, \ldots, v_m$, то скалярное произведение (z, w) вычисляется по формуле $(z, w) = (z)^t G_v(\bar{w})$.

Задача 5.4. Пусть некий набор векторов $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s)$ связан с неким другим набором векторов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$ по формуле $\tau = vC_{v\tau}$. Выведите из предыдущей задачи, что $G_\tau = C^t_{v\tau} G_v \bar{C}_{v\tau}$ю

1.4. Ортогонализация. Базис $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ эрмитова пространства называется *ортонормированным*, если его матрица Грама единичная: $G_e = E$, т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Задача 5.5. Докажите, что координаты z^j вектора v в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ можно вычислять по формулам $z^j = (v, e_j) = \overline{(e_j, v)}$.

Процесс Грама-Шмидта дословно переносится в эрмитово пространство и позволяет модифицировать произвольный базис $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ в ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ так, что линейная оболочка первых k базисных векторов в обоих базисах будет одинакова при всех $k = 1, \ldots, n$.

Как и в евклидовой геометрии, отсюда сразу получается

1.4.1. Утверждение. *Определитель Грама* $\det G_v$ *является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль тогда и только тогда, когда набор* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ *линейно-зависим.*

Для доказательства достаточно заметить, что строки матрицы Грама линейно-зависимого набора векторов будут также линейно зависимы, а определитель матрицы Грама линейно независимого набора равен *квадрату модуля* $|\det C_{ev}|^2 = \det C_{ev} \cdot \det \bar{C}_{ev}$ определителя матрицы перехода от этого набора v к ортонормированному набору e.

1.5. Эрмитова метрика. Положительность определителя Грама в случае набора из двух векторов v, w приводит к эрмитову неравенству Буняковского-Коши-Шварца

$$|(v, w)|^2 \leqslant (v, v) \cdot (w, w),$$

из которого той же выкладкой, что и в евклидовом случае, выводится неравенство треугольника

$$\sqrt{(v, v)} + \sqrt{(w, w)} \geq \sqrt{(v + w, v + w)}.$$

Задача 5.6. Убедитесь в этом и докажите, что формула $||v|| = \sqrt{(v, v)}$ определяет норму на эрмитовом пространстве.

Метрика, индуцированная этой нормой, называется *эрмитовой метрикой*. Соотношения

$$(v + w, v + w) = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\mathrm{Re}(v, w)$$

$$(v + iw, v + iw) = ||v||^2 + ||w||^2 - 2i\mathrm{Im}(v, w)$$

показывают, что скалярное произведение однозначно восстанавливается по индуцированной им метрике по формуле

$$2(v, w) = ||v + w||^2 - ||v + iw||^2$$

1.6. Углы. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца позволяет определить *угол между комплексными прямыми* в эрмитовом пространстве как единственное $\varphi \in [0; \pi/2]$:

$$\cos\varphi = \frac{|(v,w)|}{||v|| \cdot ||w||}.$$

Здесь мы сталкиваемся с важным отличием комплексной эрмитовой геометрии от вещественной евклидовой. В евклидовом пространстве формула $\cos\varphi = \dfrac{(v,w)}{||v|| \cdot ||w||}$ в действительности определяет *ориентированный угол* между *ориентированными прямыми*.В самом деле, в её правой части стоит скалярное произведение нормированных направляющих векторов $u/\,||u||$ и $v/\,||v||$, задающих не только прямые, но и ориентацию на них, ибо на вещественной прямой единичный направляющий вектор можно выбрать двумя способами (что и называется фиксацией ориентации). При смене ориентации одной из прямых скалярное произведение меняет знак, что геометрически выражается в переходе от одного угла между двумя пересекающимися вещественными прямыми к *смежному* с ним углу.

В комплексной геометрии дело обстоит совершенно иначе. Направляющие векторы длины 1 на комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ заполняют единичную окружность S^1 и выбор одного из них не определяет никакой "комплексной ориентации" в том смысле, что переходу к другому направляющему вектору нельзя приписать никакого знака, как в вещественном случае. Поэтому угол между комплексными прямыми — величина *неориентированная* (и никаких смежных углов в эрмитовой геометрии нет).

По той же причине и изометрии многомерных эрмитовых пространств нельзя разделить на собственные и несобственные.

1.7. Изометрии. Линейный оператор $F: \ W \longrightarrow W$ на эрмитовом пространстве W называется *изометрией*, если он сохраняет эрмитову метрику: $||Fw|| = ||w|| \ \forall w \in W$.

Изометрия автоматически сохраняет и скалярное произведение: $(Fv, Fw) = (v,w) \ \forall v, w \in W$, а потому задаётся в ортонормированном базисе матрицей F_e со свойством

$$F_e^t \bar{F}_e = E \qquad \text{или} \qquad F_e^{-1} = \bar{F}_e^t.$$

Такие матрицы называются *унитарными*.

> Задача 5.7. Убедитесь, что унитарные матрицы размера $n \times n$ составляют группу по умножению.

Эта группа называется *унитарной группой* и обозначается U_n. Унитарные матрицы $C \in U_n$, подобно ортогональным, удовлетворяют условию $|\det C| = 1$. Однако, в отличие от вещественного случая, в комплексном случае это условие *не разбивает* изометрии на два класса.

> Задача 5.8. Докажите, что U_n составляет компактное связное подмножество в $Mat_n(\mathbb{C})$.
>
> Указание: если эта задача не получилась «с ходу», вернитесь к ней после того, как прочитаете до конца эту и следующую лекции.

1.8. Объём. Если приписать произвольному ортонормированному базису *объём* 1, то, как и в евклидовом случае, в эрмитовом пространстве однозначно зафиксируется (комплекснозначная) *форма объёма*. Её *модуль* не будет зависеть от выбора ортонормированного базиса и определит вещественнозначный *неориентированный объём* параллелепипедов в W, который будет удовлетворять всем стандартным аксиомам.

1.9. Ортогоналы. Как и в евклидовом пространстве, два подпространства $U_1, U_2 \subset W$ называются *ортогональными*, если $(u_1, u_2) = 0\ \forall u_1 \in U_1$ и $\forall u_2 \in U_2$. Поскольку $(u_1, u_2) = \overline{(u_2, u_1)}$, условие ортогональности симметрично.

Если пространства $U_1, U_2, \dots, U_m$ попарно-ортогональны, то сумма $U_1 + U_2 + \dots + U_m$ автоматически является прямой, ибо $u \in U_i \cap U_j \Longrightarrow (u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0$.

Для любого подпространства $U \subset W$ множество векторов

$$U^\perp = \{w \in W \mid (u, w) = 0\ \forall u \in U\}$$

составляет подпространство в W, ортогональное к U. Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_m$ составляют базис в U, то $\forall w \in W$ *ортогональная проекция*

$$\mathrm{ortpr}_U(w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum \frac{(w, u_\nu)}{||u_\nu||} \cdot u_\nu$$

не зависит от выбора базиса u_ν, поскольку является единственной ближайшей к концу вектора w точкой из U. Вектор $w - \mathrm{ortpr}_\nu(w)$ ортогонален к U, откуда как и в евклидовом случае, следует, что $W = U \oplus U^\perp$.

Задача 5.9. Докажите, что оператор ortpr_U однозначно определяется соотношением

$$(w, u) = (\mathrm{ortpr}_U(w), u) \quad \forall u \in U\ \forall w \in W.$$

Задача 5.10. Докажите, что $U^{\perp\perp} = U$.

§2. Нормальные операторы.

Условимся под *пространством со скалярным произведением* понимать либо евклидово пространство, либо эрмитово пространство. Скалярное произведение мы в обоих случаях обозначаем $(*, *)$. Излагаемая далее теория может быть параллельно развита как в евклидовом, так и в эрмитовом случае. Наши формулы будут писаться для эрмитова случая, поскольку евклидов случай можно рассматривать как частный случай эрмитова: всегда можно рассмотреть евклидово пространство как вещественное подпространство в эрмитовом, полученном в результате его комплексификации. Однако читателю настоятельно рекомендуется самостоятельно провести все рассуждения для евклидова пространства независимо от эрмитовой теории.

2.1. Сопряжённый оператор. Оператор $F^* : W \longrightarrow W$ на эрмитовом пространстве называется сопряжённым к оператору $F : W \longrightarrow W$, если $\forall v, w \in W$ выполнено равенство

$$(F^* v, w) = (v, Fw).$$

Строго говоря, термин “сопряжённый оператор” уже использовался нами в первой лекции в другом смысле. Однако, такова традиция, и мы будем ей следовать. В этой лекции это не приведёт к путанице, поскольку сопряжённые в смысле первой лекции операторы нам ни разу не встретятся, а через лекцию мы увидим, что оба понятия сопряжённости совпадают при более широком взгляде на вещи.

Устраним для начала кажущийся произвол в выборе между левым и правым сомножителем в определении сопряжённого оператора (к одному из них применяется F, к другому F^*). В евклидовом пространстве равносильность написанной выше формулы формуле

$$(Fv, w) = (v, F^*w).$$

следует из симметричности скалярного произведения, а в эрмитовом — проверяется выкладкой

$$(Fv, w) = \overline{(w, Fv)} = \overline{(F^*v, w)} = (v, F^*w).$$

2.1.1. Лемма. *Всякий оператор в пространстве со скалярным произведением обладает и притом единственным сопряжённым.*

Доказательство. Рассмотрим эрмитов случай. Пусть $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в W с матрицей Грама G_e и $(v), (w)$ — столбцы координат векторов $v, w \in W$. Условие $(F^*v, w) = (v, Fw)$ записывается матричным соотношением

$$(v)^t F_e^{*t} G_e(\bar{w}) = (v)^t G_e \bar{F}_e(\bar{w}),$$

выполнение которого для любых $v, w \in W$ равносильно равенству $F_e^{*t} G_e = G_e \bar{F}_e$, из которого матрица F_e^* однозначно выражается через F_e:

$$F_e^* = G_e^{t\,-1} \bar{F}_e^t G_e^t \tag{2-1}$$

Евклидов случай аналогичен.

> Задача 5.11. Убедитесь, что в евклидовом случае матрица сопряжённого оператора выражается через матрицу исходного оператора и матрицу Грама по формуле
>
> $$F_e^* = G_e^{t\,-1} F_e^t G_e^t$$

□

Из написанных выше формул вытекает, в частности, что в ортонормированном базисе сопряжённый оператор задаётся матрицей, которая комплексно-сопряжена к транспонированной матрице исходного оператора (в евклидовом случае слова о комплексной сопряжённости можно опустить).

2.1.2. Утверждение. *Отображение: $F \mapsto F^*$ является антилинейным антигомоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебры $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W)$, причём его квадрат равен единице: $F^{**} = F$.*

Доказательство. $\mathbb{C}$-антилинейность

$$(z_1F_1 + z_2F_2)^* = \bar{z}_1F_1^* + \bar{z}_2F_2^*$$

следует прямо из формулы (2-1). Равенство $F^{**} = F$ и $(FG)^* = G^*F^*$ также можно непосредственно проверить при помощи этой формулы, но проще воспользоваться определением (и единственностью):

$$(FGv, w) = (Gv, F^*w) = (v, G^*F^*w)$$

означает, что $(FG)^* = G^*F^*$, а равенство $F^{**} = F$ есть лишь переформулировка того, что условия $(Fv, w) = (v, F^*w)$ и $(F^*v, w) = (v, Fw)$ равносильны. □

Задача 5.12. Как переформулировать это предложение в евклидовом случае?

2.1.3. Следствие. *Оператор сопряжения $F \mapsto F^*$ определяет вещественную структуру на пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W)$, т.е. разложение*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W) = \mathrm{Hom}^+_{\mathbb{C}}(W, W) \oplus \mathrm{Hom}^-_{\mathbb{C}}(W, W),$$

где

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^+_{\mathbb{C}}(W, W) &= \{F \mid F^* = F\} \\ \mathrm{Hom}^-_{\mathbb{C}}(W, W) &= \{F \mid F^* = -F\} = i\mathrm{Hom}^+_{\mathbb{C}}(W, W) \end{aligned}$$

являются вещественными подпространствами в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W)$

Операторы из Hom^+ и Hom^- называются, соответственно *самосопряжёнными* и *антисамосопряжёнными* (или *кососимметричными*). Явно разложение любого оператора в сумму само- и антисамосопряжённого даётся формулой:

$$F = \frac{F + F^*}{2} + \frac{F - F^*}{2}.$$

В ортонормированном базисе самосопряжённые операторы задаются *эрмитово симметричными* матрицами (т. е. такими, что $M^t = \bar{M}$), а антисамосопряжённые — *эрмитово кососимметричными* матрицами (т. е. такими, что $M^t = -\bar{M}$).

Задача 5.13. Убедитесь, что тип симметрии матрицы изменяется на противоположный при умножении всех её элементов на i.

Задача 5.14. Докажите, что пространство линейных операторов на евклидовом пространстве также является прямой суммой подпространства самосопряжённых и подпространства антисамосопряжённых операторов, причём первые задаются в ортонормированном базисе симметричными относительно главной диагонали матрицами, а вторые — кососимметричными (т.е. меняющими знак при транспонировании).

2.1.4. Пример. В терминах операции $*$ *изометрии* эрмитова пространства можно характеризовать как *невырожденные операторы, сопряжённые своему обратному*: $F^* = F^{-1}$. В самом деле, если $F^* = F^{-1}$, то полагая в

$$(Fv, , w) = (v, F^*w) = (v, F^{-1}w)$$

вектор w равным $w = Fu$, получим, что $\forall u, v \quad (Fv, Fu) = (v, u)$. Наоборот, поскольку всякая изометрия невырождена, в равенстве $(Fv, Fw) = (v, w)$ можно взять $w = F^{-1}u$ и получить $(Fv, u) = (v, F^{-1}u) \quad \forall v, u$, откуда $F^{-1} = F^*$.

2.1.5. Пример. Пусть V — пространство бесконечно гладких функций на отрезке $[a, b]$, зануляющихся на концах отрезка вместе со своими производными. Введём на V евклидову структуру по формуле

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt,$$

и вычислим оператор, сопряжённый к $\frac{d}{dt}: \ f \longrightarrow f'$. Интегрируя по частям, находим

$$(\frac{d}{dt}f, g) = \int\limits_a^b f' g dt = -\int\limits_a^b f g' dt = (f, -\frac{d}{dt}g).$$

Тем самым оператор дифференцирования антисамосопряжён. Легко видеть, что оператор умножения на фиксированную функцию — самосопряжён. Поскольку сопряжение является антигомоморфизмом алгебры операторов, то, к примеру, оператор, сопряжённый оператору

$$t^3\frac{d^2}{dt^2}: \ f(t) \mapsto t^3 f''(t)$$

будет действовать по правилу $\left[t^3\frac{d^2}{dt^2}\right]^*: \ f(t) \mapsto \left(t^3 f(t)\right)'' = [t^3\frac{d^2}{dt^2} + 6t^2\frac{d}{dt} + 6t]f(t)$.

Задача 5.15. В условиях примера вычислите L^* для

$$L = a(t)\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t): \ f \mapsto af'' + bf + c$$

где $a, b, c \in V$.

2.2. Критерии нормальности. Вопрос о диагонализуемости операторов в пространстве со скалярным произведением естественно ставить в более строгой формулировке: выяснить, существует ли для данного оператора *ортонормированный* базис из собственных векторов. Операторы, для которых такой базис существует, называются*нормальными*. Над полем комплексных чисел они описываются следующей теоремой.

2.3. Теорема. *Следующие условия на оператор $F: \ W \longrightarrow W$ в эрмитовом пространстве W попарно эквивалентны:*

(i) F имеет диагональный вид в некотором ортонормированном базисе.

(ii) $FF^* = F^*F$

(iii) Ортогональное дополнение $W_\lambda^\perp$ к любому собственному подпространству $W_\lambda^\perp = \{w \in W \mid Fw = \lambda w\}$ F-инвариантно (т.е. переходит в себя при действии F).

Доказательство. Мы проделаем круг (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒ (i).

(i)⇒ (ii). Рассмотрим собственный ортонормальный базис $\{e\}$ для F. Тогда

$$F_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad F_e^* = \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar\lambda_n \end{pmatrix}$$

откуда

$$F_e F_e^* = F_e^* F_e = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

(ii)⇒ (iii). Из условия $F_e F_e^* = F_e^* F_e$ вытекает, что всякое собственное подпространство W_λ оператора F инвариантно относительно F^*.

В самом деле, если w собственный для F с собственным значением λ : $Fw = \lambda w$, то F^*w также будет собственным для F с собственным значением λ:

$$F(F^*w) = FF^*w = F^*Fw = F^*\lambda w = \lambda F^*w$$

Проверим, что $W_\lambda^\perp$ переходит в себя под действием F. Пусть $u \in W_\lambda^\perp$, т.е. $(u, w) = 0\ \forall w \in W$. Тогда

$$(Fu, w) = (u, F^*w) = 0 \quad \forall w \in W$$

поскольку $F^*w \in W$, что и доказывает импликацию (ii)$\Rightarrow$ (iii).

(iii)$\Rightarrow$ (i). Индукция по размерности. Если $\dim W = 1$ или если F — гомотетия, то доказывать нечего. В остальных случаях у F имеется нетривиальное собственное подпространство $0 \neq W_\lambda \subset W$ с $\dim W_\lambda < \dim W$. Условие (iii) означает, что каждое из слагаемых ортогонального разложения

$$W = W_\lambda \oplus W_\lambda^\perp$$

переходит в себя под действием F. По индукции мы можем выбрать собственные ортонормальные базисы для F в W_λ и $W_\lambda^\perp$. Их объединение будет искомым базисом в W. □

2.4. Определение. *Операторы $F: W \longrightarrow W$ на эрмитовом пространстве W, удовлетворяющем условиям теоремы, называются нормальными.*

В частности, мы видим, что нормальными являются самосопряжённые, антисамосопряжённые и изометрические операторы.

2.4.1. Следствие. *Оператор $F: W \longrightarrow W$ тогда и только тогда является самосопряжённым, когда он нормален и все его собственные значения вещественны.*

2.4.2. Следствие. *Оператор $F: W \longrightarrow W$ тогда и только тогда является антисамосопряжённым, когда он нормален и все его собственные значения чисто мнимы.*

2.4.3. Следствие. *Оператор $F: W \longrightarrow W$ тогда и только тогда изометричен, когда он нормален и все его собственные значения по модулю равны 1.*

2.5. Канонический вид операторов в евклидовом пространстве. Для того, чтобы применить предыдущую теорему к вещественному оператору на евклидовом пространстве V, мы сначала должны это пространство комплексифицировать, а затем продолжить евклидову форму на V до эрмитовой структуры на $W = \mathbb{C} \otimes V$. При этом самосопряжённые, антисамосопряжённые и изометрические относительно евклидовой структуры на V опреаторы останутся таковыми и по отношению к эрмитовой структуре на W (их матрицы в вещественном базисе просто не изменятся).

Объединяя собственные векторы и собственные значения комплексифицированных вещественных операторов в пары комплексно-сопряжённых, мы можем переформулировать предыдущие следствия в вещественных терминах, если воспользуемся результатами Утв.2.2.2.

2.5.1. Следствие. *Самосопряжённый оператор в евклидовом пространстве обладает ортонормированным базисом из собственных векторов.*

2.5.2. Следствие. *Кососимметричный оператор в евклидовом пространстве в подходящем ортонормированном базисе может быть записан блочно диагональной матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_\nu \\ -a_\nu & 0 \end{pmatrix}, a_\nu \in \mathbb{R}$$

2.5.3. Следствие. *Всякая изометрия евклидова пространства в подходящем ортонормированном базисе может быть записана матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & \Pi_k & & & & \\ & & & \pm 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Pi_\nu = \begin{pmatrix} \cos\varphi_\nu & \sin\varphi_\nu \\ -\sin\varphi_\nu & \cos\varphi_\nu \end{pmatrix}$ *— матрица поворота на угол* $\varphi_\nu :\ 0 < \varphi_\nu < 2\pi$, *а (единственная) минус единица присутствует тогда и только тогда, когда изометрия несобственная.*

> Задача 5.16. К какому виду можно привести произвольный нормальный оператор в евклидовом пространстве?

Важно подчеркнуть, что указанные представления операторов являются *каноническими* в том смысле, что с точностью до перестановки диагональных блоков они не зависят от выбора базиса и способа приведения. Действительно, стоящие на диагонали блоки однозначно восстанавливаются по набору корней (с учётом кратностей) характеристического многочлена.

> Задача 5.17. Укажите, как именно.

Вот ещё несколько полезных свойств нормальных операторов.

> Задача 5.18. Докажите, что оператор тогда и только тогда нормален, когда ортогональное дополнение к любому его инвариантному подпространству (не обязательно собственному) также будет инвариантным.

> Задача 5.19. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, имеющие различные собственные значения, ортогональны.

> Задача 5.20. Докажите, что любой ортонормированный набор собственных векторов нормального оператора можно дополнить до ортонормального базиса из собственных векторов.

2.6. Отступление о перестановочных операторах. В доказательстве теоремы о нормальных операторах ключевым местом является факт, известный как *лемма о комутирующих операторах*:

Если операторы A и B коммутируют, то всякое собственное подпространство для A переводится в себя оператором B.

При всей своей простоте (его доказательство

$$Av = \lambda v \Longrightarrow A(Bv) = ABv = BAv = B(\lambda v) = \lambda Bv$$

занимает одну строчку!) этот факт лежит в основе многих глубоких результатов, так что если вы "пропустили" его двумя страницами выше, то я призываю вас обдумать его теперь. Отметьте, в частности, что он справедлив *всегда* (для любых гомоморфизмов A, B любых *модулей* над произвольными кольцами).

Вот ещё одно следствие леммы о коммутирующих операторах:

2.6.1. Утверждение. *Любой (в том числе бесконечный) набор попарно-перестановочных операторов, действующих в конечномерном пространстве V над алгебраически-замкнутым полем, имеет общий собственный вектор.*

Доказательство. Если $\dim V = 1$, или если все операторы — гомотетии, то любой ненулевой $v \in V$ является общим собственным вектором. Если среди операторов есть хотя бы один, не являющийся гомотетией, то можно воспользоваться индукцией по размерности. Этот оператор имеет собственное подпространство V_λ с $0 < \dim V_\lambda < \dim V$, и все операторы переводят это подпространство в себя, так что по индуктивному предположению в V_λ имеется общий для всех операторов собственный вектор.

Задача 5.21. Докажите, что любой (в том числе и бесконечный) набор попарно-коммутирующих диагонализируемых операторов может быть приведён к диагональному виду в одном общем для всех операторов базисе.

Лекция 6
Разложение пространства с оператором

▷Факторизация оператора ▷Минимальный многочлен ▷Разложение пространства по разложению аннулирующего многочлена ▷Корневые подпространства ▷Разложение Жордана ▷Структура нильпотентного оператора ▷Функции от оператора и их вычисление приведением по модулю характеристического многочлена ▷Экспонента и логарифм ▷Пространство с оператором как $k[t]$-модуль ▷Элементарные делители

В этой лекции мы обсудим действие произвольного линейного оператора $F: V \longrightarrow V$ на произвольном векторном пространстве V, не предполагая наличия каких-либо дополнительных структур на V. Иногда мы будем требовать алгебраическую замкнутость основного поля k (при исследовании разложения Жордана и вычислении алгебраических функций от оператора), но значительная часть наших рассмотрений будет сохранять силу над любым полем.

§1. Геометрия пространства с оператором

1.1. Факторизация оператора. Я напомню (см. лекцию 5 прошлого семестра), что по любому подпространству W векторного пространства V можно построить *фактор пространство* V/W. Его векторами, по определению, являются всевозможные параллельные сдвиги подпространства $\mathrm{Aff}(W)$ в $\mathrm{Aff}(V)$. Они обозначаются через

$$[v]_W = v + W = \{v + w \text{ по всем } w \in W\}$$

или просто через $[v]$, если ясно, что за W имеется в виду.

Подмножество $[v] \in V$ может быть описано также *как класс смежности* вектора v по модулю подпространства W. Отмечу, что равенство $[v] = [u]$ равносильно условию $u - v \in W$ (такие u и v называются *сравнимыми по модулю* W). Операции над векторами фактор-пространства определяются правилами

$$[v] + [u] \overset{\text{def}}{=} [v + u] \qquad \lambda[v] \overset{\text{def}}{=} [\lambda v] \qquad \forall u, v \in V \; \forall \lambda \in k.$$

Задача 6.1. Убедитесь, что эти определения корректны, и что V/W является векторным пространством.

Задача 6.2. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ составляют базис в подпространстве W, а классы векторов $[e_{k+1}]$, $[e_{k+2}]$, …, $[e_n]$ составляют базис в фактор-пространстве V/W. Докажите, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляют базис в V.

Если на пространстве V действует линейный оператор $F: V \longrightarrow V$, то он будет индуцировать линейный оператор $\tilde{F}: V/W \longrightarrow V/W$ на факторе по подпространству W при условии, что это подпространство является *инвариантным для* F (т.е. будет переходить под действием F в себя). Оператор $\tilde{F}$ называется *фактор-оператором* F *по модулю инвариантного подпространства* W и определяется формулой $\tilde{F}([v]) = [F(v)]$.

Задача 6.3. Убедитесь, что это определение корректно (при условии, что W инвариантно).

Задача 6.4. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис в V, такой что $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ будет базисом в W. Убедитесь, что F-инвариантность W равносильна тому, что матрица F_e имеет блочный вид $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где 0 — нулевая матрица размера $(n-k)\times k$. Убедитесь также, что

а) блок A будет матрицей ограничения оператора F на W в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$;

б) классы $[e_\nu]$ с $\nu \geq k+1$ составят базис в V/W и блок C будет матрицей $\tilde{F}$ в этом базисе.

1.2. Аннулирущие многочлены. Для произвольного многочлена $g(t) \in k[t]$:

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

определим результат подстановки в него оператора $F \in \mathrm{Hom}(V,V)$ как оператор

$$g(F) = a_0 \cdot E + a_1 \cdot F + a_2 \cdot F^2 + \cdots + a_m \cdot F^m \in \mathrm{Hom}(V,V).$$

Отображение $\mathrm{ev}_F: k[t] \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V): g(t) \mapsto g(F)$ является гомоморфизмом колец. Его образ, состоящий из всевозможных операторов вида $g(F)$, обозначается через $k[F]$. Его ядро $\ker \mathrm{ev}_F \subset k[t]$ состоит из всех многочленов $q(t)$, для которых $q(F)$ является нулевым оператором (т.е. отображает всё V в нулевой вектор). Такие многочлены называются *аннулирующими* для F.

Задача 6.5. Убедитесь, что аннулирующие многочлены составляют идеал в $k[t]$.

Этот идеал не совпадает со всем кольцом многочленов, поскольку не содержит константы, и отличен от нуля, поскольку в конечномерном векторном пространстве $\mathrm{Hom}(V,V)$ бесконечное семейство векторов $F^0 = E$, F^1, F^2, … должно быть линейно зависимо:

$$a_0 \cdot E + a_1 \cdot F + a_2 \cdot F^2 + \cdots + a_d \cdot F^d = 0$$

для некоторого $d \in \mathbb{N}$ и подходящих a_ν (не всех нулевых).

Так как $k[t]$ — кольцо главных идеалов, множество многочленов, которые аннулируют данный оператор F, состоит из всех многочленов, делящихся на многочлен $\mu_F(t)$, однозначно определямый как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий F. Этот многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора F.

1.2.1. Утверждение. *Степень минимального многочлена не превышает размерности пространства, на котором действует оператор:*

$$\deg \mu_F \leq \dim V.$$

Замечание. Достаточно убедиться, что всякий оператор на V аннулируется некоторым многочленом степени $\dim V = n$. Это немедленно следует из доказанного в конце последней лекции прошлого семестра *тождества Гамильтона-Кэли*, утверждающего, что при подстановке матрицы в её характеристический многочлен получается нулевая матрица (и это верно над любым коммутативным кольцом!). Иначе говоря, $\chi_F(F) = 0$, т.е. *оператор аннулируется своим характеристическим многочленом*. Тем не менее, мы укажем здесь независимое геометрическое построение многочлена степени $\dim V = n$, аннулирующего F.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $F = \lambda E$ — гомотетия и аннулируется линейным двучленом $t - \lambda$. Если $\dim V > 1$, рассмотрим произвольный вектор $v \neq 0$ и наименьшую натуральную степень F^m, для которой вектор $F^m v$ линейно выражается через предыдущие степени:

$$F^m v = a_0 v + a_1 F v + \cdots + a_{m-1} F^{m-1} v$$

(здесь допускается, чтобы все a_ν были нулевыми!).

Векторы v, Fv, …, $F^{m-1}v$ будут линейно-независимы, так что их линейная оболочка W является F-инвариантным m-мерным подпространством. Ограничение F на это подпространство аннулируется ненулевым многочленом степени m

$$f(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_0.$$

Действительно, $f(F)v = 0$, а значит и $f(F)F^r v = F^r f(F)v = 0$ для каждого r.

По предположению индукции фактор-оператор $\tilde{F}$ по модулю W аннулируется неким многочленом $g(t)$ степени $\dim(V/W) = \dim V - m$. Равенство $g(\tilde{F})\big[V/W\big] = [0]$ означает, что $g(F)V \subset W$. Следовательно, многочлен $f(t)g(t)$ аннулирует F и имеет нужную степень. $\Box$

1.3. Разложение пространства по разложению аннулирующего многочлена. Соотношение вида $g(F) = 0$ с $g \in k[t]$ всегда доставляет геометрическую информацию о действии F. Мы уже видели это на примере оператора с квадратом единица $F: \ F^2 = E$, аннулируемого многочленом $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$. Действительно, из соотношения

$$(F+E)(F-E) = 0$$

следуют включения

$$\begin{aligned} \mathrm{im}\,(F+E) &\subset V_+ = \ker(F-E) = \{v \in V \mid Fv = v\} \\ \mathrm{im}\,(F-E) &\subset V_- = \ker(F+E) = \{v \in V \mid Fv = -v\}. \end{aligned}$$

Разложение[1] $E = -\frac{1}{2}(F-E) + \frac{1}{2}(F+E)$ позволяет представить любой вектор $v \in V$ в виде

$$v = \frac{1}{2}(F+E)v - \frac{1}{2}(F-E)v = v_+ + v_-$$

[1] Мы здесь молчаливо предполагаем, что $\mathrm{char}(k) \neq 2$, т.к. иначе $t^2 - 1 = (t-1)^2$ и $t - 1 = t + 1$.

с $v_+ \in V_+$ и $v_- \in V_-$. Вместе с очевидным равенством $V_+ \cap V_- = 0$ это даёт разложение $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму собственных подпространств оператора F с собственными значениями ± 1 (правда, не гарантирует, что оба они ненулевые). В частности, F диагонализуем.

Непосредственным обобщением этого примера является следующее

1.3.1. Утверждение. *Пусть оператор $F \in \mathrm{Hom}(V, V)$ аннулируется некоторым многочленом $q \in k[t]$, который можно разложить в $k[t]$ в произведение s попарно взаимно-простых множителей*

$$q(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \cdots \cdot q_s(t),$$

и пусть $Q_j(t) = q(t)/q_j(t)$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$ — всевозможные произведения по $(s-1)$ из них. Тогда

(i) $\ker q_j(F) = \mathrm{im}\, Q_j(F)$ и является F-инвариантным подпространством (возможно, нулевым);

(ii) сумма всех ненулевых подпространств из (I) является прямой и совпадает с V.

Доказательство. Прежде всего, мы имеем $\forall j$ включение

$$\mathrm{im}\, Q_j(F) \subset \ker q_j(F),$$

которое вытекает из равенства $0 = q(F)V = q_j(F)Q_j(F)V$.

Далее, подпространства $\ker q_j(F)$ попарно трансверсальны. Это вытекает из взаимной простоты q_i и q_j при $i \neq j$: подберём такие многочлены $a, b \in k[t]$, чтобы выполнялось тождество

$$a(t)q_i(t) + b(t)q_j(t) = 1,$$

подставим в обе части оператор F и применим к вектору $v \in \ker q_i \cap \ker q_j$. Получим

$$v = a(F)q_i(F)v + b(F)q_j(F)v = a(F)0 + b(F)0 = 0.$$

С другой стороны, сумма подпространств $\mathrm{im}\, Q_j(F)$ составляет всё V. Действительно, НОД$(Q_1, Q_2, \ldots, Q_s) = 1$ и можно подобрать такие $g_\nu \in k[t]$, что $\sum\limits_{\nu=1}^{s} Q_\nu(t)g_\nu(t) = 1$. Подставляя в это равенство F и применяя его к произвольному $v \in V$ получаем разложение

$$v = \sum v_\nu, \quad \text{где } v_\nu = Q_\nu(F)g_\nu(F)v \in \mathrm{im}\, Q_\nu(F).$$

Из этих трёх фактов и вытекает предложение.

1.3.2. Пример: проекторы. Оператор $F: V \longrightarrow V$ называется *проектором*, если существует разложение $V = U \oplus W$, такое что F переводит любой вектор $v = (u, w) \in U \oplus W$ в $(0, w)$. В этом случае говорят также, что F проектирует V на W вдоль U.

Из доказанного выше предложения вытекает, что проекторами являются те и только те операторы F, которые аннулируются многочленом $t^2 - t$, т.е. удовлетворяют соотношению $F^2 = F$. Действительно, в этом случае

$$V = \ker(F) \oplus \ker(F - E) \quad \text{и} \quad \ker(F - E) = \mathrm{im}\,(F),$$

т.е. всё пространство распадается в прямую сумму ядра и образа, и действие оператора на образе тождественно.

Другими следствиями из доказанного предложения являются более мощные, чем из лекции 4, критерии диагонализуемости оператора

1.3.3. Следствие. *Если оператор $F \in \mathrm{Hom}_k(V,V)$ аннулируется многочленом без кратных корней, полностью разлагающимся над k на линейные множители, то F диагонализуем.*

Доказательство. Равенство $(F-\lambda_1 E)(F-\lambda_2 E)\cdots(F-\lambda_s E)=0$ при условии, что все λ_ν попарно различны даёт разложение $V = \bigoplus \ker(F-\lambda_\nu E)$ (где суммирование идёт по всем ненулевым из написанных подпространств), что и требуется.

Задача 6.6. Убедитесь, что верно и обратное: диагонализуемый оператор аннулируется произведением $\prod(t-\lambda_\nu)$, в котором присутствуют без повторений все его различные собственные значения.

1.3.4. Следствие. *Для диагонализуемости оператора над некоторым полем необходимо и достаточно, чтобы его минимальный многочлен полностью разлагался над этим полем на линейные множители и не имел кратных корней.*

Задача 6.7. Докажите, что ограничение диагонализуемого оператора на любое инвариантное подпространство будет диагонализуемо на этом подпространстве.

Задача 6.8. Докажите, что произвольная совокупность попарно перестановочных диагонализуемых операторов может быть приведена к диагональному виду одновременно в одном общем базисе

Указание: Воспользуйтесь индукцией по размерности пространства, леммой о коммутирующих операторах и предыдущей задачей.

В качестве последнего следствия отметим, что над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит n, будет диагонализуем всякий оператор, удовлетворяющий уравнению $F^n = E$. Поскольку в конечной группе G всякий элемент удовлетворяет уравнению $F^{|G|}=E$, мы получаем

1.3.5. Следствие. *Пусть поле k алгебраически замкнуто, G — конечная подгруппа в $GL_k(V)$, и её порядок $|G|$ не делится на характеристику поля k. Тогда:*

(i) все операторы в G диагонализуемы;

(ii) если G — абелева, то они приводятся к диагональному виду одновременно в одном общем базисе.

§2. Разложение Жордана.

Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что основное поле алгебраически замкнуто. Наша цель состоит в том, чтобы выделить из произвольного оператора его «диагонализуемую составляющую», и выяснить как устроено то, что после этого останется.

2.1. Определение. *Пусть $F \in \mathrm{Hom}_k(V,V)$ и $\lambda \in k$ — любое число. Подпространство*

$$K_\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(F-\lambda E)^n = \{v \in V \mid (F-\lambda E)^n v = 0 \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$$

*незывается **корневым подпространством** со значением λ.*

Задача 6.9. Убедитесь, что это и в самом деле подпространство!

2.1.1. Утверждение. *Всякое корневое подпространство K_λ F-инвариантно, отлично от нуля тогда и только тогда, когда λ является собственным значением оператора F, и трансверсально любому другому корневому подпространству K_μ с $\mu \neq \lambda$.*

Доказательство. F-инвариантнность K_λ проверяется выкладкой:

$$(F-\lambda E)^n v = 0 \Longrightarrow (F-\lambda E)^n F v = F(F-\lambda E)^n v = 0,$$

Если K_λ отлично от нуля, то оно содержит собственный вектор $v \in K_\lambda$, такой что $v \neq 0$ и $Fv = \mu v$. Равенство

$$0 = (F-\lambda E)^n v = (\mu - \lambda)^n v$$

показывает, что его собственное значение μ должно совпадать с λ. Обратно, всякое собственное подпространство $V_\lambda = \ker(F-\lambda E)$ содержится в корневом подпространстве K_λ.

Предыдущие рассуждения показывают заодно, что при $\lambda \neq \mu$ оператор $(F-\mu E)$ (для которого K_λ является инвариантным подпространством, как и для F) не имеет ядра на K_λ, а стало быть, и он, и все его степени действуют на K_λ взаимно однозначно, т.е. $K_\lambda \cap K_\mu = 0$. □

2.2. Корневое разложение. Разложим минимальный многочлен μ_F оператора F на линейные множители

$$\mu_F(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$$

(где все λ_ν предполагаются попарно-разными). Полагая в предложении Утв.1.3.1 $q_j(t) = (t-\lambda_j)^{m_j}$, $Q_j(t) = \prod\limits_{\nu\neq j}(t-\lambda_\nu)^{m_\nu}$, получаем прямое F- инвариантное разложение

$$V = \bigoplus W_{\lambda_j}, \text{ где } W_{\lambda_j} = \ker(F-\lambda E)^{m_j} = \operatorname{im} Q_j(F).$$

Из минимальности μ_F следует, что все подпространства W_{λ_j} ненулевые, поскольку $0 = W_{\lambda_j} = \operatorname{im} Q_j(F)$ означало бы, что F можно аннулировать собственным делителем μ_F. Из включения $0 \neq W_{\lambda_j} \subset K_\lambda$ и трансверсальности корневых подпространств следует очень важный результат

2.3. Теорема. (Теорема о корневом разложении) *Если на векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем действует линейный оператор $F: V \longrightarrow V$, то V распадается в прямую сумму корневых подпространств*

$$V = \bigoplus K_{\lambda_j},$$

где суммирование производится по всем различным собственным значениям λ_j оператора F. Каждое корневое подпространство K_{λ_j} F-инвариантно и совпадает с $\ker(F-\lambda_j E)^{m_j}$, *где*

$$\prod_j (t-\lambda_j)^{m_j} = \mu_F(t)$$

есть минимальный многочлен оператора F.

Задача 6.10. Убедитесь, что множитель $(t-\lambda_j)^{m_j}$ из разложения минимального многочлена оператора F является минимальным многочленом для ограничения F на корневое подпространство K_{λ_j}.

2.3.1. Следствие. *Характеристический многочлен делится на минимальный и делит некоторую его степень.*

Доказательство. Из предыдущего следует, что $\chi_F(t)$ и $\mu_F(t)$ обладают одинаковым набором корней, поэтому достаточно проверить, что кратности этих корней у характеристического полинома не меньше, чем у минимального. Множитель $(t-\lambda)^m$ из разложения минимального многочлена является минимальным многочленом для ограничения оператора F на корневое подпространство K_λ, а значитб $m \leq \dim K_\lambda$. Характеристический многочлен оператора F равен произведению характеристических многочленов его ограничений на корневые подпространства (это очевидно, если воспользоваться для вычисления $\det(F-tE)$ базисом, согласованным с корневым разложением). Поэтому кратность вхождения $(t-\lambda)$ в $\chi_F(t)$ в точности равна $\dim K_\lambda$, что и требовалось.

Отметим, что из этого следствия вытекает тождество Гамильтона-Кэли для матриц над алгебраически замкнутым полем (наши геометрические рассмотрения проводились, напомню, независимо от этого тождества).

2.3.2. Следствие. $\chi_F(F)=0$

2.4. Определение. *Оператор $F:\ V \longrightarrow V$ называется нильпотентным, если $F^k=0$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$ (т.е. если он аннулируется многочленом t^k).*

Задача 6.11. Докажите, что оператор тогда и только тогда нильпотентен, когда все его собственные значения нулевые.

2.5. Теорема. (Аддитивное разложение Жордана.) *Для любого оператора F, действующего в пространстве над алгебраически замкнутым полем существуют диагонализуемый оператор F_{ss} и нильпотентный оператор F_n, такие что:*

(i) $F=F_{ss}+F_n$

(ii) $F_{ss}F_n=F_nF_{ss}$.

Этими двумя свойствами F_{ss} и F_n определяются по F однозначно.

Замечание о терминологии и обозначениях. Индекс ss является сокращенгием от английского semisimple. Дело в том, что на языке теории представлений (а он в данном вопросе является наиболее употребительным) диагонализуемые операторы называются *полупростыми* (а операторы гомотетий — *простыми*), что очень удобно и естественно. Оператор F_{ss} называется *полупростой частью* оператора F, а F_n — *нильпотентной частью* F.

Доказательство. Мы будем проверять единственность — существование при этом получится в качестве «бесплатного приложения».

Пусть F_{ss} и F_n обладают нужными свойствами. Тогда V разлагается в прямую сумму собственных подпространств оператора F_{ss}: $V=\oplus V_{\lambda_j}$. Поскольку F_n перестановочен с F_{ss}, каждое из подпространств V_{λ_j} будет инвариантно для F_n.

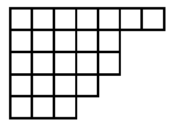
Ограничение F_n на V_{λ_j} совпадает с ограничением $F-\lambda_j E$. Из нильпотентности F_n следует, что V_{λ_j} содержится в корневом подпространстве K_{λ_j} оператора F. Из теоремы о корневом разложении для F вытекает теперь, что $V_{\lambda_j}=K_{\lambda_j}$. Поэтому F_{ss} однозначно определяется по F как оператор, действующий на каждом корневом подпространстве K_{λ_j} оператора F гомотетией с коэффициентом λ_j. Но тогда $F_n = F - F_{ss}$ также однозначно восстанавливается по F.

То, что и наоборот, операторы F_{ss} и F_n, построенные по только что описанным правилам, будут удовлетворять условиям теоремы — очевидно. $\square$

§3. Строение нильпотентного оператора (над любым полем).

Действие нильпотентного опрератора $V \xrightarrow{F} V$ над произвольным полем k очень удобно описывать при помощи *диаграммы Юнга* (мы уже встречались с ними в первом семестре, когда занимались симметрическими многочленами).

3.1. Определение. *Базис пространства V называется жордановым базисом для оператора F, если его базисные векторы можно так расположить в клетках некоторой диаграммы Юнга*

$\sigma_F =$  ,

чтобы при действии F каждый из базисных векторов переходил в базисный вектор, стоящий в соседней слева клетке, а векторы крайнего левого столбца переходили в нуль.

Наглядно действие F на векторы жорданова базиса состоит в сдвиге на один шаг влево вдоль строк диаграммы Юнга. При этом группы векторов, стоящие в строках, называются *жордановыми цепочками*, а набор длин таких цепочек (т.е. длин строк диаграммы), составляющий *разбиение* числа $\dim V$, называется *цикловым типом* оператора F.

3.2. Свойства жорданова базиса. Если оператор F имеет жорданов базис с диаграммой σ_F ширины[2] $l(\sigma_F)$, то $F^{l(\sigma_F)} = 0$. Поэтому жорданов базис бывает только у нильпотентных операторов.

Далее, диаграмма Юнга σ_F однозначно определяется по F и не зависит от выбора жорданого базиса. В самом деле, длина k-того слева столбца диаграммы σ_F равна

$$\dim\Big(\ker F^k / \ker F^{k+1}\Big) .$$

Это оправдывает все введённые выше обозначения и названия.

Задача 6.12. Докажите, что число жордановых цепочек оператора F, состоящих не менее, чем из m векторов, равно $\dim\Big(\operatorname{im} F^{m-1}/\operatorname{im} F^m\Big)$.

Задача 6.13. Докажите, что два нильпотентных оператора F и G тогда и только тогда имеют одинаковый цикловой тип, когда существует изоморфизм $C : V \xrightarrow{\sim} V$, вписывающийся в коммутативную диаграмму $\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\sim]{C} & V \\ {\scriptstyle F}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle G} \\ V & \xrightarrow[\sim]{C} & V \end{array}$ (другая формулировка: два нильпотентных оператора тогда и только тогда имеют одинаковый

[2]Напомню, что ширина диаграммы Юнга — это длина её верхней (самой длинной) строчки.

циклової тип, когда их матрицы подобны — одна получается сопряжением другой при помощи невырожденной матрицы).

3.3. Теорема. *В конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем для любого нильпотентного оператора существует жорданов базис.*

Доказательство. Индукция по размерности. Если $\dim V = 1$, или если $F = 0$, то любой базис будет жордановым с диаграммой Юнга, состоящей из одного столбца высоты $\dim V$.

Пусть $\dim V > 1$ и $\ker F \neq V$. Поскольку F нильпотентен, имеем также $\ker F \neq 0$, а значит, $0 < \dim(V/\ker F) < \dim V$, и в фактор-пространстве $V/\ker F$ существует (по индуктивному предположению) жорданов базис для фактор-оператора $\tilde{F}$.

В каждой жордановой цепочке этого базиса

$$[e_1] \leftarrow [e_2] \leftarrow [e_3] \leftarrow \cdots \leftarrow [e_m]$$

класс $[e_j]$ совпадает с классом $[F^{m-j}e_m]$ при всех $j = 1, 2, \ldots$. Действительно, равенство $\tilde{F}[e_\nu] = [e_{\nu-1}]$ в $V/\ker F$ означает, что в V $Fe_\nu = e_{\nu-1} - w_\nu$ с $w_\nu \in \ker F$. Последовательно применяя эти соотношения, получим

$$\begin{aligned}
e_{m-1} &= Fe_m + w_m \\
e_{m-2} &= Fe_{m-1} + w_{m-1} = F(Fe_m + w_m) + w_{m-1} = F^2 e_m + w_{m-1} \\
e_{m-3} &= Fe_{m-2} + w_{m-2} = F(F^2 e_m + w_{m-1}) + w_{m-2} = F^3 e_m + w_{m-2} \\
&\cdots \\
e_1 &= Fe_2 + w_2 = F(F^{m-2}e_m + w_3) + w_2 = F^{m-1}e_m + w_2,
\end{aligned}$$

что и даёт сравнения $e_j \equiv F^{m-j}e_m \pmod{\ker F}$.

Таким образом, любая жорданова цепочка $\tilde{F}$ является приведением по модулю $\ker F$ куска от жордановой цепочки оператора F, причём этот кусок допускает продолжение ещё ровно на один шаг влево — он может быть дополнен ненулевым вектором $e_0 = Fe_1 = F^m e_m \in \ker F$. Эти дополняющие векторы составляют линейно-независимую систему в $\ker F$, поскольку всякая линейная зависимость между ними означала бы точно такую же линейную зависимость по модулю $\ker F$ между последними классами $[e_1]$ жордановых цепочек для $\tilde{F}$ в $V/\ker F$.

Дополним систему векторов $[e_0]$ ещё несколькими векторами до базиса в $\ker F$. Объединение всех добавленных нами векторов с исходными $F^k e_m$ составит по зад.6.2 искомый жорданов базис для F в V. □

Отметим, что из этой теоремы и единственности циклового типа оператора получается такое

3.3.1. Следствие. *Пространство, на котором действует нильпотентный линейный оператор, тогда и только тогда не разлагается в прямую сумму F-инвариантных подпространств меньшей размерности, когда жорданов базис для F состоит из одной жордановой цепочки.*

Поэтому линейные оболочки жордановых цепочек аналогичны простым числам (в том смысле, что и те и те «далее неразложимы»), а теорема о существовании жорданова базиса и единственности циклового типа похожа на теорему о существовании и единственности разложения на простые множители. В конце лекции мы немного остановимся на причинах этой похожести.

3.4. Жорданова нормальная форма матрицы. Предположим теперь опять, что основное поле k алгебраически замкнуто. Тогда произвольный оператор $F: V \longrightarrow V$ можно канонически разложить в сумму $F = F_{ss} + F_n$ полупростой и нильпотентной составляющих, коммутирующих между собой. Соответственно, пространство V распадается в прямую сумму собственных подпространств V_λ оператора F_{ss}, и каждое такое подпространство переводится в себя оператором F_n. Выбирая в каждом V_λ жорданов базис для F_n, мы получаем для оператора F матрицу очень простого вида, называемого *жордановой нормальной формой матрицы оператора* F.

3.4.1. Следствие. *Для любого оператора $F: V \longrightarrow V$, действующего в пространстве над алгебраически замкнутым полем, существует базис, в котором его матрица блочно диагональна с блоками вида*

$$J_m(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad (\text{размер } m \times m).$$

При этом вся совокупность блоков однозначно с точностью до перестановки определяется по оператору и не зависит от выбора базиса, числа λ — это в точности собственные значения, а размеры блоков не превышают кратности вхождения соответствующих $(t-\lambda)$ в разложение минимального многочлена.

Блоки $J_m(\lambda)$ называются *жордановыми клетками*. Количество и размеры жордановых клеток, имеющих одно и то же λ на диагонали, целиком определяется цикловым типом ограничения $F - \lambda E$ на корневое подпространство K_λ.

> Задача 6.14. Убедитесь, что наибольший из размеров клеток $J_m(\lambda)$ равен кратности вхождения $(t-\lambda)$ в разложение минимального многочлена, а сумма всех размеров равна кратности вхождения $(t-\lambda)$ в характеристический многочлен.

§4. Функции от оператора.

Среди приложений теории линейных операторов важное место занимают задачи об определении и вычислении различных функций от операторов (а на более приземлённом языке — функций от матриц). Мы обсудим здесь коротко ряд примеров.

4.1. Интерполяционный многочлен. Операторы составляют векторное пространство и кольцо, поэтому при определении функции от оператора мы можем использовать алгебраические действия сложения и умножения, а при наличии нормы на пространстве операторов, — ещё и предельные переходы. Мы будем рассматривать только такие функции из $\mathrm{Hom}(V,V)$ в $\mathrm{Hom}(V,V)$, которые определяются при помощи этих операций.

Пусть $f: \mathrm{Hom}(V,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V)$ — такая функция. Тогда значение $f(F)$ для конкретного $F \in \mathrm{Hom}(V,V)$ будет лежать в линейной оболочке неотрицательных целых степеней F^ν, т.е. в $k[F]$. Это означает, что $f(F)$ всегда совпадает с результатом подстановки F в некоторый многочлен. Всякий такой многочлен назывется *интерполяционным многочленом для вычисления* $f(F)$.

Поскольку $k[F] \tilde{=} k[t]/(\mu_f)$ интерполяционный многочлен всегда можно подобрать таким, чтобы его степень не превосходила степени минимального многочлена оператора F (и этим условием он будет определяться однозначно!). Однако указать степень минимального многочлена не всегда просто, и при определении интерполяционного многочлена удобнее исходить из того, что его степень *строго меньше размерности пространства*. Далее применяется метод неопределённых коэффициентов, а ключом к их вычислению служит тождество Гамильтона-Кэли. Перейдём к примерам.

4.2. Степени оператора. В качестве интерполяционного многочлена для вычисления значения $f(F)$, где $f \in k[t]$ — это многочлен (например, $f(t) = t^N$ — степень), можно взять остаток $r(t)$ от деления $f(t)$ на характеристический многочлен $\chi_F(t)$. Действительно, подставляя F в многочленное равенство

$$f(t) = \chi_F(t) \cdot q(t) + r(t)\,, \quad \deg r \leq n-1\,,\ \deg \chi_F = n\,,$$

мы в силу тождества Гамильтона-Кэли получим $f(F) = r(F)$.

Более того, подставляя в это же равенство и в равенства, полученные из него дифференцированиями, собственные значения λ_j оператора F, мы получим для определения коэффициентов $r(t)$ n линейных уравнений:

$$r^{(\nu)}(\lambda_j) = f^{(\nu)}(\lambda_j)$$

(в которых ν меняется от нуля до кратности корня λ_j в χ_F). Таким образом, r можно искать как решение задачи интерполяции с кратными узлами, которую мы обсуждали в лекции 1.

4.2.1. Пример. Вычислим $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^k$. Характеристический многочлен

$$\chi(t) = t^2 - t \cdot \vartriangle + \det = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2.$$

Тем самым, интерполяционный многочлен для вычисления t^k имеет вид $r(t) = at + b$, причём

$$\begin{aligned} r(2) &= 2a + b = 2^k \\ r'(2) &= a = k2^{k-1}. \end{aligned}$$

Находим $r(t) = k2^{k-1}t + (1-k)2^k = 2^{k-1}(kt + (2-2k))$, откуда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^k = 2^{k-1}\left(k\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + (2-2k)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2^{k-1}\begin{pmatrix} 2-k & k \\ -k & 2+k \end{pmatrix}.$$

4.3. Алгебраические функции. Под алгебраической функцией оператора F мы будем понимать оператор G, заданный неявно, как решение уравнения

$$F_0 + F_1G + F_2G^2 + \cdots + F_kG^k = 0,$$

коэффициенты которого $F_\nu = f_\nu(F)$ являются многочленами от оператора F. Примером алгебраической функции может служить корень из оператора $G = \sqrt[k]{F}$, являющийся решением уравнения $G^k - F = 0$. Для определения интерполяционного многочлена, вычисляющего алгебраическую функцию от оператора, достаточно решить по модулю характеристического многочлена $\chi_F(t)$ уравнение

$$f_0(t) + f_1(t)x + f_2(t)x^2 + \cdots + f_k(t)x^k = 0$$

над кольцом многочленов $k[t]$, т.е. подобрать такой многочлен $x = x(t)$, чтобы

$$f_0(t) + f_1(t)x(t) + f_2(t)x(t)^2 + \cdots + f_k(t)x(t)^k$$

делился на $\chi(t)$. Тогда $G = x(F)$ будет искомым оператором.

Мы ограничимся лишь одним примером.

4.3.1. Утверждение. *Если оператор $F: \ V \longrightarrow V$, действующий в пространстве над алгебраически замкнутым полем, не имеет ядра, то $\forall k \in \mathbb{N}$ существует оператор $G: \ V \longrightarrow V$, который является многочленом от F и удовлетворяет равенству $G^k = F$.*

Доказательство. Пусть $\chi_F(t) = \prod (t - \lambda_j)^{m_j}$. Мы должны показать, что если все $\lambda_j \neq 0$, то сравнение

$$x(t)^k \equiv t \pmod{\chi_F(t)}$$

разрешимо в $k[t]$ относительно x. По китайской теореме об остатках достаточно доказать разрешимость этого сравнения по модулю каждого из взаимно-простых множителей $(t - \lambda_j)^{m_j}$ из разложения χ_F. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\chi_F(t) = (t - \lambda)^m$.

Сделаем замену $t = s + \lambda$, которая сводит задачу к отысканию такого многочлена $x(s)$, что $x(s)^k \equiv s + \lambda \pmod{s^m}$.

Задача 6.15. Убедитесь, что этим свойством одладает отрезок из k начальных членов формального степенного рада Ньютона

$$(s + \lambda)^{1/m} = \lambda^{1/n}(1 + s/\lambda)^{1/m} = \lambda^{1/n} \sum_{\nu \geq 0} \binom{1/m}{\nu} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\nu}$$

Указание: можно сказать, что ряд Ньютона исходя из этого свойства и выписывался. Более конкретная идея: многочлен делится на s^m тогда и только тогда, когда он обращается в нуль при $s = 0$ вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно.

$\square$

В более сложных случаях вопрос о существовании той или иной алгебраической функции от оператора может быть исследован аналогичным образом при помощи описанной в конце лекции 7 прошлого семестра техники разложения произвольной алгебраической функции в формальный дробно-степенной ряд.

4.3.2. Пример. Вычислим квадратный корень из матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен

$$\chi(t) = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5).$$

Интерполяционный многочлен $r(t) = at + b$ определяется тем, что $r(t)^2 - t$ делится на $\chi(t)$, а стало быть, имеет корни -1 и 5. Поэтому

$$\begin{aligned} (-a+b)^2 = -1 \quad &\Longrightarrow \quad b - a = \pm i \\ (5a+b)^2 = 5 \quad &\Longrightarrow \quad 5a + b = \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Заметим что все четыре комбинации знаков приводят к (различным) матрицам, квадрат которых равен заданной в условии, так что алгебраические фукции являются *многозначными*. Выбирая, к примеру, знаки плюс, получим $a = (\sqrt{5} - i)/6$, $b = (\sqrt{5} + 5i)/2$, откуда

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} = r\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{\sqrt{5}-i}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+5i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}+5i}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{5}+13i}{6} & \frac{\sqrt{5}-i}{2} \\ \frac{\sqrt{5}-i}{2} & \frac{6\sqrt{5}+13i}{6} \end{pmatrix}$$

4.4. Аналитические функции. Пусть теперь V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и на V задана норма $||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Тогда по этой норме можно построить норму на пространстве операторов $\mathrm{Hom}(V, V)$, полагая:

$$||F|| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{||v||=1} (||Fv||) = \sup_{v \neq 0} \left(\frac{||Fv||}{||v||}\right).$$

Задача 6.16. Проверьте выполнение свойств нормы.

Интуитивно-геометрически, эта норма есть максимальное растяжение длины, осуществляемое оператором F. Среди всех прочих норм на пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ (задающих, как мы знаем, одну и ту же сходимость) эта норма выделяется тем, что она хорошо взаймодействует с композицией операторов. А именно, прямо из определения следует неравенство

$$||FG|| \leq ||F|| \, ||G|| .$$

Это неравенство позволяет оценивать норму суммы куска степенного ряда от оператора суммой соответствующего куска числового степенного ряда:

$$\left|\left|\sum_{\nu=n}^{N} a_\nu F^\nu\right|\right| \leq \sum_{\nu=n}^{N} |a_\nu| \, ||F||^\nu .$$

При помощи критерия Коши, дословно тем же рассуждением, что и в курсе анализа, решается

Задача 6.17. Пусть степенной ряд $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu A^\nu$ с вещественными (или комплексными) коэффициентами абсолютно сходится при некотором вещественном положительном A. Докажите, что ряд из операторов $\sum_{\nu \geq 0} a_\nu F^\nu$ абсолютно и равномерно сходится в любом замкнутом шаре $||F|| \leq R$ радиуса $R < A$.

Таким образом, всякая аналитическая вещественная (или комплексная) функция $\psi(x)$ определяет некоторую функцию на пространстве операторов со значениями в пространстве операторов.

Например, абсолютно сходящийся всюду ряд

$$e^F = \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\nu!} F^\nu$$

определяет *экспоненту* от оператора.

Важно иметь в виду, что многие тождества, которые имеют место в кольце формальных степенных рядов, перестают выполняться для рядов от операторов, поскольку кольцо операторв *некоммутативно*. К примеру, как правило, $e^{F+G} \neq e^F e^G$, если F и G не коммутируют (придумать два некоммутирующих оператора, для которых бы выполнялось равенство — это довольно известная «завльная » задача из студенческого олимпиадного фольклора).

Разумеется, к коммутирующим операторам весь арсенал формальных тождеств применим вполне, и единственным ограничением здесь является проверка сходимости рядов (т.е. само существование рассматриваемых функций).

4.4.1. Пример. Всякая унитарная матрица является экспонентой от эрмитово кососимметричной матрицы. Действительно, такая матрица является матрицей эрмитовой изометрии, а значит диагонализуема, и по её диагонали будут стоять числа с модулем 1, т.е. числа вида $e^{i\varphi}$. Тем самым этот оператор является экспонентой от оператора, имеющего в том же базисе диагональный вид с чисто мнимыми числами на диагонали, что и требовалось. Ясно, что верно и обратное: экспоненты косоэрмитовых матриц будут унитарными.

Задача 6.18. Убедитесь, что экспонента от вещественной кососимметричной матрицы будет ортогональной матрицей, и покажите, что не всякая ортогональная матрица является экспонентой от кососимметричной.

Задача 6.19. Докажите, что отображение $[0,1] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}): \ t \mapsto e^{tA}$, где A — фиксированная вещественная матрица, задаёт бесконечно-гладкую кривую, лежащую в $GL_n(\mathbb{R})$ и соединяющую E с e^A.

Поскольку значение аналитической функции ψ от оператора F лежит в $k[F]$, для для её практического вычисления опять-таки удобнее всего воспользоваться интерполяционным многочленом.

Задача 6.20. Докажите, что интерполяционный многочлен $r(t)$ для вычисления $\psi(F)$ можно выбрать как (единственное на пространстве многочленов степени $\leq \dim V - 1$) решение интерполяционной задачи с узлами в корнях характеристического многочлена, взятых с надлежащими кратностями:

$$r^{(\nu)}(\lambda_j) = \psi^{(\nu)}(\lambda_j).$$

В заключение этой темы ещё одна задача на технику интерполирования

Задача 6.21. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем полупростая и нильпотентная жордановы составляющие произвольного оператора могут быть вычислены в виде многочленов без свободного члена от этого оператора.

Из этой задачи вытекает, в частности, что полупростая и нильпотентная составляющие оператора коммутируют с любым оператором, с которым коммутирует исходный оператор.

§5. Пространство с оператором как $k[t]$-модуль.

Пусть $F: \ V \longrightarrow V$ — линейный оператор в векторном пространстве над произвольным полем k.

5.1. Разложение V как модуля над $k[t]$. Зададим на V структуру модуля над кольцом многочленов $k[t]$, определив умножение векторов на многочлены формулой

$$g(t) \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} g(F)v.$$

Иными словами, умножение векторов на константы будет происходить по тем же законам что и раньше, но ещё добавится дополнительная операция умножения векторов на t, состоящая, по определению, в применении оператора F.

Задача 6.22. Убедитесь, что все аксиомы модуля при этом будут выполнены.

Фиксируем в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ над k. Векторы e_ν будут порождать V и как модуль над $k[t]$, но над $k[t]$ они уже будут линейно зависимы. Для описания соотношений между ними рассмотрим свободный $k[t]$-модуль M ранга n, т.е. прямую сумму

$$M = \underbrace{k[t] \oplus k[t] \oplus \cdots \oplus k[t]}_{n}$$

(напомню, что этот модуль состоит из столбцов высоты n из многочленов, а операции над ними определяются покоординатно). Зададим гомоморфизм модулей

$$\pi_F : \ M \longrightarrow V$$

$$\pi_F : \ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \longrightarrow g_1(F)e_1 + g_2(F)e_2 + \cdots + g_n(F)e_n$$

Задача 6.23. Убедитесь, что это действительно гомоморфизм $k[t]$-модулей.

Гомоморфизм π_F, очевидно, сюрьективен, и из теоремы о строении гомоморфизма модулей мы получаем, что V как $k[T]$-модуль изоморфен $M/\ker \pi_F$.

В прошлом семестре мы видели, что в свободном модуле M любой подмодуль N обладает базисом. Более того, существует такой базис $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ в M, что возрастающие кратности

$$\{d_1(t)\zeta_1,\ d_2(t)\zeta_2,\ \dots\ ,\ d_r(t)\zeta_r\}\ , \quad (\text{где } d_i \text{ делит } d_j \text{ при } i < j)$$

первых нескольких его базисных векторов составляют базис в подмодуле N, причём набор кратностей $\{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ является инвариантом подмодуля и от выбора базиса не зависит.

Применяя эту теорему к подмодулю $\ker \pi_F \subset M$, мы получаем

5.1.1. Утверждение. *Существует такой набор многочленов $\{d_1, d_2, \dots, d_r\} \subset k[t]$, что d_i делят d_j при $i < j$ и имеется изоморфизм $k[t]$-модулей*

$$\frac{k[t]}{(d_1(t))} \oplus \frac{k[t]}{(d_2(t))} \oplus \cdots \oplus \frac{k[t]}{(d_r(t))} \xrightarrow{\sim} V \tag{5-1}$$

Этими условиями набор $\{d_1, d_2, \dots, d_r\} \subset k[t]$ однозначно определяется по оператору F.

Слова «изоморфизм $k[t]$-модулей» означают, что мы можем отождествить векторное пространство V с векторным пространством

$$\frac{k[t]}{(d_1(t))} \oplus \frac{k[t]}{(d_2(t))} \oplus \cdots \oplus \frac{k[t]}{(d_r(t))}\ ,$$

так что оператор F будет действовать как оператор *покоординатного умножения на* t.

Многочлены $d_j(t)$ называются *инвариантными множителями* оператора F.

5.1.2. Следствие. *$d_r(t) = \text{НОК}(d_1, d_2, \ldots, d_r)$ совпадает с минимальным многочленом $\mu_F(t)$ оператора F.*

5.2. Элементарные делители. Если разложить каждый из d_j в произведение неприводимых многочленов

$$d_j(t) = \prod_k p_{jk}(t)^{m_{jk}},$$

то полная совокупность всех участвующих в этих разложениях степеней $p_{jk}^{m_{jk}}$ также будет однозначно определяться оператором F. Эти степени $p_{jk}^{m_{jk}}$ называются *элементарными делителями* оператора F.

По китайской теореме об остатках каждое слагаемое разложения (5-1) допускает дальнейшее разложение в виде

$$\frac{k[t]}{(d_j(t))} = \bigoplus_k \frac{k[t]}{(p_{jk}(t)^{m_{jk}})}$$

откуда получается

5.2.1. Следствие. *Конечномерное векторное пространство V над произвольным полем k, на котором действует линейный оператор $F: V \longrightarrow V$, можно отождествить с прямой суммой фактор-колец*

$$\bigoplus_\nu k[t]/(p_\nu(t)^{m_\nu}),$$

в которой все p_ν неприводимы над k. При этом оператор F перейдёт в оператор умножения на t.

Над алгебраически замкнутым полем это даёт ещё одно доказательство теоремы о приведении матрицы к жордановой нормальной форме:

> Задача 6.24. В пространстве $k[t]/((t-\lambda)^m)$ постройте базис, в котором оператор умножения на t имеет матрицу $J_m(\lambda)$.

5.2.2. Следствие. *Жордановы клетки оператора F, отвечающие собственному значению λ, находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементарными делителями оператора F вида $(t-\lambda)^m$, а их размеры равны соответствующим показателям m.*

> Задача 6.25. (необязательная) Как выглядит «вещественная жорданова нормальная форма» матрицы над полем $\mathbb{R}$?

Подчеркнём, что набор элементарных делителей является полным набором инвариантов линейного оператора относительно сопряжения: два оператора F и G могут быть в некоторых базисах записаны одинаковыми матрицами[3] тогда и только тогда, когда у них один и тот же набор элементарных делителей. Это вытекает из задачи

---

[3]Т.е. существует изоморфизм $C: V \xrightarrow{\sim} V$, вписывающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "C", "\sim"'] & V \\ V \arrow[u, "F"] \arrow[r, "C", "\sim"'] & V \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd},$$

Задача 6.26. Докажите, что два $k[t]$-модуля вида

$$\bigoplus_{\nu} k[t]/(p_\nu(t)^{m_\nu})$$

тогда и только тогда изоморфны, когда они отличаются лишь перестановкой слагаемых.

5.3. Отыскание инвариантных множителей по матрице оператора. Чтобы описать инвариантные множители оператора F в терминах его матрицы F_e в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ мы построим систему образующих в $\ker \pi_F$, связанную с этой матрицей.

5.3.1. Лемма. *Ядро $\ker \pi_F$ как $k[t]$-подмодуль в M порождается столбцами матрицы $tE - F_e$, где F_e — это матрица оператора F в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V (столбцы матрицы $tE - F_e$ рассматриваются как столбцы из n многочленов, из которых один линеен, а остальные $n-1$ — константы).*

Доказательство. Пусть $F_e = (a_k^j)$, так что

$$Fe_j = \sum_{\nu} a_j^\nu e_\nu .$$

При гомоморфизме π_f j-тый столбец матрицы $tE - F_e$ перейдёт в

$$Fe_j - \sum_{\nu} a_j^\nu e_\nu = 0,$$

так что все столбцы действительно лежат в ядре. Докажем, что они его порождают.

Пусть столбец $(g_\nu) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \in \ker \pi_F$. Разделим каждый g_ν с остатком на $(t - a_\nu^\nu)$:

$$g_\nu(t) = (t - a_\nu^\nu) q_\nu(t) + c_\nu \ , \quad \text{где} \quad c_\nu \in k \ .$$

Вычтем теперь из столбца (g_ν) линейную комбинацию столбцов матрицы $(tE - F_e)$ с коэффициентами q_ν. При этом мы получим столбец, который по-прежнему лежит в ядре π_F и состоит из многочленов

$$\tilde{g}_n u = a_1^\nu q_1(t) + \cdots + a_{(\nu-1)}^\nu q_{\nu-1}(t) + c_\nu + a_{(\nu+1)}^\nu q_{\nu+1}(t) + \cdots + a_n^\nu q_n(t) \ .$$

Заметим, что если исходный столбец (g_ν) не был столбцом констант, то максимальная степень многочленов нового столбца

$$\max_\nu(\tilde{g}_\nu) \leqslant \max_\nu(q_\nu) < \max_\nu(g_\nu)$$

строго уменьшится. Следовательно, итерируя эту процедуру, мы сможем вычесть из исходного столбца (g_ν) такую линейную комбинацию столбцов матрицы $(tE - F)$ с коэффициентами из $k[t]$, что разность будет столбцом констант. Но в ядре π_F имеется, очевидно, только один столбец констант — нулевой. Тем самым, исходный столбец (g_ν) совпадает с построенной линейной комбинацией столбцов матрицы $(tE - F)$, что и требовалось усмотреть. □

Из леммы следует, что для отыскания d_j мы должны элементарными преобразованиями строк и столбцов над кольцом многочленов $k[t]$ привести матрицу $(tE - F_e)$ к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} d_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n(t) \end{pmatrix} \tag{5-2}$$

в котором диагональные элементы d_i делят все d_j с $j > i$. Тогда эти диагональные элементы и будут искомыми инвариантными множителями. В частности в правом нижнем углу будет стоять минимальный многочлен оператора F.

В некоторых случаях полезно иметь более явное описание многочленов $d_\nu(t)$ в терминах матрицы $tE - F_e$.

5.3.2. Лемма. *Многочлен $d_j(t)$ равен отношению наибольшего общего делителя всех миноров j-того порядка у матрицы $tE - F_e$ к наибольшему общему делителю всех её миноров $(j-1)$-го порядка.*

Доказательство. У результирующей диагональной матрицы наибольший общий делитель миноров j-того порядка равен произведению первых j диагональных элементов (все последующие на них делятся!). Поэтому для доказательства леммы надо проверить, что наибольший общий делитель всех миноров данного порядка не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

Поскольку обратным к элементарному снова будет элементарное преобразование, инвариантность наибольшего общего делителя вытекает из задачи

> Задача 6.27. Пусть матрица A получена из матрицы B одним элементарным преобразованием строк (или столбцов), и пусть все миноры j-того порядка у B делятся на f. Докажите, что тогда и у A все миноры j-того порядка делятся на f.
>
> Указание: В единственном нетривиальном случае, когда к строке прибавляется строка, разложите минор A, содержащий сумму двух строк, в сумму двух миноров, пришедших из B.

Лемма доказана. □

Лекция 7
Билинейные формы

▷Корреляции и билинейные формы ▷Ядра и невырожденность ▷Сопряжение операторов ▷Изометрии ▷Формы и операторы ▷Ортогоналы и проекторы ▷Изотропные подпространства ▷Приведение косых форм ▷Пфаффиан ▷Евклидова, симплектическая, комплексная и эрмитова структуры ▷Поляризация квадратичных форм ▷Теорема Лагранжа ▷Гиперболичность и анизотропность ▷Отражения ▷Теорема Витта ▷Сигнатура вещественных квадратичных форм ▷Формы над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

§1. Билинейные формы и корреляции.

Всюду в этом параграфе через V обозначается векторное пространство над произвольным полем k с $\operatorname{char} k \neq 2$.

1.1. Определение. *Отображение $B: V \times V \longrightarrow k$ называется билинейной формой, если оно удовлетворяет условиям:*

(i) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w) = B(v, \lambda w) \quad \forall v, w \in V \ \forall \lambda \in k$

(ii) $\begin{cases} B(v_1 + v_2, w) &= B(v_1, w) + B(v_2, w) \quad \forall v_1, v_2, w \in V \\ B(v, w_1 + w_2) &= B(v, w_1) + B(v, w_2) \quad \forall v, w_1, w_2 \in V \end{cases}$

То, что билинейная форма является линейным отображением по каждому из своих аргументов, по-другому можно выразить так: фиксация в качестве левого (или правого) аргумента B произвольного вектора v определяет *линейные функционалы*

$$\lambda_B(v) = B(v, *) \in V^*: \ w \mapsto B(v, w)$$

$$\varrho_B(v) = B(*, v) \in V^*: \ w \mapsto B(w, v)$$

причём возникающие таким образом отображения

$$\lambda_B: \ V \longrightarrow V^*: \ v \mapsto B(v, *)$$

$$\varrho_B: \ V \longrightarrow V^*: \ v \mapsto B(*, v)$$

будут *линейными операторами*. Они называются, соответственно, *левой* и *правой корреляциями* билинейной формы B.

1.2. Определение. *Корреляцией на векторном пространстве V называется всякий линейный оператор*
$$\beta:\ V \longrightarrow V^*.$$

1.3. Связь между формами и корреляциями. Всякая билинейная форма B, как мы только что видели, определяет две корреляции на V. Наоборот, по произвольной корреляции $\beta:\ V \longrightarrow V^*$ можно построить две формы L_β и R_β, для которых β будет, соответственно, левой и правой корреляцией:

$$\begin{aligned} L_\beta(v,w) &= \langle \beta v, w\rangle \\ R_\beta(v,w) &= \langle w, \beta v\rangle \end{aligned}$$

(через $\langle \xi, v\rangle$ мы, как и в первой лекции, обозначаем свёртку ковектора ξ и вектора v). Видно, что $L_\beta(v,w) = R_\beta(w,v)$, т.е. L_β и R_β отличаются перестановкой аргументов.

Чтобы выяснить, чем отличаются друг от друга левая и правая корреляции λ_B и ϱ_B одной и той же билинейной формы B на V, вспомним, что имеется каноническое отождествление V с V^{**}, и что каждому оператору
$$F:\ V \longrightarrow W$$
соответствует *сопряжённый оператор* (см. первую лекцию)
$$F^*:\ W^* \longrightarrow V^*,$$
определяемый по правилу $\langle F^*\xi, v\rangle_V = \langle \xi, Fv\rangle_W \quad \forall \xi \in W^*\ \forall v \in V$. Если $W = V^*$ и $F:\ V \longrightarrow V^*$ — корреляция, то $F^*:\ V^{**} = V \longrightarrow V^*$ также будет корреляцией. Она называется *сопряжённой* корреляцией к F. Сопоставляя все определения, видим, что *левая и правая корреляции λ_B и ϱ_B одной и той же билинейной формы B сопряжены*: $\lambda_B^* = \varrho_B$.

Задача 7.1. Убедитесь в этом!

Таким образом, задание билинейной формы B равносильно заданию, например, правой корреляции ϱ_B, а сопряжённая корреляция $\varrho_B^* = \lambda_B$ будет левой корреляцией для B и правой корреляцией для *транспонированной* формы $B'(v,w) = B(w,v)$.

1.4. Симметричные и кососимметричные формы. Форма B называется *симметричной* или *кососимметричной* в соответствии с тем, удовлетворяет ли она равенству
$$B(v,w) = B(w,v) \quad \forall v,w \in V$$
или равенству
$$B(v,w) = -B(w,v) \quad \forall v,w \in V$$

Задача 7.2. Докажите, что над полем k с $\mathrm{char}(k) \neq 2$ второе условие на билинейную форму B равносильно условию $B(v,v) = 0 \quad \forall v \in V$.

Указание: см. последнюю лекцию прошлого семестра.

Произвольная билинейная форма B однозначно представима в виде суммы симметричной и кососимметричной:
$$B(v,w) = B_+(v,w) + B_-(v,w),$$

где

$$B_+(v,w) = \frac{B(v,w)+B(w,v)}{2} \quad B_-(v,w) = \frac{B(v,w)-B(w,v)}{2}$$

Задача 7.3. Убедитесь, что совокупность всех билинейных форм $\mathcal{B}(V)$ на векторном пространстве V является векторным пространством, а симметричные формы $\mathcal{B}_+(V)$ и кососимметричные формы $\mathcal{B}_-(V)$ — трансверсальные подпространства в нём, причём $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_+(V) \oplus \mathcal{B}_-(V)$.

Задача 7.4. Вычислите $\dim \mathcal{B}(V)$, $\dim \mathcal{B}_+(V)$ и $\dim \mathcal{B}_-(V)$, если $\dim V = n$.

1.5. Матрицы Грама Если $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ — какой-то набор векторов, то значение билинейной формы $B(w_1, w_2)$ на любых векторах w_1, w_2 из их линейной оболочки однозначно определяется, если известна матрица всевозможных значений $B(v_i, v_j)$. Эта матрица обозначается $G_B(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ и называется матрицей Грама формы B в наборе $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Если (x_1) и (x_2) — столбцы коэффициентов разложений векторов w_1, w_2 по образующим v_i, то

$$B(w_1, w_2) = (x_1)^t G(x_2),$$

где $G = G_B(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Если $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_m)C_{v\tau}$, то

$$G_B(\tau) = C^t_{v\tau} G_B(v) C_{v\tau}$$

Матрица Грама билинейной формы B в *базисе* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V совпадает с матрицей оператора правой корреляции ρ_B в двойственных базисах $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ пространств V и V^*. Действительно, числа $B(e_1, e_k), \ldots, B(e_n, e_k)$, равные, по определению, значениям $\langle \rho e_k, e_1\rangle, \ldots, \langle \rho e_k, e_n\rangle$, являются в точности координатами функционала ρe_k в двойственном к $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базисе $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ пространства V^*.

Задача 7.5. Убедитесь, что оператор левой корреляции λ_B будет задаваться транспонированной матрицей.

1.6. Ядра и невырожденность. Ядра левой и правой корреляций билинейной формы B

$$\begin{aligned} {}^\perp V_B &= \{v \mid B(v,w) = 0 \quad \forall w \in V\} & &= \ker \lambda_B \\ V_B^\perp &= \{v \mid B(w,v) = 0 \quad \forall w \in V\} & &= \ker \rho_B \end{aligned}$$

называются соответственно *левым* и *правым ядром* формы B. Их коразмерности равны размерностям образов левой и правой корреляций, а стало быть, они одинаковы и совпадают с рангом матрицы Грама формы B в произвольном базисе пространства V.

Таким образом *левое и правое ядро имеют одинаковую размерность*. Эта размерность называется *корангом* формы B и равна $\dim V - \operatorname{rk} G_B$, где G_B — матрица Грама B в любом базисе. Число $\operatorname{rk} G_B$ не зависит от выбора базиса и называется *рангом* формы B. Ранг и коранг формы B обозначаются через $\operatorname{rk} B$ и $\operatorname{cork} B$. Из сказанного немедленно следует

1.6.1. Утверждение. *Для билинейной формы B на V следующие условия равносильны:*
(i) $\det G_B \neq 0$
(ii) правая корреляция $\rho_\beta : V \longrightarrow V^*$ — изоморфизм.
(iii) левая корреляция $\lambda_\beta : V \longrightarrow V^*$ — изоморфизм.

(iv) $\forall v \neq 0\ \exists w :\ B(v,w) \neq 0$
(v) $\forall v \neq 0\ \exists w :\ B(w,v) \neq 0$

Форма B, удовлетворяющая перечисленным условиям, называется *невырожденной*.

1.6.2. Ядра (косо)симметричных форм. Исследование симметричных или кососимметричных билинейных форм легко сводится к изучению невырожденных форм.

Левое ядро (косо)симметричной формы B совпадает с правым ядром. Назовём его просто *ядром формы* и обозначим $\ker B$. Если U — какое-либо дополнительное к $\ker B$ подпространство, то ограничение B_U формы B на U будет невырожденно, и в любом базисе, согласованном с разложением $V = \ker B \oplus U$, форма B будет иметь блочную матрицу Грама $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_U \end{pmatrix}$ с $\det B_U \neq 0$.

Задача 7.6. Проверьте, что верно и обратное: если форма имеет матрицу Грама указанного вида, то ядро формы представляет собой линейную оболочку первых базисных векторов (отвечающих левому верхнему нулевому блоку).

Задача 7.7. Докажите, что правило $\tilde{B}([v],[w]) \stackrel{\text{def}}{=} B(v,w)$ корректно определяет (косо)симметричную билинейную форму на $V/\ker B$ и эта форма невырождена.

Задача 7.8. Пусть U и W — два дополнительных подпространства к ядру $\ker B$. Докажите, что проекция U на W вдоль $\ker B$ является изометрическим[1] изоморфизмом.

Иначе говоря, всякое пространство с (косо)симметричной формой есть прямая огтогональная сумма ядра и пространства с невырожденной формой, причём последнее определяется по исходной форме однозначно с точностью до изоморфизма, сохраняющего первоначальную форму и тождественного на ядре.

§2. Невырожденные формы.

В этом параграфе мы обсудим свойства певырожденных билинейных форм над любым полем характеристики $\neq 2$. Оказывается, что даже без условий симметричности и положительной определённости невырожденные билинейные формы сохраняют многие геометрические свойства скалярного произведения.

2.1. Сопряжение операторов. Пусть $V \xrightarrow{F} W$ — линейный оператор, а $W^* \xrightarrow{F^*} V^*$ — сопряжённый оператор, так что $\langle F^*\xi, v\rangle_V = \langle \xi, Fv\rangle_W \quad \forall \xi \in W^*$ и $\forall v \in V$. Если на пространствах V и W имеются невырожденные билинейные формы, то мы можем отождествить V^* с V, а W^* с W посредством левых или правых корреляций, и рассматривать оператор F^* как оператор из W в V. Говоря более формально, существуют и единственны такие операторы ${}^\vee F$ и $F^\vee$, которые включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\sim]{\lambda_{B_W}} & W^* \\ {}^\vee F\big\uparrow & & \big\uparrow F \\ V & \xrightarrow[\sim]{\lambda_{B_V}} & V^* \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\sim]{\varrho_{B_W}} & W^* \\ F^\vee\big\uparrow & & \big\uparrow F \\ V & \xrightarrow[\sim]{\varrho_{B_V}} & V^* \end{array}$$

[1] Т.е. значение формы на любой паре векторов из U будет совпадать со значением формы на паре их образов в W.

Оператор ${}^{\vee}F = \lambda_{B_V}^{-1} F^* \lambda_{B_W}$ называется *левым сопряжённым*, а оператор $F^{\vee} = \varrho_{B_V}^{-1} F^* \varrho_{B_W}$ — *правым сопряжённым* оператором к оператореу F. Условия

$$\lambda_{B_V} {}^{\vee}F = F^* \lambda_{B_W} \qquad \text{и} \qquad \varrho_{B_V} F^{\vee} = F^* \varrho_{B_W}$$

эквивалентны условиям

$$\begin{array}{rcl} B_V({}^{\vee}Fw, v) & = & B_W(w, Fv) \\ B_V(v, F^{\vee}w) & = & B_W(Fv, w) \end{array} \qquad \forall v \in V\ \forall w \in W$$

Если $V = W$, а форма $B_V = B_W$ симметрична, кососимметрична или эрмитова, две написанные выше формулы равносильны друг другу. В этих случаях левый и правый сопряжённый операторы совпадают друг с другом и с тем сопряжённым оператором, который мы определили в лекции 5. Таким образом, термин «сопряжённый», который мы использовали в лекции 5 и в лекции 1 в различных контекстах, в действительности описывал одно и то же явление.

Задача 7.9. Выразите матрицу сопряжённого оператора в некоторых базисах через матрицы Грама этих базисов и матрицу исходного оператора.

Задача 7.10. Проверьте, что и левое и правое сопряжение являются линейными антиизоморфизмами алгебры $\mathrm{Hom}(V, W)$ с алгеброй $\mathrm{Hom}(W, V)$.

Задача 7.11. Приведите пример оператора на пространстве с билинейной несимметричной формой, который не равен своему дважды сопряжённому.

Задача 7.12. Докажите, что условия

$${}^{\vee\vee}F = F \qquad {}^{\vee}F = F^{\vee} \qquad F^{\vee\vee} = F$$

попарно эквивалентны (соответствующие операторы называются *рефлексивными*).

2.2. Изометрии. По аналогии с евклидовыми пространствами, линейный оператор $V \xrightarrow{F} W$ между пространствами с билинейными формами B_V и B_W называется *изометрическим*, если

$$B_W(Fv_1, Fv_2) = B_V(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

Под *изоморфизмом* пространств с билинейной формой всегда понимается их изометрический изоморфизм. Две формы на одном пространстве называются *эквивалентными*, если существует изометрический изоморфизм этого пространства как пространства с одной из форм на себя же, но как пространство с другой формой (т.е. если $B_1(v, w) = B_2(Fv, Fw)\ \forall v, w \in V$ для некоторого $F \in GL(V)$)

2.2.1. Лемма. *Если форма на пространстве V невырождена, то всякий изометрический оператор $F: V \longrightarrow W$ в любое пространство W с (возможно, вырожденной) билинейной формой является вложением.*

Доказательство. $\forall v \in \ker F$, $\forall w \in V$ имеем

$$B_V(v, w) = B_W(Fv, Fw) = B_W(0, Fw) = 0,$$

откуда $v \in \ker \lambda_{B_V} = 0$.

2.2.2. Следствие. *Всякий изометрический оператор на пространстве с невырожденной билинейной формой обратим.*

Задача 7.13. Докажите, что для обратимого оператора $F: V \longrightarrow W$ усовия

$$F \text{ — изометрия} \qquad {}^{\vee}F = F^{-1} \qquad F^{\vee} = F^{-1}$$

попарно эквивалентны (в частности, всякий изометричный оператор рефлексивен).

2.3. Формы и операторы. На пространстве с невырожденной билинейной формой имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и билинейными формами.

2.3.1. Утверждение. *Если на векторном пространстве V над произвольным полем k фиксирована невырожденная билинейная форма $B: V \times V \longrightarrow k$, то для любой билинейной формы $Q: V \times V \longrightarrow k$ существует и единственен линейный оператор $F_Q: V \longrightarrow V$ такой, что $\forall v, w \in V$*

$$Q(v, w) = B(v, F_Q w).$$

Доказательство. Написанное условие равносильно тому, что в любом базисе $e = \{e_\nu\}$ пространства V матрица оператора F_Q выражается через матрицы Грама $B_e = (B(e_i, e_j))$ и $Q_e = (Q(e_i, e_j))$ по формуле

$$F_Q = B_e^{-1} Q_e .$$

□

В случае, когда пространство V евклидово, а в качестве невырожденной формы берётся скалярное произведение, соответствие между формами и операторами получается особенно простым. Действительно, зафиксировав ортонормированный базис пространства V, мы должны будем сопоставить билинейной форме линейный оператор, матрица которого совпадает с матрицей Грама этой формы. В частности, (косо)симметричным формам будут соответствовать в точности (анти)самосопряжённые операторы. Вспоминая результаты о диагонализации нормальных операторов (см. лекцию 5), мы получаем

2.3.2. Следствие. *Всякая симметрическая билинейная форма в евклидовом пространстве может быть в подходящем ортонормальном базисе записана диагональной матрицей Грама, причём совокупность диагональных элементов не зависит от выбора ортонормального базиса.*

2.3.3. Следствие. *Всякая кососимметрическая билинейная форма в евклидовом пространстве может быть в подходящем ортонормальном базисе записана матрицей Грама*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} , \quad \text{где} \quad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -a_\nu \\ a_\nu & 0 \end{pmatrix} , \tag{2-1}$$

где $a_\nu \in \mathbb{R}$ положительны и не зависят от выбора ортонормального базиса.

Эти результаты можно применять, к примеру, для одновременного приведения пары симметрических форм на вещественном векторном пространстве к заданным видам.

Задача 7.14. Пусть на вещественном векторном пространстве заданы две пары симметричных билинейных форм (A_1, A_2) и (B_1, B_2), причём хотя бы одна из форм в каждой паре невырождена. Докажите, что одна пара тогда и только тогда может быть преобразована в другую подходящей линейной заменой координат, когда $\det(A_1 + \lambda A_2) = \det(B_1 + \lambda B_2)$ как многочлены от λ.

§3. Ограничение формы на подпространство

3.1. Ортогоналы. Пусть $U \subset V$ — подпространство. Его *правым* и *левым ортогоналами* относительно билинейной формы B называются подпространства

$$U_B^{\perp} = \operatorname{Ann}(\lambda_B(U)) = \{v \in V \mid B(u,v) = 0 \quad \forall u \in U\}$$
$${}^{\perp}U_B = \operatorname{Ann}(\varrho_B(U)) = \{v \in V \mid B(v,u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

Из невырожденности формы следует, что $\dim \lambda_B(U) = \dim \varrho_B(U) = \dim U$, так что

$$\dim {}^{\perp}U = \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U\ .$$

3.1.1. Лемма. *Следующие условия равносильны:*
(i) Ограничение формы B на подпространство U невырожденно.
(ii) $V = U \oplus U^{\perp}$
(iii) $V = U \oplus {}^{\perp}U$

Доказательство. Условие (i) равносильно каждому из условий

$$\forall \text{ ненулевого } u \in U\ \exists u' \in U:\ \ B(u', u) \neq 0$$

$$\forall \text{ ненулевого } u \in U\ \exists u'' \in U:\ \ B(u, u'') \neq 0$$

которые означают, соответственно, что ${}^{\perp}U \cap U = 0$ и $U \cap U^{\perp} = 0$. Из соображений размерности, эти равенства равносильны свойствам (ii) и (iii). □

3.1.2. Следствие. *Условия на подпространство $U \subset V$:*
(i) ограничение формы B на U невырожденно;
(ii) ограничение формы B на ${}^{\perp}U$ невырожденно;
(iii) ограничение формы B на $U^{\perp}$ невырожденно
попарно эквивалентны.

3.2. Изотропные подпространства. Разумеется, ограничение невырожденной билинейной формы на подпространство не всегда является невырожденной формой. Более того, это ограничение может оказаться нулевым. Подпространства, на которые билинейная форма ограничивается в тождественно нулевую, называются *изотропными*. Ненулевые векторы v, для которых $B(v,v) = 0$ называются *изотропными векторами*. Они порождают одномерные изотропные подпространства.

3.2.1. Лемма. *Пусть U является изотропным подпространством в векторном пространстве V с невырожденной билинейной формой. Тогда $2 \dim U \leqslant \dim V$.*

Доказательство. Если $U \subset V$ изотропно, то $U \subset U^{\perp}$. Поэтому

$$\dim U \leq \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U,$$

что и требовалось.

Примечательно, что эта оценка является точной.

3.3. Пример: гиперболическое пространство H_{2n} по определению, представляет собой прямую сумму $V^* \oplus V$ (где $\dim V = n$). На нём имеется каноническая симметричная билинейная форма h, которая ограничивается в тождественно нулевую форму на V и на V^*, а на паре вектор-ковектор принимает значение равное свёртке:

$$h(\xi, v) = h(v, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi, v \rangle \quad \forall \xi \in V^* \, \forall v \in V.$$

По этим данным h однозначно восстанавливается, и её действие на произвольные $w_1 = \xi_1 + v_1$ и $w_2 = \xi_2 + v_2$ задаётся формулой:

$$h(w_1, w_2) = \langle \xi_1, v_2 \rangle + \langle \xi_2, v_1 \rangle.$$

Если выбрать в H_{2n} базис, состоящий из произвольного базиса в V и двойственного ему базиса в V^*, то матрица Грама формы h в таком базисе будет иметь блочный вид: $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где 0 — нулевая, а E — единичная $n \times n$-матрицы. Поэтому h невырождена, а V и V^* являются изотропными подпространствами половинной размерности в H_{2n}.

Задача 7.15. Докажите, что следующие условия на подпространство с невырожденной симметричной формой попарно эквивалентны:

а) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству;

б) V является прямой суммой двух изотропных подпространств;

в) $\dim V$ — чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

3.4. Пример: симплектическое пространство Ω_{2n} определяется аналогично гиперболическому пространству. А именно, рассмотрим, как и выше, прямую сумму $V^* \oplus V$ (где $\dim V = n$) и определим на ней кососимметричную билинейную форму ω, которая действует на произвольные $w_1 = \xi_1 + v_1$ и $w_2 = \xi_2 + v_2$ по правилу:

$$\omega(w_1, w_2) = \langle \xi_1, v_2 \rangle - \langle \xi_2, v_1 \rangle.$$

Задача 7.16. Убедитесь, что в базисе пространства Ω_{2n}, составленном из произвольного базиса в V и двойственного ему базиса в V^*, матрица Грама формы ω имеет блочный вид: $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, где 0 — нулевая, а E — единичная $n \times n$-матрицы.

Из этой задачи немедленно вытекает, что ω невырождена, а V и V^* являются изотропными подпространствами половинной размерности в Ω_{2n}. Матрица J называется *симплектической единицей* (отметьте, что $\det J = 1$ и $J^2 = -E$). Базис, в котором невырожденная билинейная кососимметричная форма имеет матрицу Грама J, называется *симплектическим базисом* для этой формы.

Оказывается, что всякое пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно симплектическому пространству (и в частности, автоматически чётномерно). Это вытекает из следующей фундаментальной теоремы.

3.5. Теорема. *Пусть на векторном пространстве V задана невырожденная кососимметричная форма $\alpha(v, w)$. Тогда в V можно выбрать базис в котором матрица Грама формы α имеет блочно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В качестве первого базисного вектора конструируемого базиса выберем произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Поскольку форма невырождена, должен найтись вектор $w \in V$, такой что $\alpha(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = a^{-1} \cdot w$. Матрица Грама ограничения исходной формы на линейную оболочку V_{12} векторов e_1 и e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и следовательно, это ограничение невырожденно. По лемме из Лем.3.1.1 имеется разложение $V = V_{12} \oplus W$, где $W = {}^{\perp}V_{12} = V_{12}^{\perp}$ (ортогоналы совпадают вследствие кососимметричности формы!). По лемме из Сл.3.1.2 ограничение формы на подпространство W невырожденно. Применяя индукцию по размерности, мы можем выбрать в W базис с нужными свойствами. Объединяя его с векторами e_1 и e_2, мы получим искомый базис в V. □

Задача 7.17. Что служит базой индукции в проделанном выше рассуждении?

Задача 7.18. Убедитесь, что пространство с формой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

изометрично симплектическому пространству.

Задача 7.19. Убедитесь непосредственно, что определитель кососимметричной квадратной матрицы нечётного размера равен нулю.

Задача 7.20. Докажите, что пространство с кососимметричной формой распадается в прямую сумму ядра формы и пространства с невырожденной кососимметричной формой (автоматически чётномерного).

Таким образом, мы получили полное описание кососимметричных билинейных форм. Любопытным следствием этого описания является такой факт.

Пусть $A = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = -a_{ji}$ — кососимметричная матрица чётного размера. Если её коэффициенты над главной диагональю a_{ij} с $i < j$ рассматриваются как независимые переменные, то в кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ многочленов с целыми коэффициентами от этих переменных можно извлечь квадратный корень из $\det(a_{ij})$. Точнее, имеет место

3.6. Теорема. *Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметричная матрица чётного размера. Существует единственный многочлен $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, такой что*

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Pf}\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\right) = 1\ .$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу A как матрицу кососимметричной формы на координатном векторном пространстве над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с $i < j$. Она, очевидно, невырожденна, а стало быть в подходящем базисе имеет матрицу Грама

$$\Omega_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\ .$$

На языке матриц это означает, что $A = C^t \cdot \Omega_{2n} \cdot C$ для некоторой матрицы C, элементы которой суть отношения полиномов от a_{ij} с рациональными коэффициентами. Переходя к определителям, получаем $\det(A) = \det(C)^2$.

Далее, $\det(C)$ можно записать в виде отношения двух многочленов с целыми коэффициентами, не имеющих общих делителей в $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кроме, может быть ± 1. Многочлен-знаменатель в таком представлении обязан быть равен ± 1, поскольку $\det(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, а в кольце многочленов от нескольких переменных с целыми коэффициентами справедлива теорема об однозначности разложения на простые множители. Следовательно, $\det(C) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$.

Задача 7.21. Убедитесь, что если уравнение

$$F(t_1, \ldots, t_n) = X(t_1, \ldots, t_n)^2$$

разрешимо относительно X в кольце $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$, то решение единственно с точностью до знака.

В нашем случае знак однозначно выбирается из условия $\mathrm{Pf}\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$. $\square$

Корень из определителя кососимметрической матрицы чётного размера, нормированный так, как указано в теореме, называется *пфаффианом*. Как и определитель, пфаффиан является неким универсальным многочленом от коэффициентов матрицы.

Задача 7.22. Напишите явные формулы для пфаффианов 2-го, 4-го и 6-го порядка.

Значение пфаффиана на какой-либо конкретной числовой матрице называется *пфаффианом этой матрицы*.

§4. Овеществление эрмитова пространства

Если W —комплексное эрмитово пространство, то его овеществление $W_{\mathbb{R}}$ наследует три геометрических структуры, взаимодействие которых мы сейчас обсудим.

4.1. Евклидова, симплектическая и комплексная структуры на $W_{\mathbb{R}}$ Пусть W — n-мерное комплексное эрмитово пространство. Его овеществление $W_{\mathbb{R}}$ является вещественным $2n$-мерным пространством. Как мы видели в лекции 4, оператор умножения векторов комплексного пространства W на комплексное число i в овеществлении $W_{\mathbb{R}}$ наблюдается в виде линейного оператора *комплексной структуры* $I \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}) : \; I^2 = -E$

Эрмитова форма $(v, w) : \; W \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ является вещественно-билинейной комплекснозначной формой. Разделяя у неё вещественную и мнимую части, получим две вещественно-билинейных вещественнозначных формы на $W_{\mathbb{R}}$:

$$g : \; W_{\mathbb{R}} \times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} : \; g(v, w) = \mathrm{Re}(v, w)$$

$$\omega : \; W_{\mathbb{R}} \times W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} : \; \omega(v, w) = \mathrm{Im}(v, w)$$

Из эрмитовости $(v, w) = \overline{(w, v)}$ вытекает, что g является *симметричной*, а ω — *кососимметричной* формой. Из условия $(v, v) > 0 \; \forall v \neq 0$ следует, что g — положительно определена. Таким образом, *вещественная часть эрмитовой формы на W задаёт евклидову структуру на $W_{\mathbb{R}}$*.

Кососимметрическая форма ω является *невырожденной* и определяет на $W_{\mathbb{R}}$ структуру симплектического пространства.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим в W комплексный базис

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \, ,$$

ортонормированный относительно эрмитовой структуры на W и построим по нему базис

$$\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$$

овеществлённого пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Равенства

$$(e_\mu, e_\nu) = (ie_\mu, ie_\nu) = \delta_{\mu\nu}$$

$$(ie_\mu, e_\nu) = -(e_\mu, ie_\nu) = i(e_\mu, e_\nu) = i\delta_{\mu\nu}$$

показывают, что базис $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ является ортонормированным для симметричной формы g и симплектическим для кососимметричной формы ω, т.е. матрица Грама формы ω имеет в нём блочный вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} ,$$

где E — единичная $n \times n$-матрица (обратите внимание, что матрица оператора комплексной структуры I в базисе $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ также совпадает с J).

Таким образом, на овеществлении $W_{\mathbb{R}}$ комплексного эрмитова пространства W имеется комплексная структура I, евклидова структура g и симплектическая структура ω. Эти структуры не произвольны друг по отношению к другу, а связаны некоторыми *условиями согласованности*.

4.2. Согласованность форм g и ω с комплексной структурой. Поскольку эрмитова форма удовлетворяет равенствам:

$$(iv, iw) = (v, w) \qquad \text{и} \qquad (v, iw) = -i(v, w),$$

оператор комплуксной структуры I удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} g(Iv, Iw) &= g(v, w) \\ \omega(Iv, Iw) &= \omega(v, w) \qquad \forall v, w \in W_{\mathbb{R}}. \\ g(v, Iw) &= \omega(v, w) \end{cases}$$

Первые два условия означают, что I является *изометрией* как для g, так и для ω.

4.2.1. Утверждение. *Пусть W — $2n$-мерное вещественное векторное пространство. Для каждого из следующих двух наборов данных:*

(i) евклидовой формы $\omega:\ V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ и её изометрии I с $I^2 = -E$

(ii) симплектической формы $g:\ W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ и её изометрии I с $I^2 = -E$

на W имеется единственная структура комплексного эрмитова n-мерного пространства, индуцирующая при овеществлении эти вещественные данные.

Доказательство. Зададим на W умножение векторов на комплексные числа при помощи оператора I (как это объяснялось в прошлой лекции), и определим форму (v, w) правилами:

в случае (i) : $(v, w) = g(v, w) + ig(v, Iw)$;

в случае (ii) : $(v, w) = -\omega(v, Iw) + i\omega(v, w)$;

Проверим, что в первом случае получается эрмитова форма. Для этого положим

$$\omega(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} g(v, Iw),$$

так что $(v, w) = g(v, w) + i\omega(v, w)$. Убедимся, что ω — кососимметрична:

$$\omega(w, v) = g(w, Iv) = g(Iw, I^2v) = -g(Iw, v) = -g(v, Iw) = -\omega(v, w)$$

Но тогда $(v, w) = \overline{(w, v)}$ и $(v, v) = g(v, v) > 0\ \forall v \neq 0$. Для проверки полуторалинейности достаточно убедиться, что $(iv, w) = i(v, w) = -(v, iw)$, т.е. что

$$g(Iv, w) = -\omega(v, w) = -g(v, Iw)$$

Но это следует из того, что I изометрия для g и из $I^2 = -E$.

Задача 7.23. Проверьте, что во втором случае также получается эрмитова форма.

$\square$

4.3. Согласованность евклидовой и симплектической структуры. Чтобы найти условия согласованности форм g и ω необходимые и достаточные для того, чтобы восстановить эрмитову структуру, построим такой оператор $A:\ W \longrightarrow W$, что

$$g(v, Aw) = \omega(v, w) \quad \forall v, w \in W.$$

D ортонормированном базисе для g матрица оператора A будет совпадать с матрицей Грама формы ω. Поэтому A будет кососимметричным оператором[2]. Как мы видели, в W можно

[2]Это видно и без матриц:

$$g(v, Aw) = \omega(v, w) = -\omega(w, v) = -g(w, Av) = g(w, -Av) = g(-Av, w)$$

показывает, что $A^* = -A$

выбрать такой ортонормальный (относительно g) базис, чтобы A записывался в нём матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -a_\nu \\ a_\nu & 0 \end{pmatrix}, \tag{4-2}$$

где $a_\nu \in \mathbb{R}$ положительны и однозначно определяются тем, что $\{\pm i a_\nu\}$ — это в точности все (с учётом кратностей) корни характеристического многочлена оператора A. Поскольку симплектическая структура, индуцированная эрмитовой формой, имеет $a_\nu = 1$, мы получаем

4.3.1. Следствие. *Пусть W — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $g(v, w)$. Следующие свойства билинейной кососимметричной формы $\omega:\ W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ попарно эквивалентны:*

(i) На W имеется эрмитова структура, индуцирующая g и ω.

(ii) В ортонормальном базисе для формы g матрица Грама формы ω имеет характеристический многочлен $(t^2 + 1)^n$.

(iii) В ортонормальном базисе для формы g форма ω имеет матрицу Грама Ω, удовлетворяющую условию $\Omega^2 = -E$.

Задача 7.24. Докажите, что в симплектическом пространстве всегда можно найти симплектический базис.

Задача 7.25. Докажите, что в симплектическом пространстве всегда можно ввести эрмитову структуру, которая бы индуцировала имеющуюся на нём симплектическую форму как мнимую часть эрмитова скалярного произведения.

Задача 7.26. Докажите, что все изометрии симплектического пространства (т.е. операторы $F:\ \omega(Fv, Fw) = \omega(v, w)\ \forall v, w$) имеют определитель 1 и возвратный характеристический многочлен (т.е. $\chi(t) = t^{2n}\chi(t^{-1})$, где $2n$ — это размерность пространства).

§5. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы изучим структуру векторного пространства V с симметричной билинейной формой B над любым полем характеристики $\neq 2$.

5.1. Определение. *Функция от одного аргумента*

$$q:\ V \longrightarrow k:\quad v \longmapsto q(v) \in k$$

*называется **квадратичной формой**, если в координатах относительно какого-либо базиса эту функцию можно представить однородным многочленом степени 2.*

Задача 7.27. Убедитесь, что свойство функции быть квадратичной формой не зависит от выбора базиса, а также что квадратичные формы составляют векторное пространство размерности $n(n+1)/2$, если $\dim V = n$.

5.2. Поляризация квадратичных форм.

5.2.1. Утверждение. *Отображение, сопоставляющее всякой симметричной билинейной форме $B(\cdot,\cdot)$ на пространстве V функцию*

$$q_B : \ V \longrightarrow k : \quad v \longmapsto q_B(v) \stackrel{\text{def}}{=} B(v,v) \in k \ ,$$

является линейным изоморфизмом между пространством билинейных симметричных форм и пространством квадратичных форм на V.

Доказательство. Наше отображение являетяся, очевидно, линейным оператором между пространствами одинаковой размерности, поэтому достаточно будет проверить его инъективность. Чтобы сделать это, заметим, что симметричная билинейная форма $B(v,w)$ может быть восстановлена по своему образу q_B по формуле

$$B(v,w) = \frac{1}{2}\Big(q_B(v+w) - q_B(v) - q_B(w)\Big) \ .$$

Из этой формулы немедленно вытекает импликация $q_B = 0 \Longrightarrow B = 0$. □

В качестве следствия мы получаем, что для всякой квадратичной формы $q(v)$ на V существует единственная симметричная билинейная форма $B_q(v,w)$, из которой эта квадратичная форма получается «ограничением на диагональ в $V \times V$»: $q(v) = B_q(v,v)$. Билинейная форма B_q называется *поляризацией* q. Из доказательства предложения вытекает, что поляризацию можно вычислять по явной формуле

$$B_q(v,w) = \frac{1}{2}\Big(q(v+w) - q(v) - q(w)\Big) \ .$$

Задача 7.28. Найдите матрицу Грама поляризации квадратичной формы

$$q(x) = \sum_{i \leqslant j} a_{ij} x^i x^j \ .$$

Мы видим, таким образом, что симметричные билинейные формы и квадратичные формы — это два эквивалентных языка для описания одного и того же алгебраического явления. В дальнейшем мы будем свободно переходить с одного языка на другой без подробных комментариев.

5.3. Теорема. (Теорема Лагранжа) *Над полем характеристики $\neq 2$ любая (даже, возможно, вырожденная) симметричная билинейная форма в подходящем базисе будет иметь диагональную матрицу Грама. При этом число ненулевых диагональных элементов от выбора такого базиса не зависит (и равно рангу формы).*

Терминологическое замечание: всякий базис, удовлетворяющий условиям теоремы, называется *ортогональным.*

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $V = 0$ или форма нулевая, то доказывать нечего. Если форма ненулевая, то ненулевой будет и соответствующая квадратичная форма, т.е. $\exists v \in V : \ B(v,v) \neq 0$. Тогда $\varrho_B(v) \neq 0$ и

$$\operatorname{Ann} \varrho_B(v) = \{w \in V \mid B(w,v) = 0\} \subset V$$

будет подпространством коразмерности 1, трансверсальным вектору v. По предположению индукции в этом подпространстве существует ортогональный базис для ограничения B. Добавляя к этому базису вектор v, получим ортогональный базис для B в V. □

5.3.1. Следствие. *Над алгебраически замкнутым полем всякая квадратичная форма линейной заменой координат приводится к сумме квадратов*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2,$$

количество которых равно рангу формы и не зависит от способа приведения.

5.3.2. Следствие. *Над полем вещественных чисел всякая квадратичная форма линейной заменой координат приводится к виду*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2,$$

в котором число слагаемых не зависит от способа приведения и равно рангу формы.

Задача 7.29. Каков диагональный вид формы на гиперболическом пространстве H_{2m}?

5.4. Определение. *Пространство с невырожденной квадратичной формой называется анизотропным, если оно не содержит ненулевых изотропных подпространств.*

Анизотропность равносильна отсутствию ненулевых изотропных векторов, т.е. эквивалентна условию $B(v, v) = 0 \Longrightarrow v = 0$.

Задача 7.30. Убедитесь, что над полем вещественных чисел анизотропны только положительно определённые и отрицательно определённые квадратичные формы (последние определяются условием $q(v) < 0\ \forall v \neq 0$).

Таким образом, при работе над произвольным полем анизотропность можно воспринимать как заменитель свойства положительной (или отрицательной) *определённости* вещественной формы.

5.4.1. Утверждение. *Всякое пространство с симметричной билинейной формой распадается в прямую ортогональную сумму ядра формы, гиперболического пространства и анизотропного пространства.*

Доказательство. Как мы уже видели в n° 1.6.2, пространство V с формой B является прямой ортогональной суммой $V = R \oplus U$ ядра $R = \ker B$ и любого дополнительного к нему подпространства U, причём ограничение формы на U невырождено. Поэтому достаточно доказать, что всякое пространство U с невырожденной формой есть прямая ортогональная сумма гиперболического и анизотропного подпространств. Докажем это индукцией по $\dim U$.

Если U само анизотропно (а это так при $\dim U = 1$), то доказывать нечего. Если в U есть ненулевой изотропный вектор u, то вследствие невырожденности формы существует вектор u', такой что $B(u', u) = b \neq 0$. Линейная оболочка u и u' представляет собой гиперболическую плоскость H_2.

Действительно, равенство

$$B(u' + \lambda u, u' + \lambda u) = B(u', u') + 2b\lambda$$

показывает, что без изменения линейной оболочки можно заменить u' на изотропный вектор $w = u' - \dfrac{B(u',u')}{2b}u$. Так как $B(w,u) = B(u',u) = b$, вектор w можно заменить на пропорциональный вектор $v = b^{-1}w$. В базисе $\{u,v\}$ матрица Грама ограничения формы B будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, что и требовалось.

Так как гиперболическая плоскость невырождена, мы получаем ортогональное разложение $U = H_2 \oplus H_2^{\perp}$, причём ограничение формы на $H_2^{\perp}$ невырождено. По индукции $H_2^{\perp}$ является прямой ортогональной суммой гиперболического и анизотропного пространства. Но тогда это верно и для U, ибо прямая ортогональная сумма гиперболических пространств H_{2m} и H_{2l} является гиперболическим пространством $H_{2(m+l)}$. □

5.4.2. Пример. Пусть квадратичная форма имеет вид

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2,$$

в котором, скажем, число плюсов p не меньше числа минусов m. Тогда ядром такой формы является линейная оболочка тех координат $x_{p+m+1}, \dots, x_n$, которые не присутствуют в формуле. В качестве гиперболического ортогонального слагаемого можно взять линейную оболочку координат $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{p+1}, \dots, x_{p+m}$, а в качестве анизотропного ортогонального слагаемого можно взять линейную оболочку остальных координат $x_{m+1}, \dots, x_p$.

5.5. Отражения. Пусть V —пространство с невырожденной симметричной билинейной формой B, и $v \in V$ — любой анизотропный вектор. Тогда V распадается в прямую ортогональную сумму $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$, где $k\cdot$ — одномерное подпространство, натянутое на вектор v, а $\langle v \rangle^{\perp} = \operatorname{Ann} \varrho_B(v) = \{w \in V \mid B(w,v) = 0\}$ — его ортогональное дополнение, причём ограничение формы на оба подпространства невырождено. Линейный оператор $\sigma_v : V \longrightarrow V$, который меняет знак у v и тождественно действует на $\langle v \rangle^{\perp}$, называется *отражением в гиперплоскости* $\langle v \rangle^{\perp}$.

Задача 7.31. Убедитесь, что $\forall w \in V$

$$\sigma_v(w) = w - 2\frac{B(w,v)}{B(v,v)}v.$$

Задача 7.32. Убедитесь, что отражение обратно само себе и является изометрией.

Задача 7.33. Пусть $F : V \longrightarrow V$ — изометрия. Удостоверьтесь, что $\sigma_{Fv} = F\sigma_v F^{-1}$.

5.5.1. Лемма. *В пространстве с невырожденной симметричной формой для любых двух различных векторов u, v, таких что $B(u,u) = B(v,v) \neq 0$, существует отражение, переводящее u либо в v либо в $-v$.*

Доказательство. Можно считать, что u и v неколлинеарны, т.к. иначе $u = \pm v$ и таковым отражением будет $\sigma_v = \sigma_u$.

Итак, пусть на u и v можно натянуть невырожденный параллелограмм (а точнее — ромб). Геометрически очевидно, что искомое отражение надо делать относительно одной из диагоналей этого ромба.

Формально: векторы $e_1 = u + v$ и $e_2 = u - v$ ортогональны (ибо $B(e_1,e_2) = B(u,u) - B(v,v) = 0$) и порождают то же подпространство, что и u и v, а значит хоть один из них да анизотропен. Если это e_2, то σ_{e_2} переводит в себя e_1 и меняет знак у e_2, т.е. переводит

$u = (e_1 + e_2)/2$ в $v = (e_1 - e_2)/2$. Если анизотропен e_1, то аналогично получаем, что σ_{e_1} переводит u в $-v$. $\square$

5.5.2. Следствие. (из доказательства) *Если в условии леммы предположить дополнительно, что пространство анизотропно, то можно подобрать отражение, переводящее u в точности в v.*

5.5.3. Следствие. *Всякая изометрия n-мерного пространства с невырожденной симметричной формой является композицией не более $2n$ отражений.*

Доказательство. Индукция по размерности. Изометрия одномерного пространства либо тождественна, либо является отражением $-E$. Пусть теперь $V \xrightarrow{F} V$ — изометрия многомерного пространства. Рассмотрим произвольный анизотропный вектор v и отражение σ, которое переводит v в Fv или $-Fv$. Композиция σF переводит тогда v в $\pm v$, а значит переводит в себя ортогональную v гиперплоскость. По предположению индукции, ограничение σF на эту гиперплоскость является композицией не более чем $2n-2$ отражений. Поэтому $F = \sigma\sigma F$ является самое большее композицией $2n-1$ отражений и ещё, может быть, одного отражения σ_{Fv}. $\square$

> Задача 7.34. Докажите, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией не более чем n отражений.

5.6. Теорема. (Теорема Витта) *Пусть U, V. W — три пространства с невырожденными симметричными билинейными формами. Если существует изометрический изоморфизм прямой ортогональной суммы $U \oplus V$ с прямой ортогональной суммой $U \oplus W$, то существует изометрический изоморфизм V с W.*

Доказательство. Индукция по $\dim U$. Если $U = 0$, то доказывать нечего. Если $U = \langle u \rangle$ — одномерно, то u анизотропен. Пусть $F : \langle u \rangle \oplus V \longrightarrow \langle u \rangle \oplus W$ — изометрия. Подберём отражение σ второго пространства, переводящее Fu в $\pm u$. Тогда изометрия σF переводит $\langle u \rangle$ в $\langle u \rangle$, а значит индуцирует искомую изометрию ортогональных дополнений.

В общем случае разложим U в прямую ортогональную сумму $U = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^{\perp}$, где u — любой анизотропный вектор. Применяя предположение индукции к $U = \langle u \rangle$ получим изометрический изоморфизм $\langle u \rangle^{\perp} \oplus V$ с $\langle u \rangle^{\perp} \oplus W$. Ещё раз применяя индуктивное предположение с $U = \langle u \rangle^{\perp}$, получаем искомую изометрию V с W. $\square$

5.6.1. Следствие. *Если пространства V и W с невырожденными формами изометрически изоморфны, то всякое изометрическое вложение в W произвольного подпространства $U \subset V$, на которое форма с V ограничивается невырожденно, можно продолжить до изометрии всего V на W.*

Доказательство. По теореме Витта существует изометрический изоморфизм между ортогональным дополнением до U в V и ортогональным дополнением до образа U в W. Этот изоморфизм и продолжит заданное вложение.

5.6.2. Следствие. *Разложение пространства с симметричной билинейной формой в прямую ортогональную сумму ядра, гиперболического и анизотропного подпространств единственно с точностью до изометрического изоморфизма, тождественного на ядре (иными словами анизотропная и гиперболическая составляющие одного разложения переводятся в* *соответствующие составляющие любого другого разложения подходящим изометрическим изоморфизмом объемлющего пространства).*

Доказательство. Пусть $R \oplus H_{2m} \oplus A = R \oplus H_{2l} \oplus A'$ — два разложения, и пусть $m \le l$. Проекция вдоль R устанавливает изометрический изоморфизм $H_{2m} \oplus A$ с $H_{2l} \oplus A'$. По теореме Витта тогда должен существовать изометрический изоморфизм A с $H_{2(l-m)} \oplus A'$, что из-за анизотропности A возможно лишь при $H_{2(l-m)} = 0$, т.е. при $m = l$. Но тогда существует изометрический изоморфизм A с A'. Его прямая сумма с тождественным отображением на R и изометрическим отождествлением гиперболических подпространств будет искомой изометрией, переводящей одно разложение в другое.

5.6.3. Следствие. *Всякое гиперболическое подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой может быть переведено в любое другое гиперболическое подпространство той же размерности подходящей изометрией объемлющего пространства.*

Из этого следствия и задачи

> Задача 7.35. Докажите, что всякое m-мерное изотропное подпространство в пространстве V с невырожденной симметричной формой содержится в гиперболическом подпространстве $H_{2m} \subset V$.

вытекает

5.6.4. Следствие. *Любое изотропное подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой переводится в любое другое изотропное подпространство той же размерности при помощи подходящей изометрии объемлющего пространства.*

5.6.5. Следствие. *Любая квадратичная форма над полем характеристики $\ne 2$ в подходящих координатах может быть записана в виде*

$$q(x) = x_1x_{i+1} + x_2x_{i+2} + \cdots + x_ix_{2i} + a(x_{2i+1}, \ldots, x_r),$$

в котором число r участвующих переменных равно рангу формы и не зависит от выбора координат, число i парных произведений равно размерности максимального изотропного подпространства и также не зависит от выбора координат, а форма a от оставшихся $r - 2i$ переменных анизотропна и определяется однозначно с точностью до изометрии пространства $k^{(r-2i)}$.

5.7. Вещественные формы. Вещественная квадратичная форма на n-мерном пространстве, как мы видели, может быть линейной заменой координат преобразована к виду

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2,$$

Пусть для определённости число плюсов p не меньше числа минусов m. Заменяя $x_i^2 - x_{p+i}^2$ на $(x_i + x_{p+i})(x_i - x_{p+i}) = y_iy_{p+i}$ и полагая $y_\nu = x_\nu$ при $\nu = (m+1), (m+2), \ldots, p$ и $\nu > (p+m)$ получаем разложение в сумму гиперболической и анизотропной форм:

$$q(y) = h_{2m}(y) + \alpha_{p-m}(y)\ ,$$

где

$$h_{2m}(y) = y_1y_{p+1} + \cdots + y_my_{p+m}\ , \quad \text{а} \qquad \alpha_{p-m}(y) = y_{m+1}^2 + \cdots + y_p^2\ .$$

Мы получаем, в частности, что размерность максимального изотропного подпространства для такой формы равна $n-p$ (а в общем случае $n-\max(p,m)$). Размерность ядра такой формы равна $n-p-v$. Следовательно числа p и m положительных и отрицательных квадратов в диагональном представлении вещественной формы не зависят от способа проиведения формы к диагональному виду. Они называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции* формы q. Другая их инвариантная характеризация доставляется задачей

Задача 7.36. Докажите, что положительный индекс инерции равен наибольшей из размерностей таких подпространств, на которые форма ограничевается в положительно определённую форму, а отрицательный индекс инерции равен наибольшей из размерностей таких подпространств, на которые форма ограничевается в отрицательно определённую форму.

Как правило, индексы инерции невырожденной симметричной формы можно определить по любой её матрице Грама без явного построения ортогонального базиса. Для этого рассматривают последовательность *главных угловых миноров*

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_n \quad \text{где} \quad n=\dim V \tag{5-3}$$

(по определению, $\Delta_0 \overset{\text{def}}{=} 1$, а Δ_k — это минор матрицы Грама, расположенный в первых k строках и первых k столбцах).

5.7.1. Пример: Пусть последовательноть главных угловых миноров (5-3) симметричной билинейной формы на четырёхмерном пространстве такова, что

$$\Delta_1<0\ ,\quad \Delta_2=0\ ,\quad \Delta_3<0\ ,\quad \Delta_4>0\ .$$

Для нахождения диагонального вида этой формы заметим, что т.к. ограничение формы на линейную оболочку первых двух базисных векторов вырождено, в этой линейной оболочке имеется изотропный вектор. Следовательно, в линейной оболочке первых трёх базисных базисных векторов содержится гиперболическая плоскость, и (невырожденное) ограничение формы на это трёхмерное пространство имеет диагональный вид $(1,-1,1)$ или $(1,-1,-1)$. Поскольку $\Delta_3<0$ второй случай невозможен. Т.к. $\Delta_4>0$ получаем, что искомый диагональный вид нашей формы на всём пространстве есть $(1,-1,1,-1)$.

Задача 7.37. (Критерий Сильвестра) Докажите, что если все главные угловые миноры матрицы Грама ненулевые, то отрицательный индекс инерции равен числу перемен знака при прочтении последовательности (5-3) слева направо.

В заключение ещё одна задача в «перпендикулярном» направлении.

Задача 7.38. Докажите, что над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ существуют только две (с точностью до изоморфизма) анизотропные формы — одномерные формы x^2 и ηx^2, где η — какой-либо квадратичный невычет (см. лекции первого семестра) по модулю p. Выведите отсюда, что всякая невырожденная квадратичная форма над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ приводится к виду $x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2+\eta x_n^2$, где η равен единице при чётных n, а при нечётных n равен либо 1, либо какому-либо фиксированному квадратичному невычету.

Указание: Надо доказать, что всякая форма на пространстве размерности $\geqslant 2$ обладает изотропным вектором. Теорема Лагранжа сводит всё дело к доказательству того, что форма $x_1^2+\alpha x_2^2$ обладает изотропным вектором. Это проверяется при помощи принципа Дирихле.

Лекция 8
Проективные пространства

▷Проективизация векторного пространства ▷Однородные координаты и аффинные карты ▷Подпространства и проективная двойственность ▷Группа $PGL_n(k)$ ▷Проективные квадрики ▷Пересечение квадрики и прямой ▷Касательное пространство к квадрике ▷Геометрия проективных квадрик ▷Планарность и линейчатость ▷Аффинные квадрики ▷Полярные соответствия ▷Линейные системы квадрик и поляритетов

§1. Основные понятия

Как мы уже отмечали, в линейной алгебре есть два способа связать с векторным пространством V точечное геометрическое пространство. Переход к аффинному пространству $\mathrm{Aff}(V)$, точками которого служат концы векторов из V, мы ужже рассмотрели. В этой лекции мы обсудим *проективное пространство* $\mathbb{P}(V)$.

1.1. Определение. *Проективизацией векторного пространства V называется множество $\mathbb{P}(V)$, точками которого являются классы пропорциональных ненулевых векторов из V (т.е. всевозможные прямые в $\mathrm{Aff}(V)$, проходящие через нуль).*

Таким образом, каждый ненулевой вектор $v \in V$ определяет точку в $\mathbb{P}(V)$, которую мы будем обозначать $\langle v \rangle$. Равенство $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ в $\mathbb{P}(V)$ равносильно тому, что $v = \lambda w$ в V для некоторого $\lambda \neq 0$.

Если $\dim V = n + 1$, то число n называется *размерностью* проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, так что $\dim \mathbb{P}(V) \overset{\text{def}}{=} \dim V - 1$. Проективизация координатного пространства k^{n+1} называется *n-мерным проективным пространством над k* и обозначается через $\mathbb{P}_n$ или $\mathbb{P}_n(k)$.

1.2. Аффинные карты. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(V)$ $(n + 1)$-мерного векторного пространства V. В данном выше определении точки $\mathbb{P}(V)$ выглядят, скорее, как линии, по которым происходит центральное проектирование из нуля. Для того, чтобы наблюдать их как настоящие точки, мы должны поместить в $\mathrm{Aff}(V)$ экран — n-мерную гиперплоскость U в $\mathrm{Aff}(V)$, не проходящую через нуль. Тогда каждая линия $\langle v \rangle$, пересекающая U, изобразится в U настоящей аффинной геометрической точкой. (см. рис. 8–A). Такая гиперплоскость U называется *аффинной картой* на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$. Ясно, что всякая точка $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ может быть изображена вместе со всеми близкими точками в некоторой аффинной карте.

Однако, ни одна аффинная карта U не покрывает всё $\mathbb{P}(V)$ целиком — вне U остаются все точки $\langle v\rangle$, лежащие в параллельном U n-мерном *векторном* подпространстве $U_\infty \in V$. Такие точки сами составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство. Оно называется *бесконечно-удалённой* по отношению к аффинной карте U *проективной гиперплоскостью* . Следовательно, теоретико-множественно $\mathbb{P}_n$ представляется в виде *дизъюнктного* объединения[1]$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1}$. Итерируя эту процедуру и учитывая, что $\mathbb{P}_0 =$ одна точка $= \mathbb{A}^0$, получим:

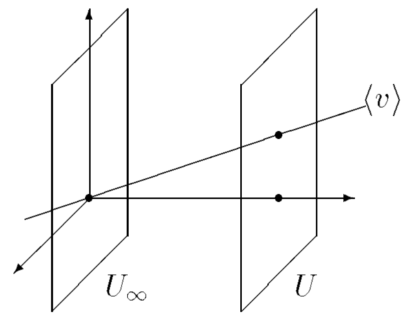


Рис. 8–А. Аффинная карта.

1.2.1. Утверждение. *Теоретико-множественно $\mathbb{P}_n$ разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств*

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$$

Задача 8.1. Получите из такого разложения над полем из q элементов геометрическое доказательство формулы для суммирования геометрической прогрессии.

1.3. Пример: проективные прямые. Проективная прямая распадается в объединение аффинной карты $\mathbb{A}^1$ и бесконечно-удалённой точки ∞ (см. рис. 8–Б, рис. 8–В). В вещественном случае из такого представления видно, что вещественная проективная прямая как топологическое пространство гомеоморфна окружности: $\mathbb{RP}_1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ (рис. 8–В). Гомеоморфизм задаётся стереографической проекцией из точки ∞. Интуиция "стремления к бесконечности" в вещественном анализе основывается именно на этой картинке.

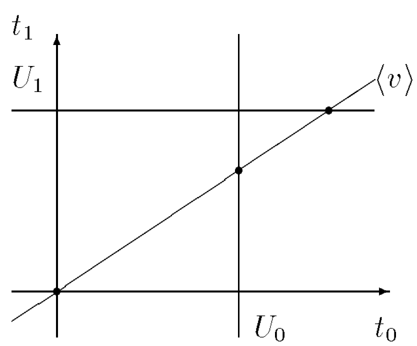


Рис. 8–Б. Проективная прямая.

В общем случае $\mathbb{P}_1(k)$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных карт U_0 и U_1 по плотному открытому подмножеству, являющемуся дополнением до точки. Действительно, фиксируем в k^2 стандартный базис и обозначим через t_0, t_1 координаты относительно этого базиса (см. рис. 8–Б). Тогда $\mathbb{P}_1(k)$ накрывается двумя аффинными картами $U_0 = \{t_0 = 1\}$ и $U_1 = \{t_1 = 1\}$. В первую карту попадают все точки $\langle v\rangle \in \mathbb{P}_1$, $v = (t_0, t_1)$, у которых $t_0 \neq 0$, во вторую — с $t_1 \neq 0$.

Выберем в качестве аффинной координаты на U_1 функционал $x = t_1$, а на U_1 — функционал $y = t_0$. Тогда $\mathbb{P}_1$ получается склеиванием подмножества $\{x \neq 0\}$ на U_0 с подмножеством $\{y \neq 0\}$ на U_1 по правилу: точка $x \in U_0$ склеивается с точкой $y = 1/x$ (поскольку $\langle v\rangle = \langle (t_0, t_1)\rangle \in U_0 \cap U_1$ изображается в U_0 точкой $x = t_1/t_0$, а в U_1 точкой $y = t_0/t_1$). Из этого следует, например, что комплексная проективная прямая $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ не только топологически, но и *аналитически* изоморфна двумерной сфере S^2, которую тоже можно

[1]т.е. объединения непересекающихся кусков, что изображается значком: $\sqcup$

представить как результат склейки двух аффинных карт — касательных плоскостей в северном и южном полюсах, переносимых на сферу при помощи стереографической проекции из противоположного полюса (см. рис. 8–Г).

карта $U_1 \sim S^1 \setminus \infty$

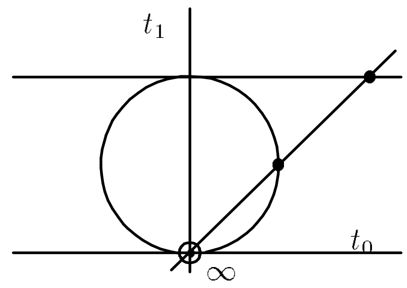


Рис. 8–В. Проективная прямая $\mathbb{RP}_1$.

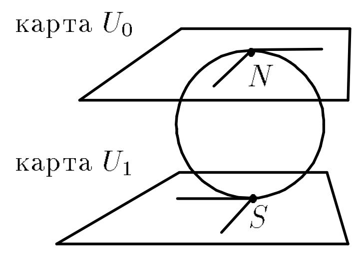


Рис. 8–Г. Проективная прямая $\mathbb{CP}_1$.

Задача 8.2. Докажите, что комплексные координаты $w \in U_0$ и $z \in U_1$ стереографических проекций одной и той же точки $p \in S_2$ на рис. 8–Г связаны соотношением $z = 1/w$, при условии, что диаметр сферы равен 1, а комплексная структура на U_0 и U_1 задаётся выбором координат, указанным на рисунке рис. 8–Г.

Задача 8.3. Убедитесь, что $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ и $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ являются вещественным и комплексно-аналитическим многообразием.

1.4. Координаты. Имеются два способа вводить координаты на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Первый способ — фиксировать в V базис $e_0, \dots, e_n$ и рассмотреть в V координаты $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ относительно этого базиса[2].

Если $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ и $v = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$, то набор чисел $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ называется *однородными координатами* точки $\langle v \rangle$. Название связано с тем, что набор координат определяется по точке *не однозначно*, а с точностью до пропорциональности, так что точка характеризуется, собственно, не набором чисел $t_0, t_1, \dots, t_n$, а набором *отношений* $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$ между ними. Поэтому однородные координаты, как правило, и записывают как набор отношений

$$v = (t_0 : t_1 : \dots : t_n).$$

При работе с однородными координатами важно помнить, что геометрический смысл будут иметь лишь выражения, однородные по этим координатам. Например, уравнение $P(t) = 0$, где P — однородный многочлен степени k, корректно задаёт поверхность в $\mathbb{P}_n$, поскольку при умножении всех координат на константу, эта константа выносится из P, что не нарушает равенства: $P(t) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda t) = \lambda^k P(t) = 0$. Напротив, *неоднородный* многочлен никакой геометрической фигуры в $\mathbb{P}_n$ *не определяет*.

Второй способ состоит в том, чтобы выбрать в окрестности данной точки аффинную карту, ввести на ней аффинные координаты и использовать их для записи точек. Достоинство этого способа в том, что точка будет определять свои координаты уже однозначно, а результаты вычислений в таких координатах можно изображать в аффинном пространстве. Недостаток — в том, что не все точки $\mathbb{P}_n$ будут охвачены такими координатами, что не

[2]В отличие от линейной алгебры, в проективной геометрии координаты, как и векторы, всегда нумеруют нижними индексами, дабы не путать их с показателями степеней. Мы тоже будем следовать этой традиции.

позволяет увидеть всю полноту проективно-геометрической картины и сводит на нет все её преимущества перед аффинной.

1.5. Функции перехода. Одну и ту же точку в $\mathbb{P}_n$ можно изображать сразу в нескольких картах. В связи с этим возникает задача о пересчёте выписанных в различных аффинных картах координат одной и той же точки $\langle v\rangle \in \mathbb{P}_n$ друг в друга. Функции, выражающие аффинные координаты одной карты через аффинные координаты другой карты, называются *функциями перехода*. Рассмотрим наиболее часто встречающийся пример.

Пусть в V фиксированы координаты $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Покрытие $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинными картами $U_i = \{t_i = 1\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ называется *стандартным*. В карте U_i изображаются те и только те $\langle v\rangle \in \mathbb{P}_n$, $v = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$, у которых $t_i \neq 0$. В качестве аффинных координат в U_i выбираются n функционалов $x_\nu = t_\nu$ с $\nu \neq i$. Точка $\langle v\rangle$ с $v = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ имеет в U_i аффинные координаты $x_\nu = t_\nu/t_i$ $(\nu \neq i)$.

Если U_j — другая аффинная карта (с $j \neq i$), и аффинные координаты в U_j обозначены через $y_\mu = t_\mu/t_j$ $(\mu \neq j)$, то координаты y_μ точки $\langle v\rangle \in U_j \cap U_i$ выражаются через координаты x_ν той же точки на U_i по формулам:

$$\begin{cases} y_\mu = x_\mu \big/ x_j & \text{при } \mu \neq i, j \\ y_i = 1 \big/ x_j \end{cases}$$

а само пересечение $U_i \cap U_j$ внутри U_i выделяется условием $\{x_j \neq 0\}$ а внутри U_j — условием $\{y_i \neq 0\}$.

1.6. Проективное замыкание. Весьма эффективный способ анализа геометрических задач состоит в том, чтобы поместить рассматриваемое аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве карты U_0 в проективное пространство $\mathbb{P}_n$ и рассмотреть *замыкание* получающихся фигур (ибо U_0 открыто в $\mathbb{P}_n$). На языке формул это означает подстановку $x_i = t_i/t_0$ с последующим умножением на общий знаменатель (что и означает отказ от условия $t_0 \neq 0$).

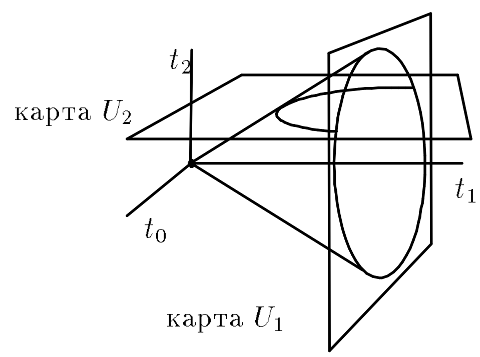


Рис. 8–Д. Плоские коники.

1.6.1. Пример. Проективное замыкание окружности $x^2 + y^2 = 1$ задааётся в аффинных координатах $(t_0 : t_1 : t_2)$ на $\mathbb{P}_2$ уравнением

$$t_1^2 + t_2^2 - t_0^2 = 0$$

(мы подставили $x = t_1/t_0$, $y = t_2/t_0$ и привели к общему знаменателю). Это уравнение в подлежащем трёхмерном векторном пространстве определяет конус (см. рис. 8–Д. В аффинной карте $U_2 = \{t_2 = 1\}$ с координатами $u = t_0/t_2$, $w = t_1/t_2$ эта фигура запишется уравнением

$$w^2 - u^2 = 1$$

и будет выглядеть как гипербола (см. рис. 8–Д).

1.6.2. Пример. Пусть $p_0, p_1, \dots, p_n$ — набор из $n+1$ аффинно-независимых точек в $\mathbb{A}^n$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в качестве аффинной карты в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и выберем в качестве базиса в V $n+1$ векторов, концы которых попадут в точки $p_0, p_1, \dots, p_n$. Тогда однородные координаты $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$ в этом базисе будут ни чем иным, как *барицентрическими координатами* в $\mathbb{A}^n$ относительно точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ $\mathbb{A}^n$. Сама аффинная карта $\mathbb{A}^n$ будет в этих координатах задаваться уравнением $\sum t_i = 1$ и отказ от этого условия (с сохранением единственного требования: чтобы все t_i не обращались одновременно в нуль) и будет означать переход к проективному замыканию $\mathbb{A}^n$. Уходу на бесконечность соответствует такое движение, при котором $\sum t_\nu \longrightarrow 0$.

Задача 8.4. Укажите аффинную карту и координаты на ней, где рассматриваемая кривая изобразится параболой.

§2. Проективные подпространства и проективные преобразования.

2.1. Подпространства. *Проективным k-мерным подпространством* в n-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называется проективизация $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(V)$ любого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $L \subset V$. Эквивалентно можно было бы сказать, что k-мерное проективное подпространство — это фигура, которая изображается k-мерной плоскостью в каждой аффинной карте. Число $n-k$ называется *коразмерностью* подпространства. Отметим, что коразмерность проективного подпространства совпадает с коразмерностью векторного подпространства, проективизацией которого оно является:

$$\operatorname{codim}_V(L) = \dim V - \dim L = (n+1) - (k+1) = n - k = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L)$$

Из этого вытекает

2.1.1. Лемма. *Коразмерность пересечения проективных подпространств не превышает суммы коразмерностей самих пересекаемых подпространств. В частности, k-мерное подпространство всегда имеет непустое пересечение с $n-k$-мерным.*

Например, любые две прямые на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ пересекаются. Это позволяет описать $\mathbb{P}^2$ как объединение аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ и бесконечно удалённой прямой $\mathbb{P}^1$, точки которой взаимно-однозначно соответствуют всевозможным пучкам параллельных прямых на $\mathbb{A}^2$ и являются бесконечно-удалёнными точками пересечения всех прямых пучка.

2.1.2. Дополнительные подпространства. Если пространство V разложено в прямую сумму $V = U \oplus W$ и $\dim V = n+1, \dim U = k+1, \dim W = n-k$, то $H_U = \mathbb{P}(U)$ и $H_W = \mathbb{P}(W)$ будут *непересекающимися* проективными подпространствами размерностей k и $(n-k-1)$ соответственно. Обратно, всякие непересекающиеся k- и $(n-k-1)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ отвечают некоторому разложению V в прямую сумму. Такие подпространства называются *дополнительными*.

2.1.3. Проектирование. Пусть $V = U \oplus W$ и $H_U = \mathbb{P}(U)$, $H_W = \mathbb{P}(W)$, как и выше. Существование и единственность представления произвольного вектора $v \in V$ в виде $v = u+w$ с $u \in U, w \in W$ означает геометрически, что через каждую точку $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ *проходит единственная прямая* $\langle u, w \rangle$, пересекающая подпространства H_U и H_W.

Линейный опреатор проектирования V на W вдоль U, отображающий $v = u + w$ в w, индуцирует отображение

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W),$$

переводящее $\langle v\rangle$ в $\langle w\rangle$ (правило корректно, т.к. $\lambda v = \lambda u + \lambda w$ и *всякий* вектор из класса $\langle v\rangle$ переходит в вектор из класса $\langle w\rangle$). Это отображение называется *проектированием* $\mathbb{P}_n$ *на* H_W *с центром в* H_U. Оно переводит произвольную точку $\langle v\rangle \in \mathbb{P}(V)$ в точку пересечения с H_W той единственной прямой, которая проходит через $\langle v\rangle$ и пересекает и H_U и H_W.

2.2. Проективные операторы. Проектирование является частным случаем *линейного проективного преобразования*, или, как говаривали в старину, *коллинеации*. По определению, таковым является всякое отображение

$$F: \ \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V),$$

индуцированное *ненулевым линейным оператором* $F: \ V \longrightarrow V$ по правилу

$$F(\langle v\rangle) = \langle Fv\rangle$$

Задача 8.5. Убедитесь, что это правило корректно.

2.2.1. Лемма. *Пусть ненулевые операторы F и G задают одно и то же линейное проективное преобразование в $\mathbb{P}(V)$. Если образ этого преобразование отличен от точки, то $F = \lambda G$ для некоторого $0 \neq \lambda \in k$, т.е. $\langle F\rangle = \langle G\rangle$ в $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V,V))$.*

Доказательство. Предположим, что F и G не пропорциональны, имеют по меньшей мере двумерный образ, и действие F и G в $\mathbb{P}(V)$ совпадает. Тогда $\dim V \geqslant 2$, и умножая G на константу, мы можем считать, что в V найдутся два линейно-независимых вектора e_1 и e_2, такие, что

$$F(e_1) = G(e_1) = v_1\,,\ F(e_2) = v_2\,,\ G(e_2) = \lambda v_2,$$

причём v_1 и v_2 линейно-независимы и $\lambda \neq 1$. Но тогда

$$F(\langle e_1 + e_2\rangle) = \langle v_1 + v_2\rangle \neq \langle v_1 + \lambda v_2\rangle = G(\langle e_1 + e_2\rangle).$$

Противоречие.

Обратимые линейные проективные преобразования индуцируются в точности обратимыми линейными операторами и называются *проективными автоморфизмами*. Они составляют группу относительно умножения, которая обозначается $\mathbb{P}GL(V)$ и называется *проективной линейной группой*. В частности, группа классов пропорциональных невырожденных матриц $\mathbb{P}GL_n(k) = \mathbb{P}GL(k^n)$ представляет собой не что иное, как группу обратимых линейных замен однородных координат в $\mathbb{P}_n$.

Фиксация однородных координат в $\mathbb{P}(V)$ задаёт изоморфизм $\mathbb{P}GL(V) \longrightarrow \mathbb{P}GL_n(k)$.

2.2.2. Пример. Группа $\mathbb{P}GL_2(k)$ изоморфна группе дробно линейных преобразований аффинной прямой $\mathbb{A}^1(k)$. Действительно, вкладывая $\mathbb{A}^1$ в $\mathbb{P}_1$ с однородными координатами $(t_0 : t_1)$ в качестве стандартной аффинной карты $U_1 = \{t_1 = 1\}$ с аффинной координатой $x = t_0/t_1$, мы можем записывать всякий оператор

$$F: \ \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

в виде дробно-линейной замены аффинной координаты:

$$F:\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

(при этом очевидно, что два оператора совпадают как дробно-линейные функции тогда и только тогда, когда они пропорциональны). В частности, композицию дробно-линейных отображений можно вычислять, перемножая матрицы.

Задача 8.6. Убедитесь, что существует и единственна дробно-линейная функция, переводящая 3 (произвольные) данные точки в три другие (произвольные) заданные точки.

Задача 8.7. Пусть $(x:y)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}_1$. *Двойным отношением* упорядоченной четвёрки точеек $\{P_1,P_2,P_3,P_4\}\subset\mathbb{P}_1$ с координатами $P_i=(x_i,y_i)$ называется величина

$$(P_1,P_2,P_3,P_4)=\frac{(x_1y_3-y_1x_3)/(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_1y_4-y_1x_4)/(x_2y_4-y_2x_4)}$$

Докажите, что точка P_4 тогда и только тогда переходит в точку Q_4 при коллинеации,переводящей P_1,P_2,P_3 в Q_1,Q_2,Q_3 соответственно, когда

$$(P_1,P_2,P_3,P_4)=(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$$

Из этой задачи вытекает, что *двойное отношение* не изменяется при проективных автоморфизмах прямой. Более того, поскольку при проективном преобразовании $\mathbb{P}_n$ четыре точки, лежащие на одной прямой, переходят в четыре точки, лежащие на одной прямой, двойное отношение точек образов должно быть равно двойному отношению точек-прообразов (ибо при ограничении на прямую индуцируется проективное преобразование из одной прямой в другую, а такое преобразование однозначно определяется заданием образов трёх точек). Тем самым, двойное отношение является *геометрической характеристикой* четырёх точек, лежащих на прямой (т.е. не зависит от выбора системы координат). В случае, когда $(a,b,c,d)=-1$, точки a и b называются *ангармоничными* точкам c и d.

2.3. Проективная двойственность. Поскольку два линейных функционала $\alpha,\beta\in V^*$ тогда и только тогда пропорциональны, когда их множеством нулей является одна и та же гиперплоскость $L\subset V$, точки проективного пространства $\mathbb{P}(V^*)$ взаимно-однозначно соответствуют проективным гиперплоскостям в $\mathbb{P}(V)$.

Если $\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$, то $\mathbb{P}(V^*)$ называется *двойственным* проективным пространством и обозначается $\mathbb{P}_n^\vee$. Двойственность между линейными подпространствами

$$V\supset U\longleftrightarrow \mathrm{Ann}U\subset V^*$$

индуцирует двойственность между проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\vee$, при которой k-мерным плоскостям в $\mathbb{P}_n$ взаимно-однозначно соответствуют $n-k$-мерные плоскости в $\mathbb{P}_n^\vee$, и соответственные плоскости являются проективизациями аннуляторов друг друга.

Эта двойственность обращает включения и переводит пересечения в *линейные оболочки* (линейной оболочкой множества $M\subset\mathbb{P}_n$ называется пересечение всех проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$, содержащих M).

Задача 8.8. Докажмите, что линейная оболочка произвольного множества точек $M\subset\mathbb{P}_n$ проективно двойственна аннулятору этого множества $\mathrm{Ann}\,M\subset\mathbb{P}_n^\vee$.

§3. Проективные квадрики.

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что характеристика основного поля k отлична от 2.

3.1. Определение. *Подмножество $Q \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, являющееся множжеством нулей какого-либо ненулевого однородного многочлена $q(V)$ степени 2 от координат на V, называется* *проективной квадрикой*

Однородные многочлены второй степени от координат на V называются *квадратичными формами*. При линейной однородной замене координат квадратичная форма остаётся квадратичной формой, а $q(v) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) = 0$. Поэтому определениее проективной квадрики корректно, и свойство фигуры $Q \subset \mathbb{P}_n$ быть квадрикой не зависит от выбора координат.

> Задача 8.9. Убедитесь, что для того, чтобы $q(t) \in k[t_0, t_1, \dots, t_n]$ был квадратичной формой необходимо и достаточно, чтобы в $k[\lambda, t_0, t_1, \dots, t_n]$ выполнялось равенство $q(\lambda t_0, \lambda t_1, \dots, \lambda t_n) = \lambda^2 q(t_0, t_1, \dots, t_n)$.

В прошлой лекции мы построили довольно подробную алгебраическую теорию квадратичных форм. Сейчас мы выясним геометрический смысл этой теории.

При этом, как и на прошлой лекции, мы будем свободно пользоваться тем, что задание квадратичной формы $q(v)$ на V равносильно заданию на V симметричной билинейной формы

$$B_q(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v + w) - q(v) - q(w)\right)$$

называемой *поляризацией* квадратичной формы q. Так, значение q на векторе v можно вычислять в координатах по формуле

$$q(v) = (v)^t G(v) = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} g_{\mu\nu} t_\mu t_\nu$$

где $(v) = (t_\mu)$ — столбец координат вектора v, а $G = (g_{\mu\nu}) = (B_q(e_\mu, e_\nu))$ — симметрическая матрица Грама поляризации B_q формы q.

3.2. Взаимодействие квадрики и прямой. Пусть прямая $l = \mathbb{P}(L) \subset \mathbb{P}(V)$ является проективизацией линейной оболочки векторов u и v (т.е. проходит через точки $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$). Пересечение $l \cap Q$ задаётся в $\mathbb{P}(L)$ ограничением формы B_q на подпространство L и целиком определяется матрицей Грама

$$G_L = \begin{pmatrix} B_q(u, u) & B_q(u, v) \\ B_q(u, v) & B_q(v, v) \end{pmatrix}$$

По теореме Лагранжа в L можно выбрать другой базис $(e_1, e_2) = (u, v) \cdot C$ (где $C = GL_2(k)$) в котором матрица Грама будет иметь вид

$$G'_L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{где} \quad ab = \det G_L \cdot \det{}^2 C.$$

Возможны 4 случая:

3.2.1. G_L невырождена и $-\det G_L$ не квадрат в k. Тогда $ab \neq 0$ и форма $at_0^2 + bt_1^2$ анизотропна, ибо уравнение $at_0^2 + bt_1^2 = 0$ равносильно тому, что

$$\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^2 = -ab \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

Правая часть здесь по модулю квадратоа в k есть $-\det G_L$.

Следовательно, *в этом случае пересечение пусто*: $l \cap Q = \emptyset$.

3.2.2. G_L невырождена и $-\det G_L$ квадрат в k. В этом случае и $(-ab)$, а значит и $\left(-\frac{b}{a}\right)$ будут квадратами в k.

Следовательно, в этом случае $l \cap Q$ *состоит из двух различных точек*

$$(t_0 : t_1) = (\pm\sqrt{\frac{b}{a}} : 1)$$

3.2.3. G_L вырождена, но отлична от нуля. В этом случае $b = 0$, но $a \neq 0$ и ограничение Q на L является полным квадратом $at_0^2 = 0$, а стало быть имеет *единственный нуль* $(0 : 1)$ *кратности* 2. В этом случае говорят, что *прямая l касается Q в этой единственной точке*.

3.2.4. $G_L \equiv 0$. В этом случае L изотропно и $l \subset Q$.

Итак, мы доказали

3.2.5. Утверждение. *Прямая l либо не пересекается с квадрикой, либо лежит на ней, либо пересекает её в двух различных точках, либо касается её в единственной точке. Эти возможности попарно исключают друг друга и других возможностей нет.*

3.2.6. Следствие. *Если прямая имеет с квадрикой три различных общих точки, то она лежит на этой квадрике целиком.*

3.3. Определение. *Прямая называется касательной к квадрике, если она либо лежит на ней, либо касается её в одной точке.*

3.4. Теорема. *Множество всех прямых, касательных к квадрике*

$$Q = \{(w) \in \mathbb{P}(V) \mid B_q(w, w) = 0\}$$

и проходящих через данную точку $p = \langle v \rangle \in Q$, заметает проективное подпространство в $\mathbb{P}(V)$ коразмерности $\leqslant 1$, совпадающее с

$$\{\langle u \rangle \in \mathbb{P}(U) \mid B_q(u, v) = 0\} = \mathrm{Ann}\varrho_B(v)$$

Обозначение. Это подпространство обозначается T_pQ или T_VQ и называется *касательным пространством к квадрике Q в точке p*.

Доказательство. Пусть $q = \langle u \rangle$. Как мы видели, прямая (p, q) (где $p = \langle v \rangle \in Q$) касается Q в точке p или лежит на Q если и только если матрица Грама

$$\begin{pmatrix} B(u,u) & B(u,v) \\ B(u,v) & 0 \end{pmatrix}$$

вырождена. Это равносильно условию $B(u,v)=0$, что и утверждалось.

3.5. Простые и особые точки. Точка $p=\langle v\rangle\in Q$ называется *простой*, если $T_pQ\neq\mathbb{P}(V)$, т.е. является настоящей гиперплоскостью коразмерности 1. Это равносильно тому, что $\varrho_B(v)\neq 0$ в V^*, т.е. что v не лежит в ядре формы B.

Точки $s=\langle w\rangle$, в которых $T_sQ=\mathbb{P}(V)$, т. е. совпадает со всем пространством, называются *особыми*. Множество особых точек обозначается

$$\mathrm{Sing}Q=\{s=\langle w\rangle\in Q\mid \varrho_B(w)=0\}$$

и совпадает с проективизацией ядра формы $B:\ \mathrm{Sing}Q=\mathbb{P}(\ker B)$

Квадрика называется *неособой* или *невырожденной*, если $\mathrm{Sing}Q=\emptyset$. Подчеркнём, что пустая квадрика неособа, и особая квадрика всегда непуста.

Подпространство $\mathrm{Sing}Q\subset Q$ может быть геометрически охарактеризовано также как *геометрическое место точек s, таких, что $\forall q\in Q$ прямая $(sq)\subset Q$*. Действительно, это условие в точности равносильно тому, что всякая прямая в $\mathbb{P}(V)$, содержащая s, является касательной к квадрике (т.е. равенству $T_sQ=\mathbb{P}(V)$).

3.6. Теорема. *Любое подпространство $H\subset\mathbb{P}(V)$, дополнительное к подпространству $\mathrm{Sing}Q$, пересекает Q по невырожденной (возможно, – пустой) квадрике $Q'=H\cap Q$, так что квадрика Q есть объединение всех прямых, проходящих через точки подпространства $\mathrm{Sing}Q\subset\mathbb{P}(V)$ и точки некоторой неособой квадрики Q' в дополнительном подпространстве H.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $Q'=H\cap Q$ неособа. Пусть это не так, и $\exists p\in H:\ \forall q'\in Q'\ \ (p,q)\subset Q'$. Докажем, что тогда p будет особой точкой и для Q, т.е. что $\forall q\in Q\ \ (p,q)\subset Q$. Для этого спроектируем произвольную точку $q\in Q$ на H из $\mathrm{Sing}Q$: имеется, как мы видели в n° 2.1.3, единственная прямая, которая проходит через q и пересекает $\mathrm{Sing}Q$ и H; пусть $s\in\mathrm{Sing}Q$ и $q'\in H$ — эти точки пересечения. Поскольку $s\in\mathrm{Sing}Q$, мы заключаем, что $(sq)\subset Q$, т.е. $q'\in Q'$ (см. рис. 8–E). Но тогда $(q'p)\subset Q'\subset Q$. Заметим теперь, что прямая (pq) заметается точками своего пересечения со всевозможными прямыми (sx) с $x\in(pq')\subset Q'\subset Q$. Но все такие (sx) лежат на Q. Следовательно, $(p,q)\subset\mathbb{Q}$. □

Пусть H и L — дополнительные подпространства в $\mathbb{P}_n$. Фигура, заметаемая всеми прямыми, пересекающими L и какую-либо фигуру $\Phi\subset H$ называется *конусом с вершиной L и основанием* Φ.. Иначе такой конус можно представлять себе как полный прообраз фигуры Φ относительно отображения проектирования $\mathbb{P}_n$ из L на H. В этих терминах предыдущая теорема переформулируется так:

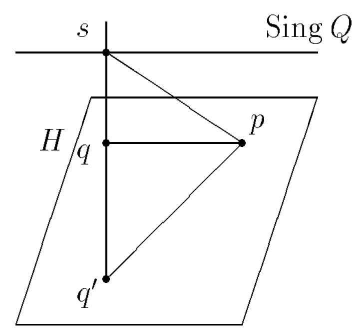


Рис. 8–E. $Q\cap H$.

3.6.1. Следствие. *Всякая квадрика в $\mathbb{P}_n$ представляет собой конус, вершина которого совпадает с пространством особых точек этой квадрики, а основанием является неособая квадрика в любом дополнительном подпространстве.*

3.7. Язык формул. Как мы видели в прошлой лекции, всякую квадрику в $\mathbb{P}_n$ в подходящих однородных координатах можно записать уравнением

$$q(t_0,t_1,t_2,\dots,t_n)=h(t_0,t_1,t_2,\dots,t_{2i+1}))+\alpha(t_{2i+2},\dots,t_r)\ ,$$

где $\alpha(t_{2i+2}, \ldots, t_r)$ — анизотропная (т.е. не обращающаяся в нуль нигде кроме нуля) форма, а

$$h(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2i+1}) = t_0 t_{i+1} + t_1 t_{i+2} + \cdots + t_i t_{2i+1}$$

— гиперболическая форма. Число r явно участвующих переменных равно рангу соответствующей симметричной билинейной формы $B_q(v, w)$. Число $2i+2$ равно размерности максимального гиперболического подпространства формы B_q, так что i —это размерность максимального изотропного подпространства. Линейная оболочка не участвующих в формуле остальных переменных $(t_{r+1}, \ldots, t_n)$ составляет ядро формы B_q. Число i называется *индексом* формы и равно размерности максимального изотропного подпространства формы q. Если форма q анизотропна, мы будем считать её индекс равным -1.

> Задача 8.10. Усмотрите непосредственно из формулы, что проективизация ядра совпадает с множеством особых точек, и что квадрика представляет собой конус с вершиной в этом подпространстве над неособой квадрикой в пространстве переменных $(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2i+1})$ (эта неособая квадрика задаётся тем же самым уравнением!)ю

Остановимся более подробно на неособых квадриках. Всякая такая квадрика есть проективизация множества изотропных векторов невырожденной симметричной билинейной формы. В прошлой лекции мы выяснили, что всякий изотропный вектор в этой ситуации лежит в некотором максимальном изотропном подпространстве, а все такие подпространства имеют одну и ту же размерность и транзитивно переводятся друг в друга изометриями формы.

На геометрическом языке проективизация изотропного подпространства есть проективное подпространство, целиком лежащее на квадрике. Максимальная из размерностей таких пространств называется *планарностью* квадрики. Мы по определению будем считать, что планарность пустой квадрики равна -1. Планарность непустой неособой квадрики совпадает с индексом квадратичной формы, задающей эту квадрику.

Наконец, проективизации изометрий формы $B_q(v, v)$ — это проективные автоморфизмы $\mathbb{P}_n$, которые переводят квадрику в себя. Множество всех таких автоморфизмов образует группу, называемую *группой (проективных) автоморфизмов квадрики* Q.

Таким образом алгебраические результаты прошлой лекции в геометрическом контексте можно подытожить в виде теоремы:

3.8. Теорема. *Неособая квадратичная форма индекса i определяет в $\mathbb{P}_n$ квадрику, через каждую точку которой проходит i-мерное проективное подпространство, целиком лежащее не квадрике. Группа проективных автоморфизмов квадрики действует на множестве таких подпространств транзитивно. Подпространств размерности больше, чем i, на квадрике не лежит (в частности, при $i = -1$ квадрика пуста). Индекс i может принимать любое значение в пределах $-1 \leqslant i \leqslant [n/2]$.*

3.9. Пересечение квадрики с касательной плоскостью. Чтобы роль алгебры не выглядела слишком преувеличенной, мы дадим сейчас не опирающееся на результаты прошлой лекции доказательство основного утверждения предыдущей теоремы — о связи между индексом и планарностью.

3.10. Теорема. *Пусть Q — неособая квадрика индекса i в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(v)$. Тогда:*

а) Q не содержит проективных подпространств размерности $\geqslant i$;

б) Через каждую точку $p \in Q$ проходит $(i-1)$-мерное проективное подпространство, содержащееся в Q.

в) Эти подпространства находятся во взаимно-однозначном соответствии с $(i-2)$-мерными проективными подпространствами, лежащими на неособой квадрике индекса $(i-1)$ в $\mathbb{P}^{n-2}$.

Доказательство. Индукция по n и i. База индукции состоит в том, что всякая квадрика индекса 0 (задаваемая анизотропной формой) пуста, любая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_0$ пуста, а невырожденная квадрика индекса 1 в $\mathbb{P}_1$ состоит из пары различных точек. Индуктивный переход основан на том, что всякое проективное подпространство, проходящее через точку $\langle v\rangle \in Q$ и лежащее на Q лежит в $T_VQ \cap Q$.

3.10.1. Лемма. *Пусть Q — неособая квадрика индекса $i \geqslant 1$ в $\mathbb{P}^n$ и $\langle v\rangle \in Q$. Тогда $T_VQ \cap Q$ является конусом с вершиной в точке $\langle v\rangle$ над неособой квадрикой индекса $(i-1)$ в $\mathbb{P}^{n-2}$, вложенном в T_VQ в качестве произвольной гиперплоскости, не содержащей v.*

Доказательство. Пусть $T_VQ = \mathbb{P}(U)$, где

$$U = \mathrm{Ann}\rho_B(v) = \langle v\rangle^\perp = \{w \in V \mid B(w,v) = 0\},$$

а B — симметричная билинейная форма, задающая Q. Мы интересуемся структурой ограничения B_U формы B на U. Так как $B(v,v) = 0$ (ибо $\langle v\rangle \in Q$), то $v \in U$ и $v \in \ker B_U$. Выберем в V вектор $w \notin U$, так что $V = U \oplus \langle w\rangle$. Если бы $\dim\ker B_U \geqslant 2$, то это подпространство имело бы ненулевое пересечение с гиперплоскостью $U = \mathrm{Ann}\rho_B(w) = \langle w\rangle^\perp$, и вектор из этого пересечения был бы ортогонален всему V вопреки невырожденности Q. Тем самым, $\ker B_U$ — одномерное подпространство, порождённое V.

Выберем в U $(n-1)$-мерное подпространство W, трансверсальное к v, так что $U = \langle v\rangle \oplus W$. Ограничение B_W формы B на W будет (по только что доказанному) невырожденной формой, так что $V = W \oplus W^\perp$ и ограничение B на $W^\perp$ также невырождено. Поскольку в $W^\perp$ есть изотропный вектор v, это подпространство изоморфно гиперболической плоскости H_2. Следовательно, индекс формы B_W ровно на 1 меньше индекса формы B на V. □

Теорема вытекает из леммы немедленно: максимальное проективное подпространство, лежащее в $T_VQ \cap Q$ должно быть конусом с вершиной в $\langle v\rangle$ над максимальным проективным подпространством, лежащим на неособой квадрике индекса $(i-1)$ в $\mathbb{P}^{n-2} \subset T_VQ$. □

3.10.2. Следствие. *Две квадрики в $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда переводятся одна в другую преобразованием из $\mathbb{P}GL_n$, когда они имеют одинаковый ранг и индекс.*

3.10.3. Следствие. *Невырожденная квадрика либо пуста, либо не содержится ни в какой гиперплоскости.*

Доказательство. Если непустая невырожденная квадрика содержится в гиперплоскости H, то $H = T_VQ\,\forall\langle v\rangle \in Q$ и $Q = Q \cap T_VQ$ должна быть особой.

3.10.4. Следствие. $SingQ = \bigcap_{v\in Q} T_VQ$

3.11. Комплексные квадрики. Над алгебраически замкнутым полем квадрика однозначно с точностью до действия $\mathbb{P}GL$ определяется своим рангом, поскольку $\forall n$ имеется геометрически единственная неособая квадрика в $\mathbb{P}_n$. В подходящих координатах она задаётся

уравнением
$$t_0^2 + t_1^2 + \cdots + t_n^2 = 0$$
которое при нечётном n можно преобразовать к виду
$$t_0^2 + \cdots + t_{\frac{n-1}{2}}^2 - t_{\frac{n+1}{2}}^2 - \cdots - t_n^2 = 0$$
а при чётном n к виду
$$t_0^2 + \cdots + t_{\frac{n}{2}-1}^2 - t_{\frac{n}{2}}^2 - \cdots - t_{n-1}^2 - t_n^2 = 0$$

3.11.1. Следствие. *Через каждую точку неособой квадрики в $\mathbb{P}_n$ над алгебраически замкнутым полем проходит $[\frac{n-1}{2}]$ — мерная проективная плоскость, лежащая на квадрике, а плоскостей большей размерности на такой квадрике нет.*

3.12. Пример. Пусть поле k – алгебраически замкнуто. Тогда невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_0$ — пуста, в $\mathbb{P}_1$ — состоит из пары точек, в $\mathbb{P}_2$ — представляет собой кривую $t_0^2+t_1^2+t_2^2 = 0$, не содержащую прямых и называемую *коникой*. Невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$ может быть задана уравнением
$$t_0t_3 = t_1t_2$$
и не содержит плоскостей. Через каждую её точку проходит пара прямых — её пересечение с касательной плоскостью. Эти прямые легко задать явными уравнениями. Пусть $p = (p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$ — лежит на квадрике. Тогда $\frac{p_0}{p_2} = \frac{p_1}{p_3}$ и $\frac{p_0}{p_1} = \frac{p_2}{p_3}$.

Если обозначить первую пару равных отношений через $\alpha_0 : \alpha_1$, а вторую — через $\beta_0 : \beta_1$, то равенства
$$t_0 : t_2 = t_1 : t_3 = \alpha_0 : \alpha_1 \qquad \text{и} \qquad t_0 : t_1 = t_2 : t_3 = \beta_0 : \beta_1 \tag{3-1}$$
как раз и зададут пару прямых, лежащих на квадрике и пересекающихся в точке p. Более того, координаты $(p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$ восстанавливаются по $\alpha_0 : \alpha_1$ и $\beta_0 : \beta_1$ по формулам
$$p_0 = \alpha_0\beta_0 \; p_1 = \alpha_0\beta_1 \; p_2 = \alpha_1\beta_0 \; p_3 = \alpha_1\beta_1 \tag{3-2}$$
Мы видим, таким образом, что при любом $\alpha_0 : \alpha_1 \in \mathbb{P}_1$ и любом $\beta_0 : \beta_1 \in \mathbb{P}_1$ уравнения (3-1) определяют пару прямых, лежащих на квадрике $t_0t_3 = t_1t_2$ и пересекающихся в точке p с координатами (3-2). Из этого следует, что все α-прямые являются попарно-скрещивающимися и все β-прямые являются попарно-скрещивающимися (иначе через точку пересечения двух, скажем, α-прямых, проходило бы 3 прямые, лежащие на квадрике — эти два, да ещё β-прямая). Мы получаем

3.12.1. Следствие. *Невырожденная квадрика в $\mathbb{P}_3$, заданная уравнением $t_0t_3 = t_1t_2$, заметается двумя семействами прямых, так что каждая прямая из одного семейства пересекает каждую прямую из другого семейства, а прямые из одного семейства попарно скрещиваются. Каждое семейство прямых естественно параметризуется проективной прямой так, что сопоставление паре прямых из разных семейств их точки пересечения определяет биекцию $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ с рассматриваемой квадрикой.*

Отображение $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 : (\alpha_0 : \alpha_1; \beta_0 : \beta_1) \mapsto (\alpha_0\beta_0 : \alpha_0\beta_1 : \alpha_1\beta_0 : \alpha_1\beta_1)$ образом которого является квадрика $t_0t_3 = t_1t_2$ называется *вложением Сегре*.

3.13. Квадрики над $\mathbb{R}$. Над полем $\mathbb{R}$ уже имеются квадрики всех возможных индексов. По теореме Лагранжа любую неособую квадрику в подходящих координатах можно записать в виде

$$t_0^2 + \dots + t_{i-1}^2 - t_i^2 - \dots - t_{2i-1}^2 = t_{2i}^2 + \dots + t_n^2.$$

Такая квадрика имеет индекс i и квадрики с разным i геометрически различны.

Так в $\mathbb{P}_1$ имеются 2 неособых квадрики: пара точек $t_0^2 - t_1^2 = 0$ и пустая $t_0^2 + t_1^2 = 0$. В $\mathbb{P}_2$ также 2 неособых квадрики: пустая (или *мнимая коника* $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 = 0$ и *действительная коника* $t_0^2 - t_1^2 = t_2^2$ (индекса 1). В $\mathbb{P}_3$ индекс может принимать три значения: 0, 1 или 2. Им соответствуют пустая квадрика $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 0$, *эллиптическая квадрика* $t_0^2 - t_1^2 = t_2^2 + t_3^2$ и *гиперболическая квадрика* (или *квадрика Сегре*) $t_0t_3 = t_1t_2$. Эллиптическая квадрика не содержит прямых, а квадрика Сегре заметается двумя семействами прямых, как было показано выше.

3.14. Аффинные квадрики. Из описания проективных квадрик несложно получить описание аффинных квадрик с точностью до действия группы аффинно-линейных изоморфизмов.

> Задача 8.11. Докажите, что если вложить $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{P}_n$ в качестве аффинной карты, то группа аффинно-линейных изоморфизмов $\mathbb{A}^n$ естественно отождествляется с подгруппой в $\mathbb{P}GL_n$, переводящей в себя бесконечно-удалённую гиперплоскость этой карты.

Задача аффинной классификации, таким образом, сводится к описанию всех геометрических разных выборов взаимного расположения квадрики и гиперплоскости размерности 1 в $\mathbb{P}_n$ (эта гиперплоскость и будет бесконечно-удалённой). Если эта гиперплоскость — касательная к квадрике, то соответствующая аффинная квадрика называется *параболоидом*. Если она не является касательной, то пересекает квадрику по неособой квадрике, и взаимное расположение определяется в этом случае индексом квадрики, получающейся в пересечении. Если этот индекс — нуль, то аффинная квадрика называется *эллиптической*, если не нуль — то *гиперболической*. Таким образом *аффинная квадрика определяется (однозначно с точностью до действия аффинно-линейной группы) индексом своей проективизации, типом (параболический - непараболический) и индексом пересечения своей проективизации с бесконечно удалённой гиперплоскостью.*

> Задача 8.12. Дайте полный перечень аффинно-неэквивалентных уравнений квадрик в $\mathbb{A}^2$ и в $\mathbb{A}^3$.

§4. Поляритеты

Пусть $\beta:\ V \longrightarrow V^*$ — корреляция. Она индуцирует линейное проективное преобразование $\tilde{\beta}:\ \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee = \mathbb{P}(V^*)$. Такое преобразование называется *поляритетом* (или *полярным преобразованием*, если корреляция β невырождена и самосопряжена.

4.1. Полярная двойственность. Геометрически, невырожденное линейное проективное преобразование $:\ \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee$ есть взаимно-однозначное сопоставление точкам $\mathbb{P}_n$ гиперплоскостей[3] так, чтобы размерность линейной оболочки любого конечного набора точек была

[3]Ибо точка из $\mathbb{P}_n^\vee$ — это класс пропорциональных линейных уравнений на $\mathbb{P}_n$

равна коразмерности пересечения соответствующих им гиперплоскостей. При этом гиперплоскость, соответствующая некоторой точке, называется *полярой* этой точки, а сама точка — *полюсом* этой гиперплоскости.

Задача 8.13. Пусть

$$\beta:\ V\longrightarrow V^* \qquad \text{и} \qquad \beta^*:\ V^{**}=V\longrightarrow V^*$$

пара сопряжённых изоморфизмов, а

$$\tilde\beta:\ \mathbb{P}_n\longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee \qquad \text{и} \qquad \tilde\beta^*:\ \mathbb{P}_n\longrightarrow \mathbb{P}_n^\vee$$

соответствующие линейные проективные преобразования. Убедитесь, что $\tilde\beta^*$-поляра произвольно заданной точки P есть геометрическое место $\tilde\beta$-полюсов всех гиперплоскостей, проходящих через точку P. Дайте аналогичное геометрическое описание в терминах $\tilde\beta$ для $\tilde\beta^*$-полюса произвольно заданной гиперплоскости π.

Из приведённого в задаче геометрического описания двойственной корреляции сразу следует, что невырожденное линейное проективное преобразование $:\ \mathbb{P}_n\longrightarrow\mathbb{P}_n^\vee$ тогда и только тогда является поляритетом (т.е. симметрично), когда для него справедлива теорема о *полярной двойственности*.

4.1.1. Утверждение. *При полярном соответствии точка p тогда и только тогда лежит на поляре точки q, когда точка q лежит на поляре точки p.*

4.1.2. Поляритеты и квадрики. Как мы видели в прошлой лекции, пространство симметричных корреляций $:\ V\longrightarrow V^*$ естественно изоморфно пространству квадратичных форм на V. При переходе к проективизациям это даёт взаимно-однозначное соответствие между поляритетами и классами пропорциональных квадратичных форм.

Чтобы описать это соответствие геометрически, вспомним, что класс пропорциональных квадратичных форм корректно задаёт проективную квадрику. Эта квадрика есть геометрическое место векторов, принадлежащих своим аннуляторам относительно поляризации рассматриваемой квадратичной формы. Поскольку корреляция, соответствующая квадратичной форме, как раз и сопоставляет вектору его аннулятор, мы получаем

4.1.3. Утверждение. *Геометрическое место точек, лежащих на своих полярах при некотором полярном соответствии является невырожденной квадрикой. Этим устанавливается взаимно-однозначное соответствие между квадриками и поляритами, согласованное с рассматривавшимся в прошлой лекции изоморфизмом пространств квадратичных форм и симметричных корреляций.*

Таким образом, геометрия поляритетов и геометрия квадрик — два логически эквивалентных языка. В частности, полюса и поляры относительно поляритета, канонически соответствующего некой квадратичной форме q, называются *полюсами и полярами относительно квадрики* $q=0$. Тем не менее, язык поляритетов часто оказывается предпочтительнее, ибо он гораздо богаче. Например, если основное поле не является алгебраически-замкнутым (а это именно так в «обычной» вещественной геометрии), то имеется много квадрик, геометрически неразличимых, — скажем, пустых. И несмотря на то, что квадрика пуста, соответствующий ей поляритет является геометрически вполне наблюдаемым, причём алгебраически разным (непропорциональным) пустым квадрикам будут соответствовать геометрически разные поляритеты. Пустота соответствующих квадрик будет лишь свидетельством того, что эти поляритеты *не имеют точек, лежащих на своих полярах*.

Задача 8.14. Геометрически опишите поляритеты вещественной плоскости, соответствующие пустым квадрикам, заданным в некоторой аффинной декартовой координатной системе уравнениями $x^2 + y^2 = -1$, $x^2 + 4y^2 = -1$ и $x^2 + y^2 = -4$.

Над алгебраически замкнутым полем соответствие между алгеброй и геометрией оказывается, как всегда, абсолютным и не требующим дополнительных оговорок. В частности, предыдущая задача допускает следующее решение в общем виде.

4.1.4. Утверждение. *Над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 поляра точки $p \in \mathbb{P}_n$ относительно квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ описывается как единственная гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, высекающая на Q то же множество точек, что и всевозможные касательные, которые можно провести к Q из точки p.*

Доказательство. Пусть

$$Q = \{\langle v \rangle \in V \mid B(v,v) = 0\} \quad \text{и} \quad p = \langle w \rangle \ .$$

Прямая (p, s), где $s = \langle u \rangle \in Q$ будет касаться квадрики в точке $\langle u \rangle$ тогда и только тогда, когда $B(u, w) = 0$, т.е. в точности тогда, когда $u \in Q \cap \mathbb{P}(\operatorname{Ann} \varrho_B(w))$. Но $\mathbb{P}(\operatorname{Ann} \varrho_B(w))$ это и есть поляра точки p относительно корреляции ϱ_B. □

4.1.5. Пример. Для того чтобы на вещественной плоскости построить поляру точки p, лежащей вне круга, относительно окружности C, которая этот круг ограничивает, надо провести прямую через две точки касания с C пары касательных, опущенных на C из p (почему?).

Задача 8.15. Постройте (циркулем и линейкой) поляру точки, лежащей внутри круга, и полюс прямой, не пересекающей круг.

§5. Линейные системы квадрик.

Симметричные корреляции (или квадратичные формы) на $(n+1)$-мерном векторном пространстве V сами сотавляют $(n+1)(n+2)/2$-мерное векторное пространство. Его проективизация будет $n(n+3)/2$-мерным проективным пространством. Геометрически это пространство можно интерпретировать как пространство поляритетов (каждой его точке соответствует единственный поляритет) или как пространство геометрических квадрик (если основное поле алгебраически замкнуто). Первая интерпретация тавтологична, вторая — возможна благодаря тому, что *над алгебраически замкнутым полем две квадратичных формы тогда и только тогда пропорциональны, когда они задают одну и ту же квадрику*. Мы не будем здесь доказывать это утверждение — доказательство бесхитростно и прямолинейно, но неизбежно громоздко.

Я предпочитаю говорить о «пространстве квадрик», а не о «пространстве поляритетов», и поэтому буду всюду далее считать основное поле алгебраически замкнутым.

5.1. Определение. *Всякое проективное подпространство в пространстве квадрик называется линейной системой квадрик.*

5.1.1. Пример. Все квадрики, проходящие через фиксированную точку $p \in \mathbb{P}_n$ составляют линейную систему коразмерности 1. Действительно, коэффициенты квадратичной формы являются однородными координатами на пространстве квадрик, а условие прохождения через данную точку — это одно нетривиальное *линейное* однородное условие на эти коэффициенты (продумайте это обязательно!). Этот пример составляет первый тривиальный частный случай $k = 0$ в следующей серии примеров:

> Задача 8.16. Докажите, что квадрики, касающиеся данного k-мерного проективного подпростьранства ($k = 1\,,\ 2\,,\ \dots\,,\ (n-1)$) составляют линейную систему.

Итак, изучение линейной геометрии пространства квадрик позволяет надеяться получать нетривиальные и уже нелинейные геометрические теоремы в исходном пространстве (где живут сами квадрики как геометрические фигуры). На алгебраическом жаргоне такой ход мысли иногда называют «счётом констант», поскольку типичный вопрос линейной геометрии — это вычисление размести того или иного подпространства.

5.1.2. Пример. Через любые 5 точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести квадрику, причём малым шевелением точек всегда можно добиться того, чтобы эта квадрика была единственной. Действительно, пространство плоских квадрик пятимерно, а 5 гиперплоскостей в проективном 5-мерном пространстве всегда имеют непустое пересечение, причём если уравнения этих плоскостей линейно-независимы, то пересечение будет нульмерным проективным подпространством, т.е. одной точкой.

5.1.3. Пример. Через любые 9 точек на $\mathbb{P}_3$ можно провести квадрику, причём малым шевелением точек всегда можно добиться того, чтобы эта квадрика была единственной. Если в качестве девяти точек взять 3 группы из трёх точек, лежащих на трёх различных прямых (каждая группа — на своей прямой), то мы получим, что через любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ можно провести квадрику.

> Задача 8.17. Докажите, что если три прямые попарно скрещиваются, то проходящая через них квадрика неособа и единственна.

> Задача 8.18. В вещественном трёхмерном аффинном пространстве заданы 4 попарно скрещивающиеся прямые. Сколько существует прямых, пересекающих каждую из четырёх данных? Укажите все возможные ответы, и объясните как они зависят от исходной конфигурации прямых (в частности, укажите ответы, устойчивые относительно «малых шевелений» исходной конфигурации).

Указатель терминов