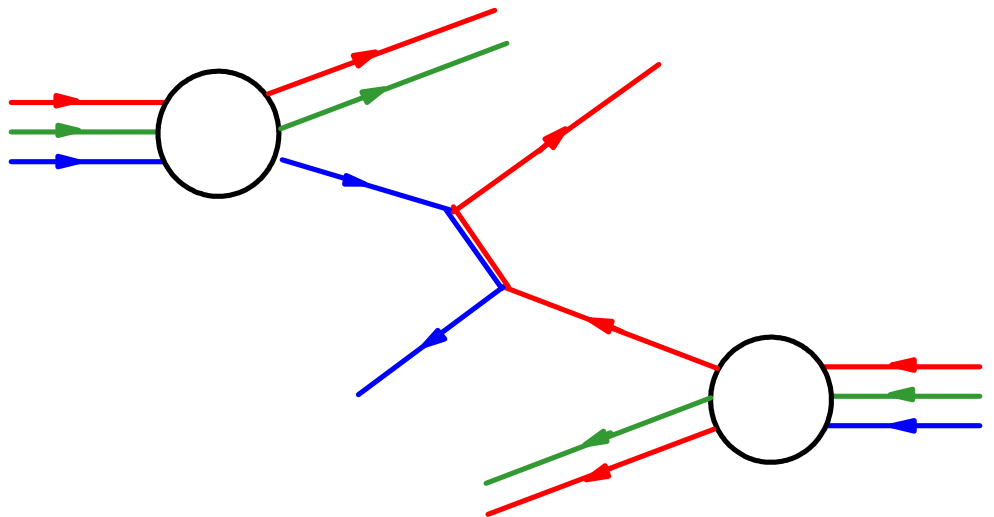


# Introduction à la physique des particules

*L. Marleau*





# Introduction à la physique des particules

*L. Marleau*

Cet ouvrage a été rédigé avec *Scientific WorkPlace*  
et composé avec  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ .

© 1997 L. Marleau.

Département de physique

Université Laval

Québec, Canada.

*Tous droits réservés. Aucun extrait de cet ouvrage ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de l'auteur.*

# Table des matières

<b>Avant-Propos</b>		<b>xi</b>
<b>1 NOTIONS DE BASE</b>		<b>1</b>
1.1 Survol rapide		1
Matière	1	
Les types d'interaction	4	
1.2 Définitions utiles		4
Bosons et fermions	4	
Particule-Antiparticule	5	
1.3 Système d'unités naturelles		5
1.4 Formalisme quadri-dimensionnel		8
1.5 Notions de physique quantique		11
Mécanique quantique relativiste	11	
Interactions versus champs	12	
1.6 Échelle des interactions		17
Interactions électromagnétiques	17	
Interactions faibles	17	
Interactions fortes	21	
Interactions gravitationnelles	22	
Tableau récapitulatif	22	
<b>2 SOURCES ET DÉTECTEURS</b>		<b>25</b>
2.1 Sources		25
Radioactivité	25	
Rayons cosmiques	25	
Accélérateurs	26	
2.2 Détecteurs		38
Principes de détections	38	
Instruments de détection	42	

<b>3</b>	<b>DIFFUSION ET INTERACTION ENTRE PARTICULES</b>	<b>57</b>
3.1	Cinématique d'une réaction - Variables de Mandelstam	57
	Système du centre de masse (4-corps)	59
	Système du laboratoire (4-corps, cible fixe)	61
	La rapidité	62
3.2	Les interactions en mécanique quantique	63
3.3	La matrice de diffusion, $S$	66
3.4	Espace de phase	67
3.5	Section efficace	68
	Diffusion (4-corps)	71
3.6	Largeur de désintégration et vie moyenne	72
	Désintégration en 2 corps	73
	Désintégration en 3 corps	74
<b>4</b>	<b>SYMÉTRIES DE L'ESPACE-TEMPS</b>	<b>77</b>
4.1	Symétries en mécanique quantique	77
4.2	Invariance sous une translation	79
4.3	Rotation en trois dimensions	80
4.4	Parité	81
	Parité orbitale	82
	Parité intrinsèque	83
	Conservation de la parité totale	83
	Parité des antiparticules	84
	Exemples	85
4.5	Inversion du temps	86
	L'opérateur d'inversion du temps, $\mathcal{T}$	86
	Application: le bilan détaillé	87
4.6	Invariance de jauge	88
	Transformation de jauge	89
	Les photons	90
4.7	Contrainte d'unitarité	91
<b>5</b>	<b>SYMÉTRIES INTERNES ET HADRONS</b>	<b>93</b>
5.1	Symétries globales et règles de sélection	93
	Charge électrique, $Q$	93
	Nombre leptonique total, $L$	94
	Nombre électronique, muonique, taonique...	94
	Nombre baryonique, $B$	95
5.2	Isospin	96
	Symétrie $SU(2)$	98

	Générateurs de $SU(2)$	99
	Relation de Gell-Mann-Nishijima	99
	Conservation d'isospin	100
<b>5.3</b>	<b>Étrangeté et hypercharge</b>	<b>101</b>
<b>5.4</b>	<b>Autres saveurs</b>	<b>103</b>
	Charme	103
	Bottom	104
	Top	104
	Relation de Gell-Mann-Nishijima (révisée)	105
<b>5.5</b>	<b>Conjugaison de la charge</b>	<b>105</b>
	Parité de charge totale	106
	Invariance sous $\mathcal{C}$	107
	Les pions et les photons	107
	Systèmes particule-antiparticule	108
	Violation de $\mathcal{CP}$ ou $\mathcal{T}$ et Théorème $\mathcal{CPT}$	109
<b>5.6</b>	<b>Parité-<math>\mathcal{G}</math></b>	<b>110</b>
<b>5.7</b>	<b>Résonances</b>	<b>111</b>
<b>6</b>	<b>LE MODÈLE DES QUARKS</b>	<b>115</b>
<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>115</b>
	Historique	115
<b>6.2</b>	<b>Théorie des groupes</b>	<b>118</b>
	Propriétés générales d'un groupe	118
	Groupe de Lie (compact)	119
	Représentations	120
	Racine, rang et poids	121
	Rotation en 2D — groupe $SO(2)$	123
	Rotation en 3D — groupe $SO(3)$	123
	Groupe $U(1)$	123
	Groupe $SU(N)$	123
<b>6.3</b>	<b>Quarks et Représentations <math>SU(N)</math></b>	<b>129</b>
	Lien entre représentation $SU(N)$ et modèle des quarks	129
	Représentations irréductibles et Tableaux de Young	130
	Construction des fonctions d'onde	135
<b>6.4</b>	<b>Couleur</b>	<b>141</b>
	Groupe $SU(3)$ de Couleur	141
	Fonctions d'onde de couleur	142
	Évidence expérimentale	143
<b>6.5</b>	<b>Masses et Moments Magnétiques</b>	<b>144</b>
	Masses	144

	Moments magnétiques	147
6.6	Diagrammes de quarks	150
6.7	Charme et $SU(4)$	152
	Mésons	152
	Baryons	156
<b>7</b>	<b>INTERACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES</b>	<b>159</b>
7.1	Diffusion $e - N$	159
7.2	Le spin	159
7.3	Facteur de forme	159
7.4	Production de paires de muons	160
7.5	Succès de QED	160
7.6	Invariance de jauge	160
<b>8</b>	<b>INTERACTIONS FAIBLES</b>	<b>161</b>
8.1	Classification	161
8.2	Théorie de Fermi	161
8.3	Non conservation de la parité	161
8.4	Interaction $V - A$	162
8.5	Modèle de Weinberg-Salam (survol)	162
8.6	Angle de Cabbibo et matrice de Kobayashi-Maskawa	162
8.7	Courants neutres	162
8.8	Modèle GIM et le charme	162
8.9	Observation du $Z^0$ et des $W^\pm$	163
8.10	Physique du $K^0$	163
8.11	Violation de $\mathcal{CP}$	163
<b>9</b>	<b>INTERACTIONS FORTES (QCD)</b>	<b>165</b>
9.1	Couleur	165
	Groupe $SU(3)$ de Couleur	165
	Fonctions d'onde de couleur	166
	Liberté asymptotique	167
	Évidence expérimentale	167
9.2	Interactions	168
	Interactions faibles	168



Interactions Fortes	169
9.3 Modèle des partons	169
9.4 Diffusion inélastique profonde de $eN$	169
9.5 Invariance d'échelle et partons	170
9.6 Diffusion inélastique profonde avec neutrinos	170
9.7 Diffusion lepton-quark	170
9.8 Collisions hadron-hadron	170
<b>10 UNIFICATION DES FORCES</b>	<b>173</b>
10.1 Divergences et renormalisabilité	174
10.2 Bosons intermédiaires	174
10.3 Théorie de jauge non-abélienne	174
10.4 Interactions électrofaibles	174
10.5 Grande unification	174
10.6 Autres extensions du modèle standard	175
<b>A Notation, conventions, constantes...</b>	<b>177</b>
A.1 Notations	177
A.2 Constantes fondamentales en physique	177
A.3 Unités SI	180
A.4 Unités naturelles	181
A.5 Coefficients de Clebsh-Gordan	183
A.6 Références	184
<b>B Rappel de relativité restreinte et cinématique relativiste</b>	<b>185</b>
B.1 La relativité restreinte	185
B.2 Cinématique relativiste	187
<b>C Équation de Dirac</b>	<b>195</b>
<b>D Particules stables, collisionneurs,...</b>	<b>197</b>
<b>Index</b>	<b>199</b>



# Avant-Propos

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cadre du cours de *Physique des particules (PHY-10518)* offert aux étudiants de dernière année du B.Sc. au Département de physique de l'Université Laval. Il requiert des notions élémentaires de relativité restreinte et de mécanique quantique.

Les chapitres 1, 2 et 3 portent respectivement sur les notions de base, les techniques expérimentales et sur la dynamique des collisions. Les chapitres 4 et 5 couvrent les symétries et lois de conservation observées alors que dans le chapitre 6 on introduit le modèle des quarks. Les interactions électromagnétiques, faibles et fortes sont traitées aux chapitres 7, 8 et 9. On termine par un survol des différentes tentatives d'unification ou d'extension du Modèle Standard. Les appendices contiennent un résumé des notations, des tables de propriétés, un aide-mémoire et quelques références complémentaires.

**Avertissement:** Ces notes ne sont qu'une version partielle et préliminaire de l'ouvrage. Il peut s'être glissé — c'est même une certitude — par inadvertance une multitude de coquilles plus ou moins importantes. Je saurais gré au lecteur de m'accorder sa patience et sa compréhension à cet égard et l'invite à me communiquer ses commentaires et suggestions.

D'autre part, certaines illustrations (notamment dans la section sur les accélérateurs et détecteurs) proviennent de pages HTML. Au meilleur de ma connaissance, ces illustrations sont du domaine public et leur provenance est en général très bien identifiée.. Je n'en tiens pas moins à exprimer ma reconnaissance aux institutions concernées.

Québec  
Mai 1997

Luc Marleau  
Département de Physique  
Université Laval



# 1 NOTIONS DE BASE

## 1.1 Survol rapide

### Matière

La description de la matière a depuis toujours intrigué l'humanité. Vu l'immense diversité des formes que prend la matière à l'échelle humaine, il est tentant de penser qu'à une échelle plus petite, elle existe sous une forme plus fondamentale voire plus simple. À tort ou à raison, l'approche scientifique s'est laissée guider par ce concept en espérant qu'une fois les *briques fondamentales* obtenues, il serait possible de reconstruire l'édifice jusqu'à notre échelle et même au-delà. Dans les faits, une telle reconstruction nous échappe encore...

La première notion d'éléments fondamentaux nous vient des grecs. On pensait que la Nature était composée de quatre éléments: l'air, le feu, l'eau et la terre (voir figure 1.1).

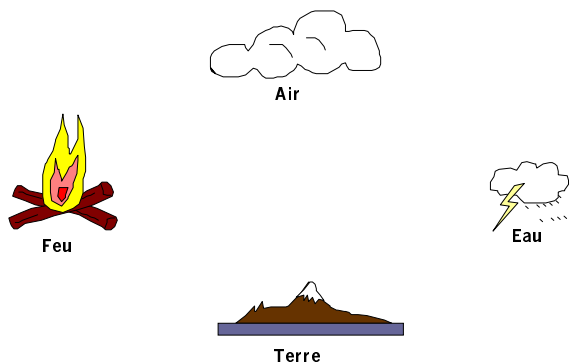


Figure 1.1 Les quatre éléments fondamentaux de la Nature (selon les grecs).

Ces éléments (toujours chez les grecs) furent ultérieurement remplacés par une notion qui semble simplificatrice de la Nature, celle de l'atome. Au début de notre siècle, s'est développée une version moderne de l'atome qui est représentée de façon simplifiée à la figure 1.2.

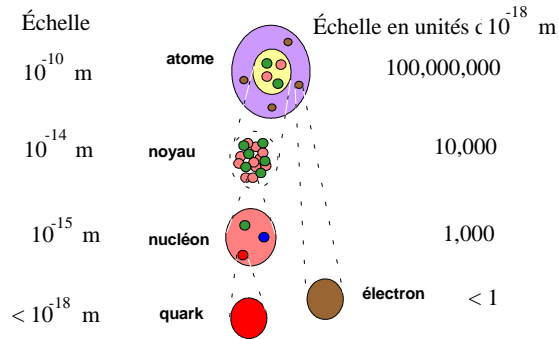


Figure 1.2 Échelles subatomiques.

Il faut toutefois mentionner que cette approche n'a pas toujours fait l'unanimité. La philosophie arabe suggérait que les propriétés d'un objet devaient être décrites globalement et non à partir de ses constituants. Malheureusement, cette approche s'est avérée être un trop grand obstacle au progrès scientifique. Notre perception de la matière révèle une structure passablement riche dont voici une description sommaire.

## Leptons

Les leptons (ainsi nommés parce que leurs masses étaient relativement petites) sont caractérisés par les propriétés suivantes:

1. Ce sont des particules qui n'interagissent pas fortement (aucune interaction forte).
2. Ils ont des charges électriques entières (multiples de la charge de l'électron).
3. Ils possèdent une charge "faible" et forment des doublets d'interaction faible.
4. Ils obéissent à la statistique de Fermi-Dirac (fermions)

Les trois familles ou générations de leptons connues:

$$\begin{array}{c} \text{Leptons} \\ \hline \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right) \end{array}$$

## Hadrons:

Les hadrons sont caractérisés par les propriétés suivantes:

1. Ce sont des particules qui interagissent fortement (soumises à l'interaction forte "résiduelle").
2. Ils ont des charges électriques entière (multiple de la charge de l'électron).
3. Ils ont des interactions faibles.
4. Ils sont formés de quarks.

Les hadrons ne sont pas des particules fondamentales, mais plutôt des états liés de quarks. On en observe plus de deux cents. Les hadrons peuvent eux-mêmes être classifiés en deux groupes: les baryons, auxquels on associe un nombre quantique (le nombre baryonique) et, les mésons, qui sont responsables des interactions fortes entre hadrons. Voici les hadrons les plus fréquemment observés:

Hadrons	
$p$	proton
$n$	neutron
$\pi^+, \pi^0, \pi^-$	pions
$\rho^+, \rho^0, \rho^-$	mésons $\rho$
$\Lambda$	lambda
$K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-$	mésons $K$

Une liste plus exhaustive se trouve en appendice.

## Quarks:

Les quarks sont les particules fondamentales qui forment la matière nucléaire.

1. Ce sont des particules qui interagissent fortement (soumises à l'interaction forte)
2. Ils ont des charges électriques fractionnaires.
3. Ils possèdent une charge faible et forment des doublets d'interaction faible.
4. Ils possèdent une charge coloré (couleur) et forment des triplets d'interaction forte.
5. On a observé six espèces (saveurs ou parfums) de quarks regroupés en trois familles:

Quarks			
$Q = \frac{2}{3}$	$\left( \begin{array}{c} u(\text{up}) \\ d(\text{down}) \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} c(\text{charme}) \\ s(\text{étrange}) \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} t(\text{top}) \\ b(\text{bottom}) \end{array} \right)$
$Q = -\frac{1}{3}$			

Les quarks apparaissent au moins en six parfums (l'existence du quark top a été confirmé en 1995). Comme les leptons, ils peuvent être regroupés en doublets qui sont des copies conformes sauf pour ce qui est de leurs masses.

De façon générale, on soupçonne que les familles de quarks et leptons sont reliées; il en existe trois de chaque.

## Les types d'interaction

L'interaction entre particules de matière se fait via l'échange de particules (e.g. bosons de jauge) qui portent les quanta d'énergie-impulsion de quatre types d'interactions (gravitationnelle, faible, électromagnétique et fortes).

Mésons (interactions)		
photon	$\gamma$	(1.1)
3 bosons faibles	$Z_0, W^\pm$	
8 gluons	$g$	
Higgs (non-observé)	$H$	
graviton	$h_{\mu\nu}$	

Le graviton et le Higgs n'ont jamais été observés. On recherche le Higgs activement. Par des moyens indirects on estime aujourd'hui sa masse à environ 350 GeV (cet estimé change fréquemment et pourrait déjà être obsolète). Il existe toutefois plusieurs scénarios qui ne requièrent pas de Higgs; son existence reste pour le moment une question ouverte. Par ailleurs, d'autres modèles proposent plusieurs Higgs. Le graviton quant à lui n'existe que dans le cadre de théories quantiques de la gravitation. Cependant aucune de ces théories n'est entièrement satisfaisante même si malgré certaines sont prometteuses (supergravité, cordes, supercordes,...).

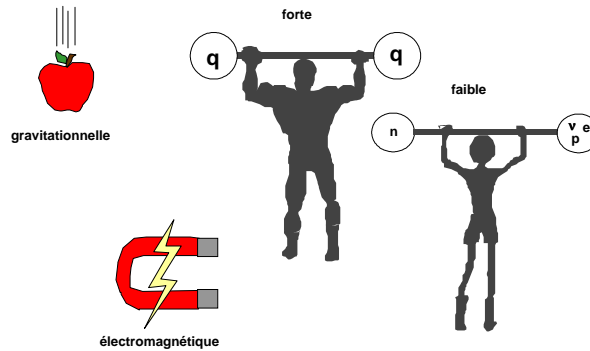


Figure 1.3 Les quatre forces de la Nature.

## 1.2 Définitions utiles

### Bosons et fermions



**Bosons:**

Les bosons sont des particules de spin entier ( $0\hbar, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$ ) qui obéissent à la statistique de Bose-Einstein i.e., un système de deux particules identiques, notées 1 et 2, possède une fonction d'onde est symétrique sous l'échange des particules

$$\psi \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \psi. \quad (1.2)$$

**Fermions:**

Les fermions sont des particules de spin  $\frac{1}{2}$ -entier ( $\frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \frac{5\hbar}{2}, \dots$ ) qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac i.e., un système de deux particules identiques, notées 1 et 2, possède une fonction d'onde est antisymétrique sous l'échange des particules

$$\psi \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} -\psi. \quad (1.3)$$

**Particule-Antiparticule**

La notion d'antiparticule fut proposée par Dirac en 1928. Ce dernier interpréta certaines solutions de l'équation qui porte son nom comme des antiparticules. Les solutions associées aux antiparticules donnent lieu à différentes interprétations, e.g. une particule qui se propage à rebours dans le temps ou encore des trous dans une mer de particules. L'antiparticule est caractérisée par

1. des charges opposées à celle de la particule (charges électrique, faible, et autres nombres quantiques...)
2. masse et vie moyenne égales à celles des particules.

L'existence d'antiparticules fut confirmée par Anderson en 1933 suite à la découverte du positron (anti-électron). Certaines particules (e.g. le photon  $\gamma$  et le boson faible  $Z_0$ ) sont leur propre antiparticule, toutes leurs charges étant nulles.

Par convention, on désigne généralement l'antiparticule par une barre:

$$\begin{aligned} e &\leftrightarrow \bar{e} \\ \nu &\leftrightarrow \bar{\nu} \\ p &\leftrightarrow \bar{p} \\ \Sigma &\leftrightarrow \bar{\Sigma}. \end{aligned}$$

**1.3 Système d'unités naturelles**

Le système d'unités SI requiert trois étalons de mesure:

$$[\text{masse ou énergie}], [\text{temps}], [\text{longueur}] \quad (1.4)$$

La nature nous fournit deux constantes fondamentales qui sont particulièrement pertinentes pour des systèmes quantiques relativistes:  $c$  et  $\hbar$ . Il est donc plus *naturel* d'exprimer une vitesse comme une fraction de  $c$ , et un moment angulaire comme un multiple de  $\hbar$

$$\begin{aligned} \text{Vitesse} &= \text{fraction de } c \\ \text{Spin} &= \text{multiple de } \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le système d'unités naturelles consiste à prendre comme étalon

$$\hbar = c = 1 \quad (1.6)$$

Rappelons que dans le système SI:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.7)$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad (1.8)$$



### Exemple 1.1

Exprimons le mètre et la seconde en unité naturelle:

1 mètre:

$$\begin{aligned} \frac{1 \text{ m}}{c\hbar} &= \frac{1 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}} \\ &= 5.1 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \end{aligned}$$

1 seconde:

$$\begin{aligned} \frac{1 \text{ s}}{\hbar} &= \frac{1 \text{ s}}{6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}} \\ &= 1.52 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \end{aligned}$$

On remarque de ces exemples que les unités de longueur dans ce système s'expriment en inverse d'unités d'énergie

$$[\text{longueur}] = [\text{masse ou énergie}]^{-1} \quad (1.9)$$

que les unités de temps s'expriment aussi en inverse d'unités d'énergie

$$[\text{temps}] = [\text{masse ou énergie}]^{-1}. \quad (1.10)$$

Une quantité dans les unités SI (système international) qui possède des dimensions

$$M^p L^q T^r$$

où  $M$ ,  $L$  et  $T$  représente les unités de masse, longueur et temps respectivement, aura des

unités d'énergie à la puissance  $p - q - r$ , soit  $E^{p-q-r}$ .

Quantité	SI			UN
	$p$	$q$	$r$	$n$
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Impulsion	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine $\alpha$	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2

## 1.4 Formalisme quadri-dimensionnel

La similitude entre les notions de temps et d'espace nous suggère d'adopter un formalisme quadri-dimensionnel. Par exemple, le vecteur position  $x$  est représenté par ses composantes contravariantes  $x^\mu$  tel que

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (1.11)$$

En général, dans un espace vectoriel à  $D$  dimensions, il est possible de choisir  $D$  vecteurs de base  $e_\mu$  et de représenter un vecteur  $A$  à partir de ses composantes (contravariantes)  $A^\mu$ , parallèles aux  $e_\mu$ . Alors le vecteur  $A$  s'écrit dans un espace à  $4D$

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu e_\mu = A^\mu e_\mu. \quad (1.12)$$

Le *produit scalaire* des vecteurs  $A$  et  $B$  prend la forme

$$A \cdot B \equiv A^\mu e_\mu \cdot B^\nu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_\mu \cdot e_\nu \quad (1.14)$$

est appelé le *tenseur métrique* ou simplement la *métrique*. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs sont *orthogonaux*, i.e.

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad (1.15)$$

et donc

$$A \cdot B = A^\mu B^\mu e_\mu^2. \quad (1.16)$$

Pour le cas des quadri-vecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisée d'un vecteur position espace-temps est reliée à l'intervalle, e.g.

$$\begin{aligned} x^2 &= x^\mu x^\mu e_\mu^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ainsi la norme des vecteurs de base est

$$e_\mu^2 = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \mu = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.18)$$

et le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Les composantes covariantes sont des projections orthogonales de  $A$  sur les vecteurs de base  $e_\mu$ . Par exemple,

$$e_\mu \cdot A \equiv A_\mu \quad (1.20)$$

(notez l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu e_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et son inverse  $g^{\mu\nu}$  coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad (1.22)$$

d'où

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \quad (1.23)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (1.24)$$

Par exemple, pour le quadri-vecteur contravariant de position

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (1.25)$$

on aura un quadri-vecteur covariant de position:

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= g_{\mu\nu} x^{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \end{aligned} \quad (1.26)$$

et donc

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (x^0, \mathbf{x}) \\ x_{\mu} &= (x^0, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

### Remarque 1.1

Toute quantité qui a la forme

$$a \cdot b = a^{\mu} b_{\mu} \quad (1.28)$$

est un invariant de Lorentz si  $a$  et  $b$  sont des vecteurs de Lorentz, c'est-à-dire que cette quantité n'est pas affectée par une transformation de Lorentz et donc a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels.

Les notions d'énergie et d'impulsion sont aussi intimement liées (tout comme l'espace et le temps) en relativité restreinte. On peut définir le quadri-vecteur énergie-impulsion (composantes contravariantes)

$$p^{\mu} = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (1.29)$$

où  $E$  est l'énergie totale et  $p_i$  ( $i = x, y, z$  ou  $1, 2, 3$ ) sont les impulsions. L'énergie cinétique s'obtient par

$$\begin{aligned} K &= E - m_0 \\ &= (\gamma - 1)m_0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

(rappelons qu'on utilise le système d'unités naturelles).

Par ailleurs, la grandeur de  $p$  est un invariant de Lorentz et s'écrit comme

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta} \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= E^2 - \mathbf{p}^2 \\
&= m_0^2.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

On a donc finalement

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \tag{1.32}$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 \tag{1.33}$$

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimées de façon compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$P^\mu = \sum_n p_n^\mu. \tag{1.34}$$

Si on pose qu'il y a conservation d'énergie et d'impulsion, on a

$$P_{\text{avant}}^\mu = P_{\text{après}}^\mu; \tag{1.35}$$

et il en découle que

$$P_{\text{avant}}^i = P_{\text{après}}^i \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}}, \tag{1.36}$$

ce qui représente la conservation de l'impulsion totale et

$$P_{\text{avant}}^0 = P_{\text{après}}^0, \tag{1.37}$$

la conservation de l'énergie totale, qui s'écrit aussi comme

$$E_{\text{avant}}^{\text{tot}} = E_{\text{après}}^{\text{tot}}. \tag{1.38}$$

On peut aussi déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité  $P^\mu$  (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la *grandeur* de toute énergie-impulsion ( $E^2 - \mathbf{p}^2$ ) est un invariant relativiste (même grandeur dans tous les repères). Par exemple, dans le repère du laboratoire

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)^2. \tag{1.39}$$

Dans un repère  $S'$  on a

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{S'}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{S'}^{\mu} \right)^2. \tag{1.40}$$

Dans le repère d'impulsion totale nulle (RIN), i.e. le repère où le centre de masse du système est au repos, les calculs sont généralement plus simples. Alors que la dernière relation tient toujours

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{\text{RIN}}^{\mu} \right)^2 = \left( P_{\text{RIN}}^{\mu} \right)^2. \tag{1.41}$$

on aura dans ce repère spécial,

$$\begin{aligned}
\left( P_{\text{RIN}}^{\mu} \right)^2 &= \left( P_{\text{RIN}}^0 \right)^2 - \left( \mathbf{P}_{\text{RIN}} \right)^2 \\
&= \left( P_{\text{RIN}}^0 \right)^2 = \left( E_{\text{avant}}^{\text{tot}} \right)^2 \\
&= \left( \sum_n E_n \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Cette quantité correspond à la somme des énergies totales dans le RIN, élevée au carré.

## 1.5 Notions de physique quantique

### Mécanique quantique relativiste

Le passage de la mécanique quantique à la mécanique quantique relativiste a été historiquement basé sur une généralisation de l'équation de Schrödinger à un système relativiste.

#### L'équation d'onde de Schrödinger

Rappelons que l'équation d'onde de Schrödinger est obtenue en définissant l'Hamiltonien (énergie) et l'impulsion par les opérateurs différentiels suivant:

$$H \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{p} \equiv \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla \quad (1.44)$$

Dans le langage quadri-dimensionnel, on écrit ( $\hbar = c = 1$ )

$$p^\mu = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (1.45)$$

La notation est souvent simplifiée par

$$p^\mu \equiv i\partial^\mu. \quad (1.46)$$

L'équation de mouvement

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E \quad (1.47)$$

devient alors l'équation de Schrödinger

$$(-i\hbar \nabla)^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.48)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

où  $\psi$  est la fonction d'onde du système.

#### L'équation de Klein-Gordon

Les équations de mouvement relativistes obéissent plutôt à la relation ( $\hbar = c = 1$ )

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (1.51)$$

qui correspond, après substitution des quantités par leur représentation en terme d'opérateurs, à l'équation de Klein-Gordon

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi - (-i\hbar\nabla)^2 \psi &= m^2\psi \\ -\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi &= m^2\psi \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\psi + m^2\psi = 0 \\ &= (-\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\psi \\ &= (p^2 - m^2)\psi \end{aligned}$$

Cette équation décrit les bosons (spin entier). Elle est toutefois non-linéaire en énergie  $E$ . Incidemment, les états ne se combinent pas en général de façon triviale.

## L'équation de Dirac

Dans une tentative visant à linéariser cette équation (et à régler certains autres problèmes conceptuels comme des densités probabilité négatives), Dirac introduit un système linéaire de quatre équations couplées, l'équation de Dirac. Voici sa version la plus courante que nous écrivons sans beaucoup plus d'informations

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = 0. \quad (1.52)$$

où le *spinneur*  $\psi$  possède quatre composantes et les  $\gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) sont les quatre matrices  $4 \times 4$  de Dirac. Les matrices  $\gamma_\mu$  intègre la notion de spin puisque qu'elle corresponde à une version généralisée des matrices de spin de Pauli. Pour cette raison, l'équation de Dirac convient à la description des fermions (spin demi-entier). Une description plus détaillée de l'équation de Dirac se trouve en Appendice.

## La théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs est depuis quelques années considérée comme un outil plus fondamental et plus puissant que la mécanique quantique. Sans trop aller dans les détails, mentionnons qu'elle est basée sur la seconde quantification des champs, c'est-à-dire sur les relations de commutation ou d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation (champs quantiques).

La théorie permet d'interpréter chaque phénomène comme une série d'opérateurs agissant sur le vide, e.g. création de particule (opérateur de création), interaction entre particules (opérateur de sommet) et échange ou propagation de particules (propagateur).

## Interactions versus champs

La mécanique classique et la mécanique quantique (ou plus précisément la théorie quantique des champs) ont des approches différentes lorsqu'il s'agit de décrire des interactions (voir figure 1.4).



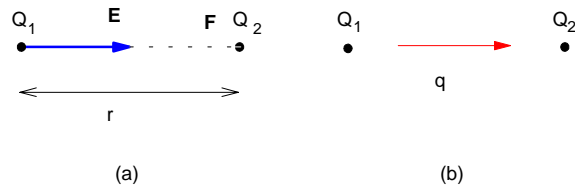


Figure 1.4 Approche classique (a) et quantique (b) des interactions.

**1. En mécanique classique:**

Un champ est produit par une particule 1 à la position de la particule 2. La particule 2 interagît avec la valeur de ce champ.

**2. En mécanique quantique:**

L'interaction est interprétée comme un échange de quanta. L'échange obéit aux lois de conservation des nombres quantiques et de la quadri-impulsion. Rappelons cependant que la quadri-impulsion n'obéit à l'équation d'onde que dans les limites du principe d'incertitude, c'est-à-dire

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1, \quad \hbar = 1. \quad (1.53)$$

Les états transitoires sont appelés *virtuels* (e.g. un photon virtuel peut avoir une quadri-impulsion telle que  $p^2 \neq 0$ ).

**Approche de Yukawa**

En 1935, H. Yukawa propose une connexion entre la portée d'une interaction et la masse du quantum échangé pendant l'interaction. Il s'intéresse plus particulièrement à décrire les interactions fortes qui ont une portée finie de quelques fm. Par exemple, l'échange virtuel d'un boson de masse  $m$  peut se produire pendant un temps

$$\Delta t \approx \frac{1}{\Delta E} \approx \frac{1}{m}. \quad (1.54)$$

Il est donc caractérisé par une portée maximale de ( $c = 1$ )

$$R = c\Delta t = \Delta t \approx \frac{1}{m}. \quad (1.55)$$

Ce résultat peut être déduit plus formellement de l'équation de Klein-Gordon

$$\nabla^2 \psi + m^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Considérons une composante de  $\psi$  statique à symétrie sphérique  $\psi(x_\mu) = U(r)$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 U(r) + m^2 U(r) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} U(r) \right) + m^2 U(r) \end{aligned}$$

où  $r = 0$  est identifié à l'origine. La composante radiale de la fonction d'onde a pour solution

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-\frac{r}{R}}, \quad r > 0 \quad (1.56)$$

où

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{m}: && \text{portée des interactions} \\ g &= && \text{constante d'intégration.} \end{aligned}$$

**Exemple 1.2**

Interaction électromagnétique.

Le photon est le quantum d'échange dans une interaction électromagnétique mais la masse du photon étant nulle

$$\nabla^2 U(r) = 0, \quad r > 0 \quad (1.57)$$

d'où

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi r}. \quad (1.58)$$

Si on interprète  $U(r)$  comme le potentiel électrostatique alors  $Q$  est la charge électrique à une constante multiplicative près.

Donc  $g$ , la constante d'intégration, joue le rôle de charge. La portée des interaction nucléaire fortes est de  $R \simeq 10^{-15}$  m, ce qui poussa Yukawa à prédire une particule d'échange de masse  $m = \frac{1}{R} \simeq 100$  MeV et sans spin pour les interactions fortes. En 1947, le pion (spin 0,  $m = 140$  MeV) fut découvert.

L'approche de Yukawa est toutefois trop naïve pour expliquer le reste des phénomènes forts de façon adéquate.

## Propagateur du boson

Il est approprié de décrire une collision entre deux particules en terme d'amplitudes de probabilité. L'approche perturbative de la théorie des champs suppose que les particules se propagent librement sauf en certains points où il y a émission ou absorption de quanta. Il s'agit d'écrire la solution des équations de mouvement couplées comme une série perturbative autour des solutions libres des équations de mouvement pour des champs quantiques libres (aucun potentiel d'interaction implique des solutions libres). La méthode utilise les fonctions de Green auxquelles R.P. Feynman a donné son interprétation probabiliste des amplitudes.

L'équations de mouvement d'un boson libre (équations de Klein-Gordon) sont

$$(p^2 - m^2) \psi(p) = 0 \quad (1.59)$$

où  $\psi(p)$  est une fonction scalaire. La fonction de Green  $G(p)$ , dans l'espace des impulsions, obéit à

$$(p^2 - m^2) G(p) = \delta^4(p) \quad (1.60)$$

ou encore

$$G(p) = \frac{\delta^4(p)}{(p^2 - m^2)}. \quad (1.61)$$

avec la fonction de Dirac  $\delta^4(p)$  définie comme  $\delta^4(p) = \delta(p_0) \delta(p_1) \delta(p_2) \delta(p_3)$ . Feynman interprète cet opérateur comme une amplitude de probabilité que le boson se propage avec une quadri-impulsion  $p$

$$\text{Propagateur} = \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (1.62)$$

De la même façon, Feynman définit une amplitude de probabilité que le boson soit émis par la particule 1 (et/ou absorbé par la particule 2). Comme la grandeur de cette amplitude est proportionnelle à la force de l'interaction, elle dépend directement de la constante de couplage

$$\text{Sommet} = g_1 \quad (\text{et } g_2). \quad (1.63)$$

Cette interprétation a permis de développer une méthode graphique simple pour calculer la probabilité de certains processus: les *règles et diagrammes de Feynman*.

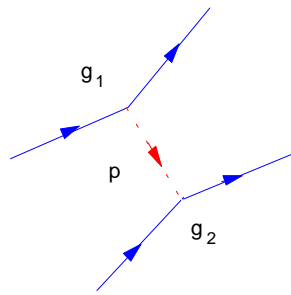


Figure 1.5 Exemple de diagramme de Feynman.



### Exemple 1.3

L'interaction électromagnétique entre deux particules chargées via l'échange d'un boson (voir figure 1.5) est donnée par le produit des amplitudes (sommets de couplage  $g_1$  (et  $g_2$ ) et propagateur):

$$\text{Amplitude} \propto \frac{g_1 g_2}{p^2 - m^2} \quad (1.64)$$

$$\text{Probabilité} \propto \left| \frac{g_1 g_2}{p^2 - m^2} \right|^2. \quad (1.65)$$

En QED, la masse du photon est nulle et le couplage est proportionnel à la charge  $e$ . La section efficace pour la collision de particules chargées est

$$\frac{d^2\sigma}{dp^2} \propto \left| \frac{e^2}{p^2} \right|^2 = \frac{e^4}{p^4}, \quad (1.66)$$

un résultat qui a aussi été obtenu par Rutherford à l'aide de méthodes plus rudimentaires.

## 1.6 Échelle des interactions

### Interactions électromagnétiques

La force du couplage (aux sommets) est déterminé par la constante adimensionnelle

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0360} \quad (1.67)$$

Par exemple, la formule de Rutherford (éq. (1.66)) pourrait s'exprimer comme

$$\frac{d^2\sigma}{dp^2} \propto \frac{\alpha_{em}^2}{p^4}. \quad (1.68)$$

Les interactions électromagnétiques (voir figure 1.7) sont alors caractérisées par les propriétés suivantes:

- mettent en jeu des particules chargées électriquement;
- couplage électromagnétique:  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.0360}$ ;
- temps d'interaction et/ou vie moyenne typique de  $\sim 10^{-20}$  s;
- section efficace typique de  $\sim 10^{-44}$  m<sup>2</sup>;
- échange de photons ( $\gamma$ );
- $m_\gamma = 0$ , donc portée  $R = \infty$ .

### Interactions faibles

Les principales manifestations des interactions faibles sont:

1. La désintégration  $\beta$  du neutron, e.g.  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ .

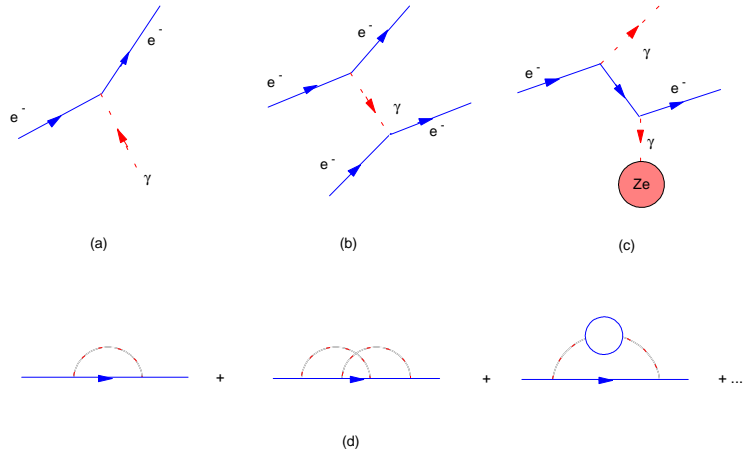


Figure 1.6

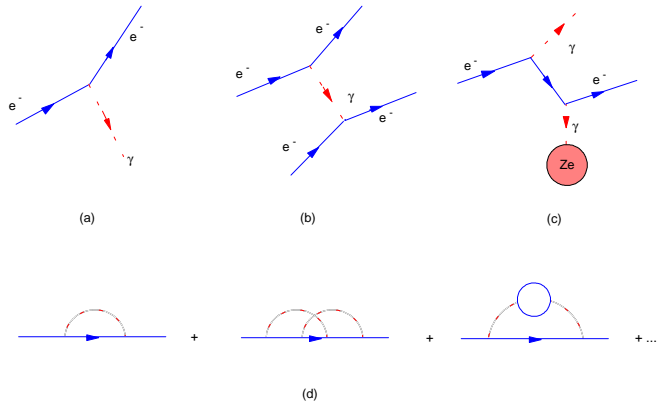


Figure 1.7 Exemples d'interactions électromagnétiques: (a) effet photoélectrique, (b) diffusion de Rutherford, (c) rayonnement de freinage et (d) diagrammes à plusieurs boucles pour la self-énergie.

2. La capture d'antineutrinos, e.g.  $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$ .
3. Les réactions hadroniques pures, e.g. la désintégration des  $\Sigma$  peut passer par le mode faible ou le mode électromagnétique mais les caractéristiques diffèrent suivant le mode de désintégration:

int. faibles $\Sigma^- \rightarrow n + \pi$ $\Delta S = 1$ $\tau \simeq 10^{-10} \text{ s}$	int. e.m. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ $\Delta S = 0$ $\tau \simeq 10^{-19} \text{ s}$
--	--

où  $\Delta S$  est le changement du nombre quantique d'étrangeté et  $\tau$  est la vie moyenne ou durée des interactions.

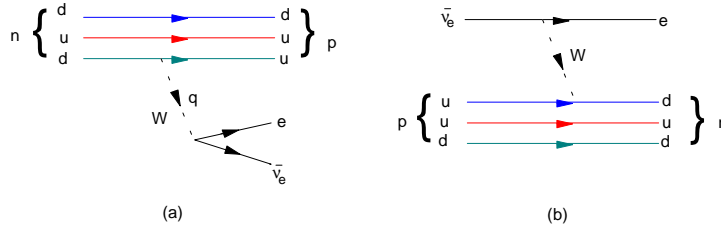


Figure 1.8 Exemples d'interaction faibles: (a) désintégration du neutron et (b) capture de neutrinos. Le contenu en quark du proton et du neutron ( $uud$  et  $ddu$  respectivement) est illustré clairement.

Les interactions faibles (voir figure 1.8) sont alors caractérisés par les propriétés suivantes:

- mettent en jeu des neutrinos ou des quarks qui changent de parfum i.e. des particules ayant une charge faible;
- couplage faible(entre protons):  $\alpha_{\text{Fermi}} = \frac{G_F m_p^2}{4\pi} \approx 10^{-6}$ ;
- temps d'interaction et/ou vie moyenne typique de  $\sim 10^{-10} \text{ s}$ ;
- section efficace de  $\sim 10^{-33} \text{ m}^2$ ;
- échange de bosons  $W^\pm$  (courants chargés) et  $Z^0$  (courant neutre);
- $m_W = 80 \text{ GeV}$ , donc portée  $R = 10^{-18} \text{ m}$ .

Les interactions faibles sont décrites par le modèle de Glashow-Weinberg-Salam (1967) et mettent en jeu un couplage faible  $g_W$  et l'échange des bosons de jauge  $W^\pm$  et  $Z_0$ . Les réactions faibles sont caractérisées par une amplitude de probabilité de la forme

$$\text{Amplitude} \propto \frac{g_W^2}{q^2 - M_{W,Z}^2}. \quad (1.69)$$

où  $q^2$  est le transfert de quadri-impulsion porté dans l'échange du quantum. Dans la limite  $q^2 \rightarrow 0$ , la théorie de Glashow-Weinberg-Salam se ramène à la théorie des interactions faibles de Fermi (1935) où les interactions impliquant quatre particules sont



Figure 1.9 Théorie de Weinberg-Salam versus théorie de Fermi.



ponctuelles et de force  $G_F$ , la constante de Fermi (voir figure 1.9).

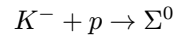
$$\text{Amplitude} \propto \frac{g_W^2}{q^2 - M_{W,Z}^2} \quad (1.70)$$

$$\xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{g_W^2}{M_W^2} \equiv G_F \cong 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (1.71)$$

À l'instar de la théorie de Fermi, le modèle de Glashow-Weinberg-Salam a l'avantage d'être *renormalisable*. C'est aussi est exemple d'unification de forces (faible et e.m.).

## Interactions fortes

Les interactions fortes sont fréquentes dans les collisions de hadrons à haute énergie. Elles impliquent, au niveau fondamental, les interactions entre quarks et gluons. On les retrouve par exemple dans la collision



dont la durée est d'environ  $\tau \simeq 10^{-23}$  s.

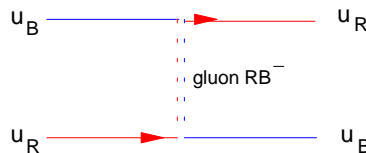


Figure 1.10 Exemple de diagramme de Feynman pour une interaction forte entre quarks.

Les interactions fortes (voir figure 1.10) sont caractérisées par les propriétés suivantes:

- mettent en jeu des particules portant une charge colorée (quarks et/ou gluons);
- couplage très fort:  $\alpha_s \simeq 1$ ;
- temps d'interaction et/ou vie moyenne typique de  $\sim 10^{-23}$  s;
- section efficace typique de  $\sim 10^{-30}$  m<sup>2</sup>;
- échange de gluons;
- confinement des quarks et gluons;
- liberté asymptotique;
- portée effective de  $R = 10^{-15}$  m en raison du confinement;

## Interactions fortes résiduelles

Les interactions fortes résiduelles se situent à l'échelle nucléaire. Il s'agit de forces efficaces entre hadrons qui persistent malgré le confinement des quarks et des gluons. Elles sont responsables de la cohésion des noyaux et se manifestent dans les collisions

hadroniques à basses énergies. La portée des interactions efficaces est finie ce qui correspond, selon l'approche de Yukawa, à des masses non-nulles pour les bosons d'échange, les mésons (voir figure 1.11).

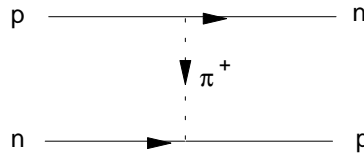


Figure 1.11 Exemple d'interactions fortes résiduelles.

## Interactions gravitationnelles

Il n'existe pas actuellement une théorie quantique gravitationnelle satisfaisante bien que la supergravité, les cordes ou les supercordes soient des bons candidats. Par contre, une théorie quantique gravitationnelle devrait posséder les caractéristiques suivantes:

- impliquent tout ce qui possède une énergie-masse et qui modifie la métrique (tenseur énergie-impulsion);
- couplage très faible: le couplage typique entre deux protons est  $\alpha_G = \frac{Gm_p^2}{4\pi} \simeq 4.6 \times 10^{-40}$ ;
- boson d'interaction de spin 2 correspond à une fluctuation quantique de la métrique: le graviton;
- la gravitation ayant une portée infinie implique un graviton de masse nulle.

## Tableau récapitulatif

Interactions	Gravité	Électromagnétique	Faibles	Fortes
Échange	10 gravitons	Photon	$Z^0, W^\pm$	8 gluons
Spin <sup>Parité</sup>	$2^+$	$1^-$	$1^-, 1^+$	$1^-$
Masse (GeV)	0	0	90, 81	0
Portée (m)	$\infty$	$\infty$	$10^{-18}$	$\infty, \leq 10^{-15}$
Source	Masse	Charge élec.	Charge faible	Couleur
Couplage	$4.6 \times 10^{-40}$	$\frac{1}{137}$	$8.1169 \times 10^{-7}$	$\simeq 1$
$\tau$ typique(s)		$10^{-20}$	$10^{-8}$	$10^{-23}$
$\sigma$ typique (m <sup>2</sup> )		$10^{-33}$	$10^{-44}$	$10^{-30}$





## 2 SOURCES ET DÉTECTEURS

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu des méthodes expérimentales utilisées en physique des particules.

### 2.1 Sources

#### Radioactivité

La radioactivité provient de la désintégration spontanée (faible) de noyaux lourds. Elle est caractérisée par l'émission d'une ou plusieurs des particules légères suivantes

$$e^-, e^+, p, n \text{ et } \alpha(He^{++})$$

dont les énergies sont de l'ordre de grandeur des énergies de liaison nucléaire (environ 10 MeV).

#### Rayons cosmiques

Les rayons cosmiques sont des particules très stables (principalement des protons, des neutrons et des photons) qui se propagent à des distances astronomiques avant d'entrer dans l'atmosphère terrestre. Dès lors, ils interagissent avec les particules qui s'y trouvent et peuvent générer une multitude de sous-produits. Cette source a le désavantage d'être incontrôlable. En effet, on ne connaît a priori ni la nature, ni l'énergie, ni la trajectoire de la particule. De plus, les rayons cosmiques sont absorbés par l'atmosphère de sorte que seulement une fraction de ceux-ci arrive jusqu'à la surface de la Terre. Par ailleurs, l'énergie des rayons cosmiques est beaucoup plus grande que celle associée à la radioactivité. On leur identifie deux sources principales: une source stellaire associée aux basses énergies et une source galactique caractérisée par des énergies pouvant aller jusqu'à  $10^3$  TeV.

## Accélérateurs

Outre les sources naturelles, les physiciens des hautes énergies se sont donnés des outils pour étudier les phénomènes subatomiques: les accélérateurs de particules. Ces appareils ont mené à un progrès phénoménal notamment en physique des particules en permettant de sonder la matière à des distances de plus en plus petites.

Ce progrès n'a été possible que grâce à un accroissement constant de l'énergie des particules projectiles. Cet accroissement répond à deux objectifs:

1. La production de nouvelles particules finales, ce qui est possible si l'énergie initiale dans le centre de masse est suffisante.
2. Sonder la matière de plus en plus profondément pour découvrir des sous-structures, en diminuant la longueur d'onde des particules incidentes ( $\lambda = \frac{h}{p}$ ) pour obtenir un plus grand pouvoir séparateur au cours de diffusions à hautes énergies (exemple: diffusion très inélastique d'électrons très énergétiques sur des protons).

### Principe

Une particule de charge  $q$  placée dans les appareillages qui produisent des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  subira une force (conséquence des équations de Maxwell)

$$\mathbf{F}(t) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Cette relation tient pour des systèmes relativistes si on définit:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m \mathbf{v} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

D'autre part, le taux de travail accompli sur une particule chargée ou le gain d'énergie par unité de temps de la particule s'écrit

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dp_0}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Notons que le champ  $\mathbf{B}$  n'effectue aucun travail sur la particule. Donc de façon générale, le champ électrique est nécessaire pour accélérer les particules tandis que les champs magnétiques sont utilisés pour contrôler leur trajectoire. Un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse des particules permet de maintenir celles-ci sur une trajectoire circulaire si nécessaire. Des aimants quadripolaires (et quelques fois sextupolaires) tiennent le faisceau de particules chargées focalisé sinon le faisceau aurait tendance à se diffuser étant formé de particules avec des charges électriques de même signe.

### Accélérateur linéaire (Linacs):

Dans un tube cylindrique sous vide sont alignées des électrodes cylindriques. On alterne la parité électrique des électrodes en les connectant à une source de radio-fréquence (voir figure 2.1). Les particules chargées sont accélérées pendant leur court passage entre deux électrodes successives puisque soumises à une différence de potentiel,  $V$ . Une fois que les particules sont dans les électrodes cylindriques et pendant la durée de leur trajet, il s'opère une inversion de polarité des électrodes avoisinantes si bien qu'à la sortie

elles sont soumises à la même différence de potentiel,  $V$ , et sont accélérées dans le même sens. Les électrodes sont conçues pour que le passage des particules à l'intérieur de chacune d'elles ait une durée correspondant à la moitié de la période de la radio-fréquence.

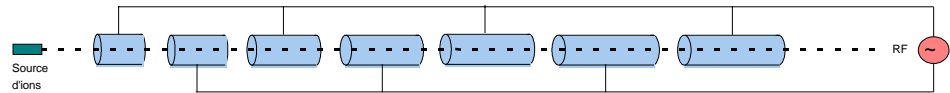


Figure 2.1 Accélérateur linéaire: Des électrodes avoisinantes sont soumises à une différence de potentiel oscillant à haute fréquence. La longueur de chaque électrode est ajustée pour qu'il ait toujours accélération des particules lors du passage entre deux électrodes.

Cette contrainte est toutefois moins importante pour une particule légère puisque dès qu'elle atteint une énergie cinétique comparable à sa masse, sa vitesse s'approche de  $c$ . Elle peut alors être accélérée par une onde électromagnétique produite dans une cavité résonnante. Les particules chargées, qui sont en général accélérées en paquets, se propagent alors en phase avec cette onde. Les accélérateurs linéaires à électrons permettent d'accélérer simultanément des positrons en alternant les paquets d'électrons et de positrons. Les positrons sont accélérés dans le même sens puisque soumis à une différence de potentiel,  $-V$ , à leur sortie des électrodes. Il est ensuite possible de séparer les faisceaux à la sortie de l'accélérateur grâce un champ magnétique.

Le plus grand de ces accélérateurs à électrons est encore celui de Stanford (U.S.A.) qui atteint une énergie de 20 GeV avec une longueur de 3 km. Depuis quelques années, ils est toutefois utilisé comme injecteur pour un projet plus ambitieux, le SLC. On y sépare les faisceaux électrons-positrons pour les orienter sur des trajectoires distinctes et, tout en continuant de les accélérer, on les guide vers une collision face-à-face (50 GeV sur 50 GeV) (voir figure 2.2).

## Accélérateurs circulaires (Synchrotrons)

L'ancêtre de ces appareils est le cyclotron, une invention due à Lawrence (1930). Il est basé sur l'idée de contenir la particule dans une région limitée à l'aide d'un champ magnétique. L'accélération est obtenue au moyen d'un champ électrique.

La source de particules est placée au centre d'une enceinte cylindrique sous vide. Les particules se propagent entre les deux pièces polaires d'un électro-aimant et sont donc constamment soumises à un champ magnétique uniforme  $B$ . L'appareil ressemble à un sandwich cylindrique coupé en deux le long de son diamètre (voir figure 2.3). Les électro-aimants ont une forme de D (d'où le nom de "dee"). Deux électrodes entre lesquelles est appliquée une tension variable à haute fréquence (HF) sont disposées dans l'espace séparant les deux D. Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un D, l'équation de mouvement s'écrit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

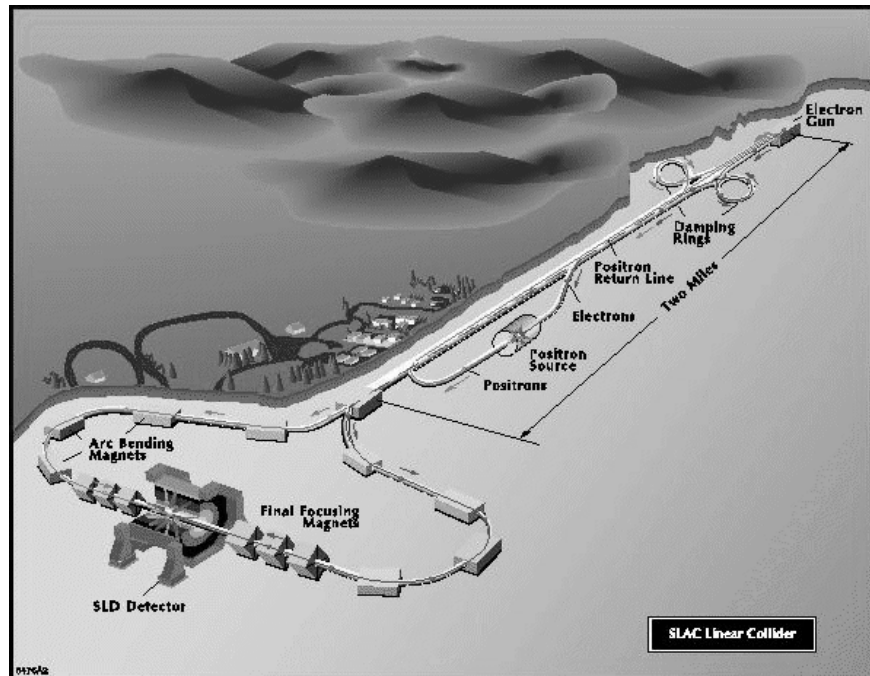


Figure 2.2 Le collisionneur SLC du SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) à Stanford, USA.



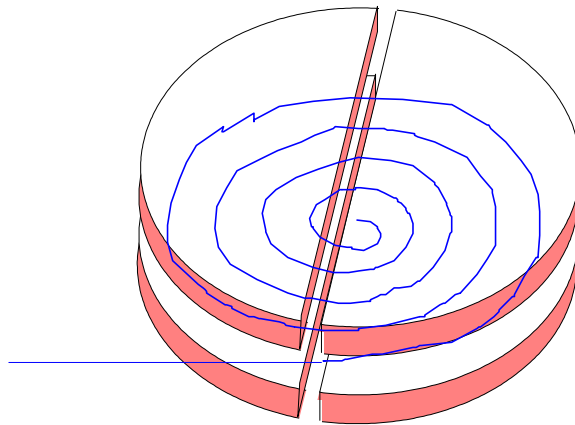


Figure 2.3 Cyclotron: la trajectoire des particules chargées est circulaire entre les électro-aimants en forme de D alors que celles-ci sont accélérées grâce à une tension appliquée dans la région séparant les deux D.

la vitesse  $|\mathbf{v}|$  étant constante.

Pour un champ uniforme et constant, si la vitesse initiale est perpendiculaire à la direction de  $\mathbf{B}$ , la trajectoire sera circulaire tout en demeurant dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  puisque

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{B} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

Le rayon de la trajectoire entre les D est donné par

$$\rho = \frac{\gamma m |\mathbf{v}|}{|q| |\mathbf{B}|} = \frac{|\mathbf{p}|}{|q| |\mathbf{B}|} \quad (2.3)$$

avec une fréquence  $\omega = \frac{|q| |\mathbf{B}|}{\gamma m}$ . Le cyclotron atteint rarement des vitesses relativistes. Dans ce cas,  $\gamma \simeq 1$  et  $\omega$  ne dépend pas de  $v$ :

$$\omega \simeq \frac{|q| |\mathbf{B}|}{m}.$$

Il est possible d'accélérer la particule à chaque passage d'un D à l'autre, en appliquant une tension haute fréquence bien synchronisée. Il en suit un accroissement d'impulsion de

$$\Delta \mathbf{p} = |q| |\mathbf{E}| \Delta t = |q| |\mathbf{E}| \frac{d}{|\mathbf{v}|} = \frac{|q|}{|\mathbf{v}|} V$$

où  $d$  est la distance entre les D et  $V$ , la tension appliquée.

Puisque le rayon de la trajectoire dépend de l'impulsion, le tout se traduit par un accroissement correspondant du rayon  $\rho$ , et la trajectoire ressemble globalement à une spirale faite de demi-cercles.

Pour un rayon, un champs magnétique et une impulsion exprimés en mètre, Tesla et GeV respectivement, (2.3) s'écrit ( $|q| = 1$ ),

$$|\mathbf{p}| = 0.3 |\mathbf{B}| \rho.$$

Par ailleurs, la direction de la courbure permet en général de déterminer le signe de la charge.

Lorsque la vitesse devient relativiste, la fréquence de rotation  $\omega = \frac{|q| |\mathbf{B}|}{\gamma m}$  est modifiée à chaque passage. Il est donc nécessaire de modifier la fréquence du champ électrique pour le synchroniser aux passages d'un paquet de particules au centre de la machine. C'est sur ce principe que sont construits les synchro-cyclotrons.

Toutefois, on atteint vite les limites raisonnables pour la dimension des électroaimants si on persiste à utiliser les synchro-cyclotrons pour des protons de plus de 1 GeV.

Finalement, dans les synchrotrons, on ajuste le champ magnétique  $\mathbf{B}$  pendant l'accélération de façon à maintenir le rayon de courbure du faisceau à peu près constant (voir figure 2.5). L'accélérateur consiste en: une série d'aimants dipolaire qui servent à courber la trajectoire, intercalés à des endroits stratégique des aimants quadripolaires (voir figure 2.3) pour focaliser le faisceau, des cavités résonantes à haute fréquence pour accélérer les particules et finalement des aires d'interactions où sont logés les détecteurs. Le faisceau lui-même est sous un vide presque parfait pour éviter des diffusions inutiles et des pertes d'intensité et d'énergie.

L'un des plus grands défis techniques dans la conception de ces appareils réside dans la focalisation optimale du faisceau. Puisque le faisceau est composé de particules de charges identiques, ces dernières ont tendance à s'éloigner les unes des autres causant une diffusion du faisceau de plus en plus grande. En plaçant un champ magnétique non-

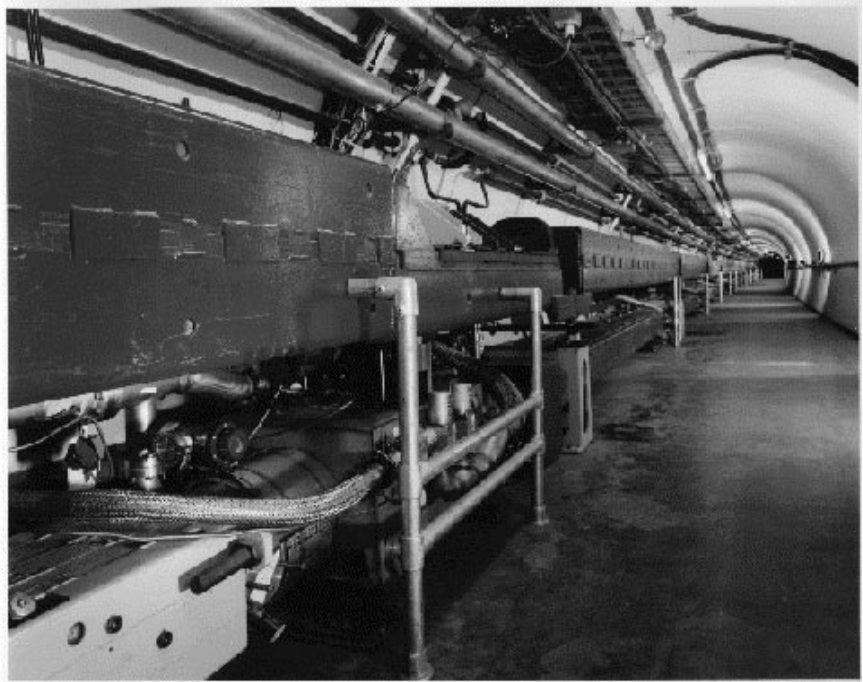


Figure 2.4 Aimants dans une section du tunnel au Tevatron, Fermilab à Batavia, USA.

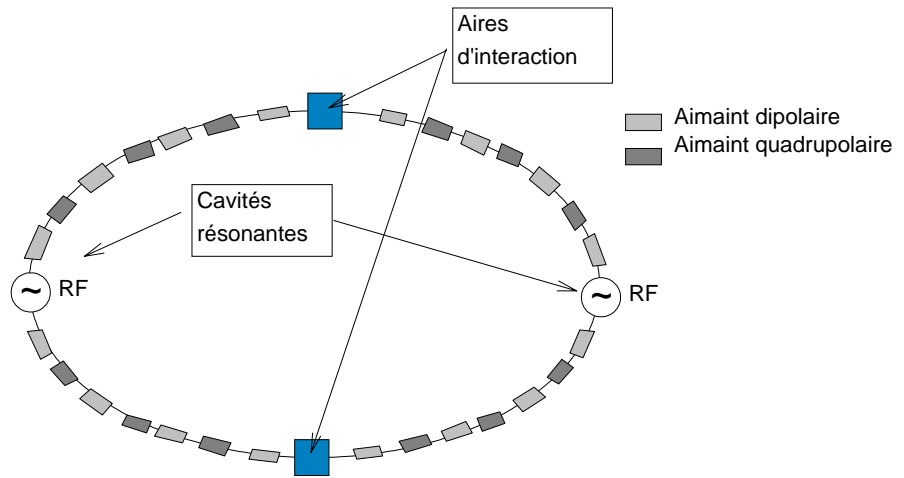


Figure 2.5 Schéma très élémentaire d'un synchrotron. Il faut noter qu'en général, un accélérateur est composé de beaucoup plus d'éléments (aimants sextupolaires, systèmes de refroidissement et de contrôle,...) et leur disposition est assez complexe.

homogène (quadrupôles), il est toutefois possible de focaliser le faisceau en ramenant les particules dans la direction principale.

## Accélérateurs de particules dans le monde

La conception optimale d'un accélérateur dépend d'un certain nombre de paramètres importants tels que ses dimensions, sa luminosité, son cycle de vie, la nature des particules accélérées et, non le moindre, le coût.

De façon générale, le collisionneur qui consiste en deux anneaux concentriques (synchrotrons) où sont accélérées les particules en sens inverses est un des plus performants puisque l'énergie disponible dans le centre de masse est très grande. Cependant, la probabilité d'une interaction lorsque deux faisceaux arrivent face-à-face est beaucoup plus faible que dans le cas d'une collision sur cible fixe à cause de la densité des faisceaux notamment. Cette probabilité est paramétrisée par une quantité appelée luminosité,  $\mathcal{L}$ . Le taux de réaction  $T$  pour un processus ayant une section efficace  $\sigma$  est alors

$$T = \mathcal{L}\sigma.$$

La luminosité dépend uniquement de la conception de l'accélérateur et non du processus:

$$\mathcal{L} = f \cdot n \cdot \frac{N_1 N_2}{A}$$

où  $f$  est la fréquence de révolution des particules,  $n$ , le nombre de paquets dans les faisceaux,  $N_1$  et  $N_2$ , le nombre de particules par paquet dans chaque faisceau et finalement,  $A$  est la section efficace des faisceaux dans le cas simple où ceux-ci se recouvrent complètement. La luminosité s'exprime en unités de  $\text{pb}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  où pb dénote une unité de surface appelée le picobarn (1 pb =  $10^{-36} \text{ cm}^2 = 10^{-40} \text{ m}^2$ ).

La nature des particules accélérées joue aussi un rôle important dans le choix du design. Par exemple, on sait que des particules chargées en mouvement accéléré émettent un rayonnement électromagnétique. Lorsque l'accélération est normale, comme c'est le cas pour une trajectoire circulaire, il est appelé *rayonnement synchrotron*. Il y a donc perte d'énergie même si on ne fait que maintenir les particules chargées sur leur trajectoire circulaire. L'énergie perdue par tour est donnée par

$$\Delta E = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 v^2 \gamma^4}{\rho}$$

où  $v$  est la vitesse des particules,  $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$  est le facteur relativiste et  $\rho$  le rayon de courbure du faisceau. Cependant, on voit aisément que la perte d'énergie est d'autant plus grande que la masse des particules est petite pour des faisceaux de même énergie. En effet

$$\gamma = \frac{E}{m},$$

et, par exemple, si on compare des faisceaux d'électrons et de protons de mêmes énergie et courbure,

$$\frac{(\Delta E)_e}{(\Delta E)_p} = \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^4 \simeq 10^{13}.$$

En fait, les derniers grands accélérateurs ont tous été construits sur le principe du collisionneur. La prochaine génération d'accélérateurs d'électrons (au-delà du TeV) devra être basée sur le principe des machines linéaires (voir figure 2.6).

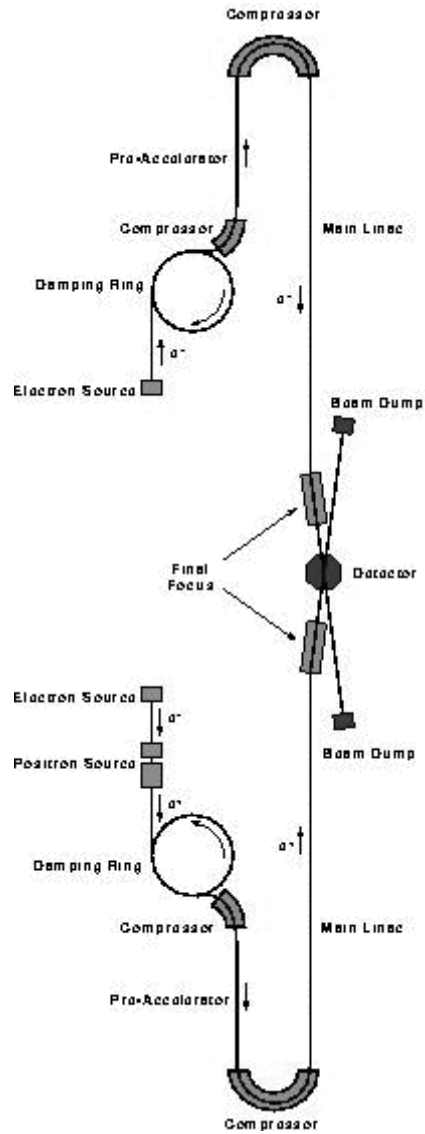


Figure 2.6 La prochaine génération de collisionneurs linéaires électron-positron, NLC (Next Linear Collider).

Collisionneurs				
	Projet/Laboratoire	Énergie (GeV)	Circonférence (km)	
$e^+e^-$	CESR (1979) Cornell–Ithaca, USA	6 + 6		
	PEP SLAC–Stanford, USA	15 + 15		
	PEP-II (1999) SLAC–Stanford, USA	9 + 3.1		
	PETRA (1992-) DESY–Hambourg, All.	23 + 23		
	TRISTAN (1999) Tsukuba–KEK, Japon	30 + 30		
	SLC (1989) SLAC–Stanford, USA	50 + 50		
	LEP I et II (1990-) CERN–Genève, Suisse	I: 45 + 45 II: 87 + 87	26.659	
	VLEPP (?) INP–Serpukov, Russie	500 + 500 1000 + 1000		
	$p\bar{p}, pp$	SppS (1981–1990) CERN–Genève, Suisse	315	6.911
		Tevatron (1987-) Fermilab–Batavia, USA	900 + 900	6.28
LHC (~2004) CERN–Genève, Suisse		7000 + 7000	26.659	
SSC (Annulé) SSC–Waxahachie, USA		20000 + 20000	87.12	
$ep$		HERA (1992-) DESY–Hambourg, All.	$e$ : 30 + $p$ : 820	6.336

Outre leur utilisation en physique des particules, les accélérateurs s'avèrent maintenant essentiels dans l'étude de la radiation synchrotron, pour des expériences en physique atomique, en physique du solide, en biologie et pour étalonner certains instruments d'astrophysique. Notons qu'ils se révèlent des instruments de vérification très efficaces de la théorie de la relativité restreinte.



Figure 2.7 Vue aérienne du Tevatron de Fermilab à Batavia, USA.



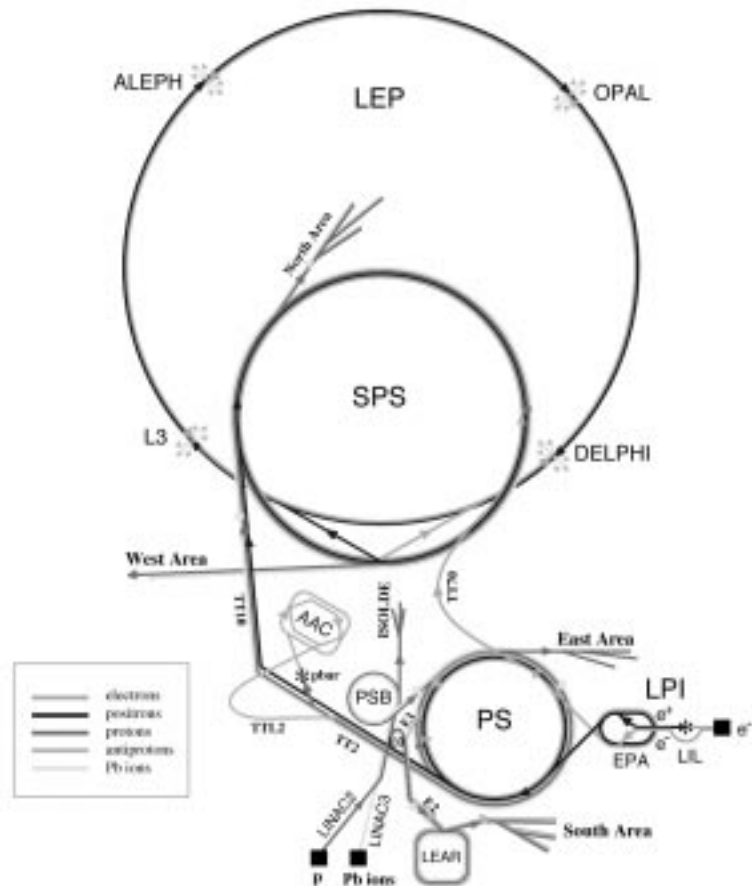


Figure 2.8 Plan des accélérateurs (PS, SPS et LEP) et des sites d'interactions (ALEPH, OPAL, L3 et DELPHI) du CERN à Genève, Suisse.

## 2.2 Détecteurs

Un détecteur sert à identifier les caractéristiques des particules en jeu dans une réaction. De manière plus générale, les détecteurs peuvent remplir de nombreuses fonctions.

- ▶ Décrire dans la mesure du possible la trajectoire de chacune des particules. À cet effet, on utilise plusieurs méthodes soit des petits compteurs dont la position et l'alignement permettent de déterminer la direction d'une particule, soit des détecteurs entrecroisés et empilés formant une matrice pouvant identifier les directions de plusieurs particules, ou bien encore tout simplement un détecteur à trace, qui comme son nom l'indique, trace la trajectoire des particules qui le traversent.

Mais ce n'est pas tout de "voir" la particule, il faut aussi être en mesure de:

- ▶ Déterminer l'impulsion et la charge électrique des particules chargées. Dans bien des cas, ces informations sont obtenues en observant la trajectoire de la particules dans un champ magnétique appliqué sur une partie du trajet;
- ▶ Identifier chaque particule en mesurant sa masse. Pour les particules chargées, la mesure simultanée de leur impulsion et de leur vitesse par l'ionisation d'un milieu mène à ce résultat;
- ▶ Finalement, la sélection d'événements par ce qu'on appelle "triggers" ou déclencheurs est une fonction cruciale dans les détecteurs pour éviter un cumul inutile d'événements qui ne sont pas pertinents dans l'étude en cours. Cette sélection doit s'effectuer très rapidement. Elle est en général effectuée par des détecteurs possédant un temps de réponse très court.

Ce ne sont pas les seules contraintes auxquelles sont confrontés les expérimentateurs. Le détecteur parfait devrait être aussi efficace quelque soit le type de particules, devrait prendre ses mesures sans influencer le système ou sans être affecté par le faisceau, devrait avoir une précision illimitée, etc... Dans la pratique, on fait appel à une combinaison de détecteurs différents chacun spécialisé à des tâches bien précises afin d'optimiser la quantité et la qualité des mesures effectuées. Ces dernières sont alors mises en commun et analysées.

Mais avant de décrire les principaux détecteurs, examinons quels principes physiques sont exploités dans la construction de ces appareils.

### Principes de détections

Pour qu'il y ait détection, il faut qu'il y ait interaction. La très grande majorité des détecteurs se basent sur les interactions électromagnétiques des particules avec la matière. C'est pourquoi, à quelques exceptions près, que seules les particules chargées sont détectées directement. Les photons, bien que neutres, se manifestent par leurs interactions avec ces particules chargées.

Les autres particules neutres n'ont aucune interaction électromagnétique. Ils ne peuvent être "vues" qu'à la suite de collisions, désintégrations ou tout autre processus produisant des particules chargées secondaires.

## Ionisation

Le processus le plus courant est l'ionisation. Le champ électromagnétique d'une particule chargée en mouvement accélère les électrons des atomes avoisinant sa trajectoire et les ionisent. L'ion est alors détectable soit chimiquement, soit électriquement (voir figure 2.9).

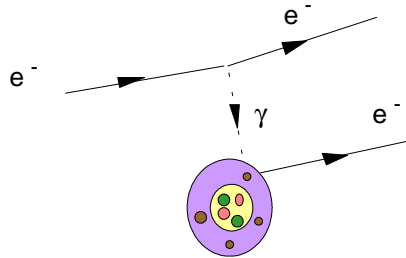


Figure 2.9 Processus d'ionisation d'un atome.

Dans le processus, la particule chargée continue sa trajectoire mais une partie de son énergie est absorbée par le milieu. La théorie permet de très bien prédire le taux de ces pertes qui sont principalement dues à la diffusion coulombienne par des électrons atomiques (à ne pas confondre avec la diffusion coulombienne avec les noyaux). Les calculs de Bethe, Bloch et d'autres dans les années '30 mènent à la formule de Bethe-Bloch qui exprime le taux de perte en fonction de la distance de pénétration  $x$ ,

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{DZ^2n_e}{v^2} \left[ \ln \left( \frac{2mv^2\gamma^2}{I} \right) - v^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

où  $m$ ,  $Z$  et  $v$  sont la masse, la charge et la vitesse de la particule respectivement ( $\hbar = c = 1$ ).  $\gamma$  est le facteur de Lorentz  $(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ . La constante  $D$  est donnée par

$$D = \frac{4\pi\alpha_{em}}{m}$$

alors que  $I$  est le potentiel d'ionisation moyen ( $I = 10Z$  eV pour  $Z > 20$ ). La fonction  $\delta$  tient en compte l'effet d'écran diélectrique. Finalement,  $n_e$  est la densité électronique du milieu.

En principe, la formule ci-haut s'applique seulement aux particules de spin-0 mais les corrections pour les particules de spin- $\frac{1}{2}$  sont petites et à toutes fins pratiques négligeables. À petite vitesse, le comportement de  $-\frac{dE}{dx}$  est dominé par le facteur  $\frac{1}{v^2}$  dans l'expression. Toutes les particules chargées passent par un minimum d'ionisation pour des valeurs  $v\gamma$  d'environ 3 ou 4. Finalement, pour de très grande impulsion,  $v$  est pratiquement l'unité et l'expression augmente logarithmiquement jusqu'à ce qu'elle soit contrebalancée par l'effet d'écran.

Une connaissance approfondie du milieu ionisé permet alors de déterminer la vitesse et la charge de la particule chargée.

## Diffusion de Coulomb

La particule chargée peut aussi interagir électromagnétiquement avec des noyaux lourds. C'est ce qu'on appelle la diffusion de Coulomb. (Voir figure 2.10) La réaction

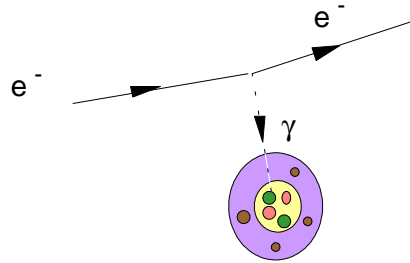


Figure 2.10 Diffusion de Coulomb (particule chargée avec noyau).

est en général plus brutale pour la particule incidente à cause de la masse du noyau. Ce processus est caractérisé :

- une cible immobile ou presque;
- une diffusion transverse ou un angle de diffusion appréciable;
- une collision élastique ou quasi-élastique (conservation de l'énergie).

## Rayonnement de freinage

Dans ce processus, la collision particule-noyau est accompagnée de l'émission d'un photon et donc se distingue de la diffusion de Coulomb par son inélasticité (voir figure 2.11). Des calculs détaillés donnent un taux de perte d'énergie pour des électrons relativistes (avec  $E \gg \frac{m}{\alpha_{\text{em}} Z^{\frac{1}{3}}}$ ) de

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{\lambda}$$

où  $\lambda$  est la longueur de radiation

$$\lambda^{-1} = 4 \frac{Z(Z+1)}{m^2} \alpha_{\text{em}}^3 n_a \ln \left( \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \right)$$

avec la densité atomique  $n_a$ . Contrairement à l'ionisation, le rayonnement de freinage dépend fortement de la masse de la particule chargée ( $\propto m^{-2}$ ) et sera dominant pour des particules peu massives (électrons et positrons).

## Absorption de photons par la matière

Les photons ont une forte probabilité d'être absorbés ou diffusés à de grands angles par les atomes dans un matériau. La densité  $I$  de photons monochromatiques d'un fais-

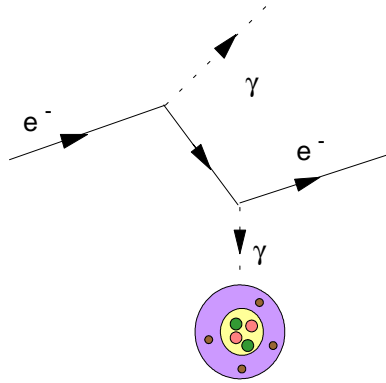


Figure 2.11 Rayonnement de freinage.

ceau (ou l'intensité d'un faisceau) varie selon

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{I}{\lambda}$$

où  $\lambda$  est le chemin libre moyen qui est inversement proportionnel à la densité du matériau et à la section efficace d'absorption ou de diffusion:

$$\lambda^{-1} = n_a \sigma_\gamma.$$

Intégrant l'équation précédente, on trouve

$$I(x) = I(x_0) e^{-(x-x_0)/\lambda},$$

ce qui indique une diminution exponentielle de l'intensité du faisceau en fonction de la distance de pénétration.

L'absorption de photons par la matière passe par trois processus qui contribuent tous à la section efficace totale  $\sigma_\gamma$ :

- **Effet photoélectrique:** Un photon absorbé libère un électron des couches plus ou moins profondes. Le spectre d'absorption du milieu dépend de l'énergie des photons mais est surtout caractérisé par des pics correspondant aux énergies de liaisons des électrons (voir figure 2.12).

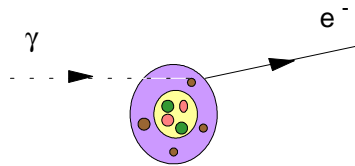


Figure 2.12 Effet photoélectrique.

- **Effet Compton:** L'effet Compton décrit le processus de diffusion d'un photon par la matière. Ce processus est inélastique (voir figure 2.13).
- **Création de paires:** Au delà d'un certain seuil d'énergie  $E^2 = 2m_e c^2$ , les photons peuvent, en présence d'un champ externe, induire la création d'une paire particule-antiparticule de masse dont les masse sont  $m_e$  (voir figure 2.14). On identifie deux contributions distinctes à la section efficace: une première où le champ externe est celui des électrons atomiques et une seconde où les photons interagissent avec le champ du noyau. À très haute énergie, la création de paires domine les effets photoélectrique et Compton dans l'expression de la section efficace totale  $\sigma_\gamma$ .

## Instrument de détection



Figure 2.13 Effet Compton

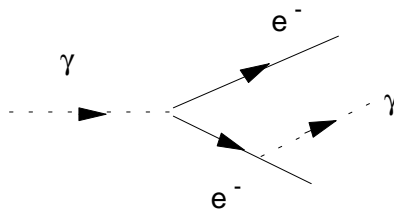


Figure 2.14 Création des paires particule-antiparticule.

## Chambre d'ionisation, compteur proportionnel et compteur de Geiger-Müller

Ces trois détecteurs sont en quelque sorte le même appareil qui fonctionne à trois régimes différents. Ils consistent d'un tube métallique rempli d'un gaz et traversé en son axe central par un fil de métal. Le fil et le cylindre sont soumis à une différence de potentiel  $V$  (voir figure 2.15). Lorsqu'une particule chargée traverse l'enceinte, le

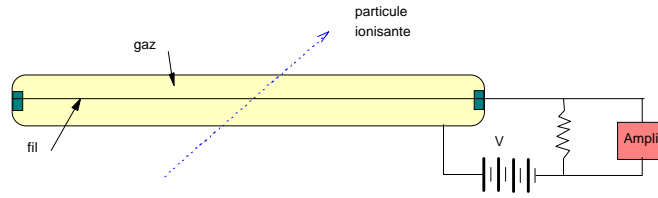


Figure 2.15 Chambre à ionisation.

gaz est ionisé. Électrons et ions se dirigent alors vers le fil ou la paroi du tube provoquant une impulsion électrique détectable aux bornes du détecteur. La tension  $V$  détermine la nature du signal. En deçà d'un certain seuil,  $V < V_{\text{seuil}}$ , l'ion et l'électron se recombinent avant même de pouvoir atteindre les bornes. Alors aucun signal et aucune ionisation ne sont détectables. Pour  $V > V_{\text{seuil}}$ , trois régimes sont possibles :

1. **Le régime de la chambre d'ionisation** où  $V_{\text{seuil}} < V < V_{\text{ion}}$  : Les ions primaires produits par la particule chargée sont recueillis. Le signal est alors proportionnel au nombre, à la charge et à l'énergie des particules.
2. **Le régime du compteur proportionnel** où  $V_{\text{ion}} < V < V_{\text{GM}}$  : Pour un potentiel suffisamment grand, les ions sont accélérés à des énergies telles qu'ils ionisent eux-mêmes les autres atomes du gaz. Il en découle une amplification du signal qui est typiquement proportionnelle à l'énergie des particules incidentes.
3. **Le régime du compteur de Geiger-Müller** où  $V > V_{\text{GM}}$  : Dans ce régime, une particule chargée déclenche l'ionisation complète du gaz. Le signal consiste alors en une brève impulsion dont l'intensité n'est plus proportionnelle à l'énergie.

Ces trois types de détecteurs peuvent aussi détecter des photons mais ceux-ci sont absorbés dans le processus.

### Chambre à fils (ou compteur proportionnel multifils):

Le compteur proportionnel multifils, introduit par G. Charpak (1968-70), est basé sur l'idée d'aligner côte-à-côte des compteurs proportionnels. Les tubes sont remplacés par deux plans cathodiques espacés de 2 mm entre lesquels on place des fils anodiques parallèles à tous les  $20\mu\text{m}$ . L'enceinte entre les deux plans est remplie de gaz ionisant (voir figure 2.16).

Une particule chargée passant à travers cet appareil produit une impulsion électrique sur le fil le plus proche de sa trajectoire. En disposant un deuxième détecteur de façon à ce que les fils des deux compteurs forment un quadrillage, on obtient la position de la par-



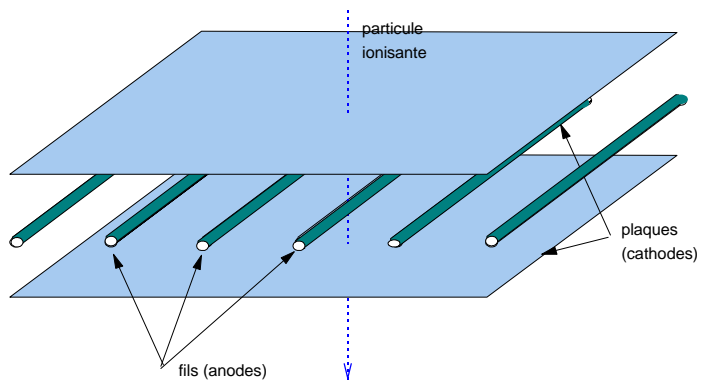


Figure 2.16 Schéma d'une chambre à multifils.

ticule. Un empilement des plusieurs de ces compteurs permet de déterminer la trajectoire de la particule à  $500\mu\text{m}$  près avec un temps de réponse typique de 30 ns.

### Chambre à streamer et chambres à flash:

Utilisées dans le régime de Geiger-Müller, des chambres proportionnelles génèrent des avalanches d'électrons dans le gaz qui à leur tour produisent un plasma appelé "streamer" visible à l'oeil nu. Ce détecteurs se nomme "chambre à streamer". La chambre est préparée en envoyant de courtes impulsions électriques de 10 à  $50\text{ kV cm}^{-1}$  entre des plaques transparentes parallèles. Lorsqu'une particule chargée passe dans la chambre, elle déclenche une série de décharges qui dessinent sa trajectoire. Celle-ci peut être photographiée ou enregistrée électroniquement. La résolution spatiale de ces appareils est typiquement de  $200\mu\text{m}$ .

Pour une impulsion de très haut voltage, il se forme une ionisation complète entre le point de passage de la particule et le fil, produisant ainsi un "flash". Dans ce régime, on parle de "chambre à flash". Elles sont formées d'une multitude de tubes transparents et sont donc limités dans leur résolution spatiale par le diamètre des tubes. Ces détecteurs sont toutefois plus simples et moins coûteux que des chambres à multifils, ce qui représente un avantage certain dans la construction de détecteurs de grande dimension tels que les calorimètres.

### Chambre à dérive

Les chambres à dérive représentent aussi un choix valable face aux chambres à multifils. Dans ces détecteurs, les fils sont séparés d'une bonne distance. L'avalanche d'électrons déclenchée par une particule chargée qui traverse le gaz met alors un certain temps avant d'être recueillie par les électrodes (voir figure 2.17). La trajectoire est reconstituée en tenant compte du temps de dérive de l'avalanche qui est typiquement de l'ordre  $2\mu\text{s}$  — ceci représente aussi une contrainte puisqu'un seul événement peut être reconstitué pendant ce temps. Avec une vitesse de dérive d'environ  $40\text{ km/s}$  et des dérivées typiques de  $10\text{ cm}$ , on atteint une résolution spatiale de  $0.1\text{ mm}$ .

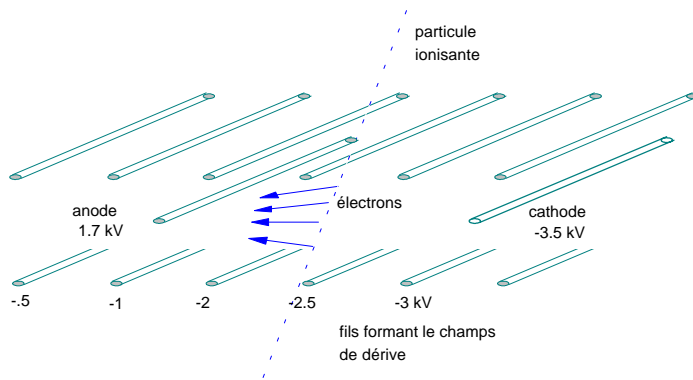


Figure 2.17 Schéma d'une chambre à dérive.

## Détecteur à semiconducteur

Dans le même ordre d'idée, on a mis au point plus récemment des détecteurs à semi-conducteurs, qui sont en quelque sorte, des chambres à ionisation au silicium. Les paires électron-trou y jouent le rôle des paires électron-ion dans le détecteur à gaz. Ces détecteurs, beaucoup plus petits, ont une résolution spatiale sans égal ( $5\mu\text{m}$ ) et sont souvent utilisés pour localiser précisément la position d'un vertex d'interaction. Par ailleurs, ils sont facilement endommagés par la radiation et ne peuvent être utilisés près du faisceau principal.

## Chambre de Wilson, chambre à bulles et émulsion photographique

Ces trois types de détecteurs sont maintenant beaucoup moins utilisés qu'il y a moins de vingt ans et ce, principalement parce qu'ils ont un temps de réponse trop élevé et qu'ils sont mal adaptés aux conditions qui prévalent dans les collisionneurs.

Les chambres de Wilson sont remplies de vapeurs d'alcool qui sont soudainement comprimées. Dans un état "superfroid", le gaz se condense à la moindre perturbation du milieu tel que le passage d'une particule chargée.

La chambre à bulles (inventée par Glaser) a connu des heures de gloire dans les années '60. Elle consiste en un récipient où de l'hydrogène liquide est maintenue sous pression pour être périodiquement (à toute les 0.1 s) relâchée rapidement. L'hydrogène liquide est donc temporairement à une température "superchaude" ( $T > T_{\text{ébullition}}$ ). Le passage d'une particule chargée déclenche la formation de bulles le long de la trajectoire. Le tout est photographié sous deux angles de vue, ce qui permet de reconstituer la trajectoire en trois dimensions (voir figure 2.18).

Finalement, les émulsions photographiques sont sensibles aux radiations. Le milieu enregistre chimiquement la trajectoires des particules. Les émulsions sont exposées pendant un certain temps puis ensuite doivent être développées et analysées. La résolution spatiale est excellente soit  $1\mu\text{m}$  mais la résolution temporelle est presque inexistante à cause des délais de développement.

## Compteur à scintillations

L'excitation d'atomes dans certains milieux peut induire la luminescence (scintillation) qui à son tour est détectable par des photomultiplicateurs. C'est ce principe qui est utilisé dans les compteurs à scintillations.

Le scintillateur peut être soit organique, inorganique, solide ou liquide. Dans tous les cas, le passage de particules chargées entraîne l'émission de lumière visible, dans le cas d'un cristal, ou ultraviolette (UV) dans des matériaux organiques. Dans ce dernier cas, des colorants sont incorporés aux matériaux pour convertir l'UV en lumière bleue visible par fluorescence. La lumière ainsi produite est ensuite guidée vers un tube photomultiplicateur. Celui-ci est formé d'une photocathode enduite d'une mince couche de métal alcalin. Les photons, en arrivant sur la photocathode, libèrent des électrons par effet photoélectrique. Le signal est alors amplifié en passant par une série d'électrodes pour donner une impulsion électronique rapide (voir figure 2.19).

Le temps de réponse total est très rapide — typiquement de 10 ns — ce qui fait de ces détecteurs des dispositifs de déclenchement idéaux ("trigger"). Un compteur à scintillation typique a des dimensions de  $1\text{m} \times 10\text{cm} \times 1\text{cm}$  et donc une faible résolution

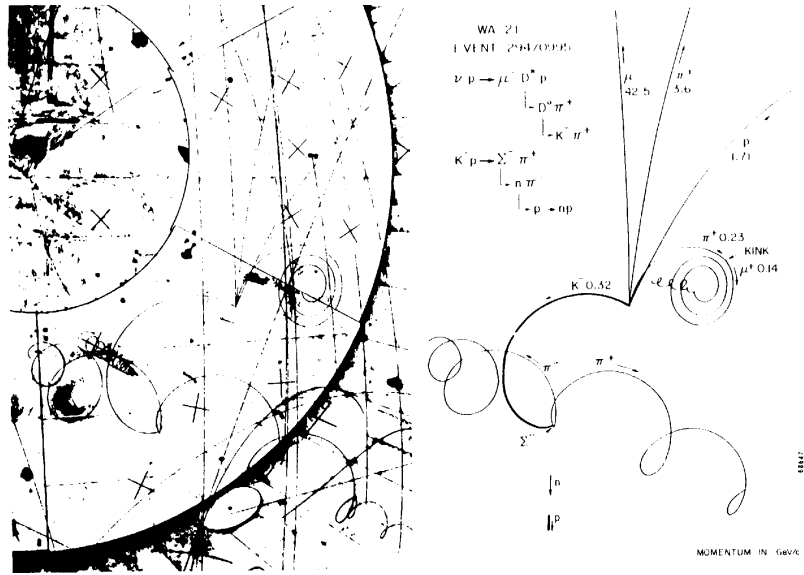


Figure 2.18 Exemple d'événement dans une chambre à bulle du SPS au CERN(gauche) et de sa reconstitution (droite).

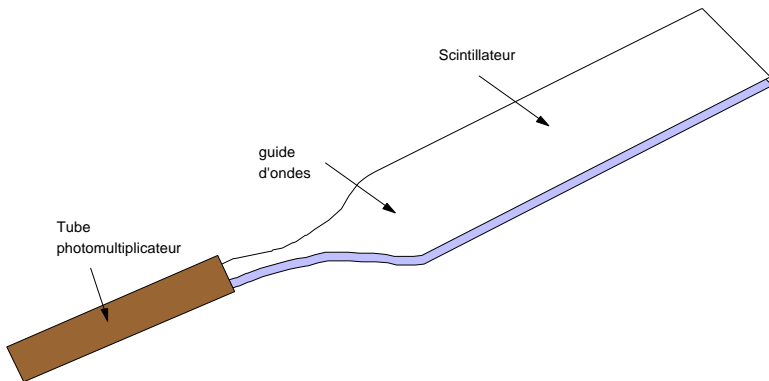


Figure 2.19 Schéma d'un scintillateurs.

spatiale. Une disposition judicieuse de plusieurs de ces détecteurs peut, bien sur, améliorer sensiblement cette résolution.

## Compteur Cerenkov

Lorsqu'une particule chargée traverse un milieu dispersif d'indice de réfraction  $n$  (i.e.  $c_{\text{milieu}} = \frac{c}{n}$ ), des atomes sont excités dans le voisinage de sa trajectoire et de la lumière est émise. Si la vitesse de la particule  $v$  est plus grande que celle de la lumière dans le milieu,  $c_{\text{milieu}} = \frac{c}{n}$ , alors un effet analogue au bang sonique émis par un avion supersonique se produit, c'est-à-dire qu'un front d'onde se forme et se propage à un angle  $\theta$  (voir figure 2.20),

$$\cos \theta = \frac{1}{vn}.$$

C'est ce qu'on appelle l'effet Cerenkov. Les compteurs Cerenkov permettent donc

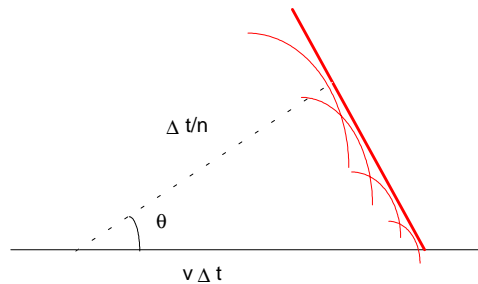


Figure 2.20 Forme du front d'onde dans l'effet Cerenkov.

de déterminer la vitesse des particules. On en utilise surtout deux types:

1. Les Cerenkov à seuil, où l'on compte les particules dont la vitesse dépasse une vitesse seuil. Ce seuil peut être ajusté en variant l'indice  $n$  dans les Cerenkov à gaz de pression variable.
2. Les Cerenkov différentiels, qui mesurent directement l'angle  $\theta$  et donc  $v$ .

## Détecteur à rayonnement de transition

Lorsqu'une particule chargée traverse l'interface entre deux milieux de constantes diélectriques différentes, un *rayonnement de transition* est émis. Celui-ci est causé par un changement brusque du champ électromagnétique créé par la charge en mouvement. Cet effet collectif avec le milieu peut être décrit classiquement. L'utilisation du rayonnement de transition dans les détecteurs est possible dans le régime où les particules sont très relativistes, ce qui correspond à des longueurs d'onde du domaine des rayons X.

## Compteur à gerbes et calorimètre

Avec la construction d'accélérateurs de plus en plus puissants, et des particules pouvant atteindre des énergies supérieures à 100 GeV, les méthodes de détection ont dû être modifiées. Une technique s'est révélée extrêmement performante dans ce nouveau régime d'énergie: la calorimétrie. Une particule de très haute énergie, lorsqu'elle est absorbée dans un détecteur, produit des particules secondaires qui à leur tour sont absorbées et produisent des particules tertiaires....Presque toute l'énergie de la particule est alors perdue par création de particules (gerbes ou avalanches) jusqu'au moment où l'ionisation ou l'excitation du milieu domine. Il est alors possible d'estimer précisément l'énergie (du moins avec autant de précision que par déflexion magnétique) aussi bien pour des hadrons neutres que pour des particules chargées. Ces détecteurs présentent l'inconvénient d'être destructifs. Par ailleurs, sur un plan plus pratique, ils permettent de mesurer très rapidement l'énergie de la particule initiale et de sélectionner les événements. De plus ils sont particulièrement adaptés à l'étude des *jets*. Il existe deux types de détecteurs de gerbes:

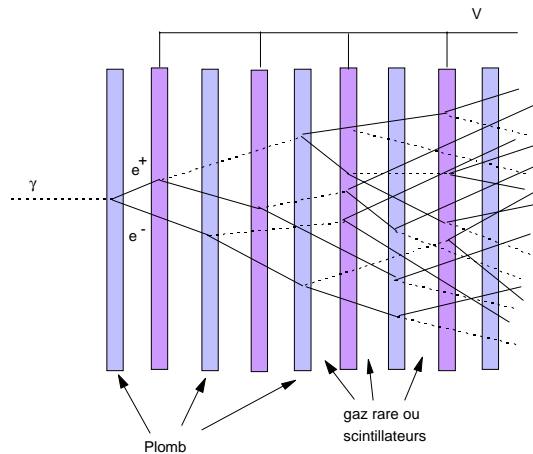


Figure 2.21 Schéma d'un calorimètre électromagnétique.

- Détecteurs de gerbes électromagnétiques:** Un détecteur de gerbes électromagnétiques consiste typiquement en une batterie de plaques absorbantes faite d'un matériau lourd (e.g. plomb) entre lesquelles on place un matériau doté de propriétés "actives" tel que l'argon liquide. Une tension est appliquée entre les plaques et les anodes. Les électrons provenant de l'ionisation sont alors recueillis par les anodes (voir figure 2.21).
- Détecteurs de gerbes hadroniques:** Les détecteurs de gerbes sont construits sur un

principe similaire mais visent la détection des particules hadroniques qui peuvent être neutres (e.g. neutrons). Il doivent donc être sensibles aux interactions fortes. C'est le seul type de détecteurs qui n'est pas *exclusivement électromagnétique*. En effet, dans le but d'amplifier le signal hadronique notamment dans la détection de neutrons, on utilise souvent des plaques d'uranium dans le détecteur. Lorsqu'un neutron entre en collision avec un noyau d'uranium, il peut y avoir fission du noyau et production de trois neutrons, qui à leur tour, peuvent interagir avec l'uranium et ainsi de suite. Les sections efficaces nucléaires étant plus faibles, les calorimètres hadroniques sont en général plus grands que les calorimètres électromagnétiques.

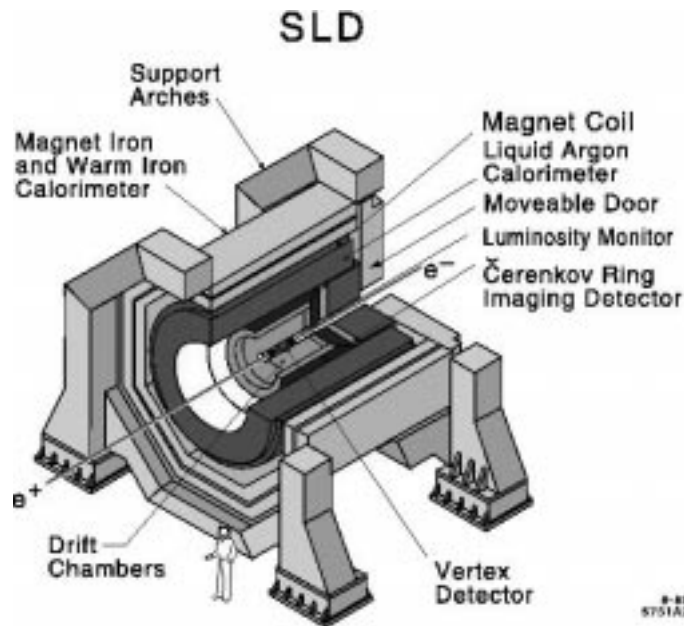


Figure 2.22 Schéma du détecteur SLD utilisé au collisionneur électron-positron du SLAC de Stanford, USA.

## Détecteur hybride

Les détecteurs qui sont décrits plus haut ont des caractéristiques différentes, chacun ayant des forces et des faiblesses. Les grands détecteurs modernes sont en fait des hybrides formés d'un regroupement quelques fois assez imposant (de la hauteur d'un édifice de trois étages) de ces différents appareils, exploitant ainsi chacune de leurs caractéristiques (voir figures 2.22, 2.23, 2.24 et 2.25). La reconstitution des événements est alors prise en charge par l'électronique et les ordinateurs (voir par exemple figures 2.26 et 2.27). Vu la complexité de ces appareils, on a mis au point des programmes de simulation basés sur la génération aléatoire de collisions (simulation Monte Carlo). Ces études permettent de déterminer l'efficacité du détecteur hybride dans une situation réaliste.

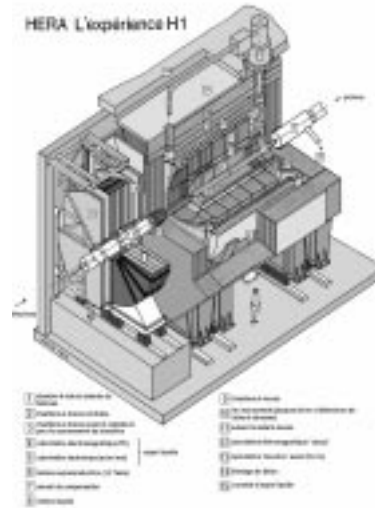


Figure 2.23 Schéma du détecteur H1 utilisé au collisionneur électron-proton de DESY de Hambourg, Allemagne.

De nombreux défis se posent durant la conception et le fonctionnement des détecteurs:

- ▶ **Le déclenchement:** Seulement une faible portion (typiquement 1 sur  $10^5$ ) des collisions sont intéressantes. Il faut donc prévoir des processus de veto rapide pendant les expériences à défaut de quoi il serait nécessaire d'accumuler et d'analyser une banque de données inutilement grande.
- ▶ **Le bruit:** Tout événement est caractérisé par ce qu'on appelle sa signature, c'est-à-dire une combinaison de traces ou particules. Souvent, cette signature peut être imitée par d'autres processus. Il est donc nécessaire d'analyser (par simulation ou autre méthode) quelle portion du signal vient de ce bruit.
- ▶ **Le taux de comptage:** Avant même d'entreprendre l'analyse d'un processus, il faut être en mesure d'estimer son taux de production. Le taux d'un événement par année est en général inacceptable. Celui-ci dépend de la section efficace mais aussi de la luminosité et du temps-machine disponible. Une bonne partie des travaux aux accélérateurs vise d'ailleurs à rehausser le plus possible ces paramètres.
- ▶ **La diminution de la section efficace en fonction de l'énergie:** Typiquement, la section efficace d'un processus exclusif à haute énergie varie selon

$$\sigma \sim \frac{1}{s}.$$

Cela qui implique que plus on sonde profondément la matière, moins les collisions sont fréquentes, i.e. le taux de comptage est plus faible.

- ▶ **Les rumeurs et les préjugés:** Finalement, la science étant une entreprise humaine, il



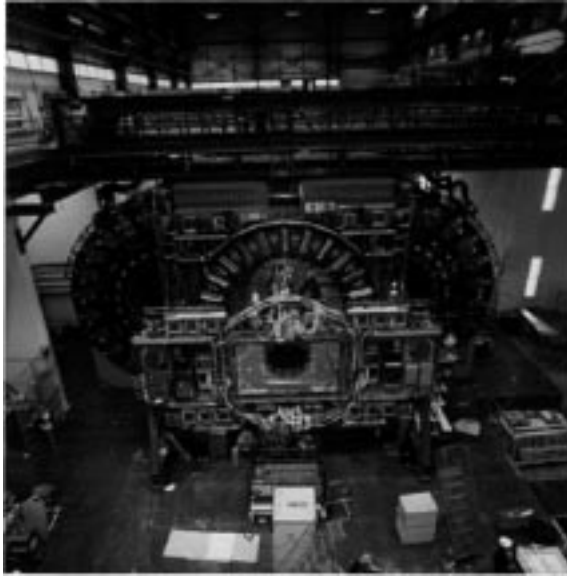


Figure 2.24 Détecteur CDF au Tevatron de Fermilab, Batavia, USA.

faut bien sûr prendre toutes les mesures possibles pour éviter que les préjugés en faveur de telle ou telle théorie ou résultat et les rumeurs de découverte par d'autres groupes n'influencent l'analyse et les conclusions.





Figure 2.25 Détecteur D0 au Tevatron de Fermilab, Batavia, USA.

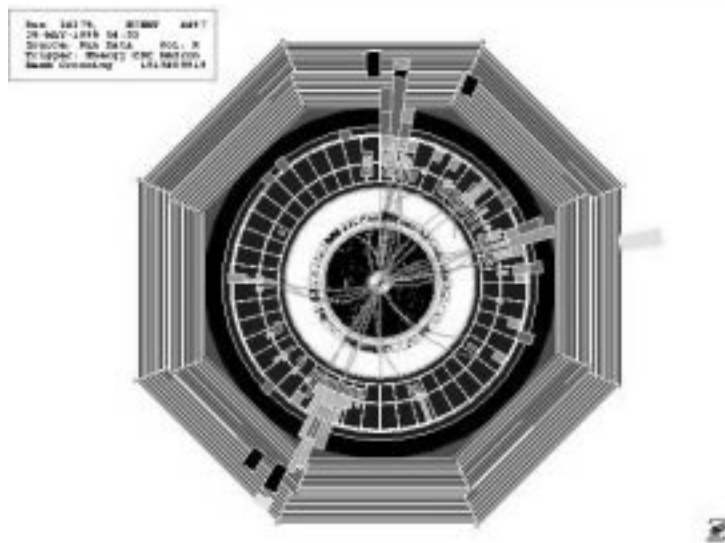


Figure 2.26 Exemple de reconstitution d'événements dans le détecteur SLD.

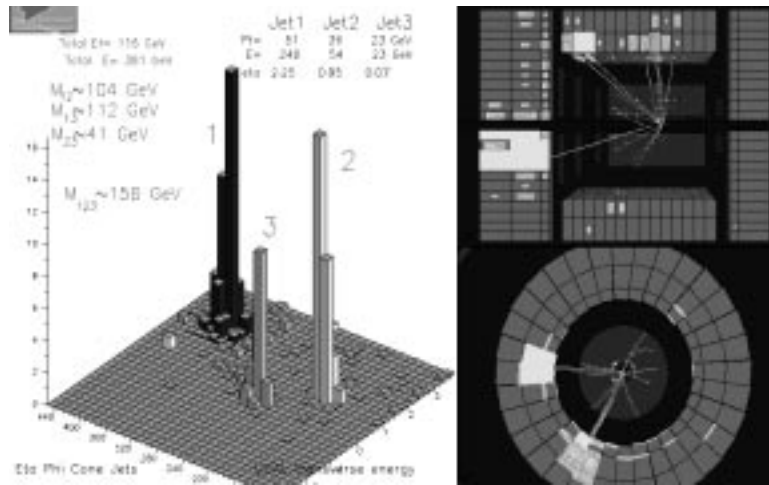


Figure 2.27 Exemple de reconstitution d'événements dans le détecteur ZEUS utilisé dans le projet HERA à DESY, Hambourg, Allemagne.



# 3 DIFFUSION ET INTERACTION ENTRE PARTICULES

La plupart des renseignements sur les propriétés des particules nous proviennent des expériences de diffusion. Ce chapitre décrit les notions élémentaires qui permettent de calculer les sections efficaces et les largeurs de désintégration. Nous introduisons d'abord les principales quantités cinématiques impliquées dans ces interactions. Puis, nous décrivons tour à tour la représentation des interactions, la matrice de diffusion,  $S$  et l'espace de phase, tous des éléments essentiels aux calculs des quantités observables.

## 3.1 Cinématique d'une réaction - Variables de Mandelstam

Les propriétés combinées d'invariance sous une transformation de Lorentz et de conservation de certaines quantités cinématiques s'avèrent très utiles dans l'analyse de la cinématique des processus de diffusion. En effet, dans un processus subatomique, les conditions suivantes sont respectées:

1. On peut définir un ou des invariants de Lorentz i.e. des quantités indépendantes du système de référence (Lab., CM, ...)
2. La quadri-impulsion est conservée dans une réaction.

Mandelstam a défini des variables cinématiques qui combinent ces deux propriétés. Pour une réaction impliquant deux particules initiales et deux particules finales

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (3.1)$$

(voir figure 3.1), on peut définir les trois quantités

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + m_2^2 \\ t &\equiv (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + m_3^2 \\ u &\equiv (p_3 - p_2)^2 = (p_4 - p_1)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1E_4 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + m_4^2 \end{aligned}$$

où les variables  $s$  et  $t$  sont respectivement le carré de la somme des énergies initiales

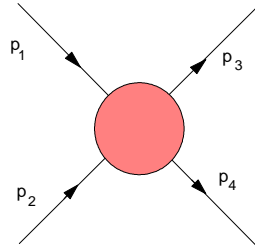


Figure 3.1 Processus à quatre corps.

dans le CM et le carré du transfert d'énergie-impulsion.



### Exemple 3.1

Prouver que:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (3.2)$$

où  $m_i$  = masse de la particules  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Posons dans le CM des particules incidentes

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \quad (3.3)$$

et pour des particules de masses identiques

$$m_i = m \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

$$|\mathbf{p}_1| = k = |\mathbf{p}_2|$$

$$\theta = \text{angle entre } \mathbf{p}_1 \text{ et } \mathbf{p}_3.$$

Alors la variable  $s$  se calcule comme suit

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= (E_1 + E_2)^2 = (2E_1)^2 \\ &= 4(k^2 + m^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

La variable  $t$  est donnée par

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 \\ &= p_3^2 + p_1^2 - 2p_3 \cdot p_1 \\ &= 2m^2 - 2(E_3 E_1 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1) \\ &= 2m^2 - 2\left(\sqrt{k^2 + m^2} \cdot \sqrt{k^2 + m^2} - k^2 \cos \theta\right) \\ &= -2k^2(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

alors que  $u$  est par symétrie ( $p_1 \leftrightarrow p_2$ )

$$\begin{aligned} u &= (p_3 - p_2)^2 \\ &= -2k^2(1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

## Système du centre de masse (4-corps)

On peut établir un certain nombre de relations pour un système à quatre corps (voir figure 3.2). En terme des variables de Mandelstam, les quantités dynamiques s'écrivent:

$$E_{1\text{CM}} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}$$

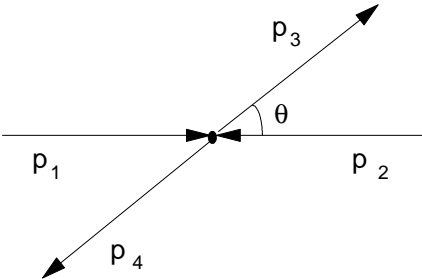


Figure 3.2 Collision dans le repère du centre de masse.



$$p_{\text{CM}} \equiv |\mathbf{p}_{1\text{CM}}| = |\mathbf{p}_{2\text{CM}}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (3.7)$$

$$E_{3\text{CM}} = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}$$

$$E_{4\text{CM}} = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}$$

$$p'_{\text{CM}} \equiv |\mathbf{p}_{3\text{CM}}| = |\mathbf{p}_{4\text{CM}}| = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}{2\sqrt{s}} \quad (3.8)$$

où

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

## Système du laboratoire (4-corps, cible fixe)

De la même façon, on peut écrire des relations semblables dans système du laboratoire (voir figure 3.3). Dans ce cas, on considère une des particules, la cible, est au repos,

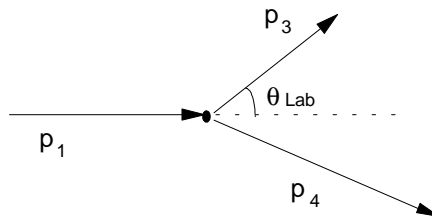


Figure 3.3 Collision dans le repère du laboratoire (cible fixe).

i.e. on peut assigner les impulsions suivantes

$$p_1 = (E_{1\text{Lab}}, 0, 0, p_{1\text{Lab}}) \quad (3.9)$$

$$p_2 = (m_2, 0, 0, 0) \quad (3.10)$$

$$p_3 = (E_{3\text{Lab}}, \mathbf{p}_{3\text{Lab}}) \quad (3.11)$$

$$p_4 = (E_{4\text{Lab}}, \mathbf{p}_{4\text{Lab}}) \quad (3.12)$$

où  $|\mathbf{p}_1| = p_{1\text{Lab}}$  est l'impulsion longitudinale dont la direction coïncide avec l'axe des  $z$ .

Alors

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{1\text{Lab}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 \\ &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_{1\text{Lab}} E_{3\text{Lab}} \\ &\quad + 2p_{1\text{Lab}} |\mathbf{p}_{3\text{Lab}}| \cos \theta_{\text{Lab}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

et

$$E_{i\text{Lab}}^2 = p_{i\text{Lab}} + m_i^2 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Il en découle que

$$E_{1\text{Lab}} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}$$

$$p_{1\text{Lab}} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2m_2}.$$

L'avantage de cette méthode est que puisque les variables de Mandelstam sont des invariants de Lorentz et que l'énergie-impulsion est conservée, il est possible de calculer ces quantités indépendamment du référentiel.

## La rapidité

La variable de rapidité est souvent utilisée pour représenter la direction d'une particule.

1. Lorsque le mouvement de la particule est identifié au système  $S'$ , i.e. que  $S'$  correspond au système de la particule qui a une vitesse  $\mathbf{V} = V\mathbf{k}$ , alors les transformations de Lorentz nous donnent

$$E' - p'_3 = \lambda(E - p_3)$$

$$E' + p'_3 = \frac{1}{\lambda}(E + p_3)$$

où  $\lambda = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$ . Pour la particule au repos dans  $S'$  ( $p'_3 = 0$ ,  $E' = m$ ), il est possible de récrire  $\lambda$  comme suit

$$\lambda = \frac{E + p_3}{E'} = \frac{E'}{E - p_3}. \quad (3.15)$$

La rapidité est alors

$$\eta = \ln \lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{1+V}{1-V}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{E + |\mathbf{p}|}{E - |\mathbf{p}|} \quad (3.16)$$

puisque  $p_3 = |\mathbf{p}|$ . De plus, on a

$$E + |\mathbf{p}| = me^\eta$$

$$E - |\mathbf{p}| = me^{-\eta}$$

$$E = m \cosh \eta$$

$$|\mathbf{p}| = m \sinh \eta. \quad (3.17)$$

2. En général,  $\mathbf{p}$  n'est pas parallèle à l'axe du faisceau (i.e. l'axe  $Oz$ ).

Les composantes perpendiculaire,  $p_T$ , et longitudinale de l'impulsion,  $p_L = p_3$ , de la particule sont alors non-nulles. Il est toutefois possible d'identifier le système  $S'$

avec une composante  $p'_L = 0$  et on aura encore

$$\lambda^2 = \frac{E + p_3}{E - p_3}$$

$$\eta = \ln \lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_3}{E - p_3} \quad (3.18)$$

où cette fois-ci

$$E' = \sqrt{m^2 + p_T^2}. \quad (3.19)$$

L'avantage d'utiliser la variable de rapidité devient évident lorsqu'on effectue une transformation de Lorentz parallèlement à  $\mathbf{p}_L$ . Cette transformation correspond à une différence de rapidité soit

$$\eta_b - \eta_a = \frac{1}{2} \ln \frac{E_b + p_{b3}}{E_b - p_{b3}} - \frac{1}{2} \ln \frac{E_a + p_{a3}}{E_a - p_{a3}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{E_b + p_{b3}}{E_a + p_{a3}} \cdot \frac{E_b - p_{b3}}{E_a - p_{a3}} \quad (3.20)$$

mais cette différence est une quantité invariante de Lorentz, c'est-à-dire

$$\eta_b - \eta_a = \frac{1}{2} \ln \frac{E'_b + p'_{b3}}{E'_a + p'_{a3}} \cdot \frac{E'_b - p'_{b3}}{E'_a - p'_{a3}}. \quad (3.21)$$

Sous la même transformation, bien sûr, la quantité  $\mathbf{p}_T$  est également invariante.

## 3.2 Les interactions en mécanique quantique

Rappelons quelques notions de mécanique quantique:

- les particules sont représentées par des états  $|\psi\rangle$  et,
- les observables physiques sont des valeurs moyennes d'opérateurs,  $Q$ , qui agissent sur  $|\psi\rangle$

$$q = \langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle$$

$$= \int dV \psi^* Q \psi.$$

où  $dV$  est l'élément de volume.

Considérons alors un processus d'interaction. Celui-ci est caractérisé par:

1. un état initial  $|i\rangle$  qui décrit une ou plusieurs particules dont les impulsions se situent entre  $p_i$  et  $p_i + dp_i$  à un moment  $t \rightarrow -\infty$  (longtemps avant l'interaction à  $t = 0$ ), et,
2. un état final  $|f\rangle$  qui décrit une ou plusieurs particules dont les impulsions se situent entre  $p_f$  et  $p_f + dp_f$  à un moment  $t \rightarrow \infty$  (longtemps après l'interaction).

Le taux de transition est alors donné par:

$$\omega = 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho_f(E_f)$$

où  $V$  est l'Hamiltonien des interactions, i.e.

$$H = H_0 + V.$$

Ce résultat est valide lorsque  $V$  est suffisamment petit pour être traité comme une perturbation du système dont l'Hamiltonien est  $H_0$  ayant des états propres  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$ .  $\rho_f(E_f)$  est la densité d'états finaux, c'est à dire  $\rho_f(E_f)dE_f =$  nombre d'états finaux dont l'énergie se situe entre  $E_f$  et  $E_f + dE_f$ .

On utilise généralement trois points de vue différents pour décrire l'évolution de la valeur moyenne  $q$  dans le temps:

### 1. Le point de vue de Schrödinger:

Le point de vue de Schrödinger consiste à inclure la dépendance temporelle de  $q$  dans l'état  $|\psi\rangle$ . Alors

$$|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle_S$$

$$Q = Q_S \quad \text{indépendant de } t.$$

L'état  $|\psi(t)\rangle_S$  obéit à l'équation de Schrödinger soit ( $\hbar = 1$ )

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = H |\psi(t)\rangle_S$$

où  $H$  est l'opérateur Hamiltonien. Si  $H$  est indépendant du temps, l'équation précédente a pour solution

$$|\psi(t)\rangle_S = T(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_S$$

où l'opérateur d'évolution  $T$  s'écrit

$$T(t, t_0) = \exp(-iH(t - t_0)).$$

### 2. Le point de vue des interactions:

Le point de vue des interactions est plus utile pour décrire les interactions entre particules. Dans ce cas, aussi bien les états  $|\psi(t)\rangle_I$  que les opérateurs peuvent avoir une dépendance temporelle. Le principal avantage de ce point de vue est qu'il permet de traiter séparément la partie de l'Hamiltonien qui causent les interactions ( $V$  dans notre cas). Les représentations des états sont reliées par une transformation unitaire

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S$$

et la dépendance temporelle de l'état  $|\psi(t)\rangle_I$  s'écrit

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = -H_0 |\psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I.$$

Mais

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} &= e^{iH_0 t} (H_0 + V) e^{-iH_0 t} \\ &= e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} + e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \\ &= H_0 + e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}. \end{aligned}$$

On définit, du point de vue des interactions, l'opérateur  $V_I$  tel que

$$V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= -H_0 |\psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I \\ &= V_I(t) |\psi(t)\rangle_I. \end{aligned}$$

De façon générale, les représentations des opérateurs sont reliées par la transformation unitaire suivante

$$Q_I(t) = e^{iH_0 t} Q e^{-iH_0 t}$$

avec dépendance temporelle

$$i \frac{d}{dt} Q_I(t) = [Q_I(t), H_0]$$

qui ne dépend que de la partie  $H_0$  de l'Hamiltonien.

### 3. Le point de vue de Heisenberg:

Finally, le *point de vue de Heisenberg* choisit d'exclure toute dépendance temporelle de l'état  $|\psi\rangle$ , i.e.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi\rangle_H \quad \text{indépendant de } t \\ Q &= Q_H(t). \end{aligned}$$

On note que la valeur moyenne de l'opérateur,  $q$ , doit être la même dans tous les points de vue, notamment ceux de Schrödinger et de Heisenberg. Si on pose que les états  $|\psi(t)\rangle_S$  et  $|\psi\rangle_H$  coïncident dans les deux représentations à l'instant  $t_0$ , i.e.  $|\psi(t_0)\rangle_S = |\psi\rangle_H$  et  $Q_S = Q_H(t_0)$ , il s'en suit que  $q(t)$

$$\begin{aligned} \langle \psi | Q_H(t) | \psi \rangle_H &= \langle \psi(t) | Q_S | \psi(t) \rangle_S = \\ &= \langle \psi(t_0) | T^{-1}(t, t_0) Q_S T(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle_S \\ &= \langle \psi | T^{-1}(t, t_0) Q_H(t_0) T(t, t_0) | \psi \rangle_H. \end{aligned}$$

Donc, la dépendance temporelle de l'opérateur  $Q$  dans la représentation des interactions s'écrit

$$Q_H(t) = T^{-1} Q_H(t_0) T$$

où ici, pour simplifier,  $T \equiv T(t, t_0)$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} Q_H(\mathbf{r}, t) &= i \frac{d}{dt} [T^{-1} Q_H(t_0) T] \\ &= i \left[ \frac{dT^{-1}}{dt} Q_H(t_0) T + T^{-1} Q_H(t_0) \frac{dT}{dt} \right] \\ &= i [i H T^{-1} Q_H(t_0) T - i T^{-1} Q_H(t_0) T H] \\ &= - [H Q_H(t) - Q_H(t) H] \\ &= [Q_H(t), H]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Puisque, dans cette représentation, toute la dépendance temporelle est contenue dans l'opérateur, on conclut que **les quantités conservées sont associées à des opérateurs qui commutent avec l'Hamiltonien.**

De façon plus générale, si l'opérateur  $Q$  dépend explicitement du temps dans la re-

présentation initiale, on écrit

$$i \frac{dQ}{dt} = i \frac{\partial Q}{\partial t} + [Q, H].$$

### 3.3 La matrice de diffusion, $S$

La matrice de diffusion  $S$  est un élément important du traitement quantique des interactions. Considérons un état  $|a\rangle$  qui décrit une ou des particules à un moment  $t_a$  et un état  $|b\rangle$  qui décrit une ou des particules à un moment  $t_b$ . La probabilité de trouver le système dans l'état  $|b\rangle$ , quand le système était dans un état  $|a\rangle$  est donnée par  $|C_{if}(t_b, t_a)|^2$  où

$$C_{fi}(t_b, t_a) = \langle b | U(t_b, t_a) | a \rangle$$

avec  $U(t_b, t_a)$  un opérateur unitaire ( $U^\dagger U = I$ ) puisqu'il décrit l'évolution temporelle de l'état  $|a\rangle$  du moment  $t_a$  au moment  $t_b$  où il prend la forme de l'état  $|b\rangle$ . Cet opérateur vient directement de l'Hamiltonien des interactions  $V$  dans

$$H = H_0 + V.$$

Dans les limites respectives  $t_a \rightarrow -\infty$  et  $t_b \rightarrow +\infty$ , les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  redeviennent des états propres de  $H_0$  (e.g. des particules libres) qu'on identifie aux états initial  $|i\rangle$  et final  $|f\rangle$ . On définit alors l'opérateur  $S$  comme la limite

$$S = U(+\infty, -\infty) = \lim_{\substack{t_a \rightarrow -\infty \\ t_b \rightarrow +\infty}} U(t_b, t_a)$$

avec pour éléments de matrice

$$S_{fi} = \langle f | U(+\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle$$

qui composent ce qui est appelé la matrice de diffusion  $S$ .

La matrice  $S$  est unitaire. Cette importante propriété découle de la conservation de la probabilité. Considérons la probabilité de trouver le système dans n'importe quel état final. Cette quantité doit être l'unité

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_f |C_{fi}(+\infty, -\infty)|^2 \\ &= \sum_f \langle f | S | i \rangle \langle f | S | i \rangle^* \\ &= \sum_f \langle i | S^\dagger | f \rangle \langle f | S | i \rangle \\ &= \langle i | S^\dagger S | i \rangle \end{aligned}$$

et donc  $S$  est unitaire

$$S^\dagger S = I.$$

Il est utile de séparer la matrice de la façon suivante

$$S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi} \quad (3.23)$$

$$= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) M_{fi} \quad (3.24)$$

où  $T$  est appelée la matrice de transition.  $P_f$  et  $P_i$  sont les quadri-vecteurs d'énergie-

impulsion totale des états final et initial et la fonction- $\delta$

$$\delta^4(P_f - P_i) = \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \delta(E_f - E_i).$$

assure que ces quantités sont conservées dans la diffusion. Dans l'expression (3.23), on peut facilement identifier la composante de  $S_{fi}$  qui laisse l'état initial intact i.e. le premier terme  $\delta_{fi}$ . Par ailleurs, le second terme est responsable des transitions d'un état  $|i\rangle$  vers des états  $|f\rangle$  distincts de  $|i\rangle$  (i.e.  $i \neq f$ ). La probabilité de transition correspondante s'écrit, pour  $i \neq f$ ,

$$\begin{aligned} P &= |C_{fi}(+\infty, -\infty)|^2 \\ &= |\langle f | S | i \rangle|^2 \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(P_f - P_i) \delta^4(0) \sum_f |M_{fi}|^2. \end{aligned}$$

De plus, il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} \delta^4(p) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{ip \cdot x} \\ \delta^4(0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = \frac{1}{(2\pi)^4} \mathcal{V}t \end{aligned}$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume d'intégration. Il en découle que le taux de transition par unité de volume macroscopique est donné par

$$\omega_{fi} = \frac{P}{\mathcal{V}t} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \sum_f |M_{fi}|^2. \quad (3.25)$$

Ce dernier résultat requiert une somme sur les différents états finaux. Il est toutefois nécessaire de pondérer cette somme par l'espace de phase disponible.

## 3.4 Espace de phase

Une particule est décrite par sa position et son impulsion. Or, la probabilité de trouver une particule libre dans un élément de volume de l'espace des positions et des impulsion  $d^6V = d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$  est indépendante de la position et de l'impulsion (invariance de Poincaré). Il en découle que le nombre d'états est proportionnel à l'élément de volume, soit

$$\# \text{ d'états dans } dV = dN = \frac{d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (\hbar = 1)$$

Pour le cas de solutions de la forme onde plane (puisque'il s'agit ici de particules libres)

$$\psi = Ae^{ip \cdot x},$$

on peut choisir de normaliser la fonction d'onde de façon que

$$\int d^3\mathbf{x} \psi^* \psi = \int d^3\mathbf{x} |A|^2 = 1$$

sans nuire au caractère général du traitement qui suit.

Après intégration sur les espaces des positions et des impulsions, le nombre d'états

devient

$$\# \text{ d'états} = \int dN = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}.$$

On définit la densité d'états par unité d'énergie,  $\rho(E)$ , comme le nombre d'états ayant une énergie entre  $E$  et  $E + dE$

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{dN}{dE} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d}{dE} \int d^3\mathbf{p} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \mathbf{p}^2 \frac{dp}{dE} \int d\Omega \end{aligned}$$

où  $d\Omega$  est l'élément d'angle solide.

Mais l'élément de volume  $d^3\mathbf{p}$  dans l'espace des impulsions n'est pas un invariant de Lorentz alors que la quantité  $\frac{d^3\mathbf{p}}{E}$  l'est. Considérons plutôt un espace de phase invariant de Lorentz que l'on peut récrire sous la forme

$$\begin{aligned} \int dN &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E(2\pi)^3} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dE}{(2\pi)} \cdot 2\pi\delta(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \theta(E) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi\delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

où la fonction- $\delta$  reflète la relation masse-énergie pour des particules relativistes et  $\theta$  est la fonction de Heaviside

$$\theta(p_0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } p_0 > 0 \\ 0 & \text{pour } p_0 < 0 \end{cases}$$

Elle assure que seules les configurations ayant une énergie positive contribueront comme il se doit. Cet espace de phase représente la probabilité de trouver une particule libre avec une impulsion entre  $p_\mu$  et  $p_\mu + dp_\mu$ . L'espace de phase (3.26) généralisé à  $n$  particules indépendantes s'écrit alors

$$\begin{aligned} dN_{tot} &= dN_1 dN_2 dN_3 \cdots dN_n \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi\delta(p_j^2 - m_j^2) \theta(p_{j0}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

## 3.5 Section efficace

La section efficace est une mesure de la probabilité d'un processus de diffusion. Intuitivement, elle correspond à la surface perpendiculaire au flux des projectiles qui décrit la zone d'interaction autour de la cible. Si l'interaction est plus forte, la zone d'interaction — ou la section efficace — augmente et la probabilité de diffusion en est d'autant plus élevée (voir figure 3.4). L'unité de section efficace couramment utilisées est le barn définit comme suit

$$\begin{aligned} 1 \text{ barn} &= 10^{-24} \text{cm}^2 = 10^{-28} \text{m}^2 \\ &= 2568 \text{ GeV}^{-2} \quad (\text{dans les unités naturelles}). \end{aligned}$$



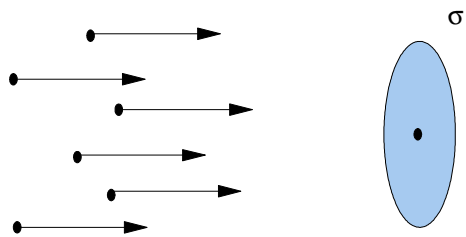


Figure 3.4 La section efficace d'une réaction.

Considérons la diffusion mettant en jeu deux particules initiales et  $n - 2$  particules finales (voir figure 3.5):

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n \quad (3.28)$$

Le calcul de la section efficace met en jeu le taux de transition (3.25) pondéré par

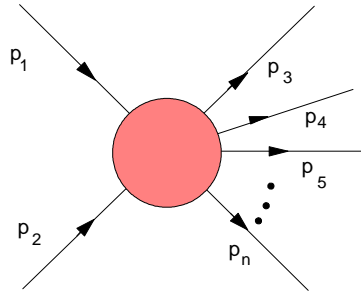


Figure 3.5 Collision de deux particules.

l'espace de phase disponible (3.27). En général, on connaît les énergies et impulsions des particules initiales (e.g. faisceau quasi-monochromatique de particules dans un accélérateur). L'espace de phase pour  $n - 2$  particules finales doit par contre être incluse

$$dN_3 dN_4 \dots dN_n = \prod_{f=3}^n \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0})$$

si bien que le taux de transition *pondéré* est donné par

$$\bar{\omega}_{fi} = \frac{P}{\mathcal{V}t} = (2\pi)^4 \sum_f \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \cdot dN_3 dN_4 \dots dN_n.$$

Pour une densité de flux de particules initiales  $\phi$  (# de particules par unité de temps et de surface), la section efficace différentielle s'écrit

$$d\sigma = \frac{\bar{\omega}_{fi}}{\phi}.$$

Le flux est proportionnel à la vitesse relative projectile-cible, c'est-à-dire

$$|v_1 - v_2| = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right|.$$

Dans le système du laboratoire

$$|v_1 - v_2| = \frac{p_{1\text{Lab}}}{E_1} = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2m_2 E_1}$$

où  $E_{2\text{Lab}} = m_2$ .

Cependant, le flux, qui s'écrit dans le système du laboratoire  $\phi = 2E_1 \cdot 2E_2 \cdot |v_1 - v_2|$ , est un invariant de Lorentz de la forme

$$\begin{aligned} \phi &= 2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \\ &= 2\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \end{aligned}$$

Finalement, la section efficace est donnée par

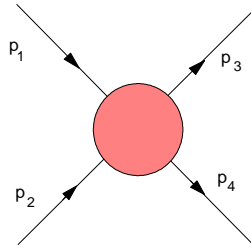
$$\sigma(1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}} \int \left[ \prod_{f=3}^n \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2$$

Dans les cas de processus non polarisés, (en général les faisceaux des particules initiales ne sont pas polarisés), on substitue

$$|M_{fi}|^2 \longrightarrow \overline{\sum_i} \sum_f |M_{fi}|^2$$

où  $\overline{\sum_i}$  et  $\sum_f$  signifient respectivement la moyenne sur les états de spin possibles des particules initiales et la somme sur les états de spin des particules finales.

## Diffusion (4-corps)



Processus à quatre corps.

Rappelons les définitions des variables de Mandelstam pour les système à 4 corps:

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_1^2 + 2E_1 E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + m_2^2 \\ t &\equiv (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1 E_3 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + m_3^2 \\ u &\equiv (p_3 - p_2)^2 = (p_4 - p_1)^2 \\ &= m_1^2 - 2E_1 E_4 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 + m_4^2. \end{aligned}$$

Alors la section efficace du processus s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{|\mathbf{p}_{1CM}|^2} |M_{fi}|^2.$$

Des limites cinématiques s'appliquent: dans le centre de masse,

$$\begin{aligned} t &= (E_{1CM} - E_{3CM})^2 - (|\mathbf{p}_{1CM}| - |\mathbf{p}_{3CM}|)^2 \\ &\quad - 4|\mathbf{p}_{1CM}||\mathbf{p}_{3CM}|\sin^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \end{aligned}$$

$$= t_0 - 4 |\mathbf{p}_{1\text{CM}}| |\mathbf{p}_{3\text{CM}}| \sin^2 \frac{\theta_{\text{CM}}}{2}$$

où  $\theta_{\text{CM}}$  est l'angle entre  $\mathbf{p}_{1\text{CM}}$  et  $\mathbf{p}_{3\text{CM}}$  et

$$t_0 = (E_{1\text{CM}} - E_{3\text{CM}})^2 - (|\mathbf{p}_{1\text{CM}}| - |\mathbf{p}_{3\text{CM}}|)^2$$

La variable  $t$  ne peut prendre que des valeurs entre

$$t(\theta_{\text{CM}} = \pi) = t_1 \leq t \leq t_0 = t(\theta_{\text{CM}} = 0)$$

où

$$t_0(t_1) = \left[ \frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2}{2\sqrt{s}} \right] - (|\mathbf{p}_{1\text{CM}}| \mp |\mathbf{p}_{3\text{CM}}|)^2.$$

## 3.6 Largeur de désintégration et vie moyenne

Le traitement est similaire pour un processus de désintégration (voir figure 3.6):

$$1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n$$

La mesure de probabilité d'une désintégration s'exprime en terme de sa largeur de dé-

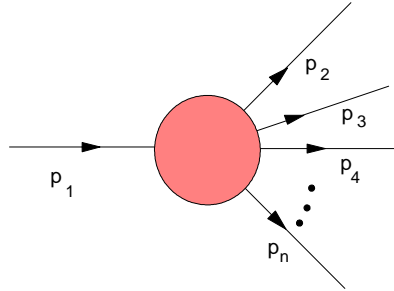


Figure 3.6 Désintégration d'une particule en  $n - 1$  particules finales.

sintégration  $\Gamma$ . Cette quantité représente la largeur à demi-hauteur du pic dans le spectre d'énergie de la désintégration. L'interprétation physique de cette quantité est directement reliée à l'incertitude dans la mesure de la masse (ou l'énergie). On sait que le principe d'incertitude établit un lien entre  $\Delta E$  et  $\Delta t$ , les incertitudes dans la mesure de l'énergie et du temps:

$$\begin{aligned} \Delta E \cdot \Delta t &\geq 1 \\ \Gamma \cdot \tau &\geq 1 \end{aligned}$$

Puisque  $\Delta E \approx \Gamma$  et  $\Delta t \approx \tau$ , la vie moyenne de la particule, il est naturel de retrouver la relation

$$\Gamma = \tau^{-1}.$$

La largeur de désintégration  $\Gamma$  est calculée en fonction des éléments de la matrice de

transition et de l'espace de phase disponible, i.e.

$$\tau^{-1} = \Gamma(1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{2m_1} \int \left[ \prod_{f=2}^n \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2.$$

Pour des particules non polarisées on substitue  $|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{\sum_i \sum_f |M_{fi}|^2}$  dans l'équation précédente. Cette expression permet de calculer la vie moyenne,  $\tau$ .

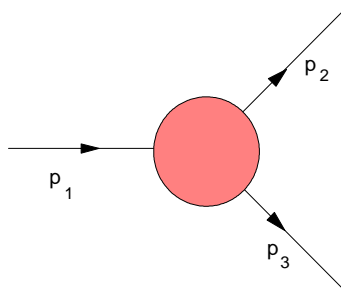
Si une particule de masse  $m_1$  et d'énergie-impulsion  $(E_1, \mathbf{p}_1)$  possède une vie moyenne  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ , alors la probabilité qu'elle survive pendant un temps  $\Delta t$  ou plus est donnée par

$$P(\Delta t) = e^{-\frac{\Gamma \Delta t}{\tau}} = e^{-\frac{m_1 \Gamma \Delta t}{E_1}}$$

et la probabilité qu'elle parcourt une distance  $\Delta x$  ou plus est

$$P(\Delta x) = e^{-\frac{m_1 \Gamma \Delta x t}{|\mathbf{p}_1|}}.$$

## Désintégration en 2 corps



Dans une désintégration en 2 corps la cinématique est très simple:

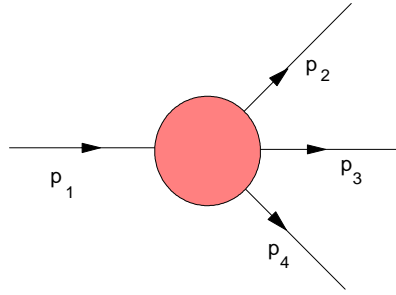
$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{m_1^2 - m_3^2 + m_2^2}{2m_1} \\ |\mathbf{p}_2| &= |\mathbf{p}_3| \\ &= \frac{\left[ (m_1^2 - (m_2 + m_3)^2) (m_1^2 - (m_2 - m_3)^2) \right]^{\frac{1}{2}}}{2m_1} \end{aligned}$$

La largeur de désintégration se simplifie pour donner

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_2|}{m_1} |M_{fi}|^2 d\Omega$$

où  $d\Omega_2 = d\varphi_2 d(\cos \theta_2)$  associé à la particule 2.

## Désintégration en 3 corps



Dans une réaction impliquant trois particules finales, l'espace de phase combinée à la fonction- $\delta$  de la matrice de transition donne

$$\bar{N}_{tot} = \int \left[ \prod_{f=2}^4 \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)$$

où  $P_f = \sum_f p_f = p_2 + p_3 + p_4$  et  $P_i = p_1$ .

Posons les invariants

$$s_{24} = (p_2 + p_4)^2, \quad s_{34} = (p_3 + p_4)^2.$$

En insérant les relations

$$1 = \int ds_{24} \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \quad 1 = \int ds_{34} \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2)$$

dans  $\bar{N}_{tot}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \bar{N}_{tot} &= \int \left[ \prod_{f=2}^4 \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \cdot 2\pi \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(p_{f0}) \right] \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \cdot \int ds_{24} \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \int ds_{34} \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2). \end{aligned}$$

Les fonctions- $\delta$  permettent d'intégrer sur les énergies  $p_{20}$ ,  $p_{30}$ , et  $p_{40}$  et sur l'impulsion  $\mathbf{p}_4$ :

$$\begin{aligned} \bar{N}_{tot} &= \int \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^5 8 E_2 E_3 E_4} \cdot ds_{24} ds_{34} \cdot \delta(E_1 - E_2 - E_3 - E_4) \\ &\quad \cdot \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3, \\ p_{f0} &= E_f = \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m_f^2}. \end{aligned}$$

Dans le repère du centre de masse,  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $E_1 = \sqrt{s} = m_1$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} d^3 p_2 &= 2\pi |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| d\cos\theta_{23}, \\ d^3 p_3 &= 4\pi |\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3|, \end{aligned}$$

où  $\theta_{12}$  est l'angle entre  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  et on a intégré sur trois angles dont l'espace de phase dépend trivialement. L'expression ci-haut devient

$$\begin{aligned} \bar{N}_{tot} &= \int d|\mathbf{p}_2| d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta_{23} \cdot ds_{24} ds_{34} \cdot \frac{|\mathbf{p}_2|^2 |\mathbf{p}_3|^2}{4(2\pi)^3 E_2 E_3 E_4} \\ &\quad \cdot \delta(\sqrt{s} - E_2 - E_3 - E_4) \delta(s_{24} - (p_2 + p_4)^2) \delta(s_{34} - (p_3 + p_4)^2). \end{aligned}$$

Utilisant un changement de variables en faveur de  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$ ,

$$d|\mathbf{p}_2| d|\mathbf{p}_3| d\cos\theta_{23} = J \cdot dE_2 dE_3 dE_4$$

où  $J$  est le Jacobien de la transformation,

$$J = \frac{\partial(|\mathbf{p}_2|, |\mathbf{p}_3|, \cos\theta_{23})}{\partial(E_2, E_3, E_4)} = \frac{E_2 E_3 E_4}{|\mathbf{p}_2|^2 |\mathbf{p}_3|^2}$$

Les intégrales sur  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  sont triviales et on obtient

$$d\bar{N}_{tot} = \frac{1}{16(2\pi)^3 m_1^2} ds_{24} ds_{34} = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_2 dE_4 \quad (3.29)$$

ou

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32m_1^3} ds_{24} ds_{34} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8m_1} dE_2 dE_4 \quad (3.30)$$

Le dernier résultat est significatif: l'espace de phase est indépendant de  $s_{24}$  et  $s_{34}$ . Donc, à moins qu'il y ait une dépendance explicite de la matrice de transition en fonction de  $s_{24}$  et  $s_{34}$  comme dans le cas de pics à la Breit-Wigner, la distribution des événements suivant les masse invariants  $s_{24}$  et  $s_{34}$  doit être uniforme.

Par ailleurs, seule une région dans l'espace des  $s_{24}$  et  $s_{34}$  est cinématiquement permise: pour une valeur de  $s_{24}$  donnée,  $s_{34}$  est minimum ou maximum lorsque  $\mathbf{p}_3$  et  $\mathbf{p}_4$  sont parallèles ou anti-parallèles:

$$\begin{aligned} (s_{34})_{\min} &= (E'_3 + E'_4)^2 - \left( \sqrt{E_3'^2 - m_3^2} - \sqrt{E_4'^2 - m_4^2} \right)^2 \\ (s_{34})_{\max} &= (E'_3 + E'_4)^2 - \left( \sqrt{E_3'^2 - m_3^2} + \sqrt{E_4'^2 - m_4^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $E'_3$  et  $E'_4$  sont les énergies des particules 3 et 4 dans le référentiel du CM des particules 2 et 4

$$E'_3 = \frac{s_{24} - m_2^2 - m_4^2}{2\sqrt{s_{24}}} \quad E'_4 = \frac{m_1^2 - s_{24} - m_3^2}{2\sqrt{s_{24}}}. \quad (3.32)$$

(voir figure ??)

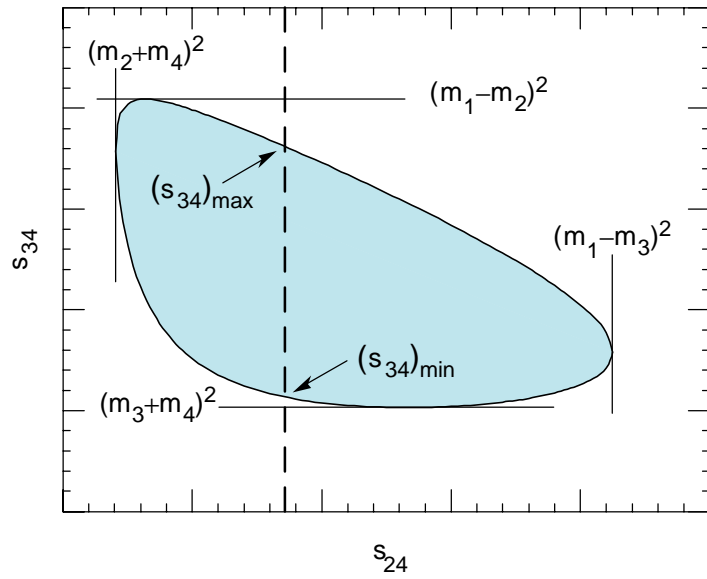


Diagramme de Dalitz: espace de phase disponible dans une désintégration à trois corps.





# 4 SYMÉTRIES DE L'ESPACE-TEMPS

La première étape de toute analyse scientifique en est une de classification des éléments et des processus qui font partie de cette analyse. En physique des particules, cette classification a tout d'abord consisté à déterminer lesquels des processus possibles étaient permis et lesquels étaient interdits. Après une étude exhaustive, il fut possible de classer les particules en leur associant des nombres quantiques et de déterminer des lois de conservation qui devaient (ou non) être respectées durant un processus d'interaction. Par ailleurs, il est important de mentionner que toute classification ou loi de conservation implique la présence de symétries. Ces symétries jouent un rôle crucial dans l'élaboration du Modèle Standard des particules élémentaires.

## 4.1 Symétries en mécanique quantique

Lorsqu'on effectue une transformation physique sur l'appareillage pendant une expérience sur un système, et que le résultat demeure inchangé, on dit que le système étudié est invariant sous cette transformation.

Le traitement de cette transformation en mécanique quantique requiert que celle-ci soit une transformation unitaire. Cette condition est essentielle pour que l'observable, i.e. la valeur moyenne d'un opérateur, reste le même. Par exemple, si la transformation a pour effet de modifier notre perception de l'état initial et final d'un processus, on peut écrire

$$\begin{aligned}|i'\rangle &= U|i\rangle \\ |f'\rangle &= U|f\rangle\end{aligned}$$

où  $U$  représente la transformation unitaire sur les états. La transition de l'état initial à l'état final requiert la matrice- $S$  et, puisque le résultat demeure inchangé, les éléments de matrice sont invariants sous la transformation

$$\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle &= \langle f'|S|i'\rangle \\ &= \langle f|U^\dagger S U|i\rangle\end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur de transformation  $U$  commute avec la matrice- $S$

$$[S, U] = 0. \tag{4.1}$$

Comme la matrice- $S$  est relié à l'Hamiltonien,  $U$  doit aussi commuter avec ce dernier

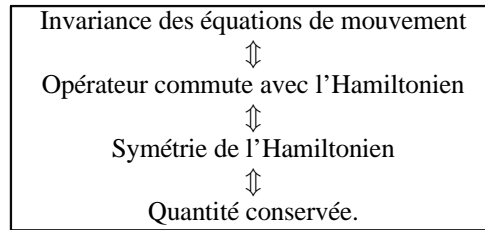
$$[H, U] = 0, \quad (4.2)$$

pour que le système soit invariant. Rappelons l'expression (3.22) qui implique que, si tel est le cas, on peut associer à la transformation  $U$  une quantité conservée. La conclusion précédente peut être formulée sous la forme plus générale du théorème de Noether pour la mécanique quantique:

**Theoreme 4.1 Théorème de Noether :**

À toute transformation qui laisse invariante les équations de mouvement ou autrement dit, qui commute avec l'Hamiltonien, on peut associer une quantité conservée.

Plus schématiquement:



L'opérateur de transformation étant unitaire, il peut s'écrire

$$U = e^{i\varepsilon A}$$

où  $A$  est hermitique. D'autre part, on identifie deux types de transformation et/ou symétrie:

1.  **$U$  est une transformation continue (e.g. translation, rotation):**

On peut, dans ce cas, examiner l'effet d'une transformation infinitésimale ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$U = e^{i\varepsilon A} \simeq 1 + i\varepsilon A.$$

Si la transformation laisse les observables physiques invariante, le commutateur (4.1) entraîne

$$[S, A] = 0$$

ce qui implique que l'observable associée à  $A$  est conservée. Par ailleurs, considérons des états initial et final qui sont des états propres de l'opérateur  $A$

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle$$

$$A|f\rangle = a_f|f\rangle,$$

le commutateur  $[S, A]$  étant nul, la valeur moyenne

$$\langle f|[S, A]|i\rangle = 0$$

est aussi nulle, ce qui implique

$$(a_f - a_i)\langle f|S|i\rangle = 0$$

où

$$(a_f - a_i) = 0 \quad \text{si } \langle f|S|i\rangle \neq 0.$$

Autrement dit, les valeurs propres de  $A$  sont conservées durant la transition  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ . L'opérateur  $A$  définit donc une constante du mouvement.

2.  $U$  est une transformation discrète (e.g. parité, conjugaison de charge,...):

Dans ce cas, une action double de l'opérateur de transformation laisse le système invariant, i.e.

$$U^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

Si  $U$  a des états propres  $|\psi_U\rangle$  dont les valeurs propres sont définies comme suit

$$\begin{aligned} U |\psi_U\rangle &= \eta_U |\psi_U\rangle \\ U^2 |\psi_U\rangle &= (\eta_U)^2 |\psi_U\rangle \end{aligned}$$

où  $\eta_U$  sont les valeurs propres tel que

$$\eta_U = \pm 1.$$

$U$  est alors hermitique et  $\eta_U$  sont les observables.

La discussion qui précède peut aussi être généralisée aux symétries internes de l'Hamiltonien comme nous le verrons plus loin.

## 4.2 Invariance sous une translation

Les propriétés d'une particule libre ne dépendent pas de sa position. En effet, les équations de mouvement associées sont invariantes sous une translation. L'effet d'une translation infinitésimale,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ , sur la fonction d'onde est

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \\ &= \psi(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \\ &= \left(1 + \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right) \psi(\mathbf{x}) \\ &\equiv D\psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ou  $D$  est l'opérateur infinitésimal (ou le générateur) de la translation

$$D \equiv \left(1 + \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right).$$

Une translation finie dans l'espace par  $\Delta\mathbf{x}$  s'obtient par une action répétée de l'opérateur de translation infinitésimale, soit

$$\begin{aligned} D_f &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\Delta\mathbf{x}}{n} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^n \\ &= \exp(-i\mathbf{p} \cdot \Delta\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où  $\Delta\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n\delta\mathbf{x}$  et,  $\mathbf{p} = i\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}$  est donc le générateur de translation. Il en découle que

<p>Invariance sous translation 3D</p> $[D, H] = 0 \implies [D_f, H] = 0 \implies [\mathbf{p}, H] = 0$ <p><math>\mathbf{p}</math> est une quantité conservée.</p>
--

Il est facile de généraliser ce résultat à un système invariant sous une translation

en quatre dimensions, i.e. dans l'espace-temps, en substituant dans le calcul précédent  $\mathbf{x} \rightarrow x_\mu$  et  $\mathbf{p} \rightarrow p_\mu$ . On obtient

Invariance sous translation 4D $\Updownarrow$ $[p_\mu, H] = 0$ $\Updownarrow$ $p_\mu$ est une quantité conservée.
---

## 4.3 Rotation en trois dimensions

Considérons maintenant un système dont les équations de mouvement sont invariantes sous une rotation. L'effet d'une rotation infinitésimale autour de l'axe des  $z$ , se traduit par le changement de variable  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$  (en coordonnées sphériques) dont dépend la fonction d'onde:

$$\begin{aligned}
 \psi(\phi) \rightarrow \psi'(\phi) &= \psi(\phi + \delta\phi) \\
 &= \psi(\phi) + \delta\phi \cdot \frac{\partial\psi(\phi)}{\partial\phi} \\
 &= \left(1 + \delta\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \psi(\phi) \\
 &\equiv R\psi(\phi)
 \end{aligned}$$

ou  $R$  est l'opérateur infinitésimal (ou le générateur) de la rotation

$$R \equiv \left(1 + \delta\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

Une rotation finie dans l'espace par  $\Delta\phi$  s'obtient par une action répétée de l'opérateur de rotation infinitésimale, soit

$$\begin{aligned}
 R_f &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} R^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \delta\phi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\right)^n \\
 &= \exp(-iJ_z \cdot \Delta\phi)
 \end{aligned}$$

où  $\Delta\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} n\delta\phi$ . L'opérateur de moment angulaire,  $J_z = i\frac{\partial}{\partial\phi} = i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$  est donc le générateur de rotation autour de l'axe des  $z$ . Il en découle que

Invariance sous rotation autour de $Oz$ $\Updownarrow$ $[R, H] = 0 \implies [R_f, H] = 0 \implies [J_z, H] = 0$ $\Updownarrow$ $J_z$ est une quantité conservée.
--

Un système à symétrie sphérique est invariant sous une rotation autour de n'importe quel

axe et par conséquent

Invariance sous rotation arbitraire
$\Updownarrow$
$[\mathbf{J}, H] = 0$
$\Updownarrow$
$\mathbf{J}$ est une quantité conservée.

Il est à noter que  $\mathbf{J}$  est l'opérateur de moment angulaire total. Lorsque le spin d'une particule est non nul

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

où  $\mathbf{L}$  est le moment angulaire orbital et  $\mathbf{S}$  est celui de spin. L'invariance sous rotation implique la conservation de  $\mathbf{J}$  mais ne signifie pas nécessairement que  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{S}$  sont conservés séparément. De plus, en mécanique quantique, toutes les composantes du moment angulaire ne commutent pas entre-elles et donc seulement  $|\mathbf{J}|^2$  et  $J_z$  sont observables simultanément.

## 4.4 Parité

La transformation correspondant à une réflexion dans l'espace,

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x},$$

définit l'opérateur de parité (unitaire discret) sur une fonction d'onde

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(t, \mathbf{x}) = \mathcal{P}\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(t, -\mathbf{x}).$$

Pour des fonctions propres de  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{P}\psi_P(t, \mathbf{x}) = \eta_P\psi_P(t, \mathbf{x})$$

où  $\eta_P$  et  $\psi_P$  sont les valeurs et les fonctions propres respectivement. Puisque après deux réflexions

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2\psi_P(t, \mathbf{x}) &= \psi_P(t, \mathbf{x}) \\ &= \eta_P^2\psi_P(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

les valeurs propres  $\eta_P$  correspondant à la parité prennent les valeurs

$$\eta_P \begin{cases} +1 & \text{pour } \psi_P(t, \mathbf{x}) \text{ paire} \\ -1 & \text{pour } \psi_P(t, \mathbf{x}) \text{ impaire.} \end{cases}$$

### Remarque 4.1

*En général, la fonction d'onde d'une particule ou d'un système  $\psi(t, \mathbf{x})$  n'est pas une fonction propre de  $\mathcal{P}$  et sa parité n'est pas définie.*



Les quantités ou opérateurs suivants se transforment sous l'opérateur de parité

Quantité	$\mathcal{P}(\text{Quantité})$
$t$	$t$
$\mathbf{x}$	$-\mathbf{x}$
$\mathbf{p}$	$-\mathbf{p}$
$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}$	$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}$
$\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$

Les quantités vectorielles qui ne changent pas de signe (e.g.  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}, \dots$ ) sous l'opérateur de parité sont appelées *axiales* ou *pseudo-vecteurs* alors que des quantités scalaires qui changent de signe (e.g.  $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{L}, \dots$ ) sous l'opérateur de parité sont appelées *pseudo-scalaires*.

Un système (ou des interactions) qui conserve la parité est décrit par un Hamiltonien qui commute avec  $\mathcal{P}$ ,

$$[\mathcal{P}, H] = [\mathcal{P}, S] = 0.$$

On observe que la parité est conservée dans les interactions électromagnétique et forte. Par ailleurs, les interactions faibles ne respectent pas cette symétrie.

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}, H_{\text{e.m.}}] &= [\mathcal{P}, H_{\text{fortes}}] = 0 \\ [\mathcal{P}, H_{\text{faibles}}] &\neq 0. \end{aligned}$$

## Parité orbitale

Dans le cas d'un atome, d'états liés ou de particules qui interagissent, la fonction d'onde du système  $\psi$  peut être décrite en termes des harmoniques sphériques

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

où

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{(-)^m}{4\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}.$$

Sous réflexion dans l'espace,  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  ou, en coordonnées sphériques

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta - \pi, \phi + \pi)$$

et

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos\theta) &\rightarrow P_l^m(\cos(\theta - \pi)) = (-)^{l+m} P_l^m(\cos\theta) \\ e^{im\phi} &\rightarrow e^{im(\pi+\phi)} = (-)^m e^{im\phi} \end{aligned}$$

si bien que pour les harmoniques sphériques

$$\mathcal{P}Y_{lm}(\theta, \phi) = (-)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

le moment angulaire orbital  $l$  de l'état détermine la parité orbitale. Ainsi

$$\eta_P \begin{cases} +1 & \text{pour des états } l = 0, 2, 4, \dots (\text{i.e. } s, d, g, \dots) \\ -1 & \text{pour des états } l = 1, 3, 5, \dots (\text{i.e. } p, f, h, \dots). \end{cases}$$

## Parité intrinsèque

Indépendamment de la parité orbitale d'un système, chaque particule qui le compose peut posséder une parité intrinsèque si sa fonction d'onde est une fonction propre de l'opérateur de parité (voir table des particules en Appendice). On classe ces particules selon la nomenclature suivante:

	Spin = 0	Spin = 1
$\eta_P = +1$	scalaire	axiale
$\eta_P = -1$	pseudo-scalaire	vectorielle

Le photon, par exemple, dont la représentation en théorie quantique des champs coïncide avec le concept de potentiel vecteur,  $\mathbf{A}$ , est une particule vectorielle, i.e. de spin 1 et de parité négative.

## Conservation de la parité totale

La parité est un nombre quantique *multiplicatif*. Par cela, on entend que la loi de conservation de la parité s'applique au produit des parités. Pour mettre en lumière cette propriété, il convient d'examiner tout d'abord un système de particules libres. Dans ce cas, l'état initial du système est représenté par le produit

$$|i\rangle = |a\rangle \cdot |b\rangle \cdots |n\rangle$$

si bien que si chacune des particules a une parité intrinsèque définie, alors la parité totale,  $\eta_P^i$ , est le produit des parités intrinsèques

$$\begin{aligned} \mathcal{P} |i\rangle &= \mathcal{P} (|a\rangle \cdot |b\rangle \cdots |n\rangle) \\ &= \eta_P^a |a\rangle \cdot \mathcal{P} (|b\rangle \cdots |n\rangle) \\ &= \eta_P^a \eta_P^b \cdots \eta_P^n \cdot |a\rangle \cdot |b\rangle \cdots |n\rangle \\ &= \eta_P^a \eta_P^b \cdots \eta_P^n |i\rangle \end{aligned}$$

ou

$$\eta_P^i = \eta_P^a \eta_P^b \cdots \eta_P^n.$$

De la même façon, pour un état final formé de

$$|f\rangle = |p\rangle \cdot |q\rangle \cdots |z\rangle$$

on a la parité totale

$$\eta_P^f = \eta_P^p \eta_P^q \cdots \eta_P^z.$$

La loi de conservation de la parité dans ce cas s'écrit

$$\eta_P^i = \eta_P^f.$$

Par ailleurs, si deux particules interagissent, le mouvement relatif de l'état est décrit par une fonction du type  $R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  dont les propriétés de parité sont décrites plus haut. La parité totale de ce système simple est alors

$$\eta_P^i = (-)^l \eta_P^a \eta_P^b.$$

De façon générale, la parité totale s'écrit

$$\eta_P^{\text{totale}} = \left( \prod_a \eta_P^a \right) \cdot \eta_P^{\text{orbitale}}.$$

Le calcul de la parité orbitale du système,  $\eta_P^{\text{orbitale}}$ , est toutefois plus complexe pour des systèmes de plus de deux particules.

## Parité des antiparticules

Il est facile de démontrer que

$$\begin{aligned} \eta_P(\text{boson}) &= \eta_P(\text{antiboson}) \\ \eta_P(\text{fermion}) &= -\eta_P(\text{antifermion}). \end{aligned}$$

Par convention, on choisit  $\eta_P(\text{fermion}) = 1$  et  $\eta_P(\text{antifermion}) = -1$ .

Considérons le cas des fermions. L'équation de Dirac qui décrit la particule et l'antiparticule

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(t, \mathbf{x}) = 0$$

devient sous  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(t, -\mathbf{x}) &= 0 \\ (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m) \psi(t, -\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant cette expression par  $\gamma^0$  et en utilisant la relation d'anticommution  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  on obtient

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m) \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = 0.$$

Mais  $\gamma^0$  est en fait l'opérateur de parité pour les fonctions d'onde de Dirac, i.e.  $\gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x})$ . Plus précisément, les états d'énergie positive et de spin  $\pm\frac{1}{2}$ , et les états d'énergie négative et de spin  $\pm\frac{1}{2}$  sont représentés par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui se transforment sous  $\mathcal{P}$

$$\gamma^0 u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 v_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 v_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire que les fermions ont une parité positive et les antifermions, une parité négative.

Un état lié fermion-antifermion dans un état avec un moment angulaire orbital  $l_f$  aura une parité

$$\eta_P^{\text{tot}} = (-)^{l_f} \eta_P^f \eta_P^{\bar{f}}.$$



## Exemples



### Exemple 4.1

Le positronium est un état formé d'une paire électron-positron. Il existe sous deux formes: le parapositronium ( $l_f = 0$ ) et l'orthopositronium ( $l_f = 1$ ) dont les parités sont respectivement

$$\begin{aligned}\eta_P^{\text{para}} &= -1 \\ \eta_P^{\text{ortho}} &= +1.\end{aligned}$$



### Exemple 4.2

Les hadrons sont des états liés de quarks. Les mésons sont formés de paires quark-antiquark tel que  $q_i \bar{q}_j$  où  $i, j$  indiquent les saveurs de quarks. Alors, la parité des mésons est donnée par

$$\eta_P^{\text{mésos}} = (-)^l \eta_P^q \eta_P^{\bar{q}} = (-)^{l+1}$$

où  $l$  est le moment angulaire orbital entre les quarks. Les mésons de plus basse énergie ( $l = 0$ ) devraient donc avoir une parité négative ce qui est le cas pour les mésons  $\pi$ ,  $K$ , et  $D$ . Par ailleurs, les baryons sont des états à trois quarks tel que  $q_i q_j q_k$  dont la parité totale est

$$\eta_P^{\text{baryon}} = (-)^{l_{1,2}} (-)^{l_{12,3}} \eta_P^{q_i} \eta_P^{q_j} \eta_P^{q_k} = (-)^{l_{1,2} + l_{12,3}}.$$

Ici la parité orbitale reçoit deux contributions: la première est due au moment angulaire orbital entre les quarks 1 et 2,  $l_{1,2}$ , et la seconde vient du moment angulaire orbital entre le centre de masse du système formé des quarks 1 et 2 et le quark 3,  $l_{12,3}$ . Les antibaryons  $\bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k$  ont bien sûr la parité

$$\begin{aligned}\eta_P^{\text{antibaryon}} &= (-)^{l_{1,2}} (-)^{l_{12,3}} \eta_P^{\bar{q}_i} \eta_P^{\bar{q}_j} \eta_P^{\bar{q}_k} = (-)^{l_{1,2} + l_{12,3} + 1} \\ &= -\eta_P^{\text{baryon}}.\end{aligned}$$

Les baryons de plus basse énergie ( $l_{1,2} = l_{12,3} = 0$ ) devraient donc avoir une parité positive ce qui concorde avec les observation pour les baryons de spin  $\frac{1}{2}$  tels que  $p, n, \Lambda, \Lambda_c$ .



### Exemple 4.3

Considérons un système de deux pions dans des états  $s$  ( $l = 0$ ) et  $p$  ( $l = 1$ ): la parité totale est

$$\begin{aligned}l = 0 : \quad \eta_P^{\text{totale}} &= (-)^l (\eta_P^\pi)^2 = 1 \\ l = 1 : \quad \eta_P^{\text{totale}} &= (-)^l (\eta_P^\pi)^2 = -1.\end{aligned}$$



### Exemple 4.4

Considérons la réaction suivante impliquant des particules sans spin:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

La conservation de la parité implique alors

$$\eta_P^i = (-)^l \eta_P^1 \eta_P^2 = (-)^{l'} \eta_P^3 \eta_P^4 = \eta_P^f.$$

Si le moment angulaire est conservé dans le processus, alors  $l = l'$  et

$$\eta_P^1 \eta_P^2 = \eta_P^3 \eta_P^4$$

De plus, si les particules initiales sont des particules identiques, par exemple dans la réaction  $\pi + \pi \rightarrow 3 + 4$

$$\eta_P^3 \eta_P^4 = 1$$

et donc seuls deux cas sont possibles

$$\begin{cases} \eta_P^3 = \eta_P^4 = +1 & \text{les états 3 et 4 sont tous deux des scalaires} \\ \eta_P^3 = \eta_P^4 = -1 & \text{les états 3 et 4 sont tous deux des pseudo-scalaires.} \end{cases}$$

## 4.5 Inversion du temps

### L'opérateur d'inversion du temps, $\mathcal{T}$

La transformation d'inversion du temps,  $\mathcal{T}$ , est l'analogie temporelle de la réflexion de l'espace. Elle correspond à regarder un système alors que le temps défile à rebours:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = -t \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} \end{aligned}$$

On définit l'opérateur d'inversion du temps,  $\mathcal{T}$ , sur une fonction d'onde par

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(t, \mathbf{x}) = \mathcal{T}\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(-t, \mathbf{x}).$$

Les quantités ou opérateurs suivants se transforment sous l'opérateur d'inversion du temps

Quantité	$\mathcal{T}(\text{Quantité})$
$t$	$-t$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{p}$	$-\mathbf{p}$
$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{J}, \mathbf{L}$	$-\boldsymbol{\sigma}, -\mathbf{J}, -\mathbf{L}$
$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$

Toutefois, malgré l'analogie entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{P}$ , il est facile de démontrer que  $\mathcal{T}$  ne peut être un opérateur unitaire. La relation de commutation

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (4.3)$$

devient

$$[x_i, p_j] = -i\delta_{ij}$$

sous  $\mathcal{T}$  et n'est donc pas invariante. La transformation  $\mathcal{T}$  ne peut donc pas être unitaire. Ceci a pour conséquence que  $\mathcal{T}$  ne possède pas de valeurs propres et qu'on ne peut y associer des observables.

Redéfinissons  $\mathcal{T}$  en la combinant à une transformation *anti-unitaire* (qui transforme un nombre complexe en son complexe conjugué) tel que

$$\mathcal{T}: \begin{cases} x_i \rightarrow \mathcal{T}x_i\mathcal{T}^{-1} = x_i \\ p_j \rightarrow \mathcal{T}p_j\mathcal{T}^{-1} = -p_j \\ i \rightarrow -i \end{cases},$$

et que  $\mathcal{T}$  laisse la relation de commutation (4.3) intacte alors cette transformation laisse aussi invariante la relation de commutation

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

puisque

$$\mathcal{T}\mathbf{J}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{J}.$$

L'invariance des interactions sous la transformation  $\mathcal{T}$  implique plus formellement

que

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}S\mathcal{T}^{-1} = S$$

et donc que la matrice de transition se transforme comme

$$\mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1} = T^\dagger.$$

Une observable est invariante si

$$\begin{aligned} \langle f(t) | T | i(t) \rangle &= \langle f(t) | \mathcal{T}^{-1} (\mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1}) \mathcal{T} | i(t) \rangle \\ &= \langle f(-t) | T^\dagger | i(-t) \rangle^* \\ &= \langle i(-t) | T | f(-t) \rangle. \end{aligned}$$

ce qui décrit exactement les éléments de matrice de transition pour le processus inverse.

La forme exacte de l'expression précédente pour des états initiaux caractérisés par leurs impulsions  $p_i$ , leurs troisièmes composantes de spin  $m_i$  et leurs autres nombres quantiques  $\alpha_i$  et des états finaux caractérisés par leurs impulsions  $p_f$ , leurs troisièmes composantes de spin  $m_f$  et leurs autres nombres quantiques  $\alpha_f$  est

$$\langle p_f, m_f, \alpha_f | T | p_i, m_i, \alpha_i \rangle = \langle -p_i, -m_i, \alpha_i | T | -p_f, -m_f, \alpha_f \rangle \quad (4.4)$$

Il y a donc égalité de probabilité entre un processus et son processus inverse dont les impulsions et les spins sont dans des directions opposées.

Finalement, la transformation  $\mathcal{T}$  n'étant pas unitaire, ceci a pour conséquence que  $\mathcal{T}$  n'a pas de valeurs propres observables. Les états ne peuvent être étiquetés en terme de telles valeurs propres et on ne peut pas tester la violation de l'invariance sous  $\mathcal{T}$  en utilisant la présence de modes de désintégration interdits.

Les interactions fortes sont invariantes sous un renversement du temps  $\mathcal{T}$ :

$$[\mathcal{T}, H_{\text{fortes}}] = 0$$

## Application: le bilan détaillé



### Exemple 4.5

#### Le spin du pion:

Supposons qu'il y ait invariance sous le renversement du temps,  $\mathcal{T}$ , combinée à l'invariance sous la parité,  $\mathcal{P}$ . Pour un système donné, l'identité dérivée en (4.4) devient

$$\begin{aligned} \langle \beta, \mathbf{p}_f, m_f | T | \alpha, \mathbf{p}_i, m_i \rangle &= \langle \alpha, -\mathbf{p}_i, -m_i | T | \beta, -\mathbf{p}_f, -m_f \rangle \\ &= \langle \alpha, -\mathbf{p}_i, -m_i | \mathcal{P}^{-1} T \mathcal{P} | \beta, -\mathbf{p}_f, -m_f \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathbf{p}_i, -m_i | T | \beta, \mathbf{p}_f, -m_f \rangle. \end{aligned}$$

Ces conditions sont remplies pour un processus d'interaction forte par exemple. Alors, la somme sur les états de spin initiaux et finaux est donnée par

$$\sum_{\text{spin}} |\langle \beta, \mathbf{p}_f, m_f | T | \alpha, \mathbf{p}_i, m_i \rangle|^2 = \sum_{\text{spin}} |\langle \alpha, \mathbf{p}_i, m_i | T | \beta, \mathbf{p}_f, m_f \rangle|^2$$

puisque toutes les composantes de spin  $\pm m_i$  et  $\pm m_f$  sont sommées

En général, dans une réaction à 4-corps les particules initiales sont souvent non-polarisées, ce qui implique une moyenne sur les états de spin initiaux si bien que la section efficace du processus

direct

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

s'écrit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(12 \rightarrow 34) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2} \frac{p_{34}}{p_{12}} \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \sum_i \sum_f |M_{fi}|^2$$

alors que la section efficace du processus inverse

$$3 + 4 \rightarrow 1 + 2$$

s'écrit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(34 \rightarrow 12) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_1^2}{E_{\text{CM}}^2} \frac{p_{12}}{p_{34}} \frac{1}{(2S_3 + 1)(2S_4 + 1)} \sum_i \sum_f |M_{if}|^2.$$

Puisque

$$\sum_i \sum_f |M_{fi}|^2 = \sum_i \sum_f |M_{if}|^2$$

on trouve la relation de proportionnalité

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(12 \rightarrow 34) = \frac{p_{34}^2}{p_{12}^2} \frac{(2S_3 + 1)(2S_4 + 1)}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \frac{d\sigma}{d\Omega}(34 \rightarrow 12).$$

Considérons maintenant la réaction

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d$$

où le spin du proton est  $\frac{1}{2}$  et celui du deutéron est de 1. Alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(pp \rightarrow \pi^+ d) = \frac{p_\pi^2}{p_p^2} \frac{(2S_\pi + 1) \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\pi^+ d \rightarrow pp).$$

Une mesure expérimentale des sections efficaces permet alors de déterminer le spin du pion: on vérifie que  $S_\pi = 0$ .

## 4.6 Invariance de jauge

La formulation quantique du principe d'invariance de jauge est due à Wigner (1949). Cependant, le principe était connu depuis fort longtemps en mécanique classique. En effet, rappelons que les forces électromagnétiques (ou les champs électrique et magnétique,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ ) sont indépendantes du choix de la jauge ce qui n'est pas le cas des potentiels électrostatique et vecteur,  $\phi$  et  $\mathbf{A}$ .

En mécanique quantique, la densité de probabilité est invariante sous la multiplication de la fonction d'onde par un facteur de phase.

Par exemple, la solution sous forme d'une onde plane

$$\psi = e^{ip \cdot x}$$

doit être équivalente à

$$\psi' = e^{-ie\alpha} e^{ip \cdot x} = e^{i(p \cdot x - e\alpha)}.$$

Cette transformation laisse la densité de probabilité spatiale invariante

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi' \rangle.$$

## Transformation de jauge

Une transformation de jauge est définie par la transformation unitaire

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-ie\alpha} \psi$$

où  $e$  est un paramètre constant dont on verra la signification physique plus bas et  $\alpha(x)$  est une fonction arbitraire:

1. Si  $\alpha(x)$  est une constante arbitraire (indépendante de la position), la transformation de jauge est dite *globale*. Elle consiste à multiplier la fonction d'onde par le même facteur de phase quelle que soit la position. Une phase globale n'est pas observable en mécanique quantique.
2. Si  $\alpha(x)$  est une fonction scalaire arbitraire dépendant de la position, la transformation de jauge est dite *locale*. Elle consiste à multiplier la fonction d'onde par un facteur de phase arbitraire en chaque point de l'espace. L'invariance d'un système sous une telle transformation mène à des propriétés très spéciales qui sont d'une importance cruciale dans la description des théories modernes des particules élémentaires

Par analogie, si on considère la rotation des spins sur un réseau, une rotation *globale* consiste à faire une rotation de tous les spins par le même angle sur chaque site alors que la transformation *locale* fait tourner les spins par un angle arbitraire sur chaque site.

Considérons maintenant l'effet de la transformation de jauge *locale* sur l'Hamiltonien. Les équations de mouvement mettent en jeu l'opérateur  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  qui agit de façon non-triviale

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = i(p_\mu - e\partial_\mu \alpha(x)) \psi'(x)$$

alors que

$$\partial_\mu \psi(x) = ip_\mu \psi(x).$$

Donc, les équations de mouvement ne sont pas, en général, invariantes sous une transformation de jauge *locale*. Considérons les particules chargées qui interagissent électromagnétiquement avec le potentiel  $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ . En fait, l'interaction électromagnétique peut être introduite en mécanique grâce à la substitution de l'impulsion par l'impulsion canonique

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + eA_\mu.$$

En incluant le potentiel, une onde plane a la forme

$$\psi(x) = e^{i(p \cdot x + eA \cdot x)}$$

où  $A \equiv A(x)$ . La transformation de jauge a un effet sur  $A$ ,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu,$$

si bien que la fonction d'onde en présence d'interaction sous une transformation de jauge *locale* s'écrit

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i(p \cdot x + eA' \cdot x - e\alpha(x))}$$

et

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'(x) = i(p_\mu + eA'_\mu - e\partial_\mu \alpha(x)) \psi'(x).$$

L'invariance de jauge requiert donc que

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

et que les équations de mouvement de  $A_\mu$  soient aussi invariantes sous cette transformation de jauge. Alors

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' \\ \partial_\mu \psi &= ip_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi' = ip_\mu \psi' \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu\end{aligned}$$

Finalement, deux conditions sont nécessaires à l'invariance sous une transformation de jauge *locale*:

1. Il doit exister un champs  $A_\mu$  à longue portée qui agit sur les particules et qui change la phase de leur fonction d'onde.
2. La charge doit être conservée (l'identité ci-haut n'est plus valide si la charge varie en fonction du temps).

## Les photons

Les équations de Maxwell en électrodynamique classique s'écrivent généralement en termes des champs électrique et magnétique

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}.\end{aligned}$$

En l'absence de charge et courant, elle peuvent prendre la forme

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu(x) = 0$$

ou, dans l'espace de impulsions,

$$k_\mu k^\mu A_\nu(k) = 0,$$

ce qui implique que la masse des photons est nulle.

Les équations de mouvement sont invariantes de jauge, ce qui se traduit par la condition de Lorentz (nommée ainsi parce qu'elle est invariante de Lorentz)

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad \text{ou} \quad k_\mu A^\mu(k) = 0.$$

En imposant cette condition sur une solution de type onde plane

$$A^\mu(k) = \epsilon^\mu(k) a_0 e^{ik \cdot x}$$

où  $\epsilon^\mu$  est un vecteur unitaire de polarisation et  $a_0$ , un facteur de normalisation, on a

$$k_\mu \epsilon^\mu(k) = 0. \tag{4.5}$$

En général, seulement trois des quatre degrés de liberté sont indépendants pour une particule vectorielle qui obéit à l'invariance de jauge. Ces particules de spin 1 peuvent alors se trouver dans trois états représentées par les trois états de spin  $J_z = -1, 0$  ou  $1$ .

Les équations de mouvement imposent cependant la contrainte supplémentaire

$$k^2 \epsilon^\mu(k) = 0 \iff k^2 = 0$$

c'est-à-dire que la masse du photon est nulle. Il ne reste que seulement deux degrés de

liberté résiduels soit les états de spin  $J_z = \pm 1$ . En fait, il est facile de se convaincre que l'état  $J_z = 0$  n'est pas un invariant de Lorentz alors que le photon devrait être décrit de la même façon quel que soit le repère inertiel (sa vitesse est toujours la même  $c = 1$ ).

Les résultats physiques sont indépendants du choix de la jauge. Choisissons ici la jauge de Coulomb, i.e.

$$A^0 = \phi = 0.$$

Alors (4.5) devient

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$$

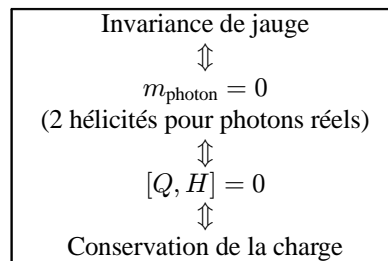
aussi appelée la condition de transversalité

$$\mathbf{k} \perp \boldsymbol{\epsilon}$$

i.e. seules les composantes transverses du vecteur de polarisation sont non-nulles pour un photon.

En conclusion, les implications sont les suivantes:

1. Le vecteur de polarisation d'une particule de spin 1 possède en général trois états: les états de spin  $J_z = \pm 1, 0$ . L'invariance de Lorentz (ou la masse du photon nulle) élimine la possibilité  $J_z = 0$ .
2. Un photon peut ne pas obéir aux équations de mouvement ou à la condition d'invariance de jauge pendant un temps permis par le principe d'incertitude. On dit que le photon est alors *virtuel*.
3. L'invariance de jauge  $\implies m_{\text{photon}} = 0 \implies$  conservation de la charge  $\implies$  2 hélicités pour photons réels.



## 4.7 Contrainte d'unitarité







# 5 SYMÉTRIES INTERNES ET HADRONS

## 5.1 Symétries globales et règles de sélection

On observe expérimentalement que certaines réactions sont possibles alors que d'autres semblent totalement interdites. Pourtant, la seule conservation d'énergie-impulsion n'arrive pas à expliquer ces résultats.

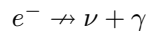
Par exemple, le simple principe de l'augmentation de l'entropie favorise la désintégration d'une particule en particules plus légères. Dans une telle désintégration, l'entropie augmente puisqu'elle est reliée à l'espace de phase,  $S = k_B \ln(\text{Espace de phase})$  qui est plus grande pour des particules légères. Cependant certaines désintégrations ne sont pas observées.

Il doit donc y avoir un principe théorique qui explique ces phénomènes, e.g. des règles de sélection ou encore des lois de conservation. Dans la plupart des cas, ceci est possible en introduisant une charge généralisée (un nombre quantique associé à une symétrie globale) à chacune des particules et une loi de conservation additive correspondante. Alors, la somme des charges généralisées demeure la même avant et après la réaction:

$$\sum_i Q_i = \sum_f Q_f.$$

### Charge électrique, $Q$

La charge électrique est conservée à l'échelle macroscopique. Il est donc naturel qu'elle soit conservée aussi à l'échelle microscopique. Cependant, cette présomption doit être scrupuleusement vérifiée. En principe, l'électron pourrait se désintégrer en particules plus légères si ce n'était de la conservation de la charge électrique. On sait que le processus de désintégration



possède une vie moyenne  $\tau \geq 2 \times 10^{22}$  années (il n'est essentiellement pas observé). La charge électrique est donc un nombre quantique conservé additivement. Cela implique

l'invariance sous une transformation de jauge globale de l'Hamiltonien

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iQ\alpha} |\psi\rangle$$

et

$$[Q, H] = 0$$

où  $Q$  est le générateur du groupe des transformation unitaire  $U(1)$ . Si  $\alpha$  est indépendant de la position, on dit que la transformation de jauge est globale alors que pour  $\alpha = \alpha(x)$ , la transformation de jauge est locale. Une des particularités de la charge électrique est qu'elle est le seul nombre quantique qui correspond à la fois au générateur de la transformation  $U(1)$  globale et au générateur de la transformation  $U(1)$  locale.

## Nombre leptonique total, $L$

Le Modèle Standard requiert la présence de trois générations (ou familles) de leptons. Chaque génération est formée d'un lepton chargé et d'un neutrino (et de leurs antiparticules respectives). Les réactions impliquant des leptons permettent de constater qu'il y a conservation du *nombre leptonique* si on assigne un nombre leptonique,  $L = 1$ , aux leptons,  $L = -1$  aux antileptons et  $L = 0$  à toute autre particule (e.g. hadrons, quarks,...)

$$\begin{array}{c} \text{Leptons, } L = 1 \\ \hline \hline \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \end{array} \quad (5.1)$$

$$\begin{array}{c} \text{Antileptons, } L = -1 \\ \hline \hline \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix} \end{array} \quad (5.2)$$

La conservation du nombre leptonique implique l'invariance de l'Hamiltonien sous une transformation de jauge globale définie par

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iL\alpha} |\psi\rangle$$

avec

$$[L, H] = 0$$

où  $L$  est le générateur de la transformation.

## Nombre électronique, muonique, taonique...

Toutefois la simple conservation du nombre leptonique total ne réussit pas à expliquer l'observation suivante. Lorsque des antineutrinos provenant de la désintégration du pion

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (5.3)$$

entrent en collision avec un proton, la réaction

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+ \quad (5.4)$$

n'est pas observée. Par ailleurs, la réaction est possible si les antineutrinos incidents sont

de type électronique,

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+. \quad (5.5)$$

Pourtant, la seule loi de conservation du nombre électronique total permet la capture d'antineutrinos de tous les types dans (5.4).

Historiquement, cette question a permis de faire la lumière sur la nature des neutrinos en nous obligeant à en distinguer différents types et en à attribuer à chaque famille de leptons un nombre leptonique distinct. Ainsi, chaque nombre leptonique (les nombres électronique, muonique et taonique) est conservé séparément. On assigne les nombres leptoniques suivant la règle

	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	$L$
$e^-, \nu_e$	+1	0	0	+1
$e^+, \bar{\nu}_e$	-1	0	0	-1
$\mu^-, \nu_\mu$	0	+1	0	+1
$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	0	-1	0	-1
$\tau^-, \nu_\tau$	0	0	+1	+1
$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	0	0	-1	-1

les autres particules ayant toutes des nombres leptoniques nuls.

On voit aisément que les nombres électronique et muonique ne sont pas conservés dans la réaction  $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+$ :

$$L_e(\bar{\nu}_\mu) + L_e(p) = 0 \rightarrow L_e(n) + L_e(e^+) = -1$$

$$L_\mu(\bar{\nu}_\mu) + L_\mu(p) = -1 \rightarrow L_\mu(n) + L_\mu(e^+) = 0$$

alors qu'ils le sont dans la réaction  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ :

$$L_e(\bar{\nu}_e) + L_e(p) = -1 \rightarrow L_e(n) + L_e(e^+) = -1$$

$$L_\mu(\bar{\nu}_e) + L_\mu(p) = 0 \rightarrow L_\mu(n) + L_\mu(e^+) = 0.$$

## Nombre baryonique, $B$

Le proton est une particule très stable avec une vie moyenne  $\tau \geq 10^{31}$  années. Or, à prime abord, on pourrait s'attendre à ce que le proton puisse se désintégrer en une particule plus légère. Ce n'est pas le cas. Cette observation suggéra que la stabilité devait être la conséquence d'une loi de conservation d'un nouveau nombre quantique, le nombre baryonique. On assigne un nombre baryonique  $B = +1$  aux baryons et  $B = 0$  aux mésons et aux leptons. Les antibaryons ont bien sûr une charge opposée, soit  $B = -1$ :

$$B = +1 : p, n, \Lambda, \Sigma^{+, -, 0}, \Xi^{0, -}, \Omega^{--}, \dots$$

$$B = 0 : \pi^{+, -, 0}, K^{-, +, 0}, \rho, \dots$$

Par ailleurs, les constituants des hadrons, les quarks, doivent aussi porter une charge baryonique

$$B(\text{quark}) = \frac{1}{3}$$

$$B(\text{antiquark}) = -\frac{1}{3}$$

qui est indépendante de la saveur.

La conservation du nombre baryonique implique l'invariance de l'Hamiltonien sous une transformation de jauge globale définie par

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iB\alpha} |\psi\rangle$$

avec

$$[B, H] = 0$$

où  $B$  est le générateur de la transformation.

## 5.2 Isospin

Comme une bonne partie de ces règles de sélection s'appliquent aux hadrons qui sont formés de particules plus fondamentales, les quarks, nous commençons ce chapitre par un survol rapide des propriétés des hadrons. Malgré qu'il en existe plusieurs centaines, on peut les classer en deux types: les baryons de spin  $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  et les mésons de spin  $J = 0, 1$ . De plus, les hadrons peuvent être rangés en groupes définis, des multiplets qui sont identifiés par des parités et spins identiques,  $J^P$ . Les tableaux suivants illustrent le spectre des hadrons les plus légers (des états plus lourds existent mais sont interprétés comme des états excités).

Multiplet $J^P = 0^-$		
Mésons	Mass(MeV)	Nom
$\pi^+, \pi^0, \pi^-$	139.6, 135.0, 139.6	pion
$K^+, K^0$	493.6, 497.7	kaon
$\bar{K}^0, K^-$	497.7, 493.6	antikaon
$\eta$	548.8	eta
$\eta'$	957.5	eta prime

Multiplet $J^P = 1^-$		
Mésons	Mass(MeV)	Nom
$\rho^+, \rho^0, \rho^-$	770	rho
$\omega^0$	783	oméga
$K^{*+}, K^{*0}$	982	kaon étoile
$\bar{K}^{*0}, K^{*-}$	982	antikaon étoile
$\phi^0$	1020	phi

Multiplet $J^P = \frac{1}{2}^+$		
Baryons	Mass(MeV)	Nom
$p, n$	938.3, 939.6	nucléon
$\Lambda^0$	1115.7	lambda
$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	1189.4, 1192.6, 1197.4	sigma
$\Xi^0, \Xi^-$	1314.9, 1321.3	cascade

Multiplet $J^P = \frac{3}{2}^+$		
Baryons	Mass(MeV)	Nom
$\Delta^+, \Delta^0, \Delta^-, \Delta^{--}$	$\approx 1232$	delta
$\Sigma^{*+}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*-}$	1382.8, 1383.7, 1387.2	sigma étoile
$\Xi^{*0}, \Xi^{*-}$	1530.8, 1535.0	cascade étoile
$\Omega^-$	1672.5	oméga

La première remarque qui vient à l'idée en regardant les propriétés des particules formant les multiplets  $J^P$  est sans doute que la structure de multiplets ne s'arrête pas à la notion de spin et parité. En effet, la plupart des particules peuvent former des sous-multiplets caractérisés par des masses très semblables mais dont les éléments se distinguent par leur charge électrique. Par exemple, on retrouve des singulets, doublets, triplets et quadruplets de charges, e.g.:

$$\begin{array}{ll}
 \text{singulets:} & \eta, \eta', \omega^0, \phi^0, \Lambda^0, \Omega^{--} \\
 \text{doublets:} & \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^{*+} \\ K^{*0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{K}^{*0} \\ K^{*-} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \\
 \text{triplets:} & \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma^{*+} \\ \Sigma^{*0} \\ \Sigma^{*-} \end{pmatrix} \\
 \text{quadruplets:} & \begin{pmatrix} \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \\ \Delta^+ \end{pmatrix}
 \end{array}$$

On remarque de plus que les interactions fortes sont approximativement identiques pour les systèmes  $p-n$ ,  $p-p$  et  $n-n$ . Par analogie avec le concept de spin (où la troisième composante du spin distingue les deux manifestations d'une même particule) il est possible d'interpréter le proton et le neutron comme les deux éléments d'un doublet d'isospin (nucléon)

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2} \\ I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le proton et le neutron sont donc des particules identiques (ou la même particule) du point de vue des interactions fortes. Leurs masses diffèrent très peu,

$$\frac{\Delta m}{\bar{m}} = \frac{1.2 \text{ MeV}}{939 \text{ MeV}} = 0.001,$$

et cette différence peut être attribuée à des effets coulombiens qu'on estime être de l'ordre de la constante de couplage des interactions électromagnétiques,  $\mathcal{O}(\alpha_{\text{em}})$ .

Il s'agit toutefois d'une propriété qui ne se limite pas au proton et au neutron mais qui s'étend à toutes les interactions fortes, c'est-à-dire que celles-ci sont indépendantes de la charge électrique.

Le traitement de l'isospin ressemble en tout point à celui du moment angulaire. On introduit un vecteur  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$  dans l'espace des isospins. L'opérateur d'isospin  $\mathbf{I}$  obéit à des règles de commutation similaires à celles qui s'appliquent au moment angulaire ou au spin,

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \quad i = 1, 2, 3$$

ce qui permet l'existence simultanée de plusieurs états propres  $|I, I_3\rangle$  avec pour observables  $\mathbf{I}^2$  et  $\hat{I}_3$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^2 |I, I_3\rangle &= I(I+1) |I, I_3\rangle \\ I_3 |I, I_3\rangle &= I_3 |I, I_3\rangle\end{aligned}$$

où  $I_3$  dans le membre de gauche de la dernière équation représente un opérateur.  $I_3$  possède  $(2I+1)$  valeurs propres qui prennent les valeurs

$$-I, -I+1, \dots, I-1, I.$$

Par conséquent, un multiplet d'isospin  $I$  est formé de  $(2I+1)$  états propres, i.e. il s'agit d'un  $(2I+1)$ -plet.

Par exemple, le multiplet formé du proton et du neutron possède deux états de charge d'où  $I = \frac{1}{2}$  et

$$\begin{aligned}|p\rangle &= \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |n\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,\end{aligned}$$

alors que le quadruplet du  $\Delta$  possède les états propres

$$\begin{aligned}|\Delta^+\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ |\Delta^0\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ |\Delta^-\rangle &= \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\Delta^{--}\rangle &= \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle.\end{aligned}$$

## Symétrie SU(2)

On peut donc décrire plusieurs états de charge d'une particule sous la forme de multiplets. Ces états ont les mêmes interactions fortes. On peut dire que l'Hamiltonien des interactions fortes est invariant sous une transformation qui change un état de charge pour un deuxième qui fait partie du même multiplet, e.g. transformation d'un proton en neutron. Mais comment définit-on une telle transformation? Encore une fois, l'analogie avec le spin est d'une grande utilité.

Posons un opérateur de transformation  $U$  tel que

$$|\phi'\rangle = U |\phi\rangle.$$

où  $|\phi\rangle$  représente le multiplet d'isospin.

1. Puisque  $U$  agit sur un multiplet, il peut être représenté par une matrice qui est complexe en général.

2. Pour conserver l'hermiticité et générer des valeurs propres réelles,  $U$  doit être unitaire,

$$U^\dagger U = I.$$

3. On exige en plus que le produit scalaire soit conservé, e.g.

$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi' | \phi' \rangle$$

ce qui implique que

$$\det U = 1.$$

4. Finalement, l'état de charge à l'intérieur d'un multiplet est déterminé par un seul nombre quantique  $I_3$ . Ceci implique qu'il existe une seule matrice diagonalisable simultanément. On dit alors que le rang de l'opérateur matriciel est de un.

Les matrices qui obéissent à ces conditions forment le groupe  $SU(2)$ , les matrices  $2 \times 2$  spéciales unitaires.

## Générateurs de $SU(2)$

Puisque  $U$  est unitaire, il peut se récrire

$$U = e^{i\omega}$$

où  $\omega$  est une matrice complexe  $2 \times 2$ . Elle est déterminée par 8 paramètres, 4 réels et 4 imaginaires. Cependant, tous ces paramètres ne sont pas indépendants puisque les 4 conditions d'unitarité s'appliquent ( $U^\dagger U = I$ ) et une condition d'unimodularité ( $\det U = 1$ ) doit aussi être imposée. Il reste donc trois degrés de liberté indépendants ce qui signifie que  $\omega$  est une combinaison linéaire de trois matrices linéairement indépendantes.

$$\omega = \omega^i \sigma_i \quad i = 1, 2, 3$$

où  $\omega^i$  sont des coefficients alors que  $\sigma_i$  sont les matrices  $2 \times 2$  linéairement indépendantes.

Il est pratique d'identifier  $\sigma_i$  au générateur du groupe  $SU(2)$ , c'est-à-dire aux matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui obéissent aux règles de commutation

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad i = 1, 2, 3.$$

À noter, les générateurs ne commutent pas. On dit alors que le groupe  $SU(2)$  est non-commutatif ou non-abélien.

## Relation de Gell-Mann-Nishijima

Par analogie avec le spin, il est clair que la conservation de  $I_3$  implique l'invariance de l'Hamiltonien sous une rotation autour de la troisième direction d'isospin. Par ailleurs, la valeur propre  $I_3$  est une mesure de l'état propre de charge de la particule à l'intérieur

du multiplet. Il doit donc exister une relation directe entre la charge et la troisième composante d'isospin de l'état. On serait tenté de confondre les deux quantités mais il faut se rappeler que la charge  $Q$  est conservée partout alors que  $I_3$  ne l'est que dans les interactions fortes. En fait, d'autres charges sont impliquées dans la relation entre  $Q$  et  $I_3$ ,

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

où  $Y$  est appelé l'*hypercharge*. Il est facile de démontrer que l'*hypercharge* associée à un multiplet d'isospin correspond à la charge moyenne des particules qui forment le multiplet

$$Y = 2\bar{Q}.$$

## Conservation d'isospin

La conservation de l'isospin implique l'invariance de équations de mouvement sous une rotation dans l'espace des isospins et les règles de commutation

$$\begin{aligned} [U, S_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [U, H_{\text{fortes}}] &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}, S_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [\mathbf{I}, H_{\text{fortes}}] &= 0. \end{aligned}$$

Cependant comme dans le cas du moment angulaire ou du spin, seulement deux opérateurs matriciels commutent simultanément entre eux et avec  $H_{\text{fortes}}$ ,

$$[\mathbf{I}^2, I_3] = [\mathbf{I}^2, H_{\text{fortes}}] = [I_3, H_{\text{fortes}}] = 0,$$

et il existe donc seulement deux bons nombres quantiques qui décrivent les états d'isospin et, puisqu'ils sont conservés, ils mènent aux règles de sélections suivantes dans les interactions fortes:

$$\begin{aligned} \Delta |\mathbf{I}|^2 &= 0 \\ \Delta I_3 &= 0 \end{aligned}$$

qui viennent s'ajouter aux règles déjà décrites

$$\begin{aligned} \Delta B &= 0 \quad \text{et} \\ \Delta Q &= 0 \Rightarrow \Delta Y = 0. \end{aligned}$$

La combinaison de deux ou plusieurs isospins est analogue à celle de spins. Posons deux états d'isospin  $|I^a, I_3^a\rangle$  et  $|I^b, I_3^b\rangle$ . Ils se combinent selon les règles suivantes

1. L'isospin total  $I$  prend des valeurs

$$|I^a + I^b|, |I^a + I^b| - 1, \dots, |I^a - I^b| + 1, |I^a - I^b|$$

2. La troisième composante d'isospin est conservé additivement

$$I_3 = I_3^a + I_3^b.$$



Plus précisément, l'état final est une combinaison linéaire de tous ces états

$$\begin{aligned} |I^a, I_3^a; I^b, I_3^b\rangle &= |I^a, I_3^a\rangle \otimes |I^b, I_3^b\rangle \\ &= \alpha ||I^a + I^b|, I_3^a + I_3^b\rangle + \beta ||I^a + I^b| - 1, I_3^a + I_3^b\rangle \\ &\quad + \cdots + \gamma ||I^a - I^b|, I_3^a + I_3^b\rangle \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des coefficients de Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle |I^a + I^b|, I_3^a + I_3^b | I^a, I_3^a; I^b, I_3^b \rangle \\ \beta &= \langle |I^a + I^b| - 1, I_3^a + I_3^b | I^a, I_3^a; I^b, I_3^b \rangle \\ &\quad \vdots \\ \gamma &= \langle |I^a + I^b| - 1, I_3^a + I_3^b | I^a, I_3^a; I^b, I_3^b \rangle. \end{aligned}$$

Les interactions électromagnétiques brisent la symétrie sous la rotation dans l'espace des isospin,

$$[\mathbf{I}, H_{\text{e.m.}}] \neq 0.$$

Toutefois on a que

$$[I_3, H_{\text{e.m.}}] = 0.$$

L'Hamiltonien électromagnétique conserve donc la troisième composante de l'isospin  $I_3$ . En utilisant

$$[Q, H_{\text{e.m.}}] = 0$$

on déduit que (relation Gell-Mann-Nishijima)

$$[Y, H_{\text{e.m.}}] = 0.$$

On a finalement les règles de sélections pour les interactions électromagnétiques suivantes

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &= 0 & \Delta B &= 0 & \Delta Y &= 0 \\ \Delta |\mathbf{I}|^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Les interactions faibles, pour leur part, ne conservent ni  $I_3$ , ni  $\mathbf{I}^2$  et, incidemment les règles de sélection sont

$$\Delta |\mathbf{I}|^2 \neq 0 \quad \Delta Y \neq 0 \quad \Delta B = 0.$$

## 5.3 Étrangeté et hypercharge

Historiquement, le nombre quantique étrange fut proposé afin d'expliquer des propriétés apparemment contradictoires (étranges) de certaines particules:

1. une production copieuse dans les interactions fortes ( $\Delta t \simeq 10^{-23}\text{s}$ ) et,
2. une longue vie moyenne ( $\tau \simeq 10^{-9}\text{s}$ ) caractéristique des interactions faibles.

Elles ont donc à la fois des interactions fortes et des interactions faibles mais ne se désintègrent pas fortement sinon leurs vies moyennes seraient beaucoup plus courtes. Une règle de sélection doit donc s'appliquer. La solution consiste à introduire le nombre quantique appelé *étrangeté*,  $S$ .  $S$  est conservé dans les interactions fortes par lesquelles

les particules sont produites en paires d'*étrangeté* opposée. La désintégration en particules non-étranges ne peut cependant procéder que par la voie faible ce qui implique que dans les interactions faibles,  $S$  n'est pas conservé en général.

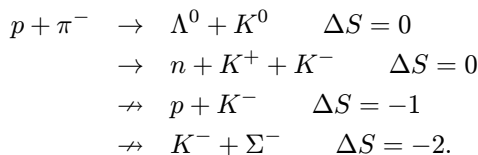
En fait, les observations ont permis de préciser les propriétés de ces particules *étranges*. Considérons, par exemple, les mésons qui forment le multiplet  $J^P = 0^-$  parmi lesquels on peut identifier trois pions ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ), deux doublets de mésons  $K$ , i.e. ( $K^+, K^0$ ) et ( $\bar{K}^0, K^-$ ) et deux mésons  $\eta$  et  $\eta'$ . Ces éléments du même multiplet se distinguent par leur désintégration faible. L'*étrangeté* doit être assignée de la manière suivante.

$$\begin{array}{c} \hline \hline \text{Multiplet } J^P = 0^- \\ \hline \hline (\bar{K}^+, K^0) : S = +1 \\ (\pi^+, \pi^0, \pi^-), \eta, \eta' : S = 0 \\ (\bar{K}^0, K^-) : S = -1 \end{array}$$

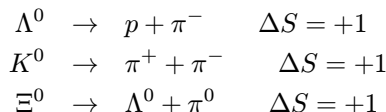
De la même façon, le multiplet  $J^P = \frac{1}{2}^+$  compte le doublet ( $p, n$ ), le triplet ( $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$ ), le  $\Lambda^0$ , et le doublet ( $\Xi^0, \Xi^-$ ).

$$\begin{array}{c} \hline \hline \text{Multiplet } J^P = \frac{1}{2}^+ \\ \hline \hline (p, n) : S = 0 \\ (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), \Lambda^0 : S = -1 \\ (\Xi^0, \Xi^-) : S = -2 \end{array}$$

L'*étrangeté* est conservée additivement (règle de sélection  $\Delta S = 0$ ) dans les réactions hadroniques (fortes). Par exemple,



Par ailleurs, les désintégrations faibles suivantes sont possibles:



avec des vies moyennes typiques de  $10^{-10}$ s. À noter que malgré l'*étrangeté*  $S = -2$  pour  $\Xi^0$ , son mode de désintégration correspond à  $\Delta S = +1$ . En fait, il s'agit d'une autre règle de sélection observée dans les interactions faibles,

$$|\Delta S| = 1.$$

Il est souvent pratique d'utiliser le nombre quantique d'*hypercharge* défini comme:

$$Y = B + S.$$

Puisque  $B$  et  $S$  sont tous deux conservés dans les interactions fortes, l'*hypercharge* est aussi conservée. La conservation de l'*hypercharge* implique l'invariance de l'Hamiltonien fort sous une transformation de jauge globale définie par

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-iY\alpha} |\psi\rangle$$

avec

$$[Y, H_{\text{fort}}] = 0$$

où  $Y$  est le générateur de la transformation.

## 5.4 Autres saveurs

Les nombres quantiques charme, bottom et top ont d'abord et avant tout été introduits dans le contexte du modèle des quarks à l'origine formé seulement des quarks up ( $u$ ), down ( $d$ ) et étrange ( $s$ ) (voir chapitre 6 pour une discussion détaillée du modèle des quarks). Mentionnons seulement pour le moment l'existence de ces nouveaux nombres quantiques et des règles de sélection associées.

### Charme

Malgré ses nombreux succès, le modèle des quarks original ne permettait pas d'expliquer tous les phénomènes observés. Citons pour exemple une réaction dans laquelle la charge électrique totale est conservée, mais où l'étrangeté ne l'est pas:

$$\begin{array}{rcccl} & \bar{K}^0 & \rightarrow & \mu^+ & \mu^- \\ \text{Charge électrique } Q & 0 & \neq & +1 & -1 \\ \text{Étrangeté } S & -1 & \neq & 0 & 0 \end{array} \quad (5.6)$$

Ce type de réaction faible, où un quark  $s$  se transforme en quark  $d$ , est permis par la théorie. Le taux de réaction est toutefois très faible par rapport à des réactions similaires, sans raison apparente.

L'addition d'une quatrième saveur de quark, avec la même charge électrique que le quark up, fut suggérée en 1964 par Glashow surtout par soucis de symétrie entre le nombre de quarks et de leptons connus à ce moment. Ce ne fut que quelques années plus tard qu'on réalisa qu'un quatrième quark aurait des répercussions importantes sur les prédictions. Une d'entre-elles est le mécanisme de GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiami 1970) qui décrit les modes de désintégration avec changement d'étrangeté. La conséquence de l'introduire un quatrième type de quark est de permettre deux voies de désintégrations au quark étrange dans le  $\bar{K}^0$ :

$$s \rightarrow u \rightarrow d \quad (5.7)$$

$$s \rightarrow c \rightarrow d \quad (5.8)$$

La suppression du processus  $\bar{K}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  s'explique alors par le fait que les amplitudes de probabilité associées aux deux routes possibles interfèrent de façon destructive (et s'annulent donc l'une l'autre).

On assigne au quatrième quark (le quark charmé  $c$ ) un nouveau nombre quantique appelé le *charme*  $C$  (où  $C = 1$  pour le quark  $c$  et  $C = -1$  pour l'antiquark  $\bar{c}$  correspondant).

La découverte en 1974 de la particule  $J/\psi$  (un état lié  $c\bar{c}$  baptisée "charmonium") permet de confirmer l'hypothèse de Glashow et apporta encore plus de crédibilité au modèle des quarks.

Le charme  $C$  est conservé dans les interactions fortes et électromagnétiques seulement:

$$\begin{aligned} [C, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [C, H_{\text{e.m.}}] &= 0 \end{aligned}$$

et

$$[C, H_{\text{faibles}}] \neq 0.$$

## Bottom

En 1977, une nouvelle série de résonnances fut découverte à des énergies d'environ 10 GeV lors de collisions  $pp$  à Fermilab. L'interprétation est la même que pour la particule  $J/\psi$ : il s'agit d'un état lié  $b\bar{b}$ , baptisé  $\Upsilon$ .

On assigne à ce cinquième quark le nombre quantique appelé *bottom* ou *beauty* ("beauté")  $\tilde{B}$ . Ici,  $\tilde{B} = 1$  pour le quark  $b$  et  $\tilde{B} = -1$  pour l'antiquark  $\bar{b}$  correspondant.

Tout comme pour le charme et l'étrangeté, seules les interactions faibles ne conservent pas le nombre quantique bottom  $\tilde{B}$ :

$$\begin{aligned} [\tilde{B}, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [\tilde{B}, H_{\text{e.m.}}] &= 0 \end{aligned}$$

et

$$[\tilde{B}, H_{\text{faibles}}] \neq 0.$$

## Top

Très récemment, l'existence du quark *top*  $t$  a été confirmée (1995). Mais de fortes présomptions planaient déjà depuis quelques temps sur l'existence de ce sixième quark surtout à cause d'une possibilité de symétrie entre quarks et leptons. Ces deux classes de particules sont considérées comme élémentaires et ponctuelles. Or, il existe au total six leptons, qui sont regroupés en trois doublets par la théorie des interactions faibles: l'électron et le neutrino électronique, le muon et le neutrino muonique, ainsi que le tauon et le neutrino tauonique. Il semblait particulièrement logique et satisfaisant qu'il existe, de la même façon, trois doublets de quarks:  $(u, d)$ ,  $(s, c)$  et  $(b, t)$ . Cette symétrie est plus qu'esthétique puisqu'elle facilite l'annulation des anomalies.

On assigne au quark *top* le nombre quantique appelé *top* ou *truth* ("vérité")  $T$ ,  $T = 1$  pour le quark  $t$  et  $T = -1$  pour l'antiquark  $\bar{t}$ . La masse du quark top est très élevée, i.e. environ 175 GeV. Celui-ci se désintègre donc en quarks plus légers très rapidement en moins de  $10^{-23}$ s, c'est-à-dire en moins de temps qu'il n'en faut pour s'échapper de l'intérieur d'un hadron ou pour former des hadrons (voir résonance 111)

Seules les interactions faibles ne conservent pas le nombre quantique bottom  $T$ :

$$[T, H_{\text{fortes}}] = 0$$

$$\begin{aligned} [T, H_{\text{e.m.}}] &= 0 \\ [T, H_{\text{faibles}}] &\neq 0. \end{aligned}$$

## Relation de Gell-Mann-Nishijima (révisée)

La relation de Gell-Mann-Nishijima se lit comme suit:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (5.9)$$

Elle établit la relation entre la troisième composante d'isospin et la charge électrique qui est conservée dans toutes les interactions. Les interactions faibles, comme on l'a vu, interviennent dans le changement de saveur et donc modifient les nombres quantiques  $I_3$ ,  $S$ ,  $C$ ,  $\tilde{B}$  et  $T$  sans toutefois modifier  $Q$ . En fait, on observe que tout changement de saveur obéit à

$$\Delta (2I_3 + S + C + \tilde{B} + T) = 0.$$

On peut inclure ce dernier résultat dans la relation Gell-Mann-Nishijima (généralisée)

$$Q = I_3 + \frac{(B + S + C + \tilde{B} + T)}{2}$$

ce qui équivaut à définir l'*hypercharge* par

$$Y = B + S + C + \tilde{B} + T$$

où

$$\begin{aligned} B &= \text{nombre baryonique} \\ S &= \text{nombre d'étrangeté} \\ C &= \text{nombre de charme} \\ \tilde{B} &= \text{nombre de bottom} \\ T &= \text{nombre de top.} \end{aligned}$$

Le nombre baryonique est introduit ici pour que la formule s'applique aux multiplets de baryons et de mésons.

## 5.5 Conjugaison de la charge

La conjugaison de charge  $C$  échange une particule par son antiparticule dans le même état d'impulsion, de position, etc... Dans les faits, cette opération inverse le signe des charges et du moment magnétique de chaque particule.

En mécanique classique, les équations de Maxwell sont invariantes sous le changement de signe de  $\rho$  et  $\mathbf{J}$ , la densité de charge et de courant, et de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ .

En mécanique quantique, l'interprétation de  $C$  est donc plus générale puisque l'échange particule-antiparticule implique que toutes les *charges quantiques* (ou nombres quantiques additifs) tels que les nombre leptonique, baryonique,... changent de signe.

De façon générale, l'opérateur de conjugaison de charge agit sur un état  $|\psi\rangle$  (particule) en le transformant vers son état conjugué de charge (antiparticule):

$$\mathcal{C}|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle.$$

Toutes les particules ne sont pas des états propres de la conjugaison de charge  $\mathcal{C}$ . En effet, un état propre de  $\mathcal{C}$  doit obéir à l'identité

$$\mathcal{C}|\psi\rangle = \eta_C |\psi\rangle,$$

où  $\eta_C$  est appelé la parité de charge. Ceci implique que  $\mathcal{C}|\psi\rangle$  a les mêmes nombres quantiques (ou charge) que  $|\psi\rangle$ . Les seuls états qui répondent à cette conditions sont les *systèmes vraiment neutres*, c'est-à-dire les états dont toutes charges quantiques et le moment magnétique sont nuls. C'est notamment le cas pour le photon et pour les états liés particule-antiparticule, e.g.

$$\gamma, \pi^0, e^-e^+, \eta, \dots$$

Par ailleurs, le neutron, bien que neutre, possède un moment magnétique non-nul et donc n'a pas de parité de charge définie.

La conjugaison de charge est, tout comme la parité, une opérateur unitaire discret dont les valeurs propres sont

$$\eta_C = \pm 1.$$

## Parité de charge totale

Tout comme dans le cas de l'opérateur de réflexion, la loi de conservation associée à la conjugaison de charge est multiplicative. Par exemple, pour un système de particules libres: on a

$$\mathcal{C}|a, b, c, \dots, z\rangle = \eta_C^a \eta_C^b \eta_C^c \dots \eta_C^z |\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots, \bar{z}\rangle.$$

La parité de charge totale est alors donnée par

$$\eta_C^{\text{tot}} = \prod_i \eta_C^i.$$

Par contre, en présence d'interactions la parité de charge totale reçoit une contribution supplémentaire associée au moment angulaire orbital. Considérons l'exemple simple d'un système constitué d'une paire  $\pi^+\pi^-$  dans un état de moment angulaire orbital défini,  $l$ . En interchangeant le  $\pi^+$  et le  $\pi^-$ , on inverse leur vecteur de position relative dont la partie spatiale de la fonction d'onde totale dépend. Cette dernière opération est équivalente à une réflexion appliquée sur une harmonique sphérique, et génère un facteur de phase de  $(-)^l$ , i.e.

$$\mathcal{C}|\pi^+\pi^-\rangle = (-)^l |\pi^+\pi^-\rangle.$$

Le cas des paires de fermions de spin- $\frac{1}{2}$  est similaire (e.g.  $e^+e^-$ ,  $q\bar{q}$ , ...). Toutefois, deux facteurs additionnels viennent contribuer:

1. un facteur de  $(-)^{s+1}$  dû à l'échange de la partie spinorielle de la fonction d'onde;
2. un facteur de  $(-)^1$  qui apparaît lorsque des fermions ou antifermions sont interchangés.

La parité de charge totale s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |f\bar{f}\rangle &= (-)^l (-)^{s+1} (-)^1 |f\bar{f}\rangle \\ &= (-)^{l+s} |f\bar{f}\rangle \end{aligned}$$

soit

$$\eta_C^{f\bar{f}} = (-)^{l+s}.$$

## Invariance sous $\mathcal{C}$

L'opérateur de conjugaison de charge n'affecte pas les nombres quantiques que sont la masse, l'impulsion, l'énergie dans les interactions fortes et électromagnétiques, le spin et laisse aussi invariante l'opération de conjugaison complexe,  $K$

$$[\mathcal{C}, \mathbf{p}] = [\mathcal{C}, H_{\text{fortes}}] = [\mathcal{C}, H_{\text{em}}] = [\mathcal{C}, \mathbf{J}] = [\mathcal{C}, K] = 0.$$

Par ailleurs, il inverse le signe de charges électriques, baryonique, leptonique, l'étrangeté, l'isospin, et le moment magnétique, i.e.

$$\{\mathcal{C}, Q\} = \{\mathcal{C}, B\} = \{\mathcal{C}, L\} = \{\mathcal{C}, S\} = \{\mathcal{C}, I_3\} = \{\mathcal{C}, \boldsymbol{\mu}\} = 0.$$

### Exemple 5.1



Considérons le proton et l'antiproton représentés respectivement par  $|p\rangle$  et  $|\bar{p}\rangle$ . Le proton et l'antiproton sont des états propres de charge

$$\begin{aligned} Q |p\rangle &= |p\rangle \\ Q |\bar{p}\rangle &= -|\bar{p}\rangle. \end{aligned}$$

La conjugaison de charge transforme proton en antiproton

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |p\rangle &= |\bar{p}\rangle \\ \mathcal{C} |\bar{p}\rangle &= |p\rangle \end{aligned}$$

Il en découle naturellement que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}Q |p\rangle &= \mathcal{C} |p\rangle = |\bar{p}\rangle \\ Q\mathcal{C} |p\rangle &= Q |\bar{p}\rangle = -|\bar{p}\rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(\mathcal{C}Q + Q\mathcal{C}) |p\rangle = \{\mathcal{C}, Q\} |p\rangle = 0.$$

## Les pions et les photons

Il n'existe que quelques particules qui sont des états propres de la conjugaison de charge.

Le  $\pi^0$ , qui est un état  $S = 0$  et  $L = 0$  de quarks  $u\bar{u}$  et  $d\bar{d}$ , est un état *vraiment neutre*. Il doit avoir une parité de charge  $\eta_C^{\pi^0} = (-)^{l+s} = 1$ . Ce résultat est effectivement vérifié expérimentalement par l'observation du processus

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

La conservation de la parité de charge implique dans ce cas

$$\eta_C^{\pi^0} = (\eta_C^\gamma)^2 = 1,$$

quelque soit la parité de charge du photon.

D'autre part, la parité de charge des photons peut être facilement déduite des propriétés classique du champ électromagnétique. Puisque l'opération consiste à inverser la charge et le moment magnétique, elle inverse donc les champs électrique et magnétique. Le quadri-vecteur  $A_\mu(x) = (\phi(x), \mathbf{A}(x))$  se transforme donc suivant

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\phi(x) &= -\phi(x) \\ \mathcal{C}\mathbf{A}(x) &= -\mathbf{A}(x)\end{aligned}$$

ce qui correspond à un parité de charge négative,  $\eta_C^\gamma = -1$ . Cette conclusion est confirmée par l'absence du mode de désintégration

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma.$$

Ce mode implique normalement un couplage électromagnétique de plus et on serait en droit de s'attendre à une suppression

$$R = \frac{\sigma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\sigma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} = \mathcal{O}(\alpha_{\text{em}})$$

mais  $R < 3 \times 10^{-8} \ll \alpha_{\text{em}}$ . Si ce mode était permis, alors la conservation de la parité de charge mènerait à une parité positive pour le photon

$$\eta_C^{\pi^0} = 1 \neq (\eta_C^\gamma)^3 = \eta_C^\gamma = -1.$$

## Systèmes particule-antiparticule

Dans le cas de systèmes particule-antiparticule, on peut invoquer le principe de Pauli généralisé selon lequel il y a symétrie ou antisymétrie sous l'échange total de particules. Par échange total, on entend échange de leur charge électrique, de leur position et de leur spin.

Le positronium procure une vérification complémentaire de la conservation de la parité de charge dans les interactions électromagnétiques. Il s'agit d'un état lié  $e^+e^-$  qui ressemble beaucoup à l'atome d'hydrogène pour peu qu'on tient compte de la différence de masse réduite et des effets relativistes. Les états liés peuvent être décrits par la notation spectroscopique

$${}^{2S+1}L_J,$$

où  $S$ ,  $L$  et  $J$  sont le spin total, le moment angulaire orbital et le moment angulaire total. La parité et la parité de charge pour ces états liés sont données par

$$\begin{aligned}\eta_P &= \eta_P^{e^+} \eta_P^{e^-} (-)^L \\ \eta_C &= (-)^{L+S}.\end{aligned}$$

Le *parapositronium* et l'*orthopositronium* sont les états  ${}^1S_0$  et  ${}^3S_1$  (niveau  $n = 1$ ,  $L = 0$ ,  $S = 0, 1$ ) respectivement et possèdent les parités de charge  $+1$  et  $-1$ . Dans la désintégration de ces états en deux photons ( $\eta_C^{2\gamma} = 1$ ) et trois photons ( $\eta_C^{3\gamma} = -1$ ), on



observe expérimentalement les modes permis et interdits suivant:

$$\begin{aligned} {}^1S_0 &\rightarrow \gamma + \gamma \\ &\nrightarrow \gamma + \gamma + \gamma \\ {}^3S_1 &\rightarrow \gamma + \gamma + \gamma \\ &\nrightarrow \gamma + \gamma \end{aligned}$$

en accord avec la conservation de la parité de charge.

Le même type de raisonnement s'applique aux systèmes quark-antiquark dont la parité de charge est

$$\eta_C = (-)^{L+S}.$$

Par ailleurs, dans les systèmes de particule-antiparticule impliquant des pions (e.g.  $\pi^+\pi^-$  ou  $\pi^0\pi^0$ ) pour lesquels  $B = Y = Q = 0$ , le principe de Pauli généralisé requiert la symétrie sous l'échange d'où

$$\eta_C(-)^L = 1$$

ou

$$\eta_C = (-)^L.$$

Pour un système  $\pi^0\pi^0$ , le principe de Pauli ordinaire s'applique puisque les  $\pi^0$  sont des particules identiques et donc

$$(-)^L = +1$$

et  $L$  doit être pair. Il en découle que

$$\eta_C^{\pi^0\pi^0} = +1$$

alors que pour  $\pi^+\pi^-$

$$\eta_C^{\pi^+\pi^-} = (-)^L.$$

## Violation de $\mathcal{CP}$ ou $\mathcal{T}$ et Théorème $\mathcal{CPT}$

L'invariance sous  $\mathcal{CP}$  (action combinée de la conjugaison de charge  $\mathcal{C}$  et d'une réflexion  $\mathcal{P}$ ) n'est en général pas respectée dans les interactions faibles

$$[\mathcal{CP}, H_{\text{faibles}}] \neq 0.$$

C'est notamment le cas dans la désintégration de  $K^0$  et  $\bar{K}^0$ . Cependant, un effort expérimental soutenu depuis quelques années tente d'analyser l'invariance sous  $\mathcal{T}$  en raison du *théorème  $\mathcal{CPT}$* .

Le *théorème  $\mathcal{CPT}$*  découle de l'interprétation des équations de mouvement relativistes en terme de particules et antiparticules. Il est valide pour toute théorie relativiste pour laquelle les particules ne peuvent atteindre une vitesse supérieure à celle de la lumière.

Posons la transformation  $\mathcal{R} = \mathcal{CPT}$  (opération combinée de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{T}$ ); son effet est:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^\mu \rightarrow -x^\mu \\ Q, B, L_e, \dots \rightarrow -Q, -B, -L_e, \dots \end{cases}$$

Par exemple,  $\mathcal{R}$  change une particule au repos en son antiparticule au repos. Toutes deux sont décrites par la même équation de mouvement si l'invariance sous  $\mathcal{CPT}$  n'est pas

brisée. Elles sont donc caractérisées par la même masse et la même vie moyenne. Autres conséquences: une brisure de l'invariance sous  $\mathcal{P}$  implique une brisure de l'invariance sous  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{T}$ , ou encore, l'invariance sous  $\mathcal{CP}$  implique l'invariance sous  $\mathcal{T}$ , etc...

La démonstration expérimentale du *théorème CPT* reste toutefois une question ouverte malgré les arguments théoriques sur lesquels il est fondé. Voici une liste de quelques tests du *théorème CPT*.

	$\bar{a}\bar{a}$	Limite
Demi-vie ( $\frac{\Delta\tau}{\bar{\tau}}$ )	$\mu^- - \mu^+$	$< 10^{-4}$
	$\pi^- - \pi^+$	$< 10^{-3}$
Moment magnétique ( $\frac{\Delta \mu }{ \mu }$ )	$K^- - K^+$	$< 10^{-3}$
	$e^- - e^+$	$< 10^{-10}$
	$\mu^- - \mu^+$	$< 10^{-8}$
Masse ( $\frac{\Delta m}{\bar{m}}$ )	$\pi^- - \pi^+$	$< 10^{-3}$
	$K^- - K^+$	$< 10^{-4}$
	$K^0 - \bar{K}^0$	$< 10^{-14}$
	$p - \bar{p}$	$< 10^{-4}$

## 5.6 Parité- $\mathcal{G}$

La conservation de la parité de charge ne s'applique qu'à un nombre très limité de systèmes (les systèmes vraiment neutres). Par exemple, considérons le pion qui existe sous trois états de charge. Seul le  $\pi^0$  est un état propre de la conjugaison de charge

$$\begin{aligned}\mathcal{C} |\pi^0\rangle &= |\pi^0\rangle \\ \mathcal{C} |\pi^\pm\rangle &\neq \pm |\pi^\mp\rangle.\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que dans les interactions fortes la charge électrique n'a aucun effet. Il est donc impossible, du point de vue des interactions fortes seulement, de distinguer le  $\pi^0$  du  $\pi^-$  ou  $\pi^+$ . On peut donc penser à généraliser le concept de conjugaison de charge de manière à l'étendre à tous les états de charge d'un même multiplet, i.e.

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} = \eta_G \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$$

où  $\eta_G = \pm 1$ . Le nouvel opérateur de parité- $\mathcal{G}$  est défini par

$$\mathcal{G} = \mathcal{C} e^{i\pi I_2}$$

où  $I_2 (= \sigma_2)$  est l'opérateur associé à la deuxième composante du vecteur d'isospin.  $\mathcal{G}$  est la combinaison de la conjugaison de charge et d'une rotation de  $\pi$  autour du deuxième axe dans l'espace d'isospin.

Considérons le multiplet de pions. Pour être en mesure d'apprécier la rotation dans l'iso-espace,  $e^{i\pi I_2}$ , il est plus pratique d'écrire les états de charge du pion en terme des composantes d'isospin  $I_1, I_2$  et  $I_3$ , i.e.  $|\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle$  et  $|\pi_3\rangle$  comme

$$\begin{aligned}|\pi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_1\rangle \mp i|\pi_2\rangle) \\ |\pi^0\rangle &= |\pi_3\rangle.\end{aligned}$$

Alors l'effet d'une rotation sur les états est:

$$\begin{aligned} e^{i\pi I_2} |\pi_1\rangle &= -|\pi_1\rangle \\ e^{i\pi I_2} |\pi_2\rangle &= |\pi_2\rangle \\ e^{i\pi I_2} |\pi_3\rangle &= -|\pi_3\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, la conjugaison de charge donne

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |\pi_1\rangle &= |\pi_1\rangle \\ \mathcal{C} |\pi_2\rangle &= -|\pi_2\rangle \\ \mathcal{C} |\pi_3\rangle &= |\pi_3\rangle. \end{aligned}$$

En combinant, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G} |\pi^0\rangle &= -|\pi^0\rangle \\ \mathcal{G} |\pi^\pm\rangle &= -|\pi^\pm\rangle \end{aligned}$$

soit une parité- $\mathcal{G}$  de  $-1$ .

Puisque la parité de charge et l'isospin sont tous deux conservés dans les interactions fortes, la parité- $\mathcal{G}$  l'est aussi.

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}, H_{\text{fortes}}] &= 0 \\ [\mathcal{G}, H_{\text{e.m.}}] &\neq 0 \\ [\mathcal{G}, H_{\text{faibles}}] &\neq 0. \end{aligned}$$

Les interactions électromagnétique et faible ne sont pas invariantes sous  $\mathcal{G}$ .

Tous les multiplets ne sont pas nécessairement des états propres de la parité- $\mathcal{G}$ .  $\mathcal{G}$  implique une conjugaison de charge dont les états propres sont comme on le sait vraiment neutres. Lorsqu'appliquée sur tout le multiplet, la conjugaison de charge devrait voir le multiplet globalement comme un objet vraiment neutre. Donc seuls les multiplets dont les charges moyennes sont nulles peuvent être des états propres de  $\mathcal{G}$ .

$$\bar{Q} = 0, \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{Y} = 0$$

C'est le cas du multiplet du pion dont la parité- $\mathcal{G}$  est  $-1$ . Le multiplet des nucléons n'a pas de parité- $\mathcal{G}$  définie.

En général, la parité- $\mathcal{G}$  d'un état d'isospin  $I$  est donné par

$$\eta_G = \eta_C (-)^I.$$

Par conséquent, les systèmes fermion-antifermion (e.g.  $p\bar{p}$ ,  $q\bar{q}$ , ...) ont un parité- $\mathcal{G}$

$$\eta_G = \eta_C (-)^{L+S+I},$$

alors que les systèmes boson-antiboson (e.g.  $\pi^+\pi^-$ ,  $\rho^+\rho^-$ , ...) ont un parité- $\mathcal{G}$

$$\eta_G = \eta_C (-)^{L+I}.$$

## 5.7 Résonances

Dans des processus impliquant des interactions fortes, on observe des états très instables ( $\tau \leq 10^{-23}$ s) appelés *résonances*. On les détecte par l'analyse des distributions de masse invariantes où des pics du type Breit-Wigner sont observés.

Considérons par exemple la réaction



Pendant cette réaction ( $\tau \leq 10^{-23}$ s), des états intermédiaires peuvent se former (voir figures 5.1). Si c'est le cas, la matrice de transition du processus prend la forme

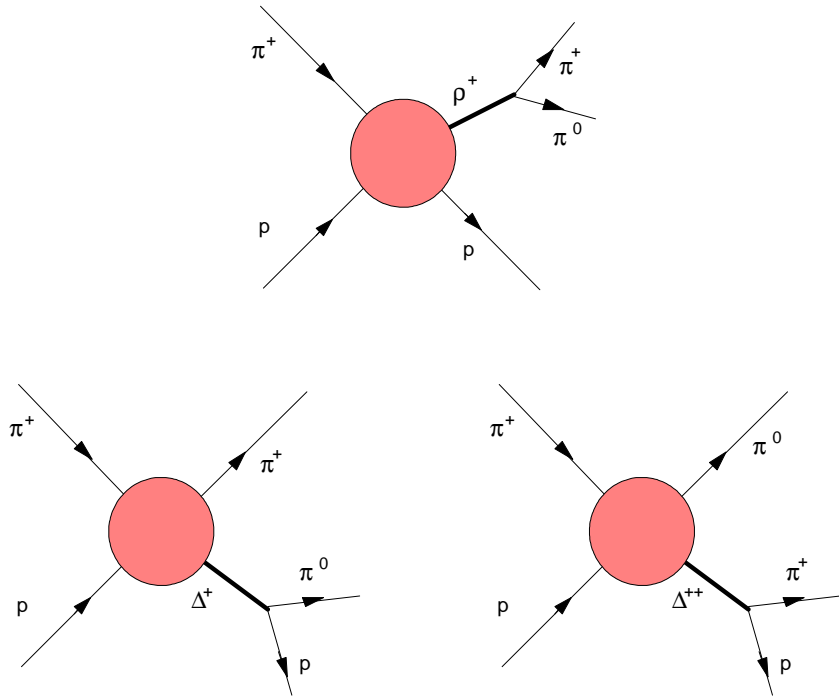


Figure 5.1 Exemple de résonances hadroniques.

$$T \sim T_0 \frac{g_1 g_2}{s_{i,j} - m^2 + i\Gamma m}$$

où  $T_0$  est la partie de la matrice de transition qui ne dépend pas de la résonance.  $g_1$  et  $g_2$  sont les couplages de la résonance avec le reste du processus.  $m$  et  $\Gamma$  sont respectivement la masse et la largeur de désintégration de la résonance. Finalement, la masse invariante  $s_{ij}$  des particules  $i$  et  $j$  est donnée par

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 = M_{ij}^2$$

où  $p_i$  et  $p_j$  sont les impulsions des particules finales. On observe alors un pic dans le distribution en fonction de  $s_{ij}$  autour de la masse de la résonance  $m$ .

Dans une réaction impliquant trois particules finales comme dans (5.10), l'espace de phase est décrit par l'équation (3.29)

$$\bar{N}_{tot} = \frac{1}{16(2\pi)^3 s} \int ds_{34} ds_{24}$$

ou

$$\frac{d\bar{N}_{tot}}{ds_{34} ds_{24}} = \frac{1}{16(2\pi)^3 s}.$$

À moins qu'il y ait une dépendance explicite de la matrice de transition en fonction de  $s_{34}$  et  $s_{24}$  comme dans le cas de pics à la Breit-Wigner, la distribution des événements suivant les masses invariantes  $s_{34}$  et  $s_{24}$  doit être uniforme.

$s_{24}$  et  $s_{34}$  sont bornés cinématiquement. Les limites sont les mêmes que celles décrites dans la désintégration à trois corps décrite dans une section précédente à l'équation (3.31). Le diagramme de la figure 5.2 illustre la région cinématique permise (partie ombrée). Ici  $m_1 = \sqrt{s}$ .

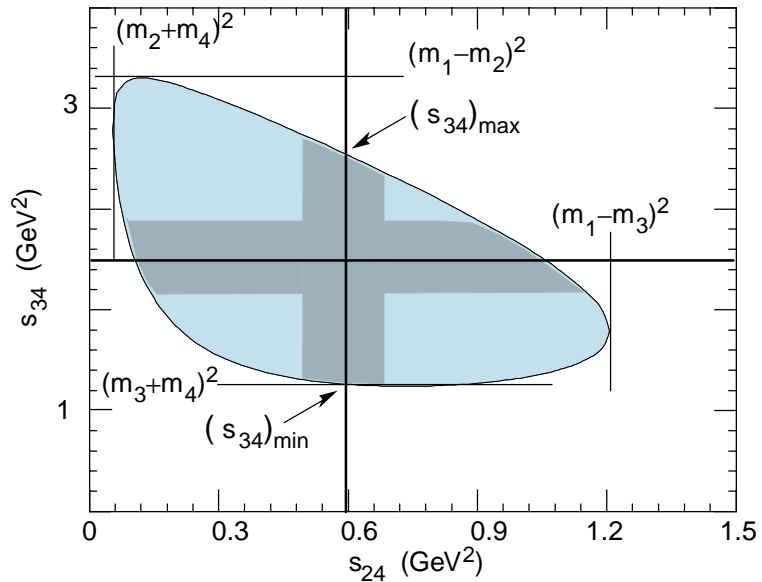


Figure 5.2 Diagramme de Dalitz: Une distribution uniforme des événements en fonction des masses invariantes signifie qu'aucune résonance n'est observée. Par ailleurs, si on note que la distribution de événements est regroupée autour de certaines valeurs des masses invariantes  $s_{34}$  ou  $s_{24}$  (partie foncée), il est possible d'en déduire la masse et la largeur de désintégration des résonances. Par exemple, la position et la largeur du pic dans la distribution des événements en fonction de  $s_{34}$  sont respectivement  $m_{\Delta^+}^2$  et  $\Gamma_{\Delta^+}$  alors que ceux associés à  $s_{24}$  sont  $m_{\rho^+}^2$  et  $\Gamma_{\rho^+}^2$ . ( $m_{\Delta^+} = 1232$  MeV,  $\Gamma_{\Delta^+} = 115.0$  MeV,  $m_{\rho^+} = 768.5$  MeV et  $\Gamma_{\rho^+} = 150.7$  MeV).

Les diagrammes de Dalitz illustrent la distribution des événements en fonction des masses invariantes. Alors, une distribution uniforme des événements en fonction des masses invariantes signifie qu'aucune résonance n'est observée. Par ailleurs, si on note que la distribution de événements est regroupée autour des masse invariantes (e.g.  $\Delta^+$ (1232 MeV) et du  $\rho^+$ (768.5 MeV)), il est possible d'en déduire la masse et la largeur de désintégration des résonances. Dans le cas des résonances  $\Delta^+$  et  $\rho^+$ , les pics devraient se retrouver autour des masses

$$m_{\Delta^+} = 1232 \text{ MeV}$$

$$m_{\rho^+} = 768.5 \text{ MeV}$$

et avoir une largeur à mi-hauteur de

$$\Gamma_{\Delta^+} = 115.0 \text{ MeV}$$

$$\Gamma_{\rho^+} = 150.7 \text{ MeV.}$$



# 6 LE MODÈLE DES QUARKS

## 6.1 Introduction

### Historique

Le modèle des quarks fut à l'origine motivé par deux observations empiriques:

1. Le nombre de leptons connus est limité à six alors qu'il existe une multitude de hadrons;
2. La classification de ces hadrons en fonction de leurs nombres quantiques (nombre baryonique, spin, isospin, étrangeté) révèle l'existence d'une structure (d'une symétrie) sous-jacente.

Nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent: on observe expérimentalement que les hadrons apparaissent en singulets, en octets ou en décuplets. En fait, chaque multiplet est caractérisé par un nombre baryonique, un spin et une parité définis. Par exemple, les multiplets les plus légers de baryons ( $J^P = \frac{1}{2}^+$ ) et de mésons ( $J^P = 0^-$ ) sont respectivement un octet et un nonet. Il est particulièrement instructif de visualiser ces particules en fonction de leur nombre quantique d'hypercharge et d'isospin (voir figures 6.1 et 6.2). On note tout de suite que les représentations des multiplets de baryons et de mésons sont dans ce cas-ci très similaires.

De plus, à l'intérieur d'un multiplet, les particules de même valeur d'étrangeté  $S$  ont des masses approximativement égales, alors que l'écart de masse correspondant à un intervalle  $\Delta S = \Delta Y = 1$  est une constante d'environ 150 MeV.

En 1964, Murray Gell-Mann et George Zweig suggérèrent que les hadrons n'étaient pas véritablement des particules élémentaires, mais étaient constitués de composantes plus fondamentales, les *quarks*. Pour rendre compte de la variété des hadrons connus à l'époque, on avait besoin de trois types (trois *saveurs* ou *parfums*) de quarks, que l'on nomma *up*, *down* et *étrange* (respectivement  $u$ ,  $d$  et  $s$ ). La représentation en multiplets (singulets, octets et décuplets) des hadrons peut être dérivée de la représentation *fondamentale* ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) (voir figures 6.3).

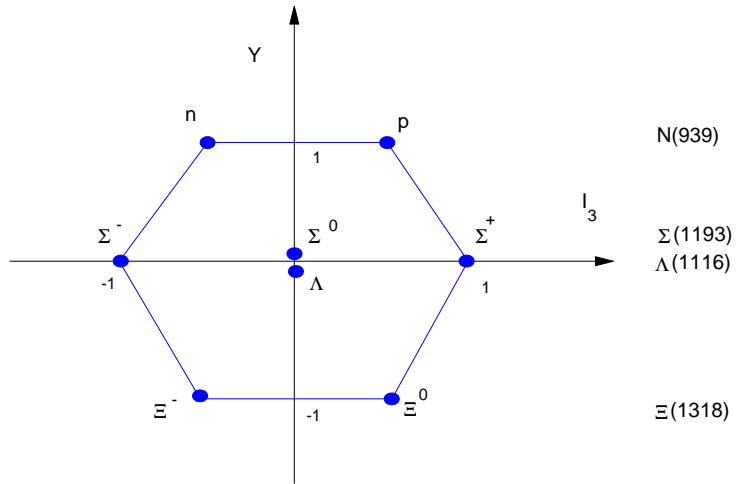


Figure 6.1 Multiplet de baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$ : la position des baryons est assignée en fonction de l'hypercharge et l'isospin. La colonne de droite montre la masse moyenne (en MeV) des différents états de charge d'un sous-multiplet d'isospin.

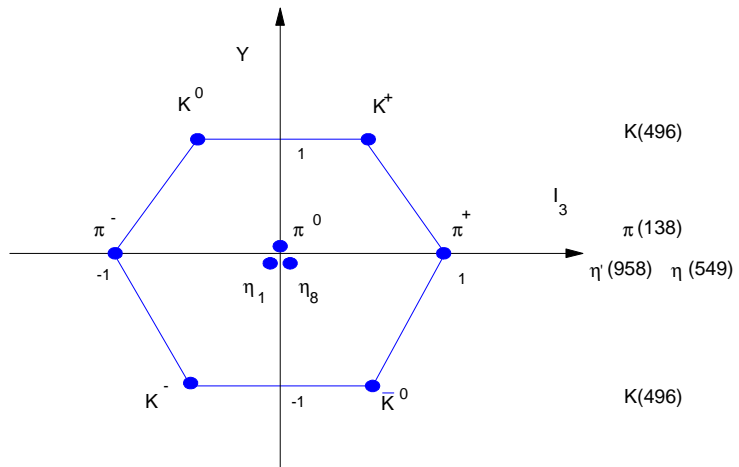


Figure 6.2 Multiplet de mésons  $J^P = 0^-$ : la position des mésons est assignée en fonction de l'hypercharge et l'isospin. La colonne de droite montre la masse moyenne (en MeV) des différents états de charge d'un sous-multiplet d'isospin. On note ici que les états propres de masse des particules  $\eta$  et  $\eta'$  diffèrent des états d'hypercharge-isospin  $\eta_1$  (singulet) et  $\eta_8$  (octet).



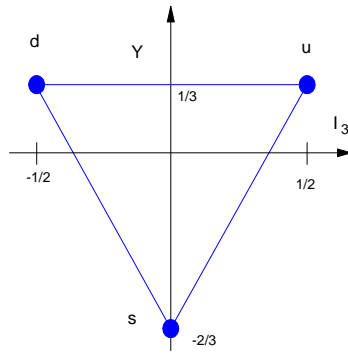


Figure 6.3 Représentation fondamentale des quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$ .

Selon ce modèle, les baryons (antibaryons) sont formés de trois quarks (antiquarks), alors que les mésons sont formés d'un quark et d'un antiquark.

Plus tard, la construction d'accélérateurs plus puissants a permis de découvrir l'existence de deux autres *saveurs* de quarks (*charmé*  $c$  et *bottom*  $b$ ). Tout récemment, en 1995, l'existence d'une sixième *saveur*, le *top*  $t$ , fut confirmée.

On n'a jamais observé directement de quarks isolés, mais leur existence physique est supportée de façon indirecte par le bombardement de protons et de neutrons par un faisceau d'électrons fortement accélérés. Dès la fin des années '60, des expériences menées à l'accélérateur linéaire de Stanford révélèrent que la distribution angulaire et énergétique des électrons diffusés était en accord avec le modèle; les électrons semblaient entrer en collision avec des particules ponctuelles chargées à l'intérieur des protons et des neutrons.

Puisque certains aspects du modèle des quarks sont mieux compris avec le langage de la théorie des groupes, la première partie de ce chapitre introduit certains concepts utiles sur les groupes. Ces concepts peuvent sembler abstraits ou même peu utile à prime abord. C'est pourquoi nous tenterons de visualiser chacun de ces concepts dans le contexte d'un groupe bien connu en mécanique quantique, le groupe qui décrit le spin et l'isospin,  $SU(2)$ .

Nous établirons aussi le lien entre la représentation du groupe  $SU(N)$  et le modèle des quarks, pour ensuite construire les fonctions d'onde associées aux baryons et aux mésons.

Par la suite, nous considérerons les extensions du modèle original, i.e. l'ajout de trois nouvelles *saveurs* et l'introduction du concept de la *couleur*. Certaines propriétés statistiques (masse, moment magnétique) des quarks seront étudiées, ainsi que leur dynamique (interactions fortes et faibles).

## 6.2 Théorie des groupes

Commençons par décrire formellement ce qu'est un groupe.

### Propriétés générales d'un groupe

Les groupes de transformation considérés ici sont des *groupes continus*, i.e. que les paramètres décrivant les transformations sont des variables continues.

Un groupe  $G$  est formé d'un ensemble d'éléments  $(a, b, c, \dots)$  et d'une règle de composition (notée ici par le symbole  $\circ$ ). Il possède les propriétés suivantes:

1. Relation de fermeture:

Si  $a$  et  $b$  sont des éléments du groupe  $G$ , alors  $a \circ b$  est également un élément de  $G$

$$\forall a, b \in G : a \circ b \in G. \quad (6.1)$$

2. Existence d'un élément identité:

Il existe un élément-identité  $I$  tel que pour tout élément  $a$  de  $G$ , la relation  $a \circ I =$

$I \circ a = a$  est satisfaite,

$$\forall a \in G, \exists I \in G : a \circ I = I \circ a = a. \quad (6.2)$$

3. Existence d'un élément inverse:

Chaque élément  $a$  du groupe possède un inverse unique  $a^{-1}$  tel que  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = I$ ,

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = I. \quad (6.3)$$

4. Associativité:

Si  $a, b$  et  $c$  sont des éléments de  $G$ , alors la relation  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  est satisfaite,

$$\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c). \quad (6.4)$$

## Groupe de Lie (compact)

Les groupes de Lie compacts sont particulièrement utiles en physique des particules (e.g. le groupe  $SU(2)$  de l'isospin). Ils sont caractérisés par des transformations unitaires continues, c'est-à-dire que chaque transformation est définie par un ensemble de paramètres continus et une loi de multiplication qui dépend de manière monotone des paramètres.

Ces transformations sont équivalentes à une représentation d'opérateur unitaire

$$U = e^{i\alpha^a T_a}$$

où  $\alpha^a \in \mathfrak{R}$  avec  $a = 1, 2, 3, \dots, N$ .  $T_a$  sont des opérateurs hermitiques linéairement indépendants qui sont souvent identifiés aux générateurs du groupe. Dans  $SU(2)$ ,  $U$  peut être assimilé à la notion de rotation dans l'espace des spins ou isospins.

Considérons le produit suivant d'éléments du groupe (pouvant par exemple représenter des rotations infinitésimales successives dans l'espace des spins ou isospins pour  $SU(2)$ ),

$$\begin{aligned} P &= e^{i\lambda T_b} e^{i\lambda T_a} e^{-i\lambda T_b} e^{-i\lambda T_a} \\ &= 1 + \lambda^2 [T_a, T_b] + \dots \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est infinitésimal. La propriété de fermeture du groupe nous permet d'écrire

$$P = e^{i\alpha^c T_c} = 1 + i\alpha^c T_c + \dots$$

Il en découle qu'à l'ordre  $\lambda^2$ ,

$$\lambda^2 [T_a, T_b] = i\alpha^c T_c$$

et qu'en écrivant  $\alpha^c = \lambda^2 f_{abc}$ , on obtient l'identité

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

qui définit l'algèbre du groupe. Les quantités  $f_{abc}$ , appelées constantes de structure, sont des paramètres constants qui caractérisent chaque groupe.

Les propriétés de cyclicité des générateurs se traduisent par une identité très importante en théorie des groupes, l'identité de Jacobi

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0$$

ou encore

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{abd}f_{cde} + f_{cad}f_{bde} = 0.$$

Pour  $SU(2)$ , la relation de commutation s'écrit

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

où on reconnaît le tenseur de Levi-Civita.

## Représentations

Pour tout élément  $x$  d'un groupe, il existe un opérateur unitaire  $D(x)$ . Par ailleurs, si on a deux éléments du groupe  $x$  et  $y$  et que

$$D(x) \cdot D(y) = D(x \cdot y)$$

alors  $D(x)$  est appelé une *représentation*. De plus, si  $D$  est diagonalisable en bloc on dit que la représentation est réductible. Il est donc possible de trouver une matrice  $S$  telle que

$$D' = SDS^{-1}$$

est diagonale en bloc, par exemple

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Dans le cas contraire où  $D$  n'est pas diagonalisable en bloc, la représentation est dite irréductible. Deux représentations sont particulièrement intéressantes:

La *représentation fondamentale*: c'est la plus petite représentation irréductible (i.e. qui ne contient pas de sous-espace invariant) et non-triviale du groupe. Pour  $SU(2)$ , il s'agit d'un doublet

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

La *représentation adjointe*: les constantes de structure du groupe génèrent elles-mêmes une représentation, la représentation adjointe, de l'algèbre. Posons un ensemble de matrices définies par

$$(T_a)_{bc} \equiv if_{abc}$$

alors  $(T_a)_{bc}$  obéit forcément à la relation

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

à cause de l'identité de Jacobi. De plus, il est facile de prouver que

$$\text{Tr} [T_a T_b] = \lambda \delta_{ab}$$

$$f_{abc} = -\frac{i}{\lambda} \text{Tr} [[T_a, T_b] T_c].$$

Pour  $SU(2)$ , la représentation adjointe est défini par le tenseur de Levi-Civita.

## Racine, rang et poids

Puisque les générateurs d'un groupe définissent les transformations, il ne faut pas s'étonner qu'un certain nombre de propriétés associées à ce groupe découlent directement de l'analyse des générateurs.

### Rang:

On peut tout d'abord diviser les générateurs d'un groupe en deux ensembles:

1. Les opérateurs hermitiques diagonaux,  $H_i$  (e.g.  $J_3$  dans  $SU(2)$ )
2. Les opérateurs de création et d'annihilation,  $E_\alpha$  (e.g.  $J_\pm$  dans  $SU(2)$ ).

Considérons  $T_a$ , les générateurs dont les combinaisons linéaires  $H_i$  avec  $i = 1, 2, \dots, m$  sont diagonales, hermitiques et possèdent les propriétés suivantes:

1.  $H_i = C_{ia}T_a$ ,
2.  $[H_i, H_j] = 0$ ,
3.  $\text{Tr}[H_i H_j] = k_D \delta_{ij}$ ,
4.  $m$  est le plus grand possible.

Alors, le rang  $m$  est le nombre maximum d'opérateurs hermitiques diagonalisables. Physiquement, ceci correspond au nombre maximum de nombres quantiques qui déterminent un état. Dans  $SU(2)$  par exemple, le rang est de 1.

### Poids:

Posons des états caractérisés par deux quantités  $\mu$  et  $D$ , le vecteur de poids dont les composantes sont  $\mu_i$  et la représentation, respectivement. Sous les opérateurs hermitiques  $H_i$ , les états propres  $|\mu, D\rangle$  deviennent

$$H_i |\mu, D\rangle = \mu_i |\mu, D\rangle$$

où  $\mu_i$ , les poids, sont les valeurs propres de  $H_i$ .

Puisque dans  $SU(2)$ , le rang est  $m = 1$ , il existe un seul opérateur hermitique diagonalisable qui correspond à  $J_3$ . Dépendant de la représentation (singulet, doublet, triplet,...), le vecteur de poids, qui ici ne possède qu'une seule composante, peut prendre les valeurs

$$\mu = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J.$$

La quantité  $J$ , comme on le voit, est le poids le plus élevé de la représentation.

### Racines:

Dans la représentation adjointe, chaque état correspond à un générateur du groupe. Il sont représentés par la matrice  $(T_a)_{bc} = -if_{abc}$ . En abrégant la notation on peut écrire

$$T_a \rightarrow |T_a\rangle$$

avec un produit scalaire défini par

$$\langle T_a | T_b \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} [T_a^\dagger T_b].$$

L'action d'un générateur sur ces états est

$$T_a |T_b\rangle = |[T_a, T_b]\rangle$$

mais alors on connaît déjà les vecteurs de poids nul puisqu'on sait que les opérateurs hermitiques  $H_i$  commutent entre eux

$$\begin{aligned} H_i |H_j\rangle &= |[H_i, H_j]\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le reste des générateurs est décrit par les états  $|E_\alpha\rangle$  tels que

$$H_i |E_\alpha\rangle = \alpha_i |E_\alpha\rangle$$

ce qui correspond au commutateur

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha.$$

Ces objets ne sont pas nécessairement hermitiques, alors on écrira

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger$$

puisque  $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$ .

En normalisant

$$\begin{aligned} \langle E_\alpha | E_\beta \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr} [E_\alpha^\dagger E_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \\ \langle H_i | H_j \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr} [H_i H_j] = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Dans  $SU(2)$ ,  $E_{\pm\alpha} = J_\pm$  est l'opérateur de création/annihilation et  $H_i = J_3$  est l'opérateur hermitique diagonal.

Les vecteurs de poids,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\alpha}$ , de la représentation adjointe sont appelés *racines*. L'opérateur de création/annihilation élève ou abaisse la valeur propre du nouvel état

$$E_{\pm\alpha} |\boldsymbol{\mu}, D\rangle = N_{\pm\alpha, \boldsymbol{\mu}} |\boldsymbol{\mu} \pm \boldsymbol{\alpha}, D\rangle$$

En utilisant ces états, on peut prouver que le produit scalaire des vecteurs  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mu} = -\frac{p-q}{2} \boldsymbol{\alpha}^2$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers. Il en découle que le produit scalaire de deux racines  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  obéit aux relations suivantes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &= -\frac{m}{2} \boldsymbol{\alpha}^2 \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &= -\frac{m'}{2} \boldsymbol{\beta}^2 \end{aligned}$$

où  $m$  et  $m'$  sont des entiers. Mais alors l'angle entre les deux vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  est

$$\cos^2 \theta = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}^2 \boldsymbol{\beta}^2} = \frac{mm'}{4}.$$

Le couple d'entiers  $m$  et  $m'$  définit donc les seuls angles possibles, soient:

$(m, m')$	$mm'$	$\theta$
$(0, m'), (m, 0)$	0	$\frac{\pi}{2}$
$(1, 1)$	1	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
$(1, 2), (2, 1)$	2	$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
$(1, 3), (3, 1)$	3	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
$(1, 4), (2, 2), (4, 1)$	4	$0, \pi$

## Rotation en 2D — groupe $SO(2)$

Isomorphe à  $U(1)$

## Rotation en 3D — groupe $SO(3)$

Homomorphe à  $SU(2)$

## Groupe $U(1)$

$U(1)$  est le groupe le plus simple. Il inclut l'ensemble de tous les facteurs de phase complexes  $U(H) = e^{iH}$ , où  $H$  est un paramètre scalaire réel. La règle de composition est la multiplication:

$$\begin{aligned}
 U(H)U(H') &= e^{iH}e^{iH'} \\
 &= e^{i(H+H')} \\
 &= U(H + H') \\
 &= U(H')U(H)
 \end{aligned}$$

À l'instar des groupes de la section suivante, ce groupe est commutatif ou abélien puisque ces éléments commutent.

## Groupe $SU(N)$

Les éléments du groupe  $SU(N)$  sont représentés par des matrices  $N \times N$  unitaires, dont le déterminant est égal à 1. Le groupe  $SU(N)$  lui-même est caractérisé par  $N^2 - 1$  paramètres indépendants, notés  $K_i$ . Les éléments du groupe sont représentés par:

$$\begin{aligned}
 U &= e^{iL} = e^{iK_j L_j} \\
 &= e^{i(K_1 L_1 + K_2 L_2 + K_3 L_3 + \dots)}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, 3, \dots, N^2 - 1 \\ K_j &= \text{paramètres réels} \\ L_j &= \text{matrices } N \times N \text{ hermitiennes,} \\ &\text{appelées } \textit{générateurs} \text{ du groupe} \end{aligned}$$

Les générateurs du groupe obéissent à la relation:

$$[L_i, L_j] = if_{ijk}L_k \quad (6.5)$$

où les  $f_{ijk}$  sont les constantes de structure du groupe.

La plus petite représentation irréductible (i.e., qui ne contient pas de sous-espace invariant) et non-triviale du groupe est de dimension  $N$ . On la nomme *représentation fondamentale* du groupe:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Les  $N^2 - 1$  générateurs d'un groupe  $SU(N)$  peuvent être regroupés en deux catégories:

1. les opérateurs hermitiques diagonaux dont le nombre maximal est  $N - 1$  (le rang est donc  $N - 1$ );
2. les opérateurs de création et d'annihilation qui sont donc au nombre de  $N(N - 1)$ .

## Le groupe $SU(2)$

Regroupons maintenant les propriétés du groupe  $SU(2)$  décrites plus haut. La représentation fondamentale du groupe  $SU(2)$  est un doublet:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

En fait, tout état peut donc être construit comme une combinaison linéaire des deux vecteurs de base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les générateurs sont proportionnels aux trois matrices de Pauli (i.e.  $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ ):

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

On note qu'un seul générateur est diagonal puisque le rang est de 1.

De plus, tout élément de  $SU(2)$  peut s'écrire

$$U(K_1, K_2, K_3) = e^{i(K_1 J_1 + K_2 J_2 + K_3 J_3)}. \quad (6.9)$$

Une transformation arbitraire de  $X$  est alors notée:



$$X \rightarrow X' = U(K_1, K_2, K_3)X. \quad (6.10)$$

Les constantes de structure de  $SU(2)$  sont les composantes du tenseur antisymétrique de Levi-Civita:

$$f_{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (123) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (123) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.11)$$

Les trois générateurs peuvent être regroupés sous la forme:

1. opérateur hermitique diagonal:  $J_3$ ;
2. opérateur de création:  $J_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 + iJ_2)$ ;
3. opérateur d'annihilation:  $J_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 - iJ_2)$ .

Il est facile de démontrer que  $J_{\pm}$  a pour effet d'élever ou de réduire d'une unité la valeur propre de  $J_3$  d'un état. Posons un état  $|m\rangle$  tel que

$$J_3 |m\rangle = m |m\rangle.$$

Alors en utilisant la relation de commutation

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$$

on obtient

$$\begin{aligned} J_3 J_{\pm} |m\rangle &= J_{\pm} J_3 |m\rangle \pm J_{\pm} |m\rangle \\ &= (m \pm 1) J_{\pm} |m\rangle. \end{aligned}$$

On en conclut donc que l'état  $J_{\pm} |m\rangle$  a la valeur propre  $(m \pm 1)$  et correspond à l'état  $|m \pm 1\rangle$ . Sur un axe représentant les valeurs propres de  $J_3$  (ou encore les états propres), on note l'action des opérateurs de création et d'annihilation sur les états propres (voir figure 6.4). Ceux-ci qui élèvent ou réduisent les valeurs propres (e.g. spin, isospin,...).

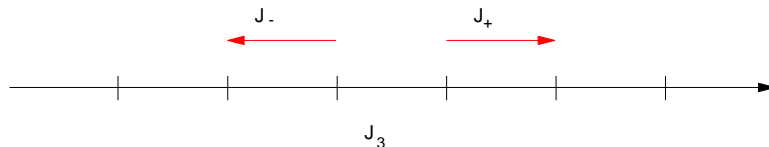


Figure 6.4 Action des opérateurs de création et d'annihilation sur les états propres.

Certains opérateurs commutent avec tous les générateurs du groupe. On les appelle les opérateurs de Casimir. Dans le cas de  $SU(2)$ , un seul opérateur de Casimir est défini:

$$C = \mathbf{J}^2 = J_+ J_- + J_- J_+ + J_3^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2.$$

Il est facile de déterminer la valeur de cet opérateur. Posons par exemple un état de spin

$|m_{\max}\rangle$  dont la troisième composante est maximale dans le multiplet de spin  $J$ . Alors

$$J_3 |m_{\max}\rangle = m_{\max} |m_{\max}\rangle$$

où  $m_{\max} = J$  et l'opérateur de Casimir qui agit sur cet état donne

$$\begin{aligned} C |m_{\max}\rangle &= (J_+ J_- + J_- J_+ + J_3^2) |m_{\max}\rangle \\ &= m_{\max} (m_{\max} + 1) |m_{\max}\rangle \\ &= J(J + 1) |m_{\max}\rangle \end{aligned}$$

### Le groupe $SU(3)$

La représentation fondamentale, souvent simplement dénotée par  $\mathbf{3}$ , du groupe  $SU(3)$  est un triplet:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Tout état peut donc être construit comme une combinaison linéaire des trois vecteurs de base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les huit générateurs  $T_a$  obéissent aux relations

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= -if_{abc} T_c \\ \{T_a, T_b\} &= \frac{1}{3} \delta_{ab} + d_{abc} T_c \end{aligned}$$

où  $f_{abc}$  et  $d_{abc}$  sont les constantes de structures symétrique et antisymétrique. On écrit souvent les générateurs du groupe  $SU(3)$  en terme des matrices de Gell-Mann

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}.$$

Les huit matrices de Gell-Mann sont:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est possible de faire ressortir le sous-groupe  $SU(2)$  de  $SU(3)$  en éliminant des matrices  $3 \times 3$  les rangées et colonnes qui ne contiennent que des zéros. On retrouve en effet les

deux premières matrices de Pauli à l'intérieur de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de  $\lambda_4$  et  $\lambda_5$ , et de  $\lambda_6$  et  $\lambda_7$ , respectivement. Ces trois couples de matrices forment donc respectivement des sous-groupe  $SU(2)$  qui sont appelés le sous-groupe d'isospin (ou  $I$ -spin), le sous-groupe de  $V$ -spin et le sous-groupe de  $U$ -spin.

Les huit générateurs peuvent encore une fois être regroupés en deux catégories:

1. Opérateurs hermitiques diagonaux :

$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8.$$

$SU(3)$  est donc de rang 2.

2. Opérateurs de création/annihilation:

$$I_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$$

$$V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$$

$$U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7).$$

De la même façon qu'on identifie le couple d'opérateurs de création/annihilation de  $SU(2)$  à des opérateurs de transformation entre les quarks  $u$  et  $d$ , on peut aussi associer les opérateurs de création/annihilation de  $SU(3)$  à des opérateurs de transformation pour les couples suivants:

$$I_{\pm} : (u, d)$$

$$V_{\pm} : (d, s)$$

$$U_{\pm} : (u, s).$$

souvent appelés  $I$ -spin,  $V$ -spin et  $U$ -spin respectivement.

Les vecteurs de base ont les valeurs propres suivantes:

	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$I_3$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$
$Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Les vecteurs de base de la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  sont souvent représentés par leur position sur un *diagramme de poids* dont les axes correspondent aux valeurs des opérateurs  $I_3$  et  $Y$  (voir figure 6.5). De façon générale, les représentations irréductibles de dimension supérieure sont obtenus en combinant la représentation fondamentale. Les opérateurs de  $I$ -spin,  $V$ -spin et  $U$ -spin (création/annihilation) permettent de se déplacer sur le diagramme de poids (voir figure 6.6).

Dans le cas de  $SU(3)$ , l'opérateur de Casimir est défini:

$$C = T_a T^a = \frac{1}{2}(I_+ I_- + I_- I_+) + I_3^2 + \frac{1}{2}(U_+ U_- + U_- U_+)$$

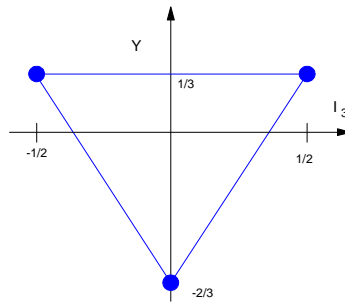


Figure 6.5 Diagramme de poids des vecteurs de base de la représentation fondamentale de  $SU(3)$ .

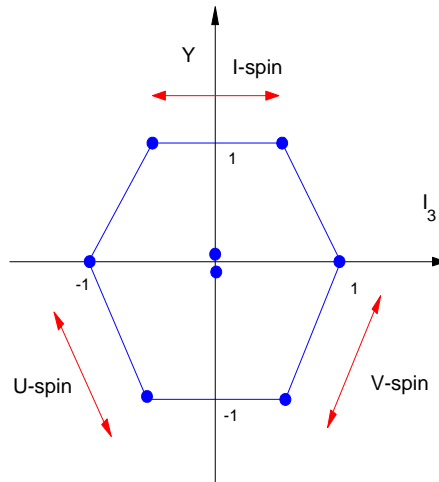


Figure 6.6 Diagramme de poids de l'octet: on note l'action des opérateurs de création/annihilation.

$$+\frac{1}{2}(V_+V_- + V_-V_+) + \frac{3}{4}Y^2.$$

On peut déterminer la valeur de cet opérateur en considérant un état  $|\chi_{\max}\rangle$  dont la troisième composante d'isospin ( $I_3$ ) et d'hypercharge ( $Y$ ) sont à leur valeurs maximales dans le multiplet. Alors

$$\begin{aligned} I_3 |\chi_{\max}\rangle &= m_{\max} |\chi_{\max}\rangle \\ Y |\chi_{\max}\rangle &= Y_{\max} |\chi_{\max}\rangle \end{aligned}$$

et l'opérateur de Casimir qui agit sur cet état donne

$$C |\chi_{\max}\rangle = \left( I_3^2 + 2I_3 + \frac{3}{4}Y^2 \right) |\chi_{\max}\rangle.$$

Les constantes de structure de  $SU(3)$  sont quant à elles données par:

$$f_{123} = 1 \tag{6.13}$$

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2} \tag{6.14}$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{6.15}$$

alors que

$$f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj} \quad f_{ijj} = f_{ijj} = 0.$$

## 6.3 Quarks et Représentations $SU(N)$

### Lien entre représentation $SU(N)$ et modèle des quarks

Du point de vue mathématique, l'idée de base derrière le modèle des quarks est d'identifier les composantes de la représentation fondamentale d'un groupe avec les différentes saveurs de quarks. Ainsi, si on ne regardait que les multiplets d'isospin, il serait approprié de considérer le groupe  $SU(2)$ :

$$SU(2): \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

qui nécessite seulement deux quarks.

Cependant, les hadrons sont en général décrits par deux étiquettes: la troisième composante d'isospin et l'hypercharge. Ceci implique donc un groupe de rang 2 (deux opérateurs hermitiques, donc deux valeurs propres réelles). Le choix du groupe pointe tout naturellement vers une extension du groupe d'isospin, c'est-à-dire le groupe  $SU(3)$  dont la représentation fondamentale est un triplet,

$$SU(3): \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \tag{6.17}$$

formé de trois quarks.

Les états physiques (baryons et mésons) sont obtenus à partir des représentations de dimension supérieure.

### 1. Baryons:

Les baryons sont des états à trois quarks. Dans le modèle original à trois saveurs, on forme donc le produit de la représentation  $\mathbf{3}$  avec elle-même:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{27} \quad (6.18)$$

Cette nouvelle représentation (à laquelle on associe 27 états) est cependant réductible. Elle peut se décomposer en représentations irréductibles, sous la forme:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{1} \quad (6.19)$$

En couplant les trois triplets originaux, on peut donc former un décuplet  $\mathbf{10}$ , 2 octets  $\mathbf{8} \oplus \mathbf{8}'$  et un singulet  $\mathbf{1}$  (i.e., les multiplets d'isospin et d'étrangeté)

### 2. Mésons:

Les mésons sont formés d'un quark et d'un antiquark. Notant  $\bar{\mathbf{3}}$  la représentation conjuguée à  $\mathbf{3}$ , on obtient:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (6.20)$$

Cette fois-ci, les représentations irréductibles formées sont un octet et un singulet.

Chaque multiplet formé est caractérisé par ses propriétés de symétrie: il est symétrique, antisymétrique ou à symétrie mixte sous l'échange de deux de ses composantes.

## Représentations irréductibles et Tableaux de Young

Les résultats précédents sur les représentations irréductibles ont été cités sans plus d'explications. On est en droit de se demander d'où viennent ces résultats. Pourquoi  $\mathbf{27}$  est-il réductible? etc...En général, la combinaison des représentations et leurs propriétés ne sont pas évidente à première vue.

Mais revenons tout d'abord sur les représentations irréductibles de  $SU(3)$ . Nous connaissons déjà le triplet

$$X_i$$

et l'octet qui peut s'écrire comme le produit de deux triplets où on s'est assuré que la trace est nulle, i.e.

$$X_{ij} = X_i X_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} X_k X_k.$$

De manière plus générale, on construit des multiplets de représentation irréductible en utilisant la procédure suivante:

1. Construire les tenseurs  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  en général comme des produits de la représentation fondamentale  $X_i$ .
2. Symétriser par rapport aux indices  $i_1 \dots i_p$  et  $j_1 \dots j_q$ .
3. Soustraire les traces de manière à ce que la contraction des indices du tenseur soit

nulle

$$\delta_{i_1 j_1} X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0.$$

Le tenseur qui en résulte forme alors une représentation irréductible  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  caractérisée par les entiers  $(p, q)$ . Il est facile de trouver la dimension de cette représentation en calculant le nombre de composantes indépendantes de ce tenseur. Rappelons que chaque indice  $i_a$  ou  $j_b$  ne peut prendre que trois valeurs (1, 2 ou 3) dans le groupe  $SU(3)$ . Alors le nombre de façon de combiner les indices  $i_1 \dots i_p$  correspond aux nombres de combinaisons

$$\binom{p}{2} = \frac{(p+2)!}{p!2!} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}.$$

Il y a donc

$$N(p, q) = \frac{(p+2)(p+1)(q+2)(q+1)}{4}$$

combinaisons différentes du tenseur  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  en général. Mais la condition de trace nulle impose que tous les tenseurs contractés d'un indice sont nuls. Après contraction, il ne reste que  $N(p-1, q-1)$  combinaisons différentes pour  $X_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  qui sont alors tous nuls. Le nombre de degré de liberté ou la dimension du tenseur est donc

$$\begin{aligned} D(p, q) &= N(p, q) - N(p-1, q-1) \\ &= (p+1)(q+1) \left( \frac{p+q}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$

On peut donc caractériser les représentations de  $SU(3)$  par le couple d'entiers  $(p, q)$ .

Représentation $(p, q)$	Dimension $D(p, q)$
(0, 0)	1 : singulet
(1, 0)	3 : triplet
(0, 1)	3 : triplet
(1, 1)	8 : octet
(3, 0)	10 : décuplet
(2, 2)	27

Par déduction, il nous a été possible de construire des représentations de dimensions supérieures en prenant des produits directs de la représentation fondamentale. Les propriétés de réductibilité des représentations n'a toutefois pas été abordé. Heureusement, il existe des méthodes systématiques pour construire représentations irréductibles et en déterminer les symétries dont la plus simple est sans nul doute la méthode des *tableaux de Young*. Elle procède comme suit:

On identifie d'abord la représentation fondamentale  $\mathbf{N}$  du groupe par une case et la représentation fondamentale conjuguée  $\bar{\mathbf{N}}$  par une colonne de  $N-1$  cases:

$$\mathbf{N} : \square \quad (6.21)$$

$$\bar{\mathbf{N}} : \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \vdots \end{array} \quad (6.22)$$

On forme les représentations de dimension supérieure en juxtaposant de toutes les façons possibles ces cases, tout en respectant les conditions suivantes:

1. Le nombre de cases par colonne doit aller en ordre décroissant vers la droite.
2. Le nombre de cases par ligne doit aller en ordre décroissant vers le bas.

On pourrait assigner à chacune des cases une étiquette (e.g.  $a, b, c, \dots$ ). Alors une représentation (par exemple, un tenseur portant les étiquettes  $a, b, c, \dots$ ) est déterminée par les étiquettes du tableau de Young. La représentation est alors antisymétrique par rapport à l'échange de deux étiquettes d'une même colonne et symétrique par rapport à l'échange de deux étiquettes d'une même ligne.



**Exemple 6.1**

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$$

$$\square \otimes \square = \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{cc} \square & \square \end{array} \quad (6.23)$$



**Exemple 6.2**

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$$

$$\square \otimes \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{cc} \square & \square \\ & \square \end{array} \quad (6.24)$$



**Exemple 6.3**

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10}$$

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square &= \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{cc} \square & \square \end{array} \right) \otimes \square \\ &= \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{cc} \square & \square \\ & \square \end{array} \right) \oplus \left( \begin{array}{cc} \square & \square \\ & \square \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array} \right) \end{aligned}$$

On peut associer à chacune des combinaisons de cases (i.e., à chacun des tableaux de Young) obtenues ci-haut une représentation irréductible. On détermine dans chaque cas leur état de symétrie et leur dimension grâce aux règles suivantes:

**Symétrie:**

On pourrait assigner à chacune des cases une étiquette (e.g.  $a, b, c, \dots$ ). Alors une représentation (par exemple, un tenseur portant les étiquettes  $a, b, c, \dots$ ) est déterminée par



les étiquettes du tableau de Young. De manière générale, une représentation est alors antisymétrique par rapport à l'échange de deux étiquettes d'une même colonne et symétrique par rapport à l'échange de deux étiquettes d'une même ligne.

Regardons de nouveau le premier exemple,  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$ . Si la représentation fondamentale est décrite par le vecteur  $\phi_a$  et la représentation conjuguée par  $\phi_b$ , alors la combinaison de deux représentations fondamentale peut s'écrire

$$\begin{aligned}\phi_a \phi_b &= \frac{1}{2} (\phi_a \phi_b - \phi_a \phi_b) + \frac{1}{2} (\phi_a \phi_b + \phi_a \phi_b) \\ &= A_{ab} + S_{ab}\end{aligned}$$

où  $A_{ab}$  et  $S_{ab}$  sont antisymétrique et symétrique sous  $a \leftrightarrow b$  et de dimensions 3 et 6 respectivement.

$$\begin{aligned}A_{ab} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a \phi_b - \phi_a \phi_b) \\ S_{ab} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a \phi_b + \phi_a \phi_b)\end{aligned}$$

Les tableaux de Young nous permettent d'obtenir ces résultats sans construire explicitement les représentations. En assignant cette fois-ci des étiquettes à chaque case:

$$\boxed{a} \otimes \boxed{b} = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \boxed{a \quad b} \quad (6.25)$$

où la représentation  $\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}$  est le triplet conjugué  $\bar{\mathbf{3}}$  (dimension 3) antisymétrique sous  $a \leftrightarrow b$  alors que  $\boxed{a \quad b}$  est le sextuplet  $\mathbf{6}$  (dimension 6) symétrique sous  $a \leftrightarrow b$ .

Les tableaux de Young comportant une seule ligne sont associés à une représentation complètement symétrique. Les tableaux de Young comportant une seule colonne sont associés à une représentation complètement antisymétrique. Les autres tableaux correspondent quant à eux à des symétries mixtes. Par exemple, si on assigne au tableau suivant les indices  $a, b$  et  $c$  :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \quad (6.26)$$

alors la représentation correspondante sera symétrique par rapport à l'échange des indices  $a$  et  $b$  mais, antisymétrique par rapport à l'échange des indices  $a$  et  $c$ .

## Dimension d'une représentation

La dimension d'une représentation est donnée par le rapport de deux nombres, qui sont évalués comme suit:

1. Numérateur: Pour calculer le numérateur, on associe d'abord le nombre  $N$  (dimension du groupe  $SU(N)$ ) à la première case en haut à gauche et aux autres cases de la diagonale. On associe les nombres  $N + 1, N + 2, N + 3, \dots$  aux cases suivantes et les nombres  $N - 1, N - 2, N - 3, \dots$  aux cases précédentes sur chacune des lignes. Le numérateur est alors donné par le produit de tous ces nombres.
2. Dénominateur: À partir de chacune des cases du tableau, on trace une ligne vers la droite et une ligne vers le bas, puis on compte le nombre total de cases croisées

par ces deux lignes. On répète pour chacune des cases du tableau et on obtient le dénominateur en faisant le produit de tous ces nombres.



### Exemple 6.4

Prenons le tableau de Young suivant:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline N & N+1 & N+2 \\ \hline N-1 & N & \\ \hline N-2 & N-1 & \\ \hline \end{array} \quad (6.27)$$

alors le numérateur est donné par

$$N \cdot (N+1) \cdot (N+2) \cdot (N-1) \cdot N \cdot (N-2) \cdot (N-1) \quad (6.28)$$

Le calcul du dénominateur assigne les nombres suivants à chacune des cases:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \quad (6.29)$$

alors le dénominateur est donné par

$$5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \quad (6.30)$$

La dimension de la représentation est alors

$$D = \frac{N^2 \cdot (N+1) \cdot (N+2) \cdot (N-1)^2 \cdot (N-2)}{5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} \quad (6.31)$$



### Exemple 6.5

Pour prendre un exemple concret, considérons les représentations obtenues par le produit  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ :

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.32)$$

1. États complètement symétrique (S):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.33)$$

Ici, la dimension est donnée par

$$\begin{aligned} D &= \frac{N \cdot (N+1) \cdot (N+2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \end{aligned}$$

et correspond donc à un décuplet complètement symétrique.

2. États à symétrie mixte (M):

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (6.34)$$

Le calcul de la dimension donne

$$\begin{aligned} D &= \frac{N \cdot (N+1) \cdot (N-1)}{3 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 8 \end{aligned}$$

ce qui correspond à un octet à symétrie mixte.

3. États complètement antisymétrique (A):

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{6.35}$$

Le calcul de la dimension donne

$$\begin{aligned} D &= \frac{N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

ce qui correspond à un singulet complètement antisymétrique.

Finalement on a de façon schématique:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}'_M \oplus \mathbf{1}_A \tag{6.36}$$

## Construction des fonctions d'onde

### Baryons

Considérons maintenant plus en détail la façon dont on forme les fonctions d'onde associées aux baryons  $SU(3)$ , obtenus par combinaison de 3 quarks de 3 saveurs différentes ( $u, d, s$ ).

Le système de 3 quarks, chacun provenant d'un triplet  $\mathbf{3}$  de saveur de  $SU(3)$ , est construit par la combinaison

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}.$$

Par la méthode des tableaux de Young, on détermine les représentations irréductibles générées par ces combinaisons:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{6.37}$$

c'est-à-dire,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}'_M \oplus \mathbf{1}_A \tag{6.38}$$

Les 27 états sont représentés dans les tableaux suivants. Il est alors facile d'associer à chacun de ces états un baryons. Le décuplet  $\mathbf{10}_S$  correspond aux particules avec  $J^P = \frac{3}{2}^+$

3 particules  $SU(3)$ , états symétriques ( $J^P = \frac{3}{2}^+$ )

Constituants	$\mathbf{10}_S$
$\Delta^{++}(uuu)$	$uuu$
$\Delta^+(uud)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$
$\Delta^0(udd)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$
$\Delta^-(ddd)$	$ddd$
$\Sigma^{*+}(uus)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$
$\Sigma^{*0}(uds)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dsu + sud + usd + sdu + dus)$
$\Sigma^{*-}(dds)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd)$
$\Xi^{*0}(uss)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$
$\Xi^{*-}(dss)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$
$\Omega^-(sss)$	$sss$

(6.39)

Le diagramme de poids du décuplet  $\mathbf{10}_S$  est illustré à la figure 6.7

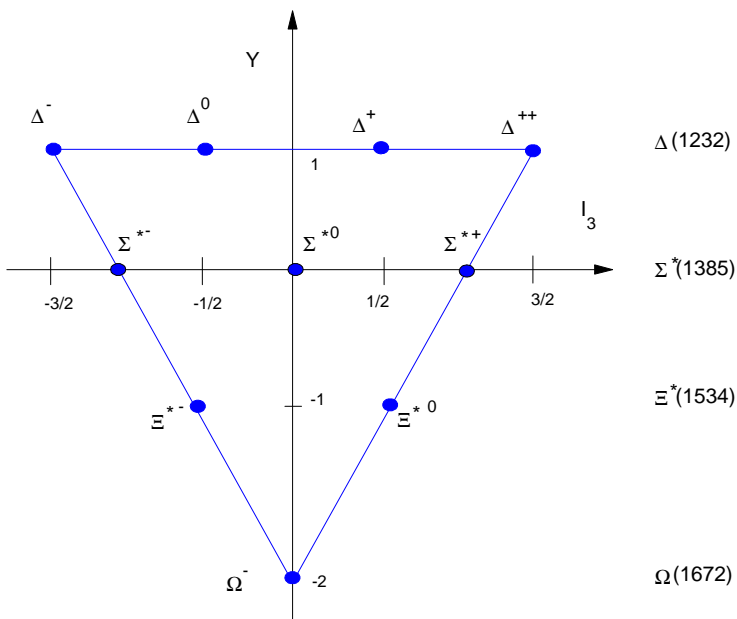


Figure 6.7 Diagramme de poids du décuplet de baryon.

L'octet  $\mathbf{8}_M$  correspond aux particules avec  $J^P = \frac{1}{2}^+$

Constituants	$\mathbf{8}_M$	
$p(ud\bar{d})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u$	(6.40)
$n(udd)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$	
$\Sigma^+(uus)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)u$	
$\Sigma^0(uds)$	$\frac{1}{2}(dsu + usd - s(ud + du))$	
$\Sigma^-(dds)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)d$	
$\Lambda^0(uds)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(s(du - ud) + usd - dsu - 2(du - ud)s)$	
$\Xi^-(dss)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)s$	
$\Xi^0(uss)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)s$	

Le diagramme de poids du  $\mathbf{8}_M$  est illustré à la figure 6.8 L'octet  $\mathbf{8}'_M$  correspond à des

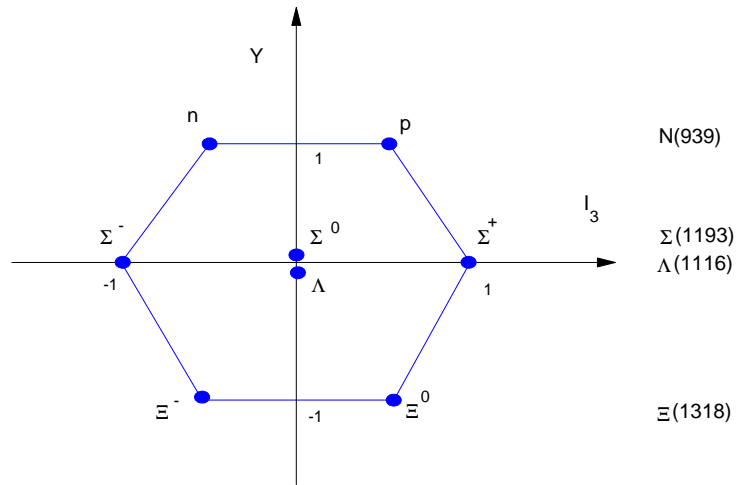


Figure 6.8 Diagramme de poids de l'octet de baryon.

baryons plus lourds.

3 particules $SU(3)$ , états mixtes	
Constituants	$\mathbf{8}_{M,S}$
$uud$	$\frac{1}{\sqrt{6}} ((ud + du)u - 2uud)$
$udd$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} ((ud + du)d - 2ddu)$
$uus$	$\frac{1}{\sqrt{6}} ((us + su)u - 2uus)$
$uds$	$\frac{1}{\sqrt{12}} (s(du + ud) + dsu + usd - 2(ud + du)s)$
$dds$	$\frac{1}{\sqrt{6}} ((ds + sd)d - 2dds)$
$uds$	$\frac{1}{2} (dsu - usd + s(du - ud))$
$dss$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} ((ds + sd)s - 2ssd)$
$uss$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} ((us + su)s - 2ssu)$

(6.41)

Finalement, le singulet  $\mathbf{1}_A$  correspond à la particules  $\Lambda(1405)$

3 particules $SU(3)$ , états antisymétriques	
Constituants	$\mathbf{1}_A$
$usd$	$\frac{1}{\sqrt{6}} (s(du - ud) + (usd - dsu) + (du - ud)s)$

(6.42)

## Mésons pseudo-scalaires

Les mésons sont construits par la combinaison de quarks et d'antiquarks (avec des spins anti-alignés et moment orbital  $l = 0$ ) qui correspond aux représentations fondamentale et à son conjugué (e.g.  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$  pour  $SU(3)$ ).

Par la méthode des tableaux de Young, on obtient les représentations irréductibles suivantes:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$
(6.43)

soit

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{8}_M \quad (6.44)$$

c'est-à-dire un singulet antisymétrique dans l'échange de saveurs et un octet symétrique.

Il est donc possible de reconstituer les états comme suit: L'octet  $\mathbf{8}_M$

particule-antiparticule dans  $SU(3)$ , états mixtes

Constituants	$\mathbf{8}_M$
$\pi^+(d\bar{u})$	$d\bar{u}$
$\pi^0(u\bar{u}, d\bar{d})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$
$\pi^-(u\bar{d})$	$u\bar{d}$
$K^+(s\bar{u})$	$s\bar{u}$
$K^0(s\bar{d})$	$s\bar{d}$
$\bar{K}^0(d\bar{s})$	$d\bar{s}$
$K^-(u\bar{s})$	$u\bar{s}$
$\eta_8(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s})$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$

(6.45)

et le singulet  $\mathbf{1}_A$

particule-antiparticule dans  $SU(3)$ , états antisymétriques

$$\begin{array}{c} \hline \text{Constituants} \qquad \mathbf{1}_A \\ \hline \eta_1(u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}) \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \\ \hline \end{array} \quad (6.46)$$

Le diagramme de poids de l'octet et du singulet de mésons pseudo-scalaires i.e. de spin et parité  $J^P = 0^-$  est illustré à la figure 6.9

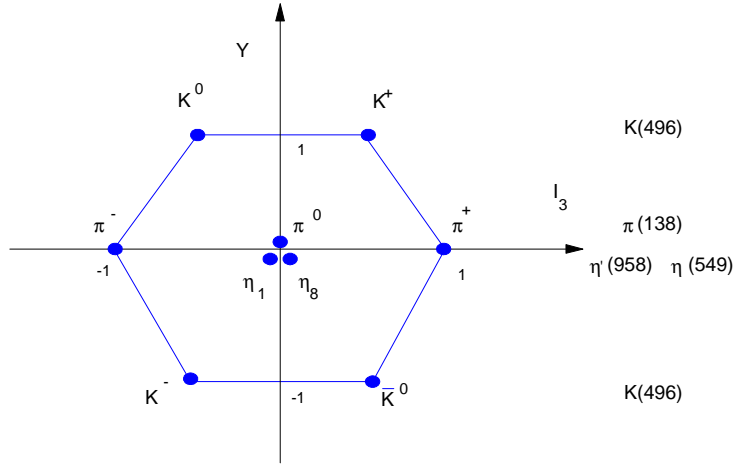


Figure 6.9 Diagramme de poids de l'octet et du singulet de mésons  $J^P = 0^-$ .

On note que les états  $\eta_1$  et  $\eta_8$  qui proviennent du singulet et de l'octet respectivement ont les mêmes nombres quantiques et sont formés des mêmes quarks. La seule propriété qui les distingue est la symétrie sous le changement de saveurs. Dans un tel cas, il est possible que les états propres de masse notamment  $\eta(549)$  et  $\eta'(958)$  soient des combinaisons linéaires de  $\eta_1$  et  $\eta_8$ . Alors, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}$$

où  $R$  est une matrice de mélange (rotation) définie par

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_P & \sin \theta_P \\ -\sin \theta_P & \cos \theta_P \end{pmatrix}.$$

Lorsque l'Hamiltonien au repos (masse) est diagonal pour les états propres de masses obéissent à

$$\left\langle \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} \middle| H \middle| \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} m_\eta^2 & 0 \\ 0 & m_{\eta'}^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} \right\rangle$$

alors que la même valeur moyenne, mais cette fois évaluée en utilisant les états  $\eta_1$  et  $\eta_8$  comme base s'écrit

$$\left\langle \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \middle| H \middle| \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{18}^2 \\ m_{81}^2 & m_{88}^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \left| R \left( \begin{array}{cc} m_{11}^2 & m_{18}^2 \\ m_{81}^2 & m_{88}^2 \end{array} \right) R^{-1} \right| \begin{array}{c} \eta \\ \eta' \end{array} \right\rangle.$$

Il en découle que  $m_{18}^2 = m_{81}^2$  et

$$\begin{aligned} m_{\eta}^2 &= m_{11}^2 \cos^2 \theta_P - 2m_{18}^2 \cos \theta_P \sin \theta_P + m_{88}^2 \sin^2 \theta_P \\ m_{\eta'}^2 &= m_{11}^2 \sin^2 \theta_P + 2m_{18}^2 \cos \theta_P \sin \theta_P + m_{88}^2 \cos^2 \theta_P \\ 0 &= (m_{11}^2 - m_{88}^2) \cos \theta_P \sin \theta_P + m_{18}^2 (\sin^2 \theta_P - \cos^2 \theta_P) \end{aligned}$$

En éliminant  $m_{11}^2$  et  $m_{18}^2$  des relations précédentes, on obtient une expression pour l'angle de mélange

$$\tan^2 \theta_P = \frac{m_{88}^2 - m_{\eta}^2}{m_{\eta'}^2 - m_{88}^2}.$$

De plus

$$\tan \theta_P = \frac{m_{88}^2 - m_{\eta}^2}{m_{18}^2}$$

ce qui implique que  $\theta_P > 0$ . On trouve expérimentalement  $\theta_P = 11^\circ$ .

### Mésons vectoriels

Les mésons vectoriels sont formés de paires quark-antiquark avec des spin alignés et moment orbital  $l = 0$ .

Un diagramme de poids similaire peut servir à illustrer les mésons vectoriels, i.e. de spin et parité  $J^P = 1^-$  (voir figure 6.10) On note encore une fois que les états  $\phi_1$  et

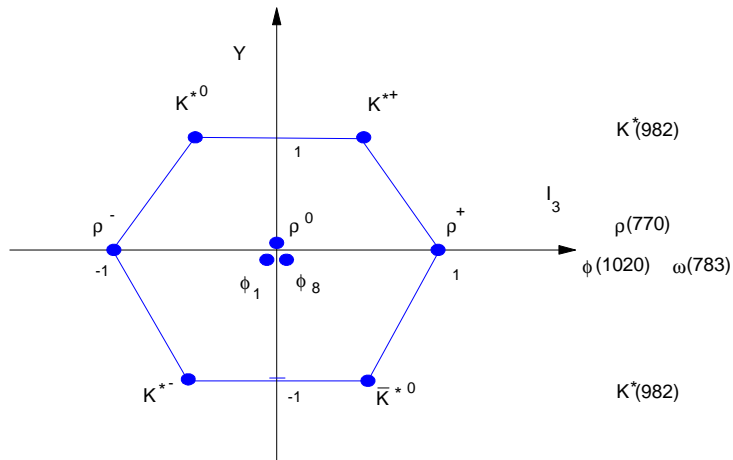


Figure 6.10 Diagramme de poids de l'octet et du singlet de mésons  $J^P = 0^+$ .

$\phi_8$  qui proviennent du singlet et de l'octet respectivement ont les mêmes nombres quantiques et sont formés des mêmes quarks. Il y a donc possibilité de mélange tout comme



dans le cas des mésons pseudo-scalaires. De façon analogue, on obtient les relations

$$\tan^2 \theta_V = \frac{m_{88}^2 - m_\phi^2}{m_\omega^2 - m_{88}^2}$$

avec

$$\tan \theta_V = \frac{m_{88}^2 - m_\phi^2}{m_{18}^2}$$

Expérimentalement,  $\theta_V \approx 40^\circ$  Mais rappelons que

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

$$\phi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

Le mélange implique donc que

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 \cos \theta_V + \phi_8 \sin \theta_V \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \cos \theta_V + \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \sin \theta_V \\ \omega &= -\phi_1 \sin \theta_V + \phi_8 \cos \theta_V \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \sin \theta_V + \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \cos \theta_V \end{aligned}$$

Considérons le cas du *mélange idéal* : Pour  $\sin \theta_V = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , le contenu de  $\phi$  est purement dû au quark étrange alors que  $\omega$  est constitué de quark  $u$  et  $d$ :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_1 - \sqrt{2}\phi_8) = s\bar{s} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}\phi_1 + \phi_8) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}). \end{aligned}$$

## 6.4 Couleur

L'introduction de la *couleur* comme nombre quantique supplémentaire pour décrire un quark avait pour but de résoudre un paradoxe. En effet, les quarks possédant un spin demi-entier, il est naturel de les considérer comme des fermions. Mais alors le principe d'exclusion de Pauli semblerait suggérer que des hadrons *exotiques* tels que le  $\Delta^{++}$  et le  $\Omega^-$  ne peuvent exister. Ils consistent respectivement de trois quarks  $u$  et de trois quarks  $s$  et possèdent un spin égal à  $\frac{3}{2}$ . Les spins des trois quarks sont donc nécessairement alignés, ce qui implique qu'ils possèdent tous les trois les mêmes nombres quantiques. La seule façon de résoudre ce paradoxe sans modifier profondément le modèle des quarks est de postuler l'existence d'une dégénérescence supplémentaire. Le nombre quantique associé à cette dégénérescence fut nommée *couleur*.

### Groupe $SU(3)$ de Couleur

En supposant l'existence de trois couleurs différentes (rouge, vert et bleu), on peut poser une règle simple qui assure qu'aucun quark isolé ne puisse être observé:

*Tous les états observables doivent être des singulets de couleur — aucun multiplet de dimension supérieure n'est permis.*

Un tel singulet peut être construit de deux façons: en combinant un quark coloré avec un antiquark possédant l'anticouleur correspondante (chacun des trois couleurs étant également représentées) ou encore en combinant trois quarks ou antiquarks de couleurs différentes (un rouge, un vert et un bleu).

Cette règle s'inscrit à l'intérieur d'une théorie de jauge basée sur la couleur: la chromodynamique quantique (ou QCD). Comme toute théorie de jauge, elle est fondée sur un postulat d'invariance: le *monde* est invariant sous une transformation locale de couleur. Le groupe de symétrie associé à cette transformation est le groupe  $SU_c(3)$ , où l'indice  $c$  sert à le distinguer du groupe  $SU(3)$  de saveur.

Contrairement à la symétrie de saveur, qui est une symétrie brisée (en raison de la différence de masse entre les quarks up, down et étrange) et globale, la symétrie  $SU_c(3)$  est une symétrie exacte et *locale*. Par *locale*, on entend que la transformation considérée dépend de l'espace et du temps. Les particules qui assurent la symétrie locale de couleur sont au nombre de huit et sont nommées *gluons*.

Par exemple, un quark donné peut changer de couleur indépendamment des autres quarks qui l'entourent, mais chaque transformation doit obligatoirement s'accompagner de l'émission d'un gluon (de la même façon qu'un électron changeant de phase émet un photon). Le gluon émis se propage et est réabsorbé par un autre quark dont la couleur variera de telle façon que le changement initial soit compensé. On retrouve donc ici notre règle selon laquelle tout hadron demeure incolore.

Pour citer un exemple concret, supposons qu'un quark rouge se transforme en quark bleu. Pour cela, il devra émettre un gluon rouge-antibleu, qui une fois absorbé par un quark bleu le transformera à son tour en quark rouge. La couleur globale est alors conservée, puisque le nombre total de quarks d'une couleur donnée sera le même avant et après le processus.

Les gluons agissent donc en quelque sorte comme les agents de la force forte à l'intérieur du hadron. La force forte *conventionnelle* qui s'exerce entre deux hadrons différents n'est qu'une interaction résiduelle par rapport à cette force originale, comme la force de Van der Waals l'est par rapport à la force électromagnétique entre deux charges électriques.

## Fonctions d'onde de couleur

Avec l'introduction du nombre quantique de couleur, on peut représenter la fonction d'onde totale  $\psi$  d'un hadron sous la forme:

$$\psi = \psi(\textit{spin}) \cdot \psi(\textit{spatial}) \cdot \psi(\textit{saveur}) \cdot \psi(\textit{couleur}) \quad (6.47)$$

Pour les baryons, la fonction d'onde  $\psi(\textit{couleur})$  est représentée symboliquement par la combinaison complètement antisymétrique suivante:

$$\psi(\textit{couleur}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(RVB + BRV + VBR - RBV - BVR - VRB) \quad (6.48)$$

L'échange de deux quarks (par exemple, les deux premiers) donnera:

$$\begin{aligned}\psi(\text{couleur}) &\rightarrow \psi'(\text{couleur}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(VRB + RBV + BVR \\ &\quad - BRV - VBR - RVB) \\ &= -\psi(\text{couleur})\end{aligned}$$

Pour les mésons, la fonction d'onde sera symétrique (puisque ce sont des bosons):

$$\psi(\text{couleur}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + V\bar{V} + B\bar{B}). \quad (6.49)$$

## Évidence expérimentale

L'hypothèse de l'existence de la couleur est supportée par l'expérience. Par exemple, lors d'annihilations électron-positron on observe que les particules produites peuvent être, soit une paire muon-antimuon, soit une paire quark-antiquark se transformant en jets de baryons. La section efficace  $\sigma$  pour ce dernier processus sera:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) &= \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) \\ &= \sigma(e^+e^- \rightarrow q_1\bar{q}_1) + \sigma(e^+e^- \rightarrow q_2\bar{q}_2) + \dots\end{aligned}$$

où  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $n =$  nombre total de types de quarks (saveur et couleur comprises).

Puisque la section efficace de Rutherford est proportionnelle au carré de la charge électrique du diffuseur, on peut écrire:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_i Q_i^2}{Q_\mu^2} \quad (6.50)$$

où  $Q_i =$  charge électrique du quark  $i$  et  $Q_\mu =$  charge électrique du muon.

Si trois saveurs de quarks — soit  $u, d$  et  $s$  — peuvent être produites (nous considérons ici que nous sommes en-dessous du seuil de création de quarks lourds), on a donc:

$$\begin{aligned}R &= \frac{Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2}{Q_\mu^2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

En introduisant la couleur, ce rapport triple pour passer à  $R = 2$ .

$$\begin{aligned}R &= \frac{\sum_{j=1}^3 Q_{uj}^2 + Q_{dj}^2 + Q_{sj}^2}{Q_\mu^2} \\ &= 2\end{aligned}$$

où  $j = 1, 2, 3$  est l'indice de couleur.

Malgré une marge d'erreur importante, les résultats expérimentaux montrent que ce rapport est près de 2 (quarks  $u, d$  et  $s$ ), en accord avec l'hypothèse de la couleur. On

observe par ailleurs, des sauts dans ce rapport lorsque le seuil du quark charmé et du quark bottom est franchi ce qui porte successivement la valeur de  $R$  théorique à  $R = \frac{10}{3}$  (quarks  $u, d, s$  et  $c$ ) et  $R = \frac{11}{3}$  (quarks  $u, d, s, c$  et  $b$ ) (voir figure 6.11).

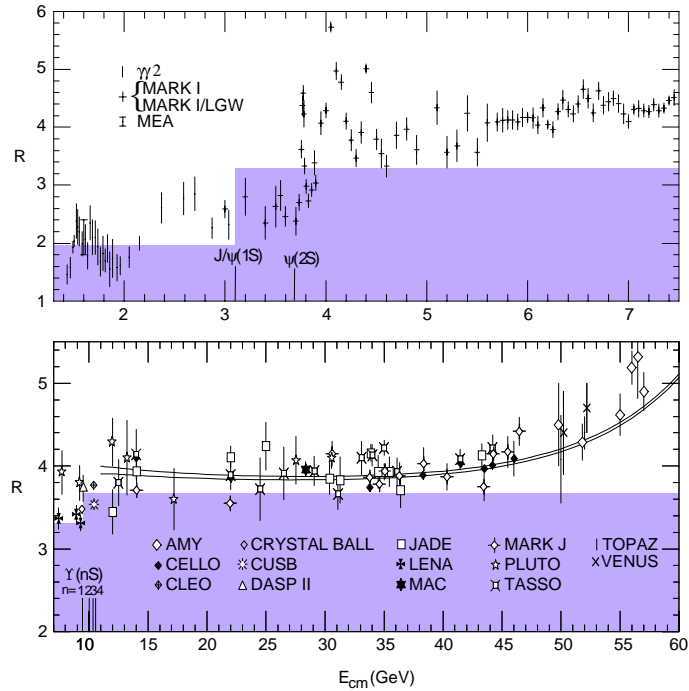


Figure 6.11 Rapport  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$ : La prédiction théorique donne d'abord  $R = 2$  (quarks  $u, d$  et  $s$ ), puis  $R = \frac{10}{3}$  (quarks  $u, d, s$  et  $c$ ) et  $R = \frac{11}{3}$  (quarks  $u, d, s, c$  et  $b$ ) après le seuil de production du quark charmé et du quark bottom respectivement. La partie ombrée correspond aux plateaux successifs de  $R$ .

## 6.5 Masses et Moments Magnétiques

### Masses

Si la symétrie  $SU(3)$  de saveur était une symétrie exacte, les particules appartenant à une même représentation irréductible devraient avoir des masses identiques. Mais comme nous le révèlent les différences de masse  $\Delta m$  entre les composantes des multiplets de

baryons et de mésons, la symétrie  $SU(3)$  est brisée par les interactions fortes. L'Hamiltonien peut donc être séparé en deux parties:

$$H = H_1 + H_2$$

dont la première  $H_1$  est invariante sous  $SU(3)$  alors que  $H_2$  est responsable de la brisure de symétrie et donc de la différence de masse. Puisque ce sont les générateurs qui décrivent les transformations sous  $SU(3)$ , il en découle que

$$\begin{aligned} [T_a, H_1] &= 0 \\ [T_a, H_2] &\neq 0 \end{aligned}$$

où  $T_a$  est un générateur de  $SU(3)$ . Par ailleurs, les interactions fortes préservent l'isospin et l'hypercharge donc l'Hamiltonien  $H_2$  responsable de la brisure doit tout de même obéir aux contraintes:

$$[I, H_2] = 0 \quad \text{et} \quad [Y, H_2] = 0$$

en plus d'être sensiblement plus petit que  $H_1$  puisque la symétrie  $SU(3)$ , sans être exacte, est tout de même approximativement correcte. La forme la plus simple que  $H_2$  peut prendre est alors

$$H_2 \propto \lambda_8.$$

Okubo a démontré que les particules dans la représentation irréductible  $(p, q)$  de  $SU(3)$  dans des états de isospin-hypercharge donnés par  $I$  et  $Y$  possède les éléments de matrice suivant

$$\begin{aligned} \langle (p, q), I, Y | H_2 | (p, q), I, Y \rangle &\propto \langle (p, q), I, Y | \lambda_8 | (p, q), I, Y \rangle \\ &= a + bY + c\left[\frac{Y^2}{4} - I(I+1)\right] \end{aligned}$$

où  $a, b, c$  = constantes indépendantes de la  $I$  et  $Y$  mais dépendent en général de la représentation  $(p, q)$ . Gell-Mann et Okubo ont proposé une formule de masse ayant la même forme:

$$m = a + bY + c\left[\frac{Y^2}{4} - I(I+1)\right].$$

Pour l'octet de baryons, ce résultats a pour conséquences que

$$\underbrace{3m_\Lambda + m_\Sigma}_{4541 \text{ MeV}} = \underbrace{2m_N - m_\Xi}_{4514 \text{ MeV}}$$

ce qui est valide à 1% près.

Dans le cas du décuplet de baryons, on a en plus la relation suivante entre l'isospin et l'hypercharge qui s'applique

$$I = \frac{Y}{2} + 1$$

ce qui ramène la relation de masse à

$$m = \tilde{a} + \tilde{b}Y.$$

La différence de masse dans ce cas ne dépend que de l'hypercharge; on obtient

$$\underbrace{m_{\Sigma^*} - m_\Delta}_{152 \text{ MeV}} = \underbrace{m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*}}_{149 \text{ MeV}} = \underbrace{m_\Omega - m_{\Xi^*}}_{139 \text{ MeV}}$$

en accord avec les résultats expérimentaux.

Une relation similaire peut être écrite pour les mésons, Cependant, dans ce cas, le terme de masse qui apparaît dans le Lagrangien ou l'Hamiltonien — c'est l'équation

de Klein-Gordon qui s'applique aux bosons — est quadratique en  $m$ . La relation pour l'octet de mésons pseudo-scalaire a donc la forme

$$\underbrace{4m_K^2}_{.988 \text{ GeV}^2} = 3m_{\eta_8}^2 + \underbrace{m_\pi^2}_{0.0196 \text{ GeV}^2}$$

À noter ici que la masse qui apparaît dans la relation est celle de l'état faisant partie de l'octet  $\eta_8$  ( $m_{\eta_8}^2 = m_{88}^2$ ) et non celle de  $\eta$  ou  $\eta'$ . Cette relation permet de déterminer  $m_{88}^2$

$$m_{88}^2 = \frac{1}{3} (4m_K^2 - m_\pi^2) \simeq (568 \text{ MeV})^2$$

et l'angle du mélange  $\eta - \eta'$ , i.e.  $\theta_P$  qui prend la valeur de  $11^\circ$ .

Le traitement de l'octet de mésons vectoriels est en tous points semblables. La relation donne

$$m_{88}^2 = \frac{1}{3} (4m_{K^*}^2 - m_\rho^2) \simeq (927 \text{ MeV})^2.$$

On peut en déduire l'angle de mélange  $\omega - \phi$  mentionné plus haut dont la valeur  $\theta_V \simeq 40^\circ$  s'approche de l'angle de mélange idéal.

En principe, on faire une analyse plus détaillée de la masse des hadrons pour y inclure les corrections hyperfines et. électriques qui sont dues à la brisure de la symétrie  $SU(2)$  d'isospin par les interactions électromagnétiques. Elle implique trois effets

1. la différence de masse entre les quarks  $u$  et  $d$
2. les interactions dipôle-dipôle mettent donc en jeu les moments magnétiques respectifs des quarks
3. l'énergie de Coulomb associée à la charge de quarks.

Les prédictions se révèlent en accord avec les observations à 1% près ou mieux.

La masse des quarks eux-mêmes n'est pas aussi bien définie que celles des hadrons et le modèle standard ne les prédit pas. En fait, puisqu'il est confiné de façon permanente à l'intérieur des hadrons, il n'aurait aucun sens de parler de la masse au repos d'un quark libre. On définit plutôt une masse efficace qui est obtenue à partir des masses hadroniques et qui tient compte des interactions entre quarks.

Les masses les plus simples à obtenir sont celles des quarks lourds:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{1}{2} m_{s\bar{s}} = \frac{1}{2} m_\psi = 500 \text{ MeV} \\ m_c &= \frac{1}{2} m_{c\bar{c}} = \frac{1}{2} m_{J/\psi} = 1500 \text{ MeV} \\ m_b &= \frac{1}{2} m_{b\bar{b}} = \frac{1}{2} m_\Upsilon = 4700 \text{ MeV} \\ m_t &\simeq 175 \text{ GeV} \end{aligned}$$

La masse des quarks up et down est plus difficile à évaluer, puisque l'énergie de liaison qui les unit à l'intérieur des hadrons est du même ordre de grandeur que leur masse et puisqu'il n'existe pas d'états purs  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ . Par contre, les particules  $\rho^0$  et  $\Omega$  sont formées par des combinaisons de ces deux états et ils nous donnent une masse d'environ 380 MeV pour les deux quarks (en supposant que leurs masses sont égales). On peut également poser  $m_u = m_d = \frac{1}{3} m_N = 310 \text{ MeV}$  où  $m_N$  est la masse moyenne d'un

nucléon. On estime finalement:

$$m_u = m_d = 350 \text{ MeV}. \quad (6.51)$$

Cet estimé est souvent désigné sous l'appellation de masse "habillée" puisqu'elle inclut une partie de l'énergie de liaison associée aux hadrons. Par opposition on définit aussi la masse "nue" ou masse "courant" des quarks comme la masse des quarks libres ponctuels. La masse des quarks a aussi la caractéristique de dépendre logarithmiquement de l'échelle à laquelle elle est mesurée puisque selon qu'on sonde plus ou moins profondément la matière, elle nous paraîtra plus ou moins "habillée" de ses interactions. Si on fixe cette échelle à une énergie correspondant à la masse du  $Z^0$ ,  $M_Z = 91.1884 \pm 0.0022 \text{ GeV}$ , on trouve les valeurs suivantes:

Masse des quarks	
$m_u(M_Z)$	$3.4 \pm 0.6 \text{ MeV}$
$m_d(M_Z)$	$6.3 \pm 0.9 \text{ MeV}$
$m_s(M_Z)$	$118.0 \pm 17.0 \text{ MeV}$
$m_c(M_Z)$	$880.0 \pm 48.0 \text{ MeV}$
$m_b(M_Z)$	$3.31 \pm 0.11 \text{ MeV}$
$m_t(M_Z)$	$172.0 \pm 6.0 \text{ MeV}$

## Moments magnétiques

Si on considère les quarks comme des fermions de spin  $\frac{1}{2}$  et de charge électrique  $Q_i$ , leur moment magnétique  $\mu_i$  sera donné par:

$$\mu_i = \frac{Q_i}{2m_i} \sigma_i \quad (6.52)$$

où  $\sigma_i$  est le vecteur unitaire de spin si bien que la longueur de  $\mu_i$  est simplement

$$\mu_i = |\mu_i| = \frac{Q_i}{2m_i} \quad (6.53)$$

Le modèle des quarks prédit que le moment magnétique total d'un baryon sera donné par la somme *vectorielle* (dans le sens de somme de moments angulaires) des moments magnétiques individuels des quarks.

### Exemple 6.6



Proton (état  $uud$ ):

Le proton est un état de spin  $\frac{1}{2}$ . Sa composante de spin up est donc

$$|p\rangle = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

dans la notation  $\left| \begin{array}{c} J \\ m \end{array} \right\rangle$ . Les quarks sont aussi des particules de spin  $\frac{1}{2}$  et donc on peut les retrouver dans les états up et down

$$|u\rangle = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \quad |d\rangle = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

La fonction d'onde du proton est obtenue en combinant deux quarks  $u$  correspondant à un état

triplet symétrique de spin: Il s'écrit alors

$$\begin{aligned} |uu\rangle &= \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\ &= a \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\rangle \oplus b \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \oplus c \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des coefficients de Clebsh-Gordan. Notons que la combinaison  $\left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\rangle$  est exclue ici puisqu'elle est issue du singulet antisymétrique sous l'échange des deux quarks  $u$ . Le proton est formé de la combinaison

$$|uu\rangle \otimes |d\rangle = \left( a \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\rangle \oplus b \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \oplus c \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \right) \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle.$$

On note que toutes ces combinaisons ne mènent pas à un proton de spin up. En effet, seules les combinaisons suivantes

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} ; -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \otimes \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

donnent le spin recherché. Les tables de coefficients de Clebsh-Gordan nous permettent de connaître le mélange précis de ces deux combinaisons qui forment le proton avec un spin up:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.54)$$

Mais, on peut tirer aussi des informations similaire sur les états  $|uu\rangle$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les expressions précédentes, on obtient l'état en terme de ses composantes

$$\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{6}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.55)$$

normalisé

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle &= \left( -\sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle \\ &+ \left( -\sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle \\ &+ \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

Évaluons maintenant le moment magnétique du proton terme de celui des quarks constituants

$$\begin{aligned} \mu_p &= \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \middle| \mu \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\ &= \frac{1}{6} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \middle| \mu \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \left| \mu \right| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
& + \frac{2}{3} \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \left| \mu \right| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}; \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle \\
& = \frac{1}{6} (-\mu_u + \mu_u + \mu_d) + \frac{1}{6} (\mu_u - \mu_u + \mu_d) + \frac{2}{3} (\mu_u + \mu_u - \mu_d) \\
& = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d)
\end{aligned}$$



### Exemple 6.7

Neutron (état  $udd$ ):

La fonction d'onde du neutron est simplement obtenue à partir de celle du proton en remplaçant les quarks  $u$  par des quarks  $d$ , et inversement. On a donc:

$$\begin{aligned}
\mu_n & = \mu_p(u \leftrightarrow d) \\
& = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u)
\end{aligned} \tag{6.56}$$

De la même façon, il est possible d'obtenir les moments magnétique pour le  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$  etc...

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_p(d \rightarrow s) = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_s) \tag{6.57}$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_p(d \rightarrow s, u \rightarrow d) = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_s) \tag{6.58}$$



### Exemple 6.8

Particule  $\Lambda$  (état  $uds$ )

La particule  $\Lambda$  possédant un isospin nul, la paire de quarks  $ud$  est nécessairement dans un état antisymétrique d'isospin et de spin ( $I = J = 0$ ). Cela signifie que ces deux quarks ne contribuent pas au moment magnétique total de la particule  $\Lambda$  et que

$$\mu_\Lambda = \mu_s \tag{6.59}$$

En utilisant les résultats expérimentaux, on a donc que

$$\mu_p = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d = 2.79\mu_N$$

$$\mu_n = \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u = -1.91\mu_N$$

$$\mu_\Lambda = \mu_s = -0.61\mu_N$$

où

$$\mu_N = \text{magnéton nucléaire} = \frac{e\hbar}{2m_p}. \tag{6.60}$$

Inversant ces relations, on trouve

$$\mu_u = \frac{2}{3} \frac{e\hbar}{2m_u} = 1.85\mu_N$$

$$\mu_d = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_d} = -0.97\mu_N$$

$$\mu_s = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_s} = -0.61\mu_N.$$

On obtient à partir de ces relations

$$\begin{aligned}m_u &= 0.36m_p = 340 \text{ MeV} \\m_d &= 340 \text{ MeV} \\m_s &= 510 \text{ MeV}.\end{aligned}$$

Ces valeurs sont en bon accord avec celles obtenues dans la section précédente.

Étant donné la similitude entre leurs états de spin respectifs, il est facile de déduire les moments magnétiques des baryons les plus légers:

Moments magnétiques des baryons $J^P = \frac{1}{2}^+$			
Baryons	Formule prédite	Valeur prédite ( $\mu_N$ )	Valeur observée ( $\mu_N$ )
$p$	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$	$\rightarrow$	$2.793 \pm$
$n$	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$	$-1.862$	$-1.913 \pm$
$\Lambda$	$\mu_s$	$\rightarrow$	$-0.613 \pm 0.005$
$\Sigma^+$	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s)$	$2.687$	$2.42 \pm 0.05$
$\Sigma^0$	$\frac{1}{3}(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)$	$0.785$	*
$\Sigma^-$	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s)$	$-1.037$	$-1.157 \pm 0.025$
$\Xi^0$	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u)$	$-1.438$	$-1.25 \pm 0.014$
$\Xi^-$	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d)$	$-0.507$	$-0.679 \pm 0.031$

Ce modèle élémentaire ne tient évidemment pas compte des effets collectifs que peuvent générer les quarks en formant des états liés. Cependant, malgré cette approximation grossière, on voit que le modèle prédit assez bien le moment magnétique des baryons légers.

## 6.6 Diagrammes de quarks

Puisque les nombres de quarks de chaque saveur est conservé dans les interactions fortes, il est souvent pratique de visualiser les réactions hadroniques au niveau de leurs constituants, les quarks. Alors, dans une telle réaction, si un nouveau quark apparaît dans une des particules produites, l'antiquark correspondant doit aussi faire son apparition. Les diagrammes de quarks illustrent graphiquement une réaction en tenant compte de la répartition des quarks dans les particules initiales, finales et même intermédiaires. Cette technique possède en plus quelques autres avantages. Il est facile d'identifier les produits intermédiaires par laquelle une réaction peut se produire simplement en tenant une comptabilité de quarks. De la même manière, la technique peut être servir à énumérer les produits de désintégration de particules ou même de résonances

Considérons, par exemple, la réaction hadronique

$$\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+.$$

Elle correspond au niveau des quarks à la réaction

$$uuu \rightarrow uud + u\bar{d}.$$

On illustre cette réaction à la figure 6.12. La production de la résonance  $\Delta^{++}$  peut passer par le processus suivant:

$$p + \pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$$

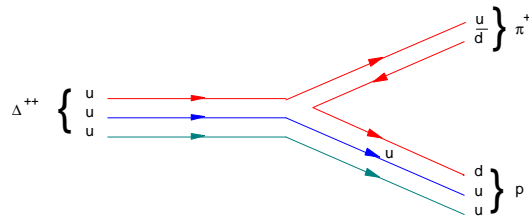


Figure 6.12 Diagramme de quarks pour le désintégration  $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ .

Ce processus est permis comme on le voit à la figure 6.13. Par ailleurs, la figure 6.14

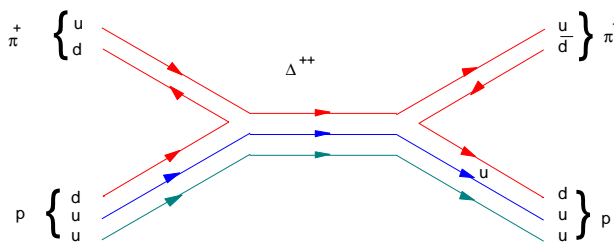


Figure 6.13 Production et désintégration d'une résonance  $\Delta^{++}$ .

illustre la possibilité qu'une résonance  $X^{++}$  soit produite dans la réaction hadronique

$$p + K^+ \rightarrow X^{++} \rightarrow p + K^+.$$

Cette résonance qui serait formée de quatre quarks et d'un antiquark  $\bar{s}$  n'a toutefois jamais été observée expérimentalement.

De plus, il existe une règle de sélection due à Okubo, Zweig et Iisuka — la règle OZI — qui stipule que la probabilité d'un processus qui implique une discontinuité dans les lignes de quarks est réduite (voir exemple figure 6.15).

## 6.7 Charme et $SU(4)$

L'introduction du quark charmé suggère que la symétrie d'isospin  $SU(2)$  d'abord étendue  $SU(3)$  pour décrire la spectroscopie des hadrons avec le quark étrange, pourrait s'élargir encore une fois jusqu'à  $SU(4)$  pour inclure le quatrième quark. Cependant, la symétrie  $SU(3)$ , on l'a déjà vu, est partiellement brisée avec pour conséquence la plus évidente une masse du quark étrange sensiblement plus élevée. Il est difficile alors de parler de symétrie  $SU(4)$  dans le cas des quarks  $u, d, s$  et  $c$  puisque avec 1.5 GeV pour la masse du quark charmé, on parle d'un ordre de grandeur face à la masse des autres quarks et d'un quark qui est même plus lourds que le proton.

Il reste que certains outils de la théorie des groupes peuvent être d'une grande utilité notamment pour la construction des différents états liés de quarks.

### Mésons

Les mésons sont construits par la combinaison de quarks et d'antiquarks (avec des spins anti-alignés pour les mésons scalaires et alignés pour les mésons vectoriels) dans les représentations fondamentale  $\mathbf{4}$  et à son conjugué  $\bar{\mathbf{4}}$  de  $SU(4)$ .

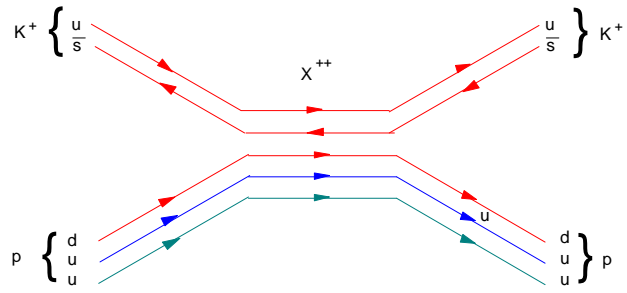
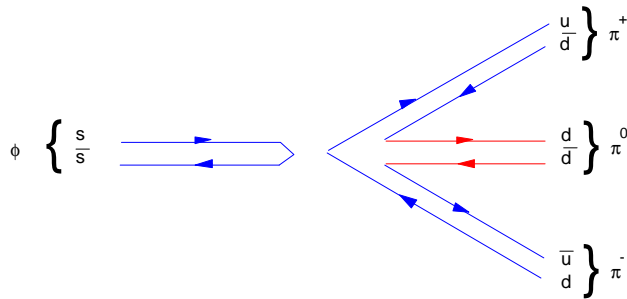
Figure 6.14 Diagramme pour la réaction  $p + K^+ \rightarrow X^{++} \rightarrow p + K^+$ .

Figure 6.15 Exemple de processus rare selon la règle OZI.

Par la méthode des tableaux de Young, on obtient les représentations irréductibles suivantes:

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline & \square \\ \hline & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.61)$$

soit

$$4 \otimes \bar{4} = 1_A \oplus 15_M \quad (6.62)$$

c'est-à-dire un singulet antisymétrique dans l'échange de saveurs et un 15-plet symétrique. Parmi les états formés, on retrouve les mésons de  $SU(3)$  et des nouveaux mésons charmés et non-charmés:

Mésons charmés			
Particule	$J^P$	$C$	Structure
$D^0, D_s^+, D^+$	$0^-$	+1	$c\bar{u}, c\bar{s}, cd$
$D^-, D_s^-, D^0$	$0^-$	-1	$d\bar{c}, s\bar{c}, u\bar{c}$
$\eta_c$	$0^-$	0	$c\bar{c}$
$D^{*0}, D_s^{*+}, D^{*+}$	$1^-$	+1	$c\bar{u}, c\bar{s}, c\bar{d}$
$D^{*-}, D_s^{*-}, D^{*0}$	$1^-$	-1	$d\bar{c}, s\bar{c}, u\bar{c}$
$J/\psi$	$1^-$	0	$c\bar{c}$

(6.63)

Les particules correspondent alors à des positions sur les diagrammes de poids des représentations irréductibles  $15_M$  (voir figures 6.16-6.17). La position des singlets de mésons pseudo-scalaire et vectoriel  $\eta_c$  sur ces figures se situe côte-à-côte avec les états  $\pi^0$  et  $\rho^0$ .

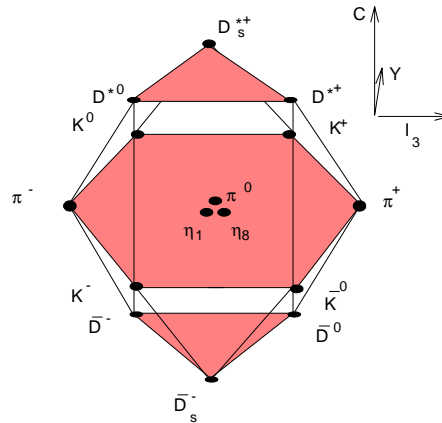


Figure 6.16 Multiplet de mésons  $J^P = 0^-$  formé d'un 15-plet de  $SU(4)$ . Le singulet 1 de  $SU(4)$  est l'état  $\eta_c$  qui se situe à la même position que les états  $\pi^0$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_8$ .

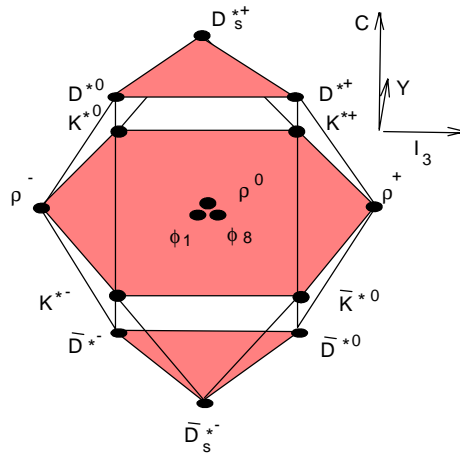


Figure 6.17 Multiplet de mésons  $J^P = 1^-$  formé d'un 15-plet de  $SU(4)$ . Le singulet  $\mathbf{1}$  de  $SU(4)$  est l'état  $J/\psi$  qui se situe à la même position que les états  $\rho^0$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_8$ .

## Baryons

Le système de 3 quarks, chacun provenant d'un quadruplet  $\mathbf{4}$  de saveur de  $SU(4)$ , est construit par la combinaison

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \mathbf{4}.$$

Par la méthode des tableaux de Young, on détermine les représentations irréductibles générées par ces combinaisons:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6.64)$$

c'est-à-dire, un quadruplet et trois 20-plets:

$$\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \mathbf{4} = \mathbf{4}_A \oplus \mathbf{20}_M \oplus \mathbf{20}'_M \oplus \mathbf{20}_S \quad (6.65)$$

Parmi les états formés, on retrouve les baryons charmés de spin et parité  $J^P = \frac{1}{2}^+$ :

Baryons charmés ( $J^P = \frac{1}{2}^+$ )		
Particule	$C$	Structure
$\Sigma_c^0, \Sigma_c^+, \Sigma_c^{++},$	+1	$ddc, udc, uuc$
$\Xi_c^-, \Xi_c^0,$	+1	$dsc, usc$
$\Omega_c^0,$	+1	$ssc$
$\Lambda_c^+$	+1	$udc$
$\Xi_{cc}^+, \Xi_{cc}^{++}$	+2	$dcc, ucc$
$\Omega_{cc}^+$	+2	$scc$

et des baryons charmés de spin et parité  $J^P = \frac{3}{2}^+$  qu'on identifie par des symboles identiques pour alléger la nomenclature:

Baryons charmés ( $J^P = \frac{3}{2}^+$ )		
Particule	$C$	Structure
$\Sigma_c^0, \Sigma_c^+, \Sigma_c^{++},$	+1	$ddc, udc, uuc$
$\Xi_c^-, \Xi_c^0,$	+1	$dsc, usc$
$\Omega_c^0,$	+1	$ssc$
$\Xi_{cc}^+, \Xi_{cc}^{++}$	+2	$dcc, ucc$
$\Omega_{cc}^+$	+2	$scc$
$\Omega_{ccc}^{++}$	+3	$ccc$

Les baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$  et  $J^P = \frac{3}{2}^+$  sont regroupés dans deux 20-plets différents (voir figures 6.18-6.19). On reconnaît aussi dans ces multiplets les baryons non-charmés de  $SU(3)$  dans les plans inférieurs des figures 6.18-6.19 qui correspondent à  $C = 0$ .





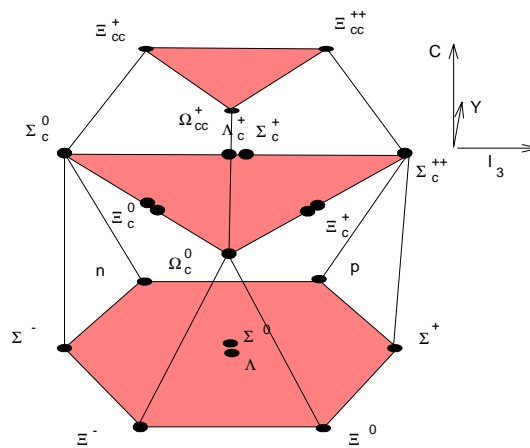


Figure 6.18 Multiplet de baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$  formé d'un **20**-plet de  $SU(4)$ .

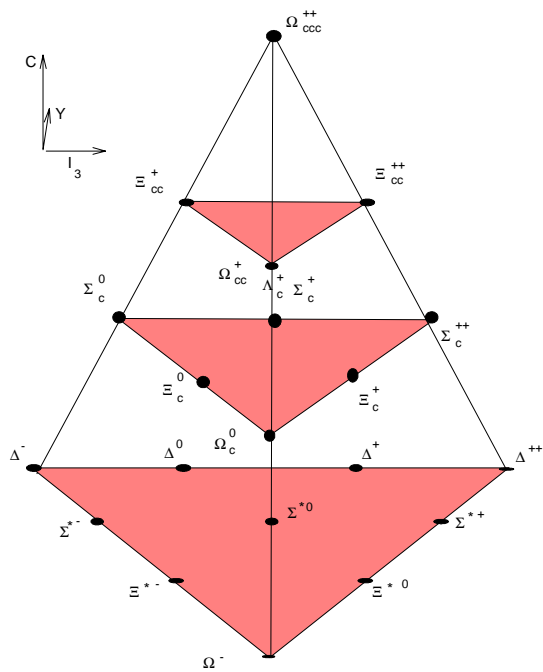


Figure 6.19 Multiplet de baryons  $J^P = \frac{1}{2}^+$  formé d'un **20**-plet de  $SU(4)$ .

# 7 INTERACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

## 7.1 Diffusion $e - N$



En construction

## 7.2 Le spin



En construction

## 7.3 Facteur de forme



En construction

## 7.4 Production de paires de muons

---



En construction  
 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

## 7.5 Succès de QED

---



En construction

## 7.6 Invariance de jauge

---



En construction



## 8 INTERACTIONS FAIBLES

### 8.1 Classification

---



En construction

### 8.2 Théorie de Fermi

---



En construction

### 8.3 Non conservation de la parité

---



En construction

### 8.4 Interaction $V - A$

## 8.5 Modèle de Weinberg-Salam (survol)

---



En construction

## 8.6 Angle de Cabbibo et matrice de Kobayashi-Maskawa

---



En construction

## 8.7 Courants neutres

---



En construction

## 8.8 Modèle GIM et le charme

---



En construction

## 8.9 Observation du $Z^0$ et des $W^\pm$

---



En construction

## 8.10 Physique du $K^0$

---



En construction

## 8.11 Violation de $CP$

---



En construction







# 9 INTERACTIONS FORTES (QCD)

## 9.1 Couleur

L'introduction de la *couleur* comme nombre quantique supplémentaire pour décrire un quark avait pour but de résoudre un paradoxe. En effet, les quarks possédant un spin demi-entier, il est naturel de les considérer comme des fermions. Mais alors le principe d'exclusion de Pauli semblerait suggérer que des hadrons *exotiques* tels que le  $\Delta^{++}$  et le  $\Omega^-$  ne peuvent exister. Ils consistent respectivement de trois quarks  $u$  et de trois quarks  $s$  et possèdent un spin égal à  $\frac{3}{2}$ . Les spins des trois quarks sont donc nécessairement alignés, ce qui implique qu'ils possèdent tous les trois les mêmes nombres quantiques. La seule façon de résoudre ce paradoxe sans modifier profondément le modèle des quarks est de postuler l'existence d'une dégénérescence supplémentaire. Le nombre quantique associé à cette dégénérescence fut nommée *couleur*.

### Groupe $SU(3)$ de Couleur

En supposant l'existence de trois couleurs différentes (rouge, vert et bleu), on peut poser une règle simple qui assure qu'aucun quark isolé ne puisse être observé:

*Tous les états observables doivent être des singulets de couleur — aucun multiplet de dimension supérieure n'est permis.*

Un tel singulet peut être construit de deux façons: en combinant un quark coloré avec un antiquark possédant l'anticouleur correspondante (chacun des trois couleurs étant également représentées) ou encore en combinant trois quarks ou antiquarks de couleurs différentes (un rouge, un vert et un bleu).

Cette règle s'inscrit à l'intérieur d'une théorie de jauge basée sur la couleur: la chromodynamique quantique (ou QCD). Comme toute théorie de jauge, elle est fondée sur un postulat d'invariance: le *monde* est invariant sous une transformation locale de couleur. Le groupe de symétrie associé à cette transformation est le groupe  $SU_c(3)$ , où l'indice  $c$  sert à le distinguer du groupe  $SU(3)$  de saveur.

Contrairement à la symétrie de saveur, qui est une symétrie brisée (en raison de la différence de masse entre les quarks up, down et étrange) et globale, la symétrie  $SU_c(3)$  est une symétrie exacte et *locale*. Par *locale*, on entend que la transformation considérée dépend de l'espace et du temps. Les particules qui assurent la symétrie locale de couleur sont au nombre de huit et sont nommées *gluons*.

Par exemple, un quark donné peut changer de couleur indépendamment des autres quarks qui l'entourent, mais chaque transformation doit obligatoirement s'accompagner de l'émission d'un gluon (de la même façon qu'un électron changeant de phase émet un photon). Le gluon émis se propage et est réabsorbé par un autre quark dont la couleur variera de telle façon que le changement initial soit compensé. On retrouve donc ici notre règle selon laquelle tout hadron demeure incolore.

Pour citer un exemple concret, supposons qu'un quark rouge se transforme en quark bleu. Pour cela, il devra émettre un gluon rouge-antibleu, qui une fois absorbé par un quark bleu le transformera à son tour en quark rouge. La couleur globale est alors conservée, puisque le nombre total de quarks d'une couleur donnée sera le même avant et après le processus.

Les gluons agissent donc en quelque sorte comme les agents de la force forte à l'intérieur du hadron. La force forte *conventionnelle* qui s'exerce entre deux hadrons différents n'est qu'une interaction résiduelle par rapport à cette force originale, comme la force de Van der Waals l'est par rapport à la force électromagnétique entre deux charges électriques.

## Fonctions d'onde de couleur

Avec l'introduction du nombre quantique de couleur, on peut représenter la fonction d'onde totale  $\Psi$  d'un hadron sous la forme:

$$\psi = \psi(\text{spin}) \cdot \psi(\text{spatial}) \cdot \psi(\text{saveur}) \cdot \psi(\text{couleur}) \quad (9.1)$$

Pour les baryons, la fonction d'onde  $\psi(\text{couleur})$  est représentée symboliquement par la combinaison complètement antisymétrique suivante:

$$\psi(\text{couleur}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(RVB + BRV + VBR - RBV - BVR - VRB) \quad (9.2)$$

L'échange de deux quarks (par exemple, les deux premiers) donnera:

$$\begin{aligned} \psi(\text{couleur}) &\rightarrow \psi'(\text{couleur}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(VRB + RBV + BVR \\ &\quad - BRV - VBR - RVB) \\ &= -\psi(\text{couleur}) \end{aligned}$$

Pour les mésons, la fonction d'onde sera symétrique (puisque ce sont des bosons):

$$\psi(\text{couleur}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + V\bar{V} + B\bar{B}). \quad (9.3)$$

## Liberté asymptotique

Aucune collision à haute énergie n'a encore pu produire un quark libre, ce qui semble confirmer qu'ils sont confinés de façon permanente à l'intérieur des hadrons. Mais les résultats d'expériences de diffusion profondément inélastiques révèlent une propriété contradictoire des quarks: à courte distance, ils semblent se mouvoir en liberté, comme s'ils n'étaient pas liés.

Cette propriété s'explique par le fait que les quanta du champ de couleur (au contraire des photons) sont eux-mêmes porteurs de charge et interagissent donc directement avec les quarks.

Ainsi, alors qu'un électron qui émet un photon conserve sa charge électrique, un quark change de couleur à chaque fois qu'il émet un gluon. Pour cette raison, la charge de couleur n'est pas localisée ponctuellement, mais est plutôt étendue sur une sphère d'environ un Fermi. Un autre quark qui pénètre cette sphère interagira donc moins fortement à mesure qu'il s'approche de son centre.

Lors des expériences de diffusion profondément inélastiques, les distances impliquées sont de beaucoup inférieures au Fermi, ce qui fait qu'on n'observe qu'une faible fraction de la charge totale de couleur. C'est ce qui explique le phénomène dit de *liberté asymptotique* observé.

## Évidence expérimentale

L'hypothèse de l'existence de la couleur est supportée par l'expérience. Par exemple, lors d'annihilations électron-positron on observe que les particules produites peuvent être, soit une paire muon-antimuon, soit une paire quark-antiquark se transformant en jets de baryons. La section efficace  $\sigma$  pour ce dernier processus sera:

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) &= \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) \\ &= \sigma(e^+e^- \rightarrow q_1\bar{q}_1) + \sigma(e^+e^- \rightarrow q_2\bar{q}_2) + \dots\end{aligned}$$

où  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $n =$  nombre total de types de quarks (saveur et couleur comprises).

Puisque la section efficace de Rutherford est proportionnelle au carré de la charge électrique du diffuseur, on peut écrire:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sum_i Q_i^2}{Q_\mu^2} \quad (9.4)$$

où  $Q_i =$  charge électrique du quark  $i$  et  $Q_\mu =$  charge électrique du muon.

Si trois saveurs de quarks — soit  $u$ ,  $d$  et  $s$  — peuvent être produites (nous considérons ici que nous sommes en-dessous du seuil de création de quarks lourds), on a donc:

$$\begin{aligned}R &= \frac{Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2}{Q_\mu^2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{1} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

En introduisant la couleur, ce rapport triple pour passer à  $R = 2$ .

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sum_{j=1}^3 Q_{uj}^2 + Q_{dj}^2 + Q_{sj}^2}{Q_\mu^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

où  $j = 1, 2, 3$  est l'indice de couleur.

Malgré une marge d'erreur importante, les résultats expérimentaux montrent que ce rapport est près de 2, en accord avec l'hypothèse de la couleur. On observe par ailleurs, des sauts dans ce rapport lorsque le seuil du quark charmé et du quark bottom est franchi ce qui porte successivement la valeur de  $R$  théorique à  $R = \frac{10}{3}$  et  $R = \frac{11}{3}$ .

## 9.2 Interactions

Toutes les réactions et désintégrations de particules élémentaires peuvent être interprétées à travers le modèle des quarks. Certaines règles s'appliquent toutefois

1. Les interactions fortes ne changent pas la saveur des quarks. Seuls des réarrangements de quarks entre les particules impliquées peuvent se produire.
2. Des paires quark-antiquark peuvent être créés et annihilés, par analogie avec les paires lepton-antilepton.
3. Les interactions faibles peuvent changer la saveur des quarks grâce à l'émission ou à l'absorption d'un boson faible

$$\begin{aligned} u &\rightarrow dW^+ & \bar{u} &\rightarrow \bar{d}W^- \\ s &\rightarrow uW^- & \bar{s} &\rightarrow \bar{u}W^+ \end{aligned}$$

Par contre, les processus du type:  $s \rightarrow Z_0$ , impliquant un changement de saveur mais non un changement de charge électrique, sont interdits. Les seuls processus neutres permis sont du type  $Z_0 \rightarrow u\bar{u}$ , où une création de paire est impliquée.

### Interactions faibles

Les quarks de même saveur mais de couleur différente sont considérés comme identiques dans toutes leurs propriétés sauf la couleur (en d'autres mots, la symétrie  $SU_c(3)$  est une symétrie exacte). Cependant, deux quarks de saveurs différentes n'ont pas en général la même charge électrique ni la même masse (i.e., la symétrie  $SU(3)$  de saveur est une symétrie approximative).

Comme on l'a vu, la saveur des quarks n'est pas affectée dans les interactions fortes. Au contraire, les interactions faibles laissent la couleur invariante mais changent la saveur.

Les interactions faibles introduisent par ailleurs un couplage entre quarks et leptons. Par exemple, envisagée du point de vue du modèle des quarks, la désintégration- $\beta$

d'un neutron en proton s'écrit

$$d \rightarrow uW^- \rightarrow ue^-\bar{\nu}. \quad (9.5)$$

Ce dernier exemple démontre que les interactions faibles couplent effectivement quarks et leptons: le quark change de saveur en émettant un boson  $W$ , qui se désintègre à son tour en un électron et un antineutrino électronique. C'est donc le boson  $W$  qui assure le lien entre les deux groupes de particules.

## Interactions Fortes

Plusieurs des caractéristiques de la théorie des interactions fortes, ou QCD, ont déjà été mentionnées plus haut. Rappelons que c'est une théorie de jauge modelée en bonne partie sur l'électrodynamique quantique. Chaque quark possède une *charge de couleur*, analogue à la charge électrique, qui agit comme source du champ de jauge. Les bosons associés à ce champ sont au nombre de 8 et sont nommés *gluons*. Il existe cependant d'importantes différences entre les deux théories, surtout en ce qui concerne la nature de la charge. En QED, la charge est un scalaire et elle demeure avec le fermion (soit avec la source du champ). En QCD, ce qui agit comme charge est une quantité trivalente, qui est continuellement échangée entre quarks, et entre quarks et gluons. Une conséquence de ce fait est que la charge *effective* (ou la constante de couplage) est une fonction croissante de la distance de la source: près de la source, la force est presque nulle (phénomène connu sous le nom de *liberté asymptotique*), alors qu'elle augmente rapidement à des distances de l'ordre du Fermi (distance à laquelle la constante de couplage devient égale à  $\sim 1$ ). Pour des distances plus grandes, la constante de couplage ne demeure pas finie comme en QED, mais semble augmenter indéfiniment (ce qui entraîne qu'on ne puisse pas observer de quark isolé).

## 9.3 Modèle des partons



En construction

## 9.4 Diffusion inélastique profonde de $eN$



En construction

## 9.5 Invariance d'échelle et partons

---



En construction

## 9.6 Diffusion inélastique profonde avec neutrinos

---



En construction

## 9.7 Diffusion lepton-quark

---



En construction

## 9.8 Collisions hadron-hadron

---



En construction





---

## 10 UNIFICATION DES FORCES

## 10.1 Divergences et renormalisabilité

---



En construction

## 10.2 Bosons intermédiaires

---



En construction

## 10.3 Théorie de jauge non-abélienne

---



En construction

## 10.4 Interactions électrofaibles

---



En construction

## 10.5 Grande unification

---



En construction

## 10.6 Autres extensions du modèle standard

---



En construction

\_\_\_\_\_



# Annexe A: Notation, conventions, constantes...

## A.1 Notations

Dans cet ouvrage, un certain nombre de conventions ont été adoptées pour faciliter la lecture. Les vecteurs à trois dimensions sont notés par des caractères gras

$$\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \dots$$

alors que les quadri-vecteurs sont notés par

$$x, p, \dots$$

ou par leur composantes contravariantes

$$x^\mu, p^\mu, \dots$$

L'alphabet grec est utilisé fréquemment:

### Alphabet Grec

Majuscule	Minuscule	Prononciation	Majuscule	Minuscule	Prononciation
<i>A</i>	$\alpha$	alpha	<i>N</i>	$\nu$	nu
<i>B</i>	$\beta$	bêta	$\Xi$	$\xi$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	<i>O</i>	$o$	omicron
$\Delta$	$\delta$	delta	$\Pi$	$\pi$	pi
<i>E</i>	$\epsilon, \varepsilon$	epsilon	<i>P</i>	$\rho$	rho
<i>Z</i>	$\zeta$	zeta	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
<i>H</i>	$\eta$	eta	<i>T</i>	$\tau$	tau
$\Theta$	$\theta, \vartheta$	theta	$\Upsilon$	$\upsilon$	upsilon
<i>I</i>	$\iota$	iota	$\Phi$	$\phi, \varphi$	phi
<i>K</i>	$\kappa$	kappa	$\Psi$	$\psi$	psi
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	<i>X</i>	$\chi$	chi
<i>M</i>	$\mu$	mu	$\Omega$	$\omega, \varpi$	omega

## A.2 Constantes fondamentales en physique

## Constantes universelles

Quantité	Symbole	Valeur
Vitesse de la lumière (vide)	$c$	$2.99792458 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$1.25664 \times 10^{-6} \text{NA}^{-2}$
Permittivité du vide ( $1/\mu_0 c^2$ )	$\epsilon_0$	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$
Constante gravitationnelle	$G$	$6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Constante de Planck	$h$	$6.6260755 \times 10^{-34} \text{Js}$
en électron volts		$4.135669 \times 10^{-15} \text{eVs}$
$\hbar/2\pi$	$\hbar$	$1.05457266 \times 10^{-34} \text{Js}$
in électron volts		$6.5821220 \times 10^{-16} \text{eVs}$
Masse de Planck ( $(\hbar c/G)^{\frac{1}{2}}$ )	$m_P$	$2.17671 \times 10^{-8} \text{kg}$
Longueur de Planck ( $\hbar/m_P c = (\hbar G/c^3)^{\frac{1}{2}}$ )	$l_P$	$1.61605 \times 10^{-35} \text{m}$
Temps de Planck ( $l_P/c = (\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}}$ )	$t_P$	$5.39056 \times 10^{-44} \text{s}$

## Constantes électromagnétiques

Quantité	Symbole	Valeur
Charge de l'électron	$e$	$1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$
Rapport $e$ sur $h$	$e/h$	$2.41798836 \times 10^{14} \text{AJ}^{-1}$
Quantum de flux magnétique ( $h/2e$ )	$\Phi_0$	$2.06783461 \times 10^{-15} \text{Wb}$
Ratio fréquence-voltage Josephson	$2e/h$	$4.8359767 \times 10^{14} \text{HzV}^{-1}$
Conductance Hall quantique	$e^2/h$	$3.87404614 \times 10^{-5} \text{S}$
Résistance Hall quantique ( $h/e^2 = \mu_0 c/2\alpha$ )	$R_H$	$25812.8056 \Omega$
Magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9.2740154 \times 10^{-24} \text{JT}^{-1}$
en électron volts		$5.78838263 \times 10^{-5} \text{eVT}^{-1}$
Magnéton nucléaire	$\mu_N$	$5.0507866 \times 10^{-27} \text{JT}^{-1}$
en électron volts		$3.15245166 \times 10^{-8} \text{eVT}^{-1}$

## Constantes atomiques

Quantité	Symbole	Valeur	
Structure fine ( $\mu_0 ce^2/2h$ )	$\alpha$	$7.29735308 \times 10^{-3}$	
	$\alpha^{-1}$	137.0359895	
Constante de Rydberg	$R_\infty$	$1.0973731534 \times 10^7 \text{m}^{-1}$	
		en hertz	$3.2898419499 \times 10^{15} \text{Hz}$
		en joules	$2.1798741 \times 10^{-18} \text{J}$
en électron volts		13.6056981eV	
Rayon de Bohr ( $\alpha/4\pi R_\infty$ )	$a_0$	$0.529177249 \times 10^{-10} \text{m}$	
Énergie de Hartree	$E_h$	$4.3597482 \times 10^{-18} \text{J}$	
		en électron volts	27.2113961eV
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3.63694807 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$	
	$h/m_e$	$7.27389614 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$	

## Constantes physico-chimique

Quantité	Symbole	Valeur	
Nombre d'Avogadro	$N_A$	$6.0221367 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$	
Constante d'Avogadro		$10^{23} \text{mol}^{-1}$	
Unité de masse atomique ( $\frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$ )	$m_u$	$1.6605402 \times 10^{-27} \text{kg}$	
		en électron volts ( $m_u c^2/\{e\}$ )	931.49432MeV
Constante de Faraday	$F$	$96485.309 \text{Cmol}^{-1}$	
Constante de Planck molaire	$N_A h$	$3.99031323 \times 10^{-10} \text{Jsmol}^{-1}$	
	$N_A h c$	$0.11962658 \text{Jmmol}^{-1}$	
Constant des gaz	$R$	$8.314510 \text{Jmol}^{-1} \text{K}^{-1}$	
Constante de Boltzmann	$k$	$1.380658 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$	
		en électron volts	$8.617385 \times 10^{-5} \text{eVK}^{-1}$
		en hertz	$2.083674 \times 10^{10} \text{HzK}^{-1}$
Volume molaire (gaz parfait) <sup>1</sup>	$V_m$	$22.41410 \text{Lmol}^{-1}$	
Constante de Loschmidt 101325 Pa <sup>2</sup>	$n_0$	$2.686763 \times 10^{25} \text{m}^{-3}$	
		100 kPa <sup>3</sup>	$V_m$
Constante de Sackur-Tetrode 100 kPa <sup>4</sup>	$S_0/R$	-1.151693	
Constante de Sackur-Tetrode 101325 Pa <sup>5</sup>		-1.164856	
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5.67051 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$	
Constante de radiation primaire	$c_1$	$3.7417749 \times 10^{-16} \text{Wm}^2$	
Constante de radiation secondaire	$c_2$	0.01438769mK	
Constante de Wien	$b$	$2.897756 \times 10^{-3} \text{mK}$	
Constante de Coulomb	$k_0$	$8.98755 \times 10^9 \text{Nm}^2 \text{C}^{-2}$	
Constante de perméabilité	$\mu_0/4\pi$	$10^{-7} \text{TmA}^{-1}$	

## A.3 Unités SI

Les lettres SI désignent le Système International d'unités. Il s'agit d'un système d'unités cohérentes approuvés internationalement qui est en usage dans plusieurs pays et utilisé de façon systématique pour les ouvrages scientifiques et techniques. Le système SI, basé sur les unités MKS, remplace les systèmes CGS et f.p.s. (Système Impérial). On peut diviser les unités SI en trois groupes: les unités de base, supplémentaires et dérivées. Il y a sept unités de base qui sont dimensionnellement indépendantes.

### Unités de base SI

<i>Quantité Physique</i>	<i>Nom</i>	<i>Symbole</i>
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

### Unités supplémentaires SI

<i>Quantité Physique</i>	<i>Nom</i>	<i>Symbole</i>
angle plan	radian	rad
angle solide	steradian	sr

<sup>1</sup>  $T = 273.15\text{K}$ ,  $p = 101325\text{Pa}$

<sup>2</sup>  $T = 273.15\text{K}$ ,  $p = 101325\text{Pa}$

<sup>3</sup>  $T = 273.15\text{K}$ ,  $p = 100\text{kPa}$

<sup>4</sup>  $p_0 = 100\text{kPa}$

<sup>5</sup>  $p_0 = 101325\text{Pa}$



**Unités dérivés SI**

<i>Quantité Physique</i>	<i>Nom</i>	<i>Symbol</i>
fréquence	hertz	Hz
énergie	joule	J
force	newton	N
puissance	watt	W
pression	pascal	Pa
charge électrique	coulomb	C
différence de potentiel électrique	volt	V
résistance électrique	ohm	$\Omega$
conductance électrique	siemens	S
capacité électrique	farad	F
flux magnétique	weber	Wb
inductance	henry	H
champ magnétique	tesla	T
flux lumineux	lumen	lm
illumination	lux	lx

Les unités SI sont étendues grâce à des préfixes qui désignent les multiples ou fractions décimales des unités.

**Préfixes utilisés avec unités SI**

<i>Facteur</i>	<i>Nom du</i>		<i>Facteur</i>	<i>Nom du</i>	
	<i>Préfixe</i>	<i>Symbole</i>		<i>Préfixe</i>	<i>Symbole</i>
10	déca-	da	$10^{-1}$	déci-	d
$10^2$	hecto-	h	$10^{-2}$	centi-	c
$10^3$	kilo-	k	$10^{-3}$	milli-	m
$10^6$	méga-	M	$10^{-6}$	micro-	$\mu$
$10^9$	giga-	G	$10^{-9}$	nano-	n
$10^{12}$	tera-	T	$10^{-12}$	pico-	p
$10^{15}$	peta-	P	$10^{-15}$	femto-	f
$10^{18}$	exa-	E	$10^{-18}$	atto-	a

## A.4 Unités naturelles

Les unités naturelles (UN) sont définies de façon à ce que les constantes fondamentales que sont la constante de Planck et la vitesse de la lumière soient

$$\hbar = 1$$

$$c = 1.$$

Elles sont utiles dans les systèmes physiques relativistes et/ou qui impliquent des effets quantiques mesurables. Une quantité dans les unités SI (système internationale) qui possède des dimensions

$$M^p L^q T^r$$

ou  $M$ ,  $L$  et  $T$  représente les unités de masse, longueur et temps respectivement, aura des

unités d'énergie à la puissance  $p - q - r$ , soit  $E^{p-q-r}$ .

Quantité	SI			UN
	$p$	$q$	$r$	$n$
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Impulsion	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine $\alpha$	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2

## A.5 Coefficients de Clebsh-Gordan

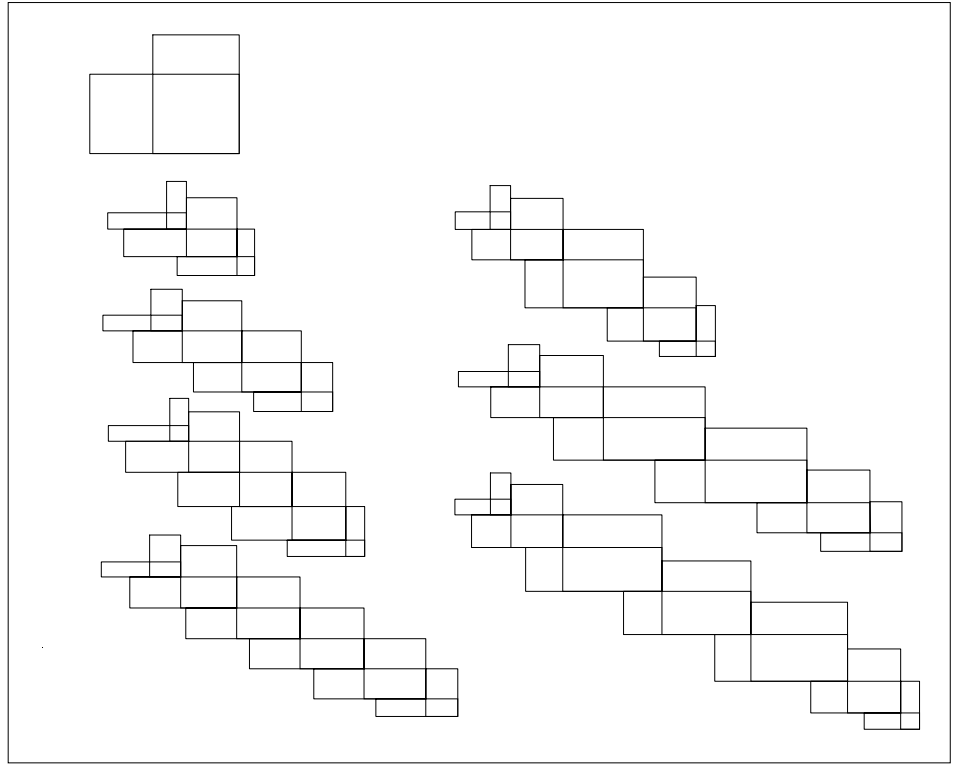


Figure 10.1 Coefficients de Clebsch-Gordan. Note: Un radical est sous-entendu dans les tables de coefficients, e.g.  $-\frac{8}{15}$  doit se lire  $-\sqrt{\frac{8}{15}}$ .

## A.6 Références

Les notes sont assez complètes mais les volumes suivants peuvent être utilisés à titre complémentaire.

1. *Introduction to high energy physics, 3<sup>e</sup> édition*, D.H. Perkins, Addison-Wesley (1987).
2. *Introduction à la physique des particule*, R. Nataf, Masson (1988).
3. *A modern introduction to particle physics*, Fayyazuddin et Riazuddin, World-Scientific (1992).

Les deux derniers volumes introduisent et utilisent quelques notions de théorie des champs ce qui dépasse donc le cadre de ce cours.

# Annexe B: Rappel de relativité restreinte et cinématique relativiste

## B.1 La relativité restreinte

Les deux principes sur lesquels repose la relativité sont:

**Postulat 10.1** *Le principe de relativité: les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels.*

**Postulat 10.2** *Universalité de la vitesse de la lumière: la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères inertiels. Cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source.*

### L'intervalle

Considérons deux événements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  reliés par un rayon lumineux. Dans un référentiel  $S$ , on a  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  et  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Ces quantités satisfont la relation:

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

en raison du fait que nous avons posé  $c = 1$ . En raison de l'universalité de  $c$ , on a aussi dans un second référentiel  $S'$ :

$$-(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Plus généralement, pour deux événements quelconques séparés dans l'espace de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  et dans le temps de  $\Delta t$ , on appelle intervalle entre ces événements la quantité:

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (\text{B.3})$$

En relation avec ce que l'on vient tout juste de voir, on constate que si  $\Delta s^2$  est nul pour deux événements donnés,  $\Delta s^2$  est également nul. Il y a en fait une invariance

de l'intervalle lors d'un passage des coordonnées de  $S(t, x, y, z)$  aux coordonnées de  $S'(t', x', y', z')$ :

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \quad (\text{B.4})$$

## Classification des événements et causalité

Comme la quantité  $(\Delta s)^2$  entre deux événements est indépendante des observateurs, on peut s'en servir pour classer les événements l'un par rapport à l'autre. Si l'intervalle entre deux événements ( $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{S}$ ) est positif, on dira qu'il est du *genre-espace*; si l'intervalle est négatif ( $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{T}$ ), on dira qu'il est du *genre-temps* alors que s'il est nul, on le dira du *genre-lumière*. Par rapport à un événement donné  $\mathcal{E}$ , l'ensemble des événements contenus dans le cône inférieur forment le *passé absolu* de  $\mathcal{E}$ ; ceux du cône supérieur, le *futur absolu* de  $\mathcal{E}$  (événements du *genre-temps*). Ceux qui sont à l'extérieur du cône constituent l'*ailleurs* de  $\mathcal{E}$  (événements du *genre-espace*) (voir figure 10.1).

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &> 0 && ; \text{ genre - espace} \\ (\Delta s)^2 &< 0 && ; \text{ genre - temps} \\ (\Delta s)^2 &= 0 && ; \text{ genre - lumière} \end{aligned}$$

Figure 10.1 Relation de causalité entre les événements.

On voit donc que chaque événement a son passé, son futur et son ailleurs. Quant au présent, il n'existe à toutes fins pratiques qu'en un point. Cette façon de voir est radicalement différente de celle qui avait prévalu jusqu'en 1905 où le temps était quelque chose d'absolu.

On peut aisément admettre que l'événement  $\mathcal{S}$  de la figure 10.1 ne peut être l'effet

de l'événement  $\mathcal{E}$  car la distance (selon  $Ox$ ) est trop grande pour qu'un rayon lumineux ait pu connecter ces deux événements. Il en est de même pour tous les événements de l'ailleurs de  $\mathcal{E}$  ; ainsi l'événement  $\mathcal{E}$  ne peut être l'effet d'aucun événement situé dans l'ailleurs-passé.

Par contre, une relation de causalité est possible entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{T}$  qui est dans le *futur absolu* de  $\mathcal{E}$ . En effet, il est possible qu'un rayon lumineux ou qu'un signal moins rapide ait connecté ces deux événements, ce qui veut dire que  $\mathcal{E}$  pourrait être la cause de  $\mathcal{T}$ . De même  $\mathcal{E}$  peut être l'effet de tout événement faisant partie de son passé absolu.

## B.2 Cinématique relativiste

### Transformations de Lorentz

L'invariance de la vitesse signifie notamment qu'un front d'onde émanant d'une source lumineuse ponctuelle demeure sphérique dans tous les repères en mouvement relatif uniforme (voir figure 10.2). Nous choisirons d'identifier l'axe des  $z$  à la direction de la direction de la vitesse relative entre les référentiels  $S$  et  $S'$ . Soit des repères  $S$

Figure 10.2 Référentiels  $S$  et  $S'$ .

et  $S'$  en mouvement relatif uniforme. Un front d'onde émis en  $t = 0$ , par une source fixe à l'origine de  $S$ , sera décrit en  $t > 0$  par un observateur du même repère par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2. \quad (\text{B.5})$$

Un observateur d'un repère  $S'$ , qui coïncidait avec  $S$  à  $t = 0$  mais qui se déplace uniformément par rapport à  $S$ , verra la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = t'^2. \quad (\text{B.6})$$

On peut alors déduire de cette observation la transformation de Lorentz pour les coor-

données d'espace-temps,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - Vz) & t &= \gamma(t' + Vz') \\ x' &= x & x &= x' \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= \gamma(z - Vt) & z &= \gamma(z' + Vt') \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

les transformations de Lorentz des vitesses,

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x}{\gamma(1 - u_z V)} & u_x &= \frac{u'_x}{\gamma(1 + u'_z V)} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_z V)} & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_z V)} \\ u'_z &= \frac{u_z - V}{1 - u_z V} & u_z &= \frac{u'_z + V}{1 + u'_z V} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

et les transformation de Lorentz de l'énergie-impulsion,

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - Vp_z) & E &= \gamma(E' + Vp'_z) \\ p'_x &= p_x & p_x &= p'_x \\ p'_y &= p_y & p_y &= p'_y \\ p'_z &= \gamma(p_z - VE) & p_z &= \gamma(p'_z + VE'). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où

$$\gamma = (1 - V^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.10})$$

## Formalisme quadri-dimensionnel

La similitude entre la notion de temps et d'espace suggère d'adopter un formalisme quadri-dimensionnel. En adoptant la notation covariante avec des indices (0, 1, 2, 3), on a:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - Vx^3) \\ x^{1'} &= x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= \gamma(x^3 - Vx^0) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle ainsi:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

### Remarque 10.1

La forme de la matrice de transformation s'apparente à une matrice de rotation (généralisée à un angle imaginaire). Isolons ici, les composantes  $z$  et  $t$ . Alors on peut récrire

$$\begin{aligned} x^{0'} &= x^0 \cosh \eta + x^3 \sinh \eta \\ x^{3'} &= x^3 \cosh \eta - x^0 \sinh \eta \end{aligned}$$

où  $\eta$ , la rapidité, est définie comme

$$V \equiv \tanh \eta. \quad (\text{B.13})$$



La forme matricielle qui précède

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{B.14})$$

où  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  est appelée matrice de transformation de Lorentz et où  $x^{\mu}$  est un quadri-vecteur

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (\text{B.15})$$

Souvent, on abrège cette notation par la notation d'Einstein

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{B.16})$$

où la répétition d'indice grec (e.g.  $\mu, \nu, \lambda, \sigma \dots$ ) sous-entend la somme sur des indices 0, 1, 2, 3. Toutefois, la répétition d'indice latin (e.g.  $i, j, k, l \dots$ ) sous-entend la somme sur des indices 1, 2, 3. Donc, l'expression précédente n'est pas équivalente à

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \neq \Lambda_i^{\mu} x^i \quad (\text{B.17})$$

puisque la somme dans le terme de droite ne s'effectue que sur les composantes  $i = 1, 2, 3$ .

La transformation inverse de Lorentz peut aussi s'écrire dans cette notation

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

ou encore

$$x^{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\nu'}^{\mu} x^{\nu'} \quad (\text{B.19})$$

où  $\tilde{\Lambda}_{\nu'}^{\mu} = (\Lambda_{\nu}^{\mu})^{-1}$ .

## Le tenseur métrique

Plus formellement, dans un espace vectoriel à  $D$  dimensions, il est possible de choisir  $D$  vecteurs de bases  $e_{\mu}$  et de représenter un vecteur  $A$  à partir de ses composantes parallèles aux  $e_{\mu}$ . Alors tout vecteur  $A$  s'écrit

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} e_{\mu} = A^{\mu} e_{\mu} \quad (\text{B.20})$$

où  $A^{\mu}$  sont appelées les composantes contravariantes de  $A$ . Dans un changement de système de coordonnées, comme une transformation de Lorentz, les bases deviennent

$$e^{\mu} \rightarrow e^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} e^{\nu}. \quad (\text{B.21})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs  $A$  et  $B$  prend la forme

$$A \cdot B \equiv A^{\mu} e_{\mu} \cdot B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (\text{B.22})$$

où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (\text{B.23})$$

est appelé le *tenseur métrique* ou simplement la *métrique*. Il est commun, et plus simple

de choisir une base où les vecteurs de base sont *orthogonaux*: soit,

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad (\text{B.24})$$

et donc

$$A \cdot B = A^\mu B^\mu e_\mu^2 \quad (\text{B.25})$$

Pour le cas des quadri-vecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisé d'un vecteur espace-temps est relié à l'intervalle, e.g.

$$\begin{aligned} x^2 &= x^\mu x^\mu e_\mu^2 \\ &= (x^\mu)^2 e_\mu^2 \\ &= (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

alors la norme des vecteurs de base est

$$e_\mu^2 = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \mu = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

est le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

## Composantes covariantes

Les composantes covariantes sont des projections orthogonales de  $A$  sur les vecteurs de base  $e_\mu$ . Par exemple,

$$e_\mu \cdot A \equiv A_\mu \quad (\text{B.29})$$

(à noter l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu e_\nu \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et son inverse  $g^{\mu\nu}$  coïncident

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (\text{B.30})$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \quad (\text{B.31})$$

d'où

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (\text{B.32})$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (\text{B.33})$$

Par exemple, pour le quadri-vecteur contravariant de position

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}). \quad (\text{B.34})$$

on aura un quadri-vecteur covariant de position:

$$\begin{aligned}
 x_\nu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\
 &= g_{\mu\nu}x^\mu \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
 &= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 x^\mu &= (x^0, \mathbf{x}) \\
 x_\mu &= (x^0, -\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

### Remarque 10.2

*Toute quantité qui a la forme*

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu \tag{B.37}$$

*est un invariant de Lorentz, c'est-à-dire que cette quantité n'est pas affectée par une transformation de Lorentz et donc a la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels*

Les notions d'énergie et d'impulsion sont intimement liées (tout comme l'espace et le temps). Ce lien devient évident dans la notation quadri-vectorielle (ou covariante). En relativité restreinte, il est pertinent de définir une nouvelle quantité: la quadri-vitesse  $u^\mu$ ,

$$u^\mu = \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \tag{B.38}$$

où le vecteur de position est dérivé par rapport au temps propre  $\tau$ , un invariant de Lorentz, ( $d\tau = \gamma^{-1}dt$ ).

Le quadri-vecteur impulsion est alors modélisé sur le vecteur impulsion classique:

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = \left( m_0 \frac{dt}{d\tau}, m_0 \frac{dx}{d\tau}, m_0 \frac{dy}{d\tau}, m_0 \frac{dz}{d\tau} \right). \tag{B.39}$$

où  $m_0$  est la masse propre. Comme  $d\tau = \gamma^{-1}dt$ , la partie spatiale de ce quadri-vecteur s'écrit:

$$p^j = \gamma m_0 (v^1, v^2, v^3) \tag{B.40}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} \tag{B.41}$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de la particule dans le repère  $S$ . Par ailleurs, la composante temporelle  $p^0$  du quadri-vecteur impulsion est

$$p^0 = \gamma m_0 = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \dots \tag{B.42}$$

On reconnaît dans le deuxième terme de cette relation l'énergie cinétique habituelle. Mais qu'en est-il du premier terme qui s'écrit  $m_0 c^2$ ? Cette expression qui est devenue la formule fétiche de la relativité a été interprétée par Einstein comme étant l'énergie propre de la matière. Autrement dit, du seul fait qu'une particule a une masse  $m_0$ , elle a un contenu en énergie de grandeur  $m_0 c^2$ , lequel contenu, comme le dit Einstein peut-être mis en évidence par les émissions d'atomes lourds comme le radium.

Il s'avère que le quadri-vecteur impulsion est en fait un quadri-vecteur énergie-impulsion

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (\text{B.43})$$

où l'énergie  $E$  est l'énergie totale. Si on a besoin de l'énergie cinétique, on devra écrire

$$\begin{aligned} K &= E - m_0 \\ &= (\gamma - 1)m_0 \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

ce qui signifie, en fait, que l'expression classique  $\frac{1}{2}mv^2$  n'est qu'une approximation valide pour les vitesses faibles.

Voyons maintenant quelle est la *grandeur* de  $p^\mu$ . On écrit donc

$$\begin{aligned} (p^\mu)^2 &= g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \mathbf{v})^2 \\ &= \gamma m_0^2 (1 - \mathbf{v}^2) \\ &= m_0^2. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

On a donc finalement

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \quad (\text{B.46})$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 \quad (\text{B.47})$$

On a donc trouver un autre invariant qui s'avère très utile dans un grand nombre de calculs relativistes. En réinsérant la vitesse de la lumière  $c$ , on a

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (\text{B.48})$$

Les relations de conservation d'énergie et d'impulsion peuvent maintenant être exprimée de façon très compacte. L'énergie-impulsion totale d'un système est la somme

$$P^\mu = \sum_n p_n^\mu. \quad (\text{B.49})$$

Si on pose qu'il y a conservation d'énergie et d'impulsion

$$P_{\text{avant}}^\mu = P_{\text{après}}^\mu \quad (\text{B.50})$$

il en découle que

$$P_{\text{avant}}^i = P_{\text{après}}^i \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{\text{avant}} = \mathbf{P}_{\text{après}} \quad (\text{B.51})$$

ce qui est la conservation de l'impulsion totale et

$$P_{\text{avant}}^0 = P_{\text{après}}^0 \quad (\text{B.52})$$

ce qui est la conservation de l'énergie totale, qui s'écrit aussi

$$E_{\text{avant}}^{\text{tot}} = E_{\text{après}}^{\text{tot}}. \quad (\text{B.53})$$

On peut aussi déduire une autre relation importante. D'une part, la quantité  $P^\mu$  (l'énergie-impulsion totale) est conservée, et d'autre part, la *grandeur* de toute énergie-impulsion est un invariant relativiste (même grandeur dans tous les repères). On aura donc, par exemple dans le repère du laboratoire

$$\left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)_{\text{avant}}^2 = \left( P_{\text{Lab}}^{\mu} \right)_{\text{après}}^2 \quad (\text{B.54})$$

mais puisqu'il s'agit d'invariant de Lorentz (relativiste), cette quantité est la même dans tous les repères. Dans un repère  $S'$  on aura

$$\left(P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ avant}}\right)^2 = \left(P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ après}}\right)^2 = \left(P_{S'}^{\mu \text{ avant}}\right)^2 = \left(P_{S'}^{\mu \text{ après}}\right)^2. \quad (\text{B.55})$$

Dans le repère d'impulsion totale nulle (RIN), i.e. le repère où le centre de masse du système est au repos, les calculs sont généralement plus simples. Alors que la dernière relation tient toujours

$$\left(P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ avant}}\right)^2 = \left(P_{\text{Lab}}^{\mu \text{ après}}\right)^2 = \left(P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ avant}}\right)^2 = \left(P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ après}}\right)^2. \quad (\text{B.56})$$

on aura dans ce repère spécial,

$$\begin{aligned} \left(P_{\text{RIN}}^{\mu \text{ avant}}\right)^2 &= \left(P_{\text{RIN}}^0\right)^2 - \left(\mathbf{P}_{\text{RIN}}^{\text{avant}}\right)^2 \\ &= \left(P_{\text{RIN}}^0\right)^2 = \left(E_{\text{RIN}}^{\text{tot}}\right)^2 \\ &= \left(\sum_n E_n\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Cette quantité correspond donc à la somme des énergies totales, élevée au carré.



# Annexe C: Équation de Dirac

En construction





# Annexe D: Particules stables, collision- neurs,...

Collisionneurs				
	Projet/Laboratoire	Énergie (GeV)	Circonférence (km)	
$e^+e^-$	CESR (1979) Cornell–Ithaca,USA	6 + 6		
	PEP SLAC–Stanford,USA	15 + 15		
	PEP-II (1999) SLAC–Stanford,USA	9 + 3.1		
	PETRA (1992-) DESY–Hambourg,All.	23 + 23		
	TRISTAN (1999) Tsukuba–KEK,Japon	30 + 30		
	SLC (1989) SLAC–Stanford,USA	50 + 50		
	LEP I et II (1990-) CERN–Genève,Suisse	I: 45 + 45 II: 87 + 87	26.659	
	VLEPP ( ? ) INP–Serpukov,Russie	500 + 500 1000 + 1000		
	$p\bar{p}, pp$	SppS (1981–1990) CERN–Genève,Suisse	315	6.911
		Tevatron (1987-) Fermilab–Batavia,USA	900 + 900	6.28
LHC (~2004) CERN–Genève,Suisse		7000 + 7000	26.659	
SSC (Annulé) SSC–Waxahachie,USA		20000 + 20000	87.12	
$ep$		HERA (1992-) DESY–Hambourg,All.	$e$ : 30 + $p$ : 820	6.336



# Index

- Accélérateurs, 26
  - circulaires, 27
  - linéaires, 26
- Antiparticule, 5
  
- Baryons, 135
  - charmés, 156
  - masse, 144
  - moments magnétiques, 147
- Bosons, 4
- Bosons intermédiaires, 174
- Bottom, 104
  
- Cabbibo
  - angle de, 162
- Calorimètre, 50
- Chambre à bulles, 47
- Chambre à dérive, 46
- Chambre à flash, 46
- Chambre à fils, 44
- Chambre à streamer, 46
- Chambre d'ionisation, 44
- Chambre de Wilson, 47
- Champs
  - théorie quantique des, 12
- Charme, 103
  - quarks, 152
- Charme, 162
- Cinématique relativiste, 187
- Clebsch-Gordan
  - coefficients de, 183
- Collisions hadron-hadron, 170
- Compteur
  - Cerenkov, 49
  - de Geiger-Muller, 44
  - à gerbes, 50
  - proportionnel, 44
  - proportionnel multifils, 44
- Compteur à scintillations, 47
- Conjugaison de la charge, 105
  - antiparticule, 108
  - invariance, 107
  - parité totale, 106
  - photon, 107
  - pion, 107
- Couleur, 141
  - évidence expérimentale, 143
  - fonctions d'onde, 142
  - Groupe  $SU(3)$ , 141
- Couleur, 165
- Courants neutres, 162
- $CP$ 
  - violation de, 163
- Création de paire, 42
  
- Désintégration
  - largeur de , 72
- Détecteurs, 38
  - à rayonnement de transition, 49
  - calorimètre, 50
  - chambre à bulles, 47
  - chambre à dérive , 46
  - chambre à fils, 44
  - chambre à flash, 46
  - chambre à streamer, 46
  - chambre d'ionisation, 44
  - chambre de Wilson, 47
  - compteur à gerbes, 50
  - Compteur à scintillations, 47
  - compteur Cerenkov, 49
  - compteur de Geiger-Muller, 44
  - compteur proportionnel, 44
  - compteur proportionnel multifils, 44

- émulsion photographique, 47
- semiconducteur, 47
- Diagrammes de Dalitz, 114
- Diffusion  $e - N$ , 159
- Diffusion inélastique profonde avec neutrinos, 170
- Diffusion inélastique profonde de  $eN$ , 169
- Diffusion lepton-quark, 170
- Diffusion de Coulomb, 40
- Dirac
  - équation d'onde, 12
  - matrices de, 12
- Équation de Dirac, 195
- Divergences, 174
  
- Effet Compton, 42
- Effet photoélectrique, 42
- Émulsion photographique, 47
- Espace de phase, 67, 74, 112
- Étrangeté, 101
  
- Facteur de forme, 159
- Fermi
  - Théorie de, 161
- Fermions, 4
- Formalisme quadri-dimensionnel, 8
  
- Gell-Mann-Nishijima, relation, 99, 105
- Modèle GIM, 162
- Groupe  $SU(2)$ , 98
- Groupes
  - de rotation, 123
  - de Lie, 119
  - poids, 121
  - propriétés, 118
  - racine, 121
  - rang, 121
  - représentations, 120, 129, 130, 133
  - $SU(2)$ , 124
  - $SU(3)$ , 126
  - $SU(N)$ , 123, 129
  - tableaux de Young, 130
  - théorie des, 118
  - $U(1)$ , 123
- Hadrons, 2
- Heisenberg
  - point de vue, 65
- Hypercharge, 101
  
- Interaction  $V - A$ , 162
- Interactions, 4
  - point de vue, 64
- Interactions
  - quarks, 168
- Interactions électrofaibles, 174
- Interactions faibles
  - classification, 161
- Interactions électromagnétiques, 17
- Interactions faibles, 17, 101, 161
  - autres saveurs, 103
  - étrangeté, 101
  - parité, 82
  - symétrie  $CP$ , 109
- Interactions fortes, 21
  - autres saveurs, 103
  - résiduelles, 21
- Interactions gravitationnelles, 22
- Interactions électromagnétiques, 159
- Invariance de jauge, 160
- Invariance de jauge, 88
- Invariance sous  $\mathcal{C}$ , 107
- Inversion du temps, 86
  - opérateur  $\mathcal{T}$ , 86
- Ionisation, 39
- Isospin, 96
  - conservation, 100
  
- Physique du  $K^0$ , 163
- Klein-Gordon
  - équation d'onde, 11
- Kobayashi-Maskawa
  - matrice de, 162
  
- Largeur de désintégration, 72
- Leptons, 2
- Lois de conservation
  - charge électrique, 93
  - nombre baryonique, 95
  - nombre électronique, 94
  - nombre leptonique total, 94
  - Nombre muonique, 94
  - Nombre tauonique, 94
  
- Mandelstam, variables, 57
- Masse
  - baryons, 144
  - mésons, 144
- Matière, 1
- Matrice de diffusion, 66
- Mécanique quantique relativiste, 11

- Mésons
  - charmés, 152
  - masse, 144
  - moments magnétiques, 147
  - pseudo-scalaires, 138
  - vectoriels, 140
- Modèle des partons, 169
- Modèle standard
  - extensions, 175
- Modèle de Weinberg-Salam, 162
- Moments magnétiques
  - baryons, 147
  - mésons, 147
- Muons
  - production de paires, 160
- Noether
  - théorème de, 78
- Nombre baryonique, 95
- Nombre électronique, 94
- Nombre leptonique total, 94
- Nombre muonique, 94
- Nombre tauonique, 94
- Parité, 81
  - des antiparticules, 84
  - conservation de la, 83
  - intrinsèque, 83
  - orbitale, 82
- Parité
  - non conservation, 161
- Parité de charge totale, 106
- Parité- $\mathcal{G}$ , 110
- Modèle des partons, 169
  - partons
    - Invariance d'échelle et partons, 170
- Photon, 90, 107
- Pion, 107
- Point de vue
  - des interactions, 64
  - de Heisenberg, 65
  - de Schrödinger, 64
- Propagateur, 15
- Interactions fortes (QCD), 165
- QED
  - Succès, 160
- Quarks, 3
  - charme, 152
  - diagrammes de, 150
  - modèle des, 115, 129
- Radioactivité, 25
- Rapidité, 62
- Rayonnement de freinage, 40
- Rayons cosmiques, 25
- Relativité restreinte, 185
- Renormalisabilité, 174
- Résonances, 111
- Rotation, invariance sous, 80
- Schrödinger
  - équation d'onde, 11
  - point de vue, 64
- Section efficace, 68
- Spin, 159
- Symétrie SU(2), 98
- Symétries, 77
- Synchrotrons, 27
- Système à 4 corps
  - centre de masse, 59
  - laboratoire, 61
- Système
  - d'unités naturelles, 5
- Théorème  $CPT$ , 109
- Théorie de jauge non-abélienne, 174
- Top, 104
- Transformation de jauge, 89
  - invariance sous, 89
- Translation, invariance sous, 79
- Unification des forces, 173
- Unification
  - grande unification, 174
- Unitarité, contrainte d', 91
- Vie moyenne, 72
- Violation de  $\mathcal{CP}$ , 109
- Yukawa, 14
- $Z^0$  et  $W^\pm$ 
  - observation, 163

