# Fonctions holonomes en calcul formel

Frédéric Chyzak

Thèse

Soutenue le 27 mai 1998, devant le jury constitué de

| | |
|---|---|
| Manuel Bronstein | *(rapporteur)*, |
| Robert Cori, | |
| Jean Della Dora, | |
| Philippe Flajolet | *(directeur)*, |
| Ton Levelt, | |
| Peter Paule | *(rapporteur)*, |
| Jean-Pierre Ramis, | |
| Bruno Salvy | *(co-directeur)*, |
| Jean-Marc Steyaert, | |

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'École polytechnique,
Discipline Informatique, Spécialité Algorithmique.

# Remerciements


Je remercie vivement :

– les membres de mon jury : Manuel Bronstein, Robert Cori, Jean Della Dora, Philippe Flajolet, Ton Levelt, Peter Paule, Jean-Pierre Ramis, Bruno Salvy et Jean-Marc Steyaert ;

– plus particulièrement les rapporteurs : Manuel Bronstein et Peter Paule ;

– mon directeur de thèse, Philippe Flajolet, qui m'a soutenu et guidé dans tous mes choix stratégiques ;

– mon « co-directeur » de thèse, Bruno Salvy : d'une grande disponibilité, il a tenté de me transmettre sa compréhension fine et juste du calcul formel et il a encadré de près ma recherche et ma rédaction. Quand Philippe Flajolet et lui m'ont proposé un sujet pour mon stage d'option de l'X, je ne soupçonnais pas que j'y trouverais matière à toute une thèse ;

– Philippe Dumas, lui aussi toujours disponible pour répondre à mes questions plus algébriques et avec qui j'ai eu l'occasion d'écrire un article ;

– Peter Paule, pour le spectaculaire exemple des sommes de Gordon, ainsi que pour m'avoir fait participer comme conférencier invité à la conférence *33 Years of Gröbner Bases* et pour me recevoir en post-doc à Linz ;

– à côté de Bruno Salvy, tous ceux qui ont relu et commenté tout ou partie des versions préliminaires de cette thèse, en particulier Philippe Dumas, Philippe Flajolet, Ton Levelt, Peter Paule, Marko Petkovšek, Berndt Sturmfels, Volker Strehl, et plusieurs *referees* anonymes ;

– Jean-Marc Steyaert, qui m'a orienté vers la recherche ;

– Doron Zeilberger et Nobuki Takayama, qui m'ont fortement inspiré et à qui j'ai emprunté de nombreux exemples ;

– les utilisateurs de mes programmes, en particulier Nobuki Takayama, Sergei Abramov et son étudiant Petr Glotov ;

– Jacques Carette et George Labahn qui m'ont aidé dans l'intégration de mes programmes dans la diffusion grand public de Maple ;

– les autres membres, permanents ou de passage, du projet Algo, qui ont fait sa bonne ambiance de travail et animé sa salle à café ;

– tout particulièrement Virginie Collette, secrétaire du projet, pour son efficacité remarquable et son grand sens de l'organisation ;

– ma femme, Sophie, pour son dévouement illimité et son soutien qui n'a jamais défailli durant mes trois années de thèse.

Frédéric Chyzak,
Rocquencourt, le 23 septembre 1998.

Ce travail a été partiellement financé par le contrat n° 91815-43 passé avec la Dret (Direction de la recherche et de la technologie), direction scientifique, section soutien à la recherche.

# Table des matières

# Introduction

Le CALCUL FORMEL vise à *algorithmiser* le calcul sur des représentations *finies* d'objets mathématiques. Calculer, c'est en fait *construire* une telle représentation, en respectant une mécanique fixée à l'avance et uniforme sur toute une classe d'objets. Au contraire des objets des mathématiques traditionnelles qui existent « en soi », un objet du calcul formel n'a d'existence que par sa représentation. La notion d'égalité ne peut donc plus être la même notion que celle des mathématiques traditionnelles. Pour affirmer l'égalité de deux objets, le calcul formel doit au contraire établir l'*identité* de leurs représentations, ou encore montrer qu'ils peuvent être obtenus par une même construction. Le calcul revêt alors une importance de premier plan. Ce n'est plus une activité triviale ; par le biais de l'algorithmisation, il acquiert un statut de *preuve*.

Une classe d'objets du calcul formel n'est donc vraiment satisfaisante que lorsque l'identité de deux de ses membres y est décidable algorithmiquement. Dans cette perspective, l'objectif de ma thèse est l'introduction dans le calcul formel de nouvelles classes de suites et fonctions qui sont solutions de systèmes d'équations fonctionnelles *linéaires* et le développement d'une algorithmique effective correspondante, rendant le *test d'égalité* et les propriétés essentielles de ces classes *décidables*. Dans cette thèse, je fais en particulier l'étude algorithmique de classes de fonctions et de suites qui sont solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires ou de récurrences multiples linéaires, et qui vérifient certaines propriétés de finitude. Cet objectif va de pair avec l'implantation des algorithmes découverts, permettant leur validation et la mise en lumière de leurs faiblesses et de leurs forces.

De nombreuses fonctions issues de la physique mathématique et des sciences de l'ingénieur ainsi que de nombreuses suites apparaissant en analyse de performances d'algorithmes, en mathématiques discrètes et en combinatoire sont régies par des équations différentielles ou des équations de récurrence linéaires à coefficients polynomiaux. Un cadre mathématique adapté à l'étude de ces objets est celui des *fonctions holonomes*. Au début des années 1990, Doron Zeilberger a montré l'intérêt de cette classe de fonctions pour le calcul formel [113] : de nombreux calculs sur les fonctions spéciales, les suites combinatoires ou leurs $q$-analogues peuvent se réaliser par l'utilisation d'opérateurs linéaires et d'arguments simples sur la dimension d'espaces vectoriels adéquats ; de façon plus frappante, des méthodes d'élimination polynomiale dans un cadre non commutatif m'ont permis d'incorporer dans ce calcul une algorithmique de sommation et d'intégration symboliques, fondée sur une représentation *finie et exacte*.

**Quelques problèmes typiques.** Quand on voit la masse des identités sommatoires et intégrales connues et aujourd'hui tabulées dans les formulaires comme [8, 41, 51, 64, 86], il est fort surprenant de constater combien les systèmes de calcul formel sont démunis face aux calculs d'intégrales ou de sommes paramétrées, et même, sont très malhabiles à manipuler ces objets quand ceux-ci n'admettent pas d'expression en termes de « fonctions élémentaires ». Par opposition, la théorie des fonctions holonomes et l'algorithmisation que j'en fait dans cette thèse permettent de résoudre les problèmes suivants :

– PROBLÈME : « Simplifier » les expressions

$$y_{m,n} = 2T_m(x)T_n(x) - T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x) \qquad (n \geq m),$$
$$z_n = p_{n+1} - p_{n-1} + \frac{2n}{a}\frac{\partial p_n}{\partial b} + \frac{2n}{b}\frac{\partial p_n}{\partial a},$$

où les $T_n(x)$ sont les polynômes orthogonaux de Tchebychev et où $p_n$ est défini en termes des fonctions de Bessel $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ de première et deuxième espèces et d'ordre $n$ par

$$p_n(a,b) = J_n(a)Y_n(b) - J_n(b)Y_n(a).$$

SOLUTION : $y_{m,n} = z_n = 0$. *Pour ce genre de simplifications, je donnerai au chapitre III une méthode algorithmique générale de mise sous forme normale.*

– PROBLÈME : Donner une solution particulière simple de l'équation différentielle linéaire en $F$

$$F''(x) + \frac{F'(x)}{x} - q^2F(x) = (1-x^2)J_0(qx) - 2q^2xJ_1(qx).$$

SOLUTION : *Une solution est*

$$F(x) = \frac{2q-1+x^2}{2q^2}J_0(qx) + \frac{(q^3-1)x}{q^3}J_1(qx).$$

*Elle a été calculée par un algorithme de recherche de telles solutions particulières que je donnerai au chapitre VI.*

– PROBLÈME : Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int e^{it} t^n J_n(t)\, dt.$$

SOLUTION : *Une expression en termes de l'intégrande est*

$$\frac{e^{it} t^{n+1}}{2n+1} [J_n(t) - iJ_{n+1}(t)].$$

*Cette expression a été calculée par un nouvel algorithme exprimant, quand c'est possible, une primitive d'une fonction donnée en termes de dérivées de cette même fonction. Je présenterai cet algorithme au chapitre VI.*

– PROBLÈME : Calculer la somme indéfinie

$$\sum_n \frac{(-1)^n H_n}{\binom{m}{n}} \qquad \text{pour} \qquad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

SOLUTION : *Une expression en termes du sommant est*

$$\frac{(-1)^n [(m+2)H_n - 1](n-1-m)}{\binom{m}{n}(m+2)^2}.$$

*Ce résultat a été obtenu par la version sommatoire de l'algorithme évoqué au problème précédent.*

– PROBLÈME : Calculer la série génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) H_n(y) \frac{u^n}{n!}$$

où les $H_n(x)$ sont les polynômes orthogonaux de Hermite.

SOLUTION : *Cette série génératrice est*

$$\frac{\exp\left(\frac{4u[xy - u(x^2+y^2)]}{1-4u^2}\right)}{\sqrt{1-4u^2}}.$$

*Ce résultat a été obtenu par un algorithme que je détaillerai au chapitre V.*

– PROBLÈME : Calculer une récurrence sur les coefficients de la série de Tchebychev

$$x \exp x = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x),$$

de $x \exp x$, qui sont donnés par la représentation intégrale

$$c_n = \int_{-1}^{+1} \frac{x \exp x T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

SOLUTION : *Une récurrence est*

$$c_{n+4} + 2(n+4)c_{n+3} + 2nc_{n+1} - c_n = 0.$$

*Pour la calculer, n'importe quelle méthode d'intégration des chapitres V et VI convient.*

– PROBLÈME : Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px^2} J_n(bx) I_n(cx)\, dx$$

où $J_n(z)$ et $I_n(z)$ sont respectivement la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre $n$ et la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre $n$.

SOLUTION : *Cette intégrale vaut*

$$\frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2 - b^2}{4p}\right) J_n\left(\frac{bc}{2p}\right)$$

*et peut être obtenue par les mêmes algorithmes que ceux utilisés pour le problème précédent.*

– PROBLÈME : Calculer les sommes définies

$$2\sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a;q)_n x^n}{(b;q)_n}$$

où $(x;q)_n = (1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)$.

SOLUTION : *La première somme vaut*

$$1 - J_0(z)^2$$

*et sera calculée au chapitre VI. La seconde vaut*

$$\frac{(ax;q)_\infty \left(\frac{q}{ax};q\right)_\infty (q;q)_\infty \left(\frac{b}{a};q\right)_\infty}{(x;q)_\infty \left(\frac{b}{ax};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty}$$

*et se calcule par l'algorithme de sommation que je donne en §3 au chapitre V. Je traiterai de nombreux calculs analogues en §4 du même chapitre.*

– PROBLÈME : Donner une équation différentielle linéaire homogène satisfaite par l'intégrale

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \sin \frac{z}{1+z^2}\, dz$$

SOLUTION : *Par l'algorithme d'intégration définie donné au chapitre VI, on montre que l'intégrale vérifie l'équation différentielle linéaire*

$$\begin{aligned} &t^2 f^{(10)}(t) + 18t f^{(9)}(t) + 3(24+t^2) f^{(8)}(t) + 48t f^{(7)}(t) \\ &\quad + (2t^2+169) f^{(6)}(t) + 36t f^{(5)}(t) + (117-2t^2) f^{(4)}(t) \\ &\qquad -3(t^2-9) f''(t) - 6t f'(t) - (t^2+1) f(t) + 1 = 0. \end{aligned}$$

– PROBLÈME : Montrer que la somme double

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-(r+s)}{n}$$

se simplifie en la somme simple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}^4.$$

SOLUTION : *Au chapitre VI, je présenterai un algorithme qui permet de calculer une récurrence vérifiée par la somme double, ainsi qu'une récurrence vérifiée par la somme simple. Il s'avère que ces deux récurrences coïncident, ce qui permet de montrer l'égalité des deux sommes.*

Tous les résultats qui précèdent ont été obtenus en utilisant les algorithmes et programmes que j'ai développés, alors qu'un système de calcul formel tel MAPLE ne fournit que peu de réponses aux problèmes ci-dessus. Remarquons que les problèmes de la liste précédente qui aboutissent à une identité rentrent dans deux catégories. Certains problèmes consistent en une simple *vérification* d'une identité. D'autres vont bien plus loin et sont de l'ordre de la *découverte* d'une identité.

L'intérêt pour les problèmes d'intégration et de sommation symboliques est bien antérieur aux travaux de Zeilberger. Cependant, quand on évoque l'intégration symbolique dans les ouvrages classiques, on fait le plus souvent référence au problème d'intégration « sous forme close », ou encore « en termes finis » : l'objectif est d'exprimer une primitive par composition à partir des fractions rationnelles et d'un certain nombre de fonctions fixées à l'avance, par exemple le logarithme et l'exponentielle ou de prouver qu'une telle représentation n'existe pas. Cette même problématique se retrouve dans le cas de la sommation symbolique. Des algorithmes typiques sont celui de Robert H. Risch dans le cas de l'intégration [88, 89] et celui de Michael Karr dans le cas de la sommation [60, 61]. Je reprends dans ma thèse une approche toute différente introduite par Zeilberger [113] : au lieu d'une forme close, je cherche à obtenir un système d'équations fonctionnelles linéaires satisfaites par chaque fonction d'un calcul. Au lieu de déterminer si une intégrale ou une somme admet une forme close, je m'attache ici à pouvoir calculer avec des fonctions et des suites, même quand celles-ci n'admettent pas de formes closes.

**Le cadre holonome et la sommation hypergéométrique définie.** L'approche que Doron Zeilberger a introduite au début des années 1990 pour le calcul sur les fonctions et les suites qu'il a appelées « holonomes » procède de la théorie des *$\mathcal{D}$-modules* [20, 21, 22, 23, 33, 37, 39, 62]. Dans cette théorie, une équation différentielle linéaire est vue comme un module sur une algèbre d'opérateurs différentiels linéaires. Cette approche remonte aux travaux de Bernard Malgrange sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants et a été ensuite systématisée dans la thèse de Masaki Kashiwara pour le cas d'équations à coefficients analytiques. La théorie de l'*holonomie* est une branche de la théorie des $\mathcal{D}$-modules dont l'étude a débuté dans les années 1970 par les travaux de Joseph Bernstein [20, 21].

Dans son article fondateur [113] de la méthode holonome pour la sommation et l'intégration symboliques, Zeilberger étudie l'action de certaines algèbres d'*opérateurs linéaires* différentiels ou aux différences afin de déterminer des opérateurs particuliers qui caractérisent la somme ou l'intégrale à calculer. Là encore, une équation linéaire différentielle ou aux différences peut être vue comme un module sur une algèbre d'opérateurs linéaires respectivement différentiels ou aux différences. Une définition simple (mais incomplète) de l'holonomie dans les cas continu et discret est la suivante : une fonction $f(x_1, \dots, x_r)$ est *holonome* lorsque ses dérivées engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions rationnelles en les $x_i$ ; une suite est alors définie comme étant holonome lorsque sa série génératrice en plusieurs variables est holonome. Selon l'usage de Zeilberger, j'emploie dans cette thèse l'expression « fonction holonome » pour faire référence à chacun de ces cas.

Les algorithmes de sommation des suites holonomes reposent sur la méthode du *creative telescoping* [115]. Étant donné une suite double

$$u = (u_{n,k}),$$

cette méthode calcule une récurrence linéaire vérifiée par la somme définie

$$U_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n,k}.$$

Le calcul est le suivant : supposons qu'une autre suite $v = (v_{n,k})$ et des fractions rationnelles $\eta_i$ *dépendant uniquement de* $n$ vérifient l'identité

$$\sum_{i=0}^{L} \eta_i(n) u_{n+i,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}. \tag{1}$$

En pratique, on suppose alors que pour chaque $n$, la suite partielle des $u_{n,k}$ est à support fini, c'est-à-dire non nulles pour un nombre fini de valeurs de $k$, d'où l'on tire l'existence d'une suite $v$ ayant la même propriété. Par sommation sur $k$, la somme télescopique au membre droit vaut zéro et on obtient une récurrence linéaire satisfaite par $(U_n)$. La méthode s'étend au cas différentiel et au $q$-calcul [9, 65, 81, 87].

Une suite $(u_n)$ en un seul indice $n$ et telle que $u_{n+1}/u_n$ soit une fraction rationnelle en $n$ est dite *hypergéométrique*. De manière similaire dans le cas de plusieurs indices, une suite hypergéométrique est une suite $(u_{n_1,\ldots,n_r})$ telle que chaque quotient

$$\frac{u_{n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_r}}{u_{n_1,\ldots,n_r}}$$

soit une fraction rationnelle en les $n_i$. Autrement dit, les suites hypergéométriques sont définies par des récurrences du premier ordre. Le caractère hypergéométrique d'une suite n'implique pas son caractère holonome, comme le montre l'exemple de la suite $u$ donnée par

$$u_{n,k} = \frac{1}{n^2 + k^2}.$$

Cet exemple est tiré de [110] et sera repris avec une démonstration au chapitre IV, p. 124.

Pour résoudre le *problème d'élimination* consistant à déterminer une équation comme (1), Doron Zeilberger a tout d'abord donné un algorithme général mais théorique fondé sur le calcul de résultants de polynômes non commutatifs d'un certain type [113]. Il a lui-même appelé cet algorithme l'« algorithme lent », et proposé son « algorithme rapide » [112] pour une classe restreinte de suites : la terminaison de cet algorithme est garantie pour des suites qui sont à la fois hypergéométriques et holonomes. La théorie de Zeilberger s'étend aux sommations multiples de suites hypergéométriques holonomes, ainsi qu'à l'intégration (éventuellement multiple) et au $q$-calcul [110, 111]. À titre d'exemple, l'algorithme de Zeilberger calcule la somme

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2k}{k} \binom{4n-2k}{2n-k}$$

et montre qu'elle admet la forme close

$$\binom{2n}{n}^2.$$

L'algorithme rapide de Zeilberger pour la sommation hypergéométrique *définie* s'appuie sur l'algorithme de sommation hypergéométrique *indéfinie* dû à R. William Gosper [56, 57]. Pour des suites

$$u = (u_k) \qquad \text{et} \qquad U = (U_k)$$

vérifiant

$$U_{k+1} - U_k = u_k,$$

la suite $U$ est appelée une *somme indéfinie* de $u$. L'algorithme de Gosper détermine s'il existe une somme hypergéométrique indéfinie $U$ de la suite hypergéométrique $u$, et dans l'affirmative calcule un tel $U$. Lorsqu'une solution est obtenue, la somme

$$\sum_{j=0}^{k-1} u_j$$

est $U_k - U_0$. Les suites $u$ et $U$ sont reliées par une équation de la forme

$$U_k = \theta(k) u_k$$

pour une fraction rationnelle $\theta$, si bien que le problème de sommation se réduit au calcul de $\theta$. Il s'avère que $\theta$ vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux et qu'elle peut donc être résolue en ses solutions rationnelles $\theta$ par l'algorithme de Sergei A. Abramov [3]. Une remarque subtile de Gosper est qu'il suffit de résoudre en ses solutions *polynomiales* une équation déduite de la précédente — voir [5] pour un raffinement. À titre d'exemple, l'algorithme de Gosper calcule

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{4^j}{\binom{2j}{j}}$$

et prouve que cette somme admet la forme close

$$\frac{2}{3} \frac{(k+1)4^k}{\binom{2k}{k}} + \frac{1}{3}.$$

Dès que l'on connaît un entier positif $L$ et des fractions rationnelles $\eta_i$ tels que le membre gauche de l'équation (1) admette une somme indéfinie hypergéométrique, l'algorithme de Gosper s'applique pour résoudre l'équation (1) en cette somme indéfinie hypergéométrique. Fort de cette observation, l'algorithme rapide de Zeilberger introduit des coefficients indéterminés $\eta_i$ et utilise une extension de l'algorithme de Gosper pour obtenir une somme indéfinie hypergéométrique $(v_k)$ en même temps que des fractions rationnelles $\eta_i$. Ce processus est répété pour des valeurs croissantes de $L$ jusqu'à ce que le problème de sommation devienne résoluble. Lorsque $u$ est une suite hypergéométrique holonome, la terminaison de l'algorithme est garantie par holonomie. L'algorithme fournit alors l'identité (1) à partir de laquelle le *creative telescoping* calcule une récurrence linéaire vérifiée par la somme définie $U$.

Depuis son article fondateur, Zeilberger a tant amélioré son approche initiale que son « algorithme rapide » est aujourd'hui à la base des routines de sommation définie de nombreux systèmes de calcul formel [84, 110, 111, 112].

**L'approche holonome et le point de vue des opérateurs linéaires.** Le point de départ de l'approche par opérateurs est la considération de l'ensemble des opérateurs linéaires qui annulent une fonction ou une suite donnée. Une fonction ou une suite est alors décrite par un jeu d'opérateurs annulateurs. Par exemple, les coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ satisfont des équations de récurrence linéaires. Désignons par $S_n$ l'opérateur de *décalage* par rapport à $n$, c'est-à-dire l'opérateur qui agit sur une fonction $f$ par

$$(S_n \cdot f)(n) = f(n+1).$$

Les décalages par rapport à d'autres variables seront notés de façon similaire. En identifiant une fraction rationnelle $r$ en $(n, j)$ et l'opérateur linéaire de multiplication par $r$, on obtient une algèbre non commutative dont le produit représente la composition d'opérateurs. Avec cette notation, les coefficients du binôme sont annulés par chacun des opérateurs du système

$$(n+1-j)S_n - (n+1), \qquad (j+1)S_j - (n-j). \tag{2}$$

Ces opérateurs correspondent aux récurrences verticale et horizontale dans le triangle de Pascal. L'*idéal gauche* engendré par le système d'opérateurs précédent dans une certaine algèbre d'opérateurs traduit toutes les équations linéaires à coefficients des fractions rationnelles satisfaites par les coefficients binomiaux. Plus précisément, je distinguerai selon les manipulations à réaliser *deux* idéaux différents : l'un correspond au cas où les opérateurs linéaires sont à coefficients *rationnels* ; l'autre au cas où il faudra s'interdire les coefficients autres que *polynomiaux*. Chacun de ces idéaux correspond à un *module à gauche* engendré par l'action de l'ensemble des opérateurs linéaires sur la suite $\binom{n}{j}$. On obtient donc *deux* modules différents : dans le cadre rationnel, le système (2) sera interprété par le module

$$\mathbb{Q}(n,j)\binom{n}{j} \ ;$$

dans le cadre polynomial, le module interprétant le système (2) sera supporté par l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de base contenant les

$$P(n,j)S_n^{\alpha+\beta}S_j^{\beta} \cdot \binom{n}{j} = \\ \frac{n+\alpha+\beta}{j+\beta} \cdots \frac{n+\alpha+1}{j+1} \frac{n+\alpha}{n+\alpha-j} \cdots \frac{n+1}{n+1-j} P(n,j)\binom{n}{j}$$

et les

$$P(n,j)S_n^{\alpha}S_j^{\alpha+\beta} \cdot \binom{n}{j} = \\ \frac{n+\alpha}{j+\alpha+\beta} \cdots \frac{n+1}{j+\beta+1} \frac{n-j-\beta+1}{j-\beta} \cdots \frac{n-j}{j+1} P(n,j)\binom{n}{j}$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ et $P$ est un polynôme quelconque de $\mathbb{Q}[n, j]$. Remarquons que ce second module contient strictement $\mathbb{Q}[n,j]\binom{n}{j}$ mais est strictement contenu dans $\mathbb{Q}(n,j)\binom{n}{j}$. Dans les application, on choisira le module convenable, rationnel ou polynomial, en fonction de l'algorithme à appliquer. Ensuite, tous les calculs sur les coefficients binomiaux s'effectueront dans ce seul et même module.

Le problème sommatoire se reformule maintenant différemment : la sommation se réduit en effet à la déduction d'un opérateur linéaire d'une forme particulière à partir de la description (2) de l'idéal. Plus précisément, la sommation sur $j$ requiert un opérateur qui ne fasse pas intervenir $j$, c'est-à-dire un opérateur en $n$, $S_n$ et $S_j$ uniquement. Par exemple, l'obtention de la règle du triangle de Pascal, traduite en l'opérateur

$$P = S_n S_j - S_j - 1,$$

suffit pour effectuer la sommation sur $j$. Cette obtention se fonde sur l'*élimination* de $j$, pour laquelle je passerai en revue plusieurs méthodes aux chapitres V et VI. Une autre expression de $P$ est

$$(S_j - 1)(S_n - 1) + (S_n - 2),$$

qui appliquée à $\binom{n}{j}$ fournit

$$g(n, j+1) - g(n,j) + [(S_n - 2)\cdot f](n,j) = 0$$

où

$$f(n,j) = \binom{n}{j} \qquad \text{et} \qquad g(n,j) = \frac{j}{n+1-j}\binom{n}{j}.$$

La sommation sur $j$ dans $\mathbb{Z}$ prouve que l'opérateur $S_n - 2$ annule la somme

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

Cette méthode de *creative telescoping* sera décrite plus en détail dans la partie B. La résolution de la récurrence correspondante fournit la somme bien connue

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n.$$

Plus généralement, les algorithmes que je propose dans ma thèse prennent en entrée et fournissent en sortie des systèmes linéaires. Typiquement, leur entrée est un système d'équations aux dérivées partielles ou de récurrences en plusieurs variables, tandis que leur sortie est une équation différentielle ordinaire ou de récurrence en une seule variable. La résolution de cette équation est ensuite vue comme un éventuel traitement *a posteriori*. Dans le cas très fréquent où la sortie d'un algorithme est remployée en entrée d'un autre, je ne chercherai en réalité jamais à effectuer la résolution. Par ailleurs, on s'attend dans bien des cas à ne pas pouvoir résoudre sous forme close. Néanmoins, les équations fonctionnelles renvoyées par les algorithmes de cette thèse permettent alors de poursuivre des calculs comme la recherche d'une forme asymptotique ou l'évaluation numérique en un point.

Comme autre exemple, considérons les fonctions hypergéométriques en deux variables $F_4$ d'Appell,

$$F_4(a,b,c,d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{m!n!(c)_m(d)_n} x^m y^n, \tag{3}$$

où $(x)_n$ désigne le symbole de Pochhammer $\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$. Elles satisfont des équations différentielles linéaires [41]. Désignons par $D_x$ l'opérateur de *dérivation* par rapport à $x$ : cet opérateur agit sur une fonction $f$ par

$$(D_x \cdot f)(x) = f'(x).$$

En notant les dérivations par rapport aux autres variables de manière analogue, la fonction $F_4$ d'Appell est annulée par les deux opérateurs

$$\begin{cases} xD_x(xD_x+c-1) - x(xD_x+yD_y+a)(xD_x+yD_y+b), \\ yD_y(yD_y+d-1) - y(xD_x+yD_y+a)(xD_x+yD_y+b), \end{cases} \tag{4}$$

où chaque coefficient, qui est une fraction rationnelle en $(x,y)$, représente la multiplication des fonctions par cette fraction rationnelle. Dans ce cadre différentiel, j'associe deux idéaux au système (4), l'un pour des opérateurs à coefficients rationnels, dans $\mathbb{Q}(a,b,c,d,x,y)$, l'autre à coefficients polynomiaux, dans $\mathbb{Q}(a,b,c,d)[x,y]$. Ces idéaux représentent l'ensemble des équations différentielles linéaires vérifiées par $F_4(a,b,c,d;x,y)$. De même correspondent deux modules. L'un est supporté par l'espace vectoriel de base

$$\mathcal{B} = \left(F_4, \frac{\partial}{\partial x}F_4, \frac{\partial}{\partial y}F_4, \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_4\right)$$

sur $\mathbb{Q}(a,b,c,d,x,y)$ ; l'autre est supporté par l'espace vectoriel sur le corps de constantes $\mathbb{Q}(a,b,c,d)$ dont une base est constituée par les

$$\frac{P(x,y)b}{[xy(y^4-2xy^3+x^2y^2-2y^3-2xy^2+y^2)]^\alpha},$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $b \in \mathcal{B}$ et pour tout polynôme quelconque $P$ de $\mathbb{Q}(a,b,c,d)[x,y]$.

Ici, la détermination d'un opérateur qui ne fasse pas intervenir $y$, c'est-à-dire en $x$, $D_x$ et $D_y$ uniquement, est suffisante pour obtenir une équation différentielle ordinaire satisfaite par une intégrale de la fonction d'Appell.

Plus généralement, l'approche par opérateurs s'applique à des systèmes mixtes différentiels et aux différences. Ainsi, les polynômes orthogonaux de Jacobi $P_n^{(a,b)}(z)$, vus comme des fonctions $P$ de $(n,a,b,z)$, sont annulés par le système d'opérateurs linéaires différentiels et de récurrence classiques [41] :

$$
(5) \quad \begin{cases}
(1-z^2)D_z^2 + [b-a-(a+b+2)z]D_z + n(n+a+b+1), \\
(2n+a+b+2)(1-z^2)S_nD_z \\
\qquad -(n+1)[a-b-(2n+a+b+2)z]S_n \\
\qquad -2(n+a+1)(n+b+1), \\
2(n+2)(n+a+b+2)(2n+a+b+2)S_n^2 \\
-(2n+a+b+3) \\
\qquad\qquad [(2n+a+b+2)(2n+a+b+4)z+(a^2-b^2)]S_n \\
\qquad\qquad\qquad +2(n+a+1)(n+b+1)(2n+a+b+4), \\
(2n+a+b+2)(1-z)S_a - 2(n+a+1) + 2(n+1)S_n, \\
(2n+a+b+2)(1+z)S_b - 2(n+b+1) - 2(n+1)S_n.
\end{cases}
$$

Cette fois encore, on distingue deux idéaux intéressants et les modules correspondants, qui sont ici bien plus lourds à décrire. De façon analogue aux exemples précédents, l'obtention à partir du système (5) d'un opérateur qui ne fait pas intervenir $z$ suffit pour effectuer une intégration de $P$.

Selon le point de vue introduit par Bernstein, l'holonomie est une théorie qui traite indifféremment les cas d'une ou de plusieurs variables. En revanche, si l'étude *effective* des fonctions holonomes est classique dans le cas d'une seule variable, les résultats correspondants dans le cas de plusieurs variables sont relativement récents et incomplets. Je me propose donc de reprendre cette étude et de la prolonger au calcul déjà mentionné de certains types de sommations et d'intégrations auxquels les méthodes issues de la théorie de l'holonomie sont applicables. En particulier, l'effectivité de ces dernières m'a permis d'automatiser la preuve de nombreuses identités et permet d'en découvrir de nouvelles. Un exemple d'identité découverte et démontrée pour la première fois par holonomie effective est donné dans [85].

**Analogie avec les nombres algébriques.** En suivant l'approche proposée par Zeilberger, au lieu de chercher à *résoudre* une équation fonctionnelle linéaire, je m'intéresse à *manipuler* ses solutions.

Pour bien marquer cette différence de point de vue entre des méthodes du type recherche de formes closes et les méthodes de calculs à la Zeilberger, procédons à une analogie avec les nombres et fonctions algébriques. On distingue deux types de calculs :

1. la *manipulation* de nombres et fonctions algébriques, et plus généralement de zéros de systèmes algébriques ;
2. la *résolution par radicaux* d'équations ou de systèmes algébriques.

Dans le premier cas, le point de vue adopté est de manipuler ensemble toutes les solutions d'un système au moyen d'un zéro générique. Les calculs s'interprètent alors comme des opérations sur des variétés algébriques. Dans le cadre de la géométrie algébrique, des outils puissants d'*élimination* ont été développés, au nombre desquels le résultant et les bases de Gröbner. D'un autre point de vue, la résolution par radicaux vise à déterminer si un nombre algébrique admet une forme close dans une tour d'extensions de corps de nombres vérifiant une certaine condition technique, et la théorie adaptée est la *théorie de Galois*.

En ce qui concerne les fonctions et suites, la similitude formelle est frappante. En effet, on distingue respectivement :

1. la *manipulation* de fonctions et suites solutions de systèmes d'équations linéaires fonctionnelles ;
2. la *résolution* des équations différentielles linéaires ordinaires en *solutions liouvilliennes* et plus récemment celle des équations de récurrence linéaires ordinaires.

Dans le cadre différentiel, la résolution en solutions liouvilliennes consiste à déterminer si une solution existe dans une tour d'extensions de corps de fonctions stables par dérivation et vérifiant une condition technique formellement semblable au cas de la résolution par radicaux. Une *théorie de Galois différentielle*, puis une *théorie de Galois aux différences* ont d'ailleurs été développées en s'inspirant du cas classique, mais en l'étendant de manière non triviale. Concernant la manipulation de fonctions et suites, le même point de vue de « géométrie algébrique non commutative » et les mêmes outils d'*élimination* ont été développés pour le calcul sur des solutions génériques d'équations fonctionnelles linéaires. En particulier, on retrouve une théorie des bases de Gröbner non commutatives dont je ferai constamment usage dans cette thèse.

Pour finir avec cette analogie, de même que la manipulation d'expressions faisant intervenir des radicaux peut être vue comme le calcul sur des fonctions algébriques en tenant compte d'une information numérique — les conditions initiales — pour permettre les choix de branches, la manipulation d'expressions en des suites et fonctions spéciales peut être vue comme un calcul sur des solutions génériques de systèmes fonctionnels linéaires qui tiennent compte de conditions initiales — le plus souvent sous forme numérique — pour distinguer entre les solutions concrètes.

**Un carrefour de domaines.** Le sujet de mon étude est à un carrefour de domaines, à l'intérieur et à l'extérieur du calcul formel. En premier lieu, *la combinatoire et l'analyse d'algorithmes*, car un grand nombre de problèmes issus de ces domaines mettent en jeu des récurrences holonomes [48, 47, 49, 93]. C'est le cas par exemple dans l'analyse de certaines structures de données, comme les arbres de recherche récursifs multidimensionnels. D'autre part, nombre d'*identités sur les coefficients binomiaux* qui sont habituellement démontrées péniblement à la main deviennent prouvables automatiquement [84]. Par ailleurs, la *théorie des fonctions spéciales*, en particulier celle des fonctions hypergéométriques, et le calcul déjà mentionné d'intégrales ou de sommes relèvent de la théorie de l'holonomie. Mentionnons encore le *q-calcul*, qui ouvre les portes de la combinatoire des partitions et de certaines parties de la physique statistique [13]. Enfin, ma thèse comporte un important travail d'*implantation*, car les algorithmes, mêmes élémentaires, nécessaires à la manipulation d'opérateurs différentiels et de récurrence n'étaient en général pas disponibles dans un langage de haut niveau tel que MAPLE il y a encore peu.

Si les exemples donnés jusqu'ici l'ont été hors de leur contexte, le besoin d'évaluation de sommes et d'intégrales est fréquent dans des domaines variés des mathématiques et de la physique mathématique. Voici d'autres exemples de telles évaluations.

*Théorie des nombres.* L'application sans aucun doute la plus célèbre des méthodes qui vont être exposées dans cette thèse est liée à l'irrationalité de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,2020569031595942853997381615 1\ldots,$$

dont la première preuve est due à Roger Apéry. En effet, cette preuve introduit deux suites de nombres $(a_n)$ et $(b_n)$ dont le quotient $a_n/b_n$ tend vers $\zeta(3)$, et s'appuie de façon cruciale sur le fait qu'elles vérifient toutes deux la récurrence

$$(n+2)^3 u_{n+2} - \left[(n+2)^3 + (n+1)^3 + 4(2n+3)^3\right] u_{n+1} + (n+1)^3 u_n = 0. \tag{6}$$

Il m'a été possible d'obtenir cette récurrence de manière totalement automatique à partir de leur seule définition sommatoire donnée ci-dessous, et je montrerai les calculs correspondants en §4.1 au chapitre V. Par opposition, peu après la découverte d'Apéry, Alfred Van der Poorten commentait dans [106]

> "To convince ourselves of the validity of Apéry's proof we need only complete the following exercise. [...] Let
>
> $$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k},$$
> $$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}.$$
>
> Then $a_0 = 0$, $a_1 = 6$; $b_0 = 1$, $b_1 = 5$ and each sequence $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ satisfies the recurrence (6). [...] Neither Cohen nor I had been able to prove [this] in the intervening two months."

On a par ailleurs l'identité suivante sur ces nombres [96]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}^3,$$

qui admet elle aussi une preuve totalement automatique (voir §4.1 au chapitre V).

*Calcul de probabilités.* L'identité sommatoire binomiale suivante est due à Neil J. Calkin [32] :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \right)^3 = \frac{n}{2} 8^n + 8^n - \frac{3n}{4} 2^n \binom{2n}{n}.$$

À la limite quand $n$ tend vers l'infini et après renormalisation, elle donne l'espérance du maximum de trois variables aléatoires gaussiennes identiquement distribuées indépendantes $N(0,1)$, à savoir $\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$.

La méthode proposée par Calkin est d'introduire $u_{n+1} - 8u_n$ et d'étudier successivement plusieurs sommes plus simples que le problème original.

Par des méthodes générales, je montrerai au chapitre VI, §5, que les nombres $u_n$ vérifient la récurrence

$$(n+1)u_{n+2} - (7n+12)u_{n+1} - 4(2n+1)u_n = (18n-20)8^n.$$

La résolution de cette dernière est immédiate par l'algorithme de Petkovšek [83], et redonne la forme close de Calkin.

*Théorie des partitions, modèle d'hexagones durs, physique statistique.* Une *partition* de l'entier positif $n$ est une suite finie $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ d'entiers positifs $\lambda_i$ appelés *parts*, de somme $n$ et triés par ordre décroissant. On note classiquement $\lambda \vdash n$. Un théorème célèbre de la théorie des partitions s'énonce :

- Le nombre de partitions de $n$ dont les parts diffèrent d'au moins 2 est le nombre de partitions de $n$ en parts de la forme $5m+1$ ou $5m+4$ ;
- Le nombre de partitions de $n$ en parts au moins 1 et dont les parts diffèrent d'au moins 2 est le nombre de partitions de $n$ en parts de la forme $5m+2$ ou $5m+3$.

Une version analytique infinie de ces identités combinatoires est fournie par les identités de Rogers-Ramanujan [11], qui s'énoncent

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q;q)_k} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty},$$

où $(a;q)_n = (1-ax)\cdots(1-aq^{n-1})$. Ces identités admettent la version finie suivante due à George Andrews [12]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2+k}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{(5k^2-3k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}},$$

où $(a;q)_n = (1-ax)\cdots(1-aq^{n-1})$.

Une généralisation de l'identité de Rogers-Ramanujan est due à Basil Gordon [55] et affirme qu'il y a autant de partitions $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$ vérifiant

$$\lambda_i - \lambda_{i+\ell-1} \geq 2$$

et ne comportant pas plus de $r-1$ parts « 1 » que de partitions

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \vdash n$$

telles que

$$\lambda_i \neq 0, r, -r \mod 2\ell + 1.$$

De même que pour les identités de Rogers-Ramanujan, ces identités combinatoires possèdent une version analytique infinie et une version analytique finie

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}}.$$

Cette dernière a été obtenue indépendamment par George Andrews [12] et par Peter Paule [77] par l'utilisation de « chaînes de Bailey » [12, 13, 78, 79]. Les algorithmes que je propose dans la présente thèse permettent de prouver cette identité de manière automatique pour chaque $\ell$ et chaque $r$ fixés. En particulier, je traiterai l'exemple $r = \ell = 3$ en §4.5 du chapitre V.

*Équation des ondes.* Dans un modèle décrivant la vibration de la membrane d'un tambour excitée par un maillet [58], l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-px} T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

intervient dans un calcul de l'amplitude associée à un certain mode propre de vibration paramétré par $(m, n)$. Je montrerai au chapitre V que cette intégrale vaut

$$\pi(-1)^n I_n(p),$$

où $I_n$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre $n$.

*Combinatoire.* Par nature, la combinatoire est une source infinie de problèmes de dénombrements qui s'expriment par des sommes de produits de coefficients binomiaux. Un tel exemple est l'identité de Dixon :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \binom{a+b}{a+k} \binom{a+c}{c+k} \binom{b+c}{b+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}.$$

Les approches classiques à la simplification de telles sommes sont la recherche en table et la recherche de transformations successives. Ces deux méthodes sont loin d'être garanties et ne sont pas algorithmiques. Leur faiblesse majeure est qu'elles ne fournissent aucun procédé de mise sous forme normale d'une somme combinatoire, si bien que dans [63, exercice 1.2.6.63], Donald E. Knuth. suggère le problème suivant

> "Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients."

Dans cette thèse, je donne des algorithmes qui manipulent les sommes combinatoires, et dans certains cas permettent de les calculer. Ces méthodes s'étendent au cas de sommations multiples.

*Théorie des fonctions spéciales.* Dans [54], M. Lawrence Glasser et Emilio Montaldi retrouvent l'identité

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px^2} J_\nu(ax)J_\nu(bx)\,dx = \frac{1}{2p}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{ab}{2p}\right)$$

et donnent une expression sommatoire pour l'intégrale d'un produit de trois fonctions de Bessel

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px^2} J_0(ax)J_\nu(bx)J_\nu(cx)\,dx.$$

Ils concluent :

> Therefore, the results of [this paper] are capable of extension in a variety of directions. We leave this for the future and merely quote one example, interesting because it contains each of the four types of Bessel functions,
>
> $$\int_0^{+\infty} xJ_1(ax)I_1(ax)Y_0(x)K_0(x)\,d = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}, \tag{7}$$
>
> where $0 < a < 1$.

La méthode employée dans [54] consiste à intégrer un développement en série du produit de deux fonctions de Bessel.

Pour chacune des intégrales de fonctions de Bessel plus haut, les méthodes que j'expose dans ma thèse permettent d'en calculer la forme close ou expression sommatoire. La méthode consiste à produire une équation différentielle satisfaite par l'intégrale, par exemple, dans le cas de (7) :

$$\begin{aligned} a^3(a^4-1)\phi^{(4)}(a) + 4a^2(4a^4-1)\phi^{(3)}(a) + a(73a^4+3)\phi''(a) \\ +(103a^4-3)\phi'(a) + 32a^3\phi(a) = 0. \end{aligned}$$

Au chapitre VII, j'obtiendrai cette équation de manière complètement automatique.

Les intégrales précédentes ne sont en fait qu'un cas particulier d'intégrales de produits de fonctions $G$ de Meijer qui généralisent les fonctions hypergéométriques ${}_pF_q$. L'évaluation de telles intégrales est aussi accessible par les méthodes de cette thèse.

**Plan de cette thèse.** Après une partie qui introduit le formalisme et les concepts de base (chapitres I à IV), une seconde partie (chapitres V à VII) présente plusieurs algorithmes de sommation et d'intégration.

Un cadre abstrait pour les opérateurs linéaires est donné par les *algèbres de Ore*, qui fournissent un point de vue unifié sur les opérateurs de décalage et de dérivation [35]. Une définition formelle des algèbres de Ore et une étude de leurs propriétés algébriques se trouvent au chapitre I.

Par ailleurs, les algèbres de Ore fournissent une représentation polynomiale des opérateurs considérés qui généralise les représentations polynomiales des systèmes (2), (4) et (5). Pour permettre un test d'appartenance à un idéal et plus généralement des calculs de formes normales modulo un idéal dans le cas d'algèbres commutatives de polynômes en plusieurs indéterminées, une algorithmique spécialisée a été développée dans les années 1960, sous le nom de « *bases de Gröbner* ». Il s'avère que cette théorie s'étend au contexte non commutatif des algèbres de Ore. Les premiers travaux dans ce domaine sont dus à Galligo [50] dans le cas différentiel. Nobuki Takayama [98] utilisa ensuite une technique analogue pour des algèbres mixtes différentielles et aux différences. Un cadre général fut introduit par Abdelilah Kandri-Rody et Volker Weispfenning [59], puis Heinz Kredel [66], et je l'ai ensuite adapté dans le cadre des algèbres de Ore [35]. Au chapitre II, je donnerai un aperçu de la théorie des bases de Gröbner dans le cas commutatif classique puis dans celui des algèbres d'opérateurs qui intéressent mon étude. Pour en apprendre plus, on pourra bien sûr se référer à des textes de bases [19, 30, 38, 52].

Pour ne pas être restreint au cas d'équations linéaires d'ordre 1, au chapitre III je définis la classe des *fonctions $\partial$-finies*. L'algorithmique de ces objets est en fait très proche de celle des nombres et fonctions algébriques, à la non commutativité près. Je la donne dans ce même chapitre.

Le chapitre IV est essentiellement bibliographique ; il rappelle la définition classique de l'*holonomie* dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules et fait le lien avec les définitions des fonctions et suites holonomes de Zeilberger. Néanmoins, dans ce chapitre, je développe aussi un point de vue nouveau, en insistant sur la difficulté d'obtenir une représentation holonome d'une fonction, au sens technique des $\mathcal{D}$-modules, même lorsqu'il est immédiat que celle-ci est holonome.

Au chapitre V, je fonde plusieurs algorithmes de sommation et d'intégration sur de l'*élimination* par bases de Gröbner. Pour éviter la complexité intrinsèquement élevée de tels calculs, j'ai développé un autre type d'algorithmes qui procèdent par résolution d'équations linéaires fonctionnelles d'ordre un en leurs *solutions rationnelles*. Le traitement de ces algorithmes fera l'objet du chapitre VI.

Comme je l'ai déjà mentionné, la programmation a tenu une place importante dans ma thèse, aussi donné-je au chapitre VII un exemple de session MAPLE obtenue avec mes programmes, en essayant d'indiquer le type de fonctions fournies à l'utilisateur.

Enfin, je mentionnerai au chapitre VIII quelques résultats que je n'ai pas eu le temps de détailler dans le corps de cette thèse, et quelques directions de recherche futures.

**Contributions de cette thèse.** Au chapitre I, je définis les *algèbres de Ore*, cadre algébrique approprié pour prendre en compte des algèbres d'opérateurs linéaires engendrées par *plusieurs* dérivations et opérateurs à différence, rendu robuste face à l'adjonction de nouveaux types d'opérateurs par l'utilisation d'*anneaux de polynômes tordus*, et fournissant ainsi une vision *unifiée* sur les algorithmes des cas différentiels, aux différences, et autres. Au chapitre II, je détermine des hypothèses convenables sur les commutations définissant les algèbres de Ore, de façon à importer et mettre en œuvre tout l'appareillage des bases de Gröbner du monde commutatif dans un cadre d'opérateurs linéaires généraux. Au chapitre III, je définis la *classe des fonctions $\partial$-finies*, qui permettent de prendre en compte des suites combinatoires et des fonctions spéciales qui ne se limitent pas aux suites hypergéométriques et $q$-hypergéométriques, ni aux exponentielles de fractions rationnelles ; au même chapitre, j'étends l'algorithme FGLM pour donner une algorithmique simple sur les fonctions $\partial$-finies. Au chapitre IV, je mets en évidence la différence essentielle du point de vue algorithmique entre le *caractère holonome* d'une fonction, au sens intuitif donné plus haut, et sa *représentation holonome*, au sens technique plus précis des $\mathcal{D}$-modules. Au chapitre V, j'utilise le calcul de bases de Gröbner comme méthode générique d'élimination pour le *creative telescoping* et me permettant d'étendre et d'améliorer un algorithme dû à Nobuki Takayama pour la sommation et l'intégration *à bornes naturelles* et de comprendre les cas d'insuccès et de non terminaison de ces algorithmes par un calcul de dimension d'idéal, ici encore au moyen de bases de Gröbner. Au chapitre VI, je propose une méthode plus performante de sommation et d'intégration symboliques, par une extension aux fonctions $\partial$-finies de l'« algorithme rapide » de Zeilberger. J'obtiens les premières démonstrations automatiques de certaines identités (*calcul* de la série génératrice des polynômes de Jacobi, *preuve* de certaines identités de Gordon...). Je fournis une *implantation* en MAPLE de la plupart des opérations et algorithmes mentionnés ci-dessus, permettant la validation des algorithmes proposés, la mise au jour de leurs éventuelles faiblesses, et l'invention de nouveaux algorithmes.

Concernant le dernier point, mon logiciel est constitué de 12000 lignes de code (420 k), de 3700 lignes de documentation (135 k) et de 8500 lignes de tests utilisés pour la maintenance (500 k) ; il apporte plus d'une cinquantaine de nouvelles fonctions à l'utilisateur. Ces *packages*, et d'autres dont il est fait mention dans cette thèse, sont disponibles par *ftp* anonyme à l'adresse

`ftp.inria.fr:/INRIA/Projects/algo/programs`

ainsi qu'à l'URL

`http://algo.inria.fr/libraries/`

Environ la moitié de ce logiciel a été incorporée dans la bibliothèque commerciale du logiciel MAPLE V, RELEASE 5.

Mentionnons encore que j'ai réalisé un travail de recherche en algorithmique de la recherche de motifs, qui ne fera l'objet d'aucune partie de cette thèse. J'ai en effet mis au point un algorithme randomisé, de type Monte-Carlo, pour la *recherche de motifs avec erreurs* [15]. Cet algorithme, qui repose sur le calcul de transformées de Fourier par FFT, améliore la borne de complexité connue pour ce problème dans le cas d'alphabets et motifs de tailles quelconques, et est applicable dans un cadre pratique pour des motifs de taille de quelques milliers de caractères et plus. Les applications envisagées comprennent la détection d'intrusion dans les systèmes informatiques, l'analyse d'image et la compression de données.

La majeure partie de ma contribution se retrouve dans les références qui suivent, et dont le texte constitue l'essentiel des chapitres I, III, V et VI :


[1] Atallah, M. J., Chyzak, F., and Dumas, P. An algorithm for estimating all matches between two strings. Rapport de recherche 3194, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, juin 1997. À paraître in *Algorithmica*.

[2] Chyzak, F. An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions. In *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 9th Conference* (1997), vol. 1, Universität Wien, p. 172–183. Comptes rendus de conférence.

[3] Chyzak, F. Gröbner bases, symbolic summation and symbolic integration. In *Gröbner Bases and Applications (Proc. of the Conference 33 Years of Gröbner Bases)*, B. Buchberger and F. Winkler, Éds., vol. 251 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-63298-6.

[4] Chyzak, F., and Salvy, B. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. À paraître in *Journal of Symbolic Computation*.


Par ailleurs, le projet ALGORITHMES réalise et publie le compte rendu de son séminaire de quinzaine. Les sujets abordés comprennent la combinatoire, le calcul formel, l'analyse asymptotique, l'analyse en moyenne d'algorithmes et de structures de données et la théorie algorithmique des nombres. Ma contribution effective depuis le début de ma thèse s'élève à sept résumés d'exposés sur les sujets suivants :


[1] Asarin, E. Piecewise-constant derivative systems and their algorithmic properties. In *Algorithms Seminar, 1993–1994* (Oct. 1994), B. Salvy, Éd., no. 2381 in Rapport de recherche Inria, p. 133–136.

[2] Péladan-Germa, A. Effective identity testing in extensions of differential fields. In *Algorithms Seminar, 1994–1995* (Oct. 1995), B. Salvy, Éd., no. 2669 in Rapport de recherche Inria, p. 47–50.

[3] Petkovšek, M. Polynomial solutions of linear operator equations. In *Algorithms Seminar, 1994–1995* (Oct. 1995), B. Salvy, Éd., no. 2669 in Rapport de recherche Inria, p. 31–34.

[4] Shackell, J. On a problem of Rubel. In *Algorithms Seminar, 1995–1996* (Sept. 1996), B. Salvy, Éd., no. 2992 in Rapport de recherche Inria, p. 59–62.

[5] Compton, K. A zero-one law for maps. In *Algorithms Seminar, 1995–1996* (Sept. 1996), B. Salvy, Éd., no. 2992 in Rapport de recherche Inria, p. 19–22.

[6] Weil, J.-A. Absolute factorization of differential operators. In *Algorithms Seminar, 1996–1997* (1997), B. Salvy, Éd., no. 3267 in Rapport de recherche Inria, p. 33–36.

[7] Shackell, J. Differential equations, nested forms and star products. In *Algorithms Seminar, 1996–1997* (1997), B. Salvy, Éd., no. 3267 in Rapport de recherche Inria, p. 41–44.

# Partie A

# Fondements de l'approche par opérateurs linéaires

Doron Zeilberger a montré qu'un grand nombre d'identités combinatoires peuvent être démontrées par l'utilisation de la classe des fonctions et suites $P$-finies et la sous-classe importante des fonctions *holonomes*. Dès lors, de nombreux calculs impliquant des fonctions spéciales, des suites combinatoires ou leurs $q$-analogues peuvent se réaliser par l'utilisation d'opérateurs linéaires et d'arguments simples sur la dimension d'espaces vectoriels adéquats. Dans cette partie, j'envisage plusieurs classes de suites et fonctions qui fournissent un cadre unifié pour exprimer des algorithmes élémentaires et serviront dans la partie B à la définition d'algorithmes de la sommation et d'intégration symboliques.

Les deux principales classes que je vais étudier sont celle des *suites et fonctions $\partial$-finies* et celle des *fonctions holonomes*. Dans les deux cas, ce sont des objets annulés par des ensembles d'opérateurs linéaires vérifiant certaines conditions techniques. La première classe, celle des suites et fonctions $\partial$-finies, étend la classe des suites et fonctions $P$-finies et sera présentée au chapitre III. Les fonctions $P$-finies sont encore appelées $D$-finies, pour « finiment différentiables » par Leonard Lipshitz [70].

Une fonction est $P$-finie lorsque l'ensemble de ses dérivées partielles engendre un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions rationnelles en ses variables. Du point de vue calculatoire, une fonction $P$-finie est spécifiée par un système d'équations différentielles linéaires — des relations linéaires entre les dérivées partielles — et un nombre fini de conditions initiales. Pour montrer qu'une fonction $P$-finie est nulle, il suffit donc de déterminer un système qui l'annule et de vérifier la nullité d'un nombre suffisant de conditions initiales. Un algorithme pour le calcul de la différence de deux fonctions sera donné au chapitre III et fournira alors un test d'égalité.

Considérons par exemple la fonction

$$f(z,t) = \frac{\cos(zt)}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{8}$$

Cette fonction est $P$-finie car l'ensemble de ses dérivées $\{D_z^i D_t^j \cdot f\}$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ engendre un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(z,t)$, où $D_x$ désigne l'opérateur de dérivation partielle $\partial/\partial x$ par rapport à $x$. Cet espace vectoriel admet la base $(f, D_z \cdot f)$, comme on le voit sur le système d'équations différentielles partielles linéaires qui suit :

$$D_z^2 \cdot f + t^2 f = 0, \qquad t(t^2-1)D_t \cdot f + z(1-t^2)D_z \cdot f + t^2 f = 0. \tag{9}$$

Le calcul d'un tel système est rendu possible par les nombreuses propriétés de clôture dont jouit la classe des fonctions $P$-finies : addition, produit, substitution algébrique, dérivation... Ces propriétés sont algorithmiques et seront décrites dans un cadre général au chapitre III. Pour calculer un système décrivant une expression $P$-finies, il suffit de se munir d'une base de données, en générale de petite taille, fournissant les équations différentielles satisfaites par les fonctions « élémentaires » du calcul, puis d'appliquer les algorithmes de clôture nécessaires. Sur l'exemple de la fonction (8), la connaissance d'équations décrivant les fonctions trigonométriques sin et cos suffit pour obtenir le système (9).

D'une façon similaire, les *suites $P$-finies* sont définies comme des suites telles que l'ensemble des suites obtenues par décalage des indices engendre un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions rationnelles en les indices. Les identités sur de telles suites se démontrent en calculant des systèmes de récurrences et suffisamment de conditions initiales. Là encore, le calcul de ces systèmes est rendu possible par les propriétés algorithmiques de clôture de la classe des suites $P$-finies.

Un exemple de suite $P$-finie par rapport à $n$ et $m$ est

$$a_{n,m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}. \tag{10}$$

Cette suite est $P$-finie car l'ensemble de ses décalées $(a_{n+i,m+j})$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ engendre un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(n,m)$ où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(x,\alpha)$. Cet espace vectoriel de dimension 1 admet la base $(a_{n,m})$, comme on s'en rend compte sur le système d'équations de récurrences linéaires suivant :

$$\begin{cases} (n+1-2m)a_{n+1,m} - 2(\alpha+n-m)xa_{n,m} = 0, \\ 4(m+1)(\alpha+n-m-1)x^2 a_{n,m+1} + (n-2m)(n-2m-1)a_{n,m} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Dans ce cas et dans les cas analogues où l'espace vectoriel est de dimension 1, la suite est dite *hypergéométrique*.

Ici encore, une base de données de taille réduite fournissant des récurrences telle que celle vérifiée par la factorielle, adjointe à quelques algorithmes de clôture dans la classe des suites $P$-finies permet très facilement le calcul d'un tel système, même dans des cas moins triviaux.

Dans le cas d'une seule variable, il est bien connu que la $P$-finitude des fonctions et la $P$-finitude des suites sont deux notions rendues équivalentes *via* les séries génératrices. Ceci donne lieu à diverses propriétés de clôture par aller-retour entre les suites et leurs séries génératrices. L'expérience acquise par une implantation de ces opérations dans le cas d'une seule variable [92] montre que les algorithmes utilisés dans les cas différentiel et aux récurrences sont essentiellement les mêmes. La raison en est que les algorithmes n'utilisent en fait que très peu des propriétés spécifiques des opérateurs de décalage et de dérivation.

Au chapitre I, j'utilise les cadres des *opérateurs de Ore* et des *anneaux de polynômes tordus* qui permettront au chapitre III de définir une notion générale de $\partial$-finitude étendant celle de $P$-finitude des fonctions et des suites. Ces opérateurs de Ore sont linéaires et possèdent précisément les propriétés des opérateurs nécessaires pour exprimer mes algorithmes. La notion de $\partial$-finitude permet une description aisée de systèmes mixtes différentiels et aux différences, tels ceux étudiés par Zeilberger [113] et par Nobuki Takayama [98], ainsi que d'équations linéaires du $q$-calcul, qui n'ont jusqu'à présent été principalement étudiées que dans le cas $q$-hypergéométrique (équations d'ordre 1). Cette généralisation a permis d'implanter un programme général opérant sur les opérateurs de Ore. De nouveaux types d'opérateurs peuvent être définis par l'adjonction de *peu de lignes de code* aux programmes existants.

Par exemple, l'identité du produit triple de Jacobi

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1+zq^{k-1})(1+q^k/z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{\binom{k}{2}}z^k, \tag{12}$$

se reflète sur des identités très simples dans une algèbre d'opérateurs contenant les opérateurs $q$, $z$ et $Q_k$ de multiplication par $q$, $z$ et $q^k$ respectivement, ainsi que de l'opérateur $S_k$ correspondant au décalage de l'indice $k$ et de l'opérateur $H_{q,z}$ de $q$-dilatation, dont l'action est

$$(H_{q,z}\cdot f)(z)=f(qz).$$

Dans le cadre des algèbres de Ore, ces opérateurs ne sont pas définis par leurs actions, mais par les *règles de commutation* suivantes entre polynômes de l'algèbre :

$$\begin{aligned}S_kP(q,z,Q_k)&=P(q,z,qQ_k)S_k,\\ H_{q,z}P(q,z,Q_k)&=P(q,qz,Q_k)H_{q,z},\end{aligned}$$

pour tout polynôme $P$ en $q$, $z$ et $Q_k$. Ainsi, la seule information nécessaire pour décrire le sommant $u_k(z)=q^{\binom{k}{2}}z^k$ au membre droit de (12) est un *système annulateur* comme

$$S_k - zQ_k,\qquad H_{q,z}-Q_k. \tag{13}$$

Sur ce système, il est apparent que la suite de fonctions $u$ est $\partial$-finie par rapport à $S_k$ et à $H_{q,z}$, en ce sens que le système

$$\{S_k^iH_{q,z}^j\cdot u,(i,j)\in\mathbb{N}^2\}$$

engendre un espace vectoriel de dimension finie sur le corps de fractions rationnelles $\mathbb{Q}(q,z,q^k)$. Cet espace est en effet de dimension 1 et admet la base $(u)$. Nous verrons au chapitre III que l'ensemble des fonctions $\partial$-finies est clos par addition et par produit et je décrirai de nouveaux algorithmes réalisant les opérations correspondantes. Encore dans le cas du $q$-calcul, une petite base de données d'opérateurs s'annulant sur $q^k$, $q^{k^2}$ et $z^k$ permettrait d'obtenir le système (13) de manière automatisée. Remarquons qu'à l'opposé des algorithmes généraux que je discute dans cette thèse, cette approche par base de donnée dépend lourdement de l'algèbre de fonctions étudiée.

Pour mettre en place les opérations de clôture, il nous faut en arriver dès le chapitre II à l'outil algorithmique central de cette thèse : les bases de Gröbner non commutatives. En faisant usage d'une extension de [59] due à Heinz Kredel [66], je montre que pour une grande classe d'algèbres de Ore, des bases de Gröbner (à gauche) peuvent être calculées par une version non commutative de l'algorithme de Buchberger, avec quelques restrictions sur les ordres de termes autorisés.

CHAPITRE I

# Algèbres d'opérateurs linéaires

Les algorithmes que je propose dans cette thèse s'appliquent aussi bien à la sommation qu'à l'intégration. En effet, ils s'expriment de manière unifiée en termes d'*opérateurs de Ore* qui généralisent les opérateurs de dérivation d'une part et les opérateurs aux différences d'autre part. Ce fait aux lourdes conséquences algorithmiques provient de ce que les opérateurs de Ore, en plus d'être des opérateurs linéaires, sont contraints dans leur action sur un produit. Plus précisément, ils satisfont une règle de Leibniz tordue (voir (19) ci-dessous) qui étend à la fois la règle de Leibniz classique pour les dérivations,

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

et la règle de Leibniz tordue pour l'opérateur de différence finie $\Delta$,

$$\Delta(fg)(x) = f(x+1)\Delta g(x) + (\Delta f(x))g(x),$$

où $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Mon but dans ce chapitre est la mise en place d'une représentation polynomiale des opérateurs linéaires de Ore qui soit compatible avec les manipulations symboliques que je projette de leur faire subir, et en particulier avec les calculs par bases de Gröbner. Cette traduction se fait en termes de *polynômes tordus*, extension classique des polynômes usuels dans laquelle l'indéterminée ne commute pas avec les coefficients (voir [24, exercice 3, §10], [36] pour une construction formelle générale et [75] pour l'article original).

Comme exemples de polynômes tordus, on retrouve les *algèbres de Weyl*, qui représentent des algèbres d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux et dont on verra qu'elles jouent un rôle privilégié dans cette étude, en liaison avec la théorie de l'holonomie au chapitre IV. Ces algèbres ne sont autres que les algèbres associatives non commutatives

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\rangle$$

données par les relations

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1 \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n, \tag{14}$$

toute autre paire d'indéterminées commutant [22, 37]. (En ce qui concerne la notation, l'écriture $\langle \dots \rangle$ rappelle la non commutativité des indéterminées.) Pour généraliser le cas des algèbres de Weyl tout en rendant plus effectif le cadre des polynômes tordus, j'introduis des algèbres que je baptise « *algèbres de Ore* », régies par des règles de commutations plus souples que (14).

L'attrait majeur de la représentation polynomiale des opérateurs linéaires dans les algèbres de Ore est qu'une théorie des *bases de Gröbner* y est encore disponible. L'étude de ce point fera l'objet du chapitre II.

## 1. Règles de Leibniz et commutations

La règle classique de Leibniz affirme que pour toutes fonctions $f$ et $g$ d'une algèbre différentielle,

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

En termes d'opérateurs, ceci s'énonce

$$Df = fD + f', \tag{15}$$

où $D$ désigne l'opérateur de dérivation par rapport à $x$ et où maintenant $f$ et $f'$ représentent respectivement les opérateurs de multiplication par les fonctions $f$ et $f'$. Dans une identité entre opérateurs comme (15), bien évidemment, le produit représente la composition des opérateurs. Dans le cas des différences finies, l'identité entre fonctions

$$(fg)(x+1) - (fg)(x) = f(x+1)\,[g(x+1) - g(x)] + [f(x+1) - f(x)]\,g(x)$$

se lit

$$\Delta \cdot (fg) = (S \cdot f)(\Delta \cdot g) + (\Delta \cdot f)g,$$

où $\Delta = S - 1$ en termes de l'opérateur de décalage $S$ défini par

$$(S \cdot f)(x) = f(x+1).$$

De façon équivalente en termes d'opérateurs, on a la commutation

$$\Delta f = (S \cdot f)\Delta + (\Delta \cdot f), \tag{16}$$

où $f$, $S \cdot f$ et $\Delta \cdot f$ doivent être vus comme les opérateurs de multiplication par les fonctions correspondantes. De façon similaire, l'opérateur de décalage satisfait la commutation suivante :

$$Sf = (S \cdot f)S, \tag{17}$$

qui reflète

$$[S \cdot (fg)](x) = f(x+1)g(x+1).$$

Les identités (15), (16) et (17) suggèrent un motif général pour les commutations :

$$\partial f = \sigma(f)\partial + \delta(f),$$

où, comme indiqué par les exemples ci-dessus, les opérateurs $\sigma$ et $\delta$ sont intimement liés à $\partial$. Par analogie avec la notation des dérivations par un prime, désignons par $f^\eta$ l'action d'un opérateur $\eta$ tel $\sigma$ ou $\delta$ sur $f$. Le motif de commutation ci-dessus devient donc :

$$\partial f = f^\sigma \partial + f^\delta. \tag{18}$$

Puisqu'on s'intéresse à des opérateurs $\partial$ qui sont *linéaires*, cette commutation suggère de choisir des $\sigma$ et $\delta$ linéaires. D'autres contraintes sur des $\sigma$ et $\delta$ convenables sont obtenues en considérant chaque membre de l'égalité

$$(\partial f)g = \partial(fg)$$

exprimant l'associativité de la composition. On obtient l'identité entre opérateurs

$$f^\sigma \partial g + f^\delta g = f^\sigma g^\sigma \partial + f^\sigma g^\delta + f^\delta g = (fg)^\sigma \partial + (fg)^\delta.$$

L'identification des coefficients en $\partial$ rend naturel d'exiger que $\sigma$ soit un homomorphisme d'anneau et que $\delta$ soit une $\sigma$-dérivation, c'est-à-dire que $\delta$ soit linéaire et satisfasse

$$(fg)^\delta = f^\sigma g^\delta + f^\delta g, \tag{19}$$

pour toutes fonctions $f$ et $g$.

L'identité (18) et les contraintes précédentes sur $\sigma$ et $\delta$ sont à la base d'un traitement général des opérateurs linéaires introduit par Oystein Ore sous le nom d'« *anneaux de polynômes tordus* » [75]. Les définitions et propriétés de base en sont rappelées en §2.

Les méthodes de calcul de sommes et d'intégrales définies par le *creative telescoping* qui seront vues dans les chapitres ultérieurs font jouer un rôle particulier aux indices de sommation et aux variables d'intégration et reposent de façon cruciale sur l'élimination de l'indéterminée correspondante. Bien que tous les algorithmes que je présenterai dans cette thèse aient une interprétation en termes d'opérateurs, l'existence, au sens de l'analyse, de fonctions ou suites sur lesquelles agissent les opérateurs n'est pas du tout nécessaire, les algorithmes peuvent tous se reformuler de manière algébrique en ayant recours à un nouveau niveau d'abstraction, au dessus de celui des algèbres d'opérateurs. Le cadre introduit est celui des algèbres de Ore, algèbres de polynômes non commutatifs, qui seront définies en §3. Ce cadre est particulièrement bien adapté à l'élimination dont il a été fait mention. Dans la traduction des problèmes de sommation et d'intégration dans le langage des polynômes non commutatifs, le rôle des suites et fonctions est alors joué par certains idéaux d'opérateurs linéaires, ou, de manière équivalente, par le générateur de certains modules sur une algèbre d'opérateurs.

À l'instar des algèbres de Weyl, les algèbres de Ore présentent dans le cas le plus fréquent des paires d'indéterminées $(X, \partial)$ régies par des lois de commutations telles (14), ou plus générales. L'indéterminée générique $\partial$ joue le rôle de la dérivation, du décalage ou plus généralement un *opérateur de Ore* [25, 75] ; l'indéterminée $X$ traduira le plus souvent un opérateur de multiplication. Par exemple, la règle de commutation (15) pour la dérivation par rapport à $x$ peut s'exprimer par

$$\partial P(X) = P(X)\partial + P'(X),$$

où l'action de $\partial$ est $\partial \cdot f = D_x \cdot f$ et celle de $X$ est $(X \cdot f)(x) = xf(x)$ et où $P'(X)$ est la dérivée formelle du polynôme $P(X)$. Dans le cas des

| Opérateur | $(\partial \cdot f)(x)$ | $(X \cdot f)(x)$ | $(\partial \cdot fg)(x)$ |
|---|---|---|---|
| Dérivation | $f'(x)$ | $xf(x)$ | $f(x)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| Décalage | $f(x+1)$ | $xf(x)$ | $f(x+1)(\partial \cdot g)(x)$ |
| Différence | $f(x+1) - f(x)$ | $xf(x)$ | $f(x+1)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| $q$-Dilatation[1] | $f(qx)$ | $xf(x)$ | $f(qx)(\partial \cdot g)(x)$ |
| $q$-Différence continue[1] | $f(qx) - f(x)$ | $xf(x)$ | $f(qx)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| $q$-Dérivation[1] | $\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$ | $xf(x)$ | $f(qx)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| $q$-Décalage[1] | $f(x+1)$ | $q^x f(x)$ | $f(x+1)(\partial \cdot g)(x)$ |
| $q$-Différence discrète[1] | $f(x+1) - f(x)$ | $q^x f(x)$ | $f(x+1)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| Opérateur eulérien | $xf'(x)$ | $xf(x)$ | $f(x)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| $e^x$-Dérivation | $f'(x)$ | $e^x f(x)$ | $f(x)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |
| Opérateur de Mahler[2] | $f(x^p)$ | $xf(x)$ | $f(x^p)(\partial \cdot g)(x)$ |
| Opérateur de Frobenius[3] | $f(x)^p$ | $xf(x)$ | $f(x)^p(\partial \cdot g)(x)$ |
| Différence divisée[4] | $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ | $xf(x)$ | $f(a)(\partial \cdot g)(x) + (\partial \cdot f)(x)g(x)$ |

TABLEAU 1. Opérateurs de Ore et leurs règles de Leibniz

différences finies, on a

$$\partial P(X) = P(X+1)\partial + P(X+1) - P(X),$$

où l'action de $\partial$ est cette fois $\partial \cdot f = \Delta_x \cdot f$ et celle de $X$ est ici encore le produit par $x$ :

$$(X \cdot f)(x) = xf(x).$$

Un autre exemple intéressant est l'opérateur de différence finie lorsqu'il est appliqué à des fonctions en $q$ et $q^x$ ; on a alors

$$\partial P(X) = P(qX)\partial + P(qX) - P(X),$$

où l'action de $X$ est maintenant

$$(X \cdot f)(q, q^x) = q^x f(q, q^x).$$

Le tableau 2 liste des exemples de paires d'indéterminées $(X, \partial)$ qui peuvent être manipulées dans ce cadre, tandis que le tableau 1 montre sur ces exemples le point de vue des opérateurs.

Après avoir rappelé la définition des anneaux de polynômes tordus et introduis les algèbres de Ore, j'explicite le lien entre ces algèbres et les opérateurs en §4. Comme l'a montré Ore [75], l'algorithme d'Euclide s'applique dans les anneaux de polynômes tordus et fournit une méthode algorithmique pour l'élimination de l'indéterminée $\partial$ entre deux polynômes. Ce point est décrit en §5. En §6, je passerai en revue plusieurs exemples, dont des applications au calcul de relations de contiguïté pour les fonctions hypergéométriques généralisées et le lien avec l'élimination dialytique de Sylvester.

[1] Pour un élément fixé $q$ de l'anneau de base qui ne soit pas racine de l'unité.
[2] Pour un entier $p \geq 2$.
[3] Pour des fonctions dans un anneau de caractéristique $p$ non nulle.
[4] Pour un élément fixé $a \neq x$ de l'anneau de base.

| Opérateur | $P^\sigma(X)$ | $P^\delta(X)$ | $\partial P(X)$ | $\partial X$ |
|---|---|---|---|---|
| Dérivation | $P(X)$ | $P'(X)$ | $P(X)\partial + P'(X)$ | $X\partial + 1$ |
| Décalage | $P(X+1)$ | $0$ | $P(X+1)\partial$ | $(X+1)\partial$ |
| Différence | $P(X+1)$ | $(\Delta \cdot P)(X)$ | $P(X+1)\partial + (\Delta \cdot P)(X)$ | $(X+1)\partial + 1$ |
| $q$-Dilatation | $P(qX)$ | $0$ | $P(qX)\partial$ | $qX\partial$ |
| $q$-Différence continue | $P(qX)$ | $P(qX) - P(X)$ | $P(qX)\partial + P(qX) - P(X)$ | $qX\partial + (q-1)X$ |
| $q$-Dérivation | $P(qX)$ | $\frac{P(qX)-P(X)}{(q-1)X}$ | $P(qX)\partial + \frac{P(qX)-P(X)}{(q-1)X}$ | $qX\partial + 1$ |
| $q$-Décalage | $P(qX)$ | $0$ | $P(qX)\partial$ | $qX\partial$ |
| $q$-Différence discrète | $P(qX)$ | $P(qX) - P(X)$ | $P(qX)\partial + P(qX) - P(X)$ | $qX\partial + (q-1)X$ |
| Opérateur eulérien | $P(X)$ | $XP'(X)$ | $P(X)\partial + XP'(X)$ | $X\partial + X$ |
| $e^x$-Dérivation | $P(X)$ | $XP'(X)$ | $P(X)\partial + XP'(X)$ | $X\partial + X$ |
| Opérateur de Mahler | $P(X^p)$ | $0$ | $P(X^p)\partial$ | $X^p\partial$ |
| Op. de Frobenius[5] | $P(X^p)$ | $0$ | $P(X^p)\partial$ | $X^p\partial$ |
| Différence divisée | $P(a)$ | $\frac{P(X)-P(a)}{X-a}$ | $P(a)\partial + \frac{P(X)-P(a)}{X-a}$ | $a\partial + 1$ |

TABLEAU 2. Algèbres de Ore et leurs règles de commutation

## 2. Opérateurs de Ore, anneaux de polynômes tordus

Parce que les algèbres d'opérateurs qui interviennent dans cette étude sont des algèbres non commutatives, j'adopte dans tout ce qui suit la convention suivante.

CONVENTION (Anneau, corps, algèbre). *Sauf mention explicite du contraire, les termes « anneau » et « corps » feront toujours référence à des anneaux et des corps* a priori *non commutatifs. En revanche, je retiens la convention usuelle qu'une algèbre est définie sur un anneau commutatif $\mathbb{A}$, de manière à obtenir une multiplication $\mathbb{A}$-bilinéaire.*

Rappelons que, par analogie avec la notation des dérivations par un prime, la notation $a^\eta$ désigne l'action d'un endomorphisme $\eta$ d'un anneau $\mathbb{A}$ sur tout élément $a$ de $\mathbb{A}$. Une application additive $\delta$ de $\mathbb{A}$ dans lui-même satisfaisant la règle de Leibniz

$$(ab)^\delta = ab^\delta + a^\delta b$$

pour tout $a, b \in \mathbb{A}$ est appelée une *dérivation* ou un *opérateur de dérivation* de $\mathbb{A}$. Par ailleurs, un endomorphisme $\sigma$ de l'anneau $\mathbb{A}$ est appelé une *différence* ou un *opérateur à différence de* $\mathbb{A}$. Chaque différence $\sigma$ induit un opérateur $\theta = \sigma - 1$ qui satisfait la règle de Leibniz tordue

$$(ab)^\theta = a^\sigma b^\theta + a^\theta b$$

pour tout $a, b \in \mathbb{A}$. On s'intéresse plus généralement aux paires d'applications $(\sigma, \delta)$ qui satisfont une telle règle de Leibniz tordue, ce qui donne lieu à la définition qui suit.

DÉFINITION 1 (Opérateurs de Ore, $\sigma$-dérivations). *Étant donné un anneau $\mathbb{A}$ et une différence $\sigma$ de $\mathbb{A}$, une application additive $\delta$ de $\mathbb{A}$ dans lui-même est appelée un* opérateur de Ore*, ou une $\sigma$-*dérivation *de $\mathbb{A}$, quand* [25,

[5]Pour un polynôme $P$ en caractéristique $p$ non nulle, $P(X)^p = P(X^p)$.

36, 75]

$$(ab)^{\delta} = a^{\sigma} b^{\delta} + a^{\delta} b \qquad \textit{pour tout } a, b \in \mathbb{A}. \tag{20}$$

EXEMPLE. Cette définition étend le cas des dérivations classiques $\eta$. Dans ce cas, on considère en effet la paire $(1, \eta)$ où 1 désigne l'identité.

EXEMPLE. Comme dans le cas des dérivations classiques, un rôle particulier est joué par les *$\sigma$-dérivations intérieures*. Soit $s$ fixé dans l'anneau $\mathbb{A}$ muni d'une différence $\sigma$. Alors l'application $\delta$ définie par

$$a^{\delta} = a^{\sigma} s - sa$$

est une $\sigma$-dérivation dite *intérieure*. Toute $\sigma$-dérivation qui n'est pas intérieure est dite *extérieure*.

La donnée d'une $\sigma$-dérivation fournit immédiatement le cadre adapté à la représentation polynomiale des opérateurs linéaires dont j'aurai besoin ([24, exercice 3, §10],[36]). Une des raisons de l'étude des anneaux de polynômes tordus dont la définition va suivre est que les opérations algorithmiques qui peuvent y être effectuées ne nécessitent d'être implantés qu'une seule fois, et valent ensuite aussi bien pour les opérateurs différentiels linéaires, que pour les linéaires aux différences ou pour leurs $q$-analogues.

Étant donné une indéterminée $u$ ainsi qu'un anneau $\mathbb{A}$ muni d'un endomorphisme injectif $\sigma$ et d'une $\sigma$-dérivation $\delta$, j'aimerais définir un anneau de polynômes non commutatifs muni de l'addition usuelle et d'un produit déduit par associativité à partir de la règle de commutation

$$ua = a^{\sigma} u + a^{\delta} \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{A}, \tag{21}$$

où $u$ joue le rôle du $\partial$, opérateur générique, dans l'introduction. En règle générale, cet anneau ne pourra pas être une algèbre sur $\mathbb{A}$. Je contourne ce détail technique par la définition classique qui suit et qui a en outre l'avantage de ne pas se restreindre au cas où $u$ est une indéterminée.

DÉFINITION 2 (Anneaux de polynômes tordus). *Soit $\mathbb{T}$ un anneau et $\mathbb{A}$ un sous-anneau. Supposons donné $u \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{A}$ tel que tout élément $s$ du sous-anneau $\mathbb{S}$ de $\mathbb{T}$ engendré par $\mathbb{A}$ et $u$ s'écrive de manière unique sous la forme $s = a_0 + \cdots + a_n u^n$ pour des $a_i \in \mathbb{A}$ (à des termes nuls près). Supposons en outre que la fonction $\deg s = \max\{i, \quad a_i \neq 0\}$ ait les propriétés d'un degré, c'est-à-dire que*

- $\deg s \geq 0$ *si $s$ est non nul,* $\deg 0 = -\infty$ *;*
- $\deg(s - t) \leq \max(\deg s, \deg t)$ *;*
- $\deg(st) = \deg s + \deg t$.

*En d'autres termes, on a pour tout $a \in \mathbb{A}$ la commutation*

$$ua = a^{\sigma} u + a^{\delta} \qquad \textit{pour } a^{\sigma}, a^{\delta} \in \mathbb{A}$$

*et l'on montre que $\mathbb{A}$ n'a pas de diviseur de zéro, que $\sigma$ en est un endomorphisme injectif et $\delta$ une $\sigma$-dérivation. L'anneau $\mathbb{S}$ est alors appelé* anneau de polynômes tordus *et noté* $\mathbb{A}[u; \sigma, \delta]$.

EXEMPLE. Lorsque $\mathbb{A}$ est commutatif, l'anneau $\mathbb{S} = \mathbb{A}[u; \sigma, \delta]$ est isomorphe au quotient de la $\mathbb{A}$-algèbre associative libre en l'indéterminée $u$ par les relations (21). En particulier, lorsqu'en outre $\sigma$ est l'identité et $\delta$ la dérivation triviale 0, l'anneau de polynômes tordus $\mathbb{A}[u; 1, 0]$ est en fait l'anneau de polynômes commutatifs usuels $\mathbb{A}[u]$.

L'exemple qui suit fournit la construction des anneaux de polynômes tordus non commutatifs d'une manière très analogue à la construction classique par suites presque nulles des anneaux de polynômes commutatifs en une seule indéterminée.

EXEMPLE. Soient $u$ une indéterminée et $\mathbb{A}$ un anneau muni d'un endomorphisme injectif $\sigma$ et d'une $\sigma$-dérivation $\delta$. Notons $\mathbb{S} = \mathbb{A}^{(\mathbb{N})}$ le $\mathbb{A}$-module à gauche des suites presque nulles de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{A}$, c'est-à-dire nulles sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice, et $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa base canonique. Alors, la formule

$$(au^n)(bu^m) = \begin{cases} (au^{n-1})(b^\sigma u^{m+1} + b^\delta u^m) & \text{si } n \geq 1, \\ (ab)u^m & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

définit par récurrence une multiplication dans $\mathbb{S}$ (c'est-à-dire une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire). Autrement dit, cette formule étend l'identité (21) par associativité. L'anneau $\mathbb{S}$ est alors un anneau de polynômes tordus, à savoir

$$\mathbb{A}[u; \sigma, \delta].$$

EXEMPLE. Notons $\mathcal{F}$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des fonctions holomorphes de la variable complexe $z$. Cette algèbre contient l'algèbre $\mathbb{A} = \mathbb{C}[z]$ des fonctions polynomiales. Soit $\mathbb{T} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ l'algèbre des endomorphismes linéaires de $\mathcal{F}$. En particulier, l'opérateur linéaire $\partial$ de dérivation par rapport à $z$ est élément de $\mathbb{T}$, et $\mathbb{A}$ peut être vu comme sous-algèbre de $\mathbb{T}$ lorsqu'un polynôme est identifié à l'opérateur de multiplication par ce polynôme. Alors la sous-algèbre de $\mathbb{T}$ engendrée sur $\mathbb{C}$ par $\mathbb{A}$ et $\partial$ est l'anneau de polynômes tordus $\mathbb{A}[\partial; 1, \partial]$.

EXEMPLE. Soit maintenant l'espace vectoriel

$$\mathcal{F}' = \mathbb{C}\cos z \oplus \mathbb{C}\sin z.$$

La dérivation $\partial$ est maintenant une application $\mathbb{C}$-linéaire qui vérifie

$$\partial^2 + 1 = 0$$

sur $\mathcal{F}'$. Dans ce nouveau cas, la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{F}'$ engendrée par $\partial$ sur $\mathbb{C}$ n'est pas un anneau de polynômes tordus en $\partial$, puisqu'elle est isomorphe à

$$\mathbb{C}[u]/(u^2 + 1),$$

sur lequel on ne peut définir de degré en $u$. Ceci n'interdit pas de calculer avec les fonctions sin et cos, mais impose de voir $\mathcal{F}'$ comme sous-algèbre d'une algèbre plus grande, et de travailler par exemple dans le cadre de l'exemple précédent.

L'existence d'une fonction degré vérifiant les propriétés habituelles a de fortes conséquences quant à la structure des anneaux de polynômes tordus. En particulier, ils sont euclidiens lorsque l'anneau de base est un corps, ce que j'étudierai plus en détail en §5. Pour l'heure, l'existence d'un degré fournit la proposition suivante [36, p. 35] qui permet la construction itérée d'anneaux de polynômes tordus en plusieurs indéterminées.

PROPOSITION 1. *L'anneau de polynômes tordus $\mathbb{S} = \mathbb{A}[u;\sigma,\delta]$ sur un anneau intègre $\mathbb{A}$ est encore un anneau intègre. Si $\mathbb{A}$ est noethérien à gauche, il en est de même de $\mathbb{S}$.*

Le premier point est trivial. Le second justifiera la terminaison de l'algorithme de Buchberger pour le calcul de bases de Gröbner, au chapitre II.

En caractéristique non nulle, une autre conséquence de l'existence d'un degré est d'exclure certains anneaux d'opérateurs qui paraîtraient pourtant naturels, comme suggéré par le contre-exemple suivant.

EXEMPLE. Soit $\mathbb{F}_p$ le corps à $p$ éléments. La sous-algèbre de $\operatorname{End}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_p[x]$ engendrée par les multiplications à gauche par les éléments de $\mathbb{F}_p[x]$ et par la dérivation $\partial$ sur $\mathbb{F}_p[x]$ n'est pas un anneau de polynômes tordus, car $\partial^p$ y est nul. En revanche, la $\mathbb{F}_p$-algèbre associative sur les indéterminées $x$ et $\partial$ régie par $\partial x = x\partial + 1$ est bien un anneau de polynômes tordus. Le premier cas correspond à un cadre d'opérateurs linéaires, où $\partial$, qui est une dérivation classique, est un opérateur de Ore ; le second à un cadre formel, en dehors de toute interprétation en termes d'opérateurs linéaires.

## 3. Algèbres de Ore

Intéressons-nous maintenant au cas de plusieurs indéterminées. En choisissant des anneaux successifs appropriés, il est possible d'utiliser la proposition précédente en conjonction avec la définition 2 pour construire divers anneaux de polynômes tordus en plusieurs indéterminées. Cependant, la construction générale d'un anneau $\mathbb{B}[u_2;\sigma_2,\delta_2]$ pour $\mathbb{B} = \mathbb{A}[u_1;\sigma_1,\delta_1]$ autorise la non commutation de $u_1$ et de $u_2$, alors que dans la pratique, nous ne rencontrerons jamais que des $\sigma$-dérivations qui commutent deux à deux. En fait, la commutation entre les $u_i$ sera un point crucial pour les traitements ultérieurs par bases de Gröbner, au chapitre II. Pour cette raison, j'explicite dans la définition suivante reprise de [35] les contraintes qui imposent cette commutation.

DÉFINITION 3 (Algèbres de Ore). *Soient $\mathbb{K}$ un corps* commutatif *et $\mathbb{A}$ une algèbre sur $\mathbb{K}$. J'appelle l'anneau de polynômes tordus*

$$\mathbb{A}[u_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[u_r;\sigma_r,\delta_r]$$

*une* algèbre de Ore *sur $\mathbb{K}$, et je le note $\mathbb{A}[\mathbf{u};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$, lorsque les $\sigma_i$ et $\delta_j$ commutent pour $1 \leq i,j \leq r$ avec $i \neq j$, et vérifient $u_j^{\sigma_i} = u_j$, $u_j^{\delta_i} = 0$ pour $i > j$. De plus, je conviens de dire que l'algèbre de Ore est* polynomiale, *et de la* *noter* $\mathbb{K}[\mathbf{x}][\mathbf{u};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$*, lorsque* $\mathbb{A}$ *est un anneau de polynômes commutatifs*

$$\mathbb{A}=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_s].$$

Remarquons que cette définition n'exige ni que $\mathbb{A}$ soit commutative, ni que les éléments de $\mathbb{A}$ commutent avec les $u_i$. Ainsi, le cas d'une algèbre de Ore $\mathbb{Q}(\mathbf{x})[\mathbf{u};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$ est pris en compte par $\mathbb{A}=\mathbb{Q}(\mathbf{x})$ et $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$.

Pour des raisons de commodité, je désignerai très souvent dans les applications une algèbre de Ore $\mathbb{A}[\mathbf{u};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$ par la notation itérée d'un anneau de polynômes tordus $\mathbb{A}[u_1;\sigma_1,\delta_1]\cdots[u_r;\sigma_r,\delta_r]$ sans plus préciser les conditions qui permettent la commutation des $u_i$.

Exemple. Pour un corps $\mathbb{K}$, les algèbres de Weyl

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n][\partial_1;1,D_{x_1}]\cdots[\partial_n;1,D_{x_n}] \tag{22}$$

sont un cas particulier d'algèbres de Ore polynomiales obtenues lorsque les $\partial_i$ ont les mêmes règles de commutation (14) que les opérateurs aux dérivées partielles usuels correspondants, $D_{x_i}$.

Je reprends dorénavant la notation d'une indéterminée générique $\partial$ qui pourra tantôt représenter un opérateur de dérivation, un opérateur de décalage, ou plus généralement un opérateur de Ore. Des exemples d'algèbres de Ore sont donnés par le tableau 2. Dans tous ces cas, l'algèbre de Ore est de la forme $\mathbb{A}[\partial;\sigma,\delta]$ où $\mathbb{A}$ contient $\mathbb{Q}(X)$. Par associativité et avec l'hypothèse supplémentaire que $\sigma$ et $\delta$ commutent, la relation (20) entraîne alors que

$$(X^p)^\delta = X^\delta\sum_{k=0}^{p-1}(X^\sigma)^k X^{p-1-k}\qquad\text{pour tout } p\geq 1. \tag{23}$$

Une formule similaire mais plus compliquée s'obtient aisément lorsque $\sigma$ et $\delta$ ne commutent pas. Ceci montre que les applications $\sigma$ et $\delta$ sont complètement déterminées sur $\mathbb{Q}[X]$ par leurs valeurs en $X$. En d'autres termes, la dernière colonne du tableau 2 est suffisante pour déterminer les trois précédentes. En tenant compte de l'injectivité de $\sigma$, les opérateurs $\sigma$ et $\delta$ s'étendent de manière unique à $\mathbb{Q}(X)$ comme on se rend compte en développant

$$\partial=\partial f f^{-1},$$

d'où l'on tire

$$\partial f^{-1}=(f^\sigma)^{-1}\,\partial-(f^\sigma)^{-1}\,f^\delta f^{-1}.$$

Remarquons que des algèbres d'opérateurs différentes peuvent partager la même règle de commutation, comme par exemple l'opérateur eulérien et la $e^x$-dérivation, dont les actions sont données en tables 1 et 2.

Observons plus en détail les cas où $\sigma$ et $\delta$ commutent. Reprenons la formule (23) dans le cas $\sigma$ différent de l'identité. Elle se récrit alors :

$$(X^p)^\delta = X^\delta\frac{(X^p)^\sigma-X^p}{X^\sigma-X}.$$

Par linéarité, et en posant

$$\lambda = \frac{X^\delta}{X^\sigma - X},$$

on obtient donc $\delta = \lambda(\sigma - 1)$. En revanche, si $\sigma = 1$, la formule (23) donne :

$$(X^p)^\delta = pX^{p-1}X^\delta.$$

Par linéarité, en posant $\lambda = X^\delta$, on a donc $\delta = \lambda \frac{d}{dX}$. En résumé, on a la proposition classique suivante [36].

Proposition 2. *Soit $\mathbb{O} = \mathbb{Q}[x][\partial; \sigma, \delta]$ une algèbre de Ore pour laquelle $\sigma$ et $\delta$ commutent. Deux cas sont alors possibles :*

1. *$\delta = \lambda \frac{d}{dx}$ pour $\lambda$ fixé dans $\mathbb{Q}[x]$, si $\sigma = 1$ ;*
2. *$\delta = \lambda(\sigma - 1)$ pour $\lambda$ fixé dans $\mathbb{Q}[x]$, si $\sigma \neq 1$.*

Pour terminer cette section, je formule quelques remarques d'ordre algorithmique sur l'implantation d'un produit rapide dans les algèbres de Ore. Sans perte de généralité, je me restreins à un unique opérateur de Ore $\partial$ et au cas d'algèbres de la forme $\mathbb{K}[x][\partial; \sigma, \delta]$. Tout d'abord, le produit naïf terme à terme de deux polynômes

$$P = \sum_{i=0}^{n} p_i \partial^i \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{i=0}^{n} q_i \partial^i$$

sous la forme

$$PQ = \sum_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}} p_i (\partial^i q_j) \partial^j$$

requiert l'addition des $O(n^2)$ polynômes de la forme $p_i(\partial^i q_j)\partial^j$, chacun faisant intervenir $O(n)$ termes et étant obtenu en $O(n)$ multiplications dans $\mathbb{K}[x]$. Le produit naïf requiert donc grossièrement $O(n^3)$ multiplications dans $\mathbb{K}[x]$ et a ainsi une complexité au pire en $O(n^3)$.

Une première méthode consiste à expliciter le produit sous la forme

$$PQ = \sum_{i=0}^{n} p_i (\partial^i Q).$$

Le calcul de $\partial^{i+1}Q$ à partir de $\partial^i Q$ coûte $O(n)$ applications de $\sigma$ et $\delta$, puis le calcul de $p_i(\partial^i Q)$ à partir de $\partial^i Q$ coûte $O(n)$ multiplications dans $\mathbb{K}[x]$. On obtient ainsi une complexité grossière au pire en $O(n^2)$ multiplications dans $\mathbb{K}[x]$.

Une seconde m'a été suggérée par Nobuki Takayama [102] et m'a permis d'améliorer grandement l'efficacité de mes programmes en Maple. Tout d'abord, dans le cas différentiel de l'algèbre $\mathbb{K}[x][\partial; 1, D_x]$, on a pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ :

$$\partial^r P(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(D_x^k \cdot P\right)(x) \partial^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \left(D_x^k \cdot P\right)(x) D_\partial^k(\partial^r).$$

Puis, pour deux polynômes quelconques $P$ et $Q$ de l'algèbre de Weyl :

$$P(x,\partial)Q(x,\partial) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \left(D_\partial^k \cdot P\right)(x,\partial) * \left(D_x^k \cdot Q\right)(x,\partial), \tag{24}$$

où $*$ est le produit *commutatif* usuel sur l'anneau de polynômes commutatifs $\mathbb{K}[x,\partial]$. La formule reste la même si on remplace les polynômes en $x$ par des fractions rationnelles en $x$. Dans les deux cas, le produit de l'algèbre par la formule (24) demande $O(n)$ multiplications dans $\mathbb{K}[x,\partial]$, respectivement dans $\mathbb{K}(x)[\partial]$. Il est ainsi plus efficace qu'un calcul par produits monôme à monôme, car il évite d'une manière simple le recalcul ou le stockage des dérivées successives de $Q$ par rapport à $x$.

Dans le cas d'une algèbre $\mathbb{K}[x][\partial;\sigma,\delta]$ sur une $\sigma$-dérivation $\delta$ telle que *$\sigma$ et $\delta$ commutent*, on a, pour des entiers quelconques $r$ et $p$ :

$$\partial^r x^p = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left[\sigma^{r-k} \cdot \left(\delta^k \cdot x^p\right)\right] \partial^{r-k}.$$

Puis, pour deux polynômes quelconques

$$P(x,\partial) = \sum_{i=0}^{d} p_i(x)\partial^i$$

et $Q$ de l'algèbre :

$$P(x,\partial)Q(x,\partial) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{d} p_i(x) \left[(\sigma^{i-k}\delta^k \cdot Q)(x,\partial)\right] (D_\partial^k \cdot \partial^i).$$

La formule est plus technique, mais permet encore d'implanter un produit efficace.

En conclusion, la comparaison des deux algorithmes en $O(n^2)$ demande de comparer les multiplications dans $\mathbb{K}[x]$ et dans $\mathbb{K}[x,\partial]$. Les constantes en jeu dépendent alors fortement du système de calcul formel employé.

## 4. Action d'une algèbre de Ore, idéaux annulateurs

Dans cette étude, j'interprète les algèbres de Ore $\mathbb{A}[\boldsymbol{\partial};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$ comme des anneaux d'opérateurs. Ceci est réalisé quand $\partial_i$, $\sigma_i$ et $\delta_i$ agissent en tant qu'endomorphismes linéaires sur une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{F}$ de fonctions, séries entières, suites, germes de fonctions ou de suites, distributions ou autres.

Convention (Fonction). *Devant la similarité de traitement entre tous ces cas, je conviens d'utiliser indifféremment le mot « fonction » pour toutes sortes d'objets sur lesquels je ferai agir des opérateurs linéaires.*

Plus généralement, il serait possible de faire agir les algèbres de Ore sur des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et une partie de mon étude serait encore possible dans ce cadre, mais la restriction pour $\mathcal{F}$ d'être un anneau s'impose dans mes algorithmes qui calculent sur des produits de fonctions. Soit donc $\mathcal{F}$ une algèbre de fonctions sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, et notons $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ l'algèbre des endomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathcal{F}$.

Je vais maintenant décrire une représentation en tant qu'anneaux de polynômes tordus de certaines sous-algèbres (sur $\mathbb{K}$) de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ engendrées par des opérateurs de Ore. Afin d'autoriser des opérateurs linéaires sur différents domaines de coefficients, j'introduis, comme dans la définition des algèbres de Ore, une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{A}$. Dans la pratique, il s'agira le plus souvent d'un anneau de polynômes $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ ou d'un corps de fractions rationnelles $\mathbb{A} = \mathbb{K}(\mathbf{x})$. De plus, je fais l'hypothèse que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{A}$-module (à gauche). Très fréquemment, $\mathbb{A}$ sera en fait même contenue dans $\mathcal{F}$, si bien que $\mathbb{A}$ pourra aussi être vue comme sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ par l'identification de $a \in \mathbb{A}$ et de l'opérateur de multiplication (à gauche) par $a$. Considérant les divers types d'opérateurs de Ore apparaissant dans les applications, il est naturel de distinguer entre :

1. le cas d'une paire $(\sigma, \delta)$ correspondant à un opérateur de Ore général ;
2. le cas particulier $(\sigma, \theta)$ pour $\theta = \sigma - 1$ correspondant à une différence.

Dans les deux cas, on recherche une représentation polynomiale de la sous-algèbre $\mathbb{S}$ de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ engendrée par $\delta$ et $\mathbb{A}$ ; dans le second cas, cette sous-algèbre coïncide avec celle engendrée par $\sigma$ et $\mathbb{A}$. Dans le cas général, on met donc l'accent sur la $\sigma$-dérivation $\delta$ et une représentation polynomiale s'obtient en traduisant l'action de $\delta$ par $\partial \cdot f = f^{\delta}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Quand de plus $\sigma$ et $\delta$ se réduisent à une différence et à une $\sigma$-dérivation de $\mathbb{A}$, on obtient une représentation de l'algèbre d'endomorphismes $\mathbb{S}$ par l'algèbre de Ore $\mathbb{A}[\partial; \sigma, \delta]$. Dans le cas particulier, l'accent est mis sur la différence $\sigma = \theta + 1$ par l'action $\partial \cdot f = f^{\sigma}$ pour $f \in \mathcal{F}$. On considère alors l'algèbre de Ore $\mathbb{A}[\partial; \sigma, 0]$ soumise à la commutation

$$\partial a = a^{\sigma} \partial \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{A},$$

qui est bien isomorphe à $\mathbb{S}$.

Dans les cas de figure précédents, l'identité (21) s'étend en la règle de Leibniz suivante pour les produits :

$$\partial_i \cdot (fg) = f^{\sigma_i} \partial_i \cdot g + f^{\delta_i} g \qquad \text{pour tous } f, g \in \mathcal{F}.$$

La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{F}$ est donc en outre un $\mathbb{O}$-module à gauche, le produit dans $\mathbb{O}$ agissant par la composition des opérateurs. Les actions des opérateurs correspondant aux algèbres de Ore les plus importantes sont données au tableau 1.

Cette interprétation motive l'étude des idéaux des algèbres de Ore : pour un module de fonctions $\mathcal{F}$ sur une algèbre de Ore $\mathbb{O}$ et pour une fonction $f \in \mathcal{F}$, l'ensemble des opérateurs qui annulent cette fonction $f$ a la structure algébrique d'un *idéal à gauche*. Il est classiquement appelé *idéal annulateur* de $f$ et noté $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}}\, f$. Cette structure algébrique est à l'origine de l'application de méthodes de bases de Gröbner. La plupart des opérations sur les fonctions que j'étudierai dans les chapitres III, V et VI consisteront à trouver des éléments de cet idéal qui vérifient des propriétés spéciales, ou à trouver des éléments de l'idéal annulateur d'une fonction reliée à $f$.

De façon équivalente, l'ensemble $\mathbb{O}\cdot f$ obtenu par l'action de l'algèbre de Ore $\mathbb{O}$ sur la fonction $f$ est un $\mathbb{O}$-module à gauche, en fait, un sous-module à gauche de $\mathcal{F}$. La structure de ce module $\mathbb{O}\cdot f$ garde trace des dépendances entre les dérivées $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}\cdot f$ de $f$. Plus précisément, $\mathbb{O}\cdot f \simeq \mathbb{O}/\operatorname{Ann}_{\mathbb{O}} f$. Du point de vue calculatoire, tous les calculs ont lieu dans ce module. Bien que tous les algorithmes que je présenterai dans cette thèse aient une interprétation en termes d'opérateurs, l'existence d'une algèbre concrète $\mathcal{F}$ n'est pas vraiment nécessaire : les algorithmes peuvent tous se reformuler au niveau des idéaux $\mathfrak{I}$ de $\mathbb{O}$ et des modules $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$. Le rôle de la fonction $f$ est alors joué par le générateur 1 de $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$. En d'autres termes, par « fonction », j'entends très généralement tout élément d'un module sur une algèbre de Ore.

Exemple. En tant qu'éléments d'une grande classe de polynômes orthogonaux, les polynômes de Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+a}{k}\binom{n+b}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

sont solutions d'une équation différentielle, d'une équation de récurrence et d'une équation mixte différentielle aux différences. Plus précisément, considérons la $\mathbb{C}$-algèbre des séries formelles de Laurent $\mathcal{F} = \mathbb{C}(n,a,b)((z))$ sur laquelle nous faisons agir l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{A}[S_n; S_n, 0][D_z; 1, D_z] \qquad \text{où} \quad \mathbb{A} = \mathbb{C}(n,a,b,z).$$

Pour cette action, les opérateurs

$$\begin{aligned} G_1 = {} & 2(n+2)(n+a+b+2)(2n+a+b+2)S_n^2 \\ & - \big((2n+a+b+3)\left(a^2-b^2\right) \\ & \quad +(2n+a+b+2)(2n+a+b+3)(2n+a+b+4)x\big)\, S_n \\ & + 2(n+a+1)(n+b+1)(2n+a+b+4), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} G_2 = {} & (2n+a+b+2)\left(1-x^2\right)S_nD_x \\ & - (n+1)\left[a-b-(2n+a+b+2)x\right]S_n \\ & - 2(n+a+1)(n+b+1), \end{aligned} \tag{26}$$

$$G_3 = (1-x^2)D_x^2 + [b-a-(a+b+2)x]D_x + n(n+a+b+1). \tag{27}$$

annulent les $P_n^{(a,b)}(x)$ [41].

Ces opérateurs sont la seule information que mes algorithmes utiliseront pour traiter des polynômes de Jacobi. Les conditions initiales servant à distinguer les $P_n^{(a,b)}(x)$ des autres solutions du système (25–27) devront être traitées de manière séparée, si nécessaire. Notons que l'information des polynômes $G_1$, $G_2$ et $G_3$ est en fait redondante, et je donnerai plusieurs algorithmes pour déduire $G_1$ ou $G_3$ des autres.

Enfin, il est important d'observer que les polynômes (25–27) peuvent être vus dans $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$, mais peuvent aussi bien être vus dans l'algèbre de Ore polynomiale $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ obtenue quand $\mathbb{A} = \mathbb{C}(a,b)[n,z]$. Cette distinction sera cruciale dans le traitement par bases de Gröbner : l'élimination des indéterminées $n$ ou $z$ peut se traiter par des méthodes de bases de Gröbner dans $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ mais pas dans $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$.

Parce que le plus souvent dans la pratique, l'indéterminée $X$ représente soit l'opérateur de multiplication par $x$, soit l'opérateur de multiplication par $q^x$, je n'hésiterai pas dans la suite à écrire $x$ ou $q^x$, respectivement, en lieu et place de $X$. C'est le cas dans les exemples qui suivent.

Exemple. L'algèbre de Ore $\mathbb{Q}(q)[n,q^n][S_n;S_n,0]$ munie de la règle de commutation

$$S_n n^k (q^n)^\ell = (n+1)^k q^\ell (q^n)^\ell S_n$$

convient particulièrement à certaines formes de $q$-calcul. Ainsi, la suite

$$u_n = n! q^{n^2}$$

est annulée par

$$S_n - q(n+1)\,(q^n)^2 .$$

Exemple. Dans l'algèbre de Ore $\mathbb{Q}(q)[z,q^k][S_k;S_k,0][H_{q,z};\sigma,\delta]$ construite sur les relations

$$S_k P(q,z,q^k) = P(q,z,qq^k)S_k,$$
$$H_{q,z} P(q,z,q^k) = P(q,qz,q^k)H_{q,z},$$

et sur les applications $\sigma$ et $\delta$ définies dans le tableau 2 par

$$P^\sigma(z) = P(qz), \qquad \text{et} \qquad P^\delta(z) = \frac{P(qz)-P(z)}{(q-1)z},$$

la fonction $q^{\binom{k}{2}} z^k$ est annulée par les opérateurs

$$S_k - zq^k, \qquad H_{q,z} - q^k.$$

Enfin, dans la traduction des opérateurs linéaires en polynômes d'algèbres de Ore, la possibilité qu'a la $\mathbb{K}$-algèbre des fonctions $\mathcal{F}$ de n'être qu'un $\mathbb{A}$-module (à gauche) sans que $\mathbb{A}$ soit effectivement une sous-algèbre de $\mathcal{F}$ me permet de considérer des algèbres d'opérateurs dont les coefficients n'agissent pas par une simple multiplication. C'est le cas de l'exemple important qui suit et que je reprendrai au chapitre IV lors de la définition des *fonctions holonomes*.

Exemple. L'interprétation la plus fréquente des algèbres de Weyl $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, qui sont définies formellement par les commutations (22), est celle d'algèbres d'opérateurs différentiels linéaires agissant sur les fonctions continues $f$ du $n$-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ de variables complexes. Nous allons les faire agir sur diverses algèbres de suites de $n$ indices à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$$

l'algèbre des suites de $n$ indices entiers *relatifs* $(k_1, \ldots, k_n)$. Pour chaque $i$, définissons les actions de $x_i$ et de $\partial_i$ sur une suite $u$ par

$$(x_i \cdot u)(k_1, \ldots, k_n) = u(k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_n),$$
$$(\partial_i \cdot u)(k_1, \ldots, k_n) = (k_i + 1)u(k_1, \ldots, k_i + 1, \ldots, k_n).$$

Autrement dit, $x_i$ agit comme un décalage inverse, tandis que $\partial_i$ agit comme un multiple du décalage avant. Cette action est bien compatible avec le produit de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, car

$$\partial_i \cdot (x_i \cdot u) = x_i \cdot (\partial_i \cdot u) + u,$$

ce qui fait de $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ un $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$-module.

Soit maintenant $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ l'algèbre des germes à l'infini de suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^n}$, c'est-à-dire l'algèbre suites de $n$ indices entiers *positifs* $(k_1, \ldots, k_n)$ et définies à un nombre fini de valeurs près. Pour chaque $i$, définissons les actions de $x_i$ et de $\partial_i$ de manière analogue au cas précédent. On obtient encore un $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$-module.

Dans les deux cas, il est en outre clair que

$$\begin{aligned}
&[\partial_i \cdot (uv)](k_1, \ldots, k_n) \\
&\qquad = (k_i + 1)u(k_1, \ldots, k_i + 1, \ldots, k_n)v(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n) \\
&\qquad + (k_i + 1)u(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n)v(k_1, \ldots, k_i + 1, \ldots, k_n),
\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_i \cdot (uv) = (\partial_i \cdot u)v + u(\partial_i \cdot v).$$

Chaque $\partial_i$ agit donc comme une dérivation de $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ et de $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$. C'est cette action, surprenante au premier abord, d'une algèbre d'opérateurs *différentiels* sur un module de *suites* qui sera utilisée en §5 au chapitre IV pour définir la notion d'holonomie sur les suites.

## 5. Division euclidienne

Deux algorithmes vont me permettre d'effectuer la plupart de mes opérations dans les anneaux de polynômes tordus. Pour être totalement effectifs, je les appliquerai le plus souvent dans des algèbres de Ore. Le premier est un algorithme de division euclidienne à gauche qui conduit à un algorithme du p.g.c.d. étendu pour les p.g.c.d. à droite. Dans cette section, je détaille cet algorithme et ses contraintes. Je présente ensuite quelques applications non triviales dans la section suivante. Le second algorithme généralise celui d'Euclide, et consiste en une version convenablement modifiée de l'algorithme de Buchberger pour le calcul de bases de Gröbner dans des algèbres de Ore. L'étude de cet autre algorithme demande plus de préliminaires et fera l'objet du chapitre II.

Les principaux résultats de cette section sont dus à Oystein Ore [75]. Ma contribution est de rendre explicite l'algorithme récursif ci-après. Cet algorithme est applicable dans le cas d'anneau de polynômes tordus en plusieurs indéterminées.

Rappelons notre convention selon laquelle un corps peut être non commutatif. J'appelle *corps effectif* tout corps dans lequel les opérations usuelles d'anneau sont calculables, et dans lequel étant donnés deux éléments non nuls $\alpha$ et $\beta$, on sait calculer deux éléments non nuls $\alpha'$ et $\beta'$ tels que

$$\alpha'\alpha + \beta'\beta = 0.$$

Dans le cas commutatif, ceci s'obtient par exemple en prenant $\alpha' = \beta$ et $\beta' = -\alpha$. Soit $\mathbb{S} = \mathbb{K}[\partial; \sigma, \delta]$ un anneau de polynômes tordus sur un corps effectif $\mathbb{K}$. Puisque le degré en $\partial$ défini sur les éléments de $\mathbb{S}$ a bien les propriétés d'une fonction degré, l'algorithme d'Euclide habituel s'étend au calcul de p.g.c.d. à droite en prenant soin d'effectuer toutes les divisions *à gauche*. Le calcul est le suivant. Soient $a$ et $b$ deux polynômes de $\mathbb{S}$ pour lesquels nous voulons obtenir un p.g.c.d. Sans perte de généralité, supposons que le degré $d_a$ en $\partial$ de $a$ est plus grand que le degré $d_b$ de $b$. Par multiplication de $b$ par $\partial^{d_a-d_b}$ à gauche, on obtient un second polynôme $c$ de degré $d_a$. Soient $\alpha$ et $\gamma$ les coefficients dominants respectifs de $a$ et de $c$. Calculons deux cofacteurs non nuls $\alpha'$ et $\gamma'$ tels que

$$\alpha'\alpha + \gamma'\gamma = 0.$$

Alors,

$$d = \alpha' a + \gamma' c$$

a un degré en $\partial$ strictement plus petit que $d_a$. La même opération est ensuite appliquée à $b$ et $d$. En réitérant ce processus, on obtient finalement zéro en au plus $d_a$ étapes. Le dernier polynôme obtenu avant 0 est un p.g.c.d. à droite $g$ de $a$ et de $b$ : en effet, nous avons précédemment produit une suite de divisions euclidiennes

$$\begin{aligned}
\alpha_0 a_0 &= \gamma_0 \partial^{d_0} a_1 + a_2, \\
\vdots &= \vdots \\
\alpha_n a_n &= \gamma_n \partial^{d_n} a_{n+1} + a_{n+2}, \\
\alpha_{n+1} a_{n+1} &= \gamma_{n+1} \partial^{d_{n+1}} a_{n+2},
\end{aligned}$$

et le dernier polynôme $a_{n+2}$ divise $a_{n+1}$ à droite, il divise donc de proche en proche $a_n$, ..., puis $a_1$, puis $a_0$ ; c'est en particulier un p.g.c.d. à droite de $a_0$ et de $a_1$. (Les divisions et p.g.c.d. sont bien sûr définis à un facteur constant non nul de $\mathbb{K}$ près.) En rassemblant ensuite les facteurs successifs, nous obtenons un algorithme de p.g.c.d. étendu qui produit $u$ et $v$ tel que

$$ua + vb = g.$$

ALGORITHME : $r = \mathrm{SkewEuclideanDivision}(p, q, \mathbb{K}[x; \sigma, \delta])$.
INPUT : deux polynômes $p$ et $q$ dans $\mathbb{K}[x; \sigma, \delta]$.
OUTPUT : reste $r$ de la division euclidienne à gauche de $p$ par $q$.

1. $r = p$ ;
2. tant que $\deg_x r \geq \deg_x q$, faire
   (a) soit $a$ le coefficient dominant de $r$ ;
   (b) soit $b$ le coefficient dominant de $q$ ;
   (c) soit $d = \deg_x r - \deg_x q$ ;
   (d) calculer $u$ et $v$ tels que
   $$ua + vb^{\sigma^d} = 0 \ ;$$
   (e) $r = ur - vx^d q$ ;
3. renvoyer $r$.

ALGORITHME 1. Division euclidienne tordue

Des p.p.c.m. à gauche se calculent aussi par cet algorithme. Ils s'obtiennent en considérant la dernière égalité produite par l'algorithme :

$$Ua + Vb = 0.$$

De même que le dernier reste non nul est un p.g.c.d. à droite, le polynôme $Ua$ est un p.p.c.m. à gauche de $a$ et de $b$. Tout ceci est résumé dans le théorème suivant, prouvé par Ore [75] dans le cas d'un corps commutatif $\mathbb{K}$, mais qui s'étend immédiatement à des corps non commutatifs.

THÉORÈME 1 (Oystein Ore). *Étant donné deux éléments $a$ et $b$ d'un anneau de polynômes tordus $\mathbb{K}[\partial; \sigma, \delta]$ sur un corps effectif $\mathbb{K}$, l'algorithme d'Euclide permet le calcul de polynômes $u$, $v$, $g$, $U$, $V$, avec $U$ et $V$ non nuls, tels que*

$$ua + vb = g \qquad \textit{et} \qquad Ua + Vb = 0, \tag{28}$$

*où $g$ est un p.g.c.d. à droite de $a$ et $b$, et où $Ua$ est un p.p.c.m. à gauche de $a$ de $b$.*

Un *anneau de Ore à gauche* est classiquement défini comme un anneau $\mathbb{A}$ tel que pour deux éléments non nuls quelconques $a$ et $b$ de $\mathbb{A}$, l'intersection d'idéaux

$$\mathbb{A}a \cap \mathbb{A}b \tag{29}$$

n'est pas vide (*condition de Ore* à gauche). Autrement dit, il existe deux éléments non nuls $U$ et $V$ de $\mathbb{A}$ qui vérifient $Ua = Vb$, le produit étant dans cette intersection. Comme le montre le théorème 1 ci-dessus, les anneaux de polynômes tordus sur un corps sont des anneaux de Ore à gauche. La démonstration du théorème plus haut fournit aussi le corollaire suivant, en prenant une écriture sans fraction de chaque division euclidienne.

COROLLAIRE 1 (Oystein Ore). *Si $\mathbb{A}$ est un anneau de Ore à gauche, il en est de même de tout anneau de polynôme tordus $\mathbb{A}[\partial;\sigma,\delta]$.*

J'appelle *anneau de Ore effectif* un anneau de Ore dans lequel les opérations usuelles d'anneau sont calculables, ainsi que la paire $(U,V)$ intervenant dans l'égalité (28). Le corollaire précédent s'interprète aussi comme une propriété d'élimination de la manière suivante.

COROLLAIRE 2. *Étant donné deux éléments $a$ et $b$ dans un anneau de polynômes tordus $\mathbb{S} = \mathbb{A}[\partial;\sigma,\delta]$ sur un anneau de Ore effectif $\mathbb{A}$, s'il existe $(u,v) \in \mathbb{S}\times\mathbb{S}$ et $\alpha \in \mathbb{A}\setminus\{0\}$ tels que*

$$ua + vb = \alpha,$$

*alors l'algorithme d'Euclide calcule $(\alpha,u,v)$.*

Bien entendu, le seul cas où un tel triplet $(\alpha,u,v)$ ne peut pas être obtenu est celui où $a$ et $b$ ont un p.g.c.d. à droite dans $\mathbb{S}$ non trivial.

L'algorithme d'Euclide dans un anneau de Ore effectif est donné en algorithme 1.

## 6. Applications de la division euclidienne

Plusieurs résultats non triviaux peuvent déjà s'obtenir par l'algorithme d'Euclide non commutatif qui vient d'être décrit. Après une application simple en liaison avec les polynômes de Jacobi, je montre dans cette section comment cet algorithme peut être utilisé pour obtenir des relations de contiguïté pour des séries hypergéométriques et je le compare à l'élimination dialytique de Sylvester. Enfin, j'évoque la construction d'un corps de fractions pour les anneaux de polynômes tordus.

**6.1. Polynômes de Jacobi.** Le corollaire 2 s'applique à une élimination entre des opérateurs qui s'annulent sur les polynômes de Jacobi : partant des opérateurs $G_1$ et $G_2$ définis respectivement par (25) et (26), on montre en éliminant l'opérateur de décalage $S_n$ dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{Q}(a,b,n,x)[D_x;1,D_x][S_n;S_n,0]$$

que les polynômes de Jacobi vérifient aussi (27).

Les degrés respectifs en $S_n$ de $G_1$ et de $G_2$ sont 2 et 1. On multiplie donc tout d'abord $G_2$ par $S_n$ et obtient

$$\begin{aligned}
&S_nG_2 = \\
&\quad (2n+a+b+4)(1-x^2)S_n^2D_x \\
&\quad -(n+2)(a-b-(2n+a+b+4)x)S_n^2 \\
&\quad -2(n+2+a)(n+2+b)S_n.
\end{aligned}$$

Il est ensuite nécessaire de déterminer deux polynômes $\alpha$ et $\beta$ dans l'algèbre de Ore $\mathbb{Q}(a,b,n,x)[D_x;1,D_x]$, sous-algèbre de la précédente, de façon que

$$\alpha G_1 + \beta S_nG_2$$

ait degré 1 en $S_n$. Dans le cas général, ceci s'obtiendra par une utilisation récursive de l'algorithme. Dans le cas présent, il suffit visiblement de prendre respectivement les coefficients dominants de $G_1$ et de $-S_nG_2$ pour $\beta$ et $\alpha$, car le coefficient dominant en $S_n$ de $G_1$ ne dépend ni de $x$, ni de $D_x$. On obtient ainsi

$$\alpha G_1 + \beta S_n G_2 = AS_n + B,$$

où $A$ et $B$ sont des polynômes de degré 1 en $D_x$ qui appartiennent à

$$\mathbb{Q}(a, b, n, x)[D_x; 1, D_x].$$

L'étape suivante consiste à éliminer $S_n$ entre $G_2$ et $AS_n + B$. On applique récursivement le même algorithme pour calculer des polynômes $\alpha'$ et $\beta'$ dans $\mathbb{Q}(a, b, n, x)[D_x; 1, D_x]$ tels que $\alpha' A + \beta' g_2 = 0$, où $g_2$ est le coefficient dominant en $S_n$ de $G_2$. Le polynôme

$$R = \alpha'(AS_n + B) + \beta' G_2 \tag{30}$$

ne fait alors plus intervenir $S_n$.

J'ai implanté les opérations et algorithmes décrits dans ce chapitre et s'appliquant aux algèbres de Ore dans le *package* `Ore_algebra`. Ce dernier a été incorporé à la version commerciale du système de calcul formel Maple V, release 5. Voici la session correspondant à l'exemple précédent. Nous chargeons tout d'abord le *package* :

```
with(Ore_algebra):
```

Ensuite, nous déclarons une algèbre de Ore convenable pour prendre en compte les commutations afférentes aux deux paires d'indéterminées $(n, S_n)$ et $(x, D_x)$, à savoir $S_n n = (n+1)S_n$ et $D_x x = xD_x + 1$ :

```
A:=skew_algebra(comm={a,b},shift=[Sn,n],diff=[Dx,x]):
```

De façon interne, je représente une algèbre de Ore comme une « table » de procédures, au sens Maple, chacune de celles-ci réalisant une opération de base. Lors de la création de l'algèbre, `comm`, `diff` et `shift` sont des types de commutations prédéfinis. Dans le programme, je fournis à l'utilisateur la possibilité de définir ses propres commutations, pour des types d'opérateurs qui ne seraient pas implantés.

Nous introduisons maintenant les deux polynômes (25–26) :

```
G:=[2*(n+2)*(n+a+b+2)*(2*n+a+b+2)*Sn^2
        -((2*n+a+b+3)*(a^2-b^2)+(2*n+a+b+2)
            *(2*n+a+b+3)*(2*n+a+b+4)*x)*Sn
        +2*(n+a+1)*(n+b+1)*(2*n+a+b+4),
    (2*n+a+b+2)*(1-x^2)*Dx*Sn-(n+1)
        *(a-b-(2*n+a+b+2)*x)*Sn-2*(n+a+1)*(n+b+1)]:
```

Et nous appelons l'algorithme d'Euclide pour calculer un polynôme non nul indépendant de $S_n$, s'il existe un tel polynôme :

```
skew_elim(G[1],G[2],Sn,A);
```

$$-an - bn - n - n^2 + axD_x + aD_x + bxD_x - bD_x + 2xD_x - D_x^2 + x^2D_x^2$$

Nous obtenons le polynôme $R$ de (30), qui est précisément (27).

**6.2. Fonction hypergéométrique de Gauss.** Des relations de contiguïté pour les séries hypergéométriques peuvent être obtenues par la généralisation non commutative de l'algorithme d'Euclide. Plus généralement, des calculs analogues sont possibles dans le cas de fonctions de plusieurs variables mais nécessitent alors l'utilisation de bases de Gröbner (voir [98] pour une généralisation à des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, dont un exemple est repris en §5.2 au chapitre II).

J'illustre maintenant ce calcul sur le cas de la fonction hypergéométrique de Gauss,

$$F(a,b;c;z) = F\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle| z\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},$$

où $(x)_n$ désigne le symbole de Pochhammer $\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$. Le coefficient $u_{a,n}$ vérifie

$$\frac{u_{a,n+1}}{u_{a,n}} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}, \qquad \text{et} \qquad \frac{u_{a+1,n}}{u_{a,n}} = \frac{n}{a} + 1.$$

De la première identité, on tire facilement que la série $F$ satisfait l'équation hypergéométrique de Gauss [41, p. 56], qui est représentée par l'opérateur différentiel linéaire suivant :

$$P = z(1-z)D_z^2 + (c-(a+b+1)z)D_z - ab. \tag{31}$$

De la seconde équation, on tire l'équation de récurrence

$$F(a+1,b;c;z) = (H_a \cdot F)(a,b;c;z), \qquad \text{où} \qquad H_a = \frac{z}{a}D_z + 1. \tag{32}$$

L'opérateur $H_a(D_z)$ est appelé un opérateur *de montée*.

De (31–32), on obtient la relation de contiguïté pour $F$ par l'algorithme d'Euclide non commutatif dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{Q}(a,b,c,z)[D_z;1,D_z][S_a;S_a,0].$$

Déclarons tout d'abord cette algèbre par

```
A:=skew_algebra(comm={b,c},diff=[Dz,z],shift=[Sa,a]):
```

Puis entrons les opérateurs

```
P:=z*(1-z)*Dz^2+(c-(a+b+1)*z)*Dz-a*b:
H:=a*Sa-(z*Dz+a):
```

Ensuite, nous calculons le résultat de l'élimination de $D_z$ dans cette algèbre :

```
skew_elim(P,H,Dz,A);
```

$$aS_a^2 - 2aS_a + a + zaS_a - zaS_a^2 + zS_a - c - zbS_a + 1$$
$$+S_a^2 - zS_a^2 + S_ac - 2S_a$$

Après reformulation, ceci se lit

$$(a+1)(1-z)F(a+2,b;c;z)+(c-zb+(z-2)(a+1))F(a+1,b;c;z)\\ +(1+a-c)F(a,b;c;z)=0,$$

qui est la relation de contiguïté classique pour la série de Gauss [**41**, p. 103].

De façon plus intéressante, l'algorithme d'Euclide peut aussi s'utiliser pour calculer un opérateur *de descente* $B_a(D_z)$, à savoir un opérateur tel que

$$F(a-1,b;c;z)=(B_a\cdot F)(a,b;c;z).$$

Ce calcul s'effectue en ne connaissant que $H_a$. L'opérateur de descente s'obtient en calculant $B_{a+1}$ comme inverse de $H_a$ modulo l'idéal à gauche engendré par $P$, ou de manière équivalente en calculant un $L$ et un $B_{a+1}$ tels que

$$LP+B_{a+1}H_a=1,$$

ce qui est exactement ce que fait l'algorithme du p.g.c.d. étendu.

Commençons comme précédemment en déclarant une algèbre de Ore convenable, à savoir $\mathbb{Q}(a,b,c,z)[D_z;1,D_z]$ :

```
A:=skew_algebra(comm={a,b,c},diff=[Dz,z]):
```

Puis nous réalisons un calcul de p.g.c.d. étendu à partir des opérateurs $P$ et

$$H_a=1+\frac{zD_z}{a}$$

ci-dessus (la version actuelle du code nécessite qu'on lui fournisse le polynôme $aH_a$ et non $H_a$ lui-même) :

```
GCD:=skew_gcdex(P,z*Dz+a,Dz,A):
```

Le résultat est une liste $[g,u,v,U,V]$ telle que

$$g=uP+vaH_a \qquad \text{et} \qquad 0=UP+VaH_a.$$

Nous obtenons finalement

$$B_a=\frac{(a-1)v(a-1)}{g(a-1)},$$

par le calcul :

```
B:=collect((a-1)*subs(a=a-1,GCD[3]/GCD[1]),Dz,factor);
```

$$B:=\frac{z(1-z)}{c-a}D_z+\frac{c-a-zb}{c-a}$$

*Mutatis mutandis*, ce type de calcul permet d'obtenir un opérateur de montée par rapport au paramètre $c$ en partant de l'opérateur de descente très simple

$$B_c=1+\frac{zD_z}{c-1}.$$

**6.3. Séries partiellement hypergéométriques.** Je généralise maintenant l'exemple précédent à une plus large classe de fonctions paramétrées. Ce qui suit s'inspire de [98, 103], mais évite l'utilisation de bases de Gröbner pour une vaste classe de sommations.

Je considère des séries de la forme

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} z^k,$$

où la suite $u_{n,k}$ est *hypergéométrique* par rapport à $n$, au sens où

$$\frac{u_{n+1,k}}{u_{n,k}}$$

est une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(n,k)$, pour un corps de coefficients $\mathbb{K}$. Je suppose aussi que $u_{n,k}$ vérifie une récurrence linéaire de la forme

$$(L \cdot u)(n,k) = A_0(n,k)u_{n,k+p} + A_1(n,k)u_{n,k+p-1} + \cdots + A_p(n,k)u_{n,k} = 0,$$

où les $A_i$ appartiennent à $\mathbb{K}(n,k)$.

L'élimination non commutative dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{K}(n,z)[S_n; S_n, 0][D_z; 1, D_z]$$

produit de nombreux résultats. Tout d'abord, il est bien connu qu'à partir d'un opérateur linéaire comme $L$ ci-dessus, on obtient un opérateur linéaire $M \in \mathbb{K}(n,z)[D_z; 1, D_z]$ qui s'annule sur $f_n(z)$.

Ensuite, pour tout opérateur $H(n, S_n, S_n^{-1})$, la nature hypergéométrique de $u_{n,k}$ par rapport à $n$ implique que

$$\frac{(H \cdot u)(n,k)}{u_{n,k}}$$

est une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(n,k)$, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{K}[n,k]$ tels que

$$Q(n,k)H - P(n,k)$$

s'annule en $u_{n,k}$. Il s'ensuit que $Q(n, zD_z)H - P(n, zD_z)$ s'annule en $f_n(z)$. Par élimination de $D_z$ entre ce dernier opérateur et $M$, je déduis alors une dépendance linéaire entre

$$f, H \cdot f, H^2 \cdot f, \ldots$$

à coefficients dans $\mathbb{K}(n,z)$. Quand en particulier $H = S_n$, cette relation est une récurrence linéaire en $n$ satisfaite par $f_n(z)$, et appelée une *relation de contiguïté*. Malheureusement, la relation obtenue de cette façon n'est pas nécessairement d'ordre minimal.

En suivant une idée de Takayama [103], une relation de contiguïté d'ordre plus petit s'obtient comme suit. Par l'utilisation de l'algorithme d'Euclide, je calcule tout d'abord un inverse $U$ de $Q(n, zD_z)$ modulo $M$. Plus précisément, je calcule deux polynômes $U$ et $V$ de $\mathbb{K}(n,z)[D_z; 1, D_z]$ tels que

$$UQ + VM = 1.$$

Ensuite j'effectue la division euclidienne de

$$U(n,z,D_z)P(n,zD_z)$$

par $M$ dans $\mathbb{K}(n,z)[D_z;1,D_z]$. En désignant $R(n,z,D_z)$ le reste et $K$ le degré en $D_z$ de $M$, j'obtiens alors

$$(H\cdot f)(n,z)=[R(n,z,D_z)\cdot f](n,z), \tag{33}$$

où $R$ a au plus $K$ pour degré en $D_z$. Cette relation relie une combinaison de $f_n(z)$ et de ses décalées à une combinaison de $f_n(z)$ et de ses dérivées. Comme précédemment, un inverse de $H$ pourrait aussi se calculer par l'algorithme du p.g.c.d. étendu, reliant ainsi $(H^{-1}\cdot f)(n,z)$ à une combinaison de $f_n(z)$ et de ses dérivées.

Lorsque $H=S_n$, qui est le cas qui nous intéresse pour le calcul d'une relation de contiguïté, une conséquence de la relation (33) est

$$(S_n^p\cdot f)(n,z)=[R(n+p,z,D_z)\dots R(n,z,D_z)\cdot f](n,z),\quad p\in\mathbb{N}. \tag{34}$$

Par réduction modulo $M$ du produit au membre droit, on obtient alors une famille de polynômes en $D_z$ et de degré au plus $K$. Aussi, une élimination gaussienne fournit une dépendance linéaire sur $(f,S_n\cdot f,\dots,S_n^K\cdot f)$, ce qui est la relation de contiguïté cherchée.

Exemple. La somme

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2(-1)^kz^k$$

se traite par cet algorithme. À partir de la récurrence du premier ordre en $S_k$, on obtient une équation différentielle $M$ d'ordre 4 vérifiée par $f_n(z)$. L'élimination directe entre cet opérateur et celui obtenu à partir de la récurrence du premier ordre en $S_n$ fournit une récurrence d'ordre 7 satisfaite par $f_n(z)$. Cependant, la seconde méthode garantit une récurrence d'ordre au plus 4, le degré en $D_z$ de $M$. Tout d'abord, en trouvant un inverse modulo $M$ du coefficient de $S_n$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}S_n={}&12\frac{z^3(z+1)}{(n+1)^3}D_z^3+4\frac{z^2(2n+2zn+11+14z)}{(n+1)^3}D_z^2\\&-4\frac{z(5zn^2-n^2-4n-6+2zn-9z)}{(n+1)^3}D_z-\frac{16zn-n-1+4z}{n+1}\end{aligned}$$

modulo $M$. Ceci implique une relation entre $f_{n+1}(z)$ et les dérivées de $f_n(z)$. En procédant avec les puissances suivantes de $S_n$ de la même façon que pour (34) et en effectuant des élimination gaussienne, on obtient finalement une récurrence d'ordre 4 satisfaite par $f_n(z)$. Les coefficients de cette récurrence sont des polynômes en $n$ et $z$ de degré au plus 10.

Le même procédé s'applique aux $q$-analogues. Considérons une suite double $(u_{n,k})$ supposée $q$-hypergéométrique en $n$, c'est-à-dire telle que

$$\frac{u_{n+1,k}}{u_{n,k}}$$

soit une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(q, q^n, q^k)$. Supposons en outre que cette suite soit annulée par un opérateur de $q$-récurrence linéaire dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{K}(q, q^n, q^k)[S_n; S_n, 0][S_k; S_k, 0].$$

De cette récurrence, il est encore facile d'obtenir un polynôme $M(q^n, z, H_{q,z})$ en l'opérateur de $q$-dilatation $H_{q,z}$ (voir tableau 1) et s'annulant en la fonction génératrice $f$. Pour tout polynôme $H(q^n, S_n, S_n^{-1})$, la fraction rationnelle

$$\frac{H \cdot u}{u}$$

est de la forme

$$\frac{P(q^n, q^k)}{Q(q^n, q^k)}$$

où $P$ et $Q$ sont deux polynômes de $\mathbb{K}[q, q^n, q^k]$. En inversant alors $Q$ modulo $M$ dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{K}(q, q^n, z)[H_{q,z}; H_{q,z}, 0],$$

on tire un polynôme $R$ tel que

$$H(q^n, S_n, S_n^{-1}) \cdot f = R(q^n, z, H_{q,z})P(q^n, H_{q,z}) \cdot f,$$

puis, en procédant comme dans le cas des récurrences usuelles lorsque $H = S_n$, une récurrence linéaire satisfaite par $f$.

**6.4. Élimination dialytique de Sylvester.** Jusqu'à maintenant, je n'ai appliqué l'algorithme du p.g.c.d. étendu dans une algèbre de Ore

$$\mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}] \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$$

qu'à l'élimination de l'un des $\partial_i$. Lorsque $\partial_i$ commute avec

$$\mathbb{K}[\mathbf{x} \setminus x_i]$$

et que $\sigma_i$ est un isomorphisme, par exemple lorsque $x_i^{\sigma_i}$ est un polynôme de degré 1 en $x_i$, le même algorithme s'applique pour réaliser l'élimination de $x_i$. Ceci s'obtient en récrivant les polynômes avec $\partial_i$ sur la gauche des monômes, ce qui préserve les degrés en $x_i$ et en $\partial_i$. Le calcul réalisé par l'algorithme d'Euclide étendu et celui par élimination dialytique de Sylvester [113] sont alors équivalents, de la même façon qu'un calcul de résultant est équivalent au calcul du déterminant d'une matrice de Sylvester dans le cas commutatif classique.

Exemple. L'identité

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + n - m)}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$$

fournit une représentation sommatoire des polynômes orthogonaux de Gegenbauer. Elle peut être prouvée dans l'algèbre de Ore polynomiale

$$\mathbb{Q}(\alpha, x, n)[m][S_n; S_n, 0][S_m; S_m, 0].$$

L'élimination, par l'algorithme du p.g.c.d. étendu, de $m$ entre les polynômes (11) décrivant le sommant

$$a_{n,m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + n - m)}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$$

renvoie le polynôme

$$(S_m - 1)(2x(n+1+\alpha)S_n - (n+2)S_n^2) \\ - ((n+2)S_n^2 - 2x(n+1+\alpha)S_n + n + 2\alpha).$$

Par construction, cet opérateur s'annule sur $a_{n,m}$. Il s'ensuit que

$$\left[\left((n+2)S_n^2 - 2x(n+1+\alpha)S_n + n + 2\alpha\right) \cdot a\right](n,m) = b_{n,m+1} - b_{n,m},$$
$$\text{où} \qquad b_{n,m} = \left[\left(2x(n+1+\alpha)S_n - (n+2)S_n^2\right) \cdot a\right](n,m).$$

On obtient une preuve de l'identité annoncée en sommant sur $m$.

**6.5. Fractions rationnelles tordues.** Une autre application de l'algorithme d'Euclide est le calcul algorithmique dans le *corps des fractions à gauche* des anneaux de polynômes tordus [75]. En effet, tout anneau de polynômes tordus $\mathbb{K}[u; \sigma, \delta]$ à coefficients dans un corps, bien qu'en général non commutatif, admet un corps de fractions noté $\mathbb{K}(u; \sigma, \delta)$ [36]. Cette propriété provient de la condition de Ore à gauche (29) — à savoir que l'intersection de deux idéaux à gauche non nuls ne peut être nulle. C'est en fait ici l'origine de l'intérêt d'Oystein Ore pour les anneaux qui portent aujourd'hui son nom, car la condition (29) permet d'y appliquer de nombreuses méthodes de l'algèbre linéaire, dont le calcul de déterminants et la résolution de systèmes linéaires [74].

Le calcul avec les fractions n'est pas nécessaire dans mon étude, aussi me contenterai-je de mentionner que la condition (29) est cruciale pour la définition de l'équivalence de deux fractions, pour permettre la réduction au même dénominateur et donc l'addition de deux fractions, pour définir le produit de deux fractions. Je renvoie par ailleurs à [36] pour une définition formelle.

Cependant, les fractions rationnelles tordues sont utilisées implicitement dans le cas de divisions euclidiennes dans des algèbres de Ore en plusieurs indéterminées. Considérons en effet l'algorithme d'Euclide récursif dans une algèbre $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial; \sigma, \delta]$, et supposons que $\partial$ soit l'indéterminée principale en laquelle sont vus les polynômes. Le résultat est alors défini à un facteur près dans le corps $\mathbb{K}(\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta})$. Aucune fraction n'apparaît effectivement — le calcul se fait « sans fraction » —, mais le p.g.c.d. calculé est celui de $\mathbb{K}(\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta})[\partial; \sigma, \delta]$. En particulier, il dépend fortement de l'indéterminée principale.

CHAPITRE II

# Bases de Gröbner dans les algèbres de Ore

Du point de vue mathématique traditionnel, une classe d'anneaux possédant de bonnes propriétés (théorie du p.g.c.d., structure simple des modules...) est celle des anneaux principaux, c'est-à-dire dont chaque idéal peut être engendré par un *unique* élément. Le fait qu'un anneau soit euclidien implique qu'il soit principal, mais c'est réellement le caractère euclidien qui fournit un moyen algorithmique de calcul dans ces anneaux principaux, ainsi que dans les objets qui en dérivent (quotients, intersections...). Dans le cas des anneaux de polynômes en une indéterminée, commutatifs ou tordus, l'existence d'une fonction degré garantit le caractère euclidien. Ainsi, dans les exemples du chapitre I, la division euclidienne dans les anneaux de polynômes tordus a pu être utilisée de plusieurs façons et dans plusieurs buts : d'une part, comme outil de calcul de *formes normales* modulo un idéal données par les restes de divisions euclidiennes par un polynôme générateur de l'idéal ; d'autre part, comme *procédé d'élimination*, par le calcul de p.g.c.d. à droite par un algorithme d'Euclide étendu.

Un cadre qui généralise directement le cas des anneaux principaux est celui des anneaux noethériens, c'est-à-dire dont tous les idéaux peuvent être engendrés par *un nombre fini* d'éléments. De même, le fait pour un anneau d'être ou non euclidien trouve son pendant dans le cas d'anneaux de polynômes en plusieurs indéterminées dans l'extension de la notion de degré. On introduit pour cela le concept de *graduation* d'un anneau, et plus généralement dans le cas non commutatif qui nous intéresse, de *filtration* d'un anneau. Du point de vue algorithmique, une généralisation de la division euclidienne au cas de plusieurs indéterminées et qui autorise les types de calculs dont j'aurai besoin est fournie par l'*algorithme de Buchberger* pour le calcul de *bases de Gröbner*. Un tel calcul est classique dans les algèbres de polynômes commutatifs usuelles (voir [19, 30, 38] pour des introductions pédagogiques et [27, 28, 29] pour les articles originaux relatifs à l'algorithme de Buchberger), et les bonnes propriétés des filtrations sur des anneaux de polynômes tordus et des algèbres de Ore permettent leur généralisation dans le cadre non commutatif de mon étude.

Dans les chapitres qui suivent, j'étudierai des fonctions décrites par certains idéaux d'algèbres d'opérateurs. La plupart des algorithmes de calcul sur ces fonctions nécessiteront le calcul de formes normales d'éléments dans les quotients de l'algèbre d'opérateurs ambiante par les idéaux correspondant à ces fonctions. Par ailleurs, mes algorithmes de sommation et d'intégration s'appuieront de façon cruciale sur des méthodes d'élimination. Ces calculs seront réalisables par des méthodes de bases de Gröbner.

Plus précisément, une base de Gröbner est un système de générateurs d'un idéal qui vérifie des propriétés particulières de divisibilité par rapport à un *ordre de termes* donné (voir plus bas). Cet ordre de termes garde trace de la filtration choisie sur l'algèbre polynomiale. Dans ce chapitre, je tente une présentation rapide des problèmes propres au cas des polynômes de plusieurs indéterminées et des concepts relatifs aux bases de Gröbner. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 4 qui donne des conditions suffisantes sous lesquelles des bases de Gröbner peuvent être calculées dans les algèbres de Ore par une modification de l'algorithme de Buchberger. Le lecteur qui est déjà familier avec les bases de Gröbner dans le cas commutatif pourra aisément faire l'impasse des sections qui suivent et poursuivre directement en §4.

Depuis l'invention des bases de Gröbner dans les années 1960 par Bruno Buchberger, la théorie a donné lieu à des développements incessants. Une théorie dans le cas purement non commutatif, c'est-à-dire dans le cas d'algèbres associatives sur un monoïde libre non commutatif et sans relations de commutations, est due à Teo Mora et date des années 1980 [71]. Je renvoie le lecteur à [73] pour un *survey*. Dans ce cadre, une difficulté algorithmique est le caractère non noethérien de ces algèbres. En ce qui concerne une approche directe des algèbres données par relations, un pionnier est André Galligo [50] dans le cas des algèbres de Weyl, qui sont des algèbres associatives

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\rangle$$

régies par les commutations

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1 \qquad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Nobuki Takayama a utilisé une technique analogue pour des algèbres mixtes d'opérateurs différentiels et d'opérateurs de différence finie [98]. Enfin, un cadre général pour des algèbres non commutatives mais régies par des commutations est dû à Abdelilah Kandri-Rody et à Volker Weispfenning [59], et a été raffiné par la suite par Heinz Kredel [66]. Enfin, le lecteur trouvera dans [72] une théorie des bases de Gröbner dans un cadre très général d'anneaux à filtration.

Avant de donner le plan de ce chapitre, je donne un premier exemple de calcul rendu possible par la théorie des bases de Gröbner.

L'algorithme de Buchberger pour le calcul de bases de Gröbner étant une généralisation de l'algorithme d'Euclide, tous les exemples donnés en §6.1 du chapitre I se traitent aussi par des méthodes de bases de Gröbner. Comme exemple particulier, nous avons calculé une équation différentielle par rapport à $x$ satisfaite par les polynômes de Jacobi $P_n^{(a,b)}(x)$ à partir d'une équation de récurrence en $n$ et d'une récurrence différentielle par rapport à $n$ et $x$. La méthode de ce chapitre I était une élimination par divisions euclidiennes successives. Ici, je reprends le même calcul, mais en réalisant l'élimination par un calcul de base de Gröbner. Je vais donc montrer sur cet exemple comment manipuler des équations linéaires mixtes différentielles et de récurrence à l'aide de mes *packages*. Le lecteur trouvera une brève description de ces programmes au chapitre VII.

EXEMPLE. Chargeons tout d'abord les *packages* utiles. Le premier d'entre eux, `Ore_algebra`, implante l'arithmétique des algèbres de Ore ; le second, `Groebner`, fournit les fonctions classiques d'un *package* de bases de Gröbner commutatives et les étend au cadre non commutatif dont on a besoin.

```
with(Ore_algebra):
with(Groebner):
```

L'algèbre de Ore $\mathbb{Q}(a, b, n, x)[D_x; 1, D_x][S_n; S_n, 0]$ est ensuite définie par

```
A:=skew_algebra(comm={a,b},shift=[Sn,n],diff=[Dx,x]):
```

et on introduit la description suivante des polynômes orthogonaux de Jacobi :

```
G:=[2*(n+2)*(n+a+b+2)*(2*n+a+b+2)*Sn^2
        -((2*n+a+b+3)*(a^2-b^2)+(2*n+a+b+2)
            *(2*n+a+b+3)*(2*n+a+b+4)*x)*Sn
        +2*(n+a+1)*(n+b+1)*(2*n+a+b+4),
    (2*n+a+b+2)*(1-x^2)*Dx*Sn-(n+1)
        *(a-b-(2*n+a+b+2)*x)*Sn-2*(n+a+1)*(n+b+1)]:
```

Cette description comprend un opérateur de récurrence et un opérateur mixte.

On réalise maintenant l'élimination en définissant un ordre de termes lexicographique sur les indéterminées $D_x$ et $S_n$ tel que $S_n \succeq D_x$ :

```
T:=termorder(A,plex=[Sn,Dx]):
```

(Remarquons que l'ordre de termes utilisé rend $S_n$, l'indéterminée à éliminer, plus grande que les autres.)

Puis, on calcule une base de Gröbner pour cette ordre. Cette dernière contient deux polynômes : l'opérateur mixte différentiel et de récurrence

$$\begin{aligned}(35)\qquad &(2n + a + b + 2)\left(1 - x^2\right) S_n D_x \\ &\quad - (n + 1) \left[a - b - (2n + a + b + 2)x\right] S_n \\ &\quad - 2(n + a + 1)(n + b + 1),\end{aligned}$$

et l'opérateur différentiel

$$(36)\qquad (1 - x^2)D_x^2 + [b - a - (a + b + 2)x]D_x + n(n + a + b + 1).$$

On sélectionne par la commande MAPLE appropriée (l'appel à `gbasis` calcule la base de Gröbner ; l'appel à `remove` effectue la sélection) :

```
remove(has,gbasis(G,T),Sn);
```

$$\left[-n^2 - n - na - nb + x^2 D_x^2 + 2xD_x + bxD_x + acD_x + aD_x - bD_x - D_x^2\right]$$

De façon similaire, le polynôme

$$\begin{aligned}
&2(n+2)(n+a+b+2)(2n+a+b+2)S_n^2 \\
&\quad -\left((2n+a+b+3)\left(a^2-b^2\right)\right. \\
&\qquad \left.+(2n+a+b+2)(2n+a+b+3)(2n+a+b+4)x\right)S_n \\
&\quad +2(n+a+1)(n+b+1)(2n+a+b+4),
\end{aligned}$$

pourrait être obtenu par élimination de $D_x$ entre les polynômes (35) et (36).

Le problème de la réduction est identifié en §1, puis comparé à la division euclidienne. les définitions qui seront nécessaires par la suite sont rappelées dans la même section. L'algorithme de réduction y est aussi étendu au algèbres de Ore. Les algorithmes de §2, ceux généraux de Buchberger et les améliorations du cas commutatif, sont des algorithmes classiques qui peuvent être trouvés dans [52, chapitre 10], dans [38, chapitre 2] ou dans [19], avec la preuve de leur correction. Dans la même section, nous verrons aussi les stratégies connues sous les noms de « stratégie normale » et « stratégie du sucre ». Cette dernière est décrite en détails et comparée à la première dans [53]. Dans la même section, nous verrons la généralisation de tous ces algorithmes au cas des algèbres de Ore. En §4 sont donnés les résultats principaux sur les bases de Gröbner non commutatives, dans le cadre général introduit par Abdelilah Kandri-Rody et Volker Weispfenning [59] des *anneaux de polynômes de type résoluble*, étudiés plus tard dans la thèse de Heinz Kredel [66]. Le point de vue de cette section est de fournir dans un volume restreint tous les résultats nécessaires pour la suite de la thèse, mais sans évoquer les problèmes d'implantation. En §5, je traite ensuite des exemples introductifs d'applications des bases de Gröbner non commutatives avec l'aide de mon implantation.

## 1. Algorithme de division dans le cas de plusieurs indéterminées

Dans $\mathbb{K}[x]$, l'algorithme de division euclidienne d'un polynôme $p$ par un autre polynôme $q$ renvoie deux polynômes $d$ et $r$ tels que $p = dq + r$ et $\deg r < \deg q$. Cette dernière propriété détermine le reste $r$ de façon unique dans l'espace vectoriel

$$V = \bigoplus_{i=0}^{\deg q - 1} \mathbb{K}x^i$$

des polynômes de degré strictement inférieur à celui de $q$. En d'autres termes, la division euclidienne réduit le polynôme $p$ par l'idéal

$$(q) = \mathbb{K}[x]q$$

de $\mathbb{K}[x]$ de façon à trouver un reste $r$ dans l'espace vectoriel de dimension finie $\deg q$, lequel est isomorphe à

$$\mathbb{K}[x]/(q).$$

De cette manière, la division euclidienne ramène des problèmes exprimés dans l'espace vectoriel de dimension infinie $\mathbb{K}[x]$ à des problèmes décrits

| |
|---|
| ALGORITHME : $r = \mathrm{EuclideanDivision}(p, q, \mathbb{K}[x])$.<br>INPUT : deux polynômes $p$ et $q$ dans $\mathbb{K}[x]$.<br>OUTPUT : reste $r$ de la division euclidienne de $p$ par $q$.<br>1. $r = p$ ;<br>2. tant que $\deg r \geq \deg q$, faire<br>$$r = r - \frac{\text{monôme de } r \text{ de plus haut degré}}{\text{monôme de } q \text{ de plus haut degré}} q \;;$$<br>3. renvoyer $r$. |

ALGORITHME 2. Division euclidienne

dans l'espace vectoriel $V$ de dimension finie $\deg q$, où de l'algèbre linéaire élémentaire peut alors être employée. Malheureusement, la division euclidienne, qui est rappelée pour un anneau de polynômes $\mathbb{K}[x]$ en algorithme 2, ne se généralise pas telle quelle dans les algèbres sur plusieurs indéterminées.

**1.1. Réduction.** Je rappelle maintenant une notion de *réduction* qui généralise la division euclidienne dans le cas de plusieurs indéterminées. Considérant l'algorithme 2, il nous faut tout d'abord identifier ce qu'il est rendu nécessaire de généraliser en vue d'un algorithme général de réduction dans le cas d'indéterminées

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d).$$

Plus précisément, la notion de degré doit être généralisée en une notion d'*ordres de termes* ; le caractère non principal de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ rend possible la « division » par plusieurs diviseurs ; l'unicité du reste d'une division n'est plus aussi immédiate à réaliser que dans le cas de plusieurs indéterminées.

*Ordres de termes.* La notion de degré d'un polynôme de plusieurs indéterminées n'est pas unique ; un concept d'*ordre de termes* dont la définition suit doit lui être substitué. Une définition plus générale sera donnée pour le cas non commutatif au chapitre IV, p. 21.

DÉFINITION 4 (Ordre de termes). *Un* ordre de termes *sur le monoïde commutatif libre $M = \{\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d\}$ engendré par l'ensemble $\{\mathbf{x}\}$ est un ordre vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\preceq$ est total ;*
2. *pour tout $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\mathbb{N}^d$, $1 \preceq \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ ;*
3. *$\preceq$ est compatible avec la loi de $M$ : pour tout $\boldsymbol{\alpha}$, tout $\boldsymbol{\beta}$ et tout $\boldsymbol{\gamma}$ dans $\mathbb{N}^d$, $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \preceq \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ implique $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\gamma}} \preceq \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\gamma}}$.*

Par abus de langage, on parle d'un ordre de termes sur une algèbre de polynômes pour faire référence à un ordre de termes sur le monoïde sous-jacent à l'algèbre.

La définition suivante mentionne les ordres de termes sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ les plus fréquemment utilisés.

DÉFINITION 5. *Notons $|\boldsymbol{\alpha}|$ la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$.*

- *L'*ordre lexicographique *sur l'algèbre $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est défini par: $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \preceq_{lex} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ si et seulement s'il existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que*
$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \qquad \alpha_i < \beta_i.$$
- *L'*ordre du degré total *sur l'algèbre $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est défini par: $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \preceq_{tdeg} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ si et seulement si $|\boldsymbol{\alpha}| < |\boldsymbol{\beta}|$ ou il existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que*
$$|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}|, \qquad \alpha_i < \beta_i, \qquad \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_d = \beta_d.$$
- *Un* ordre d'élimination *est défini sur l'algèbre $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ par un ensemble*
$$\{x_1, \ldots, x_e\}$$
*d'indéterminées à éliminer, et par: $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \preceq_{elim} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ si et seulement si $x_1^{\alpha_1} \ldots x_e^{\alpha_e} \preceq_{tdeg} x_1^{\beta_1} \ldots x_e^{\beta_e}$ ou*
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_e) = (\beta_1, \ldots, \beta_e), \quad x_{e+1}^{\alpha_{e+1}} \ldots x_d^{\alpha_d} \preceq_{tdeg} x_{e+1}^{\beta_{e+1}} \ldots x_d^{\beta_d}.$$

Remarquons que tous ces ordres coïncident pour $d = 1$.

Une fois qu'un ordre de termes $\preceq$ a été choisi sur une algèbre de polynômes, la relation $\preceq$ privilégie deux termes particuliers de tout polynôme non nul $p$: son terme le plus grand, et son terme le plus petit. De même qu'il existe une division euclidienne par les puissances croissantes et une division euclidienne par les puissances décroissantes, il est possible de développer la théorie des bases de Gröbner en privilégiant soit les termes les plus grands, soit les termes les plus petits de chaque polynôme. Néanmoins, la généralisation au cas non commutatif introduira une dissymétrie. Aussi retiens-je la définition que le *terme dominant* d'un polynôme est son terme le plus grand pour $\preceq$.

Les coefficients et monômes correspondants jouent eux aussi un rôle privilégié, si bien que j'introduis les notations suivantes : pour $p$ un élément non nul d'une algèbre de polynômes munie d'un ordre de termes $\preceq$, je désigne

1. par $\operatorname{lm}(p)$ le *monôme dominant* de $p$ ;
2. par $\operatorname{lt}(p)$ le *terme dominant* de $p$ ;
3. par $\operatorname{lc}(p)$ le *coefficient dominant* de $p$.

Avec ces notations, nous avons donc $\operatorname{lm}(p) = \operatorname{lc}(p) \operatorname{lt}(p)$, et $\operatorname{lc}(p) \neq 0$. De plus, pour un ensemble $P$ de polynômes, je désigne par $\operatorname{lt}(P)$ l'ensemble des termes dominants $\operatorname{lt}(p)$ lorsque $p$ décrit $P$.

*Caractère non principal de* $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Faisons l'hypothèse $d > 1$ et considérons le problème de la recherche de restes modulo un idéal générique de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. L'idéal principal $(q)$ de l'introduction de cette section se change alors en un idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ qui n'est en général plus principal ; ainsi, un algorithme général de réduction doit pouvoir « diviser » par un ensemble $Q$ de réducteurs.

Comme il a déjà été mentionné, un algorithme de division dans $\mathbb{K}[x]$ est un algorithme qui prend en entrée deux polynômes $p$ et $q$ et renvoie deux polynômes $m$ et $r$ tels que $p = m + r$ et $m$ soit un multiple $q$. C'est un algorithme de réduction modulo l'idéal engendré par $q$. Mais $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ n'étant pas principal, il faut autoriser un ensemble de diviseurs $Q = \{q_i\}$ au lieu d'un unique diviseur, et l'équation de « division » devient $p = m + r$ où $m$ est dans l'idéal engendré par les $q_i$, c'est-à-dire est de la forme

$$m = \sum_i d_i q_i.$$

L'étape de l'algorithme 2 qui teste la divisibilité du terme dominant $\mathrm{lt}(r)$ de $r$ par celui de $q$, $\mathrm{lt}(q)$, — en comparant les degrés des polynômes — doit donc être modifiée pour retenir tous les $q_i$ tels que le terme dominant $\mathrm{lt}(q_i)$ de $q_i$ divise celui de $r$, $\mathrm{lt}(r)$. Alors, l'étape de réduction du degré de $r$ par soustraction d'un multiple de $q$ doit être modifiée en conséquence de façon à soustraire une combinaison de multiples de ces $q_i$. Nous allons voir qu'il suffit en fait de ne retenir qu'un des $q_i$, ce qui soulève donc le problème de choisir lequel utiliser, quand plusieurs conviennent. Pour le moment, et tant qu'on ne s'intéresse pas à l'efficacité, convenons de choisir n'importe lequel des $q_i$ parmi ceux qui conviennent, par exemple le premier dans la liste de ceux retenus.

Par commodité, l'algorithme présenté dans la suite emploie la notation suivante : étant donnés un polynôme $p$ à réduire et un ensemble $Q$ de polynômes par lesquels réduire, $R_{p,Q}$ désigne l'ensemble des $q \in Q$ tels que le terme dominant $\mathrm{lt}(q)$ de $q$ divise celui de $p$, $\mathrm{lt}(p)$. Par convention, cet ensemble est l'ensemble vide si $p = 0$.

Définition 6 (Réduction). *Considérons une algèbre de polynômes munie d'un ordre $\preceq$. Un polynôme $p$ est dit* réductible

- *modulo un polynôme $q$ si $p$ fait intervenir un terme $t$ avec un coefficient non nul et s'il existe un monôme $m$ tel que* $\mathrm{lt}(t - mq) \prec t$ *;*
- *modulo un ensemble de polynômes $Q$ s'il est réductible modulo un $q \in Q$.*

*Dans un tel cas, soit $r = p - mq$. En ce qui concerne la notation, on emploie :*

- $p \underset{q}{\rightarrow} r$ *si $p$ est réductible modulo $q$ ;*
- $p \underset{Q}{\rightarrow} r$ *si $p$ est réductible modulo $Q$ ;*
- $p \overset{*}{\underset{Q}{\rightarrow}} r$*, si $p = r$ ou s'il existe une suite finie $q_1, \ldots, q_n$ d'éléments de $Q$ telle que*

  $$p \underset{q_1}{\rightarrow} \cdots \underset{q_n}{\rightarrow} r \ ;$$

  $\overset{*}{\underset{Q}{\rightarrow}}$ *est donc la* clôture réflexive-transitive *de* $\underset{Q}{\rightarrow}$ *;*
- $p \overset{*}{\underset{Q}{\rightarrow}} r\downarrow$*, si* $p \overset{*}{\underset{Q}{\rightarrow}} r$ *et $r$ n'est pas réductible modulo $Q$.*

*Fin de la réduction.* Dans le cas d'une unique indéterminée, l'algorithme 2 stoppe lorsque le terme dominant $\mathrm{lt}(q)$ de $q$ ne divise plus celui de $r$, $\mathrm{lt}(r)$. Aucun autre monôme de $r$ n'est plus alors divisible par $\mathrm{lt}(q)$. L'exemple suivant est emprunté à [38, chapitre 2] et montre que la propriété analogue dans le cas de plusieurs indéterminées n'est pas vérifiée : lorsque le monôme dominant d'un polynôme $p$ n'est divisible par le monôme dominant d'aucun autre polynôme $q$ de $Q$, il est encore possible qu'un monôme de $p$ soit divisible par le monôme dominant de $q$. Heureusement, l'algorithme de réduction peut être adapté pour rétablir l'unicité du reste lorsque l'ordre de termes est fixé.

EXEMPLE. Réduisons $p = x^2y + xy^2 + y^2$ par l'ensemble

$$Q = \{q_1 = xy - 1, q_2 = y^2 - 1\}$$

dans l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[x, y]$ munie de l'ordre de termes lexicographique tel que $x \succeq y$ :

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 + y^2 &= 0 \times (xy - 1) + 0 \times (y^2 - 1) + (x^2y + xy^2 + y^2) \\ &= x(xy - 1) + 0 \times (y^2 - 1) + (xy^2 + x + y^2) \\ &= (x + y)(xy - 1) + 0 \times (y^2 - 1) + (x + y^2 + y), \end{aligned}$$

où tous les polynômes sont écrits en ordre décroissant pour l'ordre $\preceq$. (Rappelons que si le reste est à la fois réductible par $q_1$ et $q_2$, le polynôme $q_1$ est utilisé.)

Le reste $r$ est $x + y^2 + y$ et ni le terme dominant $\mathrm{lt}(q_1) = xy$ de $q_1$, ni celui de $q_2$, $\mathrm{lt}(q_2) = y^2$, ne divisent celui de $r$, $\mathrm{lt}(r) = x$. Mais le deuxième terme $y^2$ apparaissant dans $r$ est divisible par $\mathrm{lt}(q_2) = y^2$, et après avoir sorti le monôme dominant $\mathrm{lm}(r)$ du reste, on peut poursuivre la réduction :

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 + y^2 &= (x + y)(xy - 1) + 0 \times (y^2 - 1) + (x) + (y^2 + y) \\ &= (x + y)(xy - 1) + 1 \times (y^2 - 1) + x + (y + 1) \\ &= (x + y)(xy - 1) + 1 \times (y^2 - 1) + (x + y) + 1 \\ &= (x + y)(xy - 1) + 1 \times (y^2 - 1) + (x + y + 1). \end{aligned}$$

Cette fois, le reste est une somme de monômes dont aucun n'est divisible par les termes dominants des $q_i$.

En reprenant la notation précédemment introduite, on a donc

$$p \xrightarrow[Q]{*} x + y^2 + y \qquad \text{et} \qquad p \xrightarrow[Q]{*} x + y + 1 \downarrow,$$

mais il est faux que $p \xrightarrow[Q]{*} x + y^2 + y \downarrow$. Il est naturel d'exiger que le résultat $r$ d'un algorithme de réduction satisfasse $p \xrightarrow[Q]{*} r \downarrow$.

*Unicité du reste.* Étant donné un polynôme $p$ et un ensemble (fini) de polynômes $q_i$, s'il existe des polynômes $d_i$ et un reste $r$ tel que $p = \sum_i d_i q_i + r$, ce reste $r$ n'est pas défini de façon unique par l'ordre de termes sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, même si l'on ajoute la contrainte qu'aucun de ses monômes ne soit divisible par un des monômes dominants d'un des $q \in Q$. Un autre exemple tiré de [38] illustre ce fait.

EXEMPLE. Procédons comme dans l'exemple précédent pour réaliser la même réduction pour le même ordre de termes, mais en donnant la priorité à $q_2$ plutôt qu'à $q_1$ quand tous deux peuvent être utilisés pour réduire le reste :

$$\begin{aligned}
x^2y + xy^2 + y^2 &= 0 \times (xy - 1) + 0 \times (y^2 - 1) + (x^2y + xy^2 + y^2) \\
&= x(xy - 1) + 0 \times (y^2 - 1) + (xy^2 + x + y^2) \\
&= x(xy - 1) + x(y^2 - 1) + (2x + y^2) \\
&= x(xy - 1) + x(y^2 - 1) + 2x + (y^2) \\
&= x(xy - 1) + (x + 1)(y^2 - 1) + 2x + 1 \\
&= x(xy - 1) + (x + 1)(y^2 - 1) + (2x + 1).
\end{aligned}$$

Le reste est maintenant $2x + 1$. Cette fois encore, par construction,

$$p \xrightarrow[Q]{*} 2x + 1 \downarrow,$$

mais $r$ est différent du reste $x + y + 1$ obtenu dans l'exemple précédent. En un certain sens, rendre « équivalent » la divisibilité par $q_1 = xy - 1$ et par $q_2 = y^2 - 1$ nécessite de dire que $x$ et $y$ sont « équivalents ». Ceci se retrouve dans les deux restes obtenus. Il nous faut un moyen d'indiquer la relation $x - y$.

L'unicité du reste n'est garantie que par l'adjonction de propriétés vérifiées par l'ensemble des polynômes par lesquels on réduit. Je rappelle tout de suite un algorithme de réduction et repousse la considération de ce problème à la section suivante.

**1.2. Réduction d'un polynôme modulo un idéal donné par générateurs.** Étant donné un polynôme $p$ à réduire par un ensemble $Q$, l'algorithme de réduction qui vient juste d'être suggéré renvoie un polynôme $r$ de la forme

$$p - \sum_{q \in Q} w_q q \tag{37}$$

qui n'est plus réductible. Cet algorithme classique est l'un de ceux que j'ai implantés dans mon *package* `Groebner` et que je rappelle dans l'algorithme 3. Il appelle une procédure *SelectPoly* qui choisit un polynôme parmi ceux donnés en arguments. Dans les implantations les plus naïves, le polynôme choisi est le premier élément de la liste. Mais la possibilité de

ALGORITHME : $r = \text{Reduction}(p, Q, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$.

INPUT : $\begin{cases} \text{polynôme } p \in \mathbb{K}[\mathbf{x}] \text{ à réduire,} \\ Q \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}] \text{ un ensemble fini de polynômes} \\ \text{par lesquels réduire,} \\ \text{un ordre de termes } \preceq. \end{cases}$

OUTPUT : reste $r$ de la réduction de $p$ par $Q$, tel que $p \xrightarrow[Q]{*} r \downarrow$.

1. $r = p$ ;
2. $q = 0$ ;
3. tant que $r$ est non nul, faire :
   (a) tant que $R_{r,Q} = \{s \in Q \mid \text{lt}(s) \text{ divise } \text{lt}(r)\}$ n'est pas vide, faire :
      (i) $f = \text{SelectPoly}(R_{r,Q})$ ;
      (ii) $r = r - \frac{\text{lm}(r)}{\text{lm}(f)} f$ ;
   (b) $r = r - \text{lm}(r)$ ;
   (c) $q = q + \text{lm}(r)$ ;
4. renvoyer $q$.

ALGORITHME 3. Réduction

ce choix est maintenue car elle a une forte influence sur la complexité pratique de l'algorithme. Par exemple, il est possible de choisir les polynômes par lesquels on réduit de façon à diminuer le nombre d'étapes élémentaires dans une réduction — mais pas forcément la complexité de chacune d'elles. C'est le choix fait dans la *stratégie normale*, qui fera l'objet de §3.1. Un autre choix possible est de réduire de façon à maintenir la « taille » des expressions intermédiaires, ou leur nombre de monômes, aussi petite que possible.

En réalité, je n'ai pas exactement implanté l'algorithme 3 tel qu'il a été décrit. Dans la pratique, le corps $\mathbb{K}$ des coefficients des polynômes est le corps de fraction d'un anneau $\mathbb{A}$ sur lequel les opérations sont relativement plus efficaces que sur le corps, car elles évitent des réductions au même dénominateur. Lorsqu'on réduit un polynôme $p$ par un polynôme $q$ qui n'est pas unitaire, l'algorithme demande de diviser par le coefficient dominant $\text{lc}(q)$ de $q$ et le programme devrait alors employer des fractions. Ceci serait la source d'une grande inefficacité, car les opérations sur les fractions sont bien plus coûteuses en temps que les opérations arithmétiques de base. Aussi est-ce une bonne chose de chasser les dénominateurs dans chaque polynôme durant l'exécution d'une réduction. Le résultat du calcul n'est plus alors de la forme (37), mais il devient

$$w_p p - \sum_{q \in Q} w_q q.$$

Fort heureusement, cela n'a pas d'autre incidence sur les algorithmes, car leurs résultats sont définis à un multiple près dans $\mathbb{A}$.

**1.3. Extension de la réduction aux algèbres de Ore.** Plusieurs problèmes surgissent pour étendre la notion de réduction et l'algorithme correspondant aux algèbres de polynômes non commutatives :

- le concept d'un ordre de termes impose des contraintes sur l'algèbre pour permettre la compatibilité de cet ordre avec le produit de l'algèbre : le terme dominant d'un produit d'éléments de l'algèbre doit être le produit des termes dominants des facteurs ; cette propriété est à la base de la notion de *filtration*, qui sera introduite au chapitre IV ;
- les idéaux de telles algèbres ne sont en général pas bilatères ; pour conserver une interprétation comme opérateurs agissant sur des fonctions, il est nécessaire de se restreindre au cas des *idéaux à gauche* ;
- la réduction d'un polynôme $p$ par un autre polynôme $q$ nécessite de déterminer s'il existe un terme de $p$ qui soit multiple du terme dominant $\operatorname{lt}(q)$ de $q$ ; cette fois encore, des contraintes sur le produit de l'algèbre rendent cette détermination aisée.

Le premier et le troisième points méritent un commentaire. Pour faire fonctionner une théorie de bases de Gröbner dans les algèbres de Ore, il est nécessaire de restreindre la classe des algèbres envisagées. Jusqu'à la fin de cette section ainsi que dans les sections §§2 et 3, toutes les algèbres de Ore considérées sont données par des paires $(x, \partial)$ d'opérateurs telles que les $\sigma$ et $\delta$ correspondants commutent et telles que :

$$x^\sigma = px + q, \qquad x^\delta = rx + s, \qquad (x^n)^\sigma = (px+q)^n,$$
$$(x^n)^\delta = \sum_{k=0}^{n-1} (px+q)^k (rx+s) x^{n-1-k}.$$

Ces hypothèses peuvent sembler restrictives. En fait, elles donnent un jeu de contraintes simples qui permet la généralisation du cadre commutatif au cadre non commutatif. Elles seront par ailleurs relâchées en §4 au prix d'autres contraintes sur les ordres de termes autorisés pour les réductions. Un exemple type de commutation à laquelle il nous faut renoncer pour cette section est

$$D_x \frac{1}{x} = \frac{1}{x} D_x - \frac{1}{x^2},$$

où $x^{-1}$ doit être vu comme une indéterminée. Une algèbre construite sur cette commutation intervient en particulier pour étudier des fonctions singulières en 0 au voisinage de cette singularité.

*Extension du concept d'ordre de termes.* Malgré la non commutativité des algèbres de Ore, on continue de définir les termes dans un monoïde commutatif, avec la motivation suivante : la multiplication de $x^\alpha\partial^\beta$ par $x^{\alpha'}\partial^{\beta'}$ renvoie un polynôme de forme normale

$$p^{\beta\alpha'}x^{\alpha+\alpha'}\partial^{\beta+\beta'} + \text{polynôme de degré total inférieur à } \alpha+\alpha'+\beta+\beta',$$

et à un coefficient multiplicatif près, le terme dominant du produit est le produit (commutatif) des termes dominants des deux facteurs. Ainsi, toutes les définitions et notations du cas commutatif s'étendent aux algèbres de Ore avec la convention que les termes dominants doivent être vus dans un monoïde commutatif. Remarquons que ce procédé visant à regarder comme commutatif le monoïde non commutatif sur lequel est construite l'algèbre de Ore est équivalent à construire l'*algèbre graduée associée* de l'algèbre de Ore. Voir le chapitre IV pour les définitions et les résultats.

*Extension de la notion de réduction.* Les hypothèses de cette section quant aux commutations régissant les algèbres de Ore conduisent à

$$\partial x^n = p^n x^n \partial + \text{polynôme de degré total inférieur à } n+1,$$

puis à

$$\partial^m x^n = p^{nm} x^n \partial^m + \text{polynôme de degré total inférieur à } n+m.$$

Il suffit donc de changer l'étape

$$r = r - \frac{\operatorname{lm}(r)}{\operatorname{lm}(f)} f$$

de l'algorithme 3 par

$$r = r - \frac{1}{p^{(\deg_\partial r - \deg_\partial f)\deg_x f}} \frac{\operatorname{lm}(r)}{\operatorname{lm}(f)} f,$$

pour obtenir un algorithme de réduction dans les algèbres de Ore.

En effet,

$$\begin{aligned}
&r - \frac{1}{p^{(\deg_\partial r - \deg_\partial f)\deg_x f}} \frac{\operatorname{lm}(r)}{\operatorname{lm}(f)} f \\
&= r - \frac{1}{p^{(\deg_\partial r - \deg_\partial f)\deg_x f}} \frac{\operatorname{lc}(r)}{\operatorname{lc}(f)} \frac{\operatorname{lt}(r)}{\operatorname{lt}(f)} f \\
&= r - \frac{1}{p^{(\deg_\partial r - \deg_\partial f)\deg_x f}} \frac{\operatorname{lc}(r)}{\operatorname{lc}(f)} \Big( p^{(\deg_\partial r - \deg_\partial f)\deg_x f} \operatorname{lt}(r) \\
&\qquad + \text{polynôme de degré total inférieur au degré total de } r \Big) \\
&= \text{un polynôme de degré total inférieur au degré total de } r.
\end{aligned}$$

Maintenant, quelque ordre de termes sur $\mathbb{K}[x][\partial; \sigma, \delta]$ qu'on choisisse, $r$ est réduit par $p$ à ce dernier polynôme. On obtient ainsi une réduction dans les algèbres de Ore qui possède des propriétés similaires à la réduction du cas commutatif.

## 2. Algorithme de Buchberger et extension aux algèbres de Ore

Je rappelle maintenant les algorithmes développés par Bruno Buchberger pour le calcul de bases de Gröbner. Je présente d'abord leur version traditionnelle fondée sur l'algorithme de réduction donné en §1, avant de les étendre au cas des algèbres de Ore.

**2.1. Algorithme de Buchberger.** L'algorithme de réduction s'arrête quand le reste n'a plus de monôme qui puisse être réduit. L'objectif principal de l'algorithme de réduction est de pouvoir tester l'appartenance à un idéal en testant la nullité d'un reste. L'objectif est donc de savoir réaliser un *test à zéro* et nécessite d'assurer que l'ensemble $Q$ des polynômes par lesquels on réduit a la capacité de réduire tous les termes pouvant apparaître comme terme dominant de l'idéal en question. Ceci ne se produit que si $Q$ a la propriété d'être une *base de Gröbner* de l'idéal qu'il engendre, dont la définition est rappelée plus bas. La plupart des définitions et des résultats sont tirés de [38, chapitre 2]. Pour cette raison, aucune démonstration ne sera donnée.

*Cas commutatif.* Les termes dominants des polynômes qui servent à la réduction jouent un rôle majeur, comme indiqué par la définition suivante des bases de Gröbner.

DÉFINITION 7 (Bases de Gröbner, cas commutatif). *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de l'anneau de polynôme $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ qui ne soit pas réduit à zéro. Supposons choisi un ordre de termes sur $\mathbb{A}$. Un ensemble $G = \{g_i\}_{i=1,\dots,t}$ d'éléments de l'idéal $\mathfrak{I}$ est appelé une* base de Gröbner *si*

$$\mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(g_1), \dots, \mathrm{lt}(g_t)) = \mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(\mathfrak{I})).$$

Les propriétés suivantes des bases de Gröbner indiquent leur pouvoir de réduction.

PROPOSITION 3. *Tout idéal non nul $\mathfrak{I}$ admet une base de Gröbner et toute base de Gröbner d'un idéal engendre cet idéal.*

THÉORÈME 2. *Soient $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ une base de Gröbner d'un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et $p$ un élément de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Alors, il existe un unique polynôme $r$ de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ tel que :*

1. *$r$ n'est pas réductible par $G$ ;*
2. *il existe $g \in G$ tel que $p = g + r$.*

*De manière équivalente, $p$ appartient à $\mathfrak{I}$ si et seulement si $p \xrightarrow[G]{*} 0$.*

Maintenant, étant donné un idéal $\mathfrak{I}$ engendré par un ensemble

$$G = \{g_1, \dots, g_t\}$$

de polynômes, le problème est de calculer une base de Gröbner pour $\mathfrak{I}$. Supposons que l'ensemble $G$ ne soit pas une base de Gröbner de $\mathfrak{I}$. Alors, par la définition 7, l'idéal des termes dominant

$$\mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(g_1), \dots, \mathrm{lt}(g_t))$$

est différent de $\mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(\mathfrak{I}))$. L'idée de l'algorithme pour le calcul d'une base de Gröbner de $\mathfrak{I} = \mathrm{Ideal}(G)$ est donc d'ajouter à $G$ des polynômes qui n'augmentent pas l'idéal engendré par les $g_i$ mais qui augmentent l'idéal des termes dominants correspondant. Pour ce faire, il est nécessaire de disposer d'un outil qui, pour deux polynômes $p$ et $q$, renvoie un polynôme dont le terme dominant ne soit pas élément de $\mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(p), \mathrm{lt}(q))$. La définition d'un tel outil, les *$S$-polynômes*, est rappelée avec une définition préliminaire.

DÉFINITION 8. *Soient $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ deux éléments du monoïde $\langle \mathbf{x} \rangle$ et $\boldsymbol{\gamma}$ le $n$-uplet défini par $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Alors, le terme $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\gamma}}$ est appelé* plus petit commun multiple *de $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ et de $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$, et est noté* $\mathrm{lcm}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

DÉFINITION 9 ($S$-polynômes dans le cas commutatif). *Le* $S$-polynôme *de deux polynômes $p$ et $q$ est la combinaison linéaire*

$$\mathrm{Spoly}(p, q) = \mathrm{lc}(q) \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lt}(p), \mathrm{lt}(q))}{\mathrm{lt}(p)} p - \mathrm{lc}(p) \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lt}(p), \mathrm{lt}(q))}{\mathrm{lt}(q)} q.$$

En vue d'un algorithme de calcul de bases de Gröbner, considérons la réduction d'un polynôme $p$ par un ensemble $Q$ donnant un reste $r$. En ce qui concerne les idéaux de termes dominants, on a :

$$\mathrm{Ideal}(\{\mathrm{lm}(q)\}_{q \in Q}, \mathrm{lm}(p)) \subseteq \mathrm{Ideal}(\{\mathrm{lm}(q)\}_{q \in Q}, \mathrm{lm}(r)).$$

Du point de vue intuitif, ceci signifie que le nouvel ensemble de générateurs

$$Q \cup \{r\}$$

est capable de réduire plus de polynômes que le précédent,

$$Q \cup \{p\}.$$

Puisque l'idéal des termes dominants doit être le plus grand possible dans le cas d'une base de Gröbner, le résultat suivant est naturel. Il conduit directement à l'algorithme de Buchberger.

THÉORÈME 3. *Un ensemble $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ d'éléments d'un idéal $\mathfrak{I}$ est une base de Gröbner de $\mathfrak{I}$ si et seulement si $G$ réduit à zéro tous les $S$-polynômes* $\mathrm{Spoly}(g, g')$ *de deux éléments quelconques de $G$.*

DÉMONSTRATION. Comme pour tous les résultats de cette section, je ne donnerai aucune preuve et ferai référence à [38, chapitre 2], à [52, chapitre 10] ou à [19]. ■

Je rappelle l'algorithme de Buchberger en algorithme 4. Il fait référence à une procédure *Spoly* qui calcule le $S$-polynôme de deux polynômes. Cet algorithme produit et réduit le plus possible de $S$-polynômes entre deux éléments de l'ensemble $G$ en entrée. Ensuite, l'algorithme adjoint à $G$ ceux des restes des réductions de ces $S$-polynômes qui ne sont pas zéro, et boucle jusqu'à ce qu'aucune nouvelle paire ne puisse être produite. Quand il s'arrête, l'idéal des termes dominants

$$\mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(g_1), \ldots, \mathrm{lt}(g_{t'}))$$

ALGORITHME : $G = \text{BuchbergerAlgo}(P, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$.

INPUT : $\begin{cases} \text{un sous-ensemble } P = \{p_1, \dots, p_k\} \text{ de } \mathbb{K}[\mathbf{x}], \\ \text{un ordre de termes } \preceq. \end{cases}$

OUTPUT : base de Gröbner $G$ engendrant le même idéal.

1. $G = P$ ;
2. $B = \{(p_i, p_j) \mid 1 \leq i < j \leq k\}$ ;
3. tant que $B$ n'est pas vide,
   (a) $(p_i, p_j) = \text{SelectPair}(B, G)$ ;
   (b) $B = B \setminus \{(p_i, p_j)\}$ ;
   (c) $h = \text{Reduction}(\text{Spoly}(p_i, p_j), G, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$ ;
   (d) si $h \neq 0$, faire
      (i) ajouter $h$ à $G$ par $k = k + 1$ et $p_k = h$ ;
      (ii) $B = B \cup \{(p_i, p_k) \mid 1 \leq i < k\}$ ;
4. renvoyer $G$.

ALGORITHME 4. Algorithme de Buchberger

a été saturé et vaut Ideal(lt $\mathfrak{I}$). Alors, $\{g_i\}_{i=1,\dots,t'}$ est une base de Gröbner de l'idéal $\mathfrak{I}$.

Il y a néanmoins quelque liberté dans l'exécution de l'algorithme, selon l'ordre employé pour traiter les paires. C'est pourquoi l'algorithme est paramétré par une procédure *SelectPair* qui choisit la paire à traiter parmi celles qui ne l'ont pas encore été.

Remarquons que les paires qui interviennent dans l'algorithme 4 ne sont qu'une instance du concept de *paires critiques* de la théorie générale de la récriture.

*Cas des algèbres de Ore.* Cet algorithme se généralise aux algèbres de Ore moyennant une unique modification : les $S$-polynômes doivent être redéfinis.

DÉFINITION 10 ($S$-polynômes dans les algèbres de Ore). *Le $S$-polynôme de deux polynômes $p$ et $q$ d'une algèbre de Ore* $\mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ *est défini comme la combinaison linéaire*

$$\text{Spoly}(p, q) = \text{lc}(q)\frac{\text{lcm}(\text{lt}(p), \text{lt}(q))}{\text{lt}(p)}p - \text{lc}(p)\frac{\text{lcm}(\text{lt}(p), \text{lt}(q))}{\text{lt}(q)}q,$$

*où les quotients entre termes dominants doivent être pensés* entre monômes commutatifs.

En ce qui concerne la théorie, tout ce qui a été dit du cas commutatif reste valable. En effet, les preuves des résultats précédents ne font intervenir que les monômes dominants des polynômes considérés et la propriété agréable que le terme dominant d'un produit est le produit des termes dominants. Mais elles ne font jamais intervenir les coefficients des termes non dominants.

**2.2. Inter-réduction d'un ensemble de polynômes et bases de Gröbner réduites.** L'algorithme 4 dont il a été question en §2.1 renvoie *une* base de Gröbner de l'idéal donné en entrée, alors qu'il existe en général de nombreuses bases de Gröbner d'un idéal donné. Le problème de l'unicité d'une base de Gröbner est résolu par des conditions additionnelles, qui conduisent aux *bases de Gröbner réduites.*

Par ailleurs, une des applications majeures des bases de Gröbner est le calcul des restes de réductions par une base de Gröbner d'un idéal. Ce calcul induit une perte d'efficacité notable lorsque la base de Gröbner utilisée n'est pas « réduite », en un sens qui va bientôt être formalisé. Du point de vue de l'intuition, le manque de réduction se traduit par une sorte de redondance entre les éléments de la base de Gröbner.

Débutons par un exemple pour illustrer ce dernier point.

Exemple. Considérons $\mathbb{Q}[x,y,z,t]$ muni de l'ordre de termes lexicographique tel que $x \succeq y \succeq z \succeq t$. Réduisons $p = x^5$ par l'ensemble

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

où

$$\begin{aligned} p_1 &= x^5 - y^4 + 1, \\ p_2 &= y^4 - z^3, \\ p_3 &= z^3 - t^2, \\ p_4 &= t^2 - 1. \end{aligned}$$

L'ensemble $P$ est une base de Gröbner de l'idéal $\mathfrak{I}$ qu'il engendre, ce qui s'obtient immédiatement par application d'un critère qui sera rappelé en §3, ou par vérification que chacun des $S$-polynômes se réduit à zéro. Par exemple :

$$\begin{aligned} \operatorname{Spoly}(p_1, p_2) &= y^4 p_1 - x^5 p_2 \\ &= x^5 z^3 - y^8 + y^4 \underset{p_1}{\rightarrow} -y^8 + y^4 z^3 + y^4 - z^3 \underset{p_2}{\rightarrow} 0, \end{aligned}$$

les autres réductions à zéro s'obtenant plus simplement encore. Le résultat de la réduction de $p$ par $P$ est lui aussi trivialement zéro, après trois étapes intermédiaires. De même, la réduction de $x^{10}$ demande huit étapes, et celle de $x^{10}(y + z + t)$ en demande vingt-quatre.

La première réduction montre que $x^5$ est dans $\mathfrak{I}$. Ainsi, si l'on pose

$$p_0 = x^5,$$

le nouvel ensemble $P' = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ engendre encore $\mathfrak{I}$. Puisque les idéaux de termes dominants de $P$ et de $P'$ sont identiques, $P'$ est encore une base de Gröbner de $\mathfrak{I}$. Néanmoins, les nombres d'étapes dans les réductions envisagées tombent respectivement à 1, 2 et 6 au lieu de 3, 8 et 24.

La proposition suivante permet de diminuer le nombre d'éléments d'une base de Gröbner.

PROPOSITION 4. *Soit $G$ une base de Gröbner d'un idéal $\mathfrak{I}$, et $g$ un élément de $G$ tel que*

$$\mathrm{lt}(g) \in \mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(G \setminus \{g\})).$$

*Alors $G \setminus \{g\}$ est encore une base de Gröbner de $\mathfrak{I}$.*

Les définitions qui suivent évitent le problème de redondance mentionné dans le dernier exemple.

DÉFINITION 11. *Une* base de Gröbner minimale *d'un idéal $\mathfrak{I}$ est une base de Gröbner $G$ de $\mathfrak{I}$ telle que pour tout $g$ de $G$,*

1. $\mathrm{lc}(g) = 1$,
2. $\mathrm{lt}(g) \notin \mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(G \setminus \{g\}))$.

*En d'autres termes, le coefficient dominant de chaque élément de la base vaut 1 et son terme dominant n'est pas dans l'idéal des termes dominants engendrés par les termes dominants des autres éléments de la base.*

DÉFINITION 12. *Une* base de Gröbner réduite *d'un idéal $\mathfrak{I}$ est une base de Gröbner $G$ de $\mathfrak{I}$ telle que pour tout $g$ de $G$,*

1. $\mathrm{lc}(g) = 1$,
2. *aucun des termes de $g$ ne fait partie de* $\mathrm{Ideal}(\mathrm{lt}(G \setminus \{g\}))$.

Remarquons que toute base de Gröbner réduite est une base de Gröbner minimale. La proposition suivante résous le problème de l'unicité.

PROPOSITION 5. *Une fois que l'algèbre de polynômes ambiante a été munie d'un ordre de termes, tout idéal possède une unique base de Gröbner réduite.*

EXEMPLE. La base de Gröbner réduite (unique) de

$$\mathfrak{I} = \mathrm{Ideal}(x^5 - y^4 + 1, y^4 - z^3, z^3 - t^2, t^2 - 1)$$

par rapport à l'ordre du degré total est

$$G = \{x^5, y^4 - 1, z^3 - 1, t^2 - 1\}.$$

L'ensemble $G$ est encore une base de Gröbner réduite de $\mathfrak{I}$ pour l'ordre lexicographique tel que $x \succeq y \succeq z \succeq t$. Il est clair que les réductions envisagées dans l'exemple du début de cette section s'effectuent en moins d'étapes avec cette base $G$ qu'avec la base initiale.

La question est maintenant d'être capable de transformer une base de Gröbner donnée en une base de Gröbner réduite. L'algorithme 5 réalise cette transformation en deux étapes. D'abord, les polynômes en entrée sont testés pour n'en conserver qu'un sous-ensemble qui engendre le même idéal : tout polynôme qui est une combinaison des autres est retiré. De plus, les polynômes sélectionnés sont réduits en termes de ceux précédemment sélectionnés. Pour cette étape, le rôle de la procédure *SelectPoly* est de

ALGORITHME : $G = \text{InterReduction}(P, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$.

INPUT : $\begin{cases} \text{un ensemble } E \text{ de polynômes dans } \mathbb{K}[\mathbf{x}], \\ \text{un ordre de termes } \preceq \text{ sur } \mathbb{K}[\mathbf{x}]. \end{cases}$

OUTPUT : ensemble réduit engendrant le même idéal.

1. $R = E$, $P = \varnothing$ ;
2. $h = \text{SelectPoly}(R)$ ;
3. $R = R \setminus \{h\}$ ;
4. $h = \text{Reduction}(h, P, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$ ;
5. si $h \neq 0$, faire
   (a) $Q = \{q \in P \mid \text{lt}(h) \text{ divise } \text{lt}(q)\}$ ;
   (b) $R = R \cup Q$, $P = (P \setminus Q) \cup \{h\}$ ;
6. $E' = \varnothing$ ;
7. pour chaque $h \in P$,
   (a) $h = \text{Reduction}(h, P \setminus \{h\}, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$ ;
   (b) $E' = E' \cup \{h\}$ ;
8. renvoyer $E'$.

ALGORITHME 5. Algorithme d'inter-réduction

choisir les polynômes qui nécessiteront le moins de travail lors des inter-réductions ultérieures. Le résultat de cette phase est une base de Gröbner minimale. La seconde phase effectue une inter-réduction des polynômes sélectionnés. Ainsi, les polynômes finaux consistent en des combinaisons linéaires des termes les plus bas possible pour engendrer l'idéal.

Il suffit maintenant d'appeler *InterReduction* à la fin de *BuchbergerAlgo* pour obtenir un algorithme de calcul de base de Gröbner réduite.

## 3. Améliorations de l'algorithme de Buchberger

Une première remarque est que la complexité de l'algorithme de Buchberger est intrinsèquement élevée. Plus précisément, si $n$ est le nombre d'indéterminées engendrant l'algèbre de polynômes et $d$ est le degré maximum des polynômes en entrée, la complexité de l'algorithme est $d^{O(n^2)}$, bien qu'elle tombe à $d^{O(n)}$ avec quelques hypothèses sur l'entrée et sur l'implantation (voir [67, section 6]). Ces complexités exponentielles s'entendent à la fois en temps et en espace, car elles sont essentiellement reliées à la taille de la sortie. (Cette sortie est uniquement déterminée par l'entrée, dans le cas le plus intéressant de bases de Gröbner réduites.) L'effort de recherche pour améliorer la complexité pratique de l'algorithme de Buchberger a mené à un certain nombre d'optimisations classiques, en proposant en particulier plusieurs stratégies de sélection des paires.

Un autre point important est que le coût des réductions croît avec l'avancée de l'algorithme et avec la taille des polynômes en jeu. Dans le même temps, un grand nombre des réductions de $S$-polynômes sont des réductions à zéro, et n'apportent donc rien à l'idéal des termes dominants en construction.

Ainsi, la direction d'amélioration la plus naturelle est de chercher à déterminer le plus rapidement possible si une paire donnée mènera à une réduction à zéro ; ceci conduit à la « stratégie normale » de Buchberger, déjà ancienne, ainsi qu'à la « stratégie du sucre », plus récente.

**3.1. Stratégie normale.** L'intérêt de cette stratégie est qu'elle constitue un bon point de départ pour l'étude de stratégies plus raffinées, qui en reprennent plusieurs idées. Cette stratégie peut être vue comme « localement optimale » : les choix effectués pour une réduction visent à optimiser chacune des réductions les unes après les autres, sans vraiment tenir compte d'information sur l'ensemble de l'idéal. Les résultats de Buchberger pour le cadre commutatif sont d'abord rappelés avant d'être étendus au cas des algèbres de Ore.

*Cas des algèbres de polynômes commutatifs.* Deux critères permettent de rejeter aisément des paires inintéressantes. Ils découlent des deux propositions suivantes empruntées à [52, chapitre 10]. (Ces résultats sont aussi prouvés dans [38, chapitre 2].)

PROPOSITION 6. *Pour deux polynômes quelconques $p$ et $q$,*

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p), \operatorname{lt}(q)) = \operatorname{lt}(p)\operatorname{lt}(q) \Rightarrow \operatorname{Spoly}(p,q) \underset{\{p,q\}}{\overset{*}{\rightarrow}} 0.$$

DÉMONSTRATION. Soient $p$ et $q$ tels que

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p), \operatorname{lt}(q)) = \operatorname{lt}(p)\operatorname{lt}(q). \tag{38}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spoly}(p,q) &= \operatorname{lc}(q)\frac{\operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p), \operatorname{lt}(q))}{\operatorname{lt}(p)}p - \operatorname{lc}(p)\frac{\operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p), \operatorname{lt}(q))}{\operatorname{lt}(q)}q \\ &= \operatorname{lc}(q)\operatorname{lt}(q)p - \operatorname{lc}(p)\operatorname{lt}(p)q \\ &= \operatorname{lm}(q)[p - \operatorname{lm}(p)] - \operatorname{lm}(p)[q - \operatorname{lm}(q)].\end{aligned} \tag{39}$$

L'hypothèse (38) implique que le monômes dominants $\operatorname{lm}(p)$ et $\operatorname{lm}(q)$ ne font intervenir aucune indéterminée en commun et donc qu'il ne peut y avoir aucune annulation entre les termes de la dernière différence. Alors, $\operatorname{lm}(\operatorname{Spoly}(p,q))$ est soit $\operatorname{lm}(q)\operatorname{lm}(p - \operatorname{lm}(p))$, soit $\operatorname{lm}(p)\operatorname{lm}(q - \operatorname{lm}(q))$.

Sans perte de généralité, supposons le premier cas. Alors,

$$\operatorname{lm}(q) \underset{q}{\rightarrow} \operatorname{lm}(q) - q$$

fournit

$$\operatorname{lm}(q)[p - \operatorname{lm}(p)] \underset{q}{\rightarrow} [\operatorname{lm}(q) - q][p - \operatorname{lm}(p)].$$

De manière similaire,

$$\operatorname{lm}(p)[q-\operatorname{lm}(q)] \underset{p}{\rightarrow} [\operatorname{lm}(p)-p][q-\operatorname{lm}(q)].$$

Finalement, en additionnant les deux résultats, on déduit

$$\operatorname{Spoly}(p,q) \overset{*}{\underset{\{p,q\}}{\rightarrow}} 0.$$

■

Proposition 7. *Un ensemble de polynômes $G$ est une base de Gröbner si et seulement si pour toute paire de polynômes $(p,q)\in G^2$,*

1. *soit*

$$\operatorname{Spoly}(p,q) \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} 0,$$

2. *soit il existe $h\in G$ distinct de $p$ et de $q$ tel que*

$$\operatorname{lt}(h) \mid \operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p),\operatorname{lt}(q)), \qquad \operatorname{Spoly}(p,h) \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Spoly}(q,h) \overset{*}{\underset{G}{\rightarrow}} 0.$$

Ces propositions se convertissent en critères de la manière qui suit.

Critère 1. *La réduction du $S$-polynôme d'une paire $(p_i,p_j)$ considérée durant l'exécution de l'algorithme de Buchberger peut être omise dès que*

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p_i),\operatorname{lt}(p_j)) = \operatorname{lt}(p_i)\operatorname{lt}(p_j).$$

Critère 2. *La réduction du $S$-polynôme d'une paire $(p_i,p_j)$ considérée durant l'exécution de l'algorithme de Buchberger peut être omise dès qu'il existe un $k$ tel que*

$$\operatorname{lt}(p_k) \mid \operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p_i),\operatorname{lt}(p_j)),$$

*où les $S$-polynômes correspondant aux deux paires $(p_i,p_k)$ et $(p_k,p_j)$ ont déjà été réduits par l'algorithme.*

L'algorithme 6 implante l'algorithme de Buchberger pour calculer une base de Gröbner réduite et évite la réduction d'un $S$-polynôme dès que l'un de ces critères est applicable. Pour ce faire, il fait appel aux fonctions *Criterion1* et *Criterion2* qui renvoient « vrai » si le critère correspondant est vérifié, « faux » dans le cas contraire. Elles déterminent quand la réduction du $S$-polynôme considéré peut être évitée. Par ailleurs, l'algorithme doit choisir quelle paire traiter en premier. Cette tâche est réalisée par la fonction *SelectPair*. Bruno Buchberger et Franz Winkler ont montré [31] qu'une bonne stratégie de sélection est de traiter en priorité les paires dont le p.p.c.m. des termes dominants est le plus petit. Cette sélection accroît la fréquence de rejet *a priori* par les critères.

L'utilisation des deux critères en conjonction avec ce schéma de sélection de paires est connu sous le nom de « stratégie normale de Buchberger ». En fait, mieux que de rejeter une paire dès qu'un des critères s'applique, il est possible d'agencer les tests des critères dans un ordre qui maximise le nombre de paires rejetées par l'utilisation des critères. En effet, il est possible

ALGORITHME : $G = \text{GröbnerBasis}(P, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$.

INPUT : $\begin{cases} \text{un sous-ensemble } P = \{p_1, \ldots, p_k\} \text{ de } \mathbb{K}[\mathbf{x}], \\ \text{un ordre de termes } \preceq. \end{cases}$

OUTPUT : base de Gröbner $G$ engendrant le même idéal.

1. $G = \text{InterReduction}(P, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$ ;
2. $B = \{(p_i, p_j) \mid 1 \leq i < j \leq k\}$ ;
3. tant que $B$ n'est pas vide,
   (a) $(p_i, p_j) = \text{SelectPair}(B, G)$ ;
   (b) $B = B \setminus \{(p_i, p_j)\}$ ;
   (c) si Criterion1$(B, G)$ ou Criterion2$((p_i, p_j), B, G)$, alors
      (i) $h = \text{Reduction}(\text{Spoly}(p_i, p_j), G, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$ ;
      (ii) si $h \neq 0$, faire
         (A) ajouter $h$ à $G$ par $k = k + 1$ et $p_k = h$ ;
         (B) $B = B \cup \{(p_i, p_k) \mid 1 \leq i < k\}$ ;
4. $R = \{g \in G \mid \exists g' \in G \quad g' \neq g \Rightarrow \text{lt}(g') \text{ divise } \text{lt}(g)\}$ ;
5. renvoyer InterReduction$(G \setminus R, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$.

ALGORITHME 6. Algorithme de Buchberger avec post-réduction

d'éviter que la possibilité de rejet d'une paire par un critère ne soit masquée par le rejet préalable d'une autre paire par un critère. Je ne détaillerai pas cet algorithme, qui est décrit comme l'algorithme GRÖBNERNEW2 dans [19], et qui a un effet important sur la complexité pratique du calcul de bases de Gröbner. Notons que l'étape de pré-réduction est optionnelle et pourrait être omise.

Pour finir, puisque nous disposons d'algorithmes pour calculer la base de Gröbner *réduite* pour tout idéal, j'emploierai dorénavant « base de Gröbner » pour « base de Gröbner réduite ».

*Cas des algèbres de Ore.* On a vu que le concept de réduction est bien défini dans le cadre des algèbres de Ore. Les algorithmes 5 et 6 ne peuvent cependant pas être implantés tels quels dans un cadre non commutatif, car certains des résultats sur lesquels ils reposent dépendent de façon cruciale de la commutativité. Nous allons voir comment généraliser ces algorithmes en en rendant possible une implantation.

En premier lieu, je prouve sur un exemple que le critère 1 est faux dans le cas non commutatif — tout au moins sans plus d'hypothèse.

EXEMPLE. Soient $p = x$ et $q = D_x$ dans l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}[x][D_x; 1, D_x]$ munie de l'ordre de termes lexicographique tel que $D_x \succeq x$. Alors, le $S$-polynôme $\text{Spoly}(p, q)$ vaut $D_x p - x q = 1$ qui n'est pas réductible, sans pour autant être zéro. La paire $(x, D_x)$ est donc un contre-exemple au critère 1 dans le cas non commutatif.

En analysant la preuve du critère 1, il apparaît que l'égalité (39) n'est valable que si les termes dominants $\operatorname{lt}(p)$ et $\operatorname{lt}(q)$ commutent. Une idée est donc d'adjoindre l'hypothèse que les termes dominants de $p$ et de $q$ commutent. Ceci conduit à l'exemple suivant.

Exemple. Soient $p = M + x$ et $q = N + D_x$ dans une algèbre de Ore engendrée par un ensemble d'indéterminées incluant $x$ et $D_x$. Supposons que $M$ et $N$ sont respectivement les monômes dominants de $p$ et de $q$ et qu'ils commutent. Supposons aussi que ni $x$ ni $D_x$ n'apparaissent dans ces termes dominants. (Ce cas est par exemple possible dans

$$\mathbb{K}[x, y, z][D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y][D_z; 1, D_z]$$

avec $p = y + x$ et $q = z + D_x$ et un ordre de termes adéquat.) Alors,

$$\operatorname{Spoly}(p, q) = N(M + x) - M(N + D_x) = xN - MD_x,$$

et aucune autre simplification n'est possible dans ce polynôme.

Ensuite,

$$\operatorname{Spoly}(p, q) \underset{p}{\rightarrow} xN + xD_x + 1 \underset{q}{\rightarrow} 1,$$

qui n'est plus réductible sans pour autant être zéro.

Par ailleurs,

$$\operatorname{Spoly}(p, q) \underset{q}{\rightarrow} -xD_x - MD_x \underset{p}{\rightarrow} 1,$$

qui n'est pas réductible mais n'est pas zéro. La paire $(M + x, N + D_x)$ est donc un autre contre-exemple au critère 1 dans le cas non commutatif.

Ainsi, il semble que la généralisation du critère 1 soit sans espoir à l'exception du cas où toutes les indéterminées de $p$ commutent avec toutes les indéterminées de $q$.

Proposition 8. *Lorsque toutes les indéterminées de $p$ commutent avec toutes les indéterminées de $q$,*

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{lt}(p), \operatorname{lt}(q)) = \operatorname{lt}(p)\operatorname{lt}(q) \Rightarrow \operatorname{Spoly}(p, q) \underset{\{p,q\}}{\overset{*}{\rightarrow}} 0.$$

Démonstration. Comme dans le cas commutatif, il n'y a aucune annulation entre les différents termes de $\operatorname{Spoly}(p, q)$. Maintenant, chaque réduction possible par $p$ ou par $q$ nécessite de multiplier le polynôme en question par un monôme en les indéterminées de l'autre polynôme. Tout se passe donc comme dans le cas commutatif, où

$$\operatorname{Spoly}(p, q) \underset{\{p,q\}}{\overset{*}{\rightarrow}} 0.$$

■

Critère 1'. *La réduction du $S$-polynôme d'une paire $(p_i, p_j)$ considérée durant l'exécution de l'algorithme de Buchberger peut être omise dès que* *toutes les indéterminées de p commutent avec toutes les indéterminées de q et que*

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{lt}(p_i), \mathrm{lt}(p_j)) = \mathrm{lt}(p_i)\,\mathrm{lt}(p_j).$$

En ce qui concerne le critère 2, la situation est différente : la proposition 7 est un résultat général de la théorie de la récriture, et qui est encore valable dans les algèbre de Ore, ainsi que le critère 2. En fait, les deux critères utilisés dans le cas commutatif ont des significations différentes :

- le critère 2 affirme que la paire $(p_i, p_j)$ est une paire « inutile » : sa réduction renverra 0 à cause du contexte de calcul (les deux paires
$$(p_i, p_k) \qquad \text{et} \qquad (p_k, p_j)$$
ont déjà été réduites), si bien que sa réduction serait un calcul redondant ;
- le critère 1 affirme que la paire $(p_i, p_j)$ est une paire « triviale » : le reste de la réduction ne peut pas être déduit du contexte des calculs précédents, mais la réduction conduira trivialement à 0.

**3.2. Stratégie du sucre.** L'idée de la « stratégie du sucre » est de construire l'idéal des termes dominants d'une façon globale. Soient $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{x}, y]$ et

$$L_n = \mathrm{lt}(\mathfrak{I}) \cap y^n \mathbb{K}[\mathbf{x}].$$

Alors,

$$\mathrm{lt}(\mathfrak{I}) = \bigcup_{n \geq 0} L_n$$

et $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'idéaux. La « stratégie du sucre » cherche à calculer les idéaux $L_n$ les uns après les autres, de façon que les calculs faits de $L_0$ à $L_n$ aident pour le calcul de $L_{n+1}$.

*Cas des algèbres de polynômes commutatifs.* Je rappelle ici la stratégie présentée dans [53]. Toutes les paires en attente de traitement sont marquées avec leur « sucre » ; il en est de même des polynômes par lesquels on réduit. De manière informelle, ce sucre représente le degré d'une indéterminée fantôme additionnelle qui serait utilisée pour homogénéiser les polynômes. Les réductions sont réalisées à partir des paires de plus petit sucre d'abord, et par les polynômes réducteurs de plus petit sucre d'abord. Au début de l'exécution de l'algorithme, le sucre de chaque polynôme est fixé à son degré total. Ensuite les règles suivantes sont appliquées à chaque opération entre polynômes :

$$s(pq) = s(p) + s(q),$$
$$s(p+q) = \max(s(p), s(q)),$$

où $s(p)$ est le sucre de $p$. (Remarquons que si une simplification a lieu lors d'une somme, elle n'est pas prise en compte par son sucre ; c'est bien à cela que sert l'indéterminée fantôme.)

*Cas des algèbres de Ore.* J'ai implanté la stratégie du sucre dans le contexte des algèbres de Ore. La même interprétation en termes d'idéal homogénéisé y reste valable, bien qu'il ne semble pas possible d'y voir une quelconque connexion avec des variétés projectives, au contraire du cadre commutatif, et qui permettrait une meilleure compréhension de la stratégie.

**3.3. *Trace lifting.*** Une dernière amélioration [102, 104] a permis une accélération impressionnante du programme dans le cas où le corps $\mathbb{K}$ est un corps de fractions rationnelles en des paramètres transcendants, par exemple

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha).$$

Cette méthode du *trace lifting* s'applique aussi bien dans le cas commutatif que dans le cas d'algèbre de Ore (en se restreignant à des *constantes* en paramètres).

Une interprétation des raisons de l'efficacité d'une stratégie de sélection des $S$-polynômes dans l'algorithme de Buchberger est qu'on a tout intérêt à ne pas sélectionner trop tôt une réduction « inutile », coûteuse en temps, mais qui renvoie zéro. Au contraire, la réduction d'une paire « utile » peut permettre d'éliminer le besoin de calcul de plusieurs paires, en liaison avec le critère 2.

L'idée du *trace lifting* est la suivante : avant d'effectuer la réduction d'un polynôme $p_\alpha$ par la base $G_\alpha$ en cours de construction, on donne temporairement à $\alpha$ une *valeur numérique* $\alpha_0$ et on commence par effectuer la réduction de $p_{\alpha_0}$ par $G_{\alpha_0}$. Ce calcul est bien plus rapide que le calcul générique en $\alpha$. Si le résultat de la réduction pour $\alpha = \alpha_0$ est non nul, alors *a fortiori*, la réduction pour $\alpha$ générique est une réduction « utile » qui est faite immédiatement. Sinon, la réduction pour $\alpha$ générique est retardée, dans l'espoir d'être ultérieurement éliminée par un critère.

## 4. Cas des algèbres de Ore générales

Dans les cas non commutatifs, on distingue entre les idéaux à gauche, les idéaux à droite et les idéaux bilatères ; dans le cas commutatif, les trois espèces se confondent. Un anneau est *noethérien à gauche* (respectivement *noethérien à droite, noethérien)* quand il ne contient aucune chaîne infinie d'idéaux à gauche (respectivement à droite, bilatères) qui soit strictement croissante. Le caractère noethérien à gauche est une condition commode pour assurer que les bases de Gröbner d'idéaux à gauche soient finies. Malheureusement, certaines algèbres de Ore ne sont pas noethériennes à gauche. Un exemple est donné par Volker Weispfenning dans [108], avec l'algèbre de Ore polynomiale

$$\mathbb{Q}[x][M; M, 0],$$

où $M$ est l'opérateur de Mahler vérifiant la règle de commutation

$$Mx = x^p M$$

pour un entier $p > 1$ (voir le tableau 2, p. 37). Soit $\mathfrak{I}_n$ l'idéal à gauche engendré par

$$\{x, xM, \ldots, xM^n\}.$$

Alors,

$$xM^{n+1} \notin \mathfrak{I}_n,$$

et $(\mathfrak{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne infinie strictement croissante. Ainsi, tous les idéaux à gauche n'admettent pas une base finie, un exemple étant

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{I}_n.$$

(De façon surprenante, ceci contredit la proposition 8.2 p. 35 dans [36].)

Le cas des *anneaux de polynômes de type résoluble* étudié dans [59] par Abdelilah Kandri-Rody et Volker Weispfenning est intermédiaire entre le cas purement non commutatif des algèbres associatives libres sur un ensemble d'indéterminées [71, 73] et le cas commutatif. Un tel anneau est défini comme le quotient de la $\mathbb{K}$-algèbre associative libre $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ par les relations

$$x_j x_i = c_{i,j} x_i x_j + p_{i,j}$$

pour $i < j$, pour des éléments $c_{i,j} \in \mathbb{K}$ non nuls et des polynômes $p_{i,j}$ de l'anneau plus petits que $x_i x_j$ par rapport à un ordre de termes fixé. Ces anneaux sont noethériens à gauche et à droite, et donc noethériens. Même alors, la finitude des bases de Gröbner et la terminaison de l'algorithme de Buchberger dépendent de l'ordre de termes choisi pour définir la base de Gröbner. En termes simples, la terminaison de l'algorithme de Buchberger dans les anneaux de polynômes de type résoluble est garantie pour tous les ordres de termes $\preceq$ tels que $p_{i,j} \preceq x_i x_j$ pour tout $i$ et tout $j$. Pour prendre en compte le cas des algèbres de Ore, un cadre légèrement plus général est nécessaire, dans lequel les indéterminées $x_i$ sont assujetties à des règles de commutation avec les éléments $a$ du corps de base $\mathbb{K}$. Ces règles sont de la forme

$$x_i a = a^{\sigma_i} x_i + a^{\delta_i}.$$

Il est possible d'étendre les idées de [59] à ce contexte, et ce fut fait dans la thèse de Heinz Kredel [66].

Comme dans le cas commutatif, les bases de Gröbner sont définies par rapport à des ordres de termes qui permettent de généraliser le concept de terme de plus haut degré utilisé dans la division euclidienne. Ceci s'obtient en considérant le monoïde $T$ des *termes* de l'algèbre. Toutes les algèbres pour lesquelles sont définies des bases de Gröbner ont pour $\mathbb{K}$-espace vectoriel sous-jacent un anneau de polynômes $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$ pour un $n$-uplet d'indéterminées commutatives $\mathbf{u}$. L'ensemble des *termes* est alors le monoïde commutatif $T$ engendré par les $u_i$. Rappelons la définition 4, p. 63, qu'un ordre de termes est un ordre total de $T$ compatible avec le produit et qui place 1 comme plus petit élément.

La définition des bases de Gröbner est donnée en termes de *réductions*, dont la notion a été définie par la définition 6, p. 65. La notation $p \xrightarrow[G]{*} r$ indique que $p$ se réduit à $r$ modulo $G$. Le théorème qui suit définit les bases de Gröbner par des propriétés caractéristiques équivalentes, et donne une condition suffisante pour qu'une algèbre de Ore possède des bases de Gröbner finies et pour que ces bases puissent être calculées par une version non commutative de l'algorithme de Buchberger.

THÉORÈME 4 (Bases de Gröbner dans algèbres de Ore). *Soit*

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$$

*une algèbre de Ore polynomiale telle que $\boldsymbol{\partial}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\delta}$ et $\mathbf{x}$ satisfassent des relations du type*

$$\partial_i x_j = (a_{i,j} x_j + b_{i,j}) \partial_i + c_{i,j}(\mathbf{x}), \qquad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s,$$

*avec $b_{i,j} \in \mathbb{K}$, $a_{i,j} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, et $c_{i,j} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$. En d'autres termes, le polynôme*

$$x_j^{\sigma_i} = a_{i,j} x_i + b_{i,j}$$

*est de degré 1 en $x_i$ et $x_j^{\delta_i} = c_{i,j}(\mathbf{x})$ est un polynôme quelconque en $\mathbf{x}$.*

*Soit $\mathfrak{I}$ un idéal à gauche de $\mathbb{O}$, de base $G$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout $(f, f_1, f_2) \in \mathbb{O}^3$, si $f \xrightarrow[G]{*} f_1$ et $f \xrightarrow[G]{*} f_2$, il existe $f' \in \mathbb{O}$ tel que $f_1 \xrightarrow[G]{*} f'$ et $f_2 \xrightarrow[G]{*} f'$ ;*
2. *pour tout $(f, g) \in \mathbb{O}^2$ tel que $f - g \in \mathfrak{I}$, il existe $h \in \mathbb{O}$ tel que $f \xrightarrow[G]{*} h$ et $g \xrightarrow[G]{*} h$ ;*
3. *pour tout $f \in \mathfrak{I}$, $f \xrightarrow[G]{*} 0$ ;*
4. *pout tout $f$ non nul dans $\mathfrak{I}$, $f$ est réductible modulo $G$ ;*
5. *pour tout $f$ non nul dans $\mathfrak{I}$, il existe $g \in G$ dont le terme dominant divise celui de $f$.*

*Quand une base $G$ d'un idéal $\mathfrak{I}$ vérifie ces propriétés, elle est appelée une* base de Gröbner (à gauche) *de $\mathfrak{I}$.*

*De surcroît, $\mathbb{O}$ est noethérien à gauche et une version non commutative de l'algorithme de Buchberger termine pour les ordres de termes pour lesquels tous les $\partial_i$ sont plus grands que les $x_j$. Quand de plus tous les $c_{i,j}$ sont de degré total au plus 1 en les $x_i$, l'algorithme de Buchberger termine pour tout ordre de termes sur $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\partial}$. Dans tous les cas de terminaison, l'algorithme de Buchberger calcule une base de Gröbner pour l'ordre choisi.*

DÉMONSTRATION. La partie difficile de ce théorème est traitée par Kandri-Rody et Weispfenning dans [59]. L'extension aux règles de commutation auxquelles sont soumis les polynômes des algèbres de Ore est due à Kredel [66].

Le théorème est aussi une version explicite des résultats et propositions de Teo Mora donnés dans [72, partie IV], le cas des polynômes tordus étant pris en compte par [72, définition 1.4, partie III]. ■

Lorsque ce théorème s'applique, son efficacité pratique peut être améliorée par une généralisation convenable de la « stratégie normale » (cf. [38, chap. 2] et §3.1), par la « stratégie du sucre » (cf. [53] et §3.2), par du *trace lifting* (cf. [102, 104] et §3.3) et par une généralisation des critères de Buchberger (cf. [66, chap. 4] et §3.1). De plus, toujours dans les cas d'application du théorème, les principaux outils de l'algèbre commutative effective s'étendent aussi au cadre tordu, si bien que des algorithmes de calcul de dimensions, de polynômes et de séries de Hilbert, et de bases de Gröbner pour des modules sont encore disponibles dans les algèbres de Ore.

L'algorithme correspondant est donné en algorithme 7. Cet algorithme fait référence à une modification de chacun des sous-algorithmes pour le cas de modules. Je ne décrirai pas ces algorithmes modifiés un par un : tous s'adaptent du cas polynomial en retenant que deux éléments distincts de $E$ ne sont pas comparables. En particulier, il n'est donc pas possible de réduire un polynôme $p$ par un polynôme $q$ si les termes dominant $\operatorname{lt}(p)$ et $\operatorname{lt}(q)$ ne sont pas portés par le même $e \in E$. De la même façon, deux polynômes $p$ et $q$ dont les termes dominant ne sont pas portés par le même $e \in E$ produisent un $S$-polynôme qui est nul. L'algorithme est sinon très similaire au cas polynomial (cf. l'algorithme 6).

Comme on le voit sur le tableau 2, p. 37, ce théorème s'applique aux algèbres de Ore les plus fréquentes. Les seules exceptions mentionnées dans cette table sont : les algèbres $\mathbb{K}[x][M; M, 0]$ pour un opérateur de Mahler $M$, à comparer à $\mathbb{K}(x)[M; M, 0]$ qui est euclidienne et donc noethérienne ; les algèbres $\mathbb{F}_p[x][F; F, 0]$ pour un opérateur de Frobenius $F$, qui satisfont formellement les mêmes commutations que les précédentes ; les algèbres sur un opérateur de différence divisée (comparaison analogue).

Le cas particulier $s = 0$ dans ce théorème énonce que dans les algèbres de Ore non polynomiales à coefficients dans un corps, des bases de Gröbner peuvent être calculées pour *n'importe quel* ordre de termes par la modification non commutative de l'algorithme de Buchberger.

Exemple. Un exemple d'algèbre de Ore pour laquelle tous les ordres de termes ne permettent pas la terminaison du calcul de bases de Gröbner dans le théorème 4 est l'algèbre $\mathbb{O} = \mathbb{K}[x, u][D_x; 1, D_x]$ définie comme extension de l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}[x][D_x; 1, D_x]$ par la règle additionnelle

$$D_x u = u D_x - u^2. \tag{40}$$

Cette algèbre apparaît quand on tente de localiser l'algèbre de Weyl

$$\mathbb{K}[x][D_x; 1, D_x]$$

en l'étendant avec un inverse pour $x$ : l'anneau de polynômes tordus

$$\mathbb{S} = \mathbb{K}[x, x^{-1}][D_x; 1, D_x]$$

ALGORITHME : $G = \mathrm{mGröbnerBasis}(P, \mathbb{O}, E, \preceq)$.

INPUT : $\begin{cases} \text{un sous-ensemble } P = \{p_1, \ldots, p_k\} \text{ de } \bigoplus_{e \in E} \mathbb{O} \cdot e, \\ \text{un ordre de termes } \preceq \text{ sur ce module.} \end{cases}$

OUTPUT : base de Gröbner $G$ engendrant le même sous-module.

1. $G = \mathrm{mInterReduction}(P, \mathbb{O}, E, \preceq)$ ;
2. $B = \{(p_i, p_j) \mid 1 \leq i < j \leq k$, $\mathrm{lt}(p_i)$ et $\mathrm{lt}(p_j)$ sont portés par le même $e \in E\}$ ;
3. tant que $B$ n'est pas vide,
   (a) $(p_i, p_j) = \mathrm{mSelectPair}(B, G)$ ;
   (b) $B = B \setminus \{(p_i, p_j)$, $\mathrm{lt}(p_i)$ et $\mathrm{lt}(p_j)$ sont portés par le même $e \in E\}$ ;
   (c) si $\mathrm{mCriterion1}(B, G)$ ou $\mathrm{mCriterion2}((p_i, p_j), B, G)$, alors
      (i) $h = \mathrm{mReduction}(\mathrm{mSpoly}(p_i, p_j), G, \mathbb{O}, E, \preceq)$ ;
      (ii) si $h \neq 0$, faire
         (A) ajouter $h$ à $G$ par $k = k + 1$ et $p_k = h$ ;
         (B) $B = B \cup \{(p_i, p_k) \mid 1 \leq i < k\}$ ;
4. $R = \{g \in G \mid \exists g' \in G \quad g' \neq g \Rightarrow \mathrm{lt}(g')$ divise $\mathrm{lt}(g)$, et $\mathrm{lt}(p_i)$ et $\mathrm{lt}(p_j)$ sont portés par le même $e \in E\}$ ;
5. renvoyer $\mathrm{mInterReduction}(G \setminus R, \mathbb{O}, E, \preceq)$.

ALGORITHME 7. Algorithme de Buchberger avec post-réduction pour les modules

où la dérivation usuelle $D_x$ par rapport à $x$ est définie sur l'anneau $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ n'est pas une algèbre de Ore pour laquelle le théorème 4 est applicable pour n'importe quel ordre ; cependant, l'identité (40) de $\mathbb{O}$ est formellement semblable à la commutation

$$D_x x^{-1} = x^{-1} D_x - x^{-2}$$

dans $\mathbb{S}$.

Le théorème 4 s'applique à $\mathbb{O}$, et l'algorithme de Buchberger fournit le calcul de bases de Gröbner, mais uniquement pour les ordres de termes tels que $u \preceq D_x$, auquel cas, $u^2 \preceq u D_x$. Il est ainsi impossible d'éliminer $u$ à partir d'un idéal de $\mathbb{O}$ par un simple calcul de bases de Gröbner. Cette élimination est heureusement possible par une autre méthode (voir chapitre VIII).

Voici un exemple où l'algorithme de Buchberger boucle à l'infini pour un ordre de termes tel que $D_x \preceq u$. Soit $p = u D_x$ et $G = \{D_x - u\}$. La réduction de $p$ par $G$ produit alors une suite infinie de polynômes successifs $p_n$ donnés par

$$p_{2n} = u D_x + n D_x^2, \qquad p_{2n+1} = u^2 + n D_x^2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

## 5. Applications

**5.1. Série génératrice des nombres de Bell.** Je m'apprête maintenant à valider la théorie en l'illustrant sur un exemple très simple au moyen de mes *packages* `Ore_algebra` et `Groebner` : l'exemple qui suit calcule la fonction génératrice $e^{e^x-1}$ des nombres de Bell $B_n$, définis comme les nombres de partitions d'un ensemble de cardinalité $n$. Plus précisément, j'obtiens cette fonction génératrice par sommation d'une famille de fonctions génératrices pour d'autres nombres de la combinatoire, les nombres de Stirling de seconde espèce.

Sans vouloir montrer une identité profonde, mon intention est de faire la démonstration que de tels calculs sont possibles avec mes programmes, bien que la fonction résultat sorte du cadre holonome strict. En effet, les opérateurs différentiels linéaires qui interviennent dans cet exemple sont à coefficients des fractions rationnelles en l'exponentielle $e^x$. Comme algèbre d'opérateurs, j'introduis donc l'algèbre $\mathbb{K}[e^x][D_x; 1, D_x]$ qui est une algèbre de Ore pour laquelle le théorème 4 fournit des bases de Gröbner pour n'importe quel ordre. En effet, elle peut être vue comme l'algèbre de polynômes tordus

$$\mathbb{K}[y][\partial; \sigma, \delta]$$

donnée par

$$y^\sigma = y^\delta = y.$$

Il s'avère que cette algèbre est encore $\mathbb{K}[y][\partial; 1, yD_y]$. (Cet exemple d'algèbre est donné dans le tableau 2, p. 37.)

Exemple. Les nombres de Bell sont reliés aux nombres de Stirling de seconde espèce $\mathfrak{S}_n^{(m)}$. Ces derniers comptent le nombre de partitions d'un ensemble de $n$ éléments en $m$ parties non vides :

$$B_n = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}_n^{(m)}.$$

Les nombres de Stirling ont la série génératrice exponentielle suivante [8, identité 24.1.4 B] :

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mathfrak{S}_n^{(m)} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^m}{m!}.$$

En sommant sur $m \in \mathbb{N}$ et en intervertissant les sommations, on tire la série génératrice exponentielle des nombres de Bell

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x-1}.$$

Les premières valeurs des nombres de Bell sont

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147\dots$$

Reproduisons ce schéma en MAPLE. Pour commencer, nous travaillons dans l'algèbre $\mathbb{K}[y,n][D_x;1,D_x][S_n;S_n,0]$ où $y$ représente $e^x$. Nous chargeons donc le *package* `Ore_algebra` pour déclarer une algèbre de Ore et employons les types de commutation prédéfinis `euler` pour la commutation entre $D_x$ et $e^x$ et `shift` pour la commutation entre $S_n$ et $n$.

```
with(Ore_algebra):
A:=skew_algebra(euler=[Dx,y],shift=[Sn,n],polynom={y,n}):
```

Nous chargeons ensuite le *package* `Groebner` pour définir un ordre de termes servant à éliminer $n$.

```
with(Groebner):
T:=termorder(A,lexdeg([n],[y,Dx,Sn])):
```

Nous effectuons cette élimination entre de simples équations satisfaites par la série génératrice exponentielle

$$\frac{(e^x-1)^n}{n!}$$

des nombres de Stirling de seconde espèce.

```
G:={(y-1)*Dx-n*y,(n+1)*Sn-(y-1)}:
GB:=gbasis(G,T);
```

$$GB := [yS_nD_x - S_nD_x - y^2 + y, nS_n + S_n - y + 1, yD_x - D_x - ny]$$

Nous terminons la sommation par l'évaluation en $S_n = 1$, ce qui sera justifié par le *creative telescoping*, au chapitre V.

```
map(factor,subs(Sn=1,remove(has,GB,n)));
```

$$[-(y-1)(y-D_x)]$$

Nous avons donc que la série génératrice exponentielle des nombres de Bell vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$f'(x) = e^x f(x),$$

dont les solutions sont

$$f(x) = \lambda e^{e^x}.$$

En considérant la condition initiale

$$f(0) = B_0 = 1,$$

on déduit $\lambda = e^{-1}$. la série génératrice exponentielle des nombres de Bell est donc

$$e^{e^x-1}.$$

**5.2. Relations de contiguïté pour les fonctions hypergéométriques en deux variables $F_4$ d'Appell.** À titre d'exemple, j'emprunte de Takayama [98] le calcul de relations de contiguïté pour la fonction hypergéométrique en deux variables $F_4$ d'Appell définie par

$$F_4(a,b,c,d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{m!n!(c)_m(d)_n} x^m y^n,$$

où $(x)_n$ désigne le symbole de Pochhammer $\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$. La méthode peut s'utiliser pour calculer les expressions de décalées et décalées inverses de

$$F_4(a,b,c,d;x,y)$$

par rapport à ses paramètres $a$, $b$, $c$ et $d$ en termes de ses dérivées par rapport aux variables $x$ et $y$. Ici, j'obtiens une expression différentielle pour

$$F_4(a-1,b,c,d;x,y)$$

qui a été obtenue pour la première fois par Takayama.

Considérons l'action de l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}(x,y)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y],$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(a,b,c,d)$, sur l'algèbre de séries de Laurent $\mathcal{F} = \mathbb{K}((x,y))$ . La fonction d'Appell est annulée par les opérateurs

$$\begin{cases} xD_x(xD_x+c-1) - x(xD_x+yD_y+a)(xD_x+yD_y+b), \\ yD_y(yD_y+d-1) - y(xD_x+yD_y+a)(xD_x+yD_y+b). \end{cases} \tag{41}$$

En fait, l'idéal

$$\mathfrak{I} = \operatorname{Ann}_{\mathbb{O}} F_4$$

est précisément l'idéal engendré par ces opérateurs. Puisque

$$\frac{(a+1)_{m+n}}{(a)_{m+n}} = \frac{(m+n+a)}{a},$$

l'opérateur $H_a = a^{-1}(xD_x + yD_y + a)$ satisfait

$$(H_a \cdot F_4)(a,b,c,d;x,y) = F_4(a+1,b,c,d;x,y) \ ;$$

pour cette raison, $H_a$ est appelé un opérateur *de montée*. Nous entamons maintenant le calcul d'un opérateur *de descente* $B_a$, c'est-à-dire d'un opérateur tel que $B_{a+1}H_a = B_aH_{a-1} = 1$.

En calculant une base de Gröbner pour l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré par les opérateurs (41) dans $\mathbb{O}$ et par rapport à un ordre de degré total sur $D_x$ et $D_y$ tel que $D_x \succeq D_y$, on obtient

$$\begin{cases} 2xyD_xD_y + (xy+y^2-y)D_y^2 \\ \qquad + (a+b-c+1)xD_x + (dx+(a+b+1)y-d)D_y + ab, \\ xD_x^2 - yD_y^2 + cD_x - dD_y, \\ (2x^2y^2 - 4xy^3 + 2y^4 - 4xy^2 - 4y^3 + 2y^2)D_y^3 \\ \qquad + A_{0,2}D_y^2 + A_{1,0}D_x + A_{0,1}D_y + A_{0,0}, \end{cases} \tag{42}$$

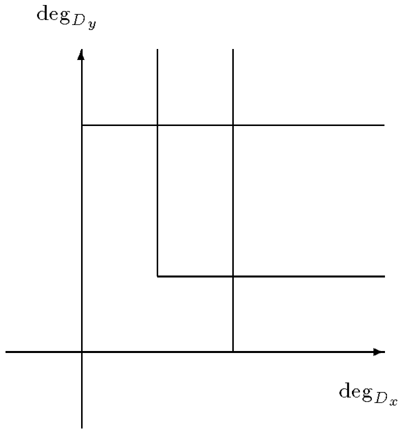


TABLEAU 1. Escalier de la base de Gröbner annulateur de $F_4$

où chaque $A_{i,j}$ est un gros polynôme en $x$ et $y$. Il s'ensuit que l'anneau quotient $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}(a,b,c,d,x,y)$ de dimension 4 et qui admet $(1, D_x, D_y, D_y^2)$ pour base. La structure de ce quotient est bien suggérée par le dessin en escalier de la figure 1.

Aussi, écrivons $B_{a+1} = c_0 + c_1 D_x + c_2 D_y + c_3 D_y^2$ pour des inconnues $c_i$. Après réduction de $B_{a+1}H_a - 1$ par la base de Gröbner (42) et identification à zéro des coefficients de 1, $D_x$, $D_y$ et $D_y^2$, on obtient un système linéaire en $(c_0, c_1, c_2, c_3)$ qui se résout aisément pour obtenir l'opérateur de descente :

$$B_a = \frac{P}{2(a-c)(a-d)(a+1-c-d)}$$

pour $P$ donné par

$$\begin{aligned}
&\big[b(-2d+2a+2d^2+4a^2+2cd-5ad-3ac)x\\
&\quad +b(2c^2-5ac+2a-2c+4a^2+2cd-3ad)y\\
&+abc+abd-2ad+2cd-2cd^2-2c^2d+2ad^2-4a^2c\\
&\quad -2ac-4a^2d+2a^2+2a^3+2ac^2-2a^2b+6acd\big]\\
&+\big[(c^2-c+4a-3d+2d^2-bc+4a^2-bd+3cd-5ad+2ab-5ac)x\\
&\quad +(c^2-c+bd+cd-3ad-2ab+bc-3ac+d+4a^2)y\\
&\quad -4a^2-4a+3d+c+5ad-2d^2-c^2+5ac+bc-3cd-2ab+bd\big]xD_x\\
&\quad +\big[d(2a-c-d)x^2-2d(2a-c-d)x\\
&\quad +(bd-7ad+bc-d+3cd+4a^2+c-2ab-3ac+3d^2)xy\\
&+(-bd-d-bc-3c+2c^2+4a+4a^2-5ac-3ad+2cd+2ab)y^2\\
&+(d+3c-cd+d^2-2ab+bc-4a^2-2c^2+bd+ad-4a+5ac)y\\
&\qquad +d(2a-c-d)\big]D_y\\
&+(2a-c-d)(x^2-2(1+y)x+(1-y)^2)yD_y^2.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour le calcul précédent, $\mathfrak{I}$ n'a pas besoin d'être exactement l'idéal annulateur $\operatorname{Ann}_{\mathbb{O}} f$, mais seulement sous-idéal de cet idéal annulateur tel que $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ soit de dimension finie. Dans le cas présent, il serait possible de montrer que $\mathfrak{I} = \mathrm{Ann}_{\mathbb{O}} f$. Le problème de calcul avec un sous-idéal de $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}} f$ est que l'ordre d'un opérateur de descente renvoyé pourrait être plus élevé.

Je renvoie le lecteur à [97] pour d'autres exemples d'utilisation de bases de Gröbner en relation avec les séries hypergéométriques en plusieurs variables.

**5.3. Modules des syzygies.** En vue de références futures, je termine ce chapitre en rappelant comment un algorithme de calcul de bases de Gröbner pour les modules permet de calculer un *module de syzygies.*

DÉFINITION 13. *Soient* $\mathbb{A}$ *un anneau et* $\mathfrak{m}$ *un module à gauche sur* $\mathbb{A}$. *Pour tout* $n$*-uplet*

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathfrak{m}^n,$$

*une* syzygies *de* $\mathbf{m}$ *est un* $n$*-uplet*

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{A}^n$$

*tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot m_i = 0 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}.$$

*L'ensemble de toutes les syzygies de* $\mathbf{m}$ *forme un sous-*$\mathbb{A}$*-module de* $\mathbb{A}^n$ *appelé* (premier) module de syzygies *et noté* $\mathrm{Syz}(\mathbf{m})$.

Lorsque l'anneau $\mathbb{A}$ est commutatif, chaque syzygie $\mathbf{s}$ s'interprète comme une application $\mu$ $\mathbb{A}$-multilinéaire donnée par

$$\mu(\mathbf{m}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}.$$

Plus généralement, pour des $n$-uplet $\mathbf{s} \in \mathbb{A}^n$ et $\mathbf{m} \in \mathfrak{m}^n$, le scalaire

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{m} \in \mathbb{A}$$

est appelé *évaluation* de $\mathbf{s}$ en $\mathbf{m}$. Chaque syzygie de $\mathbf{m}$ s'évalue donc par définition à zéro en $\mathbf{m}$.

Soient maintenant $\mathbb{O}$ une algèbre de Ore et $\mathfrak{m}$ un module à gauche sur $\mathbb{O}$. Enfin, soit $\{m_i\}_{i=1,\dots,n}$ une famille de $n$ éléments de $\mathfrak{m}$. Munissons $\mathbb{O}^n$ de sa base canonique $(e_i)$ et considérons le $\mathbb{O}$-module $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{O}^n$. Les sommes $m_i - e_i$ engendrent alors un sous-module $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{O}^n$ et tout élément $m' - \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}$ de ce sous-module vérifie

$$m' = \mathbf{s} \cdot \mathbf{m}.$$

En calculant une base de Gröbner de $\mathfrak{s}$ pour un ordre qui élimine la première composante $\mathfrak{m}$, on obtient une base de la forme

$$\begin{cases} g_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{m} & i = 1, \dots, r \\ 0 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{m} & i = 1, \dots, s. \end{cases}$$

On peut alors montrer que cette écriture fournit une base de Gröbner $(g_i)$ de $\mathfrak{s}$ exprimée en fonction des générateurs initiaux par

$$g_i = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{m},$$

ainsi qu'une base de Gröbner $(\mathbf{v}_i)$ du module de syzygie $\mathrm{Syz}(\mathbf{m})$ :

$$0 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{m}.$$

CHAPITRE III

# Fonctions $\partial$-finies et leur arithmétique

Les solutions d'équations de récurrence ou différentielles linéaires à coefficients polynomiaux, ou de manière équivalente rationnelles, sont particulièrement intéressantes en calcul formel et en combinatoire car elles peuvent être spécifiées par une quantité finie d'information : les coefficients des équations et un nombre fini de conditions initiales. Ceci a conduit Doron Zeilberger à généraliser les notions de suites $P$-récursives et de fonctions $D$-finies étudiées par Richard P. Stanley [95] en une notion de $P$-finitude [113]. Dans le cas de plusieurs variables, une fonction $f(x_1, \dots, x_r)$ est dite *$P$-finie* lorsque l'espace vectoriel engendré par ses dérivées est de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_r)$ des fractions rationnelles en ses variables. De façon similaire, une suite $u_{n_1,\dots,n_r}$ est *$P$-finie* lorsque l'espace vectoriel engendré par ses décalées est de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}(n_1, \dots, n_r)$ des fractions rationnelles en ses indices. Ces deux cas admettent une traduction simple en termes d'idéaux, et cette traduction permet une généralisation très naturelle dans le contexte des algèbres de Ore.

## 1. Algèbres de Ore et $\partial$-finitude

Cette généralisation est donnée par la définition qui suit.

Définition 14 ($\partial$-finitude). *Soit une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ sur un corps $\mathbb{K}$. Un idéal à gauche $\mathfrak{I}$ de $\mathbb{O}$ est* $\partial$-fini *par rapport à $\mathbb{O}$ si $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Les fonctions, séries, distributions, suites, etc. qui sont annulées par de tels idéaux sont encore appelées $\partial$-finies.*

Le « $\partial$ » de cette définition n'est rien d'autre qu'un symbole et n'a aucune relation avec les $\partial_i$ qui engendrent effectivement l'algèbre. De nombreux exemples de fonctions et suites $\partial$-finies ont déjà été donnés : la suite à deux indices des coefficients du binôme (voir le système (2), p. 13) ; les polynômes orthogonaux, tels les polynômes de Jacobi (voir le système (5), p. 16) ; les fonctions hypergéométriques en deux variables $F_4$ d'Appell (voir (3–4), p. 15) ; ou encore les fonctions définies par les systèmes (8) et (10), p. 29.

Lorsque l'idéal $\mathfrak{I}$ est l'idéal annulateur $\operatorname{Ann} f$ d'une fonction $f$, le quotient $\mathbb{O}/\operatorname{Ann} f$ est isomorphe au $\mathbb{O}$-module $\mathbb{O} \cdot f$ et ce quotient est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ si et seulement si les dérivées successives $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_r^{\alpha_r} \cdot f$ de $f$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. De façon réciproque, quand l'idéal $\mathfrak{I}$ est $\partial$-fini, alors $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ est isomorphe au module $\mathbb{O} \cdot f$ engendré par la classe $f = 1 + \mathfrak{I}$ dans $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$. Cette $f$ correspond à une fonction générique annulée par $\mathfrak{I}$. Ainsi, les idéaux $\partial$-finis rendent possible l'expression des propriétés et des algorithmes de ce chapitre sans aucune référence à aucune algèbre de fonctions.

Lorsque je manipulerai une fonction $\partial$-finie, je ferai le plus souvent l'hypothèse implicite que cette fonction est donnée par (une représentation finie de) son idéal annulateur. Dans d'autres cas, je manipulerai une fonction $\partial$-finie donnée sous forme close, et il faudra au préalable *calculer* son annulateur — c'est tout l'objet de ce chapitre que de donner des algorithmes pour ce faire. Dans tous les cas, on ne disposera souvent malheureusement que d'un sous-idéal $\partial$-fini de l'idéal annulateur, ce qui aura pour conséquence d'introduire des fonctions parasites : si $\mathfrak{I}$ est l'idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie $g$, pour toute $f$ annulée par $\mathfrak{I}$,

$$\operatorname{Ann} f \supseteq \mathfrak{I} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{O} \cdot f \sim \mathbb{O}/\operatorname{Ann} f \subseteq \mathbb{O} \cdot g \sim \mathbb{O}/\operatorname{Ann} g.$$

Considérer $g$ au lieu de $f$ introduit des parasites. Ainsi, par exemple, si $\mathfrak{I}$ est engendré par $D_x^2 + 1$ dans

$$\mathbb{O} = \mathbb{C}(x)[D_x; 1, D_x],$$

alors $\mathbb{O} \cdot g$ est isomorphe à $\mathbb{O} \cdot \cos(x)$ et à $\mathbb{O} \cdot \sin(x)$ (vus comme sous-modules du $\mathbb{O}$-module des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$). Par ailleurs, la fonction $f = (iD_x + 1) \cdot g$ correspond à $e^{\pm ix}$ ; elle est annulée par $\mathfrak{I}$ et $\mathbb{O} \cdot f$ est un sous-module strict de $\mathbb{O} \cdot g$, qui se met en somme directe de $\mathbb{O}$-modules

$$\mathbb{O} \cdot g = \mathbb{O} \cdot e^{ix} \oplus \mathbb{O} \cdot e^{-ix}.$$

Ici, les fonctions parasites introduites si on utilise $g$ au lieu de $f$ sont toutes celles de $\mathbb{O} \cdot g \setminus \mathbb{O} \cdot f$, en particulier $\cos x$, $\sin x$ et $1/f$.

L'étude des fonctions $\partial$-finies, et de leurs idéaux annulateurs, est motivée par leurs agréables propriétés de clôture et par la relative simplicité des algorithmes correspondants. Dans la définition des algèbres de Ore (voir définition 3, p. 40), j'ai imposé que les $\sigma_i$ et les $\delta_j$ commutent deux à deux (à l'exception éventuellement des paires obtenues quand $i = j$). Cette contrainte pourrait être relâchée tout en maintenant inchangées les propriétés de clôture des fonctions $\partial$-finies. Néanmoins, cette hypothèse devient cruciale lorsque l'on veut calculer un système annulateur pour la somme ou le produit de fonctions $\partial$-finies, et plus précisément lorsqu'on calcule des bases de Gröbner dans ce but.

Notons bien que la notion de $\partial$-finitude dépend fortement de l'algèbre d'opérateurs dans laquelle sont vues les équations linéaires. On peut distinguer deux types de dépendances. D'abord, celle en les opérateurs $\partial_i$, qui permet de prendre ou non en compte la dépendance d'une fonction en toutes ses variables. Je renvoie le lecteur aux deux descriptions possibles des polynômes de Jacobi, celle donnée en p. 45 par le système (25–27) dans l'algèbre

$$\mathbb{C}(n, a, b, z)[S_n; S_n, 0][D_z; 1, D_z]$$

et celle donnée en p. 16 par le système (5) dans l'algèbre

$$\mathbb{O}_{\mathrm{J}} = \mathbb{C}(n, a, b, z)[S_n; S_n, 0][S_a; S_a, 0][S_b; S_b, 0][D_z; 1, D_z].$$

Par ailleurs, en changeant le corps de coefficients sur lequel est définie l'algèbre de Ore, il est possible de changer l'ordre des opérateurs annulateurs d'une fonction, voire de rendre une fonction non $\partial$-finie $\partial$-finie. Considérons par exemple l'algèbre $\mathcal{F} = \mathbb{C}((z))$ des séries de Laurent et la fonction $f \in \mathcal{F}$ donnée par $f(z) = J_0\left(z^{1/4}\right)$. En autorisant les fractions rationnelles en coefficients, $f$ est annulée par l'opérateur d'ordre 4

$$L_{\mathrm{r}} = 256z^3 D_z^4 + 1280z^2 D_z^3 + 1088z D_z^2 + 64D_z - 1$$

dans l'algèbre de Ore $\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{C}(z)[D_z; 1, D_z]$ mais par aucun opérateur d'ordre plus petit ; en autorisant des fonctions algébriques en coefficients, $f$ est annulée par l'opérateur d'ordre 2

$$L_{\mathrm{a}} = 16z^{3/2} D_z^2 + 16z^{1/2} D_z + 1$$

dans l'algèbre de Ore $\mathbb{O}_{\mathrm{a}} = \mathbb{C}(\sqrt{z})[D_z; 1, D_z]$ mais par aucun opérateur d'ordre plus petit ; finalement, en autorisant les séries de Laurent en coefficients, $f$ est annulée par l'opérateur

$$L_{\mathrm{l}} = f(z)D_z - f'(z)$$

dans l'algèbre de Ore $\mathbb{O}_{\mathrm{l}} = \mathcal{F}[D_z; 1, D_z]$. La fonction $f$ est respectivement $\partial$-finie par rapport aux algèbres $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$, $\mathbb{O}_{\mathrm{a}}$ et $\mathbb{O}_{\mathrm{l}}$. En revanche, elle n'est pas $\partial$-finie par rapport à l'algèbre de Ore $\mathbb{C}(\exp z)[D_z; 1, D_z]$.

## 2. Systèmes rectangulaires

Pour simplifier les preuves de ce chapitre, je débute par la remarque que les idéaux $\partial$-finis contiennent des systèmes de polynômes d'une forme particulière, que j'appelle *rectangulaire*.

DÉFINITION 15. *Un système de polynômes d'une algèbre de Ore*

$$\mathbb{K}[\partial_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [\partial_r; \sigma_r, \delta_r]$$

*est* rectangulaire *lorsqu'il consiste en $r$ polynômes non nuls $P_i(\partial_i)$, chacun en une unique indéterminée $\partial_i$, un pour chaque $i = 1, \ldots, r$.*

Du point de vue théorique, il n'y a aucune perte de généralité à considérer des systèmes de cette forme particulière, ce qui découle de la proposition qui suit.

PROPOSITION 9. *Un idéal d'une algèbre de Ore $\mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ est $\partial$-fini si et seulement s'il contient un système rectangulaire.*

DÉMONSTRATION. Notons $\mathbb{O} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$. Si $\mathfrak{I}$ est un idéal $\partial$-fini, alors pour chaque $i$, $\{1, \partial_i, \partial_i^2, \ldots\}$ engendre un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$, d'où il s'ensuit l'existence d'un polynôme en $\partial_i$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui s'annule dans le quotient (c'est-à-dire qui appartient à l'idéal). Réciproquement, si $\mathfrak{I}$ contient un système rectangulaire $\{P_i(\partial_i)\}$, notons $k_i$ le degré de $P_i$ en $\partial_i$. Alors $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ est engendré par

$$\{\partial_1^{p_1} \dots \partial_n^{p_n}\}_{0 \leq p_i < k_i}$$

en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. ■

Une conséquence de cette proposition est que prouver la $\partial$-finitude d'une fonction dans une algèbre de Ore $\mathbb{O}$ se réduit à prouver qu'elle est annulée par un système rectangulaire de polynômes de $\mathbb{O}$. Comme exemple d'application, une sous-classe importante de fonctions $\partial$-finies est dans la pratique souvent celle des *fractions rationnelles.*

Proposition 10. *Soit $\mathbb{O} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ une algèbre de Ore agissant sur une algèbre de fonctions $\mathcal{F} \supseteq \mathbb{K}$, en faisant ainsi un $\mathbb{O}$-module. Si pour chaque générateur $\partial_i$ de $\mathbb{O}$, la fonction $\gamma_i = \partial_i \cdot 1$ est dans $\mathbb{K}$, alors toute fonction de $\mathbb{K}$ est $\partial$-finie par rapport à $\mathbb{O}$.*

Démonstration. Soit $r$ une fonction quelconque de $\mathbb{K}$. Alors,

$$\partial_i \cdot r = r^{\sigma_i}\gamma_i + r^{\delta_i}$$

est une fonction $f_i \in \mathbb{K}$. Ainsi,

$$\partial_i - f_i r^{-1}$$

est-il un opérateur annulateur de $r$. ■

Un autre exemple très simple de fonction $\partial$-finie est celui des suites hypergéométriques, c'est-à-dire des suites $u_{n_1,\dots,n_p}$ telles que

$$\frac{u_{n_1,\dots,n_i+1,\dots,n_p}}{u_{n_1,\dots,n_p}}$$

soit une fraction rationnelle de $\mathbb{K}$ pour chaque $i$. Le système rectangulaire correspondant ne comprend que des opérateurs de décalage d'ordre un.

Par le théorème 4, les calculs de bases de Gröbner par l'algorithme de Buchberger terminent toujours dans les algèbres de Ore non polynomiales (c'est-à-dire à coefficients dans un corps). À partir d'une base de Gröbner d'un idéal $\partial$-fini $\mathfrak{I}$ calculée pour n'importe quel ordre de termes, il est par ailleurs possible d'obtenir un système rectangulaire contenu dans $\mathfrak{I}$ de la manière qui suit. Pour chaque générateur $\partial_i$ de l'algèbre, réduisons $\partial_i^k$ pour $k = 0, 1, \dots$ modulo la base. Cette réduction récrit les $\partial_i^k$ en termes d'un nombre fini de termes $\partial_1^{i_1} \dots \partial_r^{i_r}$ indépendants de $k$. L'algorithme stoppe lorsqu'une dépendance linéaire entre les restes est détectée par élimination gaussienne. Remarquons cependant qu'en général, l'idéal engendré par ce système rectangulaire est plus petit que l'idéal d'origine. Ceci peut conduire à des calculs pour lesquels les équations finales sont d'un ordre plus élevé que l'ordre minimal, puisque l'inclusion est renversée du point de vue des modules.

Remarquons encore qu'un système rectangulaire n'est pas toujours une base de Gröbner. Un contre-exemple très simple est le suivant.

EXEMPLE. Considérons l'algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{Q}(x,y)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y]$, et le système rectangulaire

$$P = D_x + a(x,y), \qquad Q = D_y + b(x,y)$$

pour deux fractions rationnelles $a$ et $b$ de $\mathbb{Q}(x,y)$. Dans l'hypothèse où

$$G = \{P, Q\}$$

est une base de Gröbner de l'idéal engendré, le $S$-polynôme

$$S = D_y P - D_x Q = a(x,y)D_y - b(x,y)D_x + \frac{\partial a}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial b}{\partial x}(x,y)$$

se réduit à zéro par $G$ (noté $S \xrightarrow[G]{*} 0$). Tenant compte de l'ordre de termes $\preceq$ choisi, deux cas sont possibles selon que $D_x \preceq D_y$ ou que $D_y \preceq D_x$. Faisons l'hypothèse du second cas. Alors :

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow[P]{} S + b(x,y)P = a(x,y)D_y + a(x,y)b(x,y) + \frac{\partial a}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) \\ &\xrightarrow[Q]{} S + b(x,y)P - a(x,y)Q = \frac{\partial a}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

qui ne se réduit plus. Dans ce cas, et il en est de même lorsque $D_x \preceq D_y$, on a donc

$$S \xrightarrow[G]{*} \frac{\partial a}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial b}{\partial x}(x,y) \downarrow,$$

dont la nullité est une condition nécessaire et suffisante pour que $G$ soit une base de Gröbner (pour tout ordre de termes).

## 3. Propriétés de clôture

Étant donné deux fonctions $\partial$-finies $f$ and $g$ dans une algèbre de fonctions, je montre dans cette section que la somme $f+g$ est encore $\partial$-finie, je détermine des conditions suffisantes pour que le produit $fg$ soit $\partial$-fini et je montre comment effectuer des calculs sur des expressions faisant intervenir des spécialisations et des dérivées de $f$ et de $g$.

Plus précisément, je montre comment calculer un sous-idéal de l'idéal annulateur du résultat de chacune des opérations mentionnées ci-dessus. Dans chaque cas, je traduis d'abord le problème en termes d'idéaux et de modules, puis j'en déduis des conditions sur l'algèbre de Ore pour que l'idéal annulateur correspondant puisse exister. Ceci est ensuite rendu effectif en fournissant des algorithmes qui construisent un système de générateurs pour les idéaux en question. Pour chaque opération, je donne deux types différents d'algorithmes. L'un prend en entrée et renvoie en sortie des systèmes rectangulaires et repose sur de la division euclidienne non commutative. L'autre se fonde sur un calcul de base de Gröbner et renvoie un système générateur d'un idéal qui de manière générale est plus grand, et donc meilleur, que celui produit par la méthode des systèmes rectangulaires. Les versions de mes algorithmes par systèmes rectangulaires sont une extension naturelle de deux algorithmes donnés par Nobuki Takayama dans [101, sec. 3] pour le cas différentiel. Cette généralisation est directe dans le cas de la somme, alors qu'une restriction sur les algèbres de Ore autorisées est rendue nécessaire dans le cas du produit.

J'ai déjà mentionné qu'il est toujours possible de s'abstraire de l'algèbre de fonctions et que d'un point de vue équivalent, il suffit de se donner des idéaux $\partial$-finis $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{K}$ d'une algèbre de Ore $\mathbb{O}$ et des générateurs $f$ et $g$ des $\mathbb{O}$-modules $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ et $\mathbb{O}/\mathfrak{K}$. On est alors en droit de se demander quel est le sens de la « somme », du « produit » ou de la « spécialisation » de ces objets. La réponse va être donnée dans ce qui suit, et se trouve respectivement dans la somme directe $\mathbb{O}\cdot f \oplus \mathbb{O}\cdot g$, dans le produit tensoriel $\mathbb{O}\cdot f \otimes \mathbb{O}\cdot g$ et dans un changement d'anneau des scalaires du $\mathbb{O}$-module $\mathbb{O} \cdot f$.

### 3.1. Clôture par addition.

THÉORÈME 5. *Soient $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{K}$ deux idéaux $\partial$-finis d'une algèbre de Ore $\mathbb{O}$. L'idéal annulateur de toute somme $f+g$ de fonctions $\partial$-finies $f$ et $g$ d'une algèbre de fonctions où $f$ est annulée par $\mathfrak{I}$ et $g$ par $\mathfrak{K}$ est encore $\partial$-fini.*

Avant toute preuve, je tiens à expliquer l'interprétation à donner à la somme du point de vue de la théorie des modules. Dans le cas où $f$ et $g$ ne sont vus que comme générateurs de modules monogènes, et non éléments d'une algèbre ambiante, la somme directe $\mathbb{T} = \mathbb{O} \cdot f \oplus \mathbb{O} \cdot g$ hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{O}$-module par

$$P \cdot (a \oplus b) = (P \cdot a) \oplus (P \cdot b),$$

où je note $a \oplus b \in \mathbb{T}$ pour signifier que $a \in \mathbb{O} \cdot f$ et $b \in \mathbb{O} \cdot g$. Alors, par définition, la *somme de $f$ et de $g$* est en fait $f \oplus g \in \mathbb{T}$.

DÉMONSTRATION. Un opérateur $P \in \mathbb{O}$ agit sur $f+g$ par

$$P \cdot (f+g) = (P \cdot f) + (P \cdot g).$$

Le premier terme se réduit modulo $\mathfrak{I} = \operatorname{Ann} f$, et le second modulo $\mathfrak{K} = \operatorname{Ann} g$. Aussi le cadre algébrique naturel est-il la somme directe

$$\mathbb{T} = \mathbb{O}/\mathfrak{I} \,\oplus\, \mathbb{O}/\mathfrak{K} \simeq \mathbb{O} \cdot f \,\oplus\, \mathbb{O} \cdot g$$

(au dessus de $\mathbb{K}$), qui est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, puisque les deux idéaux sont $\partial$-finis. ■

Un système rectangulaire pour la somme peut être obtenu à partir de systèmes rectangulaires de $\operatorname{Ann} f$ et de $\operatorname{Ann} g$. Pour chaque générateur $\partial$ de l'algèbre, réduisons $\partial^k \cdot f$ et $\partial^k \cdot g$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ dans la suite

$$f+g, \partial \cdot f + \partial \cdot g, \partial^2 \cdot f + \partial^2 \cdot g, \ldots$$

Après un nombre fini de réductions, ceci fournit un système rectangulaire pour $f+g$ par élimination gaussienne.

L'idéal $\partial$-fini ainsi obtenu n'est pas toujours aussi grand que possible, car un système rectangulaire ne tient pas compte de relations possibles entre dérivées croisées. Un exemple est celui de la somme des fonctions de Bessel

$$f = \sum_{i=1}^{n} J_{\mu_i}(xy)$$

dans l'algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{C}(x,y)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y]$. Dans ce cas, on voit facilement qu'un système rectangulaire pour $f$ est constitué de deux opérateurs différentiels d'ordre $2^n$. Aussi l'espace vectoriel correspondant est-il de dimension $(2^n)^2$. En remarquant que $xD_x - yD_y$ annule $f$, on obtient que la dimension de $\mathbb{O} \cdot f$ n'est que $2^n$. La complexité de calculs ultérieurs sur $f$ est alors prodigieusement différente, selon qu'on utilise l'une ou l'autre des descriptions. Ce phénomène montre le besoin de procédures qui calculent des relations croisées. Deux procédures sont disponibles.

Si des bases de Gröbner sont données pour chacun des idéaux $\operatorname{Ann} f$ et $\operatorname{Ann} g$, alors une base de Gröbner d'un sous-idéal de l'idéal annulateur de $f + g$ peut être calculée en remarquant que

$$\operatorname{Ann} f \cap \operatorname{Ann} g \subseteq \operatorname{Ann}(f+g).$$

Ainsi, comme dans le cas commutatif, une base de cet idéal est obtenue en éliminant une indéterminée commutative auxiliaire $t$ dans l'idéal

$$t \operatorname{Ann} f + (1-t) \operatorname{Ann} g$$

(ou bien $t \operatorname{Ann} f + (1+t) \operatorname{Ann} g$) de l'anneau $\mathbb{K}[t] \otimes \mathbb{O}$. Si $(p_i)_{i=1,\dots,r}$ est un système de générateurs de $\operatorname{Ann} f$ et $(q_i)_{i=1,\dots s}$ est un système de générateurs de $\operatorname{Ann} g$, l'algorithme élimine donc $t$ entre les polynômes $p_i t$ et $q_i(1-t)$ (resp. $q_i(1+t)$). Une optimisation classique est d'interdire les puissances de $t$ d'exposant supérieur ou égal à 2 en effectuant l'élimination de $t$ dans le $\mathbb{O}$-module libre de base $(t^0, t^1)$. On obtient alors l'interprétation suivante de cet algorithme en termes de *syzygies* (voir la définition 13, p. 91, au chapitre II) : la méthode calcule en fait le (premier) module des syzygies de

$$(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s),$$

puis évalue les syzygies obtenues en

$$(p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0).$$

Dans le cas de fonctions d'une seule variable, ces algorithmes se réduisent au calcul d'un p.p.c.m. à gauche, par exemple par l'algorithme du p.g.c.d. étendu. Dans le cas de plusieurs variables et quand la base de Gröbner en entrée contient des polynômes représentant des dérivées croisées, leurs sorties prennent naturellement en compte cette information.

Exemple. L'objectif de cet exemple est de calculer un système annulateur $\partial$-fini pour la somme de la fonction exponentielle

$$f(x,y) = \exp(\mu x + \nu y)$$

ALGORITHME : $GB_2 = \mathrm{FGLMAlgo}(GB_1, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq_1, \preceq_2)$.
INPUT : une base de Gröbner $GB_1$ par rapport à $\preceq_1$, un ordre $\preceq_2$.
OUTPUT : une base de Gröbner $GB_2$ du même idéal pour $\preceq_2$.

1. faire $L = \{\}$, $M = \{\}$, $F = \{1\}$ et $R = \{\}$ ;
2. tant que $F$ est non vide,
   (a) réduire $t = \min_{\preceq_2} F$ par $GB_1$ (par rapport à $\preceq_1$) ;
   (b) par élimination gaussienne, rechercher une dépendance entre les formes normales des termes réduits $R \cup \{t\}$ ;
   (c) en cas de dépendance linéaire, l'adjoindre à $L$ et $t$ à $M$ ;
   (d) dans le cas contraire, faire $R = R \cup \{t\}$ et mettre à jour $F$ par $(F \setminus \{t\}) \cup \{x_i t\}$ ;
3. renvoyer $L$.

ALGORITHME 8. Algorithme FGLM original

et du produit de fonctions de Bessel

$$g(x, y) = J_\mu(x) J_\nu(y).$$

Les fonctions $f$ et $g$ sont respectivement spécifiées par les systèmes rectangulaires

$$\begin{cases} f_x - \mu f = 0, \\ f_y - \nu f = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x^2 g_{x,x} + x g_x + (x^2 - \mu^2) g = 0, \\ y^2 g_{y,y} + y g_y + (y^2 - \nu^2) g = 0, \end{cases}$$

où les indices désignent des dérivations. En utilisant l'algorithme par systèmes rectangulaires, on obtient deux polynômes annulateurs d'ordre 3 pour la somme, à savoir

$$\begin{aligned} & x^2(x^2 - \mu^2 + \mu^2 x^2 + \mu x) D_x^3 \\ & \quad - x(3\mu^2 - \mu^3 x + \mu^3 x^3 + \mu x^3 - 2\mu x - x^2) D_x^2 \\ & \quad + (x^4 - x^2 + \mu^2 x^4 - \mu^2 - \mu^4 x^2 - \mu^3 x^3 + \mu^4 - 4\mu^2 x^2) D_x \\ & \quad + \mu(\mu^2 + 3\mu^3 x - \mu^2 x^4 - \mu^4 - \mu x^3 - x^4 + \mu^4 x^2 + x^2 + 2\mu^2 x^2) \end{aligned}$$

et un polynôme similaire obtenu par échange de $(\mu, x, D_x)$ et de $(\nu, y, D_y)$.

Un algorithme différent qui permettra de calculer d'autres équations non redondantes vérifiées par la somme sera présenté dans la section suivante.

**3.2. L'algorithme FGLM.** Une autre procédure qui va aussi s'appliquer à d'autres opérations, consiste à appliquer une extension de l'algorithme FGLM [46], et donne une base de l'idéal $\mathrm{Ann}(f \oplus g)$, lequel contient

$$\mathrm{Ann}\, f \cap \mathrm{Ann}\, g$$

et est inclus dans $\mathrm{Ann}(f + g)$.

Cet algorithme a été conçu pour calculer des bases de Gröbner d'idéaux de *dimension zéro* par un changement d'ordre de termes. Il s'appuie sur

ALGORITHME : $GB = \text{ExtendedFGLMAlgo}(NF, \mathbb{K}[\mathbf{x}], \preceq)$.
INPUT : une procédure $NF$ de mise sous forme normale, un ordre $\preceq$.
OUTPUT : une base de Gröbner $GB$ par rapport à $\preceq$.

1. faire $L = \{\}$, $M = \{\}$, $F = \{1\}$ et $R = \{\}$ ;
2. tant que $F$ est non vide,
   (a) mettre $t = \min_{\preceq} F$ sous forme normale par $NF$ ;
   (b) par élimination gaussienne, rechercher une dépendance entre les formes normales des termes réduits $R \cup \{t\}$ ;
   (c) en cas de dépendance linéaire, l'adjoindre à $L$ et $t$ à $M$ ;
   (d) dans le cas contraire, faire $R = R \cup \{t\}$ et mettre à jour $F$ par $(F \setminus \{t\}) \cup \{x_i t\}$ ;
3. renvoyer $L$.

ALGORITHME 9. Algorithme FGLM étendu

l'observation suivante : étant donné un ordre de termes et un idéal $\mathfrak{I}$ *de dimension zéro* dans une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{A}$, une $\mathbb{K}$-base finie de $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ en tant qu'espace vectoriel est donnée par les termes qui ne sont plus grands qu'aucun des termes dominants des polynômes d'une base de Gröbner pour cet ordre. Cet ensemble de termes se décrit encore comme l'ensemble de tous les termes qui ne divisent aucun des termes de tête d'une telle base de Gröbner. À partir d'une base de Gröbner connue pour un ordre quelconque, la réduction par rapport à cette base fournit les coordonnées des éléments de $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ dans un espace vectoriel de dimension finie (c'est la fonction *NormalForm* de [46]). Si $\preceq$ désigne l'ordre de termes par rapport auquel on désire calculer une nouvelle base de Gröbner, l'algorithme FGLM construit une base $B$ de l'espace vectoriel $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ et un ensemble $M$ de termes en dehors de $B$ connus pour être exprimables en tant que combinaisons linéaires d'éléments de $B$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Tant qu'il subsiste un terme en dehors de $B$ qui ne soit le multiple d'aucun élément de $M$, l'algorithme considère le terme $t$ qui est le plus petit d'entre eux et calcule sa forme normale par *NormalForm*. Ensuite, soit il y a une dépendance linéaire entre cette forme normale et les formes normales des éléments de $B$ calculées aux étapes précédentes, auquel cas le terme $t$ est adjoint à $M$, ou il n'y en a aucune, auquel cas le terme $t$ est adjoint à $B$. La boucle s'arrête quand suffisamment de termes ont été introduits dans $B$. Ceci arrive nécessairement en temps fini car $\mathbb{A}/\mathfrak{I}$ est de dimension finie, comme conséquence de la nullité de la dimension de $\mathfrak{I}$. Finalement, chaque terme $m \in M$ s'exprime comme combinaison linéaire $p_m$ d'éléments de $B$, et le système des $m - p_m$ est une base de Gröbner pour $\mathfrak{I}$ par rapport à $\preceq$. C'est l'algorithme *NewBasis* de [46], reproduit en algorithme 8 sous le nom *FGLMAlgo*.

ALGORITHME : $G = \text{DFiniteAdd}(GB_1, \preceq_1, \dots, GB_r, \preceq_r, \mathbb{O}, \preceq)$.

INPUT : $\begin{cases} \text{une base de Gröbner } GB_i \text{ pour l'ordre de termes } \preceq_i \\ \text{pour chaque fonction } f_i \text{ à additionner,} \\ \text{un ordre de termes } \preceq \text{ sur } \mathbb{O}. \end{cases}$

OUTPUT : une base de Gröbner de $\text{Ann}(f_1 \oplus \cdots \oplus f_r)$ pour $\preceq$.

1. définir $NF$ par
$$NF(t) = \sum_{i=1}^{r} \text{Reduction}(t, GB_i, \mathbb{O}, \preceq_i) \; ;$$
2. renvoyer $\text{ExtendedFGLMAlgo}(NF, \mathbb{O}, \preceq)$.

ALGORITHME 10. Somme de fonctions $\partial$-finies

Dans notre contexte, je vais utiliser plusieurs versions du même algorithme *NewBasis* pour des fonctions *NormalForm* différentes. Aussi commencé-je par donner une présentation étendue de l'algorithme FGLM en algorithme 9.

Dans le cas de la somme de fonctions $\partial$-finies, j'utilise cet algorithme *ExtendedFGLMAlgo*, en définissant la fonction $NF$ de façon appropriée en termes de bases de Gröbner pour $\operatorname{Ann} f$ et $\operatorname{Ann} g$. La forme normale d'un terme $t = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ est définie (et calculée) comme étant la paire
$$(t_1, t_2) \in \mathbb{O}/\mathfrak{I} \,\oplus\, \mathbb{O}/\mathfrak{K},$$
où $t_1$ et $t_2$ sont les formes normales de $t$ par rapport à chacune des bases de Gröbner respectivement disponibles pour $\operatorname{Ann} f$ et pour $\operatorname{Ann} g$. Ainsi, cette fonction prend un terme en entrée et renvoie en sortie une forme normale dans un espace vectoriel de dimension finie, ce qui est la propriété requise pour la terminaison de *NewBasis*. J'obtiens ainsi l'algorithme 10.

EXEMPLE. Reprenant l'exemple du calcul d'un système annulateur $\partial$-fini pour la somme de la fonction exponentielle
$$f(x, y) = \exp(\mu x + \nu y)$$
et du produit de fonctions de Bessel
$$g(x, y) = J_\mu(x) J_\nu(y),$$
nous voyons maintenant l'utilisation de l'algorithme FGLM pour calculer une base de Gröbner d'un idéal annulateur de la somme $s(x, y)$.

Pour commencer, l'algorithme réduit les termes 1, $D_y$, $D_x$, $D_y^2$, $D_x D_y$ et détecte qu'ils sont indépendants. (Le lecteur suivra l'exécution de l'algorithme de la figure 1, les chiffres indiquant l'ordre dans lequel sont réduits les termes.) Puis il réduit le terme $D_x^2$ pour trouver qu'il vérifie un relation de dépendance linéaire avec les précédents. Cette relation est donnée par le

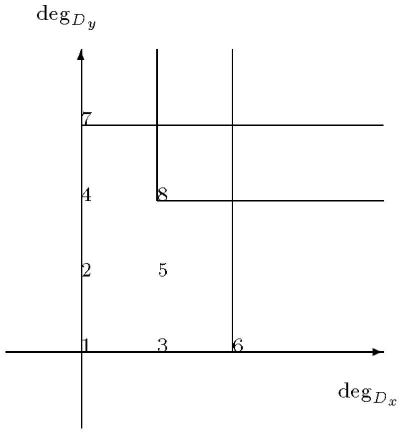


TABLEAU 1. Escalier de la base de Gröbner annulateur de la somme

polynôme suivant :

$$\begin{aligned}p_1 = &-(x^2-\mu^2+x^2\mu^2+\mu x)y^2D_y^2+x^2(y^2-\nu^2+y^2\nu^2+\nu y)D_x^2\\ &-(x^2-\mu^2+x^2\mu^2+\mu x)yD_y+x(y^2-\nu^2+y^2\nu^2+\nu y)D_x\\ &-\mu^2y^2\nu^2+x^2\nu y+x^2y^2\nu^2-x^2\mu^2y^2+x^2\mu^2\nu^2-\mu xy^2+\mu x\nu^2-\mu^2\nu y.\end{aligned}$$

Ensuite, l'algorithme poursuit en réduisant $D_y^3$ et trouve une nouvelle relation

$$\begin{aligned}p_2 = {}&y^2(y^2-\nu^2+\nu y+y^2\nu^2)D_y^3\\ &-y(y^3\nu+y^3\nu^3-y^2-2\nu y-\nu^3y+3\nu^2)D_y^2\\ &+(y^4+y^4\nu^2-y^3\nu^3-y^2-y^2\nu^4-4y^2\nu^2-\nu^2+\nu^4)D_y\\ &+\nu(-y^4-y^4\nu^2+y^2-\nu^4+2y^2\nu^2+\nu^2+y^2\nu^4-y^3\nu+3\nu^3y).\end{aligned}$$

Enfin, la réduction de $D_xD_y^2$ produit le polynôme

$$p_3 = y^2D_xD_y^2-\mu y^2D_y^2+yD_xD_y-\mu yD_y+(y^2-\nu^2)D_x-\mu(y^2-\nu^2).$$

Ainsi, la méthode employant l'algorithme FGLM renvoie plus d'information qu'un simple système rectangulaire. Sur cet exemple, le système rectangulaire calculé dans l'exemple en p. 99 et constitué de $p_1$ et d'un polynôme similaire permet de récrire toute dérivée de $s(x,y)$ comme combinaison linéaire de 9 dérivées. Par comparaison, la sortie plus précise $\{p_1,p_2,p_3\}$ de l'algorithme FGLM fournit une base de 5 dérivées seulement, comme le montre le dessin en escaliers de la figure 1.

L'algorithme par intersection d'idéaux introduit une nouvelle indéterminée commutative $t$ et considère le système

$$\begin{aligned}\{(D_x-\mu)t,(D_y-\nu)t,&(x^2D_x^2+xD_x+x^2-\mu^2)(1-t),\\ &(y^2D_y^2+yD_y+y^2-\nu^2)(1-t)\}\end{aligned}$$

dans

$$\mathbb{K}(x,y)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y]\oplus\mathbb{K}(x,y)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y]t.$$

L'élimination de l'indéterminée $t$ renvoie la même base $\{p_1, p_2, p_3\}$ que ci-dessus.

**3.3. Clôture par produit.** Le traitement de la clôture par produit nécessite quelques restrictions sur les $\sigma$-dérivations $\delta$ considérées. Dans le cas d'un opérateur de Ore $\partial$ et de fonctions $f$ et $g$, la relation

$$\partial \cdot (fg) = f^\sigma \partial \cdot g + f^\delta g \tag{43}$$

implique

$$\begin{aligned} \partial \cdot (fg) &= f^\sigma (\partial \cdot g) + f^\delta g, \\ \partial^2 \cdot (fg) &= f^{\sigma^2} (\partial^2 \cdot g) + 2 f^{\sigma\delta} (\partial \cdot g) + f^{\delta^2} g, \\ \partial^3 \cdot (fg) &= f^{\sigma^3} (\partial^3 \cdot g) + 3 f^{\sigma^2\delta} (\partial^2 \cdot g) + 3 f^{\sigma\delta^2} (\partial \cdot g) + f^{\delta^3} g, \\ &\dots, \end{aligned}$$

où l'on a fait l'hypothèse que $\sigma$ et $\delta$ commutent et noté la composition de ces opérateurs par un produit. Alors que $g$ n'apparaît dans les dérivées successives de $fg$ que par les $\partial^i \cdot g$, un nombre infini de nouveaux $f^{\sigma^p \delta^q}$ sont produits. Dans le but d'utiliser une éventuelle $\partial$-finitude de $f$, il nous faut relier ces symboles aux dérivées successives $f$. À cette fin et au vu des exemples de commutations envisagées, l'idée de contraindre les applications $\sigma$ et $\delta$ à s'exprimer comme des polynômes en $\partial$ est naturelle. Le calcul du produit de fonctions $\partial$-finies et le théorème ci-dessous font appel à des produits tensoriels, dont la définition requiert la condition technique (45) dans l'énoncé qui suit.

THÉORÈME 6. *Soient une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, et $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{K}$ deux idéaux $\partial$-finis de $\mathbb{O}$. Supposons que pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe deux polynômes $A_i(u)$ et $B_i(u)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que*

$$\sigma_i = A_i(\partial_i) \qquad \text{et} \qquad \delta_i = B_i(\partial_i), \tag{44}$$

*où les produits représentent des compositions, et*

$$[(A_i - 1) \cdot w] B_i = (B_i \cdot w)(A_i - 1) \qquad \text{pour tout } w \in \mathbb{K}. \tag{45}$$

*Alors, l'idéal annulateur de tout produit $fg$ où $f$ est annulée par $\mathfrak{I}$ et $g$ est annulée par $\mathfrak{K}$ est aussi $\partial$-fini.*

On a déjà vu par la proposition 2 du chapitre I, p. 42, une classe générale d'algèbres de Ore de la forme $\mathbb{K}[\partial; \sigma, \delta]$ pour lesquelles $(w^\sigma - w)^{-1} w^\delta$ est une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendante de $w \in \mathbb{K}$ et telle que $\delta = \lambda(\sigma - 1)$. Plus généralement, la condition (45), qui s'énonce encore

$$(w^{\sigma_i} - w)\delta_i = w^{\delta_i}(\sigma_i - 1) \qquad \text{pour tout } w \in \mathbb{K},$$

exprime une certaine colinéarité entre $\sigma_i - 1 = A_i - 1$ et $\delta_i = B_i$. Elle est en particulier vérifiée dans les cas très fréquents $\sigma_i = A_i = 1$ (dérivations), $\delta_i = B_i = 0$ (différences) et $\delta_i = \sigma_i - 1 = B_i = A_i - 1$ (autre présentation

| Opérateur | $\sigma = A(\partial)$ | $\delta = B(\partial)$ |
|---|---|---|
| Dérivation | $1$ | $\partial$ |
| Décalage | $\partial$ | $0$ |
| Différence | $\partial + 1$ | $\partial$ |
| $q$-Dilatation | $\partial$ | $0$ |
| $q$-Différence continue | $\partial + 1$ | $\partial$ |
| $q$-Dérivation | $(q-1)X\partial + 1$ | $\partial$ |
| $q$-Décalage | $\partial$ | $0$ |
| $q$-Différence discrète | $\partial + 1$ | $\partial$ |
| Opérateur eulérien | $1$ | $\partial$ |
| $e^x$-Dérivation | $1$ | $\partial$ |
| Opérateur de Mahler | $\partial$ | $0$ |
| Opérateur de Frobenius | $\partial$ | $0$ |
| Différence divisée | $1 - (X-a)\partial$ | $\partial$ |

TABLEAU 2. Relations rendant le produit effectif

des différences). C'est le cas de tous les exemples du tableau 2, p. 37, à l'exception de deux, comme le montre le tableau 2, p. 105. Pour ces deux exceptions, à savoir la $q$-dérivation et la différence divisée, on a néanmoins $\delta = \partial$ et $\sigma = 1 + \lambda\partial$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, si bien que la condition (45) est encore vérifiée.

Remarquons que les polynômes $A_i$ et $B_i$ définissant les $\sigma_i$ et $\delta_i$ par (44) ne peuvent être quelconques ; au minimum, ils doivent respecter les commutations suivantes, pour tous $w \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} Aw &= (A \cdot w)A, \\ Bw &= (A \cdot w)B + (B \cdot w), \\ \partial w &= (A \cdot w)\partial + (B \cdot w). \end{aligned}$$

Cette fois encore, dans le cas du produit, les « fonctions » $f$ et $g$ du théorème 6 n'ont pas besoin d'être interprétées comme des fonctions de l'analyse. Il suffit de travailler avec des générateurs des $\mathbb{O}$-modules $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ et $\mathbb{O}/\mathfrak{K}$, et avant la preuve, j'explique l'interprétation à donner au produit du point de vue de la théorie des modules. L'anneau $\mathbb{O}$ étant une algèbre sur $\mathbb{K}$, il est permis de considérer les produits tensoriels

$$\mathbb{T} = \mathbb{O} \cdot f \otimes \mathbb{O} \cdot g \qquad \text{et} \qquad \mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$$

sur le corps *commutatif* $\mathbb{K}$, où l'on ne retient des $\mathbb{O}$-modules $\mathbb{O} \cdot f$ et $\mathbb{O} \cdot g$ et de $\mathbb{O}$ que leur structure de $\mathbb{K}$-modules. Le produit tensoriel $\mathbb{T}$ hérite alors naturellement d'une structure de $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$-module par

$$(P \otimes Q) \cdot (u \otimes v) = (P \cdot u) \otimes (Q \cdot v).$$

Je le munis maintenant d'une structure de $\mathbb{O}$-module par

$$(f \otimes g)^\sigma = f^\sigma \otimes g^\sigma, \qquad (f \otimes g)^\delta = f^\sigma \otimes g^\delta + f^\delta \otimes g,$$
$$\partial \cdot (f \otimes g) = f^\sigma \otimes (\partial \cdot g) + f^\delta \otimes g.$$

En d'autres termes, les actions de $\sigma$, $\delta$ et $\partial$ sur $\mathbb{T}$ sont respectivement données par

$$\sigma \otimes \sigma, \qquad \sigma \otimes \delta + \delta \otimes 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma \otimes \partial + \delta \otimes 1.$$

ALGORITHME : $G = \mathrm{DFiniteMul}(GB_1, \preceq_1, GB_2, \preceq_2, \mathbb{O}, \preceq)$.
INPUT : une base de Gröbner $GB_i$ par rapport à l'ordre de termes $\preceq_i$ pour chaque fonction $f_i$ à multiplier.
OUTPUT : une base de Gröbner de $\mathrm{Ann}(f_1 \otimes f_2)$ par rapport à $\preceq$.

1. définir $NF$ par

$$\begin{aligned} NF(1) &= \mathrm{Reduction}(1, GB_1, \mathbb{O}, \preceq_1) \\ &\quad \otimes \mathrm{Reduction}(1, GB_2, \mathbb{O}, \preceq_2), \\ NF(\partial_i(P \otimes Q)) &= \mathrm{Reduction}(A_i(\partial_i)P, GB_1, \mathbb{O}, \preceq_1) \\ &\quad \otimes \mathrm{Reduction}(\partial_i Q, GB_2, \mathbb{O}, \preceq_2) \\ &+ \mathrm{Reduction}(B_i(\partial_i)P, GB_1, \mathbb{O}, \preceq_1) \\ &\quad \otimes \mathrm{Reduction}(Q, GB_2, \mathbb{O}, \preceq_2)\ ; \end{aligned}$$

2. renvoyer $\mathrm{ExtendedFGLMAlgo}(NF, \mathbb{O}, \preceq)$.

ALGORITHME 11. Produit de deux fonctions ∂-finies

Ici, la condition (45) du théorème 6 et l'hypothèse de commutativité de l'algèbre de fonctions sont essentielles pour bien définir des actions sur le produit tensoriel. Plus précisément, il s'agit de vérifier que chacune des actions définies ci-dessus est bien compatible avec l'égalité

$$wP \otimes Q = P \otimes wQ \qquad \text{pour tout } w \in \mathbb{K},$$

ce qui nécessite (45). Dans ce contexte, par définition, le *produit de $f$ et de $g$* est en fait $f \otimes g \in \mathbb{T}$, où $\mathbb{T}$ est vu comme $\mathbb{O}$-module à gauche.

DÉMONSTRATION. Soient $\sigma_i = A_i(\partial_i)$ et $\delta_i = B_i(\partial_i)$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ comme exigé dans les hypothèses du théorème. Un cadre naturel pour calculer avec des combinaisons linéaires de monômes de la forme $(P \cdot f)(Q \cdot g)$ est le produit tensoriel

$$\mathbb{T} = \mathbb{O}/\mathfrak{I} \otimes \mathbb{O}/\mathfrak{K} \simeq \mathbb{O} \cdot f \otimes \mathbb{O} \cdot g$$

(sur $\mathbb{K}$). L'application de $\partial_i$ à des produits du type ci-dessus,

$$\partial_i \cdot (P \cdot f)(Q \cdot g) = (P \cdot f)^{\sigma_i}[\partial_i \cdot (Q \cdot g)] + (P \cdot f)^{\delta_i}(Q \cdot g),$$

se traduit en l'action suivante qui reflète (43):

$$\partial_i(P \otimes Q) = [A_i(\partial_i)P] \otimes (\partial_i Q) + [B_i(\partial_i)P] \otimes Q.$$

Le calcul d'un polynôme qui annule le produit $fg$ se réduit au calcul d'un polynôme qui annule $1 \otimes 1$. Un tel polynôme existe puisque $\mathbb{T}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$. ■

ALGORITHME : $G = \text{DFiniteAction}(P, GB, \mathbb{O}, \preceq)$.
INPUT : un polynôme $P$, une base de Gröbner $GB$ par rapport à l'ordre de termes $\preceq$ pour la fonction $f$.
OUTPUT : une base de Gröbner $\text{Ann}(P \cdot f)$ par rapport à $\preceq$.

1. définir $NF$ par
$$NF(t) = \text{Reduction}(tP, GB, \mathbb{O}, \preceq)\ ;$$
2. renvoyer $\text{ExtendedFGLMAlgo}(NF, \mathbb{O}, \preceq)$.

ALGORITHME 12. Action d'un opérateur sur une fonction $\partial$-finie

L'algorithme pour obtenir un système rectangulaire qui annule le produit fonctionne comme pour le cas de la somme (voir plus haut) en exprimant les $\partial^k \cdot (fg)$ pour $k = 1, 2, \ldots$ sur une base finie
$$(\partial^i \cdot f) \otimes (\partial^j \cdot g)$$
et en effectuant une élimination gaussienne pour obtenir un polynôme pour chaque générateur $\partial$ de l'algèbre. Ici encore, si des bases de Gröbner sont données pour $\text{Ann}\, f$ et $\text{Ann}\, g$, alors une base de Gröbner de l'idéal annulateur (en général plus grand) pour $f \otimes g$ s'obtient par l'extension de l'algorithme FGLM décrite plus haut. L'algorithme est donné en algorithme 11. L'idéal $\text{Ann}(f \otimes g)$ est un sous-idéal $\partial$-fini de $\text{Ann}(fg)$.

**3.4. Clôture sous l'action d'opérateurs de Ore.** Les combinaisons linéaires de dérivées de fonctions $\partial$-finies sont encore $\partial$-finies, comme indiqué par le théorème suivant.

THÉORÈME 7. *Soit un idéal $\partial$-fini $\mathfrak{I}$ d'une algèbre de Ore*
$$\mathbb{O} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}].$$
*Soit $P$ un polynôme quelconque de $\mathbb{O}$. Alors, pour toute fonction $f$ annulée par $\mathfrak{I}$,* $\text{Ann}(P \cdot f)$ *est encore $\partial$-finie.*

Dans le cas où la fonction $f$ n'est que le générateur d'un $\mathbb{O}$-module monogène, la fonction $P \cdot f$ est d'emblée vue dans le $\mathbb{O}$-module $\mathbb{O} \cdot f$, et la définition de $\text{Ann}(P \cdot f)$ est immédiate.

DÉMONSTRATION. Le théorème est une conséquence de l'inclusion
$$\mathbb{O} \cdot (P \cdot f) \subseteq \mathbb{O} \cdot f$$
et de la $\partial$-finitude de $\text{Ann}\, f \supset \mathfrak{I}$. ∎

L'algorithme pour déterminer un opérateur annulateur de $P \cdot f$ consiste à récrire les dérivées successives $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} P \cdot f$ sur la base finie des dérivées de $f$, puis à trouver une dépendance linéaire par élimination gaussienne. Il est donné en algorithme 12.

En mettant ensemble les trois théorème précédents, j'obtiens le résultat suivant sur des expressions polynomiales en des fonctions $\partial$-finies.

COROLLAIRE 3. *Soit des idéaux $\partial$-finis $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_n$ d'une algèbre de Ore*

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$$

*sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Faisons l'hypothèse qu'il existe pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ des polynômes*

$$A_i(u) \qquad et \qquad B_i(u)$$

*à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que*

$$\sigma_i = A_i(\partial_i) \qquad et \qquad \delta_i = B_i(\partial_i),$$

*où les produits représentent des compositions, et*

$$[(A_i - 1) \cdot w] B_i = (B_i \cdot w)(A_i - 1) \qquad pour\ tout\ w \in \mathbb{K}.$$

*Soit $P$ un élément de l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[u_1, \ldots, u_p]$ et soient des fonctions $f_i$ annulées respectivement par $\mathfrak{I}_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors la fonction*

$$P(\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}_1} \cdot f_{s_1}, \ldots, \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}_p} \cdot f_{s_p})$$

*donnée par des $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{N}^r$ et des $s_i \in \{1, \ldots, n\}$ est $\partial$-finie par rapport à $\mathbb{O}$.*

Dans la pratique, on peut directement appliquer les algorithmes décrits plus haut sur une expression polynomiale $P(\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}_1} \cdot f_{s_1}, \ldots, \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}_p} \cdot f_{s_p})$, au lieu de la décomposer en sommes de produits. Un tel calcul direct a l'agréable propriété de produire le plus souvent des idéaux plus grands, et donc des équations d'ordre plus bas.

EXEMPLE. L'identité de Cassini sur les nombres de Fibonacci s'écrit :

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n,$$

avec

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Dans l'algèbre de Ore $\mathbb{Q}[S_n; S_n, 0]$, l'idéal annulateur $\mathfrak{I} = \operatorname{Ann} F$ de la suite $F$ des nombres de Fibonacci est engendré par $S_n^2 - S_n - 1$. Considérons le polynôme

$$P = (S_n^2 \cdot F) F - (S_n \cdot F)^2.$$

Tout d'abord, après réduction de chaque $S_n^i$ modulo $\mathfrak{I}$, le polynôme $P$ se récrit en

$$P = (S_n \cdot F) F + F^2 - (S_n \cdot F)^2.$$

Ensuite, la réduction similaire de $S_n \cdot P$ fournit

$$S_n \cdot P = -(S_n \cdot F) F - F^2 + (S_n \cdot F)^2.$$

Ainsi, une élimination gaussienne détecte que $S_n+1$ annule $P$, alors qu'une décomposition en sommes de produits fournit l'annulateur moins précis

$$S_n^3 - 2S_n^2 - 2S_n + 1$$

(qui est un multiple de $S_n + 1$).

**3.5. Clôture par spécialisation.** La spécialisation en un point d'une fonction $\partial$-finie de façon à obtenir une *fonction partielle* est encore $\partial$-finie (par rapport à une autre algèbre).

THÉORÈME 8. *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif,*

$$\mathbb{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}};\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}},\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}] \otimes \mathbb{K}(\mathbf{y})[\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{y}};\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}},\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{y}}]$$

*une algèbre de Ore pour les n-uplets* $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_p)$ *et* $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_q)$*,* $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *une fonction* $\partial$*-finie par rapport à* $\mathbb{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ *et* $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_q) \in \mathbb{K}^q$*. Alors,* $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{a})$ *est* $\partial$*-finie par rapport à* $\mathbb{O}_{\mathbf{x}} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}};\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}},\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}]$*, et un système rectangulaire de* $\operatorname{Ann} g$ *(par rapport à* $\mathbb{O}_{\mathbf{x}}$*) peut être calculé à partir d'un système de générateurs de* $\operatorname{Ann} f$*.*

Ici encore, cette proposition s'exprime aussi bien en termes de modules, au niveau des idéaux $\partial$-finis. Supposons donné un $\mathbb{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$-module monogène

$$M = \mathbb{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \cdot f.$$

La spécialisation de $f$ va être donnée par changement d'anneau des scalaires de ce module. Introduisons à cet effet le morphisme $\phi$ de $\mathbb{K}$-algèbre donné par $\phi(y_i) = a_i$ et $\phi(\partial_{y_i}) = 0$, mais $\phi(x_i) = x_i$ et $\phi(\partial_{x_i}) = \partial_{x_i}$. Alors $\mathbb{O}_{\mathbf{x}}$ est un $\mathbb{O}_{\mathbf{x}}$-$\mathbb{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$-bimodule pour l'action à gauche de $\mathbb{O}_{\mathbf{x}}$ donnée par le produit de $\mathbb{O}_{\mathrm{x}}$ et par l'action de $\mathbb{O}_{\mathrm{x,y}}$ à droite donnée par $\phi$. En d'autres termes,

$$p \bullet m \bullet q = pm\phi(q) \qquad \text{pour tout } (p,m,q) \in \mathbb{O}_{\mathrm{x}} \times \mathbb{O}_{\mathrm{x}} \times \mathbb{O}_{\mathrm{x,y}}$$

(les actions des scalaires étant notées $\bullet$). Ceci fait du produit tensoriel

$$\mathbb{T} = \mathbb{O}_{\mathbf{x}} \otimes_{\mathbb{O}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} M$$

un $\mathbb{O}_{\mathbf{x}}$-module à gauche. Alors, je définis la *spécialisation de* $f$ comme l'objet $1 \otimes f \in \mathbb{T}$.

DÉMONSTRATION. À partir d'un système rectangulaire pour $f$, l'algorithme consiste simplement à appliquer $\phi$ aux polynômes ne faisant intervenir que les $\partial_i$ et qui commutent avec les $y_j$ pour $j = 1,\dots,q$ (et à rejeter tous les autres). Ce procédé ne fournit pas d'équations triviales (c'est-à-dire du type « 0=0 ») à la condition que les polynômes en entrée aient été divisés à gauche par tout contenu éventuel dans $\mathbb{K}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$, ceci avant toute substitution. ■

Si un système de générateurs de l'idéal $\operatorname{Ann} f$ est donné, par exemple par une base de Gröbner calculée par les opérations de clôture, un système est obtenu pour $\operatorname{Ann} g$ par l'élimination (par un calcul de base de Gröbner) des $\partial_j$ qui ne commutent pas avec $y_1,\dots,y_q$, puis en remplaçant $y_1,\dots,y_q$

ALGORITHME : $S = \mathrm{Specialization}(G, \mathbb{O}, \mathbf{y}, \mathbf{a})$.

INPUT : $\begin{cases} \text{un système annulateur } G \text{ pour la fonction} \\ \text{à spécialiser} \\ \text{en } \mathbf{y} = \mathbf{a}, \\ \mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{y}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]. \end{cases}$

OUTPUT : un système annulateur pour la fonction spécialisée.

1. choisir un ordre de termes $\preceq$ éliminant les $\partial_j$ qui ne commutent pas avec $\mathbf{y}$ ;
2. calculer $H = \mathrm{GröbnerBasis}(G, \mathbb{O}, \preceq)$ ;
3. retirer de $H$ les polynômes faisant intervenir les $\partial_j$ à éliminer ;
4. diviser chaque polynôme de $H$ par son contenu en $\mathbf{y}$ ;
5. effectuer les substitutions $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ et $\partial_j = 0$ dans $H$ ;
6. renvoyer le résultat.

ALGORITHME 13. Spécialisation d'une fonction $\partial$-finie

par $a_1, \dots, a_q$. Ce système n'est pas nécessairement rectangulaire. L'algorithme est donné dans l'algorithme 13.

CHAPITRE IV

# Holonomie et fonctions holonomes

Dans le chapitre précédent, j'ai étudié les propriétés de fonctions vivant dans des espaces vectoriels stables par l'action de certains opérateurs linéaires. Le plus souvent, il s'agissait de solutions de systèmes d'opérateurs linéaires *à coefficients des fractions rationnelles*. J'ai plus précisément défini des fonctions dites *$\partial$-finies* satisfaisant une certaine propriété de finitude et j'ai étudié les propriétés de clôture de ces objets ainsi que l'algorithmique correspondante. La théorie et les méthodes employées sont assez simples et proches de la théorie et des algorithmes sur les fonctions algébriques. Par contre, l'étude des objets obtenus en n'autorisant que des opérateurs *à coefficients polynomiaux* amène à la théorie bien plus complexe de l'*holonomie* [20, 21, 22, 23, 33, 37, 39, 62]. Malheureusement, la compréhension des phénomènes de l'holonomie est nécessaire pour bien comprendre les opérations d'intégration et de sommation, et en particulier pour être capable de justifier la terminaison des algorithmes dans les chapitres qui vont suivre.

La théorie de l'holonomie est une théorie mathématique dont l'étude à été amorcée par Joseph Bernstein dans les années 1970 pour répondre à un problème de nature analytique posé en 1954 par Israel M. Gel'fand, et développée ensuite entre autres par Masaki Kashiwara (cf. le problème de complétion holonome §1 de la partie C). Pour un polynôme réel

$$P(x_1, \ldots, x_r)$$

de $r$ variables réelles et une fonction test $f$ infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^r$ et à support compact,

$$f(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^r),$$

considérons l'intégrale

$$\Gamma_f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^r} P^\lambda(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

qui est définie et analytique sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Le problème posé par Gel'fand était de déterminer si cette intégrale admet un prolongement méromorphe sur tout le plan complexe. Ce problème est resté ouvert jusqu'en 1968, où deux preuves compliquées indépendantes furent données. Puis, quatre ans plus tard, Joseph Bernstein obtint une nouvelle preuve plus élémentaire [20, 21] : étant donné le polynôme $P(\mathbf{x})$, il existe un polynôme $b(\lambda)$ à coefficients complexes et un opérateur différentiel linéaire $L$

en les dérivations par rapport aux $x_i$ et à coefficients dans $\mathbb{C}[\lambda, \mathbf{x}]$ tel que

$$b(\lambda)\Gamma_f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^r} P^{\lambda+1}(\mathbf{x})(L\cdot f)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \Gamma_{L\cdot f}(\lambda+1)$$

pour toute fonction test $f(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^r)$. Comme $\Gamma_{L\cdot f}(\lambda+1)$ est définie sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}\lambda > 0$, l'identité ci-dessus réalise un prolongement analytique de $\Gamma_f(\lambda)$ sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}\lambda > -1$ privé d'un nombre fini de pôles éventuels introduits par $b$. De proche en proche, on obtient que $\Gamma_f(\lambda)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles s'alignent sur plusieurs progressions arithmétiques. Un exemple simple est fourni par le polynôme $P = x^2$ dans le cas de dimension $r = 1$ :

$$(2\lambda+1)(2\lambda+2)\int_{\mathbb{R}} x^{2\lambda} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^{2(\lambda+1)} f(x)\, dx.$$

Le polynôme $b$ est appelé le polynôme de Bernstein-Sato de $P$, dont Kashiwara a montré que tous les zéros sont rationnels négatifs. C'est justement le caractère *holonome* (voir la définition 22, p. 122) du polynôme $P$ qui assure l'existence du polynôme $b$ et de l'opérateur $L$. Depuis, la théorie des $\mathcal{D}$-modules a largement étendu ce résultat pour obtenir d'autres équations fonctionnelles lorsque le polynôme $P$ est remplacé par une série formelle ou une fonction analytique.

Pour mieux motiver l'introduction de l'holonomie dans notre contexte, prenons tout de suite un exemple : soit $f = J_0(x+y)$ pour la fonction de Bessel $J_0$, et considérons les algèbres de Ore

$$\mathbb{O}_\mathrm{r} = \mathbb{C}(x,y)[D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y]$$

et

$$\mathbb{O}_\mathrm{p} = \mathbb{C}[x,y][D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y].$$

La fonction $f$ est $\partial$-finie par rapport à $\mathbb{O}_\mathrm{r}$ : son annulateur à coefficients rationnels, $\mathfrak{I}_\mathrm{r} = \operatorname{Ann}_{\mathbb{O}_\mathrm{r}} f$, est engendré par

$$\{(x+y)D_x^2 + D_x + x + y,\ D_x - D_y\}\} \tag{46}$$

et satisfait

$$\mathbb{O}_\mathrm{r}/\mathfrak{I}_\mathrm{r} \sim \mathbb{C}(x,y) \oplus \mathbb{C}(x,y)D_x,$$

ce dernier étant un espace vectoriel de dimension finie 2 sur $\mathbb{C}(x,y)$. En revanche, l'annulateur à coefficients polynomiaux $\mathfrak{I}_\mathrm{p} = \operatorname{Ann}_{\mathbb{O}_\mathrm{p}} f$, qui est encore engendré par (46), satisfait

$$\mathbb{O}_\mathrm{p}/\mathfrak{I}_\mathrm{p} \sim \mathbb{C}[x,y] \oplus \mathbb{C}[x,y]D_x \oplus \bigoplus_{i\geq 2} \mathbb{C}[y]D_x^i.$$

Cette fois-ci, cet espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est de dimension infinie. La notion d'holonomie va permettre de caractériser cet infini. Sa définition va être faite en terme d'une notion de *dimension d'idéal* qui va être explicitée plus loin. Pour cette notion de dimension, $\mathfrak{I}_\mathrm{r}$ est de dimension 0 dans $\mathbb{O}_\mathrm{r}$, alors que $\mathfrak{I}_\mathrm{p}$ est de dimension 2 dans $\mathbb{O}_\mathrm{p}$.

Dans le contexte d'une fonction $f$ décrite par des opérateurs linéaires, la dimension de l'idéal annulateur $\operatorname{Ann} f$ mesure le nombre d'intégrations et de sommations qu'il est possible de réaliser simultanément. En effet, ce dernier nombre correspond aux nombres d'indéterminées à éliminer simultanément dans les algorithmes qui seront décrits dans la partie B, et est relié à la dimension de l'annulateur $\operatorname{Ann} f$ par le théorème 11 qui ne sera donné qu'en §2. Les algorithmes d'intégration et de sommation donnés dans la partie B reposent de façon cruciale sur l'existence d'un polynôme éliminé non nul. Il est donc crucial de savoir décider de l'existence d'un tel polynôme dans un idéal. À un niveau intuitif, le théorème 11 affirme donc que plus la dimension de l'annulateur est basse, plus il est possible d'éliminer simultanément un grand nombre d'indéterminées, et donc de réaliser un plus grand nombre d'intégrations et de sommations simultanément. Sur l'exemple précédent, la dimension 2 de l'idéal $\mathfrak{I}_{\mathrm{P}}$ engendré par (46) dans $\mathbb{O}_{\mathrm{P}}$ sera suffisante pour justifier la terminaison et la réussite des algorithmes d'intégration.

La notion d'holonomie définie dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules est une notion plutôt technique, qui se fait en termes de *graduations* et de *filtrations* d'algèbres et de modules. Je rappelle les définitions de ces deux concepts en §1. Plus précisément, l'holonomie se définit en termes d'une notion de *dimension* d'idéaux et de modules, que je rappelle dans le cas général des algèbres de Ore en §2. Le lien entre les graduations et filtrations et les ordres de termes des calculs de bases de Gröbner est fait en §3. Vient ensuite la définition des modules et fonctions holonomes en §4. Je termine en §5 par quelques éclaircissements concernant l'introduction des fonctions holonomes dans la théorie de Zeilberger, en particulier, la définition de l'holonomie pour les suites, et la différence qui m'apparaît comme essentielle entre le caractère holonome d'une fonction et la donnée d'un système holonome pour la représenter.

## 1. Graduations et filtrations d'algèbres et de modules

Dans cette section, je rappelle les définitions générales de *graduations* et de *filtrations*, ainsi que quelques résultats généraux [24]. Dans le cadre de cette étude, ces définitions et résultats interviennent pour deux types d'utilisations différentes :

- pour définir l'holonomie comme dans [20, 22, 37, 39] ;
- pour fournir un cadre général pour comprendre les bases de Gröbner, à la manière de [72].

Considérons tout de suite deux exemples, le premier commutatif, le second non commutatif, pour motiver l'introduction des définitions qui vont suivre. Soit $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$ une $\mathbb{K}$-algèbre de polynômes commutatifs en plusieurs indéterminées $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_r$. À chaque polynôme de cette algèbre est associé son *degré total* en $\mathbf{u}$. Notons $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des polynômes *homogènes* de degré $n$. La somme (directe) des $\mathcal{G}_n$ est donc l'algèbre toute entière. Par ailleurs, le caractère homogène de polynômes est stable par produit : le produit de deux polynômes homogènes de degrés $n$ et $m$ est un polynôme homogène de degré $n+m$. Formellement,

$$\mathcal{G}_n \mathcal{G}_m \subseteq \mathcal{G}_{n+m}.$$

Si l'on considère maintenant l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}\langle x, \partial\rangle$, c'est-à-dire la $\mathbb{K}$-algèbre associative donnée par la relation $\partial x = x\partial + 1$, on ne retrouve plus d'aussi bonnes propriétés du produit par rapport au degré total en $x$ et $\partial$. Dans ce cas, notons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des polynômes en $x$ et $\partial$ de degré total *au plus* $n$. On a cette fois

$$\mathcal{F}_n \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{n+m},$$

mais par exemple le produit des polynômes homogènes $\partial$ et $x$ (pris dans cet ordre) n'est pas homogène de degré 2.

Les définitions qui suivent généralisent la situation ci-dessus à des degrés pris dans un monoïde M non restreint à $\mathbb{N}$, de façon à pouvoir mieux distinguer entre des polynômes de même degré total, et donnent un cadre pour retrouver une notion d'homogénéité stable par produit dans des cas analogues à l'algèbre de Weyl ci-dessus.

Définition 16. *Soit* M *un monoïde muni d'un neutre $e$ et d'un ordre total $\preceq$. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un corps* $\mathbb{K}$.

*Une* M-graduation *de $\mathcal{A}$ est une famille $(\mathcal{G}_\mu)_{\mu\in \mathrm{M}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}$ vérifiant pour toute paire $(\mu,\mu')\in \mathrm{M}^2$,*

$$\mathcal{G}_\mu \mathcal{G}_{\mu'} \subseteq \mathcal{G}_{\mu\mu'} \qquad \textit{et} \qquad \bigoplus_{\mu\in\mathrm{M}} \mathcal{G}_\mu = \mathcal{A}.$$

*Une* M-filtration *de $\mathcal{A}$ est une famille croissante $(\mathcal{F}_\mu)_{\mu\in \mathrm{M}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire vérifiant $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_{\mu'}$ dès que $\mu \preceq \mu'$, et vérifiant pour toute paire $(\mu,\mu')\in \mathrm{M}^2$,*

$$\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_{\mu'} \subseteq \mathcal{F}_{\mu\mu'} \qquad \textit{et} \qquad \bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} \mathcal{F}_\mu = \mathcal{A}.$$

Par exemple, les ensembles $\mathcal{G}_n \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{u}]$ de polynômes homogènes de degré $n$ forment une $\mathbb{N}$-graduation de $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$ ; les ensembles $\mathcal{F}_n$ de polynômes de degré au plus $n$ de $\mathbb{K}\langle x, \partial\rangle$ forment une $\mathbb{N}$-filtration de $\mathbb{K}\langle x, \partial\rangle$.

Une fois qu'une algèbre a été munie d'une filtration, on lui associe une algèbre munie d'une graduation de la manière qui suit.

Définition 17. *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie d'une* M-*filtration $(\mathcal{F}_\mu)$. Pour chaque $\mu \in \mathrm{M}$, notons*

$$\mathcal{V}_\mu = \bigcup_{\mu'\in\mathrm{M},\, \mu'\prec\mu} \mathcal{F}_{\mu'} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{G}_\mu = \mathcal{F}_\mu / \mathcal{V}_\mu.$$

*L'*algèbre graduée associée *à $\mathcal{A}$ est la somme directe*

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}\, \mathcal{A} = \bigoplus_{\mu\in\mathrm{M}} \mathcal{G}_\mu,$$

*munie du produit induit par le produit de $\mathcal{A}$.*

Il reste à prouver que le produit est bien défini, auquel cas on aura que $(\mathcal{G}_\mu)$ est une M-graduation de $\mathrm{gr}_\mathcal{F} \mathcal{A}$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $(\mu, \mu') \in \mathrm{M}^2$, considérons

$$\alpha \in \mathcal{G}_\mu \qquad \text{et} \qquad \beta \in \mathcal{G}_{\mu'},$$

ainsi que

$$(A, A') \in \alpha^2 \qquad \text{et} \qquad (B, B') \in \beta^2.$$

Alors,

$$AB - A'B' = A(B - B') + (A - A')B' \in \mathcal{V}_{\mu\mu'}.$$

Le produit $\alpha\beta$ est donc bien défini comme l'image de $AB$ dans l'espace vectoriel quotient $\mathcal{G}_{\mu\mu'} = \mathcal{F}_{\mu\mu'}/\mathcal{V}_{\mu\mu'}$. Ce produit se généralise à toute paire d'éléments de $\mathrm{gr}_\mathcal{F} \mathcal{A}$ par distribution du produit sur la somme. ∎

Nous verrons en §3 que dans le cas de la filtration donnée plus haut de l'algèbre de Weyl $\mathbb{K}\langle x, \partial\rangle$, son algèbre graduée associée est l'anneau $\mathbb{K}[x, \partial]$ de polynômes commutatifs en deux indéterminées, gradué par le degré total.

Les notions respectives de graduation et de filtration se définissent de manière similaire dans le cas de $\mathcal{A}$-modules sur une algèbre respectivement graduée ou filtrée. Seule une définition pour des modules à gauche est donnée ici, d'autres définitions s'obtenant *mutatis mutandis*.

DÉFINITION 18. *Soient* M *un monoïde muni d'un neutre e et d'un ordre total $\preceq$, $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie respectivement d'une* M*-graduation $(\mathcal{G}_\mu)$ ou d'une* M*-filtration $(\mathcal{F}_\mu)$ et $\mathfrak{m}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche.*

*Une* M-graduation *de $\mathfrak{m}$ est une famille $(\Gamma_\mu)_{\mu\in\mathrm{M}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{m}$ vérifiant pour toute paire $(\mu, \mu') \in \mathrm{M}^2$,*

$$\mathcal{G}_\mu \cdot \Gamma_{\mu'} \subseteq \Gamma_{\mu\mu'} \qquad \textit{et} \qquad \bigoplus_{\mu\in\mathrm{M}} \Gamma_\mu = \mathfrak{m}.$$

*Une* M-filtration *de $\mathfrak{m}$ est une famille croissante $(\Phi_\mu)_{\mu\in\mathrm{M}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire vérifiant $\Phi_\mu \subseteq \Phi_{\mu'}$ dès que $\mu \preceq \mu'$, et vérifiant pour toute paire $(\mu, \mu') \in \mathrm{M}^2$,*

$$\mathcal{F}_\mu \cdot \Phi_{\mu'} \subseteq \Phi_{\mu\mu'} \qquad \textit{et} \qquad \bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} \Phi_\mu = \mathfrak{m}.$$

Ici encore, lorsqu'un module $\mathfrak{m}$ n'est que M-filtré, on lui associe un autre module M-gradué.

DÉFINITION 19. *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre munie d'une* M*-filtration $(\mathcal{F}_\mu)$, et $\mathfrak{m}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche muni d'une* M*-filtration $(\Phi_\mu)$. Pour chaque $\mu \in$* M*, notons*

$$\Upsilon_\mu = \bigcup_{\mu'\in\mathrm{M},\, \mu'\prec\mu} \Phi_{\mu'} \qquad \textit{et} \qquad \Gamma_\mu = \Phi_\mu/\Upsilon_\mu.$$

*Le* module gradué associé *à* $\mathfrak{m}$ *est le* $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{A}$*-module à gauche*

$$\operatorname{gr}_\Phi \mathfrak{m} = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{M}} \Gamma_\mu.$$

Reste à expliquer comment $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{A}$ agit sur $\operatorname{gr}_\Phi \mathfrak{m}$.

Démonstration. Pour tout $(\mu, \mu') \in \mathrm{M}^2$, considérons $\alpha \in \mathcal{G}_\mu = \mathcal{F}_\mu / \mathcal{V}_\mu$ et $\beta \in \Gamma_{\mu'} = \Phi_{\mu'} / \Upsilon_{\mu'}$, ainsi que $(A, A') \in \alpha^2$ et $(M, M') \in \beta^2$. Alors, $AM$, $AM'$, $A'M$ et $A'M'$ sont éléments de $\Phi_{\mu\mu'}$, mais

$$AM - A'M' = A(M - M') + (A - A')M' \in \Upsilon_{\mu\mu'}.$$

Le produit $\alpha\beta$ est donc bien défini comme l'image de $AM$ dans l'espace vectoriel quotient $\Gamma_{\mu\mu'} = \Phi_{\mu\mu'} / \Upsilon_{\mu\mu'}$. Ce produit se généralise à toute paire d'éléments de $\operatorname{gr}_\Phi \mathfrak{m}$ par distribution du produit sur la somme. ■

Pour toute la suite, sauf mention explicite du contraire, je fais de plus l'hypothèse que tous les espaces vectoriels $\mathcal{G}_\mu$, $\mathcal{F}_\mu$, $\Gamma_\mu$ et $\Phi_\mu$ des graduations et filtrations utilisées sont de dimension finie et que

$$\mathcal{G}_e = \mathcal{F}_e = \mathbb{K}.$$

## 2. Invariants combinatoires et élimination

Dans cette section, les modules filtrés se voient attribuer certains nombres ou *invariants combinatoires*, tels la dimension et le degré. Dans le cas d'algèbres polynomiales commutatives, ces invariants ont une interprétation intuitive simple en géométrie algébrique. Dans le cas d'algèbres d'opérateurs plus générales, nous retrouvons une interprétation intuitive en termes d'élimination et fort utile algorithmiquement (voir le théorème 11).

Les espaces vectoriels $\mathcal{F}_\mu$ d'une filtration étant de dimension finie, la série génératrice des dimensions est un invariant important d'une algèbre filtrée.

Définition 20 (Série de Hilbert). *Pour une algèbre* $\mathcal{A}$ *sur un corps* $\mathbb{K}$ *admettant la* $\mathbb{N}$*-filtration* $(\mathcal{F}_n)$*, la série formelle*

$$H_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}_n s^n$$

*est appelée* série de Hilbert *de* $\mathcal{A}$*.*

Revenons maintenant au cas particulier de l'algèbre de polynômes

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}[\mathbf{u}] = \mathbb{K}[u_1, \dots, u_r],$$

munie de sa $\mathbb{N}$-graduation par le degré total. Lorsqu'un $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$-module $\mathfrak{m}$ est un module $\mathbb{N}$-gradué, il admet une décomposition

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

pour des sous-espaces vectoriels $\Gamma_n$ de $\mathfrak{m}$ sur $\mathbb{K}$ vérifiant

$$u_j\Gamma_n \subseteq \mathcal{G}_1\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème important qui suit est dû à David Hilbert (voir [22, 37] pour une preuve).

THÉORÈME 9 (Polynôme de Hilbert ; David Hilbert). *Soit* $\mathfrak{m}$ *un module finiment engendré à gauche sur* $\mathbb{K}[u_1, \ldots, u_r]$ *et admettant la* $\mathbb{N}$*-graduation*

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n.$$

*Alors, il existe des nombres rationnels* $c_0, \ldots, c_d$*, pour* $d \leq r$ *et* $c_d \neq 0$*, tels que*

$$H_n = \sum_{i\leq n} \dim_{\mathbb{K}} \Gamma_i = c_d n^d + \cdots + c_0$$

*quand* $n$ *est assez grand.*

Dans les cas qui nous intéressent, la série de Hilbert sera toujours une fraction rationnelle. En conséquence du théorème précédent, le seul pôle éventuel de cette fraction rationnelle est 1. Par opposition, dans le cas de l'algèbre $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ sur le monoïde libre non commutatif engendré par deux indéterminées $x$ et $y$, un calcul immédiat donne la série de Hilbert

$$H_{\mathbb{K}\langle x,y\rangle}(s) = \frac{1}{1-2s}.$$

Ceci ne contredit pas le théorème car l'algèbre $\mathbb{K}\langle x, y\rangle$ ne peut pas être vue comme un $\mathbb{K}[x, y]$-module à gauche.

La fonction polynomiale $H_n$ du théorème précédent, son degré, son coefficient dominant et en fait chacun de ses coefficients sont des *invariants combinatoires* du module : ils sont invariants par changement de graduation qui conserve le caractère finiment engendré du $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$-module $\mathfrak{m}$. Par ailleurs, le théorème précédent reste valable si on remplace l'anneau de polynômes commutatifs $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$ par une algèbre associative $\mathbb{K}\langle\mathbf{u}\rangle$ donnée par les relations (47) du théorème ci-dessous. Pour ces deux raisons, il est légitime de vouloir définir les objets précédents pour des modules autres que les modules sur une algèbre polynomiale commutative. Lorsqu'on s'intéresse à un module filtré $\mathfrak{m}$ sur une algèbre filtrée $\mathcal{A}$ dont l'algèbre graduée associée est une algèbre polynomiale commutative $\mathbb{K}[u_1, \ldots, u_r]$ ou plus généralement une algèbre associative donnée par des relations du type (47), il est possible dans les bons cas de définir des invariants combinatoires $\mathfrak{m}$ comme étant ceux du module gradué associé de $\mathfrak{m}$. Les résultats et définitions sont donnés dans le théorème suivant.

THÉORÈME 10. *Soient* $\mathcal{A}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre munie d'une* $\mathbb{N}$*-filtration* $(\mathcal{F}_n)$ *et* $\mathfrak{m}$ *un* $\mathcal{A}$*-module à gauche muni d'une* $\mathbb{N}$*-filtration* $(\Phi_n)$*. Supposons en* *outre que l'algèbre graduée associée* $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{A}$ *soit une* $\mathbb{K}$*-algèbre associative donnée par les relations*

$$u_j u_i = c_{i,j} u_i u_j \qquad \text{pour des } c_{i,j} \in \mathbb{K} \text{ non nuls,} \tag{47}$$

*et que le module gradué associé* $\operatorname{gr}_{\Phi} \mathfrak{m}$ *soit* finiment engendré *sur* $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{A}$*. Alors, il existe des nombres rationnels* $c_0, \ldots, c_d$*, pour* $d \leq r$ *et* $c_d \neq 0$*, tels que*

$$H_n = \sum_{i \leq n} \dim_{\mathbb{K}} \Gamma_i = c_d n^d + \cdots + c_0$$

*quand* $n$ *est assez grand. La fonction polynomiale précédente est appelée* polynôme de Hilbert *du module* $\mathfrak{m}$ *; son degré* $d$ *est appelé* dimension (de Hilbert, ou combinatoire) *du module* $\mathfrak{m}$ *; le nombre* $d!c_d$ *est un entier appelé* degré (de Hilbert, ou combinatoire) *du module* $\mathfrak{m}$*.*

Je peux maintenant démontrer le théorème suivant annoncé dans l'introduction, et qui généralise un résultat analogue de Joseph Bernstein dans le cas différentiel usuel (cf. le corollaire 4 plus bas).

THÉORÈME 11 (Dimension et élimination). *Soit*

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s][\partial_1; \sigma_1, \delta_1] \cdots [\partial_r; \sigma_r, \delta_r]$$

*une algèbre de Ore polynomiale sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$*. Supposons la munie d'une* $\mathbb{N}$*-filtration* $(\mathcal{F}_n)$ *telle que l'algèbre graduée associée soit une* $\mathbb{K}$*-algèbre associative donnée par des relations du type (47). Soit alors* $\mathfrak{I}$ *un idéal (à gauche) de* $\mathbb{O}$*. Considérons la sous-algèbre* $\mathbb{S}$ *de* $\mathbb{O}$ *engendrée par une famille*

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_v}, \partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_u}\}$$

*quelconque de* $u + v$ *indéterminées prises parmi les générateurs de* $\mathbb{O}$*. Alors, si la dimension* $d$ *de* $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ *vérifie* $d < u + v$*, l'intersection* $\mathbb{S} \cap \mathfrak{I}$ *n'est pas réduite à* $\{0\}$*. Dit autrement, il est possible d'éliminer simultanément au plus* $r + s - d - 1$ *indéterminées des polynômes de l'idéal* $\mathfrak{I}$*.*

DÉMONSTRATION. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ introduisons l'application de

$$\mathbb{S}_n = \mathcal{F}_n \cap \mathbb{S}$$

dans

$$\mathcal{F}_n \cdot f = (\mathbb{O} \cdot f)_n \simeq (\mathbb{O}/\mathfrak{I})_n \simeq \mathcal{F}_n/(\mathcal{F}_n \cap \mathfrak{I})$$

qui à $P$ associe $P \cdot f$. On a donc une suite d'applications d'un espace de dimension sur $\mathbb{K}$ d'asymptotique $\Theta(n^{u+v})$ dans un espace de dimension d'asymptotique $\Theta(n^d)$. La conclusion découle de ce que si $d < u + v$, alors

$$\mathbb{S}_n \cap \mathfrak{I} \neq 0$$

pour $n$ assez grand. ■

## 3. Ordres de termes

Bien souvent, on considère des algèbres graduées ou filtrées par un monoïde dont les éléments peuvent être vus comme appartenant à l'algèbre. Par exemple, lorsque M désigne le monoïde commutatif libre sur des indéterminées $\mathbf{u}$ et muni *d'un ordre compatible avec son produit*, la famille $(\mathbb{K}\mu)_{\mu\in\mathrm{M}}$ forme une M-graduation de $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$. Ce cas est tellement important, en particulier dans la théorie des bases de Gröbner, qu'il justifie pleinement la définition suivante.

DÉFINITION 21 (Ordre de termes). *Soit* M *un monoïde muni d'un neutre e et d'un ordre total* $\preceq$ *compatible avec son produit. Pour un corps commutatif* $\mathbb{K}$, *supposons que le* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\mu\in\mathrm{M}} \mathbb{K}\mu$$

*soit muni d'une structure de* $\mathbb{K}$*-algèbre admettant*

$$\mathcal{F}_\mu = \bigoplus_{\mu'\in\mathrm{M},\, \mu'\prec\mu} \mathbb{K}\mu'$$

*comme* M*-filtration. Chaque* $\mu \in \mathrm{M}$ *est alors appelé un* terme *de* $\mathcal{A}$, *et l'ordre* $\preceq$ *est appelé un* ordre de termes.

J'envisage maintenant tour à tour plusieurs exemples d'algèbres sur des termes et je montre qu'elles sont noethériennes en calculant à chaque fois leur gradué associé.

**Polynômes commutatifs.** Retournons à l'exemple du monoïde commutatif libre M sur des indéterminées $\mathbf{u}$ et muni d'un ordre compatible avec son produit. Dans ce cas, l'algèbre graduée associée

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}\, \mathcal{A}$$

de l'algèbre

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}[\mathbf{u}]$$

est l'algèbre $\mathcal{A}$ elle-même, munie de sa M-graduation $(\mathbb{K}\mu)$. Lorsque 1 est le plus petit élément de M, on retrouve le cadre habituel des bases de Gröbner introduites par Bruno Buchberger [27, 28, 29, 30].

**Algèbres de Weyl.** Les algèbres de Weyl qui représentent des algèbres d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux jouent un rôle privilégié dans cette thèse. Ces algèbres sont les algèbres associatives

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n\rangle$$

données par les relations

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n,$$

toute autre paire d'indéterminées commutant [22, 37]. La règle de commutation ci-dessus fournit une forme normale pour tout polynôme, dans laquelle tous les $x_i$ sont écrits à gauche et tous les $\partial_i$ à droite. Aussi le monoïde des termes à considérer est-il encore le monoïde commutatif libre M sur les indéterminées $\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}$. L'algèbre graduée associée $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est cette fois-ci l'algèbre de polynômes commutatifs $\mathbb{K}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}]$, munie de sa M-graduation $(\mathbb{K}\mu)$.

**Anneaux de polynômes de type résoluble.** Je m'apprête à spécialiser et exploiter les concepts des sections précédentes dans le cas de modules sur une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$. Pour ce faire, je vais introduire une filtration de $\mathbb{O}$ et calculer l'algèbre graduée associée de façon à montrer que $\mathbb{O}$ est noethérien.

Pour assurer l'existence d'une M-filtration de $\mathbb{O}$ ainsi que la validité des propositions qui suivent, je me restreins à des commutations données par les hypothèses du théorème 4 au chapitre II, et que je rappelle ici :

$$\partial_i x_j = (a_{i,j} x_j + b_{i,j})\partial_i + c_{i,j}(\mathbf{x}), \qquad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s, \tag{48}$$

avec $b_{i,j} \in \mathbb{K}$, $a_{i,j} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, et $c_{i,j} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$. En d'autres termes,

$$x_j^{\sigma_i} = a_{i,j} x_i + b_{i,j}$$

est un polynôme de degré 1 en $x_i$ et $x_j^{\delta_i} = c_{i,j}(\mathbf{x})$ est un polynôme quelconque en $\mathbf{x}$. Remarquons que des exemples de commutations proposées dans le tableau 2, p. 37, seules celles correspondant aux opérateurs de Mahler, de Frobenius ou de différence divisée ne sont pas du type (48).

Il est intéressant de noter que ce sont les mêmes hypothèses qui ont permis l'effectivité d'une théorie des bases de Gröbner au chapitre 4 et en particulier la terminaison d'un algorithme de Buchberger non commutatif, et qui vont permettre de montrer des propriétés comme le caractère noethérien des algèbres vérifiant (48).

Considérons le monoïde commutatif libre M engendré par $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\partial}$. Il admet le terme 1 pour neutre. Munissons-le d'un ordre $\preceq$ quelconque qui rende $\boldsymbol{\partial}$ lexicographiquement plus grand que $\mathbf{x}$. Alors, cet ordre de termes définit la filtration de $\mathbb{O}$ donnée par

$$\mathcal{F}_\mu = \bigoplus_{\mu' \in \mathrm{M},\, \mu' \preceq \mu} \mathbb{K}\mu'$$

pour $\mu \in \mathrm{M}$. Pour cette filtration, il apparaît que $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathbb{O}$ est la $\mathbb{K}$-algèbre associative libre donnée par les relations

$$\partial_i x_j = a_{i,j} x_j \partial_i,$$

où $\partial_i$ et $x_j$ désignent maintenant des classes dans $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} \mathbb{O}$.

## 4. Inégalité de Bernstein et modules holonomes

Dans cette section et la suivante, on se restreint à l'étude de propriétés propres au cadre différentiel, et à des *corps commutatifs* $\mathbb{K}$ *de caractéristique nulle*. Considérons une algèbre de Weyl

$$\mathcal{A}_r(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \mathbf{1}, \boldsymbol{\partial}]$$

munie de sa $\mathbb{N}$-filtration $(\mathcal{B}_n)$ par le degré total en $\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}$, encore appelée *filtration de Bernstein*. L'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}_r(\mathbb{K})$ est donc un anneau de polynômes

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_r],$$

où $\xi_i$ est la classe de $\partial_i$. La dimension des $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$-modules filtrés relativement à la filtration de Bernstein de $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$ est appelée *dimension de Bernstein*.

Le théorème suivant est dû à Bernstein, qui en a donné la première preuve [21, théorème 1.3]. Une preuve combinatoire élégante et élémentaire est due à Anthony Joseph et est reproduite dans [50]. Voir aussi [22, 37].

THÉORÈME 12 (Inégalité de Bernstein ; Joseph Bernstein). *La dimension de Bernstein d'un module non nul finiment engendré sur une algèbre de Weyl $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$ est supérieure ou égale à $r$.*

La démonstration du théorème n'est pas donnée ici, mais mentionnons que sa justification repose de manière cruciale sur deux propriétés des algèbres de Weyl sur un corps de caractéristique nulle :

– $A \in \mathcal{B}_p$ et $B \in \mathcal{B}_q$ impliquent que

$$[B, A] = BA - AB \in \mathcal{B}_{p+q-2},$$

et non pas seulement que

$$[B, A] \in \mathcal{B}_{p+q-1} \ ;$$

– pour $A \in \mathcal{B}_p$ hors de $\mathcal{B}_0 \sim \mathbb{K}$, il existe $B \in \mathcal{B}_1$ tel que

$$[B, A] \in \mathcal{B}_{p-1}.$$

Ces deux points sont en général faux dans d'autres algèbres de Ore.

En particulier, le théorème est faux pour une algèbre de Weyl en caractéristique non nulle, comme le montre l'exemple du $\mathcal{A}_1(\mathbb{F}_2)$-module quotient de $\mathcal{A}_1(\mathbb{F}_2)$ par son idéal gauche engendré par $x_1^2$ et $\partial_1$ ($\mathbb{F}_2$ est le corps à deux éléments). Ici, c'est la seconde propriété qui est en défaut : $[\partial_1, x_1^2] = [x_1, x_1^2] = 0$ et il n'existe plus généralement aucun $B$ tel que $[B, x_1^2]$ soit de degré 1. Le module quotient est isomorphe à $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 x_1$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$ et est de dimension 0 en tant que module, sans que ce module soit nul.

Un contre-exemple en caractéristique 0 pour des algèbres de Ore autres que les algèbres de Weyl est donné par l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[n][S_n; S_n, 0]$ en l'opérateur de décalage $S_n$ tel que $S_n = nS_n + S_n$. Alors, l'idéal à gauche

$$\mathfrak{I} = \mathcal{A}S_n + \mathcal{A}n$$

donne un module quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ isomorphe à $\mathbb{Q}$ comme espace vectoriel, et de dimension 0 en tant que module, plus petite que 1 sans que le module soit nul.

Des contre-exemples similaires peuvent s'obtenir dans des algèbres de Ore construites sur des opérateurs de différences, de $q$-calcul ou même des opérateurs eulériens.

La définition de Bernstein de l'holonomie peut enfin être rappelée. Sa justification est que la classe des modules qu'elle définit jouit de nombreuses clôtures.

DÉFINITION 22 (Holonomie). *Les modules finiment engendrés sur une algèbre de Weyl $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$ et de dimension de Bernstein minimale $r$ sont dits* holonomes. *Je conviens encore de dire qu'un élément d'un module holonome est* holonome. *Par extension, j'appelle holonomes le module nul et la fonction nulle.*

L'extension de la définition aux fonctions n'est pas classique dans la communauté des $\mathcal{D}$-modules, mais reprend la terminologie introduite par Doron Zeilberger. Celle-ci est en effet justifiée : le sous-module $\mathcal{A}_r(\mathbb{K}) \cdot f$ engendré par un élément $f$ d'un module holonome $\mathfrak{m}$ est holonome, et tout module holonome $\mathfrak{m}$ est monogène [37, corollaire 10.2.6].

En revanche, on sait [37, théorème 9.3.2] qu'un idéal $\mathfrak{I}$ d'une algèbre de Weyl $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$ ne peut pas être holonome, au sens des « $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$-modules holonomes » qui vient d'être donné, en même temps que le module $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})/\mathfrak{I}$. J'éviterai donc de parler d'« idéal holonome » quand le module quotient

$$\mathcal{A}_r(\mathbb{K})/\mathfrak{I}$$

est holonome, et je réserverai la désignation d'holonome aux idéaux qui sont holonomes comme $\mathcal{A}_r(\mathbb{K})$-modules.

Comme premier exemple de module holonome, mentionnons l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, qui est un module sur l'algèbre de Weyl $\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathcal{A}_r(\mathbb{K})$. Cet exemple s'interprète en termes de fonctions de la manière suivante. Considérons une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{F}$ de fonctions contenant $\mathbb{K}(\mathbf{x})$ et qui soit un module sur

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{K}(\mathbf{x}) \otimes \mathbb{O}_{\mathrm{p}}.$$

Alors $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est le sous-module holonome de $\mathcal{F}$ engendré par 1. Le théorème suivant fournit comme autres exemples les fonctions de $\mathcal{F}$ qui sont $\partial$-finies par rapport à $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ en général.

THÉORÈME 13 (Holonomie et $\partial$-finitude ; Masaki Kashiwara). *Pour tout idéal à gauche $\mathfrak{I}$ de*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathcal{A}_r(\mathbb{K}),$$

*le module $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}/\mathfrak{I}$ est un module holonome si et seulement si $\mathbb{K}(\mathbf{x}) \otimes \mathfrak{I}$ est un idéal $\partial$-fini de*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{K}(\mathbf{x}) \otimes \mathbb{O}_{\mathrm{p}}.$$

*Autrement dit, un idéal $\mathfrak{K}$ de $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ est $\partial$-fini si et seulement si le $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$-module quotient*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}}/(\mathfrak{K} \cap \mathbb{O}_{\mathrm{p}})$$

*est holonome.*

DÉMONSTRATION. Le résultat direct est dû à Bernstein et est une conséquence du théorème 11. Le résultat converse est classiquement obtenu comme corollaire d'un théorème profond et difficile dû à Masaki Kashiwara [62]. Une preuve élémentaire se trouve dans [101, §6]. Voir aussi §1 de la partie C pour un résultat algorithmique. ∎

Comme conséquence directe de la définition de l'holonomie et du théorème 11, nous retrouvons le corollaire suivant, dû à Joseph Bernstein et donné par Doron Zeilberger dans [113, lemme 4.1]. Ce résultat permettra de calculer simultanément $r-1$ intégrations aux chapitres V et VI.

COROLLAIRE 4 (Holonomie et élimination ; Joseph Bernstein). *Soit*

$$\mathbb{O} = \mathcal{A}_r(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r][\partial_1; 1, \partial_1] \cdots [\partial_r; 1, \partial_r]$$

*une algèbre de Weyl sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soit alors $\mathfrak{I}$ un idéal (à gauche) de $\mathbb{O}$ tel que $\mathbb{O}/\mathfrak{I}$ soit un module holonome. Alors, la sous-algèbre $\mathbb{S}$ de $\mathbb{O}$ engendrée par toute famille de $r+1$ éléments pris parmi les générateurs de $\mathbb{O}$ est d'intersection non nulle avec $\mathfrak{I}$. C'est en particulier le cas de la famille*

$$\{x_r, \partial_1, \ldots, \partial_r\}.$$

*Autrement dit, il est possible d'éliminer simultanément jusqu'à $r-1$ des $x_i$ parmi les polynômes de l'idéal $\mathfrak{I}$.*

## 5. Fonctions holonomes de Zeilberger

Dans la première partie de cette section, je justifie l'emploi de la théorie de l'holonomie dans le cadre de la sommation, alors que je n'ai jusqu'à présent pas défini d'holonomie pour des algèbres d'opérateurs autres que dans le cas différentiel. En particulier, le corollaire 5 est à la base de la sommation par les méthodes de l'holonomie.

Par suite du théorème de Kashiwara, toute fonction $\partial$-finie par rapport à une algèbre d'opérateurs différentiels linéaires est holonome (théorème 13). Par ailleurs, nous avons vu au chapitre III que les fonctions $\partial$-finies jouissent de clôture par addition, produit, dérivation, substitution algébrique... En particulier, toute expression obtenue comme polynôme en des fonctions $\partial$-finies est elle-même $\partial$-finie, et donc holonome. Lorsqu'on aura dit que l'holonomie d'une fonction est la propriété essentielle qui permet aux algorithmes de la partie B de réaliser l'intégration, il semblera aisé d'intégrer toute fonction $f$ dès lors qu'elle sera réputée $\partial$-finie. Dans une deuxième partie, je montre qu'il n'en est étonnamment rien : bien qu'une description de $f$ comme fonction $\partial$-finie soit calculatoirement facile à obtenir, un idéal annulateur correspondant à un module holonome est en général difficile à calculer. Cette distinction ne me semble pas avoir été explicitée ailleurs. Dans cette section, je donne quelques exemples mettant ce problème en lumière. Il faudra attendre le chapitre VIII pour trouver une solution algorithmique au problème du calcul d'un idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie qui définisse un module holonome.

Enfin, il faut pouvoir tester si un système engendre un idéal associé à un module holonome. Des algorithmes existent et je donne des exemples de calcul dans la troisième et dernière partie de cette section.

**5.1. Définition de l'holonomie pour les suites.** En fait, la définition 22 de l'holonomie, p. 122, fournit déjà une définition de l'holonomie pour les suites, pour peu qu'on fasse agir une algèbre de Weyl sur le module de suites adéquat. Une telle action a déjà été proposée en §4, au chapitre I. Rappelons qu'une action de l'algèbre de Weyl sur une algèbre de suites $u$ en les indices $(k_1, \ldots, k_r)$ s'obtient par

$$(x_i \cdot u)(k_1, \ldots, k_r) = u(k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_r), \tag{49}$$

$$(\partial_i \cdot u)(k_1, \ldots, k_r) = (k_i + 1)u(k_1, \ldots, k_i + 1, \ldots, k_r) \tag{50}$$

(où $u$ est nulle quand elle est évaluée en un indice strictement négatif). Autrement dit, $x_i$ agit comme un décalage inverse, tandis que $\partial_i$ agit comme un multiple du décalage avant. Par exemple, ceci définit proprement une action de l'algèbre de Weyl $\mathcal{A}_r(\mathbb{C})$ sur l'algèbre $\mathcal{F}_\mathbb{N} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^r}$ des suites de $r$ indices entiers naturels à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les suites holonomes de $\mathcal{F}_\mathbb{N}$ sont, comme dans le cas continu, celles dont l'annulateur est de dimension minimale, à savoir $r$.

Par exemple, la suite $1/n!$ est holonome dans le $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})$-module des suites à un indice : elle est annulée par $\partial_x - 1$. De même, la suite $n!$ est holonome, annulée par

$$x^2\partial_x + x - 1.$$

La suite $1/n$ est encore holonome, annulée par

$$(1 - x)\partial_x.$$

En revanche, la suite

$$u_{n,k} = \frac{1}{n^2 + k^2}$$

est un exemple donné par Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger [110] de suite hypergéométrique qui ne soit pas holonome, vue comme élément d'un module sur $\mathcal{A}_2(\mathbb{C})$ de suites à deux indices. *Ad absurdum*, si $u$ était holonome, il existerait un opérateur annulateur $P(x_1, x_2, \partial_1)$ non nul, et donc, en termes d'opérateurs de décalages, il existerait un opérateur annulateur $Q(n, S_n, S_k)$ non nul. Nous aurions donc une équation de récurrence de la forme

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{q_{i,j}(n)}{(n+i)^2 + (k+j)^2} = 0,$$

pour un nombre fini de polynômes non nuls. Pour $n$ suffisamment grand, aucun des polynômes $q_{i,j}$ ne s'annule et chaque dénominateur

$$(n+i)^2 + (k+j)^2,$$

vu comme polynôme en $k$, introduit deux singularités polaires, les paires de pôles introduites étant deux à deux disjointes. La somme étant par ailleurs nulle, tous les polynômes $q_{i,j}$ doivent être nuls, ce qui contredit la non nullité de $Q$. (Un autre exemple, $1/(n^2+k)$, est donné dans [70] avec un argument similaire.)

Notons l'utilisation dans l'argument précédent d'une conséquence du corollaire 4 que je formule dans le corollaire suivant. Ce dernier permettra la sommation multiple par rapport à $r-1$ indices de sommations d'une suite holonome à $r$ indices par les algorithmes des chapitres V et VI. Le résultat est nouveau, bien que de nombreuses versions partielles aient été proposées, en particulier par Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger (voir sur ce point les commentaires plus bas). Je l'énonce pour une algèbre de fonctions générale. Un exemple type est celui des algèbres de germes de suites à l'infini.

Corollaire 5. *Soient*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{D}} = \mathcal{A}_r(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r][\partial_1; 1, \partial_1] \cdots [\partial_r; 1, \partial_r]$$

*une algèbre de Weyl sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$ *de caractéristique nulle et*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{S}} = \mathbb{K}[k_1, \ldots, k_r][S_{k_1}; S_{k_1}, 0] \cdots [S_{k_r}; S_{k_r}, 0]$$

*une algèbre de Ore polynomiale donnée par les commutations*

$$S_{k_i} k_i = (k_i + 1) S_{k_i}.$$

*Soit* $\mathcal{F}$ *une algèbre de fonctions qui soit à la fois un* $\mathbb{O}_{\mathrm{D}}$*-module et un* $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$*-module (à gauche). Supposons de plus que les opérateurs induits par l'action des* $S_{k_i}$ *soient inversibles, et que les actions des deux algèbres vérifient les identités (49–50), ou en d'autres termes que*

$$x_i = S_{k_i}^{-1}, \qquad \partial_i = (k_i+1) S_{k_i}, \qquad S_{k_i} = x_i^{-1} \qquad \textit{et} \qquad k_i = x_i \partial_i.$$

*Soit alors une fonction* $f \in \mathcal{F}$ *d'annulateur dans* $\mathbb{O}_{\mathrm{D}}$ *tel que le module*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{D}} / \operatorname{Ann}_{\mathbb{O}_{\mathrm{D}}} f$$

*soit holonome. Alors, la sous-algèbre* $\mathbb{S}$ *de* $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$ *engendrée par la famille*

$$\{k_r, S_1, \ldots, S_r\}$$

*est d'intersection non nulle avec l'annulateur* $\operatorname{Ann}_{\mathbb{O}_{\mathrm{S}}} f$ *dans* $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$*. Dit autrement, il est possible d'éliminer simultanément jusqu'à* $r-1$ *des* $k_i$ *parmi les polynômes de l'idéal* $\operatorname{Ann}_{\mathbb{O}_{\mathrm{S}}} f$*.*

Démonstration. Par l'hypothèse d'holonomie, il existe un polynôme annulateur non nul $P(x_1, \ldots, x_r, \partial_r)$ de $f$. Donc

$$P(S_{k_1}^{-1}, \ldots, S_{k_r}^{-1}, (k_r+1) S_{k_r}) \cdot f = 0,$$

et, en chassant les dénominateurs en les $S_{k_i}$, on obtient un polynôme annulateur non nul $Q(k_r, S_{k_1}, \dots, S_{k_r}) \in \mathbb{S}$ de $f$. ∎

Le résultat précédent, dont la conséquence essentielle sera la possibilité de sommer une suite $\partial$-finie holonome, peut sembler avoir été donné par Wilf et Zeilberger dans leur *lemme fondamental* [110], voire un affaiblissement du résultat de Zeilberger selon lequel la somme définie sur un de ses indices d'une suite holonome en plusieurs indices est holonome [113, proposition 3.4′]. En fait, la preuve que font Wilf et Zeilberger de leur lemme fondamental, me semble abusive : la démonstration du corollaire ci-dessus, même élémentaire, n'y est pas explicitée et confond vraisemblablement deux idéaux annulateurs distincts d'une suite holonome $f$ : celui relatif à $\mathbb{O}_{\mathrm{D}}$ et celui relatif à $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$. En outre, Wilf et Zeilberger ont démontré leur lemme fondamental en évitant tout recours à la théorie de l'holonomie dans le cas particulier de fonctions qu'ils ont dénommées *termes hypergéométriques propres* (cf. [110, théorème 3.1] ou [84, théorème 4.4.1]). En ce qui concerne la somme définie $F$ d'une suite holonome $f$, le résultat de Zeilberger [113, proposition 3.4′] donne une propriété de l'annulateur de $F$ relatif à $\mathbb{O}_{\mathrm{D}}$, alors que le corollaire que j'ai énoncé montre le caractère non nul de l'annulateur relatif à $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$.

**5.2. Le problème d'extension/contraction.** Les fonctions avec lesquelles nous travaillons sont naturellement spécifiées par des opérateurs dans une algèbre de Ore

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}],$$

alors que les algorithmes que je vais développer dans la partie B nécessitent l'élimination de l'un des $x_i$. Le recours au calcul de bases de Gröbner pour réaliser cette élimination conduit à décrire les fonctions par des idéaux annulateurs dans l'algèbre de Ore *polynomiale* plus petite

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}].$$

Soient $p_1, \dots, p_r$ des polynômes dans $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ engendrant un idéal $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ ; ils engendrent alors un idéal de $\mathfrak{K} \subseteq \mathbb{O}_{\mathrm{r}}$. Cependant, l'idéal annulateur qui nous intéresse réellement est la *contraction*

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{K} \cap \mathbb{O}_{\mathrm{p}},$$

qui peut être plus grande que l'idéal original $\mathfrak{I}$.

Dans le cas d'une fonction $\partial$-finie $f$, ce problème d'extension/contraction signifie que même lorsqu'on se donne les générateurs $(p_1, \dots, p_r)$ de tout l'idéal annulateur $\mathfrak{K}_f = \operatorname{Ann}_{\mathbb{O}_{\mathrm{r}}} f$ dans l'algèbre des opérateurs à coefficients des fractions rationnelles, l'idéal

$$\mathfrak{I} = (p_1, \dots, p_r) \subseteq \mathbb{O}_{\mathrm{p}}$$

n'est pas nécessairement une description précise de $f$. Il s'ensuit que l'élimination entre les $p_i$ de l'un des $x_i$ peut aboutir à un résultat nul, même lorsque

$$\mathfrak{K}_f \cap \mathbb{K}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$$

contient un polynôme non nul.

EXEMPLE. Les coefficients binomiaux $u_{n,k} = \binom{n}{k}$ sont annulés par les polynômes

$$P = (n+1-k)S_n - (n+1)$$

et

$$Q = (k+1)S_k - (n-k)$$

dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{K}(n,k)[S_n; S_n, 0][S_k; S_k, 0]$$

engendrée par les deux opérateurs de décalage $S_n$ et $S_k$. Tout idéal de $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ plus grand que $\mathfrak{K} = (P, Q)$ est $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ lui-même. La règle du triangle de Pascal se représente par le polynôme

$$R = S_n S_k - S_k - 1,$$

qui est un élément de $\mathfrak{K}$:

$$R = \frac{1}{n-k}(S_k P + Q).$$

Aussi a-t-on $R \in \mathfrak{I}'$. Cependant, dans l'algèbre d'opérateurs aux différences

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{K}[n,k][S_n; S_n, 0][S_k; S_k, 0],$$

l'idéal $\mathfrak{I} = (P, Q)$ *ne contient pas* $R$, bien qu'il contienne

$$(n-k)R, \qquad (n+1)R \qquad \text{et} \qquad (k+1)R,$$

ce qui est heureusement suffisant pour obtenir le résultat $R$ par un calcul de base de Gröbner (avec des idéaux dans

$$\mathbb{K}(n)[k][S_n; S_n, 0][S_k; S_k, 0] \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{K}(k)[n][S_n; S_n, 0][S_k; S_k, 0]).$$

EXEMPLE. Un exemple est fourni dans le cas différentiel par la fonction

$$f = \frac{1}{(y^2 - y + x)}.$$

Le calcul d'intégrales de $f$ par rapport à $y$ requiert de trouver un opérateur qui ne fasse pas intervenir $y$ et élément de

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{Q}[x,y][D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y].$$

L'idéal annulateur de $f$ dans

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{Q}(x,y)[D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y]$$

est $\mathfrak{K} = \mathbb{O}_{\mathrm{r}} P + \mathbb{O}_{\mathrm{r}} Q$ où

$$P = D_y(y^2 - y + x) = (y^2 - y + x)D_y + (2y - 1)$$

et

$$Q = D_x(y^2 - y + x) = (y^2 - y + x)D_x + 1.$$

Tout idéal plus grand de $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ est $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ lui-même. Le polynôme

$$U = D_y^2 + (4x - 1)D_x^2 + 6D_x$$

annule $f$, si bien que $U \in \mathfrak{K}$, et donc que $U \in \mathfrak{K} \cap \mathbb{O}_{\mathrm{p}}$. Cependant, $U$ *n'est pas* élément de $\mathfrak{I} = \mathbb{O}_{\mathrm{p}}P + \mathbb{O}_{\mathrm{p}}Q$ dans $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$. Il s'ensuit que les algorithmes du chapitre V qui se fondent sur une élimination simple échoueront dans le calcul de toute intégrale à partir de l'entrée $\mathfrak{I}$. Pire, l'algorithme 3 du chapitre V boucle à l'infini sur cette entrée. Cependant, si l'on adjoint le polynôme

$$R = (y^2 - y + x)D_yD_x + 2D_y \in \mathfrak{K},$$

l'idéal

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}}P + \mathbb{O}_{\mathrm{p}}Q + \mathbb{O}_{\mathrm{p}}R \subseteq \mathbb{O}_{\mathrm{p}}$$

contient le polynôme $U$ et chacun des deux algorithmes le trouve. Un phénomène similaire intervient lors d'intégrations par rapport à $x$. Par opposition, les algorithmes du chapitre VI ne requièrent qu'une description $\partial$-finie des fonctions à intégrer, et ils parviennent à intégrer à partir de l'idéal $\mathfrak{I}$ en entrée.

Dans le cas commutatif, un algorithme classique permet de calculer la contraction $\mathfrak{I} \cap \mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ d'un idéal $\mathfrak{I} \subseteq \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{y}]$, à savoir l'algorithme [19, algorithmes CONT et IDEALDIV2] qui se fonde sur le calcul d'un *quotient d'idéaux*

$$\mathfrak{I} : f^\infty,$$

c'est-à-dire de l'ensemble de tous les $p$ tels que $f^s p \in \mathfrak{I}$ pour un entier positif $s$. Cet algorithme n'a pas d'extension immédiate au cas non commutatif. Un nouvel algorithme pour calculer une base de cet idéal $\mathfrak{I}'$ à partir d'une base de $\mathfrak{K}$ sera présenté au chapitre VIII. Cet algorithme retrouve les opérateurs manquants des exemples précédents.

**5.3. Détermination effective de la dimension.** Dans le cas d'un idéal $\mathfrak{I}$ d'une algèbre de Ore polynomiale $\mathbb{O} = \mathbb{K}[\mathbf{x}][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ munie d'une filtration pour laquelle l'algèbre graduée associée est une algèbre associative donnée par des relations du type (47), tous les invariants du module

$$\mathfrak{m} = \mathbb{O}/\mathfrak{I}$$

qui ont été introduits en §2 peuvent être calculés, par exemple à partir d'une base de Gröbner pour $\mathfrak{I}$ [18, 19]. J'ai implanté l'algorithme correspondant et dans cette section, je me sers de ce programme pour illustrer le calcul d'invariants combinatoires.

Considérons l'exemple des fonctions hypergéométriques $F_4$ en deux variables d'Appell,

$$F_4(a,b,c,d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{m!n!(c)_m(d)_n} x^m y^n,$$

où $(x)_n$ désigne le symbole de Pochhammer $\Gamma(x+n)/\Gamma(x)$, et qui satisfait un système

$$(51) \qquad \begin{cases} xD_x(xD_x+c-1) - x(xD_x+yD_y+a)(xD_x+yD_y+b), \\ yD_y(yD_y+d-1) - y(xD_x+yD_y+a)(xD_x+yD_y+b), \end{cases}$$

d'équations différentielles par rapport à $x$ et $y$ que j'ai déjà considéré dans le chapitre d'introduction et qui décrit la fonction $F_4$ d'Appell comme fonction $\partial$-finie par rapport à l'algèbre

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{Q}(a,b,c,d,x,y)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y].$$

En calculant une base de Gröbner pour ce même ensemble de polynômes vus maintenant dans l'algèbre de Ore polynomiale

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{Q}(a,b,c,d)[x,y][D_x;1,D_x][D_y;1,D_y]$$

par rapport à un ordre de termes pour le degré total et tel que

$$D_x \succeq D_y \succeq x \succeq y,$$

on obtient un système de 6 polynômes de termes dominants respectifs

$$xy^2D_xD_y, \quad x^2yD_x^2, \quad x^3D_x^2, \quad x^2y^2D_y^3, \quad xy^3D_y^4 \quad \text{et} \quad y^4D_x^2D_y^3.$$

Le polynôme de Hilbert du module correspondant $\mathfrak{m} = \mathbb{O}_{\mathrm{p}} \cdot F_4$ est

$$\frac{21}{2}n^2 - \frac{85}{2}n + 73.$$

Il s'ensuit que le module $\mathfrak{m}$ est de dimension de Bernstein 2, le nombre de dérivations dans les générateurs de l'algèbre. Le module est donc holonome ; l'élimination de l'indéterminée $x$ ou $y$ dans l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré dans $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ par le système (51) garantit de fournir un polynôme éliminé non nul. Notons sur cet exemple que nous ne savons pas *a priori* si $\mathfrak{I}$ est l'idéal annulateur $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}_{\mathrm{p}}} F_4$ tout entier. Il s'ensuit, non pas de l'holonomie de la fonction $F_4$ d'Appell, mais du caractère holonome de la description (51) dans $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ que tous les algorithmes d'intégration qui vont être présentés dans cette thèse termineront sur l'entrée (51), en calculant un polynôme annulateur de l'intégrale correspondante.

Comme exemple de fonction non holonome, considérons la fonction $f$ définie par

$$f(z) = e^{e^z}.$$

On montre facilement que $f^{(p)}$ s'exprime sous la forme

$$A_p(e^z)e^{e^z},$$

pour un polynôme $A_p$ de degré $p$. La fonction $e^{e^z}$ n'est donc pas $\partial$-finie par rapport à l'algèbre $\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{C}(z)[D_z;1,D_z]$. De façon correspondante, le polynôme de Hilbert du module $\mathbb{O}_{\mathrm{p}} \cdot f$ sur $\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{C}[z][D_z;1,D_z]$ est

$$\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1$$

si bien que le module est de dimension 2, et donc de dimension strictement plus grande que 1 : la fonction n'est pas holonome. L'intégration de cette fonction n'est pas réalisable directement par les algorithmes de *creative telescoping* présentés dans cette thèse.

Pour d'autres exemples d'utilisation des bases de Gröbner en relation avec l'holonomie, voir [97].

# Partie B

# Méthodes de sommation et d'intégration

Considérons de nouveau la fonction

$$f(z,t) = \frac{\cos(zt)}{\sqrt{1-t^2}}$$

qui est $\partial$-finie, vérifiant le système

$$D_z^2 \cdot f + t^2 f = 0, \qquad t(t^2-1)D_t \cdot f + z(1-t^2)D_z \cdot f + t^2 f = 0, \tag{52}$$

ainsi que la spécification $\partial$-finie suivante pour la fonction de Bessel $J_0(z)$ de première espèce et d'ordre zéro :

$$\mathcal{A} \cdot y = 0, \qquad \text{où} \qquad \mathcal{A} \cdot y = zD_z^2 \cdot y + D_z \cdot y + zy, \tag{53}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Alors, l'identité

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(zt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \tag{54}$$

découle de cette spécification de $J_0$ dès qu'on remarque que

$$\mathcal{A} \cdot f = D_t \cdot \left(0 \cdot f - \frac{1-t^2}{t} D_z \cdot f\right) = D_t \cdot \left(\sin(zt)\sqrt{1-t^2}\right), \tag{55}$$

(ce qui peut se montrer directement), et par intégration de 0 à 1 : ceci montre que le membre droit de (54) vérifie aussi (53). On voit aisément que les conditions initiales sont encore $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ ; aussi, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, a-t-on montré l'identité (54). Or, l'équation (53) peut se déduire du système (52) par un algorithme appelé « *creative telescoping* » que je décris au chapitre suivant. Une des variantes de cet algorithme produit aussi le *certificat* correspondant (55). En général, ce certificat consiste en : des fractions rationnelles coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ ; des fractions rationnelles qui sont les coordonnées d'une anti-dérivée de $\mathcal{A} \cdot f$ sur une base spécifiée de l'espace vectoriel (de dimension finie) engendré par $f$ et par ses dérivées ; et d'une information additionnelle, le plus souvent sous la forme d'une base de Gröbner, à partir de laquelle la preuve de l'identité se réduit à des manipulations de fractions rationnelles, comme il sera décrit en §1.1 du chapitre suivant.

Les méthodes d'intégration suggérées ci-dessus ont un analogue tout naturel dans la sommation de suite. Désignons le $n$-ième polynôme ultrasphérique (ou polynôme orthogonal de Gegenbauer) par $C_n^{(\alpha)}(x)$. Une spécification possible en est l'équation de récurrence $(\mathcal{A} \cdot u)(n) = 0$, où

$$(\mathcal{A} \cdot u)(n) = (n+2)u_{n+2} - 2(n+\alpha+1)xu_{n+1} + (n+2\alpha)u_n, \tag{56}$$

avec les conditions initiales $u_0 = 1$, $u_1 = 2x\alpha$. Alors, l'identité

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$$

peut être montrée par sommation sur $m$ après avoir défini la suite hypergéométrique $\partial$-finie

$$a_{n,m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m},$$

décrite par

(57)
$$\begin{cases} (n+1-2m)a_{n+1,m} - 2(\alpha+n-m)xa_{n,m} = 0, \\ 4(m+1)(\alpha+n-m-1)x^2a_{n,m+1} + (n-2m)(n-2m-1)a_{n,m} = 0, \end{cases}$$

et remarqué que

$$(\mathcal{A}\cdot a)(n,m) = b_{n,m+1} - b_{n,m},$$

avec

$$b_{n,m} = -4\frac{(n+2\alpha)(n-m+\alpha)}{(n+1-2m)(n+2-2m)}mx^2a_{n,m}, \tag{58}$$

ce que l'on vérifie directement. Ici encore, des algorithmes pour réaliser le *creative telescoping* sont capables de calculer l'opérateur (56) aussi bien que l'équation (58), directement à partir du système (57).

Le *creative telescoping* se généralise encore au cadre du *q-calcul*. L'identité déjà mentionnée du produit triple de Jacobi,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1+zq^{k-1})(1+q^k/z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\binom{k}{2}}z^k, \tag{59}$$

peut être montrée à partir d'une description du sommant $q^{\binom{k}{2}}z^k$ au membre droit. Considérons l'algèbre

$$\mathbb{O} = \mathbb{Q}(q)[z,q^k][S_k;S_k,0][H_{q,z};H_{q,z},0]$$

pour l'opérateur de décalage $S_k$ et celui de $q$-dilatation $H_{q,z}$. Alors, le sommant

$$u_k(z) = q^{\binom{k}{2}}z^k$$

au membre droit est $\partial$-fini, annulé par le système

$$S_k - zq^k, \qquad H_{q,z} - q^k. \tag{60}$$

Sur cet exemple, l'un de mes algorithmes trouve immédiatement l'opérateur évident

$$\mathcal{A} - (S_k - 1), \qquad \text{où} \qquad \mathcal{A} = zH_{q,z} - 1$$

dans l'idéal gauche engendré par le système (60) dans l'algèbre $\mathbb{O}$. Remarquons que $\mathcal{A}$ ne fait pas intervenir $q^k$.

Des opérateurs de ce type donnent son nom à la méthode du « *creative telescoping* » : on a

$$(\mathcal{A}\cdot u)(k,z) - [u_{k+1}(z) - u_k(z)] = 0,$$

si bien qu'en sommant sur $k$, le terme de droite se « télescope ». Maintenant, en intervertissant la sommation et l'action de $\mathcal{A}$ dans cette identité, on obtient que $\mathcal{A}$ annule le membre droit de l'identité du produit triple de Jacobi (59). Il est facile de vérifier que le membre gauche de (59) est aussi annulé par $\mathcal{A}$. Pour achever la preuve de l'identité, il reste à montrer que deux « conditions initiales » coïncident. Je ne détaillerai pas en général cette étape finale : puisque mes algorithmes travaillent sur des polynômes tordus en des opérateurs de Ore, la gestion des conditions initiales reste en dehors de leur portée. En fait, pour chaque algèbre de Ore, la gestion des conditions initiales requiert des algorithmes spécifiques et une implantation spécifique. Ceci n'a pas à être vu comme un défaut de la méthode, mais comme une manifestation du fait d'ordre général que les constantes sont plus difficiles à manipuler par le calcul formel que les fonctions. Dans le cas de notre exemple, plusieurs méthodes sont connues pour venir à bout du problème des constantes [14]. (Une autre approche à la preuve automatique de cette identité consiste à en prouver une version finie, ce qui ferait intervenir des récurrences ordinaires sur l'indice de sommation, et dont les conditions initiales sont plus faciles à vérifier, voir [80].)

Les algorithmes du *creative telescoping* se fondent sur des algorithmes d'élimination qui s'appuient eux-mêmes sur la théorie des bases de Gröbner introduite au chapitre II. Par ailleurs, nous savons depuis le chapitre IV que dans le cas différentiel pour des variables continues, si une fonction est holonome, alors elle admet un système annulateur holonome (théorème dû à Masaki Kashiwara [62]). Il s'ensuit que la terminaison de mes algorithmes est garantie dans le cas différentiel holonome. Ces résultats ont leur traduction dans le monde des suites *via* le passage aux séries génératrices [113]. Une théorie analogue de *$q$-holonomie* est disponible pour les $q$-analogues [91], mais aucune notion correspondante d'holonomie n'est disponible dans le cas d'opérateurs de Ore généraux. Les algorithmes que je donne pour le *creative telescoping* ne présentent donc *a priori* aucune garantie de succès. Je dispose en fait de deux algorithmes. Le premier est un calcul de base de Gröbner. Il peut être lent, mais est assuré de terminer, soit avec succès, soit en détectant un manque d'information dans son entrée. Le second est une généralisation d'un algorithme dû à Nobuki Takayama [99, 100]. Il est plus rapide dans les cas où le *creative telescoping* est possible. Dans les autres cas, il boucle à l'infini, ce qui pourrait le plus souvent être détecté par un prétraitement consistant à calculer la dimension d'un certain idéal annulateur.

CHAPITRE V

# Sommation et intégration par bases de Gröbner

L'étude algorithmique des systèmes holonomes pour la sommation et l'intégration dans les cas différentiels et aux différences a commencé avec les travaux de Zeilberger [113], qui s'appuyait sur les travaux antérieurs de Mary Celine Fasenmyer [42, 43, 44]. Dans son article, pour réaliser le *creative telescoping*, Zeilberger fait appel à une version non commutative de la méthode d'élimination dialytique de Sylvester. Il mentionnait déjà le grand avantage que promettait l'utilisation de bases de Gröbner pour réaliser l'élimination. Mon travail prend cette direction et étend l'approche à un contexte plus large. Cette nouvelle approche rend possible l'élimination simultanée de plusieurs indéterminées dans une algèbre d'opérateurs engendrée par plus de deux opérateurs de Ore. Depuis [113], la plupart des travaux dans ce domaine se sont concentrés sur une algorithmique spécialisée pour le cas hypergéométrique [112, 115] ; sur des extensions au cas $q$-hypergéométrique en mettant l'accent sur le cas discret [111, 110] ; et même sur des extensions à des identités $q$-hypergéométriques en plusieurs bases [87] et à quelques identités du type identité d'Abel [40]. Un rapport très intéressant sur la plupart de tous ces algorithmes pour les identités hypergéométriques est le récent livre de Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger [84]. En revanche, le cas holonome en général — celui d'équations d'ordre plus élevé —, n'a plus reçu grande attention depuis l'article fondateur de Zeilberger [113].

## 1. *Creative telescoping* et bornes naturelles

Le principal succès de la théorie des fonctions holonomes de Doron Zeilberger est le *creative telescoping* [9, 100, 110, 113, 114, 115]. Cette méthode calcule des équations satisfaites par des sommes ou intégrales définies. Rappelons-la maintenant, tout d'abord dans le cas différentiel, dans le cas sommatoire, puis dans un cadre unifié.

Considérons une fonction $f$ en les variables $(\mathbf{x}, x_0)$ à intégrer par rapport à $x_0$ sur l'intervalle $[a, b]$, et soit l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O}_{\mathrm{e}} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[x_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; 1, D_{x_0}].$$

L'ingrédient principal de la méthode est un opérateur annulateur de la forme

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) + D_{x_0} Q(\mathbf{x}, D_{x_0}, \boldsymbol{\partial}) \in \operatorname{Ann} f \tag{61}$$

où la variable d'intégration $x_0$ n'apparaît ni dans les coefficients de $P$ ni dans ceux de $Q$. En appliquant alors cet opérateur à la fonction $f$ puis en intégrant entre $a$ et $b$, on déduit une identité de la forme

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) \cdot \int_a^b f(\mathbf{x}, x_0)\, dx_0 + [Q(\mathbf{x}, D_{x_0}, \boldsymbol{\partial}) \cdot f]_{x_0=a}^{x_0=b} = 0. \tag{62}$$

C'est une équation différentielle sur l'intégrale définie

$$\int_a^b f(\mathbf{x}, x_0)\, dx_0.$$

Cette équation est en général inhomogène, au sens où l'intégrale définie vérifie l'équation différentielle

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) \cdot F(\mathbf{x}) = -\,[Q(\mathbf{x}, D_{x_0}, \boldsymbol{\partial}) \cdot f]_{x_0=a}^{x_0=b} = 0$$

inhomogène en la fonction $F(\mathbf{x})$. (Mais la même équation est toujours homogène en la fonction $f(\mathbf{x}, x_0)$.) Notons qu'en faisant varier la borne supérieure $b$ et en travaillant à une constante près, cette équation est aussi une équation sur une primitive de $f$.

Considérons maintenant le cas d'une suite $u$ en les indices $(\mathbf{x}, x_0)$ à sommer par rapport à $x_0$ sur l'intervalle $[a, b]$, et soit l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O}_{\mathrm{e}} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[x_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\Delta_{x_0}; S_{x_0}, \Delta_{x_0}],$$

où $\Delta_{x_0}$ est l'opérateur de différence finie $S_{x_0} - 1$. L'ingrédient principal de la méthode est cette fois-ci un opérateur annulateur de la forme

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) + \Delta_{x_0} Q(\mathbf{x}, \Delta_{x_0}, \boldsymbol{\partial}) \in \operatorname{Ann} u \tag{63}$$

où l'indice de sommation $x_0$ n'apparaît ni dans les coefficients de $P$ ni dans ceux de $Q$. Alors, en appliquant cet opérateur à la suite $u$ puis en sommant entre $a$ et $b$, on tire :

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) \cdot \sum_{x_0=a}^{b} u(\mathbf{x}, x_0) + [Q(\mathbf{x}, \Delta_{x_0}, \boldsymbol{\partial}) \cdot u]_{x_0=a}^{x_0=b+1} = 0. \tag{64}$$

C'est une équation de récurrences, en général inhomogène, sur la somme définie

$$\sum_{x_0=a}^{b} u(\mathbf{x}, x_0).$$

Notons qu'en faisant varier la borne supérieure $b$ et en travaillant à une constante près, cette équation est aussi une équation sur une somme indéfinie de $u$.

Devant la forte analogie de forme entre (61) et (63) d'une part, et entre (62) et (64) d'autre part, je place maintenant la méthode dans un cadre unifié grâce aux algèbres de Ore. Ainsi, considérons un objet $f$, « fonction » en les variables $(\mathbf{x}, x_0)$ au sens de notre convention p. 43, et un opérateur $\partial_0$ pour lequel nous voulons calculer un « inverse défini $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ » sur le domaine $\Omega$ et un « inverse indéfini $\partial_0^{-1}$ ». La notation $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ doit ici être vue comme un symbole unique, où $\Omega$ ne fait référence à aucun objet mathématique particulier, mais n'est présent que pour rappeler la notation $\int_\Omega$ utilisée pour indiquer une intégration sur un domaine $\Omega$. Soit par ailleurs l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O}_{\mathrm{e}} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[x_0][\boldsymbol{\partial};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}][\partial_0;\sigma_0,\delta_0],$$

où l'action de $\partial_0$ est celle de $\delta_0$. La méthode du *creative telescoping* repose sur l'existence d'un opérateur annulateur de la forme

$$P(\mathbf{x},\boldsymbol{\partial}) + \partial_0 Q(\mathbf{x},\partial_0,\boldsymbol{\partial}) \in \operatorname{Ann} f$$

où la variable $x_0$ n'apparaît ni dans les coefficients de $P$ ni dans ceux de $Q$. En évaluant le $\partial_{0,\Omega}^{-1}$, on tire alors :

$$P(\mathbf{x},\boldsymbol{\partial}) \cdot [\partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f](\mathbf{x},x_0) + [Q(\mathbf{x},\partial_0,\boldsymbol{\partial}) \cdot f]_{\partial_0\Omega} = 0, \tag{65}$$

où je fais maintenant l'hypothèse que l'application qui à une fonction $h$ associe

$$[h]_{\partial_0\Omega}$$

est une application linéaire que je sait évaluer. Encore une fois, la notation entre crochets et la référence à $\partial_0\Omega$ n'ont pas de signification formelle précise et ne font que rappeler la notation analogue dans le cas de l'intégration, où $\partial_0\Omega$ est le *bord* du domaine $\Omega$. Dans les applications, cela correspondra le plus souvent à calculer récursivement un $\partial'^{-1}_{\Omega'}$ plus simple pour un autre opérateur et un autre domaine, ou bien encore une combinaison linéaire de spécialisations « aux bords » de $\Omega$. De façon similaire, en évaluant le $\partial_0^{-1}$ de (65), on obtient

$$P(\mathbf{x},\boldsymbol{\partial}) \cdot [\partial_0^{-1} \cdot f](\mathbf{x},x_0) + Q(\mathbf{x},\partial_0,\boldsymbol{\partial}) \cdot f = 0. \tag{66}$$

Les équations (65) et (66) sont donc en général inhomogènes. Cependant dans les applications, le modèle du calcul et l'algorithmique utilisée diffèrent sensiblement selon que les équations correspondantes sont effectivement homogènes ou non. Un cas particulier important est celui où on peut prédire la nullité de $Q \cdot f$ ou de $[Q \cdot f]_{\partial_0\Omega}$, et donc prévoir que les équations seront homogènes. Je donnerai plusieurs algorithmes spécialisés pour ce cas dit « *à bornes naturelles* ». Je commence par le cas général.

**1.1. $\partial^{-1}$ indéfini et $\partial_\Omega^{-1}$ défini d'une fonction $\partial$-finie.** Faisons l'hypothèse que toute fonction $f$ de $\mathcal{F}$ admet un « anti-$\partial_0$ indéfini ». Autrement dit, toute fonction $f$ de $\mathcal{F}$ est atteinte par $\partial_0$, qui est donc une surjection de $\mathcal{F}$ dans lui-même. Considérons le noyau $\ker\partial_0$ ; il est constitué des fonctions de dérivée nulle, les fonctions *constantes* par rapport à $\partial_0$. En tant qu'application linéaire, $\partial_0$ se factorise en un *isomorphisme* de $\mathcal{F}/\ker\partial_0$ sur $\mathcal{F}$. En d'autres termes, toute fonction admet un anti-$\partial_0$ indéfini, qui est défini à une constante près. Je noterai $\partial_0^*$ cet isomorphisme *indéfini*. L'injectivité d'une telle application est évidente par construction, la véritable hypothèse portant sur sa surjectivité. Je suppose en outre que $\mathcal{F}$ est clos par un opérateur *défini* $\partial_{0,\Omega}^{-1}$. Dans la pratique, cela signifie que $\mathcal{F}$ est clos

ALGORITHME : $\{(P_i, Q_i)\} = \text{CreativeTelescoping}(G, \mathbb{O}, \mathbf{x}_0, \partial_0)$.

INPUT : $\begin{cases} \mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{x}_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; \sigma_0, \delta_0], \\ \text{un système } G \text{ de polynômes dans } \mathbb{O}. \end{cases}$

OUTPUT : une famille de paires $(P_i, Q_i)$ telles que (68).

1. choisir un ordre de termes $\preceq$ éliminant $\mathbf{x}_0$ ;
2. $GB = \text{GröbnerBasis}(G, \mathbb{O}, \preceq)$ ;
3. mettre les polynômes de $GB$ qui ne contiennent pas $\mathbf{x}_0$ sous la forme $P_i - \partial_0 Q_i$ ;
4. renvoyer la famille $\{(P_i, Q_i)\}$.

ALGORITHME 14. *Creative telescoping*

par l'opération de spécialisation décrite au chapitre III. Il va s'avérer utile dans la suite de considérer des fonctions définies à constante près. Aussi, pour un opérateur linéaire $L$ de $\mathcal{F}$ dans lui-même, noté-je

$$L^{\#} = \partial_0^{*-1} L \partial_0^*$$

l'opérateur linéaire induit de $\mathcal{F}/\ker \partial_0$ dans lui-même. Je note encore $\pi_0$ la projection canonique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}/\ker \partial_0$ et, pour transcrire le fait habituel qu'une intégrale ou une somme définie est une constante (par rapport à la variable d'intégration ou à l'indice de sommation), je fais l'hypothèse que $\partial_0 \partial_{0,\Omega}^{-1} = 0$, autrement dit, que $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ est une application linéaire à image dans $\ker \partial_0$.

Pour calculer des $\partial_0^{*-1} \cdot f$ indéfinies ou des $\partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f$ définies, la première étape du *creative telescoping* consiste en la recherche d'un polynôme $N$ de l'idéal annulateur $\mathfrak{I} = \text{Ann}\, f$ qui ne contient pas $x_0$. Une division euclidienne par $\partial_0$ (qui dans ce cas est une indéterminée commutative) permet alors de produire deux polynômes $P$ et $Q$ qui ne font pas intervenir $x_0$, tels que $P$ ne contient pas $\partial_0$, et satisfaisant

$$N \cdot f = 0 = P \cdot f + Q \cdot (\partial_0 \cdot f) = P \cdot f + \partial_0 \cdot (Q \cdot f). \tag{67}$$

Ensuite, par multiplication de cette identité par $\partial_0^{*-1}$ et par $\partial_{0,\Omega}^{-1}$ à gauche, je déduis respectivement

$$P^{\#} \cdot (\partial_0^{*-1} \cdot f) = -\pi_0(Q \cdot f), \tag{68}$$

$$P \cdot (\partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f) = -\left[Q \cdot f\right]_{\partial_0 \Omega}. \tag{69}$$

Dans le cas indéfini, j'ai ensuite recours au théorème 7 du chapitre III de manière à calculer des polynômes $C$ annulant $Q \cdot f$. Pour de tels polynômes, $(CP)^{\#} = C^{\#} P^{\#}$ est alors un polynôme annulateur de $\partial_0^{*-1} \cdot f$. Par ailleurs, nous savions au préalable que

$$[(\text{Ann}\, f)\partial_0]^{\#} \subset \text{Ann}\,(\partial_0^{*-1} \cdot f).$$

ALGORITHME : $\{P_i\} = \mathrm{CTNaturalBoundaries}(G, \mathbb{O}, \mathbf{x}_0, \partial_0)$.
INPUT : $\begin{cases} \mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{x}_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; \sigma_0, \delta_0], \\ \text{un système } G \text{ de polynômes dans } \mathbb{O}. \end{cases}$
OUTPUT : un système annulateur $\{P_i\}$ tel que (69).

1. choisir un ordre de termes $\preceq$ éliminant $\mathbf{x}_0$ ;
2. $GB = \mathrm{GröbnerBasis}(G, \mathbb{O}, \preceq)$ ;
3. mettre $\partial_0$ à zéro dans les polynômes de $GB$ qui ne contiennent pas $\mathbf{x}_0$ ;
4. renvoyer la famille des $P_i$ obtenus.

ALGORITHME 15. *Creative telescoping* à bornes naturelles

En général, certains des polynômes $CP$ obtenus précédemment sont en dehors de l'idéal $\mathfrak{K} = (\mathrm{Ann}\, f)\partial_0$, si bien que cet algorithme accroît l'information sur $\partial_0^{*-1} \cdot f$. Ce gain d'information est nécessaire pour des calculs ultérieurs, car l'idéal $\mathfrak{K}$ n'est pas $\partial$-fini dans le cas de plusieurs variables.

Dans le cas défini à bornes naturelles, j'ai donc déjà trouvé une équation homogène satisfaite par $\partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f$. Dans le cas défini à bornes non naturelles, je poursuis en utilisant la clôture par spécialisation (théorème 8 du chapitre III) de manière à calculer des polynômes $C$ annulant $[Q \cdot f]_{\partial_0 \Omega}$. Cette fois-ci, les polynômes $CP$ annulent $\partial_{0,\Omega}^{-1} \cdot f$.

Lorsqu'une base de Gröbner $G$ de l'idéal $\mathfrak{I}$ est connue, le *certificat* des identités (68–69) consiste en les coefficients de $P$ et de $Q$, ainsi qu'en $G$. Étant donné ce certificat, la preuve des identités (68–69) se réduit à la vérification de (67), ce qui est une simple réduction par $G$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}/\mathfrak{I}$ de dimension finie. Dans le cas hypergéométrique, cette réduction elle-même ne fait intervenir que des manipulations de fractions rationnelles.

La technique précédente se heurte à deux difficultés, toutes deux résidant dans la première étape. La première est la détermination de l'existence d'un polynôme $N$ *non nul* dans $\mathfrak{I}$ et qui ne contienne aucun $x_0$. La seconde est le calcul d'un tel polynôme, ou mieux, d'une base de tous ces polynômes quand il en existe.

La première question trouve une réponse partielle dans la prise en considération de la *dimension* de l'idéal ; ceci a fait l'objet de §5.2, au chapitre IV.

Mon approche concernant la seconde question consiste en le calcul d'une base de Gröbner pour réaliser l'élimination de $x_0$. Je suis ainsi amené à travailler dans l'algèbre de Ore *polynomiale*. Je n'ai plus alors qu'à calculer une base de Gröbner pour un ordre d'élimination approprié. Cette base contient des polynômes indépendants de $x_0$ lorsque de tels polynômes existent dans l'idéal. (Voir cependant les commentaires dans §5.2, au chapitre IV.) Dans le cas défini, chacun des polynômes de la base fournit un certificat de l'identité correspondante. L'algorithme du *creative telescoping* est donné en algorithme 14 ; une version *à bornes naturelles* est donnée en algorithme 15.

Exemple. Soit

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+xy+y^2)^2}.$$

Mon objectif est une spécification de son intégrale indéfinie

$$F(x,y) = -\int_y^{+\infty} f(x,t)\,dt,$$

qui est bien définie au voisinage de $y = +\infty$ pour chaque $x$.

La fonction $f$ est annulée par les deux opérateurs

$$p_x = (1+xy+y^2)D_x + 2y \qquad \text{et} \qquad p_y = (1+xy+y^2)D_y + 2x + 4y,$$

d'où il s'ensuit trivialement que $p_x D_y$ et $p_y D_y$ annulent l'intégrale indéfinie $F$. Mon but est de déterminer d'autres opérateurs annulant $F$, ceci afin de compléter une description $\partial$-finie de $F$. L'élimination de $y$ entre les polynômes $p_x$ et $p_y$ dans $\mathbb{C}(x)[y][D_x;1,D_x][D_y;1,D_y]$ renvoie

$$N = P + QD_y \quad \text{où} \quad \begin{cases} P = -x(x-2)(x+2)D_x^2 - 4(x^2+1)D_x, \\ Q = x(x-2)(x+2)D_x + xD_y + 2(x^2+1). \end{cases}$$

Le *creative telescoping* dans le cas défini poursuivrait par l'intégration de l'identité $N \cdot f = 0$. De manière similaire, $h = N \cdot F$ est une intégrale indéfinie de $N \cdot f$ et je tire immédiatement $D_y \cdot h = 0$, si bien que $h$ est constante par rapport à $y$. Puisque $F$ et toutes ses dérivées croisées tendent vers 0 lorsque $y$ tend vers $+\infty$, il en est de même de $h$. Ainsi $h = 0$, c'est-à-dire

$$Q \cdot f + P \cdot F = 0.$$

Il suffit donc de trouver un annulateur à gauche de $Q$ modulo $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}} f$ pour obtenir un opérateur qui annule $F$. Pour calculer ces $C$ vérifiant $CQ = 0$ modulo l'idéal engendré par $p_x$ et $p_y$ dans $\mathbb{O}$, j'adapte une méthode utilisée dans le cas commutatif pour le calcul de quotients d'idéaux et qui se fonde sur le calcul de modules de syzygies [19, algorithme IDEALDIV1] (voir aussi la définition 13, p. 91). Plus précisément, j'introduis de nouvelles indéterminées commutatives $t$, $u$, $v$ et $w$, et j'élimine $t$ entre les polynômes

$$u - tQ, \qquad v - tp_x \qquad \text{et} \qquad w - tp_y$$

en calculant une base de Gröbner dans l'algèbre

$$\mathbb{C}(x,y,u,v,w)[t][D_x;1,D_x][D_y;1,D_y].$$

Dans cette base de Gröbner, ceux des polynômes qui ne font pas intervenir $t$ sont de la forme

$$uU + vV + wW,$$

où $U$, $V$ et $W$ sont des polynômes de $\mathbb{O}$ tels que

$$UQ + Vp_x + Wp_y = 0.$$

Je considère les $U$ obtenus de cette façon. En les multipliant par $P$ à droite, je tire de nouveaux opérateurs qui annulent $F$ :

$$\begin{cases} [y(x^3y + 4x^2 + 4 + 16xy + 4x^2y^2 + 4y^2) \\ \qquad + (1 + xy + y^2)(x^2y^2 + y^2 + 3xy + 1)D_y] \\ \qquad\qquad \times [4(x^2 + 1)D_x + x(x - 2)(x + 2)D_x^2], \\ (32y^2 + 32xy + 8 + 48x^2y^2 + 36xy^3 + 12x^3y^3)D_x \\ \qquad +x(15y^4 + 5x^2y^4 + 24xy^3 + 8x^3y^3 - 2y^2 + 32x^2y^2 + 28xy + 7)D_x^2 \\ \qquad\qquad +(x - 2)(x + 2)(1 + xy + y^2)(x^2y^2 + y^2 + 3xy + 1)D_x^3. \end{cases}$$

En calculant une base de Gröbner pour ces polynômes adjoints à ceux connus au préalable, à savoir $p_xD_y$ et $p_yD_y$, j'obtiens finalement une base d'un sous-idéal $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}} F$ comprenant $p_xD_y$, $p_yD_y$ et un troisième polynôme

$$x(x^2 - 4)(1 + xy + y^2)D_x^2 + 4(x^2 + 1)(1 + xy + y^2)D_x \\ -(2x^2y^2 + 2y^2 + 6xy + 2)D_y.$$

Ceci constitue une description de $F$ en tant que fonction $\partial$-finie.

Remarquons que cette méthode calcule en général un sous-idéal de

$$\mathfrak{I} = \mathrm{Ann}_{\mathbb{O}} F,$$

mais pas nécessairement l'idéal $\mathfrak{I}$ en entier. À cause de la faiblesse intrinsèque de l'étape d'élimination de l'algorithme, la méthode pourrait très bien ne pas trouver l'idéal $\mathfrak{I}$, ni même aucun sous-idéal de $\mathfrak{I}$ qui décrive $F$ comme une fonction $\partial$-finie. Les raisons de cette faiblesse ont été discutées en §5.2, au chapitre IV.

Plutôt que d'obtenir les $C$ par un calcul de base de Gröbner, j'aurai pu utiliser l'algorithme d'Euclide étendu. Pour cet exemple, j'aurai obtenu la même description finale de $F$.

Remarquons enfin que l'approche précédente fondée sur une élimination par bases de Gröbner rend le calcul de sommations et d'intégrations multiples possible en une seule étape d'élimination (voir §4.4). La méthode étend directement les algorithmes correspondants pour le cas hypergéométrique [111].

## 2. Exemples de *creative telescoping* par bases de Gröbner

**2.1. Fonction génératrice des polynômes orthogonaux de Jacobi.** Dans cet exemple, j'illustre l'utilisation des bases de Gröbner dans les algèbres de Ore pour le calcul d'annulateurs de la fonction génératrice

$$\Phi^{(a,b)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x)y^n \tag{70}$$

des polynômes de Jacobi

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+a}{k} \binom{n+b}{n-k} (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Il est ensuite possible de résoudre le système fonctionnel obtenu de façon à *démontrer* l'identité suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x) y^n = \frac{2^{a+b}}{R(x,y)\,[1-y+R(x,y)]^a\,[1+y+R(x,y)]^b} \tag{71}$$

pour $R(x,y) = \sqrt{1-2xy+y^2}$.

Je renvoie le lecteur à [76] pour un autre traitement automatique de cette fonction génératrice. Cependant, dans cette référence, le calcul suppose la connaissance préalable de la fonction génératrice sous forme close et d'une récurrence sur les polynômes de Jacobi. L'identité entre la forme close et la somme (70) est ensuite *vérifiée* par extraction des coefficients. Ici, je *calcule* une forme close pour la fonction génératrice en ne partant que d'équations décrivant les polynômes de Jacobi.

Chargeons les *packages* utiles :

```
with(Ore_algebra):
with(Groebner):
```

Déclarons l'algèbre de Ore polynomiale

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{Q}(x,y,a,b)[n][D_x;1,D_x][D_y;1,D_y][S_n;S_n,0][S_a;S_a,0][S_b;S_b,0]$$

par la commande MAPLE correspondante :

```
A:=skew_algebra(
    diff=[Dx,x],diff=[Dy,y],
    shift=[Sn,n],shift=[Sa,a],shift=[Sb,b],
    polynom=n):
```

Les polynômes de Jacobi sont alors une fonction $\partial$-finie par rapport à l'algèbre correspondante $\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{Q}(n) \otimes \mathbb{O}_{\mathrm{p}}$ ; ils sont annulés par les opérateurs :

$$\begin{cases} (1-x^2)D_x^2 + (b-a-(a+b+2)x)D_x + n(n+a+b+1), \\ (2n+a+b+2)(1-x^2)S_nD_x \\ \qquad -(n+1)(a-b-(2n+a+b+2)x)S_n \\ \qquad -2(n+a+1)(n+b+1), \\ 2(n+2)(n+a+b+2)(2n+a+b+2)S_n^2 \\ -(2n+a+b+3) \\ \qquad [(2n+a+b+2)(2n+a+b+4)x+(a^2-b^2)]S_n \\ \qquad\qquad +2(n+a+1)(n+b+1)(2n+a+b+4), \\ (2n+a+b+2)(1-x)S_a - 2(n+a+1) + 2(n+1)S_n, \\ (2n+a+b+2)(1+x)S_b - 2(n+b+1) - 2(n+1)S_n, \\ D_y \end{cases} \tag{72}$$

(c'est le système (5), p. 16, dans le chapitre d'introduction). Pour obtenir un système d'opérateurs pour $P_n^{(a,b)}(x)y^n$, il serait possible d'utiliser les polynômes précédents, de définir la fonction $y^n$ en tant que solution de

$$\{D_x, yD_y - n, S_n - y, S_a - 1, S_b - 1\},$$

et de faire appel à l'algorithme de clôture des fonctions $\partial$-finies par produit (chapitre III). Une approche plus directe est de remarquer que l'action des opérateurs $D_x$, $D_y$, $S_a$, $S_b$ et $S_n$ sur le produit $Py^n$ peut en fait s'exprimer par l'action d'opérateurs n'agissant que sur le facteur $P$ :

$$D_x \cdot Py^n = (D_x \cdot P)y^n, \quad D_y \cdot Py^n = \left(\frac{n}{y} \cdot P\right) y^n,$$
$$S_a \cdot Py^n = (S_a \cdot P)y^n, \quad S_b \cdot Py^n = (S_b \cdot P)y^n, \quad S_n \cdot Py^n = (yS_n \cdot P)y^n.$$

On obtient ensuite un système pour le produit $Py^n$ en substituant $S_n$ par $y^{-1}S_n$ dans le système (72), en remplaçant $D_y$ par le polynôme $yD_y - n$, et en chassant les dénominateurs par multiplication par une puissance de $n$. Nous obtenons six polynômes :

$$\begin{cases}
(1-x^2)D_x^2 + (b-a-(a+b+2)x)D_x + n(n+a+b+1), \\
(2n+a+b+2)(1-x^2)S_nD_x \\
\qquad - (n+1)(a-b-(2n+a+b+2)x)S_n \\
\qquad - 2(n+a+1)(n+b+1)y, \\
2(n+2)(n+a+b+2)(2n+a+b+2)S_n^2 \\
-(2n+a+b+3) \\
\qquad [(2n+a+b+2)(2n+a+b+4)x + (a^2-b^2)]yS_n \\
\qquad\quad +2(n+a+1)(n+b+1)(2n+a+b+4)y^2, \\
(2n+a+b+2)(1-x)yS_a - 2(n+a+1)y + 2(n+1)S_n, \\
(2n+a+b+2)(1+x)yS_b - 2(n+b+1)y - 2(n+1)S_n, \\
yD_y - n.
\end{cases}$$

Remarquons que ce système engendre assurément $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}_\mathrm{r}} P_n^{(a,b)}(x)y^n$, mais que nous ne savons pas *a priori* s'il engendre $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}_\mathrm{p}} P_n^{(a,b)}(x)y^n$. Dans la syntaxe de MAPLE, ce système de générateurs s'écrit

```
G:=[(1-x^2)*Dx^2+(b-a-(a+b+2)*x)*Dx+n*(n+a+b+1),
   (2*n+a+b+2)*(1-x^2)*Sn*Dx-(n+1)*(a-b-(2*n+a+b+2)*x)*Sn
      -2*(n+a+1)*(n+b+1)*y,
   2*(n+2)*(n+a+b+2)*(2*n+a+b+2)*Sn^2
      -(2*n+a+b+3)*((2*n+a+b+2)*(2*n+a+b+4)*x+(a^2-b^2))*y*Sn
      +2*(n+a+1)*(n+b+1)*(2*n+a+b+4)*y^2,
   (2*n+a+b+2)*(1-x)*y*Sa-2*(n+a+1)*y+2*(n+1)*Sn,
   (2*n+a+b+2)*(1+x)*y*Sb-2*(n+b+1)*y-2*(n+1)*Sn,
   y*Dy-n]:
```

Pour calculer la somme sur les $n$ positifs, on commence par éliminer $n$. On déclare donc un ordre de termes approprié pour cette élimination. Plus précisément, on choisit un ordre sur les indéterminées $n$, $D_x$, $D_y$, $S_a$, $S_b$ et $S_n$ qui place $n$ lexicographiquement plus grand que les autres indéterminées, et qui sépare les *ex æquo* par un ordre du degré total tel que

$$S_n \succeq S_a \succeq S_b \succeq D_x \succeq D_y.$$

Pour ce faire, on emploie la commande `termorder` :

```
T:=termorder(A,lexdeg([n],[Sn,Sa,Sb,Dx,Dy])):
```

L'élimination est ensuite effectuée par un simple calcul de base de Gröbner, par la commande `gbasis`, avec le système de générateurs et l'ordre de termes en entrée :

```
GB:=gbasis(G,T):
```

Ce calcul effectue 33 réductions de S-polynômes, dont 17 à zéro. La base obtenue consiste en 9 polynômes annulateurs de $P_n^{(a,b)}(x)y^n$, dont un seul fait intervenir $n$. Comme de coutume lors de tels calculs, les résultats intermédiaires sont trop volumineux pour être imprimés ici. La représentation suivante donne les 8 polynômes sans $n$ de la base de Gröbner calculée, où chaque coefficient a été mis à 1 :

$$S_a + S_b + 1, \qquad S_nD_y + S_bD_y + S_b + D_y + 1, \qquad D_x^2 + D_y^2 + D_x + D_y,$$
$$S_bD_x + S_bD_y + S_b + D_y + 1, \qquad S_nD_x + S_bD_y + S_b + D_y + 1,$$
$$S_nS_b + S_b^2 + S_n + S_b, \qquad S_bD_y^2 + S_bD_y + D_xD_y + D_y^2 + S_b + D_x + D_y + 1,$$
$$S_b^2D_y + S_b^2 + S_bD_y + S_b + D_y + 1.$$

Le seul polynôme en $n$ subsistant dans la base est $n - yD_y$.

L'étape suivante du *creative telescoping* est de substituer 1 à $S_n$ dans ces polynômes, de façon à obtenir le reste de la division euclidienne par l'opérateur de différence finie $S_n - 1$. Après quelques modifications esthétiques, on obtient le système $CT$ suivant :

$$\begin{cases}
(1-x)S_a + (1+x)S_b - 2, \\
2(1+x)yS_bD_y + (a+b+2)(1+x)S_b - 2(y+1)D_y - 2(b+1), \\
(1-x^2)D_x^2 + y^2D_y^2 - [(a+b+2)x + a - b]D_x + (2+a+b)yD_y, \\
(1-x^2)S_bD_x + (1+x)yS_bD_y + 2(b+1)S_b - 2yD_y - 2(b+1), \\
2xy^2D_yS_b + [(a+b+2)x + b - a]yS_b + \\
\qquad 2(1-x)D_x - 2y^2D_y - 2(1+b)y, \\
(1+x)yS_b^2 - 2(y+1)S_b + 2, \\
[y^2D_y^2 + (a+2b+3)yD_y + (b+1)(a+b+1)](S_b - 1) \\
\qquad\qquad + (1-x)(yD_y + b + 1)D_x, \\
(1+x)[yS_b^2D_y + (a+b+2)S_b^2 - 2yS_bD_y] \\
\qquad -[(a+b+2)x + 3b + a + 4]S_b + 2yD_y + 2(b+1).
\end{cases}$$

Ce système est ensuite mis sous forme normale par un nouveau calcul de base de Gröbner, dans l'algèbre de Ore plus petite

$$\mathbb{Q}(x,y,a,b)[D_x;1,D_x][D_y;1,D_y][S_a;S_a,0][S_b;S_b,0].$$

Les commandes MAPLE sont les suivantes :

```
A2:=skew_algebra(diff=[Dx,x],diff=[Dy,y],
    shift=[Sa,a],shift=[Sb,b]):
T2:=termorder(A2,tdeg(Sa,Sb,Dx,Dy)):
GB2:=gbasis(CT,T2):
```

et on obtient le système :

(73)
$$\begin{cases} \qquad [a^2+b^2+a+b+(a+b+1)(a-b)x]y \\ \qquad\qquad -(1-x^2)[(a-b)y+a+b]D_x \\ +[(y+xy-x-1)a+(y-xy-x+1)b]yD_y, \\ 2[(b+1)y-(a+b+1)x-a]+2(y^2-2xy+1)D_y \\ \qquad\qquad +(1+x)[(a-b)y+a+b]S_b, \\ 2[(a+1)y-(a+b+1)x+b]+2(y^2-2xy+1)D_y \\ \qquad\qquad -(1-x)[(a-b)y+a+b]S_a, \\ -2y(1-2xy+y^2)[(a-b)y+a+b]D_y^2 \\ \quad +[-2(a+b)(a+b+1)-2(a^2-b^2)y-2(a+b)(a+b+4)y^2 \\ \qquad -2(a+b+3)(a-b)y^3+2(a+b)(2a+2b+5)xy \\ \qquad\qquad +2(2a+2b+3)(a-b)xy^2]D_y \\ \quad +(a+b+1)(a^2-b^2)+(a+b)(a+b+1)(a+b+2)x \\ \qquad +(a+b)[a^2+b^2-4ab-3(a+b)-4]y \\ \quad -2(a+1)(b+1)(a-b)y^2+(a+b+1)(a^2-b^2)xy, \end{cases}$$

sur lequel il est immédiat que le système $CT$ engendre un idéal $\partial$-fini : le quotient est de dimension 2 et admet la base $(1, D_y)$.

L'ensemble du calcul précédent prend environ 3 minutes[1] pour fournir un système annulateur $\partial$-fini de la série génératrice. Notons qu'il aurait été possible de réaliser des calculs similaires sans tenir compte de la dépendance des polynômes de Jacobi en les paramètres $a$ et $b$. La durée en aurait été considérablement raccourcie, mais l'information renvoyée aurait aussi été bien plus faible.

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système pour avoir *prouvé* l'identité (71). Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer $\Phi^{(a,b)}(x,y)$.

Tout d'abord, le dernier opérateur du système (73) fournit une équation différentielle linéaire du second ordre. On peut donc résoudre cette équation si l'on dispose d'un logiciel de résolution d'équations différentielles suffisamment puissant. Il faut alors tenir compte des conditions initiales suivantes :

$$\Phi^{(a,b)}(x,0)=1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}^{(a,b)}(x,0)=\frac{1}{2}[a-b+(a+b+2)x]. \tag{74}$$

Il se trouve que la commande `dsolve` de MAPLE ne parvient pas à résoudre l'équation différentielle du second ordre en $y$. Fort heureusement, le système (73) fournit une autre voie de résolution : il est possible d'en déduire une récurrence sur la fonction génératrice, par exemple, par un

[1] Tous les temps d'exécution sont comptés sur une Dec 3000/400 (Alpha).

calcul de base de Gröbner pour un nouvel ordre de termes. En syntaxe Maple :

```
T2a:=termorder(A2,lexdeg([Sb,Dz,Du],[Sa])):
GB2a:=gbasis(G2,T2a):
collect(op(remove(has,GB2a,{Sb,Dz,Du})),Sa,factor);
```

On obtient l'opérateur de récurrence :

$$(1-x)yS_a^2+2(1-y)S_a-2.$$

Un réflexe naturel est d'appliquer l'algorithme de Petkovšek [83] pour obtenir d'éventuelles solutions hypergéométriques. Il s'avère alors que $\Phi$ est nécessairement de la forme

$$\phi_b(x,y)\frac{2^a}{[1-y+R(x,y)]^a}+\psi_b(x,y)\frac{2^a}{[1-y-R(x,y)]^a}$$

pour des fonctions $\phi$ et $\psi$ à déterminer. En prenant en compte l'opérateur

$$(1+x)yS_b^2-2(1+y)S_b+2,$$

ou ce qui revient au même les symétries du problème, on obtient ensuite que $\Phi$ est nécessairement combinaison linéaire des quatre fonctions

$$\frac{2^{a+b}}{[1-y\pm R(x,y)]^a\,[1+y\pm R(x,y)]^b}$$

à coefficients des fonctions inconnues en $x$ et $y$. En reportant cette forme dans le système (73), on obtient un système linéaire en les quatre fonctions inconnues. Ce système se résout aisément pour trouver qu'une seule des quatre composantes intervient, et obtenir la forme close (71).

En fait, même lorsque la résolution n'est pas possible, le système (73) permet de *vérifier* une solution connue, de *conjecturer* une solution — en cherchant une solution dans une classe donnée de fonctions —, ou, ce qui est plus important, de poursuivre des calculs sur la série génératrice même lorsqu'aucune forme close n'existe ou qu'aucune n'est disponible. Par exemple, la vérification de l'identité (71) est la suivante. On définit d'abord la forme close connue de la fonction génératrice $\Phi$, puis on y applique chacun des opérateurs calculés. La commande utilisée est `applyopr` et `normal` sert à simplifier le résultat :

```
R:=sqrt(1-2*x*y+y^2):
Phi:=2^a*2^b/(R*(1-y+R)^a*(1+y+R)^b):
map(normal,map(applyopr,GB2,Phi,A2));
```

$$[0,0,0,0]$$

En vérifiant alors les conditions initiales (74) en 0, on prouve que la solution $\Phi$ est bien la solution cherchée, ce qui achève une démonstration automatique de l'identité (71).

**2.2. Transformée de Laplace des polynômes orthogonaux de Tchebychev.** Dans cette section, j'illustre l'algorithme du *creative telescoping* dans le cas d'une intégration par l'exemple de l'intégration de la fonction $f$ donnée par

$$f_n(x) = \frac{e^{-px}T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{où} \quad T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

représente la famille des polynômes orthogonaux de Tchebychev de première espèce [41]. Plus précisément, je m'apprête à démontrer [86, §2.18.1, équation (10)],

$$\int_{-1}^{+1}\frac{e^{-px}T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi(-1)^nI_n(p). \tag{75}$$

Cette identité apparaît par exemple dans l'étude des modes fondamentaux de vibration d'une membrane de tambour en interaction avec un maillet [58].

Considérons $f$ comme élément de $\mathcal{F} = \mathbb{C}(p,n)((x))$ et faisons agir sur $\mathcal{F}$ l'algèbre $\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{C}(p,n,x)[D_x;1,D_x][S_n;S_n,0]$. Alors, la fonction $f$ est $\partial$-finie par rapport à $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$. En effet, les polynômes $T_n(x)$ sont $\partial$-finis ; les opérateurs suivants qui s'annulent en $f$ sont des variations des équations classiques satisfaites par $T_n(x)$ [41] et sont obtenus par le changement de fonction

$$T_n(x) = \sqrt{1-x^2}e^{px}f_n(x) \ :$$

$$\begin{cases}(x^2-1)D_x^2 + (2px^2+3x-2p)D_x + p^2x^2 + 3px - n^2 - p^2 + 1,\\ (x^2-1)D_xS_n + (px^2-nx-p)S_n + n + 1, \qquad S_n^2 - 2xS_n + 1.\end{cases} \tag{76}$$

Il serait possible de démontrer que ces opérateurs engendrent l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}_{\mathrm{r}}} f$.

Calculons maintenant la base de Gröbner de l'idéal engendré par le système (76) dans l'algèbre de Ore *polynomiale*

$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{C}(p)[n,x][D_x;1,D_x][S_n;S_n,0]$$

pour un ordre de termes sur $n$, $x$, $D_x$ et $S_n$ qui fixe $x$ lexicographiquement plus grand que les autres indéterminées (c'est-à-dire $x \succeq n^iD_x^jS_n^k$ pour tout $i$, $j$ et $k$) et qui départage les *ex æquo* par un ordre de degré total tel que $S_n \succeq D_x \succeq n$. Nous obtenons

$$\begin{cases}S_n^2D_x - D_x - 2S_n - 2nS_n + pS_n^2 - p,\\ xD_x - S_nD_x + px - pS_n + n + 1, \qquad 2xS_n - S_n^2 - 1.\end{cases}$$

L'unique opérateur qui ne fasse pas intervenir $x$ se récrit en

$$D_x(S_n^2-1) + pS_n^2 - 2(n+1)S_n - p. \tag{77}$$

Cet opérateur suffit pour obtenir des intégrales de $f$ par rapport à $x$ : appliquons l'opérateur (77) à $f$ et intégrons entre $u$ et $v$. Nous obtenons la récurrence inhomogène

$$\left[(S_n^2 - 1) \cdot f\right]_u^v + [pS_n^2 - 2(n+1)S_n - p] \cdot \int_u^v f_n(x)\,dx = 0. \tag{78}$$

Un développement en série indique que le terme de gauche tend vers 0 pour tout $n$ quand $x$ tend vers $\pm 1$, si bien que pour $u = -1$ et $v = +1$, l'intégrale vérifie une récurrence homogène. Remarquons que cette récurrence aurait pu être obtenue directement en faisant $D_x = 0$ dans (77), s'il avait été possible de prévoir l'annulation du terme de gauche dans l'équation (78). La résolution de la récurrence du second ordre peut être réalisée automatiquement à partir d'une table des récurrences satisfaites par les fonctions spéciales courantes. Elle fournit deux solutions indépendantes sur $\mathbb{C}$,

$$(-1)^n I_n(p) \qquad \text{et} \qquad (-1)^n K_n(p).$$

Pour achever la démonstration de l'identité (75), il est nécessaire de déterminer *quelle* solution de l'espace vectoriel solution de dimension 2 correspond à l'intégrale. Ceci s'obtient en considérant des conditions initiales en $n = 0$ et $n = 1$.

## 3. Extension de l'algorithme de Takayama au $\partial_\Omega^{-1}$ défini dans le cas de bornes naturelles

Comme l'ont observé Gert Almkvist et Doron Zeilberger [9], l'élimination de l'indéterminée $x_0$ pour réaliser le *creative telescoping* en vue de sommer ou d'intégrer une fonction $f$ est bien plus que ce qui est nécessaire et peut résulter en des polynômes annulateurs de degré plus grand que nécessaire, ou même dans l'échec du calcul d'un $\partial_\Omega^{-1}$ défini. Il est en fait suffisant de déterminer un élément de l'idéal annulateur $\operatorname{Ann} f$ dans

$$\mathbb{O}_\mathrm{e} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[x_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; 1, D_{x_0}]$$

qui soit de la forme

$$P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) + \partial_0 Q(\mathbf{x}, x_0, \boldsymbol{\partial}, \partial_0). \tag{79}$$

En outre, dans le cas de bornes naturelles, seul le polynôme $P$ a réellement besoin de commuter avec $\partial_0$. De plus, il suffit de calculer $P$ sans calculer $Q$ pour réaliser le *creative telescoping* à bornes naturelles. L'idée principale est que les opérateurs annulateurs de la forme (79) peuvent être multipliés par $\mathbf{x}$, $\partial_0$ et $\boldsymbol{\partial}$, mais pas par $x_0$, et constituent ainsi un module sur l'algèbre

$$\mathbb{O}_\mathrm{m} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\partial_0; \sigma_0, \delta_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}].$$

L'idéal annulateur $\mathfrak{I} = \operatorname{Ann} f$ est alors vu comme un $\mathbb{O}_\mathrm{m}$-module. En tant que tel, il n'est pas de type fini et est engendré par les produits des générateurs de $\mathfrak{I}$ (en nombre fini) par les puissances de $x_0$ (en cardinalité non finie). Plus précisément, le seul polynôme qui ait vraiment besoin d'être calculé doit être recherché dans

$$\operatorname{Ann} f + \partial_0 \mathbb{O}_\mathrm{r}.$$

ALGORITHME : $G_0 = \mathrm{TakayamaAlgo}(L, \mathbb{O}, \mathbf{x}_0, \partial_0)$.

INPUT : $\begin{cases} \mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{x}_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; \sigma_0, \delta_0], \\ L = \{L_1, \dots, L_p\} \text{ pour des polynômes } L_i \text{ de } \mathbb{O}. \end{cases}$

OUTPUT : ensemble de polynômes $P$ tels qu'ils existe un $Q$ tel que (79) soit dans l'idéal engendré par $L$.

1. $G = \{\}$ ;
2. soit $N$ le degré minimal des $L_i$ en $x_0$ ;
3. tant que $G_0 = \{\}$, faire :
   (a) $H = \left\{x_0^{\boldsymbol{\alpha}} L_i \mid |\boldsymbol{\alpha}| = N - \deg_{x_0} P_i \geq 0\right\}$ ;
   (b) réduire chaque élément de $H$ par (80) ;
   (c) $B = \{x_0 \mid |\boldsymbol{\alpha}| \leq N\}$ ;
   (d) choisir un ordre de termes $\preceq$ sur $\mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{x}_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ éliminant $\mathbf{x}_0$ ;
   (e) $G = \mathrm{mGr\ddot{o}bnerBasis}(G \cup H, \mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}], B, \preceq)$ ;
   (f) $N = N + 1$ ;
4. renvoyer $G_0$.

ALGORITHME 16. Algorithme de Takayama étendu

Cet ensemble est la somme d'un idéal à gauche et d'un idéal à droite de $\mathbb{O}_\mathrm{r}$. En tant que tel, ce n'est en général pas un idéal, mais seulement un $\mathbb{O}_\mathrm{m}$-module à gauche. Algorithmiquement, on tiendra plus précisément compte de ce que la connaissance du polynôme $Q$ est inutile, et on calculera modulo $\partial_0$ à gauche, c'est-à-dire dans le quotient

$$\mathrm{Ann}\, f / \partial_0 \mathbb{O}_\mathrm{r},$$

qui est encore un $\mathbb{O}_\mathrm{m}$-module à gauche. En fait, l'action de $\partial_0$ dans ce module quotient est de multiplier par 0, aussi ne retiendrons-nous que sa structure de $\mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$-module.

Un algorithme pour résoudre le problème précédent dans le cadre des algèbres de Weyl a été donné Nobuki Takayama [99, 100]. Cet algorithme se fonde sur une généralisation au cas non commutatif d'une technique classique pour le calcul de bases de Gröbner de modules sur un anneau de polynômes (cf [19, §10.4]). L'algorithme de Takayama s'adapte aisément au contexte d'algèbres de Ore et permet des calculs plus rapides que ceux permis par l'algorithme de la section précédente. Je présente maintenant une version optimisée et étendue dans [35] aux algèbres de Ore de l'algorithme de Takayama, en particulier étendue de façon à prendre en compte les opérateurs à différence.

Puisque le but est le calcul de $P$, il est possible de remplacer par 0 tout polynôme qui se récrit sous la forme $\partial_0 C$, à la condition que ces polynômes ne soient plus multipliés par aucun des $x_0$ dans les calculs ultérieurs. Supposons que l'algèbre de Ore vérifie l'hypothèse du théorème 4, qui rend la théorie des bases de Gröbner algorithmique dans cette algèbre. L'idée de l'algorithme de Takayama est qu'une élimination partielle peut être effectuée par un calcul de base de Gröbner pour des $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$-modules. Une difficulté conceptuelle de l'algorithme est que les modules en question ne sont pas de type fini. L'algorithme procède alors par troncation du module par rapport au degré en $x_0$ : on calcule une base de Gröbner pour un ordre d'élimination du $\mathbb{O}_{\mathrm{m}}$-module engendré par tous les opérateurs produits jusqu'à un degré en $x_0$ donné ; si un opérateur du type (79) est trouvé, l'algorithme renvoie le $P$ correspondant ; sinon, le degré maximum en $x_0$ est augmenté.

L'hypothèse du théorème 4 sur les $a_{ij}$ implique que tous les $x_0^p\partial_0^k$ se récrivent en des polynômes de degré plus bas en $\partial_0$. Cette récriture s'obtient en appliquant la règle

$$\partial_0^k x_0^p = c x_0^p \partial_0^k + \text{termes d'ordre inférieur,} \tag{80}$$

en admettant que le membre gauche puisse être remplacé par zéro. L'algorithme considère alors les $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$-sous-modules de

$$\mathfrak{I} + \partial_0 \mathbb{O}$$

qui consistent en les polynômes de degré total au plus $N$ en $x_0$, pour $N = 0, 1, 2, \ldots$ Une généralisation convenable des bases de Gröbner dans ces modules (de type fini) se calcule en trois étapes. D'abord, les générateurs de l'idéal $\mathfrak{I}$ sont multipliés à gauche par des produits de puissances des éléments de $x_0$ de façon à produire autant d'opérateurs de degré au plus $N$ en $x_0$ que possible. Ensuite, l'algorithme fait disparaître $\partial_0$ de ces polynômes par l'utilisation de la règle (80). Enfin, on obtient une base de Gröbner du $\mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$-module engendré par ce système de polynômes dans

$$\mathbb{K}(\mathbf{x})[x_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}].$$

Le calcul est celui de l'algorithme de Buchberger, à ceci près que l'on n'autorise pas les multiplications par l'indéterminée $x_0$ lors du calcul de $S$-polynômes et des réductions.

Une version optimisée de l'algorithme de Takayama est donnée dans l'algorithme 16 (où je désigne par $G_0$ l'ensemble des polynômes en $G$ de degré 0 en $x_0$). L'optimisation que j'ai introduite avec Bruno Salvy dans [35] consiste en l'étape de prétraitement *via* (80).

Il est à noter que la réduction par (80) est d'ordinaire extrêmement simple : dans le cas d'un opérateur de dérivation $D_x$, elle consiste à remplacer les termes

$$M(x)D_x^k \qquad \text{par} \qquad (-1)^k p^{(k)}(x) \ ;$$

dans le cas d'un opérateur de décalage $S_n$, à remplacer les termes

$$M(n)S_n^k \qquad \text{par} \qquad M(n-k) \ ;$$

dans le cas d'un opérateur de $q$-décalage, à remplacer les termes

$$M(n, q^n)S_n^k \qquad \text{par} \qquad M(n-k, q^{n-k})\ ;$$

et dans le cas d'un opérateur de $q$-dilatation, à remplacer les termes

$$M(x)H_x^k \qquad \text{par} \qquad M(q^{-k}x).$$

La condition sous laquelle l'algorithme doit être arrêté peut être modifiée selon le contexte. Dans le cas de l'algèbre de Weyl, Takayama choisit de stopper la boucle quand l'ensemble $G_0$ calculé engendre un idéal définissant un module holonome et il prouve que l'algorithme 16 produira toujours un tel ensemble en temps fini pour peu que l'entrée $L$ corresponde à un module holonome. Remarquons qu'alors l'algorithme ne calcule en fait qu'un sous-idéal de l'idéal annulateur de la primitive à bornes naturelles, mais un sous-idéal correspondant à un module holonome. Dans le cadre général des algèbres de Ore, je ne dispose malheureusement d'aucun résultat permettant de prédire la dimension de l'idéal limite qui serait obtenu en laissant tourner l'algorithme à l'infini. Aussi stoppé-je l'algorithme dès qu'un polynôme indépendant de $x_0$ a été obtenu. De surcroît, la terminaison n'est aucunement garantie dans le cas général. L'algorithme est donc à employer soit de manière heuristique, soit lorsqu'on dispose d'une preuve externe d'existence d'un polynôme éliminé. De manière générale, la terminaison ne peut être garantie que pour des cas particuliers d'idéaux tels les idéaux holonomes des algèbres de Weyl, ou les idéaux $q$-holonomes dans le cas du $q$-calcul. Dans de nombreux cas néanmoins, la terminaison peut aussi être décidée algorithmiquement avant exécution de l'algorithme 16 par le calcul de la *dimension* de l'idéal en entrée.

Cet algorithme est bien plus efficace que l'algorithme naïf décrit en §1.1, qui est en fait rarement praticable sur de larges exemples. Il faut cependant prendre en considération que l'algorithme 16 calcule un idéal différent de celui de la méthode générale d'élimination brutale. Ainsi, l'idéal produit en stoppant la boucle dès qu'un polynôme indépendant de $x_0$ a été obtenu peut être plus grand ou plus petit que l'idéal obtenu par l'autre algorithme. Mais en faisant tourner la boucle à l'infini, l'idéal calculé stationne sur un idéal plus grand que celui obtenu par l'autre algorithme. Dans la pratique, l'algorithme 16 renvoie le plus souvent des opérateurs d'ordre plus petit que ceux renvoyés par la méthode naïve, ce qui permet de poursuivre des calculs ultérieurs dans de meilleures conditions (moins de solutions parasites, vitesse accrue...).

Encore une fois, je tiens à mentionner que cet algorithme peut être décrit sans le recours à une quelconque fonction usuelle. En effet, pour

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{K}(\mathbf{x}, x_0)[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; \sigma_0, \delta_0],$$

considérons l'idéal $\mathfrak{J}$ engendré dans $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$ par les $L_i$, et le $\mathbb{O}_{\mathrm{r}}$-module monogène

$$\mathfrak{m} = \mathbb{O}_{\mathrm{r}}/\mathfrak{J}.$$

Notons $f$ un générateur de ce module. Alors, par définition, l'*intégrale du module* $\mathfrak{m}$ vaut

$$\int \mathfrak{m} = \mathfrak{m}/\partial_0\mathfrak{m} = \mathbb{O}_r/(\mathfrak{I} + \partial_0\mathbb{O}_r) = (\mathbb{O}_r/\partial_0\mathbb{O}_r) \otimes_{\mathbb{O}_r} \mathfrak{m}.$$

Il vaut

$$\int \mathfrak{m} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}] \cdot (1 \otimes f),$$

et plus précisément, pour toute paire $(P, Q)$ vérifiant (79), nous avons

$$P \cdot (1 \otimes f) = 1 \otimes [(P + \partial_0 Q) \cdot f] = 0.$$

Par définition, l'*intégrale* de $f$ vaut $1 \otimes f \in \int \mathfrak{m}$.

Exemple. Reprenons l'exemple de la série génératrice des polynômes de Jacobi, déjà calculée dans la section précédente. Les calculs ont maintenant lieu dans la sous-algèbre

```
A:=skew_algebra(
    diff=[Dx,x],diff=[Dy,y],
    shift=[Sa,a],shift=[Sb,b],polynom=n):
```

qui est vue comme un module sur

$$\mathbb{Q}(x, y, a, b)[D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y][S_a; S_a, 0][S_b; S_b, 0].$$

L'algorithme 16 prend une seconde pour renvoyer le système

$$\begin{cases} 2 - (1 + x)S_b - (1 - x)S_a, \\ -2(b + 1) + (1 + x)(a + b + 2)S_b - 2(1 + y)D_y + 2y(1 + x)D_y S_b, \end{cases}$$

obtenu pour $N = 1$. Ce système n'est pas $\partial$-fini. Une itération supplémentaire (pour $N = 2$) prend une minute pour produire la même base (73) que l'algorithme naïf. Ce temps est à comparer avec les trois minutes nécessaires à ce dernier.

Bien entendu, la méthode de cette section s'applique encore au cas de sommations et intégrations multiples simultanées ; dans ce cas, on introduit une algèbre $\mathbb{O}_e$ de la forme

$$\mathbb{K}(\mathbf{x})[x_0, \dots, x_s][\partial_0; \sigma_0, \delta_0] \cdots [\partial_s; \sigma_s, \delta_s][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$$

pour sommer ou intégrer simultanément en $x_0, \dots, x_s$. La forme de l'opérateur clé (79) à calculer devient alors

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\partial}) + \partial_0 Q_0(x_0, \dots, x_s, \mathbf{x}, \partial_0, \dots, \partial_s, \boldsymbol{\partial}) \\ + \dots \\ + \partial_s Q_s(x_0, \dots, x_s, \mathbf{x}, \partial_0, \dots, \partial_s, \boldsymbol{\partial}). \end{aligned} \tag{81}$$

## 4. Exemples hypergéométriques

Mis à part sa théorie générale des identités holonomes [113], Doron Zeilberger, ainsi que Herbert S. Wilf, ont développé des algorithmes spécialisés pour les cas d'identités hypergéométriques et $q$-hypergéométriques [110] — voir aussi [65]. Au chapitre suivant, je vais montrer une généralisation de cette algorithmique spécialisée au cas plus général de fonctions $\partial$-finies, et qui s'avère plus rapide que celle du présent chapitre. Néanmoins, un grand nombre d'identités hypergéométriques peuvent s'obtenir par les méthodes de ce chapitre. C'est ce que je montre maintenant sur quelques exemples.

### 4.1. Une identité entre nombres de Franel et nombres d'Apéry.

L'identité suivante a été prouvée par Volker Strehl [96] :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3. \tag{82}$$

Chaque membre de cette équation est annulé par l'opérateur

$$(n+2)^3 S_n^2 - \left[(n+2)^3 + (n+1)^3 + 4(2n+3)^3\right] S_n + (n+1)^3. \tag{83}$$

(Cet opérateur a été utilisé par Roger Apéry dans sa preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$.)

En utilisant l'algorithme de §1.1, le calcul est obtenu en 82 secondes en utilisant mes programmes. Tout d'abord, un polynôme annulateur d'ordre 3 pour la somme interne du membre droit est obtenu en 5 secondes ; puis 2 secondes supplémentaires sont nécessaires pour calculer des polynômes annulateurs du produit par les deux coefficients binomiaux en utilisant la technique de §3 ; enfin, le *creative telescoping* appliqué à ces derniers polynômes requiert 31 secondes pour fournir un polynôme d'ordre 7 annulant le membre droit de l'équation (82). Un autre calcul par *creative telescoping* renvoie un polynôme annulateur d'ordre 4 pour le membre gauche de (82), ce en 44 secondes. L'identité est alors prouvée en vérifiant 11 conditions initiales (une borne supérieure sur l'ordre du polynôme annulateur minimal pour la différence). On obtient alors (83) en prenant le p.g.c.d. à droite de ces deux polynômes.

Un calcul similaire en utilisant ma version de l'algorithme de Takayama est réalisé en 11 secondes. De façon intéressante, les opérateurs obtenus par cette méthode sont d'un ordre plus petit que ceux produits par l'algorithme général. On obtient en effet en 4 secondes que la somme interne du membre droit est annulée par un polynôme annulateur d'ordre 2 ; puis le produit prend deux autres secondes et le deuxième *creative telescoping* prend deux secondes et fournit un polynôme d'ordre 2. Le même polynôme (83) est obtenu en appliquant cet algorithme au membre gauche et le calcul prend 2 secondes et demi.

**4.2. Une identité de Rogers-Ramanujan.** Considérons la version finie suivante due à George Andrews d'une des célèbres identités de Rogers-Ramanujan :

$$\sum_k \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} = \sum_k \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}},$$

où $(q;q)_n = (1-q)\cdots(1-q^n)$.

En employant la méthode générale de §1.1, il faut une seconde pour trouver un polynôme annulateur du second ordre pour le membre gauche de cette identité, et 56 secondes pour trouver un polynôme annulateur d'ordre 5 pour le membre droit. De ces annulateurs, on tire facilement une preuve de l'identité comme dans l'exemple précédent. Ma généralisation de l'algorithme de Takayama trouve *les mêmes opérateurs* que la méthode générale en 1 seconde et 23 secondes respectivement.

Peter Paule a remarqué dans [80] qu'en ne sommant que la partie paire du membre droit, c'est-à-dire en le multipliant par

$$\frac{1+q^k}{2},$$

l'algorithme de Zeilberger trouve alors un opérateur d'ordre 2 pour le membre droit. En utilisant la même heuristique avec mon algorithme, on obtient que la méthode à la Takayama en bénéficie elle aussi, et fournit un polynôme annulateur d'ordre 3 au lieu de 5, alors que l'algorithme plus général produit un polynôme annulateur d'ordre 6. De même que dans le cas hypergéométrique, les raisons qui font fonctionner cette heuristique ne sont pas complètement comprises. Cette idée de « *creative symmetrizing* » est cependant d'applicabilité générale et s'étend à des symétries plus générales [81].

**4.3. $q$-Analogue de l'identité de Dixon.** Le membre gauche de l'identité

$$\sum_k (-1)^k q^{k(3k+1)/2} \binom{a+b}{a+k}_q \binom{a+c}{c+k}_q \binom{b+c}{b+k}_q = \frac{(q;q)_{a+b+c}}{(q;q)_a(q;q)_b(q;q)_c}$$

est annulé par un système de polynômes en les indéterminées $S_a$, $S_b$ et $S_c$ (opérateurs de décalage) qui s'obtient en 490 secondes en utilisant mon programme pour réaliser l'élimination par bases de Gröbner. Un système plus simple (mais moins complet) est obtenu en utilisant ma version de l'algorithme de Takayama en seulement 70 secondes, que voici :

$$\begin{cases} q^a(q^{b+c+1}-1)S_a - q^b(q^{a+c+1}-1)S_b + (q^a-q^b)S_aS_b, \\ q^a(q^{b+c+1}-1)S_a - q^c(q^{a+b+1}-1)S_c + (q^a-q^c)S_cS_a, \\ q^c(q^{a+b+1}-1)S_c - q^b(q^{a+c+1}-1)S_b + (q^c-q^b)S_cS_b. \end{cases}$$

Ces polynômes n'engendrent pas un idéal $\partial$-fini. Une itération de plus dans l'algorithme prend 166 secondes pour produire les générateurs d'un idéal $\partial$-fini.

Le même calcul pourrait être réalisé dans une algèbre contenant la dérivation $D_a$ au lieu de l'opérateur de décalage $S_a$. Ce qui arrive alors est que l'élimination brutale par base de Gröbner ne produit aucun polynôme annulateur en $D_a$ (il n'en existe aucun), mais seulement les polynômes annulateurs en $S_b$ et $S_c$. Ceci montre l'importance du choix d'une algèbre ambiante d'opérateurs appropriée.

Il est aussi possible de ne considérer que les indéterminées $S_k$ et $S_a$, en maintenant $b$ et $c$ comme paramètres. Alors, une équation du troisième ordre en $S_a$ est obtenue, ce qui est une description $\partial$-finie de la somme. (Dans [81], il est montré que le *creative symmetrizing* s'applique à la vérification de cette identité dans ce contexte ; de façon curieuse, mon algorithme ne semble pas pouvoir profiter du *creative symmetrizing* sur cet exemple.)

**4.4. Sommes hypergéométriques multiples.** Les algorithmes de ce chapitre s'appliquent aussi à des sommations et intégrations multiples. À titre d'illustration, je calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2k+2\ell+n+m)!}{(k+n)!(\ell+m)!k!\ell!}\left(\frac{x}{4}\right)^{k+\ell} \tag{84}$$

et montrons que cette somme *double* admet la représentation en somme *simple* (infinie)

$$\frac{n!}{(n-m)!m!}\,{}_4F_3\left(\left.\begin{matrix}\frac{n+m}{2}+1,\frac{n+m}{2}+1,\frac{n+m+1}{2},\frac{n+m+1}{2}\\ n+m+1,n+1,m+1\end{matrix}\right|4x\right), \tag{85}$$

en termes de la fonction hypergéométrique ${}_4F_3$. La somme double décrit la probabilité d'atteinte d'un point $(n,m)$ par une marche aléatoire issue de l'origine sur le réseau $\mathbb{N}^2$, lorsque chacun des pas dans les quatre directions a probabilité $x/4$ et que la marche a la probabilité $1-x$ de s'arrêter à chaque étape [105].

Considérons l'algèbre de Ore $\mathbb{K}(k,\ell,x)[S_k;S_k,0][S_\ell;S_\ell,0][D_x;1,D_x]$ sur le corps $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(n,m)$. Le système d'opérateurs suivant décrit le sommant $s$ en tant que fonction $\partial$-finie :

$$\begin{cases} xD_x-(k+\ell),\\ 4(k+1)(k+1+n)S_k\\ \qquad\qquad -x(2(k+\ell)+n+m+1)(2(k+\ell+1)+n+m),\\ 4(\ell+1)(\ell+1+m)S_\ell\\ \qquad\qquad -x(2(k+\ell)+n+m+1)(2(k+\ell+1)+n+m).\end{cases} \tag{86}$$

Ces opérateurs s'obtiennent en calculant respectivement des formes normales pour

$$\frac{D_x\cdot s}{s},\qquad \frac{S_k\cdot s}{s}\qquad\text{et}\qquad \frac{S_\ell\cdot s}{s},$$

qui s'avèrent être des fractions rationnelles appartenant à $\mathbb{K}(k,\ell,x)$. En vue du *creative telescoping*, on calcule une base de Gröbner de l'idéal engendré par (86) dans l'algèbre de Ore polynomiale

$$\mathbb{K}(x)[k,\ell][S_k;S_k,0][S_\ell;S_\ell,0][D_x;1,D_x].$$

Pour effectuer l'élimination, on emploie un ordre de termes sur les cinq indéterminées polynomiales de l'algèbre qui soit tel que $k$ et $\ell$ soient lexicographiquement plus grands que $S_k$, $S_\ell$ et que $D_x$. Les *ex æquo* sont départagés par un ordre de degré total sur $k$ et $\ell$ tel que $k \preceq \ell$ d'une part, et par un ordre de degré total sur $S_k$, $S_\ell$ et $D_x$ tel que $S_k \preceq S_\ell \preceq D_x$ d'autre part. La base de Gröbner obtenue a la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} D_x^5S_k^2S_\ell^2 + \langle 307 \text{ t.o.i.}\rangle, & D_x^4S_k^3S_\ell^3 + \langle 511 \text{ t.o.i.}\rangle, \\ k+\ell-xD_x, & kS_k^2S_\ell^2 + \langle 192 \text{ t.o.i.}\rangle, \\ kS_kS_\ell + \langle 27 \text{ t.o.i.}\rangle, & kD_x^2S_k + \langle 72 \text{ t.o.i.}\rangle, \\ kS_kS_\ell^3 + \langle 467 \text{ t.o.i.}\rangle, & kD_x^2S_\ell^2 + \langle 103 \text{ t.o.i.}\rangle, \\ k^2S_\ell + \langle 15 \text{ t.o.i.}\rangle, & k^2S_k + \langle 14 \text{ t.o.i.}\rangle \end{array}\right. \tag{87}$$

où « $p$ t.o.i. » signifie « $p$ termes d'ordre inférieur », et où chaque polynôme a été rendu unitaire. Chacun des deux opérateurs de la première ligne ne fait intervenir ni $k$ ni $\ell$. Dans la section précédente, il a été remarqué qu'une récurrence pour l'intégrale de (75) s'obtient en faisant $D_x = 0$ dans l'opérateur éliminé (77). Dans le cas présent, la sommation en $k$ et $\ell$ sur $(0,\infty)$ correspond à faire $S_k = 1$ et $S_\ell = 1$ dans les deux premiers opérateurs de (87). On obtient deux opérateurs de $\mathbb{K}(x)[D_x;1,D_x]$ de degré 4 et 5 en $D_x$ respectivement. En calculant une base de Gröbner pour un ordre de termes sur $D_x$, on obtient leur p.g.c.d. à droite, à savoir l'opérateur de degré 4 suivant :

$$\begin{aligned} &4x^3(1-4x)D_x^4 + 8x^2((s+3)-2(2s+9)x)D_x^3 \\ &\quad + 4x((s^2+p+6s+7)-(6s^2+42s+77)x)D_x^2 \\ &\quad + 4((p+s+1)(s+1)-(2s+5)(s^2+5s+7)x)D_x - (s+1)^2(s+2)^2 \end{aligned}$$

pour $s = n+m$ et $p = nm$. Cette dernière étape se réduit en fait à un algorithme d'Euclide tordu [26, 35, 75]. Après résolution de l'équation différentielle correspondante et prise en compte des valeurs en 0 des quatre premières dérivées, on obtient la représentation en série hypergéométrique de l'identité (85) pour la somme double.

Par la même approche, j'ai aussi obtenu par exemple la somme suivante, due à Leonard Carlitz.

$$\sum_{i+j+k=n} \binom{i+j}{i}\binom{j+k}{j}\binom{k+i}{k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{2l}{l}.$$

Une autre vérification automatique utilisant la méthodologie des paires WZ a été donnée dans [110].

En suivant une approche qui ne s'appuie pas sur des bases de Gröbner, Kurt Wegschaider [107] a obtenu un algorithme rapide bien adapté au calcul de somme binomiales multiples telles que (84).

**4.5. Identités de Gordon du type Rogers-Ramanujan.** Une extension des célèbres identités de Rogers-Ramanujan [90] fournit des identités dues à Basil Gordon [55] et faisant intervenir des sommations multiples. Le théorème de Gordon affirme que le nombre de partitions de $n$ de la forme $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ où

$$\lambda_i - \lambda_{i+k-1} \geq 2$$

pour chaque $i$ et au plus $r-1$ des $\lambda_i$ vaut « 1 » est égal au nombre de partitions de $n$ en parts qui ne sont congrues ni à 0, ni à $r$ ou $-r$ modulo $2k+1$. On retrouve les identités de Rogers-Ramanujan pour

$$k = r = 2 \qquad \text{et} \qquad k = r + 1 = 2.$$

Ces identités combinatoires possèdent une version *analytique infinie* due à George E. Andrews [10]. Par exemple pour $(k, r) = (3, 3)$, nous avons

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_i (q;q)_j} = \frac{(q^3;q^7)_\infty (q^4;q^7)_\infty}{(q;q)_\infty},$$

où $(x;q)_n$ représente le $q$-analogue du symbole de Pochhammer,

$$(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x).$$

De façon plus générale, chaque instance pour un $k$ donné du théorème ci-dessus fournit une identité sommatoire faisant intervenir au membre gauche $k$ sommations simultanées. Ces identités peuvent être obtenues comme cas limites d'une version *analytique finie* due à Peter Paule [77], et qui est démontrable par l'algorithme de cette section — bien que calculatoirement, la méthode risque de ne pas passer en machine pour des valeurs de $k$ valant 5 ou 6. Pour $k = r = 3$, l'identité s'énonce :

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j} (q;q)_i (q;q)_j} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k} (q;q)_{n-k}}. \tag{88}$$

Pour démontrer cette identité en somme double, considérons l'algèbre $\mathcal{F}$ des suites de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{Q}((q))$ indicées par $(i, j, n)$ et regardons le sommant $f$ comme un élément de $\mathcal{F}$. Introduisons encore les opérateurs de décalage $S_i$, $S_j$ et $S_n$, ainsi que les opérateurs de multiplication par $q$, $q^i$, $q^j$ et $q^n$. Ces opérateurs engendrent l'algèbre

$$\mathbb{O} = \mathbb{Q}(q, q^i, q^j, q^n)[S_i; S_i, 0][S_j; S_j, 0][S_n; S_n, 0]$$

d'opérateurs $\mathbb{Q}$-linéaires sur $\mathcal{F}$. Ces opérateurs sont traditionnellement appelés « opérateurs de $q$-calcul », et vérifient les commutations

$$S_i q^i = q q^i S_i, \qquad S_j q^j = q q^j S_j, \qquad S_n q^n = q q^n S_n.$$

Ensuite, $f$ est une fonction $\partial$-finie car elle est annulée par

$$\text{(89)}\quad \begin{cases} (1-qq^i)S_i - qq^iq^j(q^iq^j - q^n), \quad (1-qq^j)S_j - qq^iq^j(q^jq^i - q^n), \\ (q^iq^j - qq^n)S_n - q^iq^j. \end{cases}$$

Ce système est obtenu en calculant respectivement des formes normales pour les quotients

$$\frac{f_{i+1,j,n}}{f_{i,j,n}}, \qquad \frac{f_{i,j+1,n}}{f_{i,j,n}} \qquad \text{et} \qquad \frac{f_{i,j,n+1}}{f_{i,j,n}},$$

qui s'avèrent être des fractions rationnelles en $q$, $q^i$, $q^j$ et $q^n$. Exécutons maintenant l'algorithme décrit plus haut. L'idéal engendré par (89) est précisément $\operatorname{Ann}_{\mathbb{O}} f$ (si ce dernier était strictement plus grand, il vaudrait toute l'algèbre et $f$ serait une constante). Calculons l'ensemble des produits de chaque opérateur $p$ dans (89) par les $(q^i)^\alpha(q^j)^\beta$ pour $\alpha+\beta \leq 7-d$, où $d$ est le degré total de $p$ en $q^i$ et $q^j$. Nous obtenons 32 opérateurs.

Faisons ensuite disparaître $S_i$ et $S_j$ de ces opérateurs. La raison de cette étape de l'algorithme est que l'opérateur éliminé (81) prend la forme

$$\begin{aligned} &(S_i-1)Q_0(q^i,q^j,q^n,S_i,S_j,S_n) + \\ &(S_j-1)Q_1(q^i,q^j,q^n,S_i,S_j,S_n) + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P(q^n,S_n), \end{aligned}$$

où on ne cherche pas à connaître les $Q_i$, mais uniquement $P$. En outre, $P$ s'obtient à partir des opérateurs éliminés précédents par deux divisions euclidiennes à gauche par $S_i - 1$ puis par $S_j - 1$. En effectuant ces divisions *avant* tout calcul de base de Gröbner, on se ramène à des calculs de bases de Gröbner dans une algèbre sur deux indéterminées de moins, ce qui accélère les calculs. De plus, les divisions s'effectuent simplement en suivant la règle suivante

$$(q^i)^\alpha S_i^\beta = (-1)^\beta q^{-\alpha\beta}(q^i)^\alpha,$$

qui vaut modulo l'idéal *droit* engendré par $S_i - 1$. Ensuite, on calcule une base de Gröbner par rapport à un ordre de termes sur $q^i$, $q^j$ et $S_n$ qui élimine $q^i$ et $q^j$, mais sans autoriser aucune multiplication par $q^i$ ou $q^j$. En fait, ce calcul a lieu dans le $\mathbb{Q}(n)[S_n; S_n, 0]$-module de base $(q^i)^\alpha(q^j)^\beta$, et avec un ordre sur cette base choisi pour faire disparaître $q^i$ et $q^j$. On obtient l'opérateur d'ordre trois suivant :

$$\begin{aligned} &(q^3q^n-1)S_n^3 \\ &+ \left[q^{10}(q^n)^4 + q - q^8(q^n)^3 + q^6(q^n)^2 + q^5(q^n)^2 - q^4q^n - q^3q^n + q^2 + 1\right] S_n^2 \\ &\qquad\qquad -q(1+q^5(q^n)^2 + q^4(q^n)^2 - q^3q^n + q^2 + q)S_n + q^3. \end{aligned}$$

En répétant le même procédé sur le membre droit, ou en employant un autre algorithme [81], on obtient le même opérateur. La preuve de l'identité (88) s'achève en vérifiant que ses deux membres coïncident pour $n = 1$, 2 et 3.

CHAPITRE VI

# Sommation et intégration par résolution rationnelle

Dans le chapitre précédent, j'ai décrit des algorithmes unifiés mais plutôt lents fondés sur le calcul de bases de Gröbner pour réaliser le *creative telescoping* dans des classes générales de fonctions et de suites comprenant la classe des fonctions holonomes. Ces méthodes peuvent être considérées comme une généralisation de l'algorithme « lent » de Zeilberger [113]. Je vais dans ce chapitre étendre l'algorithme « rapide » de Zeilberger [112] à la classe des *fonctions $\partial$-finies*, c'est-à-dire à des fonctions définies par des équations linéaires d'ordre arbitraire, dans le cadre unifié des opérateurs de Ore.

Par exemple, mon algorithme redécouvre des identités telle

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1/2}(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}\, dt,$$

où les $P_n(x)$ sont les polynômes de Legendre, donnés en termes des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ par $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$, et où les $J_\nu(x)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce. Dans chaque cas, je pars d'une description du sommant $s$ au membre gauche en termes d'opérateurs linéaires qui s'annulent sur $s$, et j'obtiens un opérateur qui s'annule sur le membre droit. Remarquons que dans chacun des cas, le sommant n'est pas nécessairement un *terme hypergéométrique*, c'est-à-dire une suite $(t_n)$ à valeur dans un corps $\mathbb{K}$ telle que

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \in \mathbb{K}(n).$$

Dans les algorithmes de sommation hypergéométrique, un rôle important est joué par la relation de *similarité*. Deux termes hypergéométriques $t_n$ et $t'_n$ sont dits *similaires* lorsque $t_n/t'_n$ est une fraction rationnelle non nulle $n$ : lorsqu'il somme un terme hypergéométrique $t_n$, l'algorithme de Gosper cherche une somme indéfinie qui soit similaire au sommant ; l'algorithme travaille donc dans l'espace vectoriel *de dimension un*

$$\mathbb{Q}(n) \cdot t_n,$$

si bien que chaque suite $t'$ qu'il considère se représente par une seule fraction rationnelle $r$ telle que $t' = rt$.

Dans mon extension au cas de fonction $\partial$-finies par rapport à une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{F}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ sur un corps $\mathbb{F}$, le rôle de $\mathbb{F}(n) \cdot t_n$ est rempli par l'espace vectoriel *de dimension finie*

$$\mathbb{O} \cdot f = \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \mathbb{F} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot f$$

pour un ensemble fini $I$. Chaque fonction considérée par les algorithmes de ce chapitre est représentée par ses coordonnées rationnelles $\phi_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{F}$ sur la base des $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$. Deux problèmes naturels surgissent : l'un est de calculer un ensemble $I$ qui détermine une base ; l'autre est de calculer des formes normales dans $\mathbb{O} \cdot f$. En particulier, quand on applique un opérateur $P \in \mathbb{O}$ sur une fonction

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot f \in \mathbb{O} \cdot f,$$

le résultat

$$\left( P \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \right) \cdot f$$

doit être normalisé sous la forme

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \psi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot f.$$

Je résous ces deux problèmes en recourant aux méthodes de bases de Gröbner qui ont été décrites au chapitre II. Toute base de Gröbner

$$\{G_1, \dots, G_\ell\}$$

de l'idéal à gauche

$$\operatorname{Ann} f \subset \mathbb{O}$$

par rapport à un ordre de termes $\preceq$ (voir les définitions 4, p. 63, et 7, p. 71, au chapitre II) détermine un ensemble convenable $I$ de la manière suivante. Appelons $h_i = \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}_i}$ le terme dominant de $G_i$ par rapport à $\preceq$. Considérons alors l'ensemble

$$I = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \forall i \quad h_i \not\preceq \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}\}$$

des termes $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$ qui ne sont plus grands qu'aucun des $h_i$. Cet ensemble définit une base $(\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot f)_{\boldsymbol{\alpha} \in I}$ de $\mathbb{O} \cdot f$. Je l'appelle *canoniquement associée à* $\{G_1, \dots, G_\ell\}$ dans les algorithmes 17 et 19. En outre, la procédure de réduction d'opérateurs de $\mathbb{O}$ par rapport à $\preceq$ par la base de Gröbner fournit une procédure de mise sous forme normale dans

$$\mathbb{O} / \operatorname{Ann} f \simeq \mathbb{O} \cdot f.$$

Dans ce chapitre, je vais donc introduire un algorithme de calcul du $\partial^{-1}$ indéfini d'une fonction $\partial$-finie ainsi qu'un algorithme de calcul rapide de l'anti-dérivée définie $\partial_\Omega^{-1}$ d'une fonction $\partial$-finie. Un autre algorithme réalisant cette tâche a été donné par Sergei A. Abramov et Mark van Hoeij [1]. Cet algorithme est rendu très élégant par l'utilisation d'une notion d'*opérateurs adjoints* et d'*anneaux de Ore adjoints*, mais se restreint au cas de fonctions et suites d'une seule variable. Nous reviendrons sur cet algorithme en §6.

Par ailleurs, pour bien marquer la différence avec certains algorithmes que l'on trouve dans la littérature, je tiens à faire ici une comparaison avec les algorithmes de sommation et d'intégration « sous forme close », ou encore « en termes finis ».

À la fin des années 1960, Robert H. Risch prolongea les travaux de Liouville et de Ritt et développa un algorithme d'intégration indéfinie symbolique dans la classe des fonctions élémentaires [88, 89], c'est-à-dire dans les classes des fonctions obtenues par composition de fonctions algébriques, de fonctions exponentielles et de logarithmes. Plus précisément, l'algorithme de Risch calcule une tour d'extensions différentielles afin de *décider* si une intégrale indéfinie peut s'exprimer en termes de fonctions élémentaires. Dans les cas favorables, il permet en outre de construire une tour d'extensions différentielles minimale pour exprimer la primitive. Par exemple, l'algorithme prouve qu'une primitive de

$$\frac{2x^4+1}{(x^5+x)\sqrt{x^4+1}}$$

est

$$-\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+\sqrt{x^4+1}},$$

mais que $e^{-x^2}$ n'admet pas de primitive sous forme close élémentaire. On introduit alors la nouvelle fonction

$$\int e^{-x^2}\,dx.$$

L'algorithme de Risch est depuis devenu très populaire et est aujourd'hui à la base des routines d'intégration de la plupart des systèmes de calcul formel.

Au début des années 1980, Michael Karr eut recours à un concept analogue, les *extensions aux différences*, pour développer un algorithme de sommation indéfinie symbolique [60, 61]. Les méthodes et résultats sont très similaires au cas différentiel. L'algorithme de Karr calcule par exemple la somme indéfinie

$$\sum H_n^2$$

et montre qu'elle vaut

$$(n+1)H_n^2-(2n+1)H_n+2n.$$

Malgré un intérêt algorithmique évident et indiscutable, l'algorithme de Karr n'a malheureusement encore pas reçu toute l'attention qu'il mérite, à cause de sa complexité et de la difficulté à le programmer.

À la différence des algorithmes de Risch et de Karr, mes algorithmes prennent en entrée et renvoient en sortie des fonctions $\partial$-finies. En particulier dans le cas de calcul du $\partial^{-1}$ indéfini $F$ d'une fonction $\partial$-finie $f$ par rapport à une algèbre de Ore $\mathbb{O}$, l'objectif n'est pas de donner $F = \partial^{-1} \cdot f$ comme une fraction rationnelle en $f$, mais de déterminer si $F$ peut être trouvé comme combinaison linéaire des dérivées de $f$, c'est-à-dire dans le module $\mathbb{O} \cdot f$.

Ce chapitre reprend [34]. J'y généralise l'algorithme de Zeilberger au cas où les équations satisfaites par $(u_{n,k})$ sont d'ordre plus grand que 1, et ne sont pas nécessairement des récurrences. Au contraire de l'algorithme de Zeilberger qui se fonde sur l'approche de R. William Gosper pour la sommation hypergéométrique indéfinie, mon extension de l'algorithme de Zeilberger repose sur une autre approche utilisant les algorithmes de Sergei A. Abramov. En §1, je modifie ces algorithmes pour en déduire un algorithme pour la sommation et l'intégration $\partial$-finie indéfinie. Ensuite, j'étends l'algorithme de Zeilberger aux fonctions $\partial$-finies en §2, où je montre aussi comment l'algorithme s'étend au calcul itéré de sommations et intégrations multiples. En §3, je définis finalement des *certificats* et *identités compagnes* dans le contexte des identités $\partial$-finies. En §4, j'étends légèrement l'algorithme donné en §2 et montre comment dans certains cas il permet de trouver des solutions particulières d'équations fonctionnelles linéaires. En §5, je donne une démonstration automatique d'une identité récente due à Neil J. Calkin. À ma connaissance, cette preuve est la première preuve automatique de l'identité de Calkin. Enfin, je conclus en §6 par quelques remarques sur des extensions envisagées et par une comparaison de mon algorithme avec celui de Sergei A. Abramov et Mark van Hoeij [1].

## 1. $\partial^{-1}$ indéfini d'une fonction $\partial$-finie

Pour une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{F}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ sur un corps $\mathbb{F}$, soit $\partial$ l'une quelconque des indéterminées $\partial_i$ et soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{O}$-module à gauche de fonctions. J'appelle une fonction $F \in \mathcal{F}$ une *anti-dérivée* de $f \in \mathcal{F}$ lorsque $\partial \cdot F = f$. De façon analogue, j'écris $\partial^{-1} \cdot f$ pour représenter l'une *quelconque* de ces anti-dérivées. Je développe un algorithme pour le calcul de toutes les anti-dérivées $F = \partial^{-1} \cdot f$ d'une fonction $\partial$-finie $f$ dans le cas où il existe une telle $F$ dans le module $\mathbb{O} \cdot f$. Par ailleurs, cet algorithme est un algorithme de décision qui termine toujours : il détecte les cas dans lesquels il n'existe aucune telle $\partial^{-1} \cdot f$ dans $\mathbb{O} \cdot f$ et renvoie un symbole particulier $\perp$ dans ce cas. Dans le cas de suites hypergéométriques (et d'algèbres de Ore construites sur des opérateurs de décalage ou de différence finie), je retrouve une variante de l'algorithme de Gosper qui résout la récurrence linéaire au cœur de cet algorithme en des solutions rationnelles par l'algorithme d'Abramov.

**1.1. L'algorithme.** L'algorithme de cette section réduit le problème à celui de résoudre un système d'équations données par des opérateurs linéaires de Ore en des solutions *rationnelles*. Ces fractions rationnelles sont alors vues comme les coefficients de l'opérateur $Q$ tel que $\partial^{-1} \cdot f = Q \cdot f$. J'établis maintenant le théorème suivant.

ALGORITHME : $Q = \text{Indefinite}(B, \mathbb{O})$
INPUT : une base $B$ de l'idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie $f$.
OUTPUT : une base des opérateurs $Q$ tels que $Q \cdot f = \partial^{-1} \cdot f$, ou $\perp$.

1. à partir de $B$, calculer une base de Gröbner $G$ et obtenir la base finie $(\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in I}$ de $\mathbb{O}/\text{Ann}\, f$ canoniquement associée à $G$ ;
2. introduire des coefficients indéterminés $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$ ;
3. récrire
$$\partial \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} - 1$$
sur la base $B$ en réduisant par $G$ ;
4. résoudre en solutions $\phi_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{F}$ le système d'équations linéaires du premier ordre correspondant ;
5. renvoyer
$$Q = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$$
dans le cas résoluble et $\perp$ sinon.

ALGORITHME 17. $\partial^{-1}$ indéfini d'une fonction $\partial$-finie

THÉORÈME 14. *Soit une algèbre de Ore $\mathbb{F}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ sur le corps $\mathbb{F}$ et soit $\partial$ l'un quelconque des $\partial_i$. Supposons que le morphisme $\sigma_i$ soit inversible et que $\mathbb{F}$ soit muni d'un algorithme de décision pour résoudre les équations linéaires*

$$L \cdot \phi = 0 \qquad \textit{où} \qquad L \in \mathbb{F}[\partial; \sigma, \delta]$$

*en toutes leurs solutions rationnelles $\phi$ de $\mathbb{F}$. Alors, l'algorithme 17 est un algorithme de décision qui calcule une base de toutes les anti-dérivées de la fonction $\partial$-finie $f$ qui se trouvent dans $\mathbb{O} \cdot f$.*

Je donne l'algorithme correspondant en algorithme 17. Remarquons que l'hypothèse que l'entrée de l'algorithme soit tout l'idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie peut être affaiblie : l'algorithme termine sur tout sous-idéal $\partial$-fini de l'idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie ; cependant, il pourrait ne trouver aucune anti-dérivée avec une telle entrée incomplète. Ce changement d'idéal correspond à un changement de fonction $\partial$-finie qui introduit des solutions parasites.

Le point clé de l'algorithme est d'expliciter l'action de la dérivation $\partial$ sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{O} \cdot f$. Soit $F$ une fonction de $\mathbb{O} \cdot f$. Faisons choix d'une $\mathbb{F}$-base de $\mathbb{O} \cdot f$ de la forme

$$\{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot f\}_{\boldsymbol{\alpha} \in I}$$

pour un ensemble $I$ fini d'exposants. De manière équivalente, ceci fournit une $\mathbb{F}$-base

$$\{\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in I}$$

de $\mathbb{O}/\mathrm{Ann}\, f$. La fonction $F = Q \cdot f$ où $Q \in \mathbb{O}/\mathrm{Ann}\, f$ s'écrit alors

$$Q = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

En faisant l'hypothèse $F = \partial^{-1} \cdot f$, c'est-à-dire $\partial \cdot F = f$, on déduit $\partial Q = 1 \mod \mathrm{Ann}\, f$. Autrement dit :

$$\partial Q = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\sigma} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial + \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\delta} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} = 1. \tag{90}$$

Maintenant, le terme inhomogène 1 et chaque $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial$ dans cette équation se récrit sur la base $(\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in I}$. Du point de vue calculatoire, cette récriture est réalisée par des méthodes de bases de Gröbner et pour un choix particulier de base pour $\mathbb{O} \cdot f$.

Puis, pour chaque $\boldsymbol{\alpha} \in I$, l'extraction des coefficients en $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$ produit une équation

$$\sum_{\boldsymbol{\beta}\in I} \lambda_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \phi_{\boldsymbol{\beta}}^{\sigma} + \phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\delta} = \mu_{\boldsymbol{\alpha}},$$

où les $\lambda_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ et les $\mu_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont des fractions rationnelles de $\mathbb{F}$. En notant les vecteurs et les matrices par des lettres capitales, j'obtiens le système différentiel linéaire suivant :

$$\Lambda \Phi^{\sigma} + \Phi^{\delta} = M. \tag{91}$$

Je résous ensuite ce système par un procédé qui dépend de l'algèbre d'opérateurs considérée. Soit le système est résoluble, et chaque $Q$ fournit une anti-dérivée $Q \cdot f$ dans $\mathbb{O} \cdot f$ ; soit le système n'est pas résoluble, et aucune anti-dérivée ne peut être trouvée dans $\mathbb{O} \cdot f$.

Détaillons maintenant la résolution du système (91). Chaque équation de ce système peut faire intervenir plusieurs fonctions inconnues. À l'exception d'une recherche en cours et qui demande à être encore développée [16], je ne connais pas d'algorithme qui résolve directement ce genre de système linéaire ; une première étape est donc de le « triangulariser » de façon à obtenir, quand c'est possible, une équation en une seule fonction inconnue et un système qui se résolve de proche en proche. Plus précisément, il s'agit de mettre le système sous la forme triangulaire ou plus généralement trapézoïdale

$$\sum_{j=i}^{|I|} T_{i,j}(\partial) \cdot \psi_j = \nu_i \qquad i = 1, \dots, d,$$

où $|I|$ est la cardinalité de $I$, $d \leq |I|$, et pour des *opérateurs* $T_{i,j} \in \mathbb{F}[\partial; \sigma, \delta]$, des $\nu_i \in \mathbb{F}$ et des fonctions inconnues $\psi_j$ combinaisons linéaires des $\phi_i$, telles que ces dernières puissent être calculées une fois les $\psi_j$ déterminées. Cette « triangularisation » peut se réaliser pour n'importe quel opérateur de Ore $\partial$ en ayant recours à un algorithme de Sergei Abramov et Eugene Zima [7]. En effet, introduisons la nouvelle algèbre de Ore $\mathbb{F}[\partial^*; \sigma^*, \delta^*]$ pour $\sigma^* = \sigma^{-1}$ et $\partial^*$ agissant sur $\mathbb{F}$ par $\delta^* = -\sigma^{-1}\delta$ et appliquons $\sigma^{-1}$ aux système (91). J'obtiens le système

$$\Lambda^{\sigma^{-1}}\Phi - \partial^* \cdot \Phi = M^{\sigma^{-1}},$$

où $\Lambda^{\sigma^{-1}}$ et $M^{\sigma^{-1}}$ sont connus et $\Phi$ est l'inconnue. Cette forme est précisément la forme de l'entrée de l'algorithme de [7]. Une fois le système triangularisé, il reste à résoudre successivement plusieurs équations linéaires, chacune en une fonction inconnue unique, en des solutions rationnelles $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$. À son tour, cette résolution dépend de l'opérateur $\partial^*$.

**Cas des récurrences (ordinaires ou du $q$-calcul).** Les équations de récurrences sont une instance du cas plus général où $\partial$ agit par $\delta = \sigma - 1$ (où 1 est l'identité). On travaille alors en général avec l'opérateur $\sigma$ de décalage ou de $q$-décalage plutôt qu'avec l'opérateur $\delta$ de différence finie (ordinaire ou du $q$-calcul), car les deux algèbres d'opérateurs $\mathbb{F}[\delta; \sigma, \delta]$ et $\mathbb{F}[\sigma; \sigma, 0]$ sont en fait égales quand $\delta = \sigma - 1$. Après l'étape de triangularisation décrite plus haut, nous sommes amenés à des équations linéaires en l'opérateur de décalage ou de $q$-décalage. Dans chaque cas, j'applique un algorithme dû à Abramov [3, 4].

**Cas des équations différentielles (ordinaires).** Dans le cas différentiel, $\sigma$ est l'identité, si bien que le changement d'opérateurs de Ore permettant la triangularisation est trivial ($\partial^* = -\partial$). Je résous ensuite les équations différentielles successives, chacune en une unique fonction inconnue, par un autre algorithme dû à Abramov [3].

Pour finir, remarquons que la valeur du terme inhomogène 1 au membre droit de l'équation (90) est inessentielle. En remplaçant (90) par l'équation plus générale

$$\partial Q = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I} \phi^{\sigma}_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial + \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in I} \phi^{\delta}_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} = H, \tag{92}$$

où $H$ est un élément quelconque de $\mathbb{O}/\operatorname{Ann} f$, il devient possible de détecter si $H \cdot f$ a une anti-dérivée dans $\mathbb{O} \cdot f$. Ceci n'affecte que le vecteur $M$ apparaissant dans l'équation (91). De plus, ce vecteur ne dépend que linéairement de $H$. J'utiliserai ce fait dans mon « algorithme rapide » pour le *creative telescoping* de la section suivante. J'obtiens alors l'algorithme modifié 18.

**1.2. Exemple : identités sommatoires harmoniques.** De nombreuses identités sommatoires harmoniques comme

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right),$$

ALGORITHME : $Q = \mathrm{VarIndefinite}(P, B, \mathbb{O})$

INPUT : $\begin{cases} \text{un polynôme } P \in \mathbb{O}, \\ \text{une base } B \text{ de l'idéal annulateur} \\ \text{d'une fonction } \partial\text{-finie } f. \end{cases}$

OUTPUT : une base des opérateurs $Q$ tels que $Q \cdot f = \partial^{-1} \cdot (P \cdot f)$, ou $\perp$.

1. à partir de $B$, calculer une base de Gröbner $G$ et obtenir la base finie $(\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in I}$ de $\mathbb{O}/\mathrm{Ann}\, f$ canoniquement associée à $G$ ;
2. introduire des coefficients indéterminés $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$ ;
3. récrire
$$\partial \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} - P$$
sur la base $B$ en réduisant par $G$ ;
4. résoudre en solutions $\phi_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{F}$ le système d'équations linéaires du premier ordre correspondant ;
5. renvoyer
$$Q = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in I} \phi_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$$
dans le cas résoluble et $\perp$ sinon.

ALGORITHME 18. $\partial^{-1}$ indéfini d'une fonction $\partial$-finie

où $H_n$ désigne le nombre harmonique $\sum_{k=1}^{n} k^{-1}$, sont classiquement obtenues par sommation par parties ou par des techniques de séries génératrices. (Voir aussi l'algorithme général de Michael Karr [60, 61].) Mon algorithme fournit une autre méthode en permettant de trouver des évaluations sous forme close de sommes harmoniques comme celle ci-dessus. Posons $f_n = \binom{n}{m} H_n$ et démontrons la forme équivalente

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k = \frac{(n+1)^2}{(m+1)^2} f_n - \frac{(n-m)(n-m+1)}{(m+1)^2} f_{n+1}. \tag{93}$$

Calculons les deux premiers décalages de $f$ :

$$f_{n+1} = \frac{n+1}{n+1-m} \binom{n}{m} \left[ H_n + \frac{1}{n+1} \right] = \frac{n+1}{n+1-m} f_n + \frac{1}{n+1-m} \binom{n}{m} ;$$
$$f_{n+2} = \frac{n+2}{n+2-m} f_{n+1} + \frac{n+1}{n+2-m} \left[ \frac{1}{n+1-m} \binom{n}{m} \right].$$

En prenant une combinaison linéaire appropriée de ces deux équations, on obtient la récurrence linéaire homogène

$$(n-m+1)(n-m+2) f_{n+2} - (2n+3)(n-m+1) f_{n+1} + (n+1)^2 f_n = 0$$

avec des coefficients qui sont des fractions rationnelles de $\mathbb{Q}(n,m)$. Dans le cas d'expressions plus complexes, on ferait appel aux propriétés de clôture des fonctions $\partial$-finies par addition et produit et on utiliserait les algorithmes décrits au chapitre III. En conséquence de la relation ci-dessus, la suite $f$ est une fonction $\partial$-finie par rapport à l'algèbre de Ore

$$\mathbb{O} = \mathbb{Q}(n,m)[S_n; S_n, 0],$$

où $S_n$ est l'opérateur de décalage par rapport à $n$. Puisque $\mathbb{O}\cdot f$ est un espace vectoriel de dimension 2 et de base $(f, S_n \cdot f)$, on introduit l'opérateur

$$Q = \alpha_n + \beta_n S_n$$

à coefficients indéterminés et on calcule $(S_n - 1)Q - 1$. Alors, l'équation (91) prend la forme

$$\begin{cases} (2n+3)\beta_{n+1} + (n-m+2)(\alpha_{n+1} - \beta_n) = 0, \\ (n+1)^2\beta_{n+1} + (n-m+1)(n-m+2)(\alpha_n + 1) = 0. \end{cases}$$

Découplons ce système de façon à se débarrasser d'$\alpha$ ; on déduit la récurrence

$$\frac{(n+2)^2}{(n-m+2)(n-m+3)}\beta_{n+2} - \frac{2n+3}{n-m+2}\beta_{n+1} + \beta_n + 1 = 0,$$

que l'on résout en solutions rationnelles par l'algorithme d'Abramov. En substituant dans le système et en éliminant $\alpha_{n+1}$ entre les deux équations, on trouve

$$\alpha_n = \frac{(n+1)^2}{(m+1)^2} - 1 \qquad \text{et} \qquad \beta_n = -\frac{(n-m)(n-m+1)}{(m+1)^2}.$$

La somme indéfinie $F$ vérifie

$$(S_n - 1)\cdot(F - f) = f = (S_n - 1)\cdot(Q\cdot f),$$

d'où il vient que

$$F_n - [(Q+1)\cdot f](n)$$

est une constante qui s'évalue à 0 pour $n = 1$. Ceci prouve l'identité (93).

Le même algorithme permettrait de réaliser l'évaluation d'autres sommes harmoniques, comme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{m}{k}} H_k = \frac{(-1)^n}{\binom{m}{n}} \left[\frac{n+1}{m+2}H_n + \frac{m+1-n}{(m+2)^2}\right] - \frac{m+1}{(m+2)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)H_k^3 = (n+1)^2H_n^3 - \frac{3}{2}n(n+1)H_n^2$$
$$+\frac{3n^2+3n+1}{2}H_n - \frac{3}{4}n(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 H_{n+k} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}[2H_{2n} - H_n] - \frac{n(n+1)(10n-1)}{36}.$$

En ce qui concerne la deuxième identité, il est à remarquer que l'application itérée sur $H_n^3$ de l'opérateur de décalage engendre un espace vectoriel de base

$$(1, H_n, H_n^2, H_n^3)\ ;$$

pour la troisième identité, on calcule la somme indéfinie

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 H_{m+k},$$

puis on instancie le paramètre $m$ à la valeur $n$. Cependant, la méthode ne peut prouver

$$\sum_{k=1}^{n} H_k^3 = (n+1)H_n^3 - \frac{3}{2}(2n+1)H_n^2 + 3(2n+1)H_n + \frac{1}{2}H_n^{(2)} - 6n,$$

où

$$H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k^{-2}$$

désigne les nombres harmoniques généralisés, qu'à la condition que la présence de terme en $H_n^{(2)}$ soit *conjecturée*, ainsi que son exposant, et que la méthode soit adaptée pour calculer des bases de Gröbner et des réductions dans le module

$$\mathbb{O} \cdot H_n^3 + \mathbb{O} \cdot H_n^{(2)},$$

au lieu du module monogène $\mathbb{O} \cdot H_n^3$.

## 2. $\partial_\Omega^{-1}$ défini rapide d'une fonction $\partial$-finie

Pour une algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{A}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$, soit $\partial$ l'un quelconque des $\partial_i$ et soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{O}$-module à gauche de fonctions. Pour étendre le cas d'opérateurs de sommation et d'intégration définies comme

$$\sum_{k=a}^{b} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b dx,$$

je fais l'hypothèse qu'il existe un opérateur linéaire $\partial_\Omega^{-1}$ défini sur $\mathcal{F}$ tel que $\partial\partial_\Omega^{-1} = 0$. La notation $\partial_\Omega^{-1}$ doit ici être vue comme un symbole unique, où $\Omega$ ne fait référence à aucun objet mathématique particulier, mais n'est présent que pour rappeler la notation $\int_\Omega$ utilisée pour indiquer une intégration sur un domaine $\Omega$. Par ailleurs, j'ai utilisé dans le chapitre précédent une définition moins générale pour $\partial_\Omega^{-1}$, en requérant que $\partial_\Omega^{-1}\partial$ soit lui aussi nul. Ceci correspond à des hypothèses analytiques sur $\mathcal{F}$ qui sont sans objet ici.

Dans cette section, j'applique l'algorithme 17 à l'étape d'élimination du *creative telescoping* sur des fonction $\partial$-finies. En d'autres termes, dans le cas

ALGORITHME : $(P, Q) = \text{Definite}(f, B, \mathbb{O})$
INPUT : une base $B$ de l'idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie $f$.
OUTPUT : une paire d'opérateurs $(P, Q)$ vérifiant (95).

1. calculer à partir de $B$ une base de Gröbner $G$ et obtenir la base finie $(\partial^\alpha \partial'^\beta)_{(\alpha,\beta)\in I}$ de $\mathbb{O}/\operatorname{Ann} f$ canoniquement associée à $G$ ;
2. pour $L = 0, 1, \ldots$ :
   (a) introduire des coefficients indéterminés $\eta_i$ et $\phi_{\alpha,\beta}$ ;
   (b) récrire
   $$\partial \sum_{(\alpha,\beta)\in I} \phi_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \partial'^\beta - \sum_{i=0}^{L} \eta_i \partial'^i$$
   sur la base $B$ par réduction par $G$ ;
   (c) résoudre le système d'équations linéaires du premier ordre correspondant en des solutions $\eta_i \in \mathbb{F}$ et $\phi_{\alpha,\beta} \in \mathbb{F}(\mathbf{u})$ ;
   (d) dans le cas résoluble, renvoyer $(P, Q)$ pour $P = \sum_{i=0}^{L} \eta_i \partial'^i$ et $Q = \sum_{(\alpha,\beta)\in I} \phi_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \partial'^\beta$ ; sinon, boucler.

ALGORITHME 19. $\partial_\Omega^{-1}$ défini d'une fonction $\partial$-finie

de la sommation sur $k$ d'une suite $\partial$-finie $u_{n,k}$, je résous l'équation

$$\sum_{i=0}^{L} \eta_i(n) u_{n+i,k} = v_{n,k+1} - v_{n,k}, \tag{94}$$

en une autre suite $\partial$-finie $u_{n,k}$ et en des fractions rationnelles $\eta_i$ fonctions de $n$ uniquement (cf. l'équation (1), p. 10). Ceci me permet ensuite de réaliser la ($q$-)sommation et la ($q$-)intégration définie de fonctions ($q$-)holonomes, ou plus généralement de résoudre le problème de calculer une anti-dérivée définie d'une fonction $\partial$-finie, comme décrit au chapitre précédent.

La terminaison de l'algorithme rapide de Zeilberger n'est garantie que pour des suites hypergéométriques holonomes. De façon similaire dans le cas d'opérateurs de Ore généraux, j'appelle *$\partial$-finie holonome* toute fonction à la fois $\partial$-finie et holonome. Mon algorithme prend en entrée une description de l'idéal annulateur d'une fonction $\partial$-finie et je montre sa terminaison pour des fonctions $\partial$-finies holonomes.

**2.1. L'algorithme.** Commençons par motiver mon algorithme par le cas de fonctions holonomes dans le cas différentiel. Une fonction (continue) holonome $f(x, y)$ est une fonction $\partial$-finie par rapport à une algèbre de Ore

$$\mathbb{O} = \mathbb{C}(x, y)[D_x; 1, d/dx][D_y; 1, d/dy]$$

construite sur des opérateurs différentiels (ordinaires). (Ici, $D_x$ et $D_y$ agissent par $\delta_x = d/dx$ et $\delta_y = d/dy$, respectivement.) La définition originale de l'holonomie dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules (voir [20, 21] et les rappels au chapitre IV) garantit l'existence d'un opérateur non nul dans

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{O}} f \cap \mathbb{C}(x)[\boldsymbol{\partial}; \mathbf{1}, \boldsymbol{\delta}]$$

([113, lemme 4.1] et théorème 11 au chapitre IV). En conséquence, il existe une identité non triviale de la forme

$$\sum_{i=0}^{L} \eta_i(x) D_x^i \cdot f = D_y \cdot [Q(x, y, D_x, D_y) \cdot f]$$

formellement semblable à l'équation (94) et pour $Q \in \mathbb{O}$. Cette propriété d'existence se transfère au cas discret par séries génératrices et des résultats similaires sont connus pour les $q$-analogues [91].

Plus généralement, dans le cas d'une fonction $\partial$-finie $f$ par rapport à une algèbre de Ore

$$\mathbb{F}(u_1, \ldots, u_s)[\partial; \sigma, \delta][\partial'; \sigma', \delta']$$

en *deux* opérateurs $\partial$ et $\partial'$ et tels que $\partial$ commute avec les éléments de $\mathbb{F}$ mais pas avec les $u_i$, je recherche des solutions de

$$P(\partial') \cdot f = \sum_{i=0}^{L} \eta_i \partial'^i \cdot f = \partial \cdot [Q(\mathbf{u}, \partial, \partial') \cdot f]\,, \tag{95}$$

où $P \neq 0$ et les $\eta_i$ *ne dépendent pas de* $\mathbf{u}$.

Je résume le résultat de cette section dans le théorème qui suit.

THÉORÈME 15. *Soit $\mathbb{F}(\mathbf{u})[\partial; \sigma, \delta][\partial'; \sigma', \delta']$ une algèbre de Ore. Supposons que le morphisme $\sigma$ soit inversible et que $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ admette un algorithme de décision pour résoudre toute équation linéaire*

$$L \cdot \phi = 0 \qquad \text{où} \qquad L \in \mathbb{F}(\mathbf{u})[\partial; \sigma, \delta]$$

*en des solutions $\phi \in \mathbb{F}(\mathbf{u})$. Lorsqu'il existe une paire $(P, Q)$ qui vérifie (95), l'algorithme 19 termine et renvoie une telle paire. Ceci a lieu en particulier quand $f$ est une fonction $\partial$-finie holonome.*

Dès lors que je connais un opérateur $P$ qui rende l'équation (95) résoluble en $Q$, je peux utiliser l'algorithme 17 pour obtenir $Q$. En effet, j'ai remarqué que la valeur de $H$ dans l'équation (92) est inessentielle ; en faisant $H = P$ (où $\partial'$ remplace $\boldsymbol{\partial}$), il est possible, après réduction modulo $\mathrm{Ann}\, f$, d'appliquer l'algorithme 17, le vecteur $M$ dans le système (91) dépendant linéairement des $\eta_i$. Cependant, je ne cherche pas à résoudre uniformément en les paramètres $\eta_i$ ; je dois aussi chercher *pour quelles valeurs* des $\eta_i$ l'équation a une solution en $Q$. C'est pourquoi j'utilise une variante de l'algorithme 17 qui résout le système (91) simultanément en $\Phi$ et en $M$. Ceci correspond à un raffinement classique de l'algorithme d'Abramov à l'imitation d'une extension de l'algorithme de Gosper due à Zeilberger [115].

Ainsi, mon algorithme pour le cas défini procède comme l'algorithme rapide de Zeilberger : je fais un choix pour $L$, j'introduis des coefficients indéterminés $\eta_i$ et j'applique mon algorithme de sommation et intégration indéfinies ; si le système (91) est résoluble, j'en ai fini ; sinon j'incrémente $L$.

**2.2. Exemple : théorème d'addition de Neumann.** Dans cette section, j'illustre l'algorithme précédent par le théorème d'addition de Neumann

$$1 = J_0(z)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2$$

pour les fonctions de Bessel de première espèce $J_k(z)$. Ces dernières sont définies en tant que fonctions $\partial$-finies par les opérateurs suivants

$$z^2D_z^2 + zD_z + z^2 - k^2, \qquad zD_zS_k + (k+1)S_k - z, \qquad zD_z + zS_k - k,$$

dans l'algèbre de Ore $\mathbb{O} = \mathbb{Q}(k,z)[D_z;1,D_z][S_k;S_k,0]$, où $D_z$ désigne la dérivation par rapport à $z$. Ceci correspond au cadre de la section précédente pour $\partial = \delta = S_k - 1$, $\sigma = S_k$, $\partial' = \delta' = D_z$ et $\sigma' = 1$. Les trois opérateurs ci-dessus constituent une base de Gröbner de $\operatorname{Ann} J_k(z)$ (par rapport à un ordre du degré total $\preceq$ vérifiant $D_z \preceq S_k$). Cette base de Gröbner s'obtient à partir de l'équation différentielle pure et de l'équation de récurrence classiques satisfaites par $J_k(z)$. En conséquence de la propriété de clôture par produit, le carré $J_k(z)^2$ est une fonction $\partial$-finie et est décrit par la base de Gröbner

$$\left\{\begin{array}{r} zD_z^2 + (-2k+1)D_z - 2S_kz + 2z, \\ zD_zS_k + zD_z + (2k+2)S_k - 2k, \\ z^2S_k^2 - 4(k+1)^2S_k - 2z(k+1)D_z + 4k(k+1) - z^2, \end{array}\right.$$

qui est obtenu par l'algorithme 11 du chapitre III. Le module $\mathbb{O} \cdot J_k(z)^2$ doit contenir $J_k(z)^2$ et ses deux premières dérivées, ou de façon équivalente, $J_k(z)^2$, $J_k(z)J_k'(z)$ et $J_k'(z)^2$ qui sont linéairement indépendantes. Le système ci-dessus engendre donc l'idéal $\operatorname{Ann} J_k(z)^2$ dans $\mathbb{O}$. Le module $\mathbb{O}/\operatorname{Ann} J_k(z)^2$, qui est isomorphe à $\mathbb{O}\cdot J_k(z)^2$, est alors un espace vectoriel de dimension 3 et de base $(1, D_z, S_k)$. Exécutons l'algorithme 19 pour $\partial = D_z$ et $\partial' = S_k - 1$. On introduit pour cela un opérateur générique

$$Q = u_k + v_kS_k + w_kD_z,$$

analogue de l'opérateur (95). Posons $L = 1$ et introduisons les deux paramètres $\eta_0(z)$ et $\eta_1(z)$. Le système (91) se récrit alors en les équations

$$u_k = \frac{k}{z}\eta_1(z), \qquad v_k = 0, \qquad w_k = \frac{1}{2}\eta_1(z),$$

ainsi qu'en la contrainte $\eta_0 = 0$ ($\eta_1(z)$ est n'importe quelle fraction rationnelle en $z$). Fixons $\eta_1(z)$ à 1, si bien que

$$P = D_z \qquad \text{et} \qquad Q = -\left(\frac{k}{z} + \frac{D_z}{2}\right).$$

Avec ces valeurs pour $P$ et $Q$, nous obtenons après *creative telescoping*:

$$P \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)^2 \right) - \left[ Q \cdot J_k(z)^2 \right]_{k=0}^{k=\infty} = 0,$$

d'où l'on tire par linéarité que

$$D_z \cdot \left( 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)^2 - J_0(z)^2 - 1 \right) = 2 \left[ Q \cdot J_k(z)^2 \right]_{k=0}^{k=\infty} - D_z \cdot (J_0(z)^2 + 1)$$

est identiquement zéro, car

$$\lim_{k \to +\infty} J_k(z) = \lim_{k \to +\infty} J_k'(z) = 0.$$

Enfin,

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} J_k(z)^2 - J_0(z)^2 - 1$$

est une constante, dont on vérifie la nullité en l'évaluant en $z = 0$. Ceci achève la preuve du théorème de Neumann.

**2.3. Extension aux anti-dérivées multiples — Application aux sommations multiples itérées.** Dans les deux sections précédentes, j'ai décrit la sommation et l'intégration de fonctions *de deux variables* $f$ : en partant d'un système décrivant $f$ en termes de *deux* opérateurs $\partial$ et $\partial'$, j'ai développé un algorithme qui calcule un *unique* opérateur en $\partial'$ pour l'anti-dérivée définie par rapport à $\partial$. En fait, la dépendance de la somme ou intégrale en une unique variable est inessentielle et je peux réaliser des sommations et des intégrations de fonctions $\partial$-finies $f$ de plusieurs variables dont les anti-dérivées par rapport à $\partial$ sont encore des fonctions $\partial$-finies en plusieurs variables. Ceci provient du fait que l'exigence sur l'opérateur (95) que $P$ et $Q$ soient des polynômes en une seule indéterminée $\partial'$ (mis à part la dépendance de $Q$ en $\partial'$) peut être affaiblie. Pour un $n$-uplet d'opérateurs $\boldsymbol{\partial}$ et un *autre* opérateur $\partial$ dont on veut calculer le $\partial_\Omega^{-1}$, l'opérateur (95) devient alors

$$P(\boldsymbol{\partial}) \cdot f = \sum_{(\boldsymbol{\alpha},\beta)} \eta_{\boldsymbol{\alpha},\beta} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial'^{\beta} \cdot f = \partial' \cdot \left[ Q(\mathbf{u}, \boldsymbol{\partial}, \partial') \cdot f \right]. \tag{96}$$

Au lieu d'une boucle sur des polynômes en une seule indéterminée de degré $L$ croissant, comme à l'étape (2) de l'algorithme 19, je vais mettre en œuvre une boucle qui permette des polynômes $P$ sur de plus en plus de monômes en les indéterminées $\boldsymbol{\partial}$. Cette mise en œuvre sera détaillée plus loin. Par ailleurs, au lieu de stopper la boucle dans l'algorithme 19 après la première solution trouvée, je continue pour obtenir un système d'opérateurs $P - \partial Q$, jusqu'à ce que les $P$ engendrent un idéal $\partial$-fini. Comme dans le cas d'une seule variable, la terminaison peut se montrer dans le cas de fonctions $\partial$-finies holonomes.

Plus formellement, soit une algèbre de Ore

$$\mathbb{F}(\mathbf{u})[\boldsymbol{\partial};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}][\partial;\sigma,\delta]$$

en les opérateurs $\partial$ et $\boldsymbol{\partial} = (\partial_1,\dots,\partial_r)$, $\partial$ n'étant aucun des $\partial_i$. Je suppose encore que $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ admet un algorithme de décision pour résoudre les équations linéaires

$$L \cdot f = 0 \qquad \text{où} \qquad L \in \mathbb{F}(\mathbf{u})[\partial;\sigma,\delta]$$

en leurs solutions rationnelles dans $\mathbb{F}(\mathbf{u})$. De façon à prendre en considération des polynômes $P$ sur de plus en plus de monômes en plusieurs $\boldsymbol{\partial}$ au lieu du polynôme

$$\sum_{i=0}^{L} \eta_i \partial'^i$$

de l'étape (2) de l'algorithme 19, je propose plusieurs options :

1. Soit une suite $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui énumère *tous* les termes $\boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$ en $\boldsymbol{\partial}$. On considère alors le polynôme
$$P = \sum_{i=0}^{L} \eta_i t_i$$
où les coefficients $\eta_i$ sont indéterminés.
2. On peut considérer le polynôme
$$P = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq L} \eta_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\partial}^{\boldsymbol{\alpha}}$$
de degré total $L$ et les coefficients indéterminés $\eta_{\boldsymbol{\alpha}}$.
3. En utilisant un ordre de termes $\preceq$ sur les termes en $\boldsymbol{\partial}$ (voir la définition au chapitre II), une extension de l'algorithme FGLM [46] peut être utilisée pour déterminer les ensembles successifs de termes qui apparaissent dans les $P$. L'idée majeure est que lorsqu'un polynôme $P$ a été obtenu, tout multiple de son terme dominant $t$ n'a plus besoin d'être considéré dans les itérations ultérieures. De cette manière, j'obtiens un algorithme pour le calcul d'anti-dérivées définies qui, dans l'esprit, est très similaire aux algorithmes d'addition, de produit et de dérivation de fonctions $\partial$-finies qui sont décrits au chapitre III.

J'illustre maintenant cet algorithme en prouvant l'identité suivante qui met en jeu une double sommation :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+r}{r}\binom{n+s}{s}\binom{2n-(r+s)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^4. \tag{97}$$

Cette identité est le premier exemple mentionné dans [84, chapitre 3]. La partie difficile de la démonstration que je propose est le calcul d'un opérateur de récurrence annulant le membre gauche. Un tel opérateur a été donné par Kurt Wegschaider par une évaluation directe de la somme double [107]. Ici, je calcule le membre gauche en utilisant l'algorithme 19 d'une manière itérative :

1. En partant du système

$$\begin{cases} (n+1)(n+1-r)(n+1-s)(n+1-r-s)S_n \\ \quad +(n+s+1)(n+r+1)(2n+1-r-s)(2n+2-r-s), \\ (r+1)^2(2n-r-s)S_r+(n+r+1)(n-r)(n-r-s), \\ (s+1)^2(2n-r-s)S_s+(n+s+1)(n-s)(n-r-s), \end{cases} \tag{98}$$

qui définit le sommant de la somme double en tant que fonction $\partial$-finie par rapport à l'algèbre de Ore

$$\mathbb{Q}(n,r,s)[S_n;S_n,0][S_r;S_r,0][S_s;S_s,0],$$

je calcule d'abord la somme simple par rapport à $s$. À cette fin, j'applique l'extension précédente de l'algorithme 19 au cas de plusieurs variables, pour $\boldsymbol{\partial}=(S_n,S_r)$ et $\partial=S_s-1$, de façon à réaliser en premier la sommation intérieure (par rapport à $s$). Je sélectionne l'option (2) ; pour $L=2$, j'introduis donc les polynômes

$$\begin{cases} P=\eta_{0,0}+\eta_{1,0}S_n+\eta_{0,1}S_r+\eta_{2,0}S_n^2+\eta_{1,1}S_nS_r+\eta_{0,2}S_r^2, \\ Q=\phi(n,r,s) \end{cases}$$

sous forme indéterminée. Après réduction de

$$Z=P-(S_r-1)Q$$

par le système (98) et résolution du système réduit en des fractions rationnelles $\phi$ et $\eta_{i,j}$, j'obtiens deux opérateurs $P$, l'un en les termes $S_n^2$, $S_r^2$, $S_n$, $S_r$ et 1, l'autre en les termes $S_r^2$, $S_n$, $S_r$ et 1, tous deux avec de gros coefficients polynomiaux en $n$ et $r$. En résolvant l'équation (96) correspondante, il s'avère que le membre droit s'annule, si bien que les deux opérateurs $P$ annulent en fait la somme sur $s$.
2. En outre, ces deux $P$ engendrent un idéal $\partial$-fini par rapport à l'algèbre de Ore $\mathbb{Q}(n,r)[S_n;S_n,0][S_r;S_r,0]$. Je peux donc appliquer la première version de l'algorithme 19 de façon à réaliser la sommation sur $r$. Ceci renvoie l'opérateur

$$R=(n+2)^3S_n^2-2(2n+3)(3n^2+9n+7)S_n \\ -4(4n+5)(4n+3)(n+1)$$

qui annule la somme double.

À ce stade, j'ai *calculé* un opérateur $R$ qui annule le membre gauche de l'identité (97). Par une nouvelle application de l'algorithme 19 sur le membre droit, j'obtiens le *même* opérateur du second ordre. Puisque les deux membres de l'égalité (97) coïncident en $n=0$ et $n=1$ où ils prennent respectivement les valeurs 1 et 2, et puisque le coefficient dominant $(n+2)^3$ de $R$ ne s'annule pas pour $n\in\mathbb{N}$, j'obtiens par induction que l'égalité (97) est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble de ces calculs ne demande que 390 secondes de temps machine.

## 3. Certificats $\partial$-finis et identités compagnes

Dans le cadre de la sommation définie hypergéométrique, Herbert S. Wilf et Doron Zeilberger [109, 111] ont défini le *certificat* d'une identité

$$\sum_{i=0}^{L} \eta_i(n) U_{n+i} = 0 \qquad \text{où} \qquad U_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n,k},$$

par le $(L+1)$-uplet

$$(R_{n,k}, \eta_0(n), \dots, \eta_L(n)),$$

où

$$R_{n,k} = \frac{v_{n,k}}{u_{n,k}}$$

pour des termes hypergéométriques $u$ et $v$ dans l'égalité (94). Dans le cas d'une algèbre de Ore

$$\mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{u})[\partial; \sigma, \delta][\partial'; \sigma', \delta'],$$

je définis le *certificat* d'une identité

$$P \cdot F = \sum_{i=0}^{L} \eta_i \partial^i \cdot F = 0 \qquad \text{où} \qquad F = \partial_\Omega^{-1} \cdot f, \tag{99}$$

par le $(L+1)$-uplet

$$\left((\phi_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in I}, \eta_0, \dots, \eta_L\right),$$

où les $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont définis de façon à satisfaire l'égalité (92) pour $H = P$ (où $\partial'$ remplace $\boldsymbol{\partial}$). Comme dans le cas hypergéométrique, la simple donnée de ce certificat permet la *vérification* de l'identité (99). Une extension au cas de plusieurs variables est encore disponible, en suivant l'esprit de §2.3.

Une généralisation des *identités compagnes* du cas hypergéométrique de Wilf et Zeilberger [109] existe aussi dans le cadre généralisé des fonctions $\partial$-finies. À partir de l'égalité (95), écrivons $P = R + \partial' S(\partial')$ pour un $R$ qui ne fait pas intervenir $\partial'$ et appliquons ${\partial'}_\Omega^{-1}$ pour obtenir l'identité

$$-\partial {\partial'}_\Omega^{-1} Q \cdot f + {\partial'}_\Omega^{-1} R \cdot f + \partial_\Omega^{-1} \partial' S \cdot f = 0$$

que je définis comme étant l'*identité compagne* de l'identité (95). Bien souvent dans les applications, soit $R$, soit ${\partial'}_\Omega^{-1}\partial'$ est nul, ce qui simplifie l'identité. (Le second cas intervient par exemple lors de sommations à bornes naturelles.)

Calculons à titre d'exemple une identité compagne obtenue à partir de la forme close d'une fonction génératrice pour les fonctions de Bessel $J_n(z)$. L'identité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)u^n = e^{\frac{uz}{2}\left(1-\frac{1}{u^2}\right)} \tag{100}$$

peut être prouvée en utilisant les algorithmes des sections précédentes. Plus précisément, en prouvant l'identité obtenue après division de chaque membre de (100) par son second membre, on obtient deux opérateurs

$$P = 2uD_z \qquad \text{et} \qquad Q = 2uD_z + S_n + u^2$$

qui vérifient (95) pour $\partial = S_n - 1$ et $\partial' = D_z$ dans l'algèbre de Ore

$$\mathbb{K}(u,z,n)[D_z;1,D_z][S_n;S_n,0].$$

Un certificat pour l'identité (100) pourrait être calculé à partir de la paire de polynôme $(P,Q)$. En écrivant

$$f_n = J_n(z)u^n e^{-\frac{uz}{2}\left(1-\frac{1}{u^2}\right)},$$

on tire

$$P\cdot f + (S_n-1)Q\cdot f = 0.$$

La *sommation* sur $\mathbb{Z}$ de cette égalité produit (100) ; l'*intégration* entre 0 et $+\infty$ produit

$$[2uf]_0^{+\infty} + (S_n-1)\cdot\int_0^{+\infty}(Q\cdot f)\,dz = 0.$$

Le membre de gauche de la somme est nul pour $n\geq 1$, si bien que l'intégrale est constante pour $n \geq 1$. Par évaluation en $n = 1$ et après quelques récritures, l'identité compagne prend la forme

$$\int_0^{\infty} u^n e^{-\frac{uz}{2}\left(1-\frac{1}{u^2}\right)}\left[J_n(z)+uJ_{n-1}(z)\right]\,dz = 2u \qquad (n\geq 1).$$

## 4. Solutions particulières

La méthode classique de recherche de solutions particulières d'une équation différentielle linéaire ordinaire inhomogène par variation de la constante renvoie une sortie mettant en jeu une intégrale indéfinie et une division. Par opposition, je présente dans cette section une méthode qui recherche des expressions linéaires explicites dans la classe des fonctions $\partial$-finies.

La valeur du facteur gauche $\partial$ dans les équations (90) et (92) ne joue qu'un rôle mineur dans l'algorithme 17. Elle peut en fait être remplacée par un $\Xi$ quelconque de $\mathbb{F}[\partial;\sigma,\delta]$. Comme application, ceci fournit un algorithme de calcul pour des solutions particulières $y_0$ d'une équation linéaire inhomogène

$$\Xi\cdot y = H\cdot f$$

pour un terme inhomogène $f$ $\partial$-fini et un $H$ de $\mathbb{F}[\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}]$ lorsqu'une solution particulière existe dans $\mathbb{O} \cdot f$ : résoudre

$$\Xi Q = H \mod \operatorname{Ann} f$$

par une extension évidente de l'algorithme 17 et faire $y_0 = Q \cdot f$. Cette solution particulière a bien souvent une expression plus simple et agréable à manipuler que celle calculée par la méthode générale de variation de la constante.

Exemple. Soit $\mathbb{O}$ l'algèbre de Ore $\mathbb{Q}(q, x)[D_x; 1, D_x]$ et considérons l'équation

$$\left(D_x^2 + \frac{1}{x} D_x - q^2\right) \cdot F(x) = (1 - x^2) J_0(qx) - 2q^2 x J_1(qx),$$

où $J_\nu$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre $\nu$ [41]. La solution de l'équation homogène associée est immédiate. Le problème est de produire une solution particulière. J'ai été amené à considérer ce type de problème suite à la demande d'un mécanicien [94] concernant une équation de transfert de masse dans un tube : ce type d'équation de Bessel modélise le comportement d'un traceur (colorant) injecté dans un écoulement d'un fluide, le traceur se dispersant par convection et par diffusion moléculaire.

Ceci correspond bien au cadre général quand

$$f(x) = J_0(qx), \quad P = (1 - x^2) - 2qxD_x \quad \text{et} \quad \Xi = D_x^2 + x^{-1} D_x - q^2.$$

Cette fois encore, $\mathbb{O} \cdot f$ a dimension 2. En introduisant

$$Q = \alpha(x) + \beta(x) D_x$$

et en réduisant

$$Z = \Xi Q - P,$$

on obtient un système différentiel linéaire qui, une fois découplé, se résout par un algorithme d'Abramov [2, 3, 6]. La solution est

$$\alpha(x) = \frac{2q - 1 + x^2}{2q^4} \qquad \text{et} \qquad \beta(x) = \frac{(1 - q^3)x}{q^2}.$$

En désignant par $I_\nu$ et $K_\nu$ les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce et d'ordre $\nu$ [41], la solution générale de l'équation différentielle ci-dessus est donc

$$\frac{2q - 1 + x^2}{2q^4} J_0(qx) + \frac{(q^3 - 1)x}{q^3} J_1(qx) + C_1 I_0(qx) + C_2 K_0(qx),$$

puisque les deux fonctions $I_0(qx)$ et $K_0(qx)$ sont annulées par $\Xi$.

De manière plus générale, un problème résolu par l'algorithme 17 est celui consistant à déterminer si la somme d'un idéal à gauche et d'un idéal principal à droite $\Xi\mathbb{O}$ pour $\Xi \in \mathbb{F}[\partial; \sigma, \delta]$ contient un élément donné d'une algèbre de Ore. Ce problème de résolution d'une *équation mixte* est proche de questions reliées à la factorisation d'opérateurs.

### 5. Un autre exemple : l'identité curieuse de Calkin

Neil J. Calkin [32] démontra l'identité

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\right)^3 = \frac{n}{2}8^n + 8^n - \frac{3n}{4}2^n\binom{2n}{n}$$

par des manipulations d'identités sommatoires. Cette identité permet de retrouver la moyenne du maximum de trois variables aléatoires indépendantes de type Bernoulli. La détermination, si elle existe, d'une forme close pour un tel membre gauche est aujourd'hui une tâche algorithmisée et réalisable automatiquement par un ordinateur. J'esquisse maintenant une preuve automatique obtenue par l'algorithme décrit plus haut. À ma connaissance, cette preuve est la première preuve automatique de l'identité de Calkin.

Rappelons de l'introduction de ce chapitre que les coefficients binomiaux sont annulés par

$$(n+1-j)S_n - (n+1), \qquad (j+1)S_j - (n-j).$$

Il se trouve que ce système est déjà une base de Gröbner. Par le calcul de la somme indéfinie intérieure par l'algorithme du chapitre précédent, on obtient la base de Gröbner

$$(n+1-k)S_n + kS_k + k - 2(n+1), \qquad (k+1)S_k^2 - (n+1)S_k + n - k$$

de l'idéal annulateur de $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}$. Puis, le calcul du cube de cette somme par l'algorithme 11 du chapitre III fournit une base de Gröbner de la forme suivante :

$$S_nS_k + \langle 76 \text{ t.o.i.}\rangle, \qquad S_n^2 + \langle 249 \text{ t.o.i.}\rangle, \qquad S_k^3 + \langle 239 \text{ t.o.i.}\rangle \tag{101}$$

où « $p$ t.o.i. » signifie « $p$ termes d'ordre inférieur ». Introduisons des fractions rationnelles indéterminées $\phi_i(k)$, $\psi(k)$ et $\eta_i$, chacune desquelles dépend de $n$, et fixons

$$P = \eta_0 + \eta_1 S_n + \eta_2 S_n^2, \quad \text{et} \quad Q = \phi_0(k) + \phi_1(k)S_k + \phi_2(k)S_k^2 + \psi(k)S_n.$$

En réduisant $(S_k - 1)Q - P$ par la base de Gröbner (101) et en extrayant les coefficients de $1$, $S_n$, $S_k$ et de $S_k^2$, on obtient un système linéaire constitué de quatre équations de récurrence du premier ordre en les $\phi_i$ et en $\psi$. Le découplage de ce système par une quelconque des méthodes mentionnées fournit une récurrence inhomogène du quatrième ordre en $\psi(k)$ et dans laquelle les $\eta_i$ n'apparaissent que linéairement et dans la partie inhomogène. Tous les coefficients de cette équation sont de (gros) polynômes de degré 19 ou 20 en $k$ et à coefficients des polynômes en $n$. On résout ensuite cette équation en recherchant la fraction rationnelle $\psi$ solution *en même temps* que des valeurs pour les $\eta_i$ qui permettent qu'une telle solution $\psi$ existe. Une solution est donnée par

$$\begin{cases} \eta_0 = -4(2n+1), \quad \eta_1 = -(7n+12), \quad \eta_2 = n+1, \quad \psi(k) = \frac{N(k)}{D(k)}, \\ D(k) = (k-2n-1)[k^2 + (1-2n)k + 2(n^2+n+1)](k-n-1)^3, \end{cases}$$

où $N(k)$ est un polynôme de degré 7 en $k$. Les valeurs solutions pour les $\phi_i(k)$ sont obtenues en reportant dans les autres équations et sont toutes des fractions rationnelles ayant $D(k)$ pour dénominateur. À ce stade, la sommation sur $k$ balayant l'intervalle entier $\{0, \dots, r\}$ donne

$$[(Q(n,k,S_n,S_k)\cdot h)(n,k)]_{k=0}^{k=r+1} + \sum_{k=0}^{r}[P(n,S_n)\cdot h](n,k) = 0$$

où $h_{n,k} = \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\right)^3$, en supposant que $Q \cdot h$ puisse être évalué sur

$$\{0, \dots, r\}.$$

De fait, l'équation précédente n'est valide que pour $r \leq n-3$, à cause de la singularité en $k-n-1$ au dénominateur $D$ de $Q$. On fait donc $r = n-3$ pour obtenir l'équation de récurrence inhomogène

$$[P(n,S_n)\cdot H](n) = \sum_{i=0}^{2}\eta_i(n)\sum_{k=n-2}^{n+i} h_{n+i,k} - [(Q(n,k,S_n,S_k)\cdot h)(n,k)]_{k=0}^{k=n-2}$$

où $H_n$ est la somme

$$\sum_{k=0}^{n} h_{n,k}$$

pour laquelle on recherche une forme close. Le terme inhomogène s'évalue facilement car $h_{n,n+i} = (2^n)^3$ pour $i \geq 0$ et

$$h_{n,n-i} = \left(2^n - 1 - \cdots - \binom{n}{n-i}\right)^3$$

pour les petites valeurs de $i \geq 0$. On obtient l'équation suivante vérifiée par la somme :

$$(n+1)H_{n+2} - (7n+12)H_{n+1} - 4(2n+1)H_n + 2(10-9n)8^n = 0.$$

Pour finir, la résolution de cette récurrence par un algorithme dû à Marko Petkovšek [83] calcule la forme close annoncée comme combinaison linéaire de termes hypergéométriques.

## 6. Remarques et extensions

L'étape cruciale de l'algorithme 19 pour la sommation et l'intégration définies est la résolution du système linéaire (91), ce que je réalise en découplant tout d'abord le système par un algorithme de [7], avant de recourir à des algorithmes spécialisés [3, 4] pour la résolution d'équations en une *unique* fonction inconnue. D'autres algorithmes de découplage sont disponibles [17, 26], mais je veux ici insister sur l'intérêt pour un algorithme qui travaille directement au niveau de *systèmes* d'opérateurs. En effet, d'après mes premières expériences, l'étape de découplage est du point de vue calculatoire le goulot d'étranglement de l'algorithme 19, en relation avec la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{O}\cdot f$ ; en évitant ce découplage, j'espère

ALGORITHME : $\{(P_i, Q_i)\} = \text{TakayamaZeilbergerAlgo}(G, \mathbb{O}, \mathbf{x}_0, \partial_0)$.

INPUT : $\begin{cases} \mathbb{O} = \mathbb{K}(\mathbf{x})[\mathbf{x}_0][\boldsymbol{\partial}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}][\partial_0; \sigma_0, \delta_0], \\ \text{un système générateur } G \text{ de l'annulateur de } f. \end{cases}$

OUTPUT : une famille de paires $(P_i, Q_i)$ telles que (68).

1. calculer $G_0 = \{Q_i\} = \text{TakayamaAlgo}(G, \mathbb{O}, \mathbf{x}_0, \partial_0)$ ;
2. calculer une base de Gröbner de $G$ ;
3. en déduire une base $B$ du quotient ;
4. pour chaque $i$, calculer
$$Q_i = \text{VarIndefinite}(P_i, B, \mathbb{O}) \;;$$
5. renvoyer la famille $\{(P_i, Q_i)\}$ (pour les $Q_i \neq \perp$).

ALGORITHME 20. Algorithme mixte Takayama-Zeilberger

pouvoir effectivement réaliser des calculs dans des espaces vectoriels de dimension plus élevée.

J'ai présenté une extension de l'algorithme 19 pour le calcul d'un système annulateur d'une somme ou d'une intégrale multiple dans le cas où on la sait $\partial$-finie. J'ai noté qu'il y a quelque liberté dans la façon d'exécuter la boucle dans l'étape (2) de cet algorithme. En particulier, la version qui se fonde sur l'algorithme FGLM [46] semble la plus intéressante dans la pratique, car elle évite l'introduction — et la réduction — de termes inutiles. En reprenant et poursuivant des travaux de Pierre Verbaeten, Kurt Wegschaider a récemment obtenu un algorithme astucieux pour la sommation hypergéométrique multiple [107]. La méthode réduit considérablement le nombre de termes à considérer et le nombre de coefficients indéterminés à introduire dans les récurrences pour obtenir des polynômes annulateurs pour la somme. Essayer d'incorporer cette approche dans mon algorithme pour le cas $\partial$-fini est une direction de recherche qui semble prometteuse.

Dans le cas de sommation ou intégration à bornes naturelles (voir la définition en §1), par exemple dans le cas d'une suite $(u_{n,k})$ de support fini pour chaque $n$, l'opérateur $Q$ dans (95) n'a pas besoin d'être calculé pour réaliser le *creative telescoping*, puisque la somme du membre droit de (95) est trivialement nulle.

Au chapitre V, §3, j'ai donné une extension de l'algorithme de Nobuki Takayama qui tient avantageusement compte de cette situation pour une efficacité accrue. Quand il est nécessaire de calculer les deux membres de l'équation (95), cet algorithme 16 de $\partial_\Omega^{-1}$ à bornes naturelles utilisé en conjonction de l'algorithme 17 peut se substituer à l'« algorithme rapide » que j'ai présenté plus haut : après avoir calculé $P$ par l'algorithme 16, l'application de l'algorithme 17 pour $H = P$ dans (92) rend le calcul de $Q$ possible à partir de $P$. Cependant, remarquons que l'algorithme 19 est plus robuste que cette autre méthode dans la mesure où il ne nécessite pas plus qu'une description $\partial$-finie en entrée pour trouver solution. L'algorithme à bornes naturelles, lui, ne peut aboutir qu'avec un idéal en entrée correspondant à un module holonome. Cet algorithme est résumé en algorithme 20.

J'ai déjà mentionné qu'un algorithme analogue à l'algorithme 17 a été donné par Sergei A. Abramov et Mark van Hoeij [1] : cet algorithme est rendu très élégant par l'utilisation d'une notion d'*opérateurs adjoints* et d'*anneaux de Ore adjoints*, mais se restreint au cas de fonctions et suites d'une seule variable. De manière intuitive, cet algorithme de décision calcule toutes les anti-dérivées d'une fonction $\partial$-finie $f$ d'une seule variable donnée par un (unique) opérateur $L \in \mathbb{F}[\partial;\sigma,\delta]$. Pour ce faire, il calcule une équation dérivée de $L$, l'équation adjointe, et en cherche une *solution rationnelle* $r$. Puis en cas de succès, il renvoie une anti-dérivée $Q \cdot f$ en obtenant $Q$ par une division euclidienne d'opérateurs, c'est-à-dire en calculant de proche en proche les fractions rationnelles en coefficients de $Q$. Dans le cas de plusieurs variables, il est possible d'utiliser l'algorithme de [1] après avoir découplé les équations définissant la fonction $\partial$-finie. En pratique, ceci a cependant le défaut de faire exploser la taille des coefficients. En appliquant la méthode de [1] dans le cas de plusieurs variables, je pourrais ramener une intégration à la résolution d'une unique équation aux dérivées partielles à plusieurs fonctions rationnelles inconnues. Malheureusement, il ne semble pas exister à ce jour d'algorithme pour une telle résolution.

## CHAPITRE VII

# Exemple de session Maple

L'objet de ce chapitre est de montrer un exemple typique d'utilisation des algorithmes de cette thèse sur une étude de cas : le calcul de l'intégrale

$$\int_0^\infty xJ_1(ax)I_1(ax)Y_0(x)K_0(x)\,dx.$$

En utilisant mes programmes, j'ai pu montrer que cette expression se réduit à

$$-\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}.$$

Mais au préalable, je décris brièvement mes *packages*. `Mgfun` est une collection de *packages* pour la manipulation de fonctions génératrices de plusieurs variables et la sommation et l'intégration symbolique. À ce jour, `Mgfun` comprend les *packages* suivants :

1. Le *package* `Ore_algebra`, pour manipuler des algèbres d'opérateurs linéaires et des polynômes tordus. Voici la liste des fonctions disponibles :

   `with(Ore_algebra);`

   $$[\mathit{Ore\_to\_DESol}, \mathit{Ore\_to\_RESol}, \mathit{Ore\_to\_diff}, \mathit{Ore\_to\_shift}, \\ \mathit{annihilators}, \mathit{applyopr}, \mathit{diff\_algebra}, \mathit{poly\_algebra}, \\ \mathit{qshift\_algebra}, \mathit{rand\_skew\_poly}, \mathit{shift\_algebra}, \mathit{skew\_algebra}, \\ \mathit{skew\_elim}, \mathit{skew\_gcdex}, \mathit{skew\_pdiv}, \mathit{skew\_power}, \\ \mathit{skew\_prem}, \mathit{skew\_product}]$$

2. Le *package* `Groebner`, qui implante des méthodes de bases de Gröbner dans des algèbres de polynômes commutatifs ou tordus :

   `with(Groebner);`

   $$[\mathit{fglm}, \mathit{gbasis}, \mathit{gsolve}, \mathit{hilbertdim}, \mathit{hilbertpoly}, \\ \mathit{hilbertseries}, \mathit{inter\_reduce}, \mathit{is\_finite}, \mathit{is\_solvable}, \\ \mathit{leadcoeff}, \mathit{leadmon}, \mathit{leadterm}, \mathit{normalf}, \mathit{pretend\_gbasis}, \\ \mathit{reduce}, \mathit{spoly}, \mathit{termorder}, \mathit{testorder}, \mathit{univpoly}]$$

3. Le *package* `Holonomy`, pour les calculs avec des fonctions holonomes et $\partial$-finies :

   `with(Holonomy);`

$$[algeq\_to\_dfinite, dfinite\_add, dfinite\_mul, holon\_closure,\\ holon\_defint, holon\_defqsum, holon\_defsum, holon\_diagonal,\\ hypergeom\_to\_dfinite, takayama]$$

4. Le *package* `Mgfun`, qui fournit une interface orientée utilisateur, similaire à celle du *package* `gfun` écrit principalement par Bruno Salvy et Paul Zimmermann et qui traite de l'holonomie en une variable [92] :

```
with(Mgfun);
```

$$[diag\_of\_sys, int\_of\_sys, pol\_to\_sys, sum\_of\_sys,\\ sys * sys, sys + sys]$$

## 1. Une intégrale d'un produit de quatre fonctions de Bessel

Dans [54], Glasser et Montaldi calculent une forme close pour l'intégrale d'un produit de deux fonctions de Bessel, et suggèrent que leur traitement doit pouvoir s'étendre à l'intégrale

$$\int_0^\infty xJ_1(ax)I_1(ax)Y_0(x)K_0(x)\,dx = -\frac{\ln(1-a^4)}{2\pi a^2}$$

qui a l'intérêt de présenter chacun des quatre types de fonctions de Bessel. Cette intégrale est l'un des nombreux exemples d'intégrales contenant quatre fonctions de Bessel ou plus et admettant une forme close (voir par exemple [86, §2.16.47]).

La session qui suit traite l'intégrale ci-dessus et en *calcule* une forme close en utilisant mon *package* `Mgfun` en liaison étroite avec le *package* `gfun`.

```
with(Mgfun);
```

$$[diag\_of\_sys, int\_of\_sys, pol\_to\_sys, sum\_of\_sys, sys * sys, sys + sys]$$

```
with(gfun);
```

$$[Laplace, algebraicsubs, algeqtodiffeq, algeqtoseries,\\ algfuntoalgeq, borel, cauchyproduct, diffeq * diffeq,\\ diffeq + diffeq, diffeqtohomdiffeq, diffeqtorec, guesseqn,\\ guessgf, hadamardproduct, holexprtodiffeq, invborel,\\ listtoalgeq, listtodiffeq, listtohypergeom, listtolist,\\ listtoratpoly, listtorec, listtoseries, listtoseries/Laplace,\\ listtoseries/egf, listtoseries/lgdegf, listtoseries/lgdogf,\\ listtoseries/ogf, listtoseries/revegf, listtoseries/revogf,\\ maxdegcoeff, maxdegeqn, maxordereqn, mindegcoeff,\\ mindegeqn, minordereqn, optionsgf, poltodiffeq, poltorec,\\ ratpolytocoeff, rec * rec, rec + rec, rectodiffeq, rectohomrec,\\ rectoproc, seriestoalgeq, seriestodiffeq, seriestohypergeom,\\ seriestolist, seriestoratpoly, seriestorec, seriestoseries]$$

Plus précisément, le *package* `gfun` sera utilisé pour préparer un système d'équations aux dérivées partielles sur lequel on appliquera les fonctions de `Mgfun`, puis pour résoudre l'équation différentielle ordinaire produite par le *package*.

## 2. Recherche d'un système d'EDP vérifiées par l'intégrande

Le *package* `gfun` permet de calculer un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par chaque facteur de l'intégrande. Ensuite, on utilise le *package* `Mgfun` pour en déduire un système d'EDP vérifiées par leur produit.

**2.1. Système d'EDP vérifiées par $x$.** La fonction identité $x$ vérifie trivialement le système différentiel qui suit :

$$sys1 := \{x\frac{\partial}{\partial x}h(x,a) - 1, \frac{\partial}{\partial a}h(x,a)\}$$

où chaque entrée *expr* de l'ensemble représente l'équation $expr = 0$.

**2.2. Système d'EDP vérifiées par $J_1(ax)$.** Calculons un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par

$$f := \mathrm{BesselJ}(1, ax)$$

en calculant d'abord une équation différentielle ordinaire par rapport à la variable $x$ en utilisant `gfun[holexprtodiffeq]`, puis en tenant compte des symétries de $f$ pour en déduire un système complet.

```
holexprtodiffeq(f,y(x));
```

$$\{(-1 + a^2x^2)y(x) + x\frac{\partial}{\partial x}y(x) + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{1}{2}a\}$$

```
deq:=op(remove(type,",equation)):
subs(y(x)=h(x,a),deq);
```

$$(-1 + a^2x^2)h(x,a) + x\frac{\partial}{\partial x}h(x,a) + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,a)$$

```
subs({x=a,a=x,y(x)=h(x,a)},deq);
```

$$(-1 + a^2x^2)h(x,a) + a\frac{\partial}{\partial a}h(x,a) + a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}h(x,a)$$

```
x*diff(h(x,a),x)-a*diff(h(x,a),a);
```

$$x\frac{\partial}{\partial x}h(x,a) - a\frac{\partial}{\partial a}h(x,a)$$

```
sys2:={""",""","};
```

**2.3. Système d'EDP vérifiées par $I_1(ax)$.** Calculons un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par

$$f := \mathrm{BesselI}(1, ax)$$

de la même manière que dans la section précédente.

```
holexprtodiffeq(f,y(x));
```

$$\{(-1 - a^2x^2)y(x) + x\frac{\partial}{\partial x}y(x) + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x), y(0) = 0, D(y)(0) = \frac{1}{2}a\}$$

```
deq:=op(remove(type,",equation)):
subs(y(x)=h(x,a),deq);
```

$$(-1 - a^2x^2)h(x,a) + x\frac{\partial}{\partial x}h(x,a) + x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,a)$$

```
subs({x=a,a=x,y(x)=h(x,a)},deq);
```

$$(-1 - a^2x^2)h(x,a) + a\frac{\partial}{\partial a}h(x,a) + a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}h(x,a)$$

```
x*diff(h(x,a),x)-a*diff(h(x,a),a);
```

$$x\frac{\partial}{\partial x}h(x,a) - a\frac{\partial}{\partial a}h(x,a)$$

```
sys3:={""",""","}:
```

**2.4. Système d'EDP vérifiées par $Y_0(x)$.** Calculons un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par

$$f := \mathrm{BesselY}(0, x)$$

en calculant d'abord une équation différentielle ordinaire par rapport à la variable $x$ par l'utilisation de `gfun[holexprtodiffeq]`, puis en traduisant le fait que la fonction $f$ ne dépend pas de $a$.

```
holexprtodiffeq(f,y(x));
```

$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x) + \frac{\partial}{\partial x}y(x) + xy(x)$$

```
sys4:={subs(y(x)=h(x,a),"),diff(h(x,a),a)};
```

$$sys4 := \{x\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,a) + \frac{\partial}{\partial x}h(x,a) + xh(x,a), \frac{\partial}{\partial a}h(x,a)\}$$

**2.5. Système d'EDP vérifiées par $K_0(x)$.** Calculons un système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par

$$f := \mathrm{BesselK}(0, x)$$

de la même manière que dans la section précédente.

```
holexprtodiffeq(f,y(x));
```

$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x) - xy(x) + \frac{\partial}{\partial x}y(x)$$

```
sys5:={subs(y(x)=h(x,a),"),diff(h(x,a),a)};
```

$$sys5 := \{\frac{\partial}{\partial a}h(x,a), x\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,a) - xh(x,a) + \frac{\partial}{\partial x}h(x,a)\}$$

**2.6. Système d'EDP vérifiées par le produit.** Le calcul d'un système pour le produit n'est plus maintenant qu'un simple appel à la commande `Mgfun[‘sys*sys‘]`.

```
sys:=‘sys*sys‘(sys1,sys2,sys3,sys4,sys5);
```

$$\begin{aligned} sys :=& \\ &- 4a^3x^4h(x,a) - 4a^2(\frac{\partial^3}{\partial a^3}h(x,a)) - 3(\frac{\partial}{\partial a}h(x,a)) \\ &+ 3a(\frac{\partial^2}{\partial a^2}h(x,a)) - a^3(\frac{\partial^4}{\partial a^4}h(x,a)), \\ &(-4a^4x^4 + 4x^4 + 3)h(x,a) + 6a^2x^2(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial a^2}h(x,a)) \\ &+ 8a^3(\frac{\partial^3}{\partial a^3}h(x,a)) - 24xa^2(\frac{\partial^3}{\partial x\partial a^2}h(x,a)) - 26ax(\frac{\partial^2}{\partial x\partial a}h(x,a)) \\ &+ 12ax^2(\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial a}h(x,a)) - 3x(\frac{\partial}{\partial x}h(x,a)) + 26a(\frac{\partial}{\partial a}h(x,a)) \\ &- 4ax^3(\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial a}h(x,a)) + 40a^2(\frac{\partial^2}{\partial a^2}h(x,a)) + x^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,a)) \\ &+ x^4(\frac{\partial^4}{\partial x^4}h(x,a)) - 4a^3x(\frac{\partial^4}{\partial x\partial a^3}h(x,a))\} \end{aligned}$$

Remarquons que la routine `gfun[‘diffeq*diffeq‘]` réalise une tâche similaire, mais est restreinte au cas de fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire à des fonctions décrites par une unique EDO. Aussi ne peut-elle calculer que l'EDO qui ne fait pas intervenir de dérivée croisée dans le système ci-dessus, ainsi qu'une équation analogue en des dérivées par rapports à $x$. Il s'avère qu'un tel calcul simplifié induirait une perte d'information interdisant ensuite le calcul de l'intégrale. Un autre point est que la procédure `Mgfun[‘sys*sys‘]` saurait aussi traiter des systèmes mixtes d'équations différentielles et aux différences.

## 3. Intégration

Une fois encore, l'intégration est réalisée par un simple appel à la commande `Mgfun[int_of_sys]` :

```
ode:=op(int_of_sys(sys,x=-infinity..infinity,takayama_algo));
```

$$\begin{aligned} ode :=& 32a^3h(a) + (16a^6 - 4a^2)(\frac{\partial^3}{\partial a^3}h(a)) + (103a^4 - 3)(\frac{\partial}{\partial a}h(a)) \\ &+ (73a^5 + 3a)(\frac{\partial^2}{\partial a^2}h(a)) + (a^7 - a^3)(\frac{\partial^4}{\partial a^4}h(a)) \end{aligned}$$

Cependant, la justification que l'algorithme d'intégration à bornes naturelles sélectionné par l'option `takayama_algo` s'applique convenablement dans le cas de l'intégrale en question est plutôt technique et dépasse le cadre de cette présentation. Elle consiste à vérifier *a posteriori* que l'algorithme n'a fait que des calculs correspondant à des équations homogènes alors que le problème n'est pas *a priori* à bornes naturelles.

## 4. Résolution de l'EDO finale

Sans l'aide de l'utilisateur, la commande `dsolve` de MAPLE ne parvient pas à résoudre l'équation différentielle d'ordre 4 calculée plus haut. On utilise donc le *package* `gfun` pour résoudre en une solution $h(a)$ qui corresponde à l'intégrale à calculer. De par sa représentation intégrale, cette fonction est analytique en 0, et admet donc un développement de Taylor à l'origine. On s'apprête à calculer une forme close pour $h(a)$ en sommant ce développement. À cette fin, déterminons une équation de récurrence sur les coefficients de la série de Taylor en utilisant `gfun[diffeqtorec]` :

```
ore:=diffeqtorec(ode,h(a),u(n));
```

$$ore := \{(n+2)u(n) + (-n-6)u(n+4), u(1) = 0, u(3) = 0\}$$

MAPLE résout aisément cette récurrence :

```
rsol:=rsolve(ore,u(n));
```

$$\begin{aligned} rsol := & 2\frac{(\frac{1}{4}u(0) - \frac{1}{2}\mathrm{u}(2))\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1)^n\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+3)} \\ & + 2\frac{(\frac{1}{2}u(2) + \frac{1}{4}\mathrm{u}(0))\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+3)} \\ & + 2\frac{(\frac{1}{2}u(2) + \frac{1}{4}u(0))(-1)^n\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+3)} \\ & + 2\frac{(\frac{1}{4}u(0) - \frac{1}{2}u(2))(-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1))^n\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+3)} \end{aligned}$$

Après avoir réarrangé les termes de la somme, il est évident que $u(n)$ est non nul pour les $n$ pairs uniquement.

```
collect(map(normal,rsol,expanded),u,factor);
```

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{(1+(-1)^n)(1+\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1)^n)u(0)}{n+2} \\ & -\frac{(1+(-1)^n)(-1+\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1)^n)u(2)}{n+2} \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables correspondant, $n = 2p$,

```
subs({n=2*p,(-1)^n=1,RootOf(_Z^2+1)^n=(-1)^p},");
```

$$\frac{(1+(-1)^p)u(0)}{2p+2} - 2\frac{(-1+(-1)^p)u(2)}{2p+2}$$

si bien que l'on parvient à guider les calculs de façon à sommer la série géométrique :

```
sum("*a^(2*p),p=0..infinity);
```

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^p)u(0)}{2p+2} - 2\frac{(-1+(-1)^p)u(2)}{2p+2}a^{2p}$$

```
h:=collect(value(expand(")),u);
```

$$h := (-\frac{1}{2}\frac{\ln(-a^2+1)}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(a^2+1)}{a^2})u(0)$$
$$+ (-\frac{\ln(-a^2+1)}{a^2} - \frac{\ln(a^2+1)}{a^2})u(2)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer $u_0$ et $u_2$. On calcule d'abord $u_0$ et obtient 0 par interversion de limites. Soit

$$f := x\mathrm{BesselJ}(1, ax)\mathrm{BesselI}(1, ax)\mathrm{BesselY}(0, x)\mathrm{BesselK}(0, x)$$

l'intégrande. On a :

```
int(limit(f,a=0),x=0..infinity);
```

$$0$$

De la même manière, chaque coefficient de la série de Taylor de l'intégrale s'obtient par interversion de limites. En particulier $\kappa = u_2$, mais MAPLE n'est pas capable de réaliser l'intégration correspondante :

```
kappa=int(coeff(series(normal(diff(f,a,a)),a=0),a,0)/2,
    x=0..infinity);
```

$$\kappa = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}x^3\mathrm{BesselY}(0, x)\mathrm{BesselK}(0, x)\, dx$$

(Cette intégrale donnant $\kappa$ ne peut toujours pas être calculée par un appel à `int`, ni dans la *release 4* de MAPLE, ni dans la *release 5*.)

On obtient finalement l'expression suivante pour $h(a)$ :

```
-combine(normal(-subs({u(0)=0,u(2)=kappa},h)),ln,symbolic);
```

$$-\frac{\ln((-a^2+1)(a^2+1))\kappa}{a^2}$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $\kappa = \frac{1}{2\pi}$. Ceci ne sera pas fait ici, puisque le calcul de cette dernière intégrale qui est une constante sort de la théorie de l'holonomie et du cadre de cette étude. Sur cet exemple, on a réduit le problème de l'évaluation d'une intégrale paramétrée à l'évaluation d'une intégrale non paramétrée. Dans les cas où aucune forme close ne serait disponible pour $\kappa$, il serait au moins possible d'évaluer numériquement l'unique constante $\kappa$ et de renvoyer un résultat en termes de cette valeur numérique et de l'expression logarithmique ci-dessus.

# Partie C

# Conclusions

CHAPITRE VIII

# Directions de recherches futures

Ce chapitre trace brièvement quelques directions de recherche seulement partiellement explorées.

De manière simplificatrice, on peut dire que cette thèse a proposé un calcul d'intégrales et de sommes qui peut s'envisager en deux temps :

1. La préparation de l'intégrande ou du sommant à intégrer ou sommer a lieu dans la classe des fonctions $\partial$-finies, dont les propriétés de clôture ont été étudiées au chapitre III. Cette étape emploie une première représentation de données adaptée aux fonctions $\partial$-finies.
2. L'intégration ou la sommation à proprement parler se fait par des méthodes qui ne s'expliquent bien que dans un cadre proche de celui des $\mathcal{D}$-modules. Cette seconde étape nécessite une autre représentation de données, avec la propriété mathématique différente d'être un système holonome (voir le chapitre IV).

Face à cette dualité, deux voies de recherche sont naturelles. La première, que je présente en §1, vise à convertir une représentation $\partial$-finie d'un objet en un système holonome. La seconde a pour objectif de travailler directement au niveau des systèmes holonomes, pour éviter toute étape de conversion. Je l'aborde en §2.

## 1. Kashiwara effectif, complétion holonome

Dans le cas de fonctions de variables continues et d'opérateurs différentiels usuels, une définition simple des fonctions holonomes est qu'une fonction est holonome dès qu'elle est $\partial$-finie (voir le théorème 13 du chapitre IV). D'un point de vue calculatoire, il est en général très facile, au vu des propriétés de clôture du chapitre III, de calculer un système engendrant l'annulateur d'une fonction $\partial$-finie donnée sous forme close dans

$$\mathbb{O}_{\mathrm{r}} = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_r)[\partial_1; 1, D_{x_1}] \cdots [\partial_r; 1, D_{x_r}].$$

Un exemple aussi simple que celui de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(y^2 - y + x)}$$

montre que le système $S$ obtenu n'engendre pas en général un idéal $\mathfrak{I}$ tel que le quotient

$$\mathfrak{m} = \mathbb{O}_{\mathrm{p}}/\mathfrak{I}$$

ALGORITHME : $GB_{\mathrm{p}} = \text{HolonomicCompletion}(S, p, \mathcal{A}_r(\mathbb{K}), \preceq_{\mathrm{p}})$.

INPUT : $\begin{cases} \text{un système } S \text{ de l'algèbre de Weyl } \mathcal{A}_r(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[\mathbf{x}]\langle \boldsymbol{\partial} \rangle, \\ \text{un polynôme } p \in \mathbb{K}[\mathbf{x}], \\ \text{un ordre de termes } \preceq_{\mathrm{p}} \text{ sur } \mathcal{A}_r(\mathbb{K}). \end{cases}$

OUTPUT : base de Gröbner d'un idéal contenant $S$ et décrivant un module holonome.

1. introduire une nouvelle indéterminée $u$ et une nouvelle algèbre
$$\mathcal{A}_r(\mathbb{K})\langle u \rangle = \mathbb{K}[\mathbf{x}, u]\langle \boldsymbol{\partial} \rangle$$
sujette aux commutations :
$$\partial_i u = u\partial_i - (\partial_i \cdot p)u^2 \;;$$
2. choisir un ordre de termes $\preceq_{\mathrm{loc}}$ tel que $u$ soit lexicographiquement plus petit que chaque $x_i$ et que chaque $\partial_i$ ;
3. calculer $GB_{\mathrm{loc}} = \text{GröbnerBasis}(S \cup \{up - 1\}, \mathcal{A}_r(\mathbb{K})\langle u \rangle, \preceq_{\mathrm{loc}})$ ;
4. définir $NF$ par
$$NF(t) = \text{Reduction}(t, GB_{\mathrm{loc}}, \mathcal{A}_r(\mathbb{K})\langle u \rangle, \preceq_{\mathrm{loc}}) \;;$$
5. calculer $GB = \text{ExtendedFGLMAlgo}(NF, \mathcal{A}_r(\mathbb{K})\langle u \rangle, \preceq_{\mathrm{p}})$ en stoppant le calcul dès que $L$ engendre un idéal correspondant à un module holonome ;
6. renvoyer $GB$.

ALGORITHME 21. Complétion holonome

pour
$$\mathbb{O}_{\mathrm{p}} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_r][\partial_1; 1, D_{x_1}] \cdots [\partial_r; 1, D_{x_r}]$$
soit un $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$-module holonome.

C'est aussi un résultat classique [22, 37] qu'il suffit de s'autoriser les divisions par un seul polynôme pour retomber sur un module holonome : notons $p(\mathbf{x})$ le p.p.c.m. des coefficients de tête des polynômes de $S$ vus comme polynômes en $\boldsymbol{\partial}$, alors
$$\mathfrak{m}_{\mathrm{loc}} = \mathbb{K}[\mathbf{x}, p^{-1}] \otimes \mathfrak{m}$$
est un $\mathbb{O}_{\mathrm{p}}$-module holonome. Ce résultat a été utilisé plusieurs fois [69, 101] de manière algorithmique, mais une approche directe pour calculer $\mathfrak{m}_{\mathrm{loc}}$ à partir de $\mathfrak{m}$ (ou de $\mathfrak{I}$) donne lieu à des algorithmes combinatoires impraticables. Dans le cas commutatif, un algorithme efficace classique permettrait de calculer la localisation voulue, en introduisant une nouvelle indéterminée $u$ et en adjoignant simplement le polynôme $up - 1$ à $S$ avant d'éliminer $u$ par un calcul de base de Gröbner. Malheureusement dans le

cas non commutatif, nous sommes justement dans le cas typique du contre-exemple que j'ai donné au chapitre II de la commutation

$$D_x x^{-1} = x^{-1} D_x - x^{-2}$$

(cf. la commutation (40), p. 85). Dans ce cas typique, le théorème 4, p. 84, ne fournit pas de bases de Gröbner pour tous les ordres de termes. Un remède est de calculer une base de Gröbner pour

$$S \cup \{up - 1\}$$

pour un ordre augmenté, puis de calculer un changement de base par l'algorithme FGLM. En fait, comme les calculs ne se font pas en dimension 0, je stoppe l'algorithme FGLM dès que j'atteins la dimension $r$ des modules holonomes. Ceci fournit l'algorithme 21, qui calcule un sur-module *holonome* de $\mathfrak{m}$.

EXEMPLE. Considérons la fraction rationnelle en $(x, y)$ (et en le paramètre $\alpha$)

$$\frac{1}{(1-x)(1-y-\alpha x)}.$$

Elle est évidemment $\partial$-finie, et admet les deux polynômes annulateurs

$$(102) \quad (1-x)(1-y-\alpha x)D_x + x + 2\alpha x - \alpha - 1, \quad (1-y-\alpha x)D_y - 1$$

dans l'algèbre

$$\mathbb{O}_\mathrm{r} = \mathbb{Q}(\alpha, x, y)[D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y].$$

Malheureusement dans l'algèbre polynomiale

$$\mathbb{O}_\mathrm{p} = \mathbb{Q}(\alpha)[x, y][D_x; 1, D_x][D_y; 1, D_y],$$

le système (102) n'engendre qu'un idéal de dimension 3, ce qui ne permet pas l'intégration par un algorithme réalisant l'élimination par des méthodes polynomiales. En localisant par

$$p = (1-x)(1-y-\alpha x),$$

l'algorithme 21 introduit une nouvelle indéterminée $s$ qui représente $p^{-1}$ et calcule la base de Gröbner

$$s(1-x)(1-y-\alpha x) - 1, D_y + (x-1)s, D_x + (2\alpha x + y - \alpha - 1)s,$$

pour l'ordre de termes sur $D_x$, $D_y$, $x$, $y$ et $s$ qui place les indéterminées $D_x$ et $D_y$ lexicographiquement plus grandes que $x$, $y$ et $s$, les *ex æquo* étant départagés par un ordre du degré total. Puis, le changement d'ordre de termes par l'algorithme FGLM modifié effectue les réductions successives de

$$1, y, x, D_y, y^2, xy, yD_y, x^2, xD_y, D_y^2, D_x, y^3, xy^2, y^2D_y, x^2y, yD_y^2, yD_x,$$
$$x^3, xD_x, D_y^3, D_xD_y, y^4, xy^3, y^3D_y, x^2y^2, y^2D_y^2, y^2D_x, x^3y, yD_y^3, yD_xD_y$$

pour obtenir la base de Gröbner

$$(1-x-\alpha y)D_x-1, \qquad (1-\alpha-x)D_x+(1-y)D_y-2,$$
$$-2\alpha D_x+D_y-(1-\alpha-x)D_xD_y+\alpha(1-\alpha-x)D_x^2,$$

qui engendre maintenant un idéal de dimension 2. Il est alors possible de réaliser une intégration sur $x$ ou sur $y$.

La première application envisagée pour cet algorithme est le calcul de *diagonales*: pour une série double

$$f(x,y)=\sum_{p,q\geq 0} c_{p,q}x^py^q,$$

on appelle *diagonale* de $f$ la série simple

$$\sum_{p\geq 0} c_{p,p}x^p.$$

Les calculs de diagonales sont reliés à des calculs de termes constants de séries, et pour une raison encore mystérieuse fournissent de nombreux exemples de fonctions pour lesquelles un système holonome, est difficile à obtenir.

## 2. Somme et produit holonomes

Une autre approche est de fournir toute une algorithmique au niveau des systèmes holonomes, afin d'éviter le problème d'extension/contraction.

Dans le contexte des algèbres de Weyl, Doron Zeilberger [113] utilise la théorie de Bernstein pour introduire une théorie des *systèmes holonomes*. À la base de cette théorie sont les diverses propriétés de clôture des modules holonomes, c'est-à-dire des modules de plus petite dimension possible (voir le chapitre IV).

Un premier problème est de généraliser ce genre de clôtures, même d'un point de vue non algorithmique, à d'autres algèbres de Ore polynomiales que les algèbres de Weyl. La difficulté de ce problème n'est pas liée à la clôture par somme, la dimension d'une somme directe de modules étant le maximum des dimensions des facteurs directs, mais réside plutôt dans la recherche d'une classe de modules pour laquelle on sache prédire la dimension du module obtenu lors du calcul d'un produit.

Une solution partielle à ce problème est disponible dans le cas du $q$-calcul [91]. La théorie de la *$q$-holonomie* reprend à l'imitation celle de l'holonomie et fournit des résultats de clôture analogues. Dans ce cadre, les algèbres d'opérateurs à considérer sont des produits tensoriels d'algèbres de la forme

$$\mathbb{K}(q)[q^n,q^{-n}][S_n;S_n,0][S_n^{-1};S_n^{-1},0].$$

Le *creative telescoping* est possible dans ce cadre, mais requiert de réaliser l'élimination simultanée de $q^n$ et de $q^{-n}$, ce qui ne peut pas être fait par un calcul direct de base de Gröbner dans le cadre des algèbres introduites au chapitre II.

Dans le cas différentiel, il semble possible d'aller plus loin dans l'algorithmisation : un autre travail envisagé est la généralisation de la méthode de bases de Gröbner à des produits tensoriels d'algèbres pour réaliser les opérations de clôture du chapitre III sur des systèmes holonomes, et non sur des systèmes $\partial$-finis. De premières expérimentations suggèrent fortement la possibilité d'une telle méthode. Quoique bien plus technique, cette voie permettrait d'éviter l'utilisation de l'algorithme FGLM qui ne semble pas fonctionner en dimension non nulle dans le cas non commutatif (dans le cas commutatif, voir [46] pour la dimension 0 et [45, chap. 11] pour la dimension non nulle).

# Index des exemples

Toutes les identités qui suivent ont été obtenues à l'aide de mes programmes. La plupart de ces identités ont été utilisées comme exemple dans cette thèse. Les nombres en colonne de droite renvoient aux pages où ces exemples sont traités.

- Identité d'Apéry-Franel : 18, 153.

Les nombres d'Apéry

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}^3$$

vérifient

$$(n+2)^3 u_{n+2} - \left[(n+2)^3 + (n+1)^3 + 4(2n+3)^3\right] u_{n+1} \\ +(n+1)^3 u_n = 0.$$

- Relation de contiguïté pour la fonction $F_4$ d'Appell : 15, 89, 129.

La fonction hypergéométrique en deux variables $F_4$ d'Appell

$$F_4(a,b,c,d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{m!n!(c)_m(d)_n} x^m y^n,$$

vérifie la relation de contiguïté

$$F_4(a-1,b,c,d;x,y) = (B_a \cdot F_4)(a,b,c,d;x,y)$$

pour un opérateur linéaire $B_a$ donné par

$$B_a = \frac{P}{2(a-c)(a-d)(a+1-c-d)}$$

avec $P$ valant

$$\begin{aligned}
&\big[b(-2d+2a+2d^2+4a^2+2cd-5ad-3ac)x\\
&\quad+b(2c^2-5ac+2a-2c+4a^2+2cd-3ad)y\\
&+abc+abd-2ad+2cd-2cd^2-2c^2d+2ad^2-4a^2c\\
&\quad-2ac-4a^2d+2a^2+2a^3+2ac^2-2a^2b+6acd\big]\\
&+\big[(c^2-c+4a-3d+2d^2-bc+4a^2-bd+3cd-5ad+2ab-5ac)x\\
&\quad+(c^2-c+bd+cd-3ad-2ab+bc-3ac+d+4a^2)y\\
&\quad-4a^2-4a+3d+c+5ad-2d^2-c^2+5ac+bc-3cd-2ab+bd\big]xD_x\\
&\quad+\big[d(2a-c-d)x^2-2d(2a-c-d)x\\
&\quad+(bd-7ad+bc-d+3cd+4a^2+c-2ab-3ac+3d^2)xy\\
&+(-bd-d-bc-3c+2c^2+4a+4a^2-5ac-3ad+2cd+2ab)y^2\\
&+(d+3c-cd+d^2-2ab+bc-4a^2-2c^2+bd+ad-4a+5ac)y\\
&\quad+d(2a-c-d)\big]D_y\\
&+(2a-c-d)(x^2-2(1+y)x+(1-y)^2)yD_y^2.
\end{aligned}$$



$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\right)^3=\frac{n}{2}8^n+8^n-\frac{3n}{4}2^n\binom{2n}{n}.$$



Les nombres de Fibonacci donnés par

$$F_0=F_1=1 \qquad \text{et} \qquad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

vérifient

$$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(-1)^n.$$



$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{a+b}{a+k}\binom{a+c}{c+k}\binom{b+c}{b+k}=\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}.$$



$$\frac{1}{2i\pi}\oint_0\frac{(1+2xy+4y^2)\exp\left(\frac{4x^2y^2}{1+4y^2}\right)}{y^{n+1}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy=\frac{n!H_n(x)}{\lfloor n/2\rfloor!},$$

où l'intégrale est prise sur un contour complexe de 0 qui n'encercle ni $i/2$, ni $-i/2$.



$$C_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}.$$

Seule la première des identités qui suivent fait l'objet d'un exemple.

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j},$$

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+3/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2+j}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j},$$

$$\sum_{k=-n-1}^{n} \frac{(-1)^k q^{7/2k^2+5/2k}}{(q;q)_{n+k+1}(q;q)_{n-k}} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2+i+2j}}{(q;q)_{n-i-j}(q;q)_i(q;q)_j}$$

et

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{9/2k^2+1/2k}}{(q;q)_{n+k}(q;q)_{n-k}} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{l-j} \frac{q^{(i+j)^2+j^2+l^2}}{(q;q)_{l-i-j}(q;q)_{n-l}(q;q)_i(q;q)_j}.$$



Les polynômes orthogonaux de Hermite vérifient l'identité dite « de Mehler » suivante, c'est-à-dire qui donne une série génératrice de produits de polynômes de Hermite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y)\frac{u^n}{n!} = \frac{\exp\left(\frac{4u[xy-u(x^2+y^2)]}{1-4u^2}\right)}{\sqrt{1-u^2}}.$$



Les fonctions de Bessel vérifient l'identité

$$J_0(z)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2 = 1.$$



$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a;q)_n x^n}{(b;q)_n} = \frac{(ax;q)_\infty \left(\frac{q}{ax};q\right)_\infty (q;q)_\infty \left(\frac{b}{a};q\right)_\infty}{(x;q)_\infty \left(\frac{b}{ax};q\right)_\infty (b;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q;q)_k} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty},$$

ou sous la forme finie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{(5k^2-k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2+k}}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^{(5k^2-3k)/2}}{(q;q)_{n-k}(q;q)_{n+k}}.$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(a,b;q) z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(az;q)_\infty (bz;q)_\infty}.$$



$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left( H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right).$$



La fonction $x \exp x$ admet le développement en série de Tchebychev

$$x \exp x = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x),$$

où le coefficient $c_n$ est donné par la représentation intégrale

$$c_n = \int_{-1}^{+1} \frac{x \exp x T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

et vérifie la récurrence

$$c_{n+4} + 2(n+4)c_{n+3} + 2nc_{n+1} - c_n = 0.$$



$$\int_0^\infty u^n e^{-\frac{uz}{2}\left(1-\frac{1}{u^2}\right)} \left[ J_n(z) + u J_{n-1}(z) \right] dz = 2u \qquad (n \geq 1).$$

La somme

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 (-1)^k z^k$$

admet l'opérateur de montée

$$\begin{aligned} H = 12\frac{z^3(z+1)}{(n+1)^3} D_z^3 + 4\frac{z^2(2n+2zn+11+14z)}{(n+1)^3} D_z^2 \\ -4\frac{z(5zn^2-n^2-4n-6+2zn-9z)}{(n+1)^3} D_z \\ -\frac{16zn-n-1+4z}{n+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire un opérateur différentiel $H$ qui a la même action que l'opérateur de décalage $S_n$.



$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x) y^n = \frac{2^{a+b}}{R(x,y)\,[1-y+R(x,y)]^a\,[1+y+R(x,y)]^b},$$

où $R$ est donné par

$$\frac{1}{R(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}.$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) y^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}.$$



$$\sum_{k=1}^{n} H_k^3 = (n+1)H_n^3 - \frac{3}{2}(2n+1)H_n^2 + 3(2n+1)H_n + \frac{1}{2}H_n^{(2)} - 6n,$$

où $H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n k^{-2}$.



$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1)H_k^3 = (n+1)^2 H_n^3 - \frac{3}{2}n(n+1)H_n^2 + \frac{3n^2+3n+1}{2}H_n - \frac{3}{4}n(n+1).$$



$$\sum_{k=1}^{n} k^2 H_{n+k} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}[2H_{2n} - H_n] - \frac{n(n+1)(10n-1)}{36}.$$

• Représentation intégrale d'une fonction de Bessel : 28, 132.

$$\frac{\pi}{2}J_0(z) = \int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(zu)}{\sqrt{u^2-1}}\,du.$$

• Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle ordinaire : 6, 177.

L'équation différentielle linéaire en $F$

$$\left(D_x^2 + \frac{1}{x}D_x - q^2\right) \cdot F(x) = (1-x^2)J_0(qx) - 2q^2xJ_1(qx)$$

admet la solution particulière

$$\frac{2q-1+x^2}{2q^2}J_0(qx) + \frac{(q^3-1)x}{q^3}J_1(qx).$$

• Somme double hypergéométrique : 9, 173.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{n+r+s}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n+r}{r}\binom{n+s}{s}\binom{2n-(r+s)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^4.$$

• Somme double due à Carlitz : 156.

$$\sum_{i+j+k=n}\binom{i+j}{i}\binom{j+k}{j}\binom{k+i}{k} = \sum_{l=0}^{n}\binom{2l}{l}.$$

• Somme double hypergéométrique : 155.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2k+2\ell+n+m)!}{(k+n)!(\ell+m)!k!\ell!}\left(\frac{x}{4}\right)^{k+\ell} =$$
$$\frac{n!}{(n-m)!m!}\,{}_4F_3\left(\left.\begin{matrix}\frac{n+m}{2}+1, \frac{n+m}{2}+1, \frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+1}{2}\\ n+m+1, n+1, m+1\end{matrix}\right|4x\right).$$

• Somme harmonique indéfinie alternée : 7.

$$\sum \frac{(-1)^n H_n}{\binom{m}{n}} = \frac{(-1)^n[(m+2)H_n-1](n-1-m)}{\binom{m}{n}(m+2)^2}.$$

• Intégrale décrivant l'interaction entre la membrane d'un tambour frappée et un maillet qui la frappe : 20, 147.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{e^{-px}T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi(-1)^n I_n(p),$$

où $I_n$ désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre $n$.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n.$$



$$\int_0^{+\infty} xe^{-px^2} J_n(bx) I_n(cx)\, dx = \frac{1}{2p} \exp\left(\frac{c^2 - b^2}{4p}\right) J_n\left(\frac{bc}{2p}\right).$$



$$\int_0^{+\infty} xe^{-px^2} J_\nu(ax) J_\nu(bx)\, dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{ab}{2p}\right).$$



La fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ de Gauss vérifie

$$\frac{4^a}{\left(1+\sqrt{1-z}\right)^{2a}} \, {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2a, a-b+\frac{1}{2} \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{\sqrt{1-z}-1}{\sqrt{1-z}+1}\right)$$
$$= {}_2F_1\left(\begin{matrix} 2a, 2b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1-\sqrt{1-z}}{2}\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| z\right).$$

# Index des algorithmes

*Les numéros de pages en gras indiquent les pages où sont décrits les algorithmes.*

# Bibliographie


[1] Abramov, S., et Van Hoeij, M. A method for the integration of solutions of Ore equations. In *ISSAC'97 (July 21–23, 1997. Maui, Hawaii, USA)* (1997), W. W. Küchlin, Éd., ACM Press, p. 172–175. Comptes rendus d'ISSAC'97. ISBN 0-89791-875-4.

[2] Abramov, S. A. Problems in computer algebra that are connected with a search for polynomial solutions of linear differential and difference equations. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet. 3* (1989), 63–68. Traduit du Vestn. Moskov. univ. Ser. XV Vychisl. mat. kibernet. 3, 56–60.

[3] Abramov, S. A. Rational solutions of linear differential and difference equations with polynomial coefficients. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 29*, 11 (1989), 1611–1620. Traduit du Zh. vychisl. Mat. i mat. Fiz.

[4] Abramov, S. A. Rational solutions of linear difference and $q$-difference equations with polynomial coefficients. In *Symbolic and algebraic computation* (New York, 1995), A. Levelt, Éd., ACM Press, p. 285–289. Comptes rendus d'ISSAC'95, Montréal, Canada.

[5] Abramov, S. A., Bronstein, M., et Petkovšek, M. On polynomial solutions of linear operator equations. In *Symbolic and algebraic computation* (New York, 1995), A. Levelt, Éd., ACM Press, p. 290–296.

[6] Abramov, S. A., et Kvashenko, K. Y. Fast algorithms for the search of the rational solutions of linear differential equations with polynomial coefficients. In *Symbolic and algebraic computation* (New York, 1991), S. M. Watt, Éd., ACM Press, p. 267–270. Comptes rendus d'ISSAC'91, Bonn, Allemagne.

[7] Abramov, S. A., et Zima, E. V. A universal program to uncouple linear systems. In *Proceedings of CMCP'96 (International Conference on Computational Modeling and Computing in Physics, Dubna, Russia, Sept. 16–21, 1996)* (1996), vol. 7, p. 16–26.

[8] Abramowitz, M., et Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, 1973.

[9] Almkvist, G., et Zeilberger, D. The method of differentiating under the integral sign. *Journal of Symbolic Computation 10* (1990), 571–591.

[10] Andrews, G. E. An analytic generalization of the Rogers-Ramanujan identities for odd moduli. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 71* (1974), 4082–4085.

[11] Andrews, G. E. *The Theory of Partitions*, vol. 2 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1976.

[12] Andrews, G. E. Multiple series Rogers-Ramanujan type identities. *Pacific Journal of Mathematics 114*, 2 (1984), 267–283.

[13] Andrews, G. E. *q-Series: their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra.* No. 66 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Publié pour le Conference Board of

the Mathematical Sciences, Washington, D.C., par l'AMS, Providence, R.I., 1986. ISBN 0-8218-0716-12.

[14] Askey, R. The world of $q$. *CWI Quarterly 5*, 4 (1992), 251–270.

[15] Atallah, M. J., Chyzak, F., et Dumas, P. An algorithm for estimating all matches between two strings. Rapport de recherche 3194, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Juin 1997. À paraître in *Algorithmica*.

[16] Barkatou, M. A. An efficient algorithm to compute the rational solutions of systems of linear differential equations. À paraître.

[17] Barkatou, M. A. An algorithm for computing a companion block diagonal form for a system of linear differential equations. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 4* (1993), 185–195.

[18] Bayer, D., et Stillman, M. Computation of Hilbert functions. *Journal of Symbolic Computation 14* (1992), 31–50.

[19] Becker, T., et Weispfenning, V. *Groebner bases. A computational approach to commutative algebra*, vol. 141 de *Graduate texts in mathematics*. Springer Verlag, 1993. En coopération avec Heinz Kredel.

[20] Bernstein, I. N. Modules over a ring of differential operators, study of the fundamental solutions of equations with constant coefficients. *Functional Analysis and its Applications 5*, 2 (1971), 1–16 (russe); 89–101 (traduction anglaise).

[21] Bernstein, I. N. The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Functional Analysis and its Applications 6*, 4 (1972), 26–40 (russe); 273–285 (traduction anglaise).

[22] Björk, J. E. *Rings of Differential Operators*. North Holland P. C., Amsterdam, 1979.

[23] Borel et al., A. *Algebraic D-Modules*, vol. 2 de *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, Inc., 1987.

[24] Bourbaki, N. *Éléments de Mathématiques, Algèbre I*, nouvelle ed. Hermann, Paris, 1970, chap. III : Algèbres tensorielles, algèbres extérieures, algèbres symétriques, p. 197.

[25] Bronstein, M., et Petkovšek, M. On Ore rings, linear operators and factorisation. *Programmirovanie 1* (1994), 27–44.

[26] Bronstein, M., et Petkovšek, M. An introduction to pseudo-linear algebra. *Theoretical Computer Science 157*, 1 (1996).

[27] Buchberger, B. Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. Thèse, 1965.

[28] Buchberger, B. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. *Aequationes Mathematicae 4* (1970), 374–383.

[29] Buchberger, B. Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. In *Recent trends in multidimensional system theory*, N. K. Bose, Éd. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1985, p. 184–232.

[30] Buchberger, B. Introduction to Gröbner bases. In *Groebner Bases and Applications (Proc. of the Conference 33 Years of Gröbner Bases)*, B. Buchberger et F. Winkler, Éds., vol. 251 de *London Mathematical Society Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-63298-6.

[31] Buchberger, B., et Winkler, F. Miscellaneous results on the construction of Gröbner bases for polynomial ideals. Rapport technique 137, Université de Linz, 1979.

[32] Calkin, N. J. A curious binomial identity. *Discrete Mathematics 131*, 1–3 (1994), 335–337.

[33] Cartier, P. Démonstration "automatique" d'identités et fonctions hypergéométriques. *Astérisque 206* (1992), 41–91. Séminaire Bourbaki.

[34] Chyzak, F. An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions. In *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 9th Conference* (1997), vol. 1, Université de Vienne, p. 172–183. Comptes rendus de la conférence.

[35] Chyzak, F., et Salvy, B. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate holonomic identities. *Journal of Symbolic Computation 26*, 2 (Août 1998), 187–227.

[36] Cohn, P. M. *Free Rings and their Relations*. No. 2 in London Mathematical Society Monographs. Academic Press, 1971.

[37] Coutinho, S. C. *A Primer of Algebraic D-modules*. No. 33 in London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[38] Cox, D., Little, J., et O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer Verlag, 1992. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.

[39] Ehlers, F. *The Weyl Algebra*, vol. 2 de *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, Inc., 1987, chap. 5, p. 173–205.

[40] Ekhad, S. B., et Majewicz, J. E. A short WZ-style proof of Abel's identity. *The Electronic Journal of Combinatorics 3*, 2 (1996). The Foata Festschrift.

[41] Erdélyi, A. *Higher Transcendental Functions*, deuxième ed., vol. 1–2–3. R. E. Krieger publishing Company, Inc., Malabar, Floride, 1981.

[42] Fasenmyer, M. C. *Some generalized hypergeometric polynomials*. Ph. D. dissertation, University of Michigan, Nov. 1945.

[43] Fasenmyer, M. C. Some generalized hypergeometric polynomials. *Bulletin of the American Mathematical Society 53* (1947), 806–812.

[44] Fasenmyer, M. C. A note on pure recurrence relations. *American Mathematical Monthly 56* (1949), 14–17.

[45] Faugère, J.-C. *Résolution de systèmes d'équations algébriques*. Thèse, Université Paris 6, Fév. 1994.

[46] Faugère, J.-C., Gianni, P., Lazard, D., et Mora, T. Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering. *Journal of Symbolic Computation 16* (Oct. 1993), 329–344.

[47] Flajolet, P., et Sedgewick, R. The average case analysis of algorithms: Complex asymptotics and generating functions. Rapport de recherche 2026, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sept. 1993.

[48] Flajolet, P., et Sedgewick, R. The average case analysis of algorithms: Counting and generating functions. Rapport de recherche 1888, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Avr. 1993.

[49] Flajolet, P., et Sedgewick, R. The average case analysis of algorithms: Saddle point asymptotics. Rapport de recherche 2376, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1994.

[50] Galligo, A. Some algorithmic questions on ideals of differential operators. In *Comptes rendus d'EUROCAL'85* (1985), B. F. Caviness, Éd., vol. 204 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, p. 413–421.

[51] Gasper, G., et Rahman, M. *Basic Hypergeometric Series*, vol. 35 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1990.

[52] Geddes, K. O., Czapor, S. R., et Labahn, G. *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[53] Giovini, A., Mora, T., Niesi, G., Robbiano, L., et Traverso, C. "One sugar cube, please" or selection strategies in the Buchberger algorithm. In *Symbolic and algebraic computation* (1991), S. M. Watt, Éd., ACM Press, p. 49–54.

[54] Glasser, M. L., et Montaldi, E. Some integrals involving Bessel functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 183*, 3 (Mai 1994), 577–590.

[55] Gordon, B. A combinatorial generalization of the Rogers-Ramanujan identities. *American Journal of Mathematics 83* (1961), 393–399.

[56] Gosper, R. W. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA 75*, 1 (Jan. 1978), 40–42.

[57] Graham, R. L., Knuth, D. E., et Patashnik, O. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1989. A Foundation for Computer Science.

[58] Joly, P., et Rhaouti, L. Communication privée, 1997.

[59] Kandri-Rody, A., et Weispfenning, V. Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type. *Journal of Symbolic Computation 9* (1990), 1–26.

[60] Karr, M. Summation in finite terms. *Journal of the ACM 28*, 2 (1981), 305–350.

[61] Karr, M. Theory of summation in finite terms. *Journal of Symbolic Computation 1* (1985), 303–315.

[62] Kashiwara, M. On the holonomic systems of linear differential equations II. *Inventiones Mathematicae 49* (1978), 121–135.

[63] Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming*, vol. 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley, 1973. Seconde édition.

[64] Koekoek, R., et Swarttouw, R. F. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its $q$-analogue. Rapport technique DUT-TWI-94-05, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1994.

[65] Koornwinder, T. H. On Zeilberger's algorithm and its $q$-analogue. *Journal of Computational and Applied Mathematics 48* (1993), 91–111.

[66] Kredel, H. *Solvable Polynomial Rings*. Reihe Mathematik. Verlag Shaker, Aachen, Allemagne, 1993. D'après la thèse. ISBN 3-86111-342-2.

[67] Lazard, D. Systems of algebraic equations (algorithms and complexity). Rapport technique 92.20, LITP, Mar. 1992.

[68] Li, Z. A subresultant theory for linear ordinary differential polynomials. Report Series 95–35, RISC-Linz, Johannes Kepler University, 1995.

[69] Lipshitz, L. The diagonal of a $D$-finite power series is $D$-finite. *Journal of Algebra 113* (1988), 373–378.

[70] Lipshitz, L. $D$-finite power series. *Journal of Algebra 122* (1989), 353–373.

[71] Mora, F. Gröbner bases for non-commutative polynomial rings. In *Algebraic algorithms and error-correcting codes* (Berlin, 1985), J. Calmet, Éd., vol. 229 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, p. 353–362. Comptes rendus d'AAECC-3, Grenoble, France.

[72] Mora, T. Seven variations on standard bases. Preprint 45, Università di Genova, Dipartimento di Matematica, Mar. 1988.

[73] Mora, T. An introduction to commutative and noncommutative Gröbner bases. *Theoretical Computer Science 134* (1994), 131–173.

[74] Ore, O. Linear equations in non-commutative fields. *Annals of Mathematics 32* (1931), 463–477.

[75] Ore, O. Theory of non-commutative polynomials. *Annals of Mathematics 34* (1933), 480–508.

[76] Parnes, S., et Ekhad, S. B. A WZ-style proof of Jacobi polynomials' generating function. *Discrete Mathematics 110* (1992), 263–264.

[77] Paule, P. On identities of the Rogers-Ramanujan type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 107*, 1 (Avr. 1985), 255–284.

[78] Paule, P. A note on Bailey's lemma. *Journal of Combinatorial Theory,* Series A *44*, 1 (Jan. 1987), 164–167.

[79] Paule, P. The concept of Bailey chains. In *Actes du Séminaire Lotharingien* (Strasbourg, 1988), vol. 18, Publication de l'IRMA, p. 53–76.

[80] Paule, P. Short and easy computer proofs of the Rogers-Ramanujan identities and of identities of similar type. *The Electronic Journal of Combinatorics 1*, R10 (Juil. 1994), 9 pages.

[81] Paule, P., et Riese, A. A Mathematica $q$-analogue of Zeilberger's algorithm based on an algebraically motivated approach to $q$-hypergeometric telescoping. In *Special Functions, q-Series and Related Topics, Toronto, Ontario, 1995* (Providence, 1997), vol. 14 de *Fields Inst. Commun.*, American Mathematical Society, p. 179–210.

[82] Paule, P., et Schorn, M. A Mathematica version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities. *Journal of Symbolic Computation 20* (1995), 673–698.

[83] Petkovšek, M. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients. *Journal of Symbolic Computation 14* (1992), 243–264.

[84] Petkovšek, M., Wilf, H., et Zeilberger, D. *A=B*. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachussets, 1996. ISBN 1-56881-063-6.

[85] Prodinger, H. Descendants in heap ordered trees – or – a triumph of computer algebra. *Electronic Journal of Combinatorics 3*, R29 (1996), 9 pages.

[86] Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., et Marichev, O. I. *Integrals and Series. Volume 1: Elementary functions*. Gordon and Breach, 1986. 798 pages. Première édition à Moscou, Nauka, 1981.

[87] Riese, A. A generalization of Gosper's algorithm to bibasic hypergeometric summation. *The Electronic Journal of Combinatorics 3*, R19 (1996), 16 pages.

[88] Risch, R. H. The problem of integration in finite terms. *Transactions of the American Mathematical Society 139* (1969), 167–189.

[89] Risch, R. H. The solution of the problem of integration in finite terms. *Bulletin of the American Mathematical Society 76* (1970), 605–608.

[90] Rogers, L. J. Second memoir on the expansion of certain infinite products. *Proceedings of the London Mathematical Society 25* (1894), 318–343.

[91] Sabbah, C. Systèmes holonomes d'équations aux $q$-différences. In *D-Modules and Microlocal Geometry* (Berlin, 1993), M. Kashiwara, T. Monteiro-Fernandes, et P. Schapira, Éds., Walter de Gruyter & Co., p. 125–147. Comptes rendus de la conférence $D$-Modules and Microlocal Geometry, Lisbonne, 1990.

[92] Salvy, B., et Zimmermann, P. Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software 20*, 2 (1994), 163–177.

[93] Sedgewick, R., et Flajolet, P. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, 1996. 512 pages. ISBN 0-201-4009-X.

[94] Souadnia, A. Communication privée, 1997.

[95] Stanley, R. P. Differentiably finite power series. *European Journal of Combinatorics 1* (1980), 175–188.

[96] Strehl, V. Binomial identities — combinatorial and algorithmic aspects. *Discrete Mathematics 136* (1994), 309–346.

[97] Sturmfels, B., et Takayama, N. Gröbner bases and hypergeometric functions. In *Groebner Bases and Applications (Proc. of the Conference 33 Years of Gröbner Bases)*, B. Buchberger et F. Winkler, Éds., vol. 251 de *London Mathematical Society Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 1998. ISBN 0-521-63298-6.

[98] Takayama, N. Gröbner basis and the problem of contiguous relations. *Japan Journal of Applied Mathematics 6*, 1 (1989), 147–160.

[99] Takayama, N. An algorithm of constructing the integral of a module—an infinite dimensional analog of Gröbner basis. In *Symbolic and algebraic computation* (1990), S. Watanabe et M. Nagata, Éds., ACM et Addison-Wesley, p. 206–211. Comptes rendus d'ISSAC'90, Kyoto.

[100] Takayama, N. Gröbner basis, integration and transcendental functions. In *Symbolic and algebraic computation* (1990), S. Watanabe et M. Nagata, Éds., ACM et Addison-Wesley, p. 152–156. Comptes rendus d'ISSAC'90, Kyoto.

[101] Takayama, N. An approach to the zero recognition problem by Buchberger algorithm. *Journal of Symbolic Computation 14* (1992), 265–282.

[102] Takayama, N. Communication privée, 1995.

[103] Takayama, N. Algorithm finding recurrence relations of binomial sums and its complexity. *Journal of Symbolic Computation 20*, 5 et 6 (1996), 637–651.

[104] Traverso, C. Gröbner trace algorithms. In *Symbolic and algebraic computation (Rome, 1988)* (Berlin, 1989), P. Gianni, Éd., no. 358 in Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, p. 125–138. Comptes rendus d'ISSAC'88.

[105] Trigg, L. Communication privée, 1996.

[106] Van der Poorten, A. A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. *Mathematical Intelligencer 1* (1979), 195–203.

[107] Wegschaider, K. *Computer Generated Proofs of Binomial Multi-Sum Identities.* Diplomarbeit, RISC, Johannes Kepler Universität Linz, Mai 1997. `http://www.risc.uni-linz.ac.at/research/combinat/risc/`.

[108] Weispfenning, V. Finite Gröbner bases in non-Noetherian skew polynomial rings. In *Symbolic and Algebraic Computation* (New York, 1992), P. S. Wang, Éd., ACM Press, p. 329–334. Comptes rendus d'ISSAC'92, July 1992, Berkeley, Californie.

[109] Wilf, H. S., et Zeilberger, D. Rational functions certify combinatorial identities. *Journal of the American Mathematical Society 3* (1990), 147–158.

[110] Wilf, H. S., et Zeilberger, D. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "$q$") multisum/integral identities. *Inventiones Mathematicae 108* (1992), 575–633.

[111] Wilf, H. S., et Zeilberger, D. Rational function certification of multisum/integral/"$q$" identities. *Bulletin of the American Mathematical Society 27*, 1 (Juil. 1992), 148–153.

[112] Zeilberger, D. A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. *Discrete Mathematics 80* (1990), 207–211.

[113] Zeilberger, D. A holonomic systems approach to special functions identities. *Journal of Computational and Applied Mathematics 32* (1990), 321–368.

[114] Zeilberger, D. A Maple program for proving hypergeometric identities. *SIGSAM Bulletin 25*, 3 (Juil. 1991), 4–13.

[115] Zeilberger, D. The method of creative telescoping. *Journal of Symbolic Computation 11* (1991), 195–204.

# Index

*Les numéros de pages en gras indiquent les pages où sont définies les entrées.*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Année universitaire 19...... 19.........

## AVIS DU JURY SUR LA REPRODUCTION DE LA THESE SOUTENUE

TITRE DE LA THESE: Fonctions holonomes en Calcul formel

NOM PRENOM DE L'AUTEUR: Frédéric CHYZAK

MEMBRES DU JURY MM. PAULE, BRONSTEIN, DELLA-DORA, CORI, LEVELT, FLAJOLET, SALVY, STEYAERT

PRESIDENT DU JURY: J.-P. RAMIS

DATE DE LA SOUTENANCE: 27 mai 1998

REPRODUCTION DE LA THESE SOUTENUE:

- ☒ THESE POUVANT ÊTRE REPRODUITE EN L'ETAT
- ☐ THESE NE POUVANT PAS ÊTRE REPRODUITE
- ☐ THESE POUVANT ETRE REPRODUITE APRES CORRECTIONS

Signature du Président du Jury,

CET IMPRIME DOIT ÊTRE RENVOYE APRES SIGNATURE A LA DIVISION DE L'ETUDIANT AVEC LE RAPPORT DE SOUTENANCE

91128 PALAISEAU CEDEX - Tél (33) 1 01 69 33 45 31- 45 82 - Fax : (33) 01 69 33 30 59

Fonctions holonomes en calcul formel

*Résumé :* Cette thèse montre comment le calcul formel permet la manipulation d'une grande classe de suites et fonctions solutions d'opérateurs linéaires, la classe des fonctions holonomes. Celle-ci contient de nombreuses fonctions spéciales, en une ou plusieurs variables, et de nombreuses suites de la combinatoire. Un cadre théorique est tout d'abord introduit pour algorithmiser les propriétés de clôture de la classe holonome, pour y permettre un test à zéro et pour unifier les calculs différentiels sur les fonctions et les calculs de récurrences sur les suites. Ces méthodes s'appuient sur des calculs par une extension de la théorie des bases de Gröbner dans un cadre de polynômes non commutatifs, les polynômes de Ore. Deux types d'algorithmes de sommation et d'intégration symboliques définies et indéfinies sont ensuite développés, dont la justification théorique fait appel à la théorie des $\mathcal{D}$-modules holonomes. Les premiers ont recours à une élimination polynomiale non commutative par bases de Gröbner ; les seconds à des algorithmes de résolution de systèmes fonctionnels linéaires en leurs solutions fractions rationnelles. Bien plus que la recherche de formes closes, l'objectif est de pouvoir continuer à calculer avec la représentation implicite des objets holonomes même en l'absence de formes explicites. Ce type de calculs permet en particulier la preuve automatique d'identités sommatoires et intégrales. Une implantation de ces algorithmes dans le système de calcul formel Maple a permis de donner la première preuve automatique d'identités jusqu'à présent inaccessibles par le calcul formel.

*Mots-clé :* calcul formel, fonctions holonomes, intégration symbolique, sommation symbolique, élimination polynomiale, bases de Gröbner, $\mathcal{D}$-modules, algorithme de Zeilberger, opérateurs de Ore.

Holonomic Functions in Computer Algebra

*Abstract:* This thesis shows how computer algebra makes it possible to manipulate a large class of sequences and functions that are solutions of linear operators, namely that of holonomic functions. This class contains numerous special functions, in one or several variables, as well as numerous combinatorial sequences. First, a theoretical framework is introduced in order to give algorithms for the closure properties of the holonomic class, to permit a zero test in this class, and to unify differential calculations with functions and calculations of recurrences with sequences. These methods are based on calculations by an extension of the theory of Gröbner bases in a framework of non-commutative polynomials, namely Ore polynomials. Two kinds of algorithms for symbolic definite and indefinite summation and integration are then developed, whose theoretical justification appeals to the theory of holonomic $\mathcal{D}$-modules. The former resort to non-commutative polynomial elimination by Gröbner bases; the latter to algorithms to solve linear functional systems for their rational function solutions. Much more than the search for closed forms, the aim is to be able to continue to compute with the implicit representation of holonomic objects even when no explicit form is available. In particular, this type of calculation makes the automatic proof of summatory and integral identities possible. An implementation of these algorithms for the computer algebra system Maple has made it possible to give the first automatic proof of identities so far unreachable by computer algebra.

*Keywords:* computer algebra, holonomic functions, symbolic integration, symbolic summation, polynomial elimination, Gröbner bases, $\mathcal{D}$-modules, Zeilberger's algorithm, Ore operators.

Cette thèse en *informatique (algorithmique)* a été préparée au *Projet Algorithmes* de l'Inria,
Unité de recherche Inria Rocquencourt,
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France).