Программа обязательного курса алгебры за второй семестр

«Линейная алгебра и геометрия»

(весна 1997 года)

Лектор: А. Городенцев (gorod@main.mccme.rsssi.ru)
Преподаватели: В. Долотин (dolotin@maple.dnttm.rsssi.ru)

Тема 1. *Векторные пространства.*

▹Пространства, подпространства, линейная зависимость, линейные оболочки, базисы, размерность. ▹Размерности пересечений и объединений подпространств.▹Фактор пространства, линейная зависимость и базис в факторе ▹Ковекторы, двойственность, соответствия между аннуляторами, каноническое соответствие между V^{**} и V. ▹Линейные операторы, ядро и образ, разложение в композицию вложения и проекции. ▹Двойственный оператор, соотношения между (ко)ядрами и (ко)образами. ▹Необходимое и достаточное условие существование фактор оператора между фактор пространствами ▹Координатный матричный формализм, соглашения об индексах, матрицы переходов. ▹Пример-приложение: интерполяция.

Практические навыки: хорошее знание стандартных примеров векторных пространств: многочлены, функции, расширения полей и т.п., умение отыскивать базис в линейной оболочке и свободно переходить от подпространств, заданных уравнениями, к подпространствам, заданным образующими, и наоборот, умение оценивать размерности пересечений и объединений, умение свободно переходить с языка линейных уравнений на язык линейнх операторов и наоборот, умение.

Тема 2. *Аффинные пространства.*

▹Аффинизация и векторизация, подпространства, аффинные оболочки и аффинные базисы. ▹Взаимное расположение аффинных подпространств. ▹Аффинные функционалы и аффинная двойственность, аффинные отображения. ▹Барицентры и барицентрические координаты.

Практические навыки: отыскивание базиса в аффинной оболочке, аффинная интерпретация систем неоднородных линейных уравнений, умение свободно переходить от подпространств, заданных уравнениями, к подпространствам, заданным образующими.

Тема 3. *Проективные пространства.*

▹Проективизация; проективные подпространства, проективные линеные оболочки и однородные координаты. ▹Аффинные карты и аффинные координаты, функции перехода. ▹Аффинная геометрия как срез проективной. ▹Взаимное расположение подпространств, дополнительные подпространства, проектирование. ▹Проективная линейная группа.

Практические навыки: топология проективных пространств над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (хотя бы в размерностях 1, 2, 3; умение строить проективные замыкания фигур и рассматривать их в других аффинных картах, проективная интерпретация аффинных объектов (барицентрические координаты и т.п.); проективная линеная группа и аффинная дробно линеная группа.

Тема 4. *Выпуклая геометрия $\mathbb{R}^n$.*

$\triangleright$Выпуклые комбинации и выпуклые оболочки. $\triangleright$Стандартная топология в $\mathbb{R}^n$, внутренние, граничные и крайние точки фигур, вершины. $\triangleright$Открытые и замкнутые выпуклые множества, опорные гиперплоскости, пересечение опорнх полупространств. $\triangleright$Выпуклые многогранники и конусы, ограниченные выпуклые многогранники как пересечения конечного числа полупространств и как выпуклые оболочки конечного числа вершин (теорема Минковского - Вейля). $\triangleright$Максимум аффинного функционала на выпуклом многограннике. (принцип Аронгольда).

Практические навыки: хорошее знание устройства стандартных n-мерных симплекса, куба и кокуба, интерпретация неоднородных систем линейных неравенств в терминах выпуклых многогранников, отыскание вершин и граней, двойственные многранники, представление о симплекс-методе.

Тема 5. *Евклидова геометрия.*

$\triangleright$Метрики, нормы и скалярные произведения, геометрическое изображение норм замкнутыми выпуклыми компактами, описание норм, возникающих из скалярных произведений. $\triangleright$Ортонормальные базисы. ортогонализация Грама - Шмидта. $\triangleright$Матрица Грама системы векторов и её преобразование при переходе к другому набору, неравенство Коши -Буняковского - Шварца $\dots$, евклидовы углы $\triangleright$Евклидов объём и его вычисление по матрице Грама $\triangleright$Евклидовы изометрии, ориентация $\triangleright$Ортогональные дополнения и ортогональне проекции

Практические навыки: знание стандартнх примеров евклидовых структур: многочлены, функции и т.п., умение строить ортогональные базисы (примеры стандартных ортогональтных ситем функций) умение вычислять евклидовы расстояния, углы и объёмы, строить ортогональные проекции; представление о методе наименьших квадратов.

Тема 6. *Комплексная, вещественная и кватернионная структуры.*

$\triangleright$Комплексификация и оператор комплексной структуры. $\triangleright$Овеществление и оператор вещественной структуры, каноническая ориентация овеществлённых комплексных пространств. $\triangleright$Овеществление комплексифицированного вещественного пространства, сравнение комплексной и вещественной линейности, условия Коши - Римана, сравнение полных линейных групп. $\triangleright$Кватернионное умножение в $\mathbb{R}^4$, норма кватерниона, деление, представление тела кватернионов комплексными 2×2 и вещественными 4×4 матрицами. $\triangleright$Единичные кватернионы, групповая структура на S^3, эпиморфизм $S^3 \twoheadrightarrow SO(3)$, S^3 как семейство комплексных структур на $\mathbb{R}^4$.

Практические навыки: умение переходить к удобным комплексным или вещественным базисам в овеществлённых или комплексифицированных пространствах, прпоектирование на собственные подпространства операторов комплексной и вещественной структуры (и знание того где эти подпространства живут); умение свободно вычислять с кватернионами, записывать их матрицами и в виде $a + bj$ с $a, b \in \mathbb{C}$, знание действия единичных кватернионов сопряжениями на $S^3 \subset \mathfrak{H}$ на $\mathbb{R}^3 = T_e(S^3)$

Тема 7. *Собственные значения линейных операторов.*

$\triangleright$Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, геометрический смысл комплексных собственных векторов вещественного линейного оператора.

▹Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора. ▹Разложение пространства в сумму инвариантных подпространств, ассоциированное с разложением минимального многочлена на взаимно простые множители, необходимое и достаточное условие диагонализуемости оператора над заданным полем, примеры: идемпотенты и инволюции.

Практические навыки: отыскание собственных значений и собственных векторов, нахождение двумерных инвариантных подпространств вещественного оператора, строение евклидовых изометрий трёхмерного просмтранства.

Тема 8. *Операторы на пространстве со скалярным произведением.*

▹Комплексификация евклидова пространства, эрмитова структура▹Эрмитова геометрия (ортогонализация и ортогональные проекции, расстояния, объёмы и углы), эрмитовы изометрии, группы U и SU, связностm унитарной группы▹Сопряжение операторов, сравнение (ко)ядер и (ко)образов сопряжённых операторов, естественная вещественная структура на $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$: самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы ▹Нормальные операторы, критерии нормальности, приведение изометрических, самосопряжённых и антисамосопряжённых операторов к нормальным осям в эрмитовом и в евклидовом пространстве. ▹Собственные подпространства перестановочных операторв, одновременная диагонализуемость операторов, составляющих конечную абелеву группу.

Практические навыки: вычисление и примеры пар сопряжённых операторв, оператор, формально сопряжённый к линейному дифф.оператору; приведение нормальных операторов к нормальным осям, полярное разложение, одновременная диагонализация пары симметричнх форм; взаймодействие эрмитовой, комплексной, евклидовой и симплектической структуры (восстановление всех этих данных по части из них)

Тема 9. *Общая теория линейных операторов.*

▹Корневое разложение, разложение Жордана, полупростая и нильпотентная составляющие произвольного оператора (над замкнутым полем). ▹Строение нильпотентных операторов, ЖНФ. ▹Пространство с оператором как $k[t]$-модуль, элементарные делители и инвариантные множители, отыскание минимального многочлена по матрице оператора. ▹Полиномиальные, аналитические и алгебраические функции от оператора и их вычисления в виде многочлена от исходного оператора.▹Экспоненциально-логарифмическое соответствие между изометриями и антисамосопряжёнными операторами.

Практические навыки: вычисление ЖНФ, размеров Жордановых клеток и т.п., представление о ЖНФ над $\mathbb{R}$; техника вычислений функций от матриц.

Тема 10. *Общая теория билинейных и квадратичных форм.*

▹Билинейные формы и корреляции, матрицы Грама, ядра, невырожденность. ▹Соответствие между формами и операторами и сопряжение операторов на пространстве с невырожденной билинейной формой, каноническое разложение формы в сумму симметричной и кососимметричной. ▹Канонический оператор (несимметричной) билинейной формы и нормальный вид билинейной формы над замкнутым полем♠. ▹Ограничение формы на подпространство, оценка размерности изотропного подпространства невырожденной формы▹приведение невырожденной кососимметричной формы к нормальному виду, пфаффиан кососимметричной матрицы, симплектическая структура.▷Поляризация квадратичной формы, приведение симметричной билинейной формы к диагональному виду (теорема Лагранжа)▷Разложение изометрии в композицию отражений, разложение невырожденной симметричной формы в прямую сумму гиперболической и анизотропной (теорема Витта), транзитивность действия группы изометрий на изотропных подпространствах▷Классификация квадратичных форм над $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, сигнатура вещественной квадратичной формы.

Практические навыки: умение вычислять пфаффиан (хотя бы для 2×2 и 3×3-матриц), вычисления в гиперболическом пространстве (хотя бы на гиперболической плоскости), определение сигнатуры вещественной квадратичной формы, примеры на вычисления над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Тема 11. *Геометрия квадрик.*

▷«Проективные квадрики: взаймодействие квадрики и прямой, касательное пространство, простые и особые точки, пересечение квадрики с касательной плоскостью. ▷Геометрическая классификация проективных квадрик над замкнутым полем, линейные подпространства, лежащие на квадриках ▷Классификация аффинных и вещественных квадрик. ▷Поляритеты и полярная двойственность. ▷Пространство квадрик, линейные системы квадрик.

Практические навыки: знание устройства маломерных комплексных и вещественных проективных и аффинных квадрик: комплексные коники, коника в $\mathbb{P}_2$ как образ отображения Веронезе, гексограмма Паскаля♠, соответствия на кониках♠, изоморфизм неособой квадрики $\mathbb{CP}_3$ с $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, эпиморфизм $SU(2) \times SU(2) \twoheadrightarrow SO(4)$.

Процедурные вопросы. Курс рассчитан на один семестр, 2 часа лекций и 2 часа упражнений в неделю. Для получения зачёта необходимо в течении семестра решить некоторое количество обязятельных задач, выданных преподавателем индивидуально каждому студенту (или вольнослушателю). Экзамен предполагается сделать «домашними» — оценка будет выставлена по итогам устного обсуждения *письменной работы*, в которой решаются заранее выданные за 1-2 недели до экзамена задачи. Вопросы и навыки, помеченные значком «♠», в программу зачёта и экзамена не войдут.