Программа первого семестра обязательного курса «АЛГЕБРА»

Тема 1. Элементарная арифметика и комбинаторика: мультиномиальные коэффициенты, разбиения, диаграммы Юнга, арифметика вычетов, алгоритм Евклида, китайская теорема об остатках, теорема Вильсона, малая теорема Ферма и теорема Эйлера.

Тема 2. Многочлены от одной переменной: алгоритм Евклида, разложение рациональной функции на простейшие дроби, производный многочлен, кратные корни и сепарабельность, результант и дискриминант, присоединение корней и поле разложения, разложение на множители многочленов с целыми и рациональными коэффициентами (лемма Гаусса и критерии неприводимости).

Тема 3. Многчлены от многих переменных: лексикографическое упорядочение мономов, однозначность разложения на множители, формулы Виета, стандартные базисы в модуле симметрических многочленов и матрицы перехода между ними.

Тема 4. Формальные степенные ряды: формальные сложение, умножение, дифференцирование, интегрирование, подстановка ряда в ряд, обращение и логарифмическая производная, бином с произвольным показателем, метод производящих функций, действие $k[[d/dt]]$ на $k[t]$ и обращение разностных операторов: многочлены Бернулли и суммирование степеней.

Тема 5. Алгебраические функции: поле рядов Лорана, поле дробно-степенных рядов, разложение неявной алгебраической функции в ряд Пюизо.

Тема 6. Поля: определение, примеры, комплексные числа и тригонометрические тождества, алгебраические числа, конечные поля, гомоморфизмы полей, алгебраические расширения полей, простое подполе, характеристика, гомоморфизм Фробениуса.

Тема 7. Векторные пространства: определение, примеры, линейная зависимость, теоремы о базисах, матричный формализм для записи координатных разложений, замен базисов и линейных отображений.

Тема 8. Коммутативные кольца: определение, примеры, гомоморфизмы, фактор-кольца и идеалы, строение гомоморфизмов, кольца главных идеалов: $\mathbb{Z}$, $k[x]$, евклидовы кольца, прямые суммы колец, простота и неприводимость, нётеровость и факториальность, простые и максимальные идеалы.

Тема 9. Модули над коммутативными кольцами: определение модуля, образующие, базисы и линейная зависимость, свободные модули и ранг, гомомрфизмы, подмодули и фактормодули, строение гомомрфизма модулей, задание гомомрфизма матрицей, прямые суммы модулей, строение конечнопорождённого модуля над кольцом главных идеалов: теорема о взаимном базисе, инвариантные множители и элементарные делители, строение конечнопорождённой абелевой группы.

Тема 10. Алгебра матриц: матричная запись систем линейных уравнений и линейных замен переменных, сложение и умножение матриц, элементарные преобразования и элементарные матрицы, метод Гаусса над полем и над евклидовым кольцом, решение систем линейных уравнений, обратимые элементы некоммутативного кольца и отыскание обратной матрицы, ранг матрицы, подстановка матриц в многочлены и степенные ряды.

Тема 11. Определители: ориентированный объём n-мерного параллелипипеда, полилинейность, знакопеременность и кососимметричность, поведение полилинейной косой формы при линейной замене аргументов, перестановки: чётность и разложение на циклы, определитель матрицы: свойства и методы вычисления, правило Крамера, соотношения Лапласа, присоединённая матриыа, тождество Гамильтона-Кэли.

Тема 12. Группы: определение, примеры, реализация группы автоморфизмами множества, орбиты, стабилизаторы, длины орбит и теорема Лагранжа, нормальные подгруппы и факторгруппы, строение гоморфизмов, группа фигуры, группы многогранников, симметрические группы и их классы сопряжённости, строение групп $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$, простота знакопеременных групп.

Комментарий. Настоящая программа расчитана на матшкольников, желающих быстро выучить основные понятия алгебры и научиться эффективно использовать их в конкретных вычислениях. Она фиксирует не *последовательность* в которой материал предполагается изложить, а *совокупный объём* знаний, которым предполагется научить за весь семестр. Предполагаемый порядок изложения таков: мы начнём с конкретных примеров полей, коммутативных колец и модулей ($\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, вычеты, координатные пространства, целочисленные решётки, многочлены, степенные ряды, кольца функций) и перечня естественных вычислительных проблем с ними связанных (корни и разложение многочленов на множители, решение систем линейных уравнений (в том числе над $\mathbb{Z}$), анализ сравнений, отыскание удобных базисов в решётках, производящие функции и суммирование рядов, анализ полиномиальных тождеств, «соображения симметрии»), а затем будем последовательно вводить базисные понятия алгебры: векторные пространства, модули, прямые суммы и факторы, матрицы, детерминанты, некоммутативные кольца и группы, наблюдая за тем каую роль они играют в решении предыдущих проблем.