Образцы экзаменационных задач по алгебре за первый семестр первого курса

Экзамен представляет собой 3–4 часовую письменную работу, в ходе которой необходимо решить 4–5 задач типа представленных ниже.

А1⋄1 (6 баллов). Вычислите десятую производную функции $(2-3x)/(x^2+x+1)$.

А1⋄2 (8 баллов). Разложение перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ в произведение независимых циклов состоит из k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2, k_3 циклов длины 3, $\ldots$, k_n циклов длины n. Получите формулу, которая выражает число всех перестановок, сопряжённых с σ, через n и $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

А1⋄3 (8 баллов). Изоморфна ли знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ группе вращений икосаэдра?

А1⋄4 (10 баллов). Перечислите все классы сопряжённых элементов в $\mathfrak{S}_6$ с указанием числа элементов в каждом из них. Затем:

- **а**) проверьте, что $\mathfrak{S}_6$ порождается циклом длины 6 и транспозицией;
- **б**) укажите порождающие $\mathfrak{S}_6$ элементы шестого и второго порядка, отличные от цикла длины 6 и транспозиции.
- **в***) **(необязательная трудная задача)** Существует ли автоморфизм $\mathfrak{S}_6$, не являющийся внутренним?

А1⋄5 (4 балла). Может ли число $\sqrt[m]{p_1 p_2 \cdots p_s}$ быть рациональным, если $m \geqslant 2$ – натуральное, а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – попарно разные простые числа?

А1⋄6 (8 баллов). Для каких простых чисел p существует ненулевой гомоморфизм из кольца целых гауссовых чисел Γ в кольцо $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

А1⋄7 (6 баллов). При каких q_1, q_2 существует нетривиальный гомоморфизм между конечными полями: $\mathbb{F}_{q_1} \longrightarrow \mathbb{F}_{q_2}$?

А1⋄8 (8 баллов). Сколько корней имеет уравнение $x^7 = 35$ в $\mathbb{Z}_{601}$?

А1⋄9 (6 баллов). Приводим ли многочлен $x^6 + x^3 + 1$ над кольцом $\mathbb{Z}$?

А1⋄10 (10 баллов). Пусть $n \geqslant m$ и пусть d_k (где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) — определитель матрицы, которая получается выкидыванием внешнего контура толщины k (т. е. по k строк и k столбцов сверху, снизу, слева и справа) из матрицы

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccccccc}
a_0 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & b_0 & \ldots & b_{m-1} & b_m \\
 & & & \iddots & & \iddots & \iddots & \\
 & & \iddots & & \iddots & \iddots & & \\
 & b_0 & \ldots & b_{m-1} & b_m & & & \\
b_0 & \ldots & b_{m-1} & b_m & & & &
\end{array}\right)}_{m+n}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}m \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}n
\end{array}$$

(пустые места заполнены нулями). Верно ли, что индекс первого ненулевого члена последовательности $d_0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots$ равен степени наибольшего общего делителя пары многочленов $A = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ и $B = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ (предполагается, что a_0 и b_0 отличны от нуля).

A1◇11 (10 баллов). Рассмотрим целую решётку $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ и выберем в ней три линейно независимых над $\mathbb{R}$ целых вектора v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{Z}^3$. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^3$ — $\mathbb{Z}$-подмодуль, порождённый этими векторами, Π — натянутый на эти векторы параллелепипед, а M — матрица, составленная из столбцов координат векторов v_i. Совпадают ли числа:

а) объём Π (т. е. $|\det M|$);

б) число элементов в фактор-модуле $\mathbb{Z}^3/L$;

в) $в + г/2 + р/4 + 1$, где $в$, $г$ и $р$ – число целых точек, попадающих строго внутрь самого Π, строго внутрь его граней и строго внутрь его рёбер соответственно.

A1◇12 (10 баллов). Зададим на множестве M всех $\mathbb{Z}$-линейных гомоморфизмов из $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ структуру $\mathbb{Z}$-модуля с операциями поточечного сложения значений гомоморфизмов и поточечного умножения значений гомоморфизма на число. Опишите строение модуля M и выясните, из скольких элементов он состоит, в следующих случаях:

а) $\text{НОД}(n, m) = 1$; **б)** $m = n = p$ – простое число; **в)** $n = p^r$, $m = p^s$, где p – простое число?

A1◇13 (10 баллов). Пусть $\mathcal{C}$ — это кольцо непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0, 1]$ (с операциями поточечного сложения и поточечного умножения значений функций). Установите естественное взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и максимальными идеалами кольца $\mathcal{C}$. Всякий ли идеал в $\mathcal{C}$ может быть описан как множество всех функций, зануляющихся на некотором замкнутом подмножестве?

A1◇14 (10 баллов). Пусть p – наименьшее простое число, делящее порядок конечной группы $\mathfrak{G}$, и пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ – подгруппа индекса p. Докажите, что подгруппа $\mathfrak{H}$ нормальна

а) при $p = 2$; **б)** в общем случае.