Образцы экзаменационных задач по алгебре за второй семестр первого курса

Экзамен представляет собой 3–4 часовую письменную работу, в ходе которой необходимо решить 4–5 задач типа представленных ниже.

2◇1 (8 баллов). Имеются семь одинаковых банок, каждая из которх на $\frac{9}{10}$ заполнена краской одного из семи цветов радуги (в каждой банке – свой цвет и все цвета разные). Можно ли переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое) получить хотя бы в одной из банок колер, в котором все семь красок смешаны в равной пропорции?

2◇2 (8 баллов). При каких вещественных α функция $\left(|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha\right)^{1/\alpha}$ является нормой на $\mathbb{R}^n$?

2◇3 (6 баллов). Является ли функция $|x_1|+|x_2|+|x_3|$ нормой на $\mathbb{R}^3$, и если да, то что представляет собой единичная сфера в метрике, индуцированной этой нормой на аффинной плоскости, проходящей через концы базисных векторов в $\mathbb{R}^3$?

2◇4 (8 баллов). Пусть линейный оператор A вкладывает n-мерное евклидово пространство V в m-мерное евклидово пространство W (разумеется, $n \leqslant m$). Напишите формулу, позволяющую вычислить n-мерный объём параллелепипеда, натянутого на систему векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, порождающих пространство V, как только известны координаты их образов $w_i = Av_i \in W$ и матрица оператора A в каких-либо ортонормированных базисах.

2◇5 (8 баллов). Рассмотрим единичную сферу $S^3 \subset \mathbb{H}$, образованную кватернионами с нормой 1. Она является группой относительно кватернионного умножения и действует на $\mathbb{H}$ посредством сопряжения: $q : \quad x \longmapsto qxq^{-1} \quad \forall\ q \in S^3, x \in \mathbb{H}$. Путь кватернион $q \in S^3$ составляет угол ϑ с единичным кватернионом 1. Докажите, что сопряжение при помощи q индуцирует евклидову изомтрию трёхмерного евклидова подпространства чисто мнимых кватернионов. Каковы её матрица в базисе $\{i, j, k\}$ и собственные значения? Вокруг какой оси и на какой угол она поворачивает это пространство ?

2◇6 (8 баллов). Пусть U и V суть два двумерных векторных пространства над полем k, а W — четырёхмерное пространство всех линейных операторов из U в V, и пусть $Q \subset \mathbb{P}(W)$ — множество всех ненулевых вырожденных линейных операторов, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

а) Проверьте, что Q — это квадрика в $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(W)$; является ли она невырожденной ?

б) Из каких операторов состоит касательное пространство к Q в точке, отвечающей вырожденному оператору с ядром, порождённым вектором $u \in U$ и образом, порождённым вектором $v \in V$?

в) Покажите, что квадрика Q не содержит плоскостей, но содержит два семейства прямых, таких что

– всякая прямая, лежащая на квадрике содержится в одном и только в одном семействе;

– через каждую точку Q проходит ровно одна прямая первого семейства и ровно одна прямая второго семейства;

– никакие две прямые из одного (как первого так и второго) семейства не пересекаются.

2◇7 (6 баллов). Какова сигнатура квадратичной формы $A \longmapsto tr\,(A^2)$ на пространстве вещественных $n \times n$ - матриц?

2◇8 (4 балла). Нормален ли оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}^n$?

2◇9 (6 баллов). Найдите все собственные векторы и собственные значения линейного оператора $x\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial x}$ на пространстве многочленов степени $\leqslant n$ от x и y (если общий случай вызывает затруднения, рассмотрите для начала $n = 2, 3$).

2◇10 (6 баллов). Найдите жорданову нормальную форму матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix} .$$

2◇11* (14 баллов). Пусть F и G — два эндоморфизма комплексного векторного пространства, и $[F, G] = FG - GF$ — их коммутатор. Покажите, что если $\operatorname{rk}[F, G] \leqslant 1$, то у F и G есть общий собственный вектор.

2◇12 (10 баллов). В следующих двух задачах требуется провести полный геометрический анализ, т. е. перечислмть все возможные ответы и выяснить, какие из них устойчивы относительно «малых шевелений» исходных данных.

а) Даны 3 попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}^3$; опишите ГМТ, заметаемое прямыми, пересекающими все три данных.

б) Даны 4 попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}^3$; сколько прямых пересекается со всеми ними?