§1. Векторные пространства

1.1. Базисы и размерность

1.1.1. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ – два набора векторов, причем $m > n$. Докажите, что если каждый из векторов v_j линейно выражается через векторы e_i, то набор $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ – линейно зависим.

1.1.2. Докажите, что следующие свойства набора векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$ попарно эквивалентны:

(а) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ порождают V и это свойство нарушается при выкидывании из набора $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ любого из векторов.

(б) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ порождает V и в V нет порождающего набора менее, чем из n векторов.

(в) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейно независимы, и это свойство теряется при добавлении к набору любого вектора.

(г) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейно независимы, и в V нет линейно независимых наборов более чем из n векторов.

(д) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейно независимы и порождают V.

(е) Произвольный вектор v записывается в виде $v = \sum \lambda_i e_i$ причем числа $\lambda_i \in k$ однозначно определяются по V.

Терминологическое замечание. Равносильность утверждений (i) – (vi) известна как *теорема о базисе*. Набор векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, удовлетворяющий этим свойствам, называется *базисом* V, а число элементов n этого набора называется *размерностью* V.

1.1.3. Докажите, что размерность не зависит от выбора базиса и совпадает с максимальным n, для которого существует цепочка строго вложенных друг в друга подпространств

$$V = V^0 \supset V^1 \supset V^2 \supset \cdots \supset V^{n-1} \supset V^n = \{0\}$$

1.1.4. Пусть набор $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ порождает V, а его поднабор $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ линейно независим. Докажите, что $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ можно дополнить до базиса в V, добавляя к нему векторы e_j с $j > k$.

1.2. Координаты. Для введения координат на пространстве V фиксируют в нем некоторый базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и сопоставляют каждому вектору столбец его координат:

$$v = \sum x^i e_i \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее мы придерживаемся наиболее употребительной в настоящее время системы индексации, в которой нижние индексы нумеруют векторы в наборе векторов, а верхние индексы — координаты. С этой точки зрения матрица (a^i_j), где i – номер строки, j – номер стролбца — суть набор столбцов координат векторов a_1, a_2, $\cdots$, a_n, то есть a^i_j — i-ая координата вектора a_j.

Сопоставление вектору v столбца из его координат устанавливает изоморфизм пространства V с n-мерным *координатным пространством* k^n, элементами которого являются вектор-столбцы высоты n с покомпонентным сложением и умножением на константы.

1.2.5. Докажите, что векторы $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ образуют базис в V тогда и только тогда, когда матрица (v^i_j), составленная из столбцов их координат в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, невырождена.

Матрицы перехода. В случае, когда векторы $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ образуют базис, предыдущая матрица (v^i_j) из их координат в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется матрицей перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{v_j\}$ и обозначается C_{ev}.

1.2.6. Пусть $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — два базиса. $x_e = \begin{pmatrix} x_e{}^1 \\ x_e{}^2 \\ \vdots \\ x_e{}^n \end{pmatrix}$ и $x_v = \begin{pmatrix} x_v{}^1 \\ x_v{}^2 \\ \vdots \\ x_v{}^n \end{pmatrix}$ – координаты одного и того же вектора $\xi \in V$ в этих базисах. Докажите равенства:

(а) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}C_{ve}$

(б) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}C_{ev}$

(в) $C_{ve} = C^{-1}_{ev}$

(г) $x_e = C_{ev}x_v$

(д) $x_v = C_{ve}x_e$.

1.2.7. Пусть $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$. Докажите, что многочлены $(x)_0 = 1$, $(x)_1$, $\cdots$, $(x)_n$ образуют базис в пространстве многочленов степени меньше или равной n. Какие координаты имеет многочлен $1 + x + x^2$ в этом базисе? Каковы матрицы перехода от этого базиса к стандартному и обратно при $n = 4$?

1.3. Примеры векторных пространств.

Пространство функций. Убедитесь, что множество всех функций на данном множестве M со значением в данном поле k (или более общим образом, — со значениями в произвольном векторном пространстве V) является векторным пространством над k (сложение функций и умножение на константы определяется поточечно). Пространство таких функций обозначается символом k^M (соответственно — V^M). Убедитесь также, что непрерывные, гладкие, аналитические и интегрируемые функции образуют подпространство в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Продумайте другие примеры естественных пространств функций.

1.3.8. Пусть M — конечное множество из n элементов. Найдите размерность k^M и постройте в нем какй-нибудь базис.

1.3.9. Докажите, что приводимые ниже системы функций линейно независимы в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

(а) $1, \sin x, \cos x$;

(б) $1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin nx, \cos nx$;

(в) $1, \sin x, sin^2x, \cdots, \sin^m x$;

(г) $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$;

(д) $x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_m}$ (где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – попарно различные вещественные числа).

1.3.10. Докажите, что система функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \in k^M$ тогда и только тогда линейно независима, когда существуют n точек $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in M$ таких, что $\det(f_i(t_j)) \neq 0$.

Пространство многочленов.

1.3.11. Докажите, что множество $P_m \subset k[t]$, состоящее из многочленов степени не выше, чем m, образует подпространство в пространстве многочленов $k[t]$ над полем k. Докажите, что если некоторое подпространство $V \subset k[t]$ содержит хотя бы по одному многочлену каждой степени из степеней $d = 0, 1, ..., m$, то оно содержит все P_m. Найдите размерность P_m.

1.3.12. Для данных $m+1$ чисел $a_0, a_1, \ldots, a_m \in k$ постройте набор из $m+1$ многочленов $f_0, \ldots, f_m \in k[t]$, обладающих тем свойством, что $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Докажите, что они составляют базис в P_m. Чему равны координаты произвольного многочлена $g(t)$ в этом базисе?

1.3.13. *Интерполяционная формула Лагранжа.* Докажите, что имеется и при том только один многочлен степени не большей m , который в заданных $m+1$ точках принимает заданные значения. Приведите для такого многочлена явное выражение.

1.3.14. *Интерполяционная формула Лагранжа с кратными узлами.* Пусть задано k значений переменной $x = x_1, \ldots, x_k$ и для каждого значения x_i задано n_i чисел $y_{0,i}, \ldots, y_{n_{i-1},i} \in k$, причем $\sum n_i = m+1$. Докажите, что существует и единственен многочлен $f(x) \in P_m$, такой что при каждом значении $x = x_0, \ldots, x_k$ выполнены равенства

$$f^{(\nu)}(x_i) = y_{\nu,i} \qquad \text{при всех} \qquad \nu = 0, 1, ..., m_i$$

(здесь $f^{(\nu)}$ - это ν-тая производная от f).

1.3.15. Докажите, что многочлены из P_m, обращающиеся в нуль в заданных k точках, образуют подпространство в P_m. Укажите его базис и размерность.

1.3.16. Какова размерность пространства многочленов с вещественными коэффициентами степени не более n, обращающихся в нуль в точке $3-2i$? В k комплексных невещественных точках?

1.3.17. Докажите, что однородные многочлены степени n образуют (вместе с нулевым многочленом) подпространство в $k[x_1, \ldots, x_m]$; укажите его базис и размерность.

1.3.18. Найдите размерность пространства всех многочленов от m переменных степени, не большей чем n.

1.3.19. Найдите размерность пространства всех однородных симметрических многочленов степени 10 от 4 переменных и размерность пространства всех симметрических многочленов степени, не превосходящей 3 от 4 переменных.

Пространство подмножеств.

1.3.20. Докажите, что множество всех подмножеств данного множества M образует векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ относительно операций

$$X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$

$$1 \cdot X = X \qquad \text{и} \qquad 0 \cdot X = \emptyset.$$

1.3.21. Докажите, что это пространство естественно изоморфно пространству $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^M$. Укажите в пространстве подмножеств какой-либо базис.

1.3.22. Докажите, что семейство подмножеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ линейно независимо, если выполняется хотя бы одно из условий:

(а) $X_i \not\subset \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, 2, \cdots n$

(б) $X_1 \not\subset X_2 \not\subset \cdots \not\subset X_n$.

Числовые пространства. Если $k \subset K$ — два поля, то большее поле является векторным пространством над меньшим.

1.3.23. Докажите, что число элементов конечного поля является степенью простого числа.

1.3.24. Докажите, что $\mathbb{R}$ — бесконечномерно над $\mathbb{Q}$. Докажите также, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

1.3.25. (трудная!) Верно ли, что множество квадратных корней из всех простых чисел линейно независимо над $\mathbb{Q}$?

1.3.26. Пусть $k \subset K$ — два поля и K — конечномерно над k. Докажите, что любой элемнт из K является корнем некоторого многочлена из $k[t]$.

1.3.27. Пусть ϵ — примитивный комплексный корень пятой степени из 1. Докажите, что числа $f(\epsilon)$, где f пробегает все $\mathbb{Q}[t]$, составляет подпространство в $\mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$; найдите его базис и размерность.

1.3.28. Обобщение предыдущего. Пусть $k \subset K$ два поля и $\alpha \in K$ является корнем неприводимого многочлена $f(t) \in k[t]$ степени n. Докажите, что множество чисел вида $f(\alpha)$ по всем $f \in k[x]$ образует подпространство в K над k и найдите его размерность.

Конечные пространства . Пусть V n-мерное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов.

1.3.29. Сколько всего элементов в V и сколько там различных базисов?

1.3.30. Сколько в V имеется набов из k линейно независимых векторов?

1.3.31. Сколько в V k-мерных подпространств?

Матрицы. Определите, какие из приводимых ниже подмножеств в пространстве матриц типа $n \times n$ над полем k являются подпространствами и укажите их размерности.

1.3.32. Все матрицы ($\mathfrak{gl}_n$).

1.3.33. Невожденные матрицы (Gl_n).

1.3.34. Все вырожденные матрицы.

1.3.35. Верхнетреугольные матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = 0 \text{ при } i > j\}$.

1.3.36. Верхнетреугольные матрицы с единицами на главной диагонали.

1.3.37. Симметрические матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = a^j_i\}$.

1.3.38. Кососимметрические матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = -a^j_i\}$.

1.3.39. Для $k = \mathbb{C}$ эрмитовы матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = \overline{a^j_i}\}$.

1.3.40. Для $k = \mathbb{C}$ косоэрмитовы матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = -\overline{a^j_i}\}$.

1.3.41. Являются ли два последних множества пространствами над $\mathbb{R}$?

1.3.42. Ортогональные матрицы $\{M \mid M^t = M^{-1}\}$ (O_n).

1.3.43. Симплектические матрицы $\{M \mid MJM^t = J\}$, где

$$J = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & 0 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & 0 & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{и} \qquad n - \text{четно.}$$

1.3.44. Матрицы, коммутирующие с J, где J как и выше.

1.3.45. $\{M \mid MJ + JM^t = 0\}$, где J как и выше.

1.3.46. Матрицы, у которых невырождены заданные несколько миноров.

§2. Линейные подпространства и отображения

В этом разделе мы рассматриваем явные способы задания подпространств в n-мерном векторном пространстве V с фиксированным базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и связанными с ним координатами $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Возникающие при этом понятия линейного функционала, сопряженного пространства и линейного отображения являются ключевыми в линейной алгебре.

2.1. Линейные оболочки. Линейная оболочка векторов $M \subset V$ обозначается символом $\langle M \rangle_{\text{лин}}$ и может быть определена тремя способами:
— как наименьшее по включению подпространство в V, содержащее множество M;
— как пересечение всех подпространств, содержащих M;
— как множество всевозможных линейных комбинаций вида

$$v = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_k m_k; \qquad \lambda_i \in k; \quad m_i \in M.$$

2.1.1. Докажите, что все три способа корректно определяют одно и тоже подпространство в V.

Простейший способ задания подпространства $W \subset V$ состоит в описании его как линейной оболочки набора векторов $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ называемых образующими: $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle_{\text{лин}}$. Такое представлене W полностью определяется заданием $n \times k$-матрицы (w_j^i) из столбцов координат образующих векторов w_j в фиксированном нами базисе пространства V.

2.1.2. Укажите алгоритм, позволяющий по заданной матрице (w_j^i) из столбцов координат образующих векторов подпространства W определить размерность этого подпространства и построить в нем какой-либо базис.

(Указание: элементарные преобразования столбцов матрицы (w_j^i) соответствуют линейным заменам образующих w_j, за которыми можно проследить; с другой стороны, они позволяют привести матрицу к ступенчатому виду, а в этом случае ответить на оба вопроса несложно.)

2.1.3. Найдите базис и размерность суммы и пересечения подпространств $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\text{лин}}$ и $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\text{лин}}$, где:

(а) $a_1 = (1,1,1,1)^t$, $a_2 = (1,-1,1,-1)^t$, $a_3 = (1,3,1,3)^t$,
$b_1 = (1,2,0,2)^t$, $b_2 = (1,2,1,2)^t$, $b_3 = (3,1,3,1)^t$.

(б) $a_1 = (1,1,0,0)^t$, $a_2 = (0,1,1,0)^t$, $a_3 = (0,0,1,1)^t$,
$b_1 = (1,0,1,0)^t$, $b_2 = (0,2,1,1)^t$, $b_3 = (1,2,1,2)^t$.

2.2. Размерности подпространств.

2.2.4. Пусть $U, V \subset W$ — два подпространства. Выразите $\dim(U+V)$ через $\dim U$ и $\dim V$.

2.2.5. Получите точную оценку снизу для $\dim(U \cap V)$ через $\dim U$, $\dim V$ и $\dim W$.

2.2.6. Докажите, что если $\dim(U+V) = \dim(U \cap V) + 1$, то $U+V$ равно одному из подпространств U, V, а $U \cap V$ — другому.

2.2.7. Пусть $W_1, W_2, \dots, W_m$ — набор k-мерных подпространств в V, таких что $\dim(W_i \cap W_j) = (k-1)\ \forall i, j$. Докажите, что либо все W_j содержат общее $(k-1)$-мерное подпространство, либо содержатся в одном общем $(k+1)$-мерном подпространстве.

2.3. Линейные функционалы. Функция $\varphi : V \mapsto k$ называется линейным функционалом, если для любых $v_1, v_2 \in V$ и для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in k$

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2).$$

Как и все функции, линейные функционалы можно поточечно складывать и умножать на числа.

2.3.8. Докажите, что линейные функционалы образуют векторное пространство над k (оно обозначается V^* и называется *сопряженным* или *двойственным* к V.)

2.3.9. Докажите, что координатные функции $x^1, x^2, \dots, x^n$ (x^j сопоставляет вектору v его j-тую координату в фиксированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$) составляют базис в V^* (он называется базисом *сопряженным* или *двойственным* к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ в V). Найдите значения $x^i(e_j)$. Другая формулировка этой задачи: функция $\varphi : V \mapsto k$ тогда и только тогда является линейным функционалом, когда существуют константы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, такие, что действие φ на произвольный вектор $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t$ задается формулой:

$$\varphi(v) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum \varphi_j x^j$$

при этом $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ определяются по φ однозначно.

Обозначения. Элементы φ иногда называют ковекторами. Координаты ковекторов принято записывать в строчку и нумеровать нижними индексами, а сами ковекторы в семействе ковекторов — верхними индексами.

2.3.10. *Двойственность.* Докажите, что естественное отображение $V \mapsto (V^*)^*$, сопоставляющее вектору v функционал $\tilde{v}$, действующий на ковекторы $\varphi \in V^*$ по правилу: $\tilde{v}(\varphi) = \varphi(v)$, устанавливает изоморфизм между V и $(V^*)^*$. Какой базис пространства V является прообразом базиса $(V^*)^*$, сопряженного к базису $x^1, x^2, \dots, x^n$ в V^* при этом изоморфизме и как выглядят в этом базисе-прообразе координаты вектора v, имевшего координаты $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ в исходном базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ пространства V?

2.4. Задание подпространств уравнениями. Однородное линейное уравнение:

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n = 0$$

следует воспринимать как соотношение $a(v) = 0$ на вектор $v \in V$ и ковектор $a \in V^*$ (где $v = (x^i)$ в фиксированном базисе пространства V, а $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ в двойственном базисе пространства V^*). Полезно отметить, что это соотношение при фиксированном $v \in V$ — является уравнением на пространстве V^* относительно неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_n$.

2.4.11. Фиксируем $a \in V^*$. Докажите, что если $a \neq 0$, то решения $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t$ однородного уравнения $a(v) = 0$ образуют $(n-1)$-мерное подпространство в V (оно обозначается $\operatorname{Ann} a$ и называется аннулятором a).

2.4.12. Фиксируем набор функционалов $a^1, a^2, \dots, a^k \in V^*$. Докажите, что решения системы однородных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^1(v) & = & 0 \\ a^2(v) & = & 0 \\ & \dots & \\ a^k(v) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \sum a^1_j x^j & = & 0 \\ \sum a^2_j x^j & = & 0 \\ & \dots & \\ \sum a^k_j x^j & = & 0 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} a^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

составляют подпространство $W \subset V$. Докажите также, что $W = \cap \operatorname{Ann} \varphi$ по всем $\varphi \in \langle a^1, a^2, \dots, a^k \rangle_{\text{лин}} \subset V^*$.

2.4.13. Докажите, что любое подпространство $W \subset V$ может быть задано как множество решений системы линейных однородных уравнений (как в предыдущей задаче) и что при этом

$$\dim W = \dim V - \dim \langle a^1, a^2, \dots, a^k \rangle_{\text{лин}}$$

Если в пространстве V фиксирован базис, то система уравнений, задающих данное подпространство W вполне определяется матрицей размера $k \times n$ (называемой матрицей системы), по строкам которой стоят координаты ковекторов $a^1, a^2, \dots, a^k$, участвующих в уравнениях, в сопряженном базисе пространства V^*.

2.4.14. Укажите алгоритм, позволяющий по матрице системы уравнений, задающих подпространство $W \subset V$, определить:

(а) минимальное число уравнений, необходимых для задания W и явный вид этих уравнений;

(б) размерность и базис пространства W.

Указание: в первом пункте речь идет о нахождинии $\dim \langle a^1, a^2, \dots, a^k \rangle_{\text{лин}}$ и базиса в этом пространстве (ср. с зад. 2.4.13 и зад. 2.1.2; надо воспользоваться элементарными преобразованиями строк и привести матрицу к ступенчатому виду).

2.4.15. Укажите алгоритм, позволяющий по матрице (w^i_j) из столбцов координат векторов $w_1, w_2, \dots, w_k \in V$ составить минимальную систему уравнений, задающих подпространство $\langle w^1, w^2, \dots, w^k \rangle_{\text{лин}}$.

Указание: эта задача сводится к предыдущей, если рассмотреть $w_1, w_2, \dots, w_k \in V$ как функционалы на V^*.

2.4.16. Найдите систему линейных уравнений, задающих линейную оболочку $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\text{лин}}$, где

(а) $a_1 = (1, -1, 1, 0)^t$; $\quad a_2 = (i, 1, 0, 1)^t$; $\quad a_3 = (2, 0, 1, 1)^t$

(б) $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)^t$; $\quad a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)^t$; $\quad a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)^t$

2.4.17. Рассмотрим в k^n подпространство L_0, заданное уравнением $x^1 + x^2 + \dots = x^n = 0$, и подпространство L_1, заданное системой уравнений: $x^1 = x^2 = \dots = x^n$. Докажите, что

$k^n = L_0 \oplus L_1$ и найдите координаты векторов-проекций стандартных базисных векторов в k^n на каждое из этих подпространств вдоль другого подпространства.

2.4.18. Рассмотрим в k^4 подпространства:

$$L_0 = \langle (1,1,1,1)^t, (-1,-2,0,1)^t \rangle_{\text{лин}},\ L_1 = \langle (-1,-1,1,-1)^t, (2,2,0,1)^t \rangle_{\text{лин}}$$

Докажите, что $k^4 = L_0 \oplus L_1$ и найдите проекцию вектора $(4,2,4,4)^t$ на L_0 вдоль L_1.

2.5. Линейные операторы. Отображение $f : V \mapsto W$ называется *линейным оператором*, если для любых $v_1, v_2 \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in k$

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Частными случаями линейных операторов являются линейные функционалы: для них $W = k$.

2.5.19. Докажите, что линейные операторы из n-мерного пространства V в m-мерное пространство W образуют mn-мерное векторное пространство (оно обозначается $\mathrm{Hom}(V,W)$). Докажите, что если в V выбрать базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а в W — базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, то отображения f_j^i, действующие на вектор $v \in V$ по правилу $f_j^i(v) = x^i(v)\xi_j$, будут линйными и составляют базис пространства $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Матрицей линейного оператора $f : V \mapsto W$ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства W называется матрица $C_f = (f(e_j)^i)$, по столбцам которой стоят координаты образов $f(e_j)$ базисных векторов e_j пространства V в базисе $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства W.

2.5.20. Докажите, что сопоставление оператору его матрицы является изоморфизмом пространства $\mathrm{Hom}(V,W)$ и пространства матриц размера $(\dim W) \times (\dim V)$. Найдите матрицы операторов f_j^i из предыдущей задачи.

2.5.21. Докажите, что матрица композиции операторов равна произведению матриц:

$$C_{f \circ g} = C_f C_g,$$

где $f : V_2 \mapsto V_3$, $g : V_1 \mapsto V_2$, $f \circ g : V_1 \mapsto V_3$, и при сопоставлении f и g матриц используется один и тот же базис в пространстве V_2.

2.5.22. Докажите, что координаты (y^i) образа $f(v)$ в базисе $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства W могут быть найдены по координатам (x^i) вектора v в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V по формуле:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = C_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где C_f — матрица линейного оператора f в базисах $\{e_j\}$, $\{\xi_j\}$. Вывести из предыдущих двух задач все результаты о матрицах перехода из зад. 1.2.6.

2.5.23. Фиксируем базисы $\{e_j\}$ в V и $\{\xi_j\}$ в W, и пусть $\{v_j\}$ — другой базис в V, а $\{\eta_j\}$ — другой базис в W. Пусть C_{ev} и $C_{\xi\eta}$ — соответствующие матрицы перехода. Докажите, что матрица C'_f оператора f в базисах $\{v_j\}, \{\eta_j\}$ связана с матрицей C_f оператора f в базисах $\{e_i\}, \{\xi_i\}$ формулами:

$$C'_f = C_{\eta\xi} C_f C ev = C_{\xi\eta}^{-1} C_f C_{ev} = C_{\eta\xi} C_f C_{ve}^{-1}$$

2.5.24. Пусть $f : V \mapsto W$ —линейный оператор и C_f его матрица в некоторых фиксированных базисах. Докажите, что

$$\operatorname{im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V : \; f(v) = w\} \subset W$$

является подпространством в W и совпадает с линейной оболочкой векторов, координаты которых стоят по столбцам C_f.

2.5.25. Докажите, что в условиях предыдущей задачи

$$\ker f = \{v \in V : \mid f(v) = 0\} \subset V$$

является подпространством в V и задается системой уравнений с матрицей C_f.

2.5.26. Докажите, что для любого $f : V \mapsto W$ имеется равенство:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

.

2.5.27. Сопоставим оператору $f : V \mapsto W$ оператор $f^* : W^* \mapsto V^*$ (он называется *двойственным* к f), переводящий функционал $\varphi \in W^*$ в функционал $f^*\varphi \in V^*$, действующий на векторы $v \in V$ по правилу $f^*\varphi(v) = \varphi(f(v))$. Докажите, что это сопоставление корректно, является линейным оператором из $\mathrm{Hom}(V, W)$ в $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ и устанавливает изоморфизм между этими пространствами.

2.5.28. Как связаны между собой матрица C_f в некоторых базисах и матрица C_{f^*} в сопряженных базисах?

2.6. Приложение: теория линейных уравнений. Все вышесказанное может быть переформулировано на языке линейных уравнений.

2.6.29. *Теорема о ранге.* Пусть M — произвольная матрица размера $k \times n$ (k строк и n столбцов). Докажите, что следующие три числа равны (каждое из них называется *рангом* матрицы M и обозначается $\mathrm{rk} M$):

— размерность линейной оболочки столбцов матрицы M в k^n;
— размерность линейной оболочки строк матрицы M в k^n;
— порядок максимального ненулевого минора матрицы M.

2.6.30. *Теорема об окоймляющих минорах.* Пусть M — произвольная матрица, содержащая ненулевой минор порядка k. Докажите, что если все миноры порядка $k+1$, содержащие данный, нулевые, то $\mathrm{rk} M = k$.

2.6.31. *Теорема Кронекера-Капелли.* Система линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^1 x^j = b^1; \; \sum_{j=1}^{n} a_j^2 x^j = b^2; \; \ldots \; sum_{j=1}^n a_j^k x^j = b^k;$$

или в матричной записи:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}; \quad (A = (a_j^i))$$

тогда и только тогда имеет решение, когда $\mathrm{rk} A$ равен рангу расширенной матрицы системы, получающейся приписыванием к A справа столбца правых частей уравнений.

2.6.32. *Альтернатива Фредгольма.* Система линейных уравнений

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

с квадратной матрицей A (это означает, что число уравнений равно числу неизвестных) либо имеет единственное решение при любой правой части $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, либо имеет бесконечно много решений при нулевой правой части и эти возможности исключают друг друга. Докажите это и объясните, какая из возможностей реализуется при $\det A = 0$ и при $\det A \neq 0$?

§3. Аффинные пространства

3.1. Вводные задачи

3.1.1. Выведите из аксиом аффинного пространства, что для любых четырех точек P, Q, S, T условие $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QT}$ равносильно условию $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}$.

3.1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^t, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}^t$ — две точки координатного пространства $\mathbb{R}^n$, рассматриваемого как аффинное пространство. Найдите координаты точки C, которая:

(а) делит отрезок $[AB]$ в отношении $k : m$, считая от A;

(б) такова, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

3.1.3. Пусть A, B, C, D, O — некоторые точки в n-мерном аффинном пространстве . При каких условиях на числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ точка $O + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD}$ лежит:

а) на $[AB]$; б) в треугольнике ABC; в) в тетраэдре $ABCD$?

Как зависят эти условия от выбора точки O?

3.1.4. Напишите уравнение $(n-1)$-мерной гиперплоскости, пересекающей координатные оси n-мерного аффинного координатного пространства в точках с координатами $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}^t$.

3.1.5. *Центром тяжести* системы точек $A_1, A_2, \dots, A_k$ с весами $m_1, m_2, \dots, m_k$ называется точка $O + (m_1 + m_2 + \cdots + m_k)^{-1} \sum m_i\overrightarrow{OA_i}$, где O — некоторая фиксированная "начальная" точка. Докажите, что это определение не зависит от выбора начальной точки.

3.1.6. Пусть G —некоторая подгруппа в группе всех аффинно-линейных преобразований аффинного пространства. Докажите, что если G имеет конечную орбиту, то G имеет и неподвижную точку (в частности, любая конечная группа имеет неподвижную точку).

3.2. Барицентрические координаты.

3.2.7. Пусть $O, A_1, A_2, \dots, A_k$ — произвольные точки аффинного пространства, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — такие числа, что $\sum \lambda_i = 0$. Докажите, что вектор $\sum \lambda_i\overrightarrow{OA_i}$ из ассоциированного векторного пространства не зависит от точки O.

3.2.8. Докажите, что если в предыдущей задаче взять числа, удовлетворяющие условию $\sum \lambda_i = 1$, то точка $O + \sum \lambda_i\overrightarrow{OA_i}$ не будет зависеть от выбора точки O.

Обозначение. Точка из предыдущей задачи обозначается $\sum \lambda_i A_i$. Подчеркнем, что эта запись имеет смысл лишь при $\sum \lambda_i = 1$.

3.2.9. Пусть $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ — набор из $(n+1)$ точек в n-мерном аффинном пространстве. Докажите, что n векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ тогда и только тогда составляют базис в ассоциированном векторном пространстве, когда любая точка P допускает и при том единственное представление в виде $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$; с $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.

Определение. В ситуации зад. 3.2.9 точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *аффинным базисом* аффинного пространства, а числа λ_i, соответствующие точке P, *барицентрическими координатами* этой точки.

3.2.10. В условиях зад. 3.2.9 выясните, какие

(а) барицентрические координаты имеет центр тяжести точек A_i?

(б) веса нужно поставить в точки A_i, чтобы их центр тяжести оказался в точке P с данными барицентрическми координатами?

(в) барицентрические координаты будет иметь точка $A_0+\overrightarrow{v}$, где $\overrightarrow{v}$ — вектор, имеющий в векторном базисе $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ координаты $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^t$?

3.2.11. Пусть точки A, B, C составляют аффинный базис аффинной плоскости. Опишите ГМТ, барицентрические координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $\alpha, \beta, \gamma > 0$ б) $\alpha, \beta > 0,\ \gamma < 0$ в) $\alpha = \beta$
г) $\alpha, \beta > 1/3,\ \gamma > 0$ д) $\alpha \geqslant \beta$ е) $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

3.2.12. В условиях предыдущей задачи выпишите условия на барицентрические координаты, задающие треугольники:

(а) получающиеся из ABC гомотетиями относительно точки пересечения медиан с коэффициентами 3 и 1/3;

(б) разрезаниями ABC по медианам (всего имеется 6 треугольников).

3.2.13. Будем называть *медианами* набора точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$ отрезки, соединяющие одну из этих точек с центром тяжести остальных. Докажите, что все медианы пересекаются в одной точке.

3.3. Выпуклость. Подмножество M точек аффинного пространства называется *выпуклым*, если с любыми двумя точками $A, B \in M$ оно содержит и соединяющий их отрезок $[A, B] = \{P = \alpha A + \beta B | \, \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1\}$. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество точек M называется *выпуклой оболочкой* множества M и обозначается $\langle M \rangle_{\text{вып}}$. Это наименьшеевыпуклое множество, содержащее M.

3.3.14. Докажите, что:

(а) выпуклая оболочка множества M состоит из всевозможных точек:

$$P = \sum \lambda_i M_i \quad \text{с} \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum \lambda_i = 1 \quad \text{и} \quad M_i \in M$$

.

(б) для произвольной точки P $\qquad \langle P \cup M \rangle_{\text{вып}} = \bigcup\limits_{Q \in \langle M \rangle_{\text{вып}}} [PQ].$

(в) выпуклая оболочка набора точек, порождающих k-мерное аффинное подпространство, является объединением всех k-мерных симплексов с вершинами в этих точках.

3.3.15. Докажите, что выпуклая оболочка компакта — компакт (базисом открытых множеств в аффинном пространстве здесь и далее мы считаем открытые параллелипипеды).

3.3.16. Пусть K — замкнутое выпуклое множество, P — точка. Докажите, что:

(а) если $P \notin K$, то существует гиперплоскость, разделяющая P и K (то есть P и K находятся по отношению к ней в разных открытых полупространствах);

(б) если P лежит на границе K, то существует проходящая через P гиперплоскость, относительно которой K лежит в одном замкнутом полупространстве (так называемая *опорная гиперплоскость*.

3.3.17. Докажите, что всякое выпуклое множество является пересечением семейства полупространств, а если множество является выпуклой оболочкой конечного набора точек, то — конечного семейства полупространств (то сеть выпуклым многогранником).

3.4. n-мерные куб и кокуб. Прежде чем приступать к решению задач этого цикла, придумайте определение n-мерного единичного куба в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$, обобщающее представление о квадрате с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1). Такой n-мерный куб мы будем называть *стандартным*.

3.4.18. Сколько вершин и k-мерных граней у стандартного n-мерного куба?

3.4.19. Сколько внутренних (то есть не лежащих в грани) диагоналей выходит из одной вершины и сколько всего внутренних и вообще диагоналей у n-мерного куба?

3.4.20. Нарисуйте какую-либо 2-мерную проекцию 4-мерного стандартного куба и какую-либо его 3-мерную "развертку поверхности" с указаниями, как ее склеивать.

3.4.21. Опишите семейство трехмерных многогранников, получающихся в сечении стандартного 4-мерного куба семейством гиперплоскостей, параллельных плоскости $x^1+x^2+x^3+x^4=0$ и проходящих через точки $O+\overrightarrow{tv}$, где $\overrightarrow{v}=(1,1,\ldots,1)^t$, а t пробегает отрезок $[0,1]$.

Определение. *n-мерным кокубом* называется выпуклая оболочка центров $(n-1)$-мерных граней n-мерного куба. В частности 3-мерный кокуб — это октаэдр. *Стандартным кокубом* называется выпуклая оболочка $2n$ точек: концов векторов координатного репера и противоположных им.

3.4.22. Убедитесь, сто стандартный кокуб — это кокуб (то есть укажите куб, из которого он построен) и определите сколько у него k-мерных граней, $k=0,1,2,...,n$.

3.4.23. В каком отношении делит центр тяжести набора точек, состоящего из данной вершины и всех вершин, соединенных с ней 1-мерным ребром, ту внутреннюю диагональ из данной вершины, на которую он попадает:

а) для n-мерного куба б) для n-мерного кокуба?

3.4.24. Установите взаимно-однозначное соответствие между k-мерными гранями куба и $(n-k)$-мерными гранями кокуба; и придайте точный смысл фразе: "кокуб в $\mathbb{R}^n$ — это тоже самое, что куб в $(\mathbb{R}^n)^*$".

3.5. Симплекс. Невырожденным k-мерным *симплексом* называется выпуклая оболочка $k+1$ точек $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$, для которых векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ линейно независимы (это равносильно более симметричному условию: точки не содержатся ни в каком $(k-1)$-мерном подпространстве). Если последнее условие не выполняется, симплекс называется *вырожденным*. *Стандартным k-мерным симплексом* называется выпуклая оболочка $(k+1)$ точек —- концов базисных векторов координатного репера в $\mathbb{R}^{k+1}$.

3.5.25. Сколько k-мерных граней у стандартного n-мерного симплекса?

3.5.26. Разрежьте стандартный n-мерный куб на $k!$ симплексов (не стандартных, разумеется).

3.5.27. Барицентрическое подразделение симплекса обощает процедуру разбиения треугольника на 6 треугольников медианами, и состоит в переходе к меньшим симплексам, 1-мерные ребра которых — это отрезки, соединяющие центры тяжести граней и самого симплекса с вершинами и с центрами тяжести граней меньших размерностей (дайте самостоятельно точное индуктивное определение). На сколько симплексов разделится k-мерный симплекс при барицентрическом разбиении?

3.5.28. Рассмотрите сечения стандартного: а) трехмерного б) четырехмерного симплекса семействами плоскостей:
а) $x^1 = const$; б) $x^1 + x^2 = const$. Определите, что это за фигуры и вычислите их метрические параметры: длины сторон, площади граней, объемы и т.п. (Относительно стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^n$).

3.6. Теорема Хелли. Пусть дан набор выпуклых фигур $K_1, K_2, \ldots, K_m$ в n-мерном аффинном пространстве с $n < m$. Теорема Хелли утверждает, что если любые $n+1$ из этих фигур имеют общую точку, то все m фигур имеют общую точку.

3.6.29. Приведите примеры, демонстрирующие, что условие выпуклости нельзя отбросить, а число $n+1$ нельзя уменьшить.

3.6.30. Докажите теорему Хелли для $m = n+2$. (Указание: для разгона рассмотрите сначала случай $n = 2$. Возьмите выпуклую оболочку набора из $n+2$ точек, являющихся общими для всевозможных сочетаний из $n+1$ фигур, и постройте, исходя из нее точку, принадлежащую всем $n+2$ фигурам. При этом возможны два случая: все $n+2$ точки являются вершинами выпуклой оболочки, или одна из них лежит в выпуклой оболочки остальных.)

3.6.31. Докажите теорему Хелли в общем случае. (Указание: по индукции можно считать, что любые $m-1$ фигур имеют общую точку и повторить предыдущее рассуждение. Опять же полезно сначала разобрать случаи малых размерностей $n = 2, 3$!)

3.6.32. Докажите, что любое покрытие k-мерного аффинного пространства полупространствами содержит подпокрытие, состоящее из $k+1$ полупространства.

3.6.33. Докажите, что любое пятно на скатерти, диаметр которого (то есть максимальное расстояние между точками пятна) не более 1, покрывается блюдцем радиуса $1/\sqrt{3}$. Как это обобщить на высшие размерности? (Этот сюжет называется теоремой Юнга).

3.6.34. Докажите, что теорема Хелли остается в силе для бесконечного набора, но *компактных* выпуклых фигур, и убедитесь, что условие компактности всех фигур существенно.

§4. Евклидовы пространства.

4.1. Евклидова геометрия.

4.1.1. Описать форму сечений четырехмерного единичного стандартного куба подпространствами:

(а) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

(б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$;

найдите их объемы и объемы всех их граней.

4.1.2. Пусть $P_0,\ P_1, P_2, \ldots, P_k$ — набор из $k+1$ аффинно независимых точек n-мерного евклидова пространства. Докажите, что ГМТ равноудаленных от всех точек данного набора представляет собой $(n-k)$-мерное аффинное подпространство. Выведите отсюда, что вокруг k-мерного симплекса можно описать и при том только одну $k-1$-мерную сферу.

4.1.3. Найдите угол между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$ стандартного 4-мерного симплекса $A_0A_1A_2A_3A_4$.

4.1.4. Напишите уравнение $(k-1)$-аффинной гиперплоскости в k-мерном аффинном евклидовом пространстве, если известно, что она перпендикулярна данному вектору $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и:

(а) проходит через данную точку $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$;

(б) удалена от начала координат на данное расстояние d.

4.1.5. Две гиперплоскости в аффинном пространстве заданы уравнениями: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ и $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d$.
Найдите угол между ними, а если он нулевой — расстояние.

Нижеследующие задачи обязательно уметь решать для размерностей $k = 3, 4$ (если случай произвольной размерности вызывает у вас затруднения).

4.1.6. Найдите количество осей и $(k-1)$-мерных плоскостей симметрии у k-мерных куба и кокуба.

4.1.7. Найдите количество диагоналей k-мерного куба, ортогональных данной диагонали.

4.1.8. Найдите длину диагонали стандартного k-мерного куба и ее предел при $k \mapsto \infty$.

4.1.9. Докажите, что диагонали k-мерного куба образуют одинаковые углы со всеми ребрами, найдите их, их пределы при $k \mapsto \infty$ и укажите при каком k они равны $\pi/3$.

4.1.10. Найдите углы между диагоналями и всевозможными m-мерными гранями в k-мерном кубе.

4.1.11. Найдите радиус шара, описанного вокруг стандартного k-мерного куба.

4.1.12. Найдите радиус шара, описанного вокруг стандартного k-мерного симплекса.

4.1.13. Докажите, что длина проекции ребра k-мерного куба на диагональ составляет $1/k$ часть от длины диагонали.

4.1.14. Докажите, что проекции всех вершин k-мерного куба на диагональ делят ее на k равных частей.

4.1.15. Вычислите расстояние между противоположными m и $(k-m-1)$-мерными гранями стандартного k-мерного симплекса и докажите, что оно реализуется как расстояние между центрами этих граней.

4.1.16. *Неравенство Буняковского-Коши-Шварца.*: докажите, что для любых векторов v и w евклидова линейного пространства выполнено неравенство $|(v,w)| \leqslant \|v\|\|w\|$, равенство в котором равносильно пропорциональности векторов. Выведите из этого известные неравенства:

(а) $\sum x_i^2 \sum y_i^2 \geqslant \left(\sum x_i y_i\right)^2$
для любых наборов чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

(б) $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \cdot \int\limits_0^1 g^2(x)dx \geqslant (\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx)^2$ для любых функций на $[0,1]$ с сумируемым квадратом.

4.2. Примеры евклидовых пространств.

4.2.17. Найдите ортогональный базис в подпространстве $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ стандартного координатного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

4.2.18. Найдите ортогональный базис в линейной оболочке векторов
$v_1 = (1,2,2-1)^t$, $v_2 = (1,1,-5,3)^t$, $v_3 = (3,2,8,-7)^t$, в $\mathbb{R}^n$. и ортогональном дополнении к ней.

4.2.19. Найдите уравнения, задающие ортогональное дополнение к подпространству в стандартном $\mathbb{R}^4$, заданному уравнениями:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

.

4.2.20. Докажите, что следующие четыре формулы определяют евклидовы скалярные произведения в $\mathbb{R}[x]$:

(а) $(P,Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx;$

(б) $(P,Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

(в) $(P,Q) = \int\limits_{0}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx;$

(г) $(P,Q) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx;$

Докажите также, что применяя в каждом из этих случаев процесс ортогонализации к стандартному базису $1, x, x^2, x^3, \ldots$, мы получим с точностью до постоянных множителей следующие семейства многочленов соответственно:

(д) многочлены Лежандра: $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n];$

(е) многочлены Чебышева: $T_n(x) = \cos(n \arccos x);$

(ж) многочлены Лаггера: $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^n\right];$

(з) многочлены Эрмита: $T_n(x) = e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2};$

(Указание: можно провести непосредственно ортоганализацию, а можно убедиться в том, что в ответе и в самом деле стоит набор ортогональных многочленов, причем линейная оболочка любых первых k элементов совпадает с линейной оболочкой набора $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$).

4.2.21. Вычислите длины приведенных выше специальных многочленов в соответствующих евклидовых структурах.

4.2.22. Найдите минимум $\int\limits_{-1}^{1} P^2(x)dx$ по всем многочленам P степени k со старшим коэффициентом 1.

4.2.23. В пространстве многочленов со скалярным произведением $(P,Q) = \int\limits_{0}^{1} P(x)Q(x)dx$ степени не выше k вычислите расстояние от нуля до подпространства многочленов степени k со старшим коэффициентом 1.

4.2.24. Докажите, что формула $(A,B) = \mathrm{tr}(A\bar{B}^t)$ орпеделяет евклидово скалярное произведение на пространстве вещественныых квадратных матриц и эрмитово скалярное произведение на пространстве комплексных квадратных матриц. Найдите ортогональное дополнение к подпространствам:

(а) матриц с нулевым следом;

(б) симметрических матриц;

(в) верхнетреугольных матриц;

(г) кососимметрических матриц.

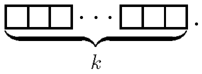
4.2.25. Докажите, что след матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, в котором она записывается.

4.2.26. Пусть поле K является конечномерным расширением поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим K как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, а элементы в K как линейные операторы из K в K, действующие умножением в поле K. Положим $(a,b) = \mathrm{tr}(ab)$. Докажите, что соответствие $a \mapsto \mathrm{tr}(a)$ является линейным функционалом на K, а произведение (a,b) — евклидовым скалярным произведением.

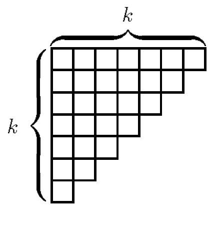
4.2.27. (необязательная)Докажите, что в условиях предыдущей задачи целые над $\mathbb{Z}$ элементы поля K составляют решетку конечного ранга, порождающую K как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

4.3. Объемы и определители Грама.

4.3.28. Нульмерная ступенчатая пирамида — это точка. Одномерная ступенчатая пирамида высоты k Π^1_k — это:



Двумерная ступенчатая пирамида высоты k $\Pi^2_k = \Pi^1_1 + \Pi^1_2 + \cdots + \Pi^1_k$ — это:



Аналогично n-мерная ступенчатая пирамида высоты k получается из k $(n-1)$-мерных ступенчатых пирамид убывающей высоты, поставленных в стопку вдоль n-той координатной оси: $\Pi_k^n = \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \cdots + \Pi_k^{n-1}$. Докажите, что на постройку n-мерной ступенчатой пирамиды высоты k уйдет C_{n+k-1}^n n-мерных кубиков. Выведите отсюда (с помощью предельного перехода), что объем параллелипипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$, в $n!$ раз больше объема симплекса, натянутого на те же векторы.

4.3.29. Докажите, что k-мерный объем k-мерного симплекса равен произведению $(k-1)$-мерного объема какой-либо его грани на высоту, опущенную на эту грань.

4.3.30. Докажите, что объем симплекса равен $1/k$ произведения объема основания на высоту (k — как и выше — размерность).

4.3.31. Докажите, что объем параллелипипеда не превосходит произведения длин его ребер, выходящих из одной вершины.

Матрицей Грама системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется квадратная матрица, составленная из всевозможных их попарных произведений (v_i, v_j). Ее определитель называется *определителем Грама* и обозначается $\mathrm{G}\, v_1, v_2, \ldots, v_n = \det((v_i, v_j))$.

4.3.32. Докажите, что объем параллелипипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ равен $\sqrt{\mathrm{G}(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$.

4.3.33. Докажите, что расстояние d от конца вектора v до гиперплоскости, порожденной векторами $e_1, e_2, \ldots, e_k$, удовлетворяет соотношению:

$$d^2 = \frac{\mathrm{G}(v, e_1, \cdots, e_k)}{\mathrm{G}(e_1, e_2 \cdots, e_k)}.$$

4.3.34. Докажите, что $k+1$ точек $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k$ тогда и только тогда лежат на $k-1$-мерной сфере или гиперплоскости, когда обращается в нуль определитель

$$\Delta(P_0, P_1, \ldots, P_k) = \det(|P_i P_j|^2)\ ,$$

составленный из всевозможных квадратов расстояний между точками (его порядок равен $k+1$).

4.3.35. Докажите, что в предыдущей задаче точки тогда и только тогда лежат на $(k-1)$-мерной плоскости, когда обращается в нуль определитель $\Gamma(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ порядка $k+2$, получающийся из $\Delta(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ приписыванием сверху и слева единичной строки, единичного столбца и нуля в левом верхнем углу.

4.3.36. Докажите, что радиус шара, описанного вокруг симплекса с вершинами $P_0, P_1, \ldots, P_k$ вычисляется по формуле:

$$R^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta(P_0, P_1, \ldots, P_k)}{\Gamma(P_0, P_1, \ldots, P_k)}.$$

4.4. Метрики и скалярные произведения. Евклидово скалярное произведение на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ индуцирует на аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ метрику по формуле: $\varrho(A, B) = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$ (проверьте, что аксиомы метрического пространства выполняются). Эта метрика, очевидно, инвариантна относительно сдвигов и однородна, то есть $\varrho(A, B) = |\lambda| \varrho(C, D)$, если $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{C, D}$.

Обратное неверно: не всякая однородная, инвариантная относительно сдвигов метрика происходит из некоторого евклидова скалярного произведения.

4.4.37. Докажите, что в евклидовом пространстве сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин четырех его сторон.

4.4.38. Пусть в аффинном пространстве имеется инвариантная относительно сдвигов однородная метрика ϱ. Определим на ассоциированном векторном пространстве *норму*: $\|\overrightarrow{v}\| = \varrho(A, A+\overrightarrow{v})$ (она не зависит от выбора точки A и обладает свойством $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$). Докажите, что ϱ тогда и только тогда индуцирована евклидовым скалярным произведением, когда для любых векторов $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ выполняется тождество параллелограмма: $\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\| = 2(\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|)$.

(Указание: скалярное произведение, если оно есть, обязано задаваться формулой: $(v, w) = 1/2(\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\| + \|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}\|)$).

4.4.39. Пусть K — выпуклая фигура в $\mathbb{R}^n$, содержащая 0, не содержащая прямых и такая что $\bigcup\limits_{\lambda\geq 0} \lambda K = \mathbb{R}^n$. Для $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ положим $\|v\|_K = \inf\{\lambda |\, \lambda \geq 0, \overrightarrow{v} \in \lambda K\}$ и определим на $\mathbb{R}^n$ метрику по формуле: $\varrho_K(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_K$. Докажите, что при этом действительно получится метрика, однородная и инвариантная относительно сдвигов.

4.4.40. Приведите пример такой фигуры K, которой соответствует метрика, не индуцированная ни каким скалярным произведением. Каким фигурам отвечают метрики, индуцированные скалярными произведениями?

4.4.41. Пусть метрика ϱ на $\mathbb{R}^n$ индуцирована скалярным произведением. Рассмотрим ее как функцию $\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$.

Докажите, что она дифференцируема, и ее производная в точке (A, B) действует на касательный вектор $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ по формуле:

$$\varrho'(A,B)[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \frac{1}{\varrho(A,B)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}) =$$

$$= \|\overrightarrow{w}\| \cos(\varphi) - \|\overrightarrow{v}\| \cos(\psi),$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{w}$ и $\overrightarrow{AB}$, а ψ — между $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{AB}$.

§5. Овеществление и комплексификация. Кватернионы.

5.1. Овеществление.

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим новый объект $V_{\mathbb{R}}$, который как множество совпадает с V только умножать векторы мы будем не на комплексные числа, а только на вещественные.

5.1.1. Покажите, что $V_{\mathbb{R}}$ будет линейным пространством над $\mathbb{R}$. $V_{\mathbb{R}}$ называется *овеществлением* комплексного пространства V.

5.1.2. Рассмотрим $\mathbb{C}$ как одномерное комплексное пространство V. Выпишите в явном виде базис и найдите размерность пространства $V_{\mathbb{R}}$.

5.1.3. Чему равна в общем случае размерность $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ для некоторого V? Как найти базис?

5.1.4. Пусть дано линейное отображение $z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (в смысле комплексных одномерных пространств) — умножение на комплексное число $z = a + \mathrm{i}b$. Оно естественным образом индуцирует отображение $z_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Будет ли это отображение линейным отображением вещественных пространств? Какой вид будет иметь его матрица в подходящем базисе?

5.1.5. Обобщим результат предыдущей задачи на многомерный случай. Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Рассмотрим $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Докажите, что $f_{\mathbb{R}}$ — линейное отображение вещественных пространств и найдите его матрицу в подходящем базисе.

5.1.6. Пусть $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линиеный оператор. Найдите $\det A_{\mathbb{R}}$.

5.1.7. Воспользовавшись опытом, накопленным при решении предыдущих задач, найдите связь полных линейных групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Существует ли точное вложение с сохранением операций одной в другую?

Итак, мы научились из комплексных пространств делать вещественные.
А возможно ли обратное? Возможно ли из произвольного вещественного пространства сделать комплексное, то есть научить векторы некоторого вещественного пространства V умножаться не только на вещественные числа, но и на комплексные? Ответом на этот вопрос служит следующий цикл задач.

5.2. Комплексификация.

Определение. *Комплексной структурой* на вещественном пространстве V называется такой линейный оператор, который в квадрате равен минус тождественному:

$$J^2 = -\mathrm{id}_V.$$

5.2.8. Всякое ли вещественное пространство обладает комплексной структурой? Если — да, то постройте ее для произвольного пространства, если нет — приведите пример.

Пусть некоторое пространство V обладает комплексной структурой J. Введем умножение в V на комплексные числа по правилу

$$(a + \mathrm{i}b)v = av + bJ(v).$$

5.2.9. Докажите, что умножение определено корректно и что таким образом V становится настоящим комплексным пространством.(Обозначим его $V_{\mathbb{C}}$).

5.2.10. Вычислите $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$.

5.2.11. Так как построенное Вами $V_{\mathbb{C}}$ может быть овеществлено, проделайте это уже знакомое Вам действие. Чему пространство изоморфно $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$?

5.2.12. Докажите, что если некоторое вещественное пространство V обладает комплексной структурой J, то вещественная размерность V — четна и матрица J в некотором базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix},$$

где E_k — это единичная матрица размера $k \times k$.

Из последней задачи видно, что если мы хотим "окомплексить" произвольное вещественное V, то мы должны сначала его "отчетномерить", а потом выбрать некоторый базис, в котором J будет иметь канонический вид. (Выбор J обусловлен в точности выбором базиса.)
Для произвольного V введем на $V \oplus V$ комплексную структкру Y: $\quad Y(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$.

Определение. *Комплексификацией* $V^{\mathbb{C}}$ вещественного пространства V мы будем называть пространство $(V \oplus V)_{\mathbb{C}}$

5.2.13. Естественно тогда представлять $V^{\mathbb{C}}$ в виде прямой суммы $V \oplus \mathrm{i}V$. Будет ли эта сумма действительно прямой над $\mathbb{R}$? над $\mathbb{C}$?

5.2.14. Для произвольного вещественного пространства V найдите какой-нибудь базис $V^{\mathbb{C}}$ и подсчитайте размерность $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$.

Пусть $A : V \to V$ — вещественный линейный оператор. Определим $A^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ формулой

$$A^{\mathbb{C}}(v_1, v_2) = (A(v_1), A(v_2)).$$

5.2.15. Будет ли $A^{\mathbb{C}}$ комплексным линейным оператором? Какой вид будет иметь матрица $A^{\mathbb{C}}$ в подходящем базисе? Вычислите $\det A^{\mathbb{C}}$.

5.2.16. Чему изоморфно $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$?

Определение. Сопряженным к комплексному пространству V называется пространство $\bar{V}$, совпадающее с V как множество с тем же сложением векторов, но с "сопряженным" умножением:

$$(z \cdot v)_{\bar{V}} = (\bar{z} \cdot v)_V$$

5.2.17. Докажите, что $\bar{V}$ — корректно определенное комплексное пространство.

5.2.18. (Трудная.) Чему изоморфно $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$?

5.2.19. (Трудная.) Найдите связь между группами Sp — симплектических матриц и U — унитарных.

5.3. Удвоение.

Всегда интересно получать новые объекты из старых, которые уже изучены и поднадоели. К примеру, кольуа, известные нам и изученные нами, составляют невеликий набор. Целые числа, поля, многочлены , матрицы — вот, пожалуй и все. Однако существует интересный метод получать новые кольца для изучения. Но сначала нужно ввести понятие антиинволюции на кольце.
Антиинволюцией A мы будем называть такое отображение $j : A \to A$, что $j(a+b) = j(a)+j(b)$, $j^2 = 1$ и $j(ab) = j(b)j(a) \quad \forall a, b \in A$.

Тогда *удвоением кольца* A назовем такой объект S, состоящий из множества пар (a, b) с операциями

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d); (a,b)\cdot(c,d)=(ac-j(d)b, bj(c)+da).$$

Первый вопрос очевиден:

5.3.20. Будет ли удвоение A кольцом?

5.3.21. Пусть A — область целестности. Будет ли S — область целостности?

5.3.22. Пусть A — поле, будет ли S полем?

Пример. Для коммутативного кольца id_A очевидным образом подходит в качестве инволюции. Возьмем в качестве кольца поле $\mathbb{R}$. Тогда при удвоении мы получим $\mathbb{C}$, и такое построения нам давно известно. Такую же конструкцию можно построить с любым полем в качестве K.

5.3.23. Удвоим $\mathbb{C}$ с помощью $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Получится ли при этом поле?

5.3.24. Вообще, для любого поля K, характеристика, которого отлична от 2, удвоение теоретико-множественно совпадает с двумерным векторным пространством над K.

5.3.25. Является ли удвоение поля K само по себе векторным пространством?

5.3.26. Докажите, что результат удвоения поля K является алгеброй над K.

В случае некоммутативных колец удвоение является, видимо, более сложной процедурой. Хотя бы потому, что труднее найти антиинволюцию — тождественная не подходит.

5.3.27. Постарайтесь найти антиинволюцию для кольца матриц $M_n(K)$

5.3.28. Докажите, что транспонирование матриц является антиинволюцией. Что получится при удвоении по такой антиинволюции?

5.3.29. Докажите, что комплексное сопряжение является антиинволюцией в в кольце $\mathbb{C}$.

5.3.30. Если в предыдущей задаче аргументировано получаем положительный ответ, постройте удвоение $\mathbb{C}$ по сопряжению. (Обозначать это удвоение мы будем символом $\mathbb{H}$.)

5.3.31. Будет ли $\mathbb{H}$ обладать структурой двумерного комплексного пространства?

5.3.32. Будет ли $\mathbb{H}$ полем?

5.3.33. Будет ли $\mathbb{H}$ обладать структурой вещественного пространства? Если да, то какова его вещественная размерность? Найдите базис.

Определение Множество $\mathbb{H}$ с операциями сложения и умножения называется *телом кватернионов*.

5.4. Кватернионы.

5.4.34. Говорят, что элемент x лежит в *центре* колца R, если для любого $z \in R$ выполнено равенство $xz = zx$. Докажите, что элементы вида $(r, 0)$, где $r \in \mathbb{R}$ составляют центр $\mathbb{H}$.

Далее мы будем обозначать элементы вида $(r, 0)$ в $\mathbb{H}$ для $r \in \mathbb{R}$ просто через r, считая, что $\mathbb{R}$ таким образом вкладывается в $\mathbb{H}$.

5.4.35. Пусть $q \in \mathbb{H}$ такой, что $q^2 = -1$. Докажите, что элементы $a+qb$, где $a, b \in \mathbb{R}$ образуют подполе, изоморфное $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$.

5.4.36. Кватернионы q, для которых $\bar{q} = -q$ называют чисто мнимыми. Пусть I — множество чисто мнимых кватернионов. Покажите, что

(а) $q \in I \quad \Rightarrow \quad q^2 \in \mathbb{R}$ и$q^2 < 0$.
(б) $q \in I \quad \Rightarrow \quad$ для $z = |q|^{-1}q$ выполнено $z^2 = -1$.
(в) $q^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad q \in I$.
(г) $I = \langle \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \rangle_{\text{лин}} = \{\alpha \mathrm{i} + \beta \mathrm{j} + \gamma \mathrm{k}; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ в обозначениях Гамильтона.
(д) для любого кватерниона z имеет место равенство $z = a + q$, где $a \in \mathbb{R}$ $q \in I$.

5.4.37. Докажите, что $\mathbb{H}$ можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{R}$, определяя умножение $r \cdot z$ как $(r, 0) \cdot z$ (как произведение образа r при стандартном вложении $\mathbb{R}$ в $\mathbb{H}$, на z). Докажите, что при этом I — подпространство и $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus I$.

5.4.38.
(а) Проверьте, что для $x, y \in I \qquad (x\bar{y} + \bar{x}y) \in \mathbb{R}$.
(б) Докажите, что формула $(x, y) = -1/2(x\bar{y} + \bar{x}y)$ определяет евклидово скалярное произведение в I.
(в) Пусть $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ — некоторый ортонормированный базис в I относительно выше определенного скалярного произведения. Докажите формулы Гамильтона:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1; \quad \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}; \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}; \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

(г) Докажите, что для $x \in I: \quad x^2 = -1 \Leftrightarrow (x, y) = 1$.

5.4.39. Докажите, что любой кватернион является решением некоторого квадратного уравнения с коэффициентами в $\mathbb{R}$ и отрицательным дискриминантом.

5.4.40. Пусть $U = \{\alpha \in \mathbb{H}, |\alpha| = 1$. Покажите, что
(а) $\forall \alpha \in U$ формула $\varphi_\alpha(q) = \bar{\alpha} q \alpha$ определяет гомоморфизм $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.
(б) гомоморфизм φ_α сохраняет I и оставляет на месте каждый вещественный элемент.
(в) для элементов $x, y \in I$ выполнено $(x, y) = (\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha(y))$.
(г) каждое евклидово вращение в I совпадает с φ_α для некоторого $\alpha \in U$.

5.4.41. Докажите, что если $x, y \in I$, то $xy - yx \in I$. Обозначим $xy - yx = [x, y]$
(а) Проверьте, что $[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]]$
(б) Докажите, что элемент $[x, y]$ ортогонален как x, так и y, а $|[x, y]|$ совпадает с площадью параллелограмма, натянутого на x и y в евклидовом пространстве I.

§6. Диаграммы и когомологии.

В этом разделе рассматриваются модули над коммутативным кольцом с единицей и гомоморфизмы между ними. Набор модулей и гомоморфизмов может быть представлен диаграммой:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & W \\ & L \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

треугольник

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & V' \arrow[d, "\beta"] \\ V \arrow[r, "\gamma"] & W' \end{tikzcd}$$

квадрат

Определение. Треугольник, изображенный на рисунке, называется коммутативным, если $\beta \circ \alpha = \gamma$, и антикоммутативным, если $\beta \circ \alpha = -\gamma$. Аналогично, квадрат называется коммутативным, если $\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma$, и антикоммутативным, если $\beta \circ \alpha = -\delta \circ \gamma$.

6.1. Коммутативные и антикоммутативные треугольники.

Для коммутативного и антикоммутативного треугольника, изображенного на рисунке, доказать следующие импликации.

6.1.1. (α и β — мономорфизмы) $\Longrightarrow$ (γ — мономорфизм).

6.1.2. (α и β — эпиморфизмы) $\Longrightarrow$ (γ — эпиморфизм).

6.1.3. Если α — изоморфизм, то
(а) (β — эпиморфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — эпиморфизм);
(б) (β — мономорфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — мономорфизм).

6.1.4. Если β — изоморфизм, то
(а) (α — мономорфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — мономорфизм);
(б) (α — эпиморфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — эпиморфизм).

6.1.5. (γ — мономорфизмы) $\Longrightarrow$ (α — мономорфизм) . Верна ли импликация: (γ — мономорфизмы) $\Longrightarrow$ (β — мономорфизм) ?

6.1.6. (γ — эпиморфизмы) $\Longrightarrow$ (β — эпиморфизм) . Верна ли импликация: (γ — эпиморфизмы) $\Longrightarrow$ (α — эпиморфизм)?

6.1.7. (γ — изоморфизмы) $\Longrightarrow$ (α — мономорфизм и β — эпиморфизм) . Верно ли обратное?

6.2. Коммутативные квадраты.

6.2.8. Для коммутативного и антикоммутативного квадрата, изображенного на рисунке докажите, что
(а) если γ и δ — эпиморфизмы, то и β — эпиморфизм;
(б) если γ и δ, то и α — вложение.

6.3. Точные последовательности.

Определение. Последовательность модулей и гомоморфизмов

$$\cdots V_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} V_i \xrightarrow{\varphi_i} V_{i+1} \cdots$$

называется точниой, если $\ker \varphi_i = \operatorname{im} \varphi_{i-1}$ для каждого i.

Таким образом, последовательность

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} W$$

точна тогда и только тогда, когда φ — вложение, а последовательность

$$V \xrightarrow{\varphi} W \longrightarrow 0$$

точна тогда и только тогда, когда φ — наложение.

Последовательность

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \longrightarrow 0$$

является точной, если α — мономорфизм, β — эпиморфизм и $\operatorname{im}\alpha = \ker\beta$. Такая последовательность называется короткой точной последовательностью или точной тройкой.

6.3.9. Докажите, что если V, V' и V'' в написанной выше точной тройке — векторные пространства над полем, то

$$\dim V = \dim V' + \dim V''.$$

6.3.10. Пусть в следующей диаграмме оба квадрата антикоммутативны, а строки — точные тройки:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(а) Докажите, что если f — изоморфизм, то f' — мономорфизм, а f'' — эпиморфизм. Верно ли обратное?

(б) Докажите, что если f' и f'' — изоморфизмы, то f также изоморфизм.

(в) Верны ли предыдущие утверждения при условии коммутативности обоих квадратов?

6.3.11. Для коммутативной диаграммы (то есть каждый квадрат в ней коммутативен) с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{\alpha} & V & \longrightarrow & V'' \\ & & & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W' & \xrightarrow{\beta} & W & \longrightarrow & W'' \end{array}$$

(а) Докажите, что существует единственный гомоморфизм модулей $f' : V' \longrightarrow W'$, удовлетворяющий соотношению: $\beta \circ f' = f \circ \alpha$.

(б) При каких дополнительных условиях на отображения диаграммы можно гарантировать мономорфность f'?

6.3.12. Для антикоммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\alpha} & V'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & & & \\ W' & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\beta} & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(а) Докажите, что существует единственный гомоморфизм модулей $f'' : V'' \longrightarrow W''$, удовлетворяющий соотношению: $-\beta \circ f = f'' \circ \alpha$.

(б) При каких дополнительных условиях на отображения диаграммы можно гарантировать эпиморфность f''?

6.3.13. Дана коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & L' & & L & & L'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(а) Докажите, что существуют гомоморфизмы модулей $\alpha : L \longrightarrow L'$ и $\beta : L' \longrightarrow L''$, при которых диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & L' & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & L'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

коммутативна.

(б) Докажите, что верхняя строчка данной диаграммы

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} L''$$

точна.

(в) Доказать, что если f' — эпиморфизм, то β — тоже эпиморфизм.

(г) Останутся ли верными утверждения задачи при антикоммутативных малых квадратах?

6.3.14. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение о коммутативной или антикоммутативной диаграмме вида

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & C' & & C & & C'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

с точными строками и столбцами.

6.3.15. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & K_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

все строки и столюбцы точны. Докажите, что существует естественное отображение $\delta : K_3 \longrightarrow C_1$, причем $\operatorname{im}\alpha_2 = \ker\delta$ и $\operatorname{im}\delta = \ker\beta_1$, то есть последовательность

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\alpha_1} K_2 \xrightarrow{\alpha_2} K_3 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightarrow{\beta_1} C_2 \xrightarrow{\beta_2} C_3 \longrightarrow 0$$

точна.

Наряду с ядром и образом гомоморфизма модулей $\alpha : V \longrightarrow W$ можно построить третий модуль, не лежащий ни в V ни в W.

Определение. *Коядром* гомоморфизма $\alpha : V \longrightarrow W$ называется модуль $\operatorname{coker}\alpha = W/\operatorname{im}\alpha$ с естественной проекцией $\pi : V \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha$.

6.3.16. Докажите, что по любому гомоморфизму модулей $\alpha : V \longrightarrow W$ можно построить точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow 0.$$

6.3.17. *Лемма о змее.* Любая коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

с точными строками достраивается до коммутативной диаграммы с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker f_1 & \longrightarrow & \ker f_2 & \longrightarrow & \ker f_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \operatorname{coker} f_1 & \longrightarrow & \operatorname{coker} f_2 & \longrightarrow & \operatorname{coker} f_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array},$$

причем верхняя и нижняя строчки объединяются в одну точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \ker f_1 \longrightarrow \ker f_2 \longrightarrow \ker f_3 \longrightarrow \mathrm{coker} f_1 \longrightarrow \mathrm{coker} f_2 \longrightarrow \mathrm{coker} f_3 \longrightarrow 0.$$

6.3.18. *Лемма о пяти гомоморфизмах.* Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Докажите, что если α, β, γ и δ — изоморфизмы, то и φ — изоморфизм.

6.3.19. Пусть $\varphi : V \longrightarrow W$ — линейное отображение векторных пространств, V^* и W^* — двойственные пространства. Докажите, что

(а) Отображение, ставящее функции $f \in W^*$ функцию на V, определяемую правилом $\varphi^* f(v) = f(\varphi(v))$, — корректно заданное линейное отображение $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$.

(б) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

(в) (φ^* — эпиморфизм) $\Leftrightarrow$ (φ — ммономорфизм).

(г) Последовательность

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3 \longrightarrow 0$$

векторных пространств точна тогда и только тогда, когда точна двойственная последовательность:

$$0 \longrightarrow V_3^* \xrightarrow{\psi^*} V_2^* \xrightarrow{\varphi^*} V_1^* \longrightarrow 0$$

(д) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & W \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow \\ L & \xleftrightarrow{\mathrm{id}_L} & L \end{array}$$

коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{\alpha^*} & W^* \\ {\scriptstyle\gamma^*}\uparrow & & {\scriptstyle\beta^*}\uparrow \\ L^* & \xleftrightarrow{\mathrm{id}_{L^*}} & L^* \end{array}$$

6.3.20. Как изменятся условия предыдущей задачи, если векторные пространства заменить на модули над коммутативным кольцом K, а двойственным модулем к V считать по определению $\mathrm{Hom}(V, K)$?

6.4. Комплексы и когомологии.

Определение.*Комплексом* $A^\bullet$ набор модулей A^i $i \in \mathbb{Z}$ и гомоморфизмов $d^i : A^i \longrightarrow A^{i+1}$, называемых *дифференциалами* таких, что $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Вообще говоря, модули A^i могут быть отличны от нуля только для некоторого подмножества индексов, например для $i \geq 0$.
Морфизмом комплексов $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ называется набор гомоморфизмов $f : A^i \longrightarrow B^i$ для каждого i, которые коммутируют с дифференциалами: $f^{i+1} \circ d^i = d^{i+1} \circ d^i$.
Когомологии $h^i(A^\bullet)$ комплекса $A^\bullet$ определяются как фактормодули $(\ker d^i)/(\mathrm{im}\, d^{i-1})$.

6.4.21. Докажите, что всякий морфизм комплексов $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ индуцирует естественное отображение $h^i(f) : H^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet)$.

6.4.22. Пусть
$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$
точная последовательность комплексов (то есть
$$0 \longrightarrow A^i \xrightarrow{f^i} B^i \xrightarrow{g^i} C^i \longrightarrow 0$$
короткая точная последовательность). Докажите, что существует набор естественных отображений:
$$h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet),$$
таких что имеет место длинная точная когомологическая последлвательность
$$\cdots \to h^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet)h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \to 0 \cdots .$$

Определение. Два морфизма комплексов называются *гомотопными*, если существует набор гомоморфизмов $k^i : A^i \longrightarrow B^{i-1}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$ (необязательно коммутирующих с дифференциалами), таких что $f^i - g^i = d^{i+1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d^i$. Набор гомоморфизмов k^i называется *оператором гомотопии.*

6.4.23. Докажите, что гомотопные морфизмы комплексов индуцируют один и тот же набор гомоморфизмов когомологий
$$h^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet).$$

Определение. Пусть дан конечный комплекс конечномерных векторных пространств $V^\bullet$. *Эйлеровой характеристикой* этого комплекса $(\chi(V^\bullet))$ называется число
$$\sum (-1)^i \dim V^i.$$

6.4.24. Докажите, что для любого конечного комплекса его Эйлерова характеристика совпадает с числом $\sum(-1)^i \dim h^i(V^\bullet)$.

§7. Линейные операторы и корреляции.

Основные определения и соглашения. На протяжении всей этой темы символом V обозначается векторное пространство над основным полем k.
Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора $A : V \to V$ с *собственным числом* λ, если $Av = \lambda v$.
Множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ, образует векторное подпространство в V, которое мы будем обозначать через V_λ и называть *собственным подпространством оператора.*

Корневым вектором линейного оператора A, отвечающим собственному числу λ, называется такой вектор $v \in V$, для которого найдется такое натуральное число n, что $(A - \lambda E)^n = 0$ (E — единичный или тождественный оператор на V).

Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному числу λ линейного оператора A, образует векторное пространство $L(\lambda)$, которое нвазывается *корневым подпространством* линейного оператора A.

Характеристическим многочленом оператора A называется многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$, где A — матрица линейного оператора A в некотором базисе, A — единичная матрица. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса; его корни называются *собственными или характеристическими значениями* оператора A.

Подпространство $U \subset V$ называется *инвариантным* относительно оператора A (или A-инвариантным), если $AU \subset U$.

7.1. Инвариантные подпространства.

7.1.1. Докажите A-инвариантность следующих подпространств:

$$\ker A,\ \operatorname{im} A,\ \operatorname{im} A^r,\ V_\lambda,\ L(\lambda).$$

7.1.2. Докажите, что собственнные векторы, отвечающие различным собственным значениям, — линейно независимы.

7.1.3. Докажите, что корневые векторы, отвечающие различным собственным значениям, — линейно независимы.

7.1.4. Пусть подпространство U — A-инвариантно. Докажите, что

(а) на подпространстве U корректно задан линейный оператор $A|_U$ (ограничение A на U), причем диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{A|_U} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{A} & U \end{array}$$

коммутативна;

(б) на факторпространстве V/U существует единственный линейный оператор B, при котором диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V/U & \xrightarrow{B} & V/U \end{array}$$

коммутативна.

Этот оператор мы будем называть *факторопepатором*.

(в) если V — прямая сумма A-инвариантных подпространств $V = U \oplus W$, то существует изоморфизм $\alpha : W \to V/U$, при котором диаграмма:
$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\pi} & V/U & \xleftarrow{\alpha} & W \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle A|_W}\downarrow \\ V & \xrightarrow{\pi} & V/U & \xleftarrow{\alpha} & W \end{array}$$
коммутативна.

7.1.5. Докажите, что пространство V распадается в прямую сумму $\ker A$ и $\operatorname{im} A$ (A — линейный оператор на V) тогда и только тогада, когда фактороператор на $V/\ker A$ имеет нулевое ядро.

7.2. Примеры линейных операторов.

7.2.6. Найдите собственные векторы, собственные числа, инвариантные подпространства и матрицу (для конечномерных пространств) следующих операторов:

(а) $\frac{d}{dx}$ в $\mathbb{R}_n[x]$ (многочлены над $\mathbb{R}$, степень которых не превосходит n);

(б) $\frac{d^k}{dx^k}$ в $\mathbb{R}_n[x]$;

(в) $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d^k}{dx^k}$ в пространстве квазимногочленов
$$e^{\lambda x}\mathbb{R}_n[x] = \{e^{\lambda x}(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \mid a_i \in \mathbb{R}\};$$

(г) $\partial = \sum x_i \partial/\partial x_i$ в пространстве $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

7.2.7. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_n[x]$ в каком-нибудь базисе записать матрицу линейного оператора, переводящего многочлен $f(x)$ в многочлен
$$\int_0^1 (x^2y + xy^2)f(y)dy.$$
Найдите размерность его образа, собственные числа и собственные векторы.

7.2.8. Найдите собственные числа линейного оператора A на $\mathbb{R}_n[x]$, переводящего многочлен $f(x)$ в многочлен $f(ax + b)$ (a и b — фиксированы).

7.2.9. Приведите пример линейного оператора A в трехмерном пространстве, для которого

(а) $V \neq \ker A \oplus \operatorname{im} A$,

(б) $V = \ker A \oplus \operatorname{im} A$, но A не является оператором проектирования.

7.3. Примеры собственных чисел и инвариантных подпространств.

7.3.10. Выясните, при каких условиях оператор, задаваемый в некоторм базисе матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
имеет базис из собственных векторов.

7.3.11. Докажите, что если λ — собственное число оператора A и $f(t)$ - некоторый многочлен над полем k, то $f(\lambda)$ — собственное число оператора $f(A)$.

7.3.12. Докажите, что если любой вектор $v \in V$ является собственным вектором для оператора A на V, то A — гомотетия, то есть $A = \lambda E$.

7.3.13. Найдите все инвариантные подпространства

(а) диагонального оператора;

(б) оператора, матрица которого в некотором базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

7.3.14. Пусть операторы A и B в арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы своими матрицами в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите все подпространства, одновременно инвариантные как относительно A, так и относительно B.

7.3.15. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа линейного оператора A в n-мерном пространстве V над $\mathbb{C}$. Найдите собственные числа оператора A как оператора в соответствующем $2n$-мерном вещественном пространстве.

7.3.16. Найдите собственные значения поворота вещественной евклидовой плоскости на угол φ и собственные векторы этого преобразования в комплексификации плоскости.

7.3.17. Пусть дан линейный оператор A в n-мерном комплексном пространстве. Докажите, что

(а) A имеет одномерное и $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.

(б) Существует базис, в котором матрица оператора A имеет верхнетреугольный вид.

(в) Если, кроме того, $A^m = \mathrm{id}$ для некоторого натурального m, то $\mathrm{tr}(A^{-1} = \overline{\mathrm{tr} A}$.

7.4. Комплексные собственные векторы вещественных операторов.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, для $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ положим:

$$\mathrm{Re}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} z_1 \\ \mathrm{Re} z_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Re} z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad \mathrm{Im}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Im} z_1 \\ \mathrm{Im} z_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Im} z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad \bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z).$$

7.4.18.

(а) Покажите, что комплексное сопряжение $\bar{.} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ обладает следующими свойствами: $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z}$ и $\bar{\bar{z}} = z$.

(б) Опишите подмножества: вещественных векторов — $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ и чисто мнимых $\mathrm{i}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, используя комплексное сопряжение.

(в) Выразите $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$ через z и $\bar{z}$.

7.4.19. Докажите, что для всякого конечномерного комплексного пространства V, снабженного *антилинейной инволюцией*

$$\tau : V \to V$$

, где $\tau(v+u) = \tau(v) + \tau(u)$, $\quad \tau(\lambda v) = \bar{\lambda}\tau(v)$S и $\tau^2 = \mathrm{id}_V$, существует изоморфизм $\alpha : V \to \mathbb{C}^n$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V \\ \alpha\downarrow & & \alpha\ \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C}^n. \end{array}$$

7.4.20. В условиях предыдущей задачи покажите, что *множество вещественных векторов* $\mathbb{R}(V) = \alpha^{-1}(\mathbb{R}^n)$ является вещественным линенйным подпространством V и не зависит от выбора α. (Указание: опишите $\mathbb{R}(V)$ в терминах τ).

7.4.21. В условиях зад. 7.4.19 опишите разложения $v = \mathrm{Re}(v) + \mathrm{Im}(v)$ вектора из V на вещественную и мнимые части и покажите, что это разложение не зависит от отождествления V с $\mathbb{C}^n$.

7.4.22. Докажите, что V является комплексификацией $\mathbb{R}(V)$.

Этот факт справедлив и для бесконечномерных пространств. Попробуйте дать доказательство, не использующее конечномерность V.

7.4.23. Линейный оператор $A_{\mathbb{C}} : V \to V$ называется *вещественным*, если он коммутирует с антилинейной инволюцией τ. Докажите, что

(а) $A_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией вещественного линейного оператора

$$A : \mathbb{R}(V) \to \mathbb{R}(V),$$

(б) если v — собственный вектор $A_{\mathbb{C}}$ с собственным числом λ, то $\tau(v)$ — собственнный вектор $A_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\lambda}$,

(в) если v — собственный вектор оператора $A_{\mathbb{C}}$, то $\langle \mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v)\rangle \subset \mathbb{R}(V)$ — A-инвариантное подпространство.

7.4.24. Линейный оператор A в $\mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные числа, собственные векторы и инвариантные подпространства операторов A и $A_{\mathbb{C}}$.

7.4.25. Найдите собственные векторы, собственные числа и опишите инвариантные подпространства, размерность которых не превосходит двух, для оператора d/dx в $C^\infty(\mathbb{R})$.

7.4.26. Найдите матрицу с целыми коффициентами, квадрат которой равен

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.5. Алгебра линейных операторов.

Оператор называется *диагонализируемым*, если существует базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

7.5.27. Найдите собственные значения линейных операторов, удовлетворяющих уравнениям:

(а) $P^2 = P$ проектор),

(б) $I^2 = E$ (инволюция),

(в) $P^2 = \alpha P$.

Будут ли эти операторы диагонализируемы?

7.5.28. Докажите, что линейный оператор A, удовлетворяющий уравнению $(A - \alpha E)(A - \beta E) = 0$, диагонализируем при $\alpha \neq \beta$.

7.5.29. Докажите, что оператор A, удовлетворяющий уравнению $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = 0$, диагонализируем.

7.5.30. Докажите равносильность следующих условий на оператор B:

(а) B — нильпотентен (то есть $B^k = 0$ для некоторого k),

(б) все собственные числа оператора B равны нулю,

(в) если $\ker B \neq 0$, то $\ker B^i$ — собственное подпространство $\ker B^{i+1}$,

(г) если $\operatorname{im} B \neq V$, то $\operatorname{im} B^{i+1}$ — собственное подпространство $\operatorname{im} B^i$,

(д) в пространстве V можно выбрать такой базис

$$e_(1)_1, e_(1)_2, \ldots, e_(1)_{k_1}\ ,\ e_(2)_1, e_(2)_2, \ldots, e_(2)_{k_2}\ , \ldots ,\ e_(s)_1, e_(s)_2, \ldots, e_(s)_{k_s}\ ,$$

что для всех $i = 1, ...s$ и $j \neq k_i$ $\qquad Be^{(i)}_j = e^{(i)}_{j+1}$, а $Be^{(i)}_{k_i} = 0$.

7.6. Билинейные функции как операторы $V \longrightarrow V^*$.

Через $g(.,.)$ будет обозначаться билинейная функция на V; через g_v — элемент из V^*, заданный формулой: $g_v(w) = g(v, w)$; через $\tilde{g}$ — соответствующее линейное отображение (корреляция), при котором $v \mapsto g_v$.

7.6.31. Докажите, что

(а) соответствие $g \mapsto \tilde{g}$ — (естественный) линейный изоморфизм между пространствами билинейных функций на V и линейных отображений $V \longrightarrow V^*$,

(б) матрица Грама билинейной функции g в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V транспонирована к матрице $\tilde{g}$ в паре базисов $e_1, e_2, \ldots, e_n$; $\quad e^1, e^2, \ldots, e^n$, где последний — базис в V^*, дуальный к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

7.6.32. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ — *эрмитова* функция (линейная по первому аргументу и эрмитово симметричная: $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$). Докажите, что

(а) $g_v \in \overline{V^*}$ — пространству аддитивных отображений $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$, являющихся антилинейными: $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$;

(б) $\tilde{g} : v \mapsto g_v$ — $\mathbb{C}$-линейное отображение $V \longrightarrow \overline{V^*}$;

7.6.33. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную зад. 7.6.31 для эрмитовой функции из предыдущей задачи.

Определение. *Сопряженным отображением* к линейному отображению $A : V \longrightarrow W$ называется отображение $A^* : W^* \longrightarrow V^*$, переводящее $f \in W^*$ в $f \circ A \in V^*$.

7.6.34.

(а) Докажите, что билинейная функция g симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, $\tilde{g}^* = \tilde{g}$ (соответственно $\tilde{g}^* = -\tilde{g}$).

(б) Дайте определение $\bar{A}^*$ над $\mathbb{C}$ и покажите, что g эрмитова тогда и только тогда, когда $\tilde{g} = \overline{\tilde{g}^*}$.

7.6.35. Покажите, что над полем характеристики $\neq 2$ любая билинейная функция однозначно раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной билинейных функций. Переформулируйте этот факт для корреляций.

7.6.36. Докажите, что над $\mathbb{C}$ $g(v, w)$ эрмитово симметрична тогда и только тогда, когда $h(v, w) = g(iv, w)$ эрмитово симметрична.

7.6.37. Пусть $\dim V = n$ и билинейная функция g невырождена. Докажите, что система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$ линейно независима тогда и только тогда, когда матрица $\|g(e_i, e_j)\|$ невырождена.

7.6.38.

(а) Докажите, что над полем K характеристики $\neq 2$ любая симметричная билинейная функция $g : V \times V \longrightarrow K$ однозначно восстанавливается по своему ограничению на диагональ $\Delta = \{(v, v)\} \subset V \times V$;

(б) Докажите, что если $g|_\Delta \equiv 0$, то g кососимметрична.

7.6.39. Докажите, что вещественная и мнимая части эрмитовой функции являются, соответственно, симметричной и кососимметричной вещественными билинейными функциями.

7.6.40. Приведите пример невырожденной билинейной функции g на пространстве V и подпространства L так, чтобы ограничение $g|_L$ было вырожденной билинейной функцией.

7.6.41. Докажите, что если $g|_L$ — невырождено, то
$V = L \oplus L^\perp$, где

$$L^\perp = \{w \in V | g(l, w) = 0 \quad \forall l \in L\}.$$

7.6.42. Пусть g — симметричная билинейная функция на конечномерном пространстве V над полем K. Докажите, что в V существует базис, в котором матрица Грама функции g имеет вид:

(а) $\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_r — единичная матрица размера $r \times r$,если $K = \mathbb{R}$;

(б) $\begin{pmatrix} Er & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $K = \mathbb{C}$;

(в) $\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & aE_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p \neq 2$, причем $a \neq 0$ — не является квадратом в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Определим число $r_0 = \dim V - (r_+ + r_-)$ Набор чисел (r_0, r_+, r_-) в первом случае называется *сигнатурой* функции g.

Билинейные функции g и g', заданные соответственно на V и V', называются *изометричными* или *эквивалентными*, если существует оператор изометрии $\varphi : V \longrightarrow V'$ — линенйный изоморфизм, при котором $g(v, w) = g'(\varphi(v), \varphi(w))$.

7.6.43.

(а) Докажите, что две симметричные билинейные функции над $\mathbb{R}$ изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую сигнатуру ("закон инерции").

(б) Докажите, что две симметричные билинейные функции g и g' над $\mathbb{C}$ изометричны тогда и только тогда, когда равны их ранги и $\dim V = \dim V'$.

(в) Докажите, что две симметричные билинейные функции над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ изометричны тогда и только тогда, когда их наборы чисел (r_0, r_+, r_-) совпадают.

7.6.44.

(а) Покажите, что для эрмитовой функции на конечномерном комплексном пространстве существует базис, в котором матрица Грама g совпадает с матрицей из зад. 7.6.42(а).

(б) Докажите, что две эрмитовы функции изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую сигнатуру (r_0, r_+, r_-).

7.6.45. Докажите, что кососимметричная билинейная функция g на пространстве V над полем характеристики $\neq 2$ в некотором базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и числа r и $\dim V$ определяют g с точностью до изометрии.

7.6.46. Найдите сигнатуру билинейных функций, заданных в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ матрицами:

(а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

(в) $\begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}$, где I 2×2-матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§8. Операторы в пространствах со скалярным произведением.

Всюду ниже речь идет об операторах $A : V \longrightarrow V$ в пространстве со скалярным произведением $v,w \mapsto (v, w)$. При этом, если специально не оговаривается противное, всегда имеется ввиду оба возможных здесь случая: V — вещественно и скалярное произведение евклидово и V — комплексно и скалярное произведение эрмитово, и Ваши решения должны быть пригодны для обоих случаев.

Через $W^\perp$ мы всегда обозначаем ортогональное дополнение к пространству $W \subset V$, так что $W^\perp = \{v \in V | (v, w) = 0 \quad \forall w \in W\}$. Знак $\oplus$ обозначает прямую, но не обязательно ортогональную сумму.

8.1. Сопряжение операторов.

8.1.1. Докажите, что для любого оператора $a : V \longrightarrow V$ существует единственный оператор $a^* : V^* \longrightarrow V^*$ такой, что $(v, Aw) = (A^*v, w)$ и $(Av, w) = (v, A^*w) \qquad \forall v,w \in V$. Выразите матрицу a^* в произвольном базисе пространства V через матрицу A в этом базисе и матрицу Грама этого базиса.

8.1.2. Докажите, что:
(а) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$;
(б) $(AB)^* = B^* A^*$;
(в) $(A^*)^* = A$;
(г) $\exp(A^*) = (\exp(A))^*$.

8.1.3. Докажите, что для любого оператора A операторы A^*A и AA^* самосопряженны и неотрицательны (оператор B называется *самосопряженным*, если $B^* = B$, и неотрицательным, если $(Bv, v) \geq 0 \quad \forall v$). Докажите, что они положительны тогда и только тогда, когда A обратим.

8.1.4. Докажите, что A тогда и только тогда изометричен (то есть сохраняет скалярное произведение), когда $A^* = A^{-1}$.

8.1.5. Докажите, что $(\ker A)^\perp = \operatorname{im} A^*$.

8.1.6. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и A проектирует V на V_1 вдоль V_2. Докажите, что тогда $V = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$ и A^* проектирует V на $V_2^\perp$ вдоль $V_1^\perp$.

8.1.7. Докажите, что ортогональные дополнения к инвариантным подпространствам оператора A инвариантны относительно A^*.

8.1.8. Докажите, что приводимые ниже численные характеристики операторов A и A^* переводятся друг в друга комплексным сопряжением:
(а) набор собственных значений,
(б) минимальный многочлен,
(в) собственное значение общего собственного вектора (если такой, конечно, имеется!).

8.1.9. Теорема Шура. Докажите, что в комплексном эрмитовом пространстве произвольный оператор может быть представлен верхнетреугольной матрицей в некотором ортонормированном базисе.(В частности, у него имеются инвариантные подпространства любой промежуточной размерности между 0 и $\dim V$.)

8.2. Примеры сопряженных операторов.

8.2.10. Пусть V подпространство в $C^\infty\mathbb{R}$, состоящеех из периодических функций с периодом $T > 0$, со скалярным произведением:

$$(f, g) = \int_0^T f(x)g(x)dx.$$

Докажите, что операторы $\dfrac{d}{dx}$ и умножения на фиксированную функцию из V линейны и переводят V в V. Вычислите сопряженные к ним операторы.

8.2.11. В условиях предыдущей задачи вычислите сопряженный к произвольному дифференциальному оператору

$$L = a_k(x)\frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \cdots a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

с коэффициентами $a_0, a_1, \cdots, a_k$ из V. (Указание: примените зад. 8.1.2 и зад. 8.2.10.)

8.2.12. В условиях предыдущей задачи заменим V на $C^\infty[0,1]$ и потребуем, чтобы коэффизиенты $a_0, a_1, \cdots, a_k$ обращались на концах отрезка в нуль вместе с производными. Как изменится ответ?

8.2.13. Докажите, что оператор

$$L = \sin^2\frac{2\pi x}{T}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\pi}{T}\cos\frac{4\pi x}{T}\frac{d}{dx}$$

самоспряжен на пространстве из зад. 8.2.10.

8.2.14. Докажите, что оператор

$$L = x^2(x-1)^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$$

самосопряжен на пространстве из зад. 8.2.12.

8.2.15. Рассмотрим на $\mathbb{R}[x]$ скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ и для любого $K[x, y] \in \mathbb{R}[x, y]$ рассмотрим оператор

$$f(t) \mapsto \int_{-1}^{1} K(s,t)f(t)dt$$

Найдите сопряженный к нему.

8.2.16. Проверьте, что если в предыдущей задаче взять $K(x, y) = xy$, то получится самосопряженный оператор, причем многочлены Лежандра будут для него ортогональным базисом из собственных векторов.

8.2.17. Введем на $\mathbb{R}[x, y, z]$ скалярное произведение, полагая базисные мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ попарно ортогональными и имеющими скалярные квадраты, равные $\alpha!\beta!\gamma!$. Найдите оператор, сопряженный оператору Лапласса $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. (Указание: найдите сначала сопряженные операторы к $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, рассмотрев их действие на базис, а затем примените зад. 8.1.2.

8.2.18. Пусть P_m — пространство однородных многочленов от трех переменных степени m, H_m — подпространство гармонических многочленов

$$H_m = \{f(x,y,z) | \Delta f \equiv 0\}$$

и пусть R^2 "квадрат радиус-вектора" — многочлен из P^2, равный $x^2+y^2+z^2$. Выведите из предыдщщей задачи, что

$$P_m = H_m \oplus R^2 H_{m-2} \oplus R^4 H_{m-4} \oplus \cdots$$

(На самом деле Вы получили здесь разложение пространства однородных многочленов в прямую сумму минимальных подпространств, инвариантных относительно действия всех вращений SO_3 трехмерного пространства. Естественное действеие φ на функцию $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ состоит в замене переменного $\varphi : f \mapsto \varphi f \quad (\varphi f(v) = f(\varphi^{-1} v).)$

8.3. Нормальные операторы.

Оператор $A : V \longrightarrow V$ называется *нормальным*, если $A^*A = A^*A$. Это замечательный класс операторов.

8.3.19. Докажите, что нормальный оператор тогда и только тогда перестановочен с неким оператором B, когда он перестановочен с B^*.

8.3.20. Докажите, что для нормальности A необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall v \in V \quad \|Av\| = \|A^*v\|$$

.

8.3.21. Докажите, что собственные векторы нормального оператора с разными собственными значениями ортогональны.

8.3.22. Докажите, что ортогональное дополнение к собственному вектору нормального оператора будет инвариантно относительно этого оператора.

8.3.23. Характеризация нормальных операторов. Докажите, что следующие условия на оператор $A : V \longrightarrow V$ равносильны друг другу:

(а) A — нормален;
(б) A имеет диагональный вид в некотором ортогональном базисе;
(в) всякий собственный вектор для A собственен и для A^*;
(г) ортогональное дополнение к любому A-инвариантному подпространству также A-инвариантно.
(д) всякое A-инвариантное подпространство также и A^*-инвариантно.

Важное замечание. В случае вещественного пространства утверждения зад. 8.3.23(б) и зад. 8.3.23(в) о собственных векторах относятся к комплексифицированному пространству $V_{\mathbb{C}}$ и к комплексификации оператора A и евклидовой структуры $(.,.)$ (то есть к их естественному продолжению на $V_{\mathbb{C}}$). Это продолжение задается формулами:

$$V_{\mathbb{C}} = \{v_1 + \mathrm{i}v_2 | \quad v_1, v_2 \in V\}$$

$$A_{\mathbb{C}}(v_1 + \mathrm{i}v_2) = A(v_1) + \mathrm{i}A(v_2)$$

$$(v_1 + \mathrm{i}(v_2), w_1 + \mathrm{i}w_2)_{\mathbb{C}} = (v_1, w_1) - (v_2, w_2) + \mathrm{i}(v_2, w_1) + \mathrm{i}(v_1, w_2),$$

при этом $(.,.)_{\mathbb{C}}$ — комплексно-билинейное евклидово (не эрмитово!) скалярное произведение.

8.3.24. Докажите, что любое множество попарно перестановочных нормальных операторов одновременно приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе.

8.3.25. Докажите, что в области нормальных операторов (в комплексном эрмитовом пространстве) уравнение $X^k = A$ разрешимо при любом натуральном k и нормальном операторе A. Найдите количество решений этого уравнения.

8.4. Самосопряженные и кососимметричные операторы.

8.4.26. Оператор называется *кососимметричным*, если $A^* = -A$. Докажите, что матрица такого оператора в ортонормированном базисе — косоэрмитрова (она меняет знак при одновременном транспонировании и комплексном сопряжении).

8.4.27. Что можно сказать о матрице самосопряженного оператора в ортономированном базисе? Иногда самосопряженные операторы называют симметричными.

8.4.28. Докажите, что оба типа операторов нормальны, но нормальный оператор симметричен тогда и только тогда, когда все его собственные числа — вещественны, и кососимметричен, когда все его собственные числа чисто мнимы.

Важное замечание. Это показывает, что для самосопряженных операторов в вещественном евклидовом пространстве все замечательные свойства из зад. 8.3.23 выполнены безо всяких оговорок о комплексификации, тогда как для кососимметрического оператора эти оговорки существенны.

8.4.29. Докажите, что A симметричен тогда и только тогда, когда $\mathrm{i}A$ — кососимметричен.

8.4.30. Докажите, что самосопряженный оператор в вещественном евклидовом пространстве приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе.

8.4.31. Докажите, что кососимметричный оператор в вещественном евклидовом пространстве приводится в некотором ортонормированном базисе к блочно-диагональному виду, ненулевые блоки которого это 2×2-матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

расположенные на главной диагонали.

8.4.32. Докажите, что произвольный оператор разлагается и при том единственным способом в сумму симметричного и кососимметричного, причем для нормальности оператора необходимо и достаточно, чтобы слагаемые этого рложения были перестановочны.

8.5. Изометрии.

Определение изометрии см в зад. 8.1.4. Изометрии евидова пространства принято называть it ортогоньными операторами, а изометрии эртова пространства — *унитарными операторами*

8.5.33. Докажите, что изометричный оператор сопряжен своему обратному. Какие выводы отсюда следуют о матрице изометрии в ортогональном и провоизльном басах?

8.5.34. Докажите, что изометрии обазруют группу по умножению (они называются, соответвенно, *ортогональной* и *унитарной* группами и обозначаются $O(V)$ и $U(V)$).

8.5.35. Докажите, что всякое теоретико-множественное отображение пространства в себя, сохраняющее скалярное произведение, является изометричным линейным изоморфизмом пстранства.

8.5.36. (Трудная.) Докажите, что изометрии составляют компактное подмножество в аффинном пртранстве всех операторов.

8.5.37. Докажите, что для существования изометрии, которая переводит набор векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в набор $w_1, w_2, \ldots, w_k$, необхимо и достаточно, совпадение матриц Грама этих наборов.

8.5.38. Докажите, что ортогональное дополнение к инвариантному подпространству изометрии также инвариантно и выведите отсюда, что изометричные операторы — нормальны.

8.5.39. Докажите, что собственные значения изометрий по модулю равны 1.

8.5.40. Пусть пространство $V_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией вещественного пространства и изометрия задается в некотором базисе вещественной матрицей. Докажите, что если $v_1 + \mathrm{i}v_2$ — ее собственный вектор, соответствующий собственному значению $\alpha + \mathrm{i}\beta$, где v_1, v_2 — вещественные векторы, а α, β — вещественные числа, то двумерное подпространство, натянутое на v_1, v_2 отщепляется ортогональным инвариантным прямым слагаемым, а действие изометрии на нем в базисе v_1, v_2 задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

8.5.41. Докажите, что ортогональный оператор в евклидовом пространстве распадается в прямую сумму операторов, действующих на попарно- ортогональных друг другу инвариантных одно- или двумерных подпространствах, причем действие на одномерных подпространствах является умножением на ± 1, а на двумерных — поворотом.

8.5.42. Докажите, что всякая изометрия стандартного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ является поворотом вокруг некоторой прямой. Найдите эту прямую и угол поворота для преобразований:

(а) $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$;

(б) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(убедитесь сначала, что они ортогональны).

8.6. Дополнительные задачи.

8.6.43. Докажите, что $O(V)$ порождается как абстрактная группа отражениями в гиперплоскостях (отражение в гиперплоскости H ортогональной вектору n единичной длины — это оператор $\sigma_H : v \mapsto v - 2(v,n)n$).

8.6.44. Докажите, что для любого унитарного оператора A в эрмитовом пространстве и любого натурального k существует унитарный оператор B, являющийся многочленом от A, и такой, что $B^k = A$.

8.6.45. Докажите, что любая унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметричной матриц.

8.6.46. *Преобразование Кэли.* Докажите, что отображение

$$K \longrightarrow (E-K)(E+K)^{-1}$$

устанавливает биекцию между множеством всех кососимметричных операторов и множеством изометрий, не имеющих собственного значения -1.

8.6.47. Докажите, что оператор K тогда и только тогда кососимметричен, когда оператор $\exp(K)$ — изометричен.

8.6.48. *Полярное разложение.* Докажите, что для любого невырожденного оператора A существуют разложения:

$$A = I_1 S_1 = S_2 I_2$$

где I_1, I_2 — изометрии, а S_1, S_2 — самосопряженные положительные операторы.

8.6.49. Найдите полярное разложение операторов:

(а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(в) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.6.50. Докажите, что множители полярного разложения определены по A однозначно (то есть соотвественные множители двух полярных разложений обязаны совпадать).

8.6.51. Докажите, что с точки зрения полярного разложения следующие условия равносильны:

(а) A — нормален;

(б) $I_1 = I_2$ и $S_1 = S_2$;

(в) I_1 и S_1 — перестановочны;

(г) I_2 и S_2 — перестановочны.