

# Линейные колебания и волны (сборник задач)

А.П. Кузнецов, А.Г. Рожнев, Д.И. Трубецков

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>4</b>
<b>1. Условия задач</b>	<b>7</b>
1.1. Физические примеры осцилляторов. Период и частота колебаний . . . . .	7
1.2. Свободный осциллятор . . . . .	11
1.3. Вынужденные колебания . . . . .	12
1.4. Неустойчивость . . . . .	15
1.5. Фазовое пространство . . . . .	18
1.6. Связанные колебания . . . . .	20
1.7. Волновое уравнение . . . . .	21
1.8. Дисперсия . . . . .	24
1.9. Волновые пакеты . . . . .	25
1.10. Эффект Доплера . . . . .	26
1.11. Эффект Вавилова-Черенкова. Излучение волн . . . . .	28
1.12. Волны на воде . . . . .	29
1.13. Связанные волны и волновые неустойчивости . . . . .	32
1.14. Волны в дискретных цепочках . . . . .	35
1.15. Колебания и волны в ограниченных системах . . . . .	37
1.16. Математическое дополнение . . . . .	41
<b>2. Ответы и решения</b>	<b>47</b>
2.1. Физические примеры осцилляторов. Период и частота колебаний . . . . .	47
2.2. Свободный осциллятор . . . . .	52
2.3. Вынужденные колебания . . . . .	55
2.4. Неустойчивость . . . . .	59
2.5. Связанные колебания . . . . .	71
2.6. Волновое уравнение . . . . .	81

2.7. Дисперсия . . . . .	85
2.8. Волновые пакеты . . . . .	86
2.9. Эффект Доплера . . . . .	89
2.10. Эффект Вавилова-Черенкова. Излучение волн . . . . .	90
2.11. Волны на воде . . . . .	93
2.12. Связанные волны и волновые неустойчивости . . . . .	109
2.13. Колебания и волны в ограниченных системах . . . . .	133
<b>Литература</b>	<b>148</b>

# Предисловие

“ . . . Задача также все, что задано или что задается: вопрос для решения, загадка, урок, удача, счастье; дача корма скоту, сколько дается за один раз.”

*В.И. Даль. “Толковый словарь живого великорусского языка.” Том первый. М.: “Русский язык”, 1998, с. 572.*

В своем замечательном эссе “Раздумья про раздумья” (Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1994, Т.2, № 6, с.67-81) Михаил Адольфович Миллер, обсуждая сценарий познания, выделяет в нем решение разнообразных задач. “Задачи, с которыми приходится работать людям (и в физике и вне ее), составляют как бы свой своеобразный “мирок”, то есть созданное нашим воображением игровое пространство чуд и чудодейств (Wunder und Zauber), ловко переплетенное с пространством реальных движений, и мы иногда теряем ориентацию: кто кого первичнее (“природнее”) . . . Итак мир задач . . . Имея в виду прежде всего физику (но в глубине сознания рассчитывая и на большее), я хотел бы различать: задачи на предсказания, задачи на свойства и задачи на сходства.”

Настоящий сборник вводит читателя в “мирок” задач, которые предлагались студентам физического факультета и факультета нелинейных процессов (Высший колледж прикладных наук) Саратовского государственного университета (СГУ) при изучении общего курса лекций “Теория волновых процессов” и на семинарах по курсам лекций “Линейные колебания” и “Линейные волны”.

Задачник выходит в серии “Современная теория колебаний и волн”, издаваемой в рамках программы “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997-2000 годы”.

В классификации М.А. Миллера в теории колебаний и волн больше всего задач на свойства, а еще больше на сходства.

Среди задач на свойства в этой классификации выделяются задачи на устойчивость, задачи преобразования чего-то во что-то, задачи на оптимальность.

Прочитируем еще раз М.А.Миллера. "... есть множество задач на сходства в обычной прикладной (практической), физике, задач-аналогов. Вероятно, самым выигрышным примером служит существование самостоятельной науки, в которой изучаются однотипные (односвойственные) движения всевозможных физических величин. Речь идет о "Теории колебаний и волн", — название, впрочем, не очень удачное (ибо это наука изучает колебательные процессы как теоретически, так и экспериментально; однако смелости недостает придумать нечто лучшее — вроде "Колебанистики и волнистики"). "

Сборник содержит задачи по "Колебанистики и волнистики" самого разного уровня — от очень простых, которые в принципе в состоянии решить школьник, до сложных, в чем-то напоминающих знаменитые задачи П.Л. Капицы и требующих фактически проведения небольшого научного исследования. Авторы специально не стали исключать простые задачи из сборника, помня высказывание Л.Д. Ландау, что "... для изучения чего-либо неважно, какие именно следует решать задачи, главное, чтобы их было достаточно много". Кроме того, доля таких задач невелика.

По мнению авторов при решении задач, особенно по теории волн (методы исследования неустойчивостей, связанные волны, волны в ограниченных структурах), самым активным образом следует использовать компьютер. Ответом не обязательно должна быть аналитическая формула, это может быть, например, и результат решения трансцендентного уравнения или системы дифференциальных уравнений на компьютере. Кроме того, компьютер позволяет быстро представить результаты в наглядном графическом виде, например, на фазовой плоскости.

Ответы и решения приведены не для всех задач, а лишь для наиболее важных (с точки зрения авторов) для изучения соответствующего раздела теории.

Составляя и решая приведенные задачи или находя их в других книгах (список некоторых из них приведен ниже), авторы испытывали иногда эстетическое удовольствие от красоты и изящества некоторых решений. Если эти чувства разделяют с авторами читатели, то книга выполнит свое предназначение.

В заключение авторы выражают благодарность А.А. Кузнецову и

П.А. Гуменюку за помощь в подготовке решений задач.

Список книг и задачников, рекомендуемых  
для изучения линейной теории колебаний и волн.

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям. Полное собрание трудов, т.4. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.
3. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. - М.: Наука, 1988.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. - М.: Наука, 1986.
6. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
7. *Бреховских М.Л., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (В приложении к теории волн). М.: Наука . 1982.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
9. *Крайнов В.П.* Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. — М.: Высшая школа, 1989.
10. *Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В.* Сборник задач по физике с решениями. — М.: Атомиздат, 1971.
11. Сборник задач по теории колебаний. / *Под ред. Л.В. Постникова и В.И. Королева.* М.: Наука. 1978.

*Авторы*

# Глава 1.

## Условия задач

### 1.1. Физические примеры осцилляторов.

#### Период и частота колебаний

1. Найдите период малых колебаний ледяного кубика, плавающего на поверхности воды. Сторона кубика  $a$ . Оцените этот период для  $a = 1$  см.
2. Сосуд объемом  $V$  разделен подвижным поршнем площади  $S$  на две равные части. Давление газа в сосуде равно  $P$ . Определите период малых колебаний поршня около положения равновесия. Масса поршня  $M$  много больше массы газа. Считайте, что газ подчиняется закону Бойля-Мариотта.
3. Шарик массы  $m$ , несущий заряд  $q$ , может скользить вдоль оси тонкого неподвижного кольца радиуса  $R$ , несущего заряд противоположного знака величины  $Q$ . Определите период малых колебаний.
4. Посередине резинового жгута длины  $l$  закреплена бусинка массы  $m$ . Бусинку отклоняют в поперечном направлении на небольшое расстояние и отпускают. Найдите частоту колебаний. Жгут в равновесном состоянии натянут с силой  $F$ . Как ведет себя частота при изменении  $F$ ?
5. Изготовьте экспериментально маятник с периодом колебания в 1 секунду. Как лучше всего подобрать длину нити?
6. Футбольный мяч ударяется о стенку. Покажите что при небольших деформациях время соударения не зависит от начальной скорости мяча. Оцените это время. Массу мяча примите  $m \approx 0.4$  кг, радиус  $R \approx 0.15$  м,

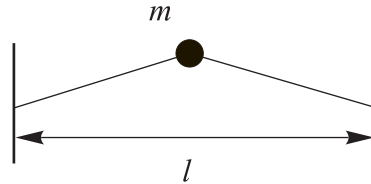


Рис. 1.1. К задаче 4

избыточное давление внутри него равно одной атмосфере, то есть  $10^5$  Па. Оцените скорость мяча, при которой деформация мяча не будет малой.

**7.** Гравитационная сила, действующая на частицу, которая помещена в твердую однородную сферу, обусловлена только массой сферы и прямо пропорциональна расстоянию до центра сферы. Если принять за такую сферу Землю и просверлить сквозь нее вдоль диаметра, соединяющего полюса, отверстие, то сколько времени понадобится телу, попавшему в это отверстие, чтобы достигнуть поверхности с противоположной стороны Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**8.** Имеются две геометрически подобные колебательные системы в виде грузиков на пружинах, изготовленные из одного материала. Во сколько раз отличаются периоды колебаний? Коэффициент подобия  $n$ .

**9.** Во сколько раз отличаются собственные частоты двух колебательных контуров, все размеры которых отличаются в  $n$  раз?

**10.** Газовый пузырь, образовавшийся в результате глубинного подводного взрыва, осциллирует с периодом, который зависит от давления жидкости  $p$ , плотности воды  $\rho$  и полной энергии взрыва  $E$ . Найдите эту зависимость из соображений размерности.

**11.** Получите формулу для собственной частоты колебательного контура из соображений размерности.

**12.** Определите период колебаний системы, состоящей из пружинки с жесткостью  $k$  и двух прикрепленных к ее концам шариков с массами  $m_1$  и  $m_2$ .

**13.** Определите период колебаний системы, состоящей из двух дисков с моментами инерции  $I_1$  и  $I_2$ , соединенных упругим валом, проходящим через их центры. При закручивании вала на угол  $\varphi$  появляется возвращающий момент  $M = -\chi\varphi$ .



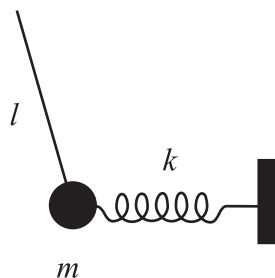


Рис. 1.2. К задаче 14

**14.** Определите период колебаний системы, изображенной на рис. 1.2. Масса стержня  $m$ , длина  $l$ , коэффициент жесткости пружины  $k$ .

**15.** Три одинаковых однородных стержня длины  $l$  каждый соединены короткими нитями, как показано на рис. 1.3. Нижний стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр системы и отпускают. Найти период возникающих при этом малых колебаний.

**16.** По внутренней поверхности полого цилиндра с радиусом  $R$  движется без проскальзывания шарик массой  $m$  и радиуса  $r$ . Найдите частоту колебаний. Движения вдоль оси цилиндра нет.

**17.** Найдите период возможных малых колебаний материальной точки массой  $m$ , движущейся вдоль оси  $x$ , если зависимость потенциальной энергии от координаты  $x$  дается следующими формулами:

$$\text{а) } U(x) = U_0 [(x/l)^3 - 3(x/l)] ,$$

$$\text{б) } U(x) = 4a [(b/x)^{12} - (b/x)^6] .$$

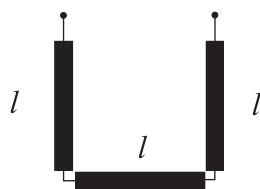


Рис. 1.3. К задаче 15

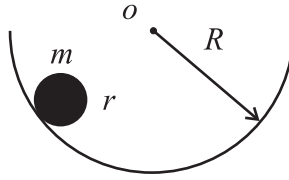


Рис. 1.4. К задаче 16

**18.** Из жести изготовлена пластинка, имеющая "синусоидальный" вертикальный профиль  $y = a \sin(2\pi x/l)$ . В одной из образовавшихся "ямок" колеблется шарик. Определите период малых колебаний.

**19.** Частица массы  $m$  движется в поле центральной силы с потенциалом  $V(r) = Kr^3$ ,  $K > 0$  по круговой орбите с радиусом  $r = a$ . Каков будет период малых радиальных колебаний частицы, если ее движение под действием возмущения слегка отклонилось от кругового?

**20.** Математический маятник длины  $l$  отклонили на малый угол  $\alpha$  от верхнего положения равновесия и отпустили без начальной скорости, в результате чего он стал совершать колебания с периодом  $T_0$ . Чему будет равен период колебаний, если маятник в начале отклонить на угол  $\alpha/2$ ?

**21.** Определите с точностью до численной константы период колебаний материальной точки массы  $m$  в потенциальной яме вида  $U(x) = k|x|^n$ ,  $n > 1$ . Покажите, что колебания будут изохронными только при  $n = 2$ . Как ведет себя период колебаний при стремлении амплитуды к нулю для различных  $n$ ?

**22.** В теории упругости показывается, что при деформации стального шара возникающая сила зависит от величины деформации  $x$  по закону  $F = \beta x^{3/2}$ . Зависит ли время соударения такого шара со стенкой от начальной скорости шара? Получите формулу для оценки времени соударения.

**23.** Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией  $y = kx^2$ . По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Будут ли изохронными большие колебания бусинки?

## 1.2. Свободный осциллятор

**24.** Грузик массы  $m = 100$  г, прикрепленный к пружине жесткости  $k = 10$  Н/м, получил скорость  $v_0 = 1$  м/с. Начальная деформация пружины  $x_0 = 4$  см. Определите амплитуду колебаний и деформацию пружины через время  $t = 1$  с.

**25.** Колебательный контур состоит из емкости  $C = 16$  нФ и индуктивности  $L = 160$   $\mu$ Гн. В начальный момент времени на емкости присутствует напряжение  $V = 10$  В, а ток в цепи отсутствует. Каковы зависимости от времени напряжения на емкости и тока через индуктивность? Чему равно максимальное значение заряда на конденсаторе?

**26.** Маятник длины  $l = 2$  м и массой  $m = 1$  кг отклонили на угол  $10^\circ$  и отпустили без начальной скорости. Какова энергия колебаний? Оцените число квантов энергии, запасенных в осцилляторе.

**27.** Спутник массы  $m$ , движущийся по геоцентрической орбите с радиусом  $R_0$  в результате кратковременного включения одного из двигателей получил небольшой импульс  $\Delta P$  в направлении от центра орбиты. Найдите параметры траектории, по которой начнет двигаться спутник: полуоси эллипса и поворот большой полуоси по отношению к направлению от центра Земли на точку траектории, в которой был включен двигатель.

**28.** Для осциллятора, имеющего начальную координату  $x_0$  и скорость  $v_0$ , разложите закон движения  $x(t)$  в ряд Тейлора с точностью до членов порядка  $t^2$ . Дайте физическую интерпретацию каждого члена ряда.

**29.** Маятник длиной  $l = 5$  м совершает малые колебания, так что амплитуда их уменьшилась в два раза за 100 периодов. Найдите добротность колебаний, логарифмический декремент и коэффициент затухания  $\gamma$ .

**30.** Колебательный контур с собственной частотой  $f_0 = 100$  кГц имеет добротность  $Q = 100$ . Рассчитайте емкость и индуктивность контура, если сопротивление, включенное в контур  $R = 5$  Ом.

**31.** На колеблющийся шарик массы  $m$  на пружинке жесткостью  $k$  действует сила трения  $f_{mp} = -\lambda v$ . Подсчитайте тепло, выделяющееся в среднем за один период колебаний, предполагая, что добротность колебаний велика. На сколько за один период уменьшается амплитуда колебаний?

**32.** Используя общее решение уравнения для осциллятора с затуханием, с помощью предельного перехода найдите закон движения для случая

критического затухания  $\gamma = \omega_0$ . Как выглядят в этом случае два линейно независимых решения уравнения колебаний осциллятора?

**33.** Маятник представляет собой металлический шарик радиуса  $r = 5$  см на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l = 2$  м. Маятник отклоняют на угол  $10^\circ$  и отпускают без начальной скорости. Оцените число Рейнольдса и коэффициент затухания для осциллятора. Можно ли считать, что для данных параметров задачи сила трения пропорциональна скорости? Вязкость воздуха принять равной  $\eta = 20 \cdot 10^{-6}$  Па·с.

**34.** Чему должна быть равна вязкость среды, чтобы колебания маятника носили характер аperiodического затухания?

**35.** Найдите закон движения осциллятора с затуханием в случае, если начальная скорость равна  $v_0$ . Рассмотрите случай периодического и аperiodического затухания. Для аperiodического затухания получите асимптотическое соотношение с точностью до членов порядка  $t^2$ , справедливое на малых временах. Дайте физическую интерпретацию всех членов разложения. Получите асимптотическое выражение, справедливое на больших временах. Что является мерой “малого” и “большого” времени в этих случаях?

**36.** Известно, что в классической электродинамике на заряженную частицу, движущуюся с ускорением, действует сила торможения

$$F = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3x}{dt^3},$$

возникающая из-за взаимодействия электрона с собственным полем излучения. Пусть в качестве такой частицы выступает электрон, колеблющийся в атоме с частотой  $\omega = 10^{15}$  рад/сек и амплитудой  $a = 10^{-8}$  см.

- 1) Вычислите энергию, излучаемую электроном за один период.
- 2) Чему равна добротность колебаний электрона?
- 3) За какое время  $\tau$  энергия электрона уменьшится вдвое?

### 1.3. Вынужденные колебания

**37.** Найдите усредненные значения кинетической и потенциальной энергии гармонического осциллятора под действием внешней гармонической

силы в режиме установившихся колебаний. Как они соотносятся между собой при различных значениях частоты вынуждающих колебаний?

**38.** Используя метод комплексных амплитуд, найдите решение для вынужденных колебаний линейного гармонического осциллятора без затухания при действии на него внешней гармонической силы. Нарисуйте графики зависимостей амплитуды и фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

**39.** Получите результаты задачи 38 из формул для амплитуды и фазы осциллятора с затуханием путем предельного перехода.

**40.** Выразите зависимость фазы вынужденных колебаний  $\varphi$  консервативного осциллятора от частоты  $p$  внешнего гармонического сигнала, используя функцию-ступеньку  $\theta(x)$ . Найдите функцию  $d\varphi/dp$ .

**41.** Найдите закон колебаний осциллятора в случае, если внешняя гармоническая сила изменяется с очень малой и очень большой частотой. Решите задачу двумя способами: получив соответствующие асимптотические выражения из точной формулы для амплитуды колебаний и сделав необходимые приближения непосредственно в исходном уравнении.

**42.** Научная аппаратура поставлена на амортизирующую подкладку для защиты от вертикальных вибраций. Собственная частота колебаний аппаратуры на подкладке равна 2 Гц, а пол вибрирует с частотой 20 Гц. Каково отношение амплитуд колебаний ящика и пола?

**43.** На осциллятор с затуханием, имеющий в начальный момент времени координату  $x_0$  и скорость  $v_0$  начинает действовать сила, зависящая от времени по гармоническому закону. Оцените время, по истечении которого динамика осциллятора может быть описана известным вынужденным решением.

**44.** Найдите отклик первоначально покоящегося консервативного осциллятора на внешнее воздействие вида  $f(t) = p\delta(t)$ .

**45.** Найдите закон движения первоначально неподвижного консервативного осциллятора после прекращения действия внешней силы, зависящей от времени по закону

$$F(t) = p \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - nT).$$

Постройте график зависимости амплитуды установившихся колебаний от безразмерного параметра  $\omega T$ . При каких значениях этого параметра амплитуда максимальна? Равна нулю?

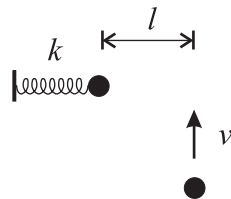


Рис. 1.5. К задаче 46

**46.** На рис. 1.5 изображена механическая модель возбуждения атома ультрарелятивистским электроном. Заряженный шарик на пружинке представляет собой связанный в атоме электрон на внешней электронной оболочке. Из бесконечности с очень большой скоростью  $v$  мимо осциллятора пролетает другой шарик, с таким же зарядом  $e$ , в результате чего первый шарик начинает совершать колебания. Найдите их амплитуду. Предполагается, что движения пружинки могут происходить только в горизонтальном направлении и выполняется условие  $v \gg l\omega_0$ ,  $\omega_0$  — собственная частота колебаний. Масса "электрона"  $m$ .

**47.** Найдите закон движения первоначального неподвижного консервативного осциллятора, в случае если внешнее воздействие зависит от времени по закону

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > T, \\ f, & 0 < t < T. \end{cases}$$

При каком условии осциллятор останется в покое после прекращения действия внешней силы?

**48.** Найдите амплитуду и фазу колебаний первоначального неподвижного консервативного осциллятора после прекращения действия внешней силы, зависящей от времени по закону

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > T, \\ \alpha t, & 0 < t < T. \end{cases}$$

Покажите, что закон движения из предыдущей задачи получается дифференцированием полученного результата. Почему это так? Найдите амплитуду колебаний.

**49.** На осциллятор с собственной частотой  $\omega$  и добротностью  $Q \gg 1$  действует периодическая сила, зависящая от времени по закону

$$F(t) = \begin{cases} f_0, & nT \leq t \leq (n + 0.5)T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0, & \text{в остальные моменты времени.} \end{cases}$$

причем  $T = 2\pi/\omega$ . Найдите величины постоянного смещения осциллятора от положения равновесия и амплитуду его колебаний.

## 1.4. Неустойчивость

**50.** Маятник в виде невесомого стержня длины  $l$  с маленьким грузом на конце вращается на горизонтальной платформе с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через точку подвеса. При какой величине  $\omega$  нижнее вертикальное положение маятника является устойчивым?

**51.** Частица массы  $m$  движется по круговой орбите радиуса  $R$  в поле центральных сил, потенциал которого равен  $U(r) = -cm/r^n$ ,  $c > 0$ . При каких  $n$  круговая орбита устойчива по отношению к малым возмущениям движения частицы?

**52.** Математический маятник длины  $l = 1$  м отклонили от верхнего положения равновесия на угол  $0.01^\circ$  и отпустили без начальной скорости. За какое время угол отклонения увеличится в 100 раз?

**53.** Математический маятник отклонили на небольшой угол  $\alpha$  и отпустили. Оцените характерный масштаб времени  $t$ , в течение которого для описания движения маятника можно пользоваться линеаризованным уравнением. Как изменится это время, если начальный угол уменьшить в 2 раза?

**54.** Частица движется в "потенциальной яме" вида

$$U(x) = U_0 \left[ (x/l)^3 - p(x/l) \right],$$

где  $-\infty < p < \infty$ . При каких значениях параметра  $p$  возможно состояние неустойчивого равновесия в системе? Получите уравнения движения частицы вблизи устойчивого и неустойчивого положений равновесия.

**55.** На плоскости действительных параметров  $a$  и  $b$  выделите область, соответствующую устойчивому состоянию равновесия системы с характеристическим уравнением

$$p^4 + (a + b)p^3 + p^2 + ap + b = 0.$$

**56.** Найдите условия устойчивости состояния равновесия динамических систем, заданных характеристическими уравнениями. На плоскости действительных параметров  $a$  и  $b$  выделите области, соответствующие асимптотически устойчивому состоянию равновесия.

- 1)  $ap + b = 0$
- 2)  $p^2 + ap + b = 0$
- 3)  $p^3 + ap^2 + bp + 1 = 0$
- 4)  $p^4 + ap^3 + bp^2 + p + 1 = 0$

**57.** На плоскости действительных параметров  $a$  и  $b$  выделите область, соответствующую устойчивому состоянию равновесия системы с характеристическим уравнением

$$p^3 + (b + 3)p^2 + 3ap + a + b = 0.$$

**58.** Постройте  $D$ -разбиение области комплексного параметра  $\lambda$  для системы с характеристическим уравнением

$$\lambda p^5 + p^4 + 2p^3 + p^2 + 2p + 1 = 0.$$

**59.** Постройте  $D$ -разбиение области комплексного параметра  $\lambda$  для системы с характеристическими уравнениями

- а).  $(p + 1) \operatorname{sh}(p + 2) - \lambda = 0$ ,
- б).  $e^{-\lambda p}(p + 2) + p^2 + 3p + 1 = 0$ .

**60.** Исследуйте на тип и устойчивость положения равновесия динамической системы

$$a\dot{x} = x^2 + y - 1, \quad \dot{y} = xy.$$

**61.** Для системы

$$\dot{x} = \frac{x}{2} - \frac{xy}{\alpha + x} - \beta x^2, \quad \dot{y} = \frac{xy}{\alpha + x} - \frac{y}{2},$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $2\alpha\beta > 1$ , найдите положения равновесия, исследуйте их типы и устойчивость.

**62.** Динамика ядерного реактора в простейшем случае описывается системой уравнений:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\sigma N}{l}, \quad mc \frac{dT}{dt} = N - k(T - T_1),$$



где  $N$  — мощность реактора,  $T$  — его температура,  $l$  — время жизни одного поколения нейтронов,  $m$  — масса реактора,  $c$  — удельная теплоемкость,  $\sigma = -\alpha(T - T_0)$  — реактивность реактора,  $\alpha > 0$ ,  $T_1$  — температура окружающей реактор среды,  $T_1 < T_0$ ,  $k$  — коэффициент теплоотдачи от реактора к охладителю. Получите уравнения динамики реактора в безразмерном виде, найдите точки положения равновесия системы и исследуйте их на устойчивость.

**63.** Мальчик раскачивает качели, дважды за период колебаний резко приседая и резко выпрямляя ноги. В какие именно моменты он должен делать это, чтобы качели раскачивались наиболее быстро?

**64.** Емкость в колебательном контуре меняется через равные интервалы времени  $\tau$  от  $C_1$  до  $C_2$  и обратно, причем  $\Delta C = C_2 - C_1 \ll C_0 = (C_1 + C_2)/2$ . На плоскости параметров  $(\Delta C/C_0, \omega_0\tau)$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC_0$ , найдите зоны параметрической неустойчивости системы.

**65.** Емкость в колебательном контуре меняется во времени по закону

$$C(t) = C_0 + \Delta C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau).$$

На плоскости параметров  $(\Delta C/C_0, \omega_0\tau)$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC_0$ , найдите зоны параметрической неустойчивости системы.

**66.** Емкость конденсатора в колебательном контуре с добротностью  $Q \gg 1$  меняется периодически по закону  $C(t) = C_0 + \Delta C \cos(pt)$ , где  $p \approx 2\omega_0$ ,  $\Delta C \ll C_0$ . На плоскости параметров  $((p - 2\omega_0)/\omega_0, \Delta C/C_0)$  найдите границу зоны параметрической неустойчивости. Какова должна быть минимальная величина модуляции емкости  $\Delta C/C_0$ , чтобы неустойчивость возникла?

**67.** В колебательном контуре с собственной частотой  $\omega$ , возбуждены колебания, амплитуда которых  $U_0$ . Емкость контура периодически меняют по закону  $C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\omega t)$ , где  $\Delta C \ll C_0$ . Какая работа совершается за один период?

**68.** Используя решение задачи 67, найдите условие для порога возникновения неустойчивости для колебательного контура с добротностью  $Q$ . Сравните полученный результат с результатом из задачи 66.

**69.** Точка подвеса маятника совершает колебания в вертикальной плоскости с частотой  $2\sqrt{g/l}$  и амплитудой  $a$ . Коэффициент затухания системы  $\gamma$ . При каком условии в системе возникнет неустойчивость?

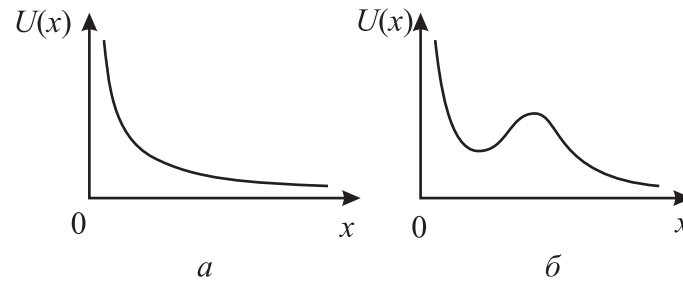


Рис. 1.6. К задаче 77

**70.** Математический маятник длины  $l$  находится в верхнем положении равновесия, а его точка подвеса совершает колебания в вертикальной плоскости с частотой  $p \gg \omega_0 = \sqrt{g/l}$  и амплитудой  $a$  (маятник Капицы). При каком условии движение маятника вблизи верхнего положения равновесия будет устойчивым?

## 1.5. Фазовое пространство

**71.** Чему равна размерность фазового пространства в задаче о движении тела, брошенного под углом к горизонту?

**72.** Для динамической системы с одной степенью свободы на фазовой плоскости введены координаты, в качестве которых выступает координата системы и ее скорость. Покажите, что фазовые траектории в верхней полуплоскости всегда направлены слева направо, а в нижней полуплоскости - справа налево.

**73.** Под каким углом пересекают ось абсцисс фазовые траектории на фазовой плоскости, если по осям отложены координата частицы и ее скорость?

**74.** Шарик движется по горизонтальной поверхности без трения между двух вертикальных стенок, расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга. Изобразите фазовый портрет системы в случаях абсолютно упругого удара о стенку. Сделайте то же самое в случае частично неупругого и абсолютно неупругого удара.

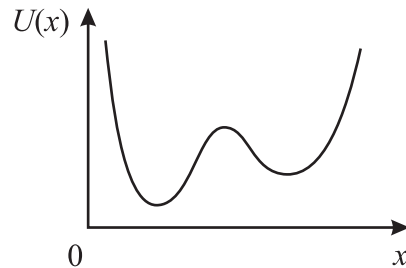


Рис. 1.7. К задаче 78

**75.** Тело брошено вертикально вверх. Изобразите его траекторию на фазовой плоскости. Изобразите семейство фазовых траекторий, отвечающих различным начальным скоростям.

**76.** Частица массы  $m$  и с зарядом  $q$  находится на расстоянии  $d$  от достаточно густой металлической сетки, несущей заряд с поверхностной плотностью  $-\sigma$ . Изобразите траекторию частицы на фазовой плоскости. Частица свободно пролетает сквозь сетку. Поперечный размер сетки можно считать бесконечным.

**77.** Шарик движется в потенциальных полях, вид которых приведен на рис.(1.6). Нарисуйте качественно, как выглядит фазовая плоскость для каждого потенциала.

**78.** В двугорбой потенциальной яме движется шарик (см. рис. 1.7). Изобразите фазовую плоскость системы. В системе есть небольшое трение.

**79.** В динамической системе типа математический маятник существует малое трение. Напишите уравнение, описывающее поведение системы. Как выглядит фазовая плоскость такой динамической системы? Укажите фазовые траектории, отделяющие области с различным характером движения.

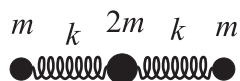


Рис. 1.8. К задаче 80

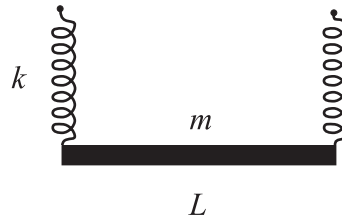


Рис. 1.9. К задаче 82

## 1.6. Связанные колебания

Во многих задачах этого раздела требуется найти собственные моды колебаний системы связанных осцилляторов. Под этим подразумевается, что необходимо отыскать собственные частоты и собственные векторы системы, т.е. такие относительные величины координат осцилляторов, которые необходимо задать в начальный момент времени для того, чтобы отпущенная без начальных скоростей из этого состояния система совершала колебания с единственной собственной частотой.

**80.** Три шарика расположены вдоль одной прямой и соединены между собой пружинами жесткостью  $k$ , как показано на рис. 1.8, причем крайние шарика имеют массу  $m$ , а средний -  $2m$ . Найдите собственные моды колебаний такой системы.

**81.** Изготовьте связанные маятники, подвесив на натянутой нити два маятника. Подтолкните один маятник и пронаблюдайте биения. Измените натяжение нити, к которой подвешены маятники. Как изменятся колебания?

**82.** Балка длины  $L$  и массы  $M$  подвешена за концы на двух одинаковых пружинах жесткостью  $k$  (рис. 1.9). В начальный момент времени один из концов балки отклонили вниз на малую величину  $a$ , а второй удерживали руками, а затем систему отпустили. Найдите закон колебания балки во времени. Указание: считайте, что концы балки могут двигаться только в вертикальном направлении.

**83.** Для системы трех идентичных маятников, связанных пружинками (рис. 1.10) найдите собственные частоты и собственные векторы нормальных типов колебаний.

**84.** Прodelайте решение задачи 83 для случая, когда в системе связаны 4 маятника.

Указание. Если затруднительно решить алгебраическое уравнение 4-го порядка, то можно найти две собственные частоты из соображений симметрии и понизить порядок характеристического уравнения.

**85.** Найдите собственные моды колебаний системы, изображенной на рис. 1.11.

**86.** Три шарика массы  $m$  лежат на абсолютно гладком столе и скреплены одинаковыми пружинами так, что в состоянии равновесия шарики находятся в вершинах равностороннего треугольника (см. рис. 1.12). Жесткости всех пружин  $k$ . Найдите все собственные частоты колебаний в такой системе.

**87.** В конденсаторе колебательного контура находится один электрон. Получите уравнения связанных колебаний заряда в контуре и электрона в конденсаторе. Оцените, на сколько изменится собственная частота контура из-за присутствия электрона. Конденсатор считайте плоским.

## 1.7. Волновое уравнение

**88.** При каком условии гармоническая волна

$$f(x, t) = \operatorname{Re}\{A \exp[j(\omega t - kx)]\}$$

будет решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Какова скорость распространения этой волны?

**89.** Покажите, что функции  $f(x - vt)$  и  $g(x + vt)$  являются решениями волнового уравнения для произвольных функций  $f$  и  $g$ . Установите

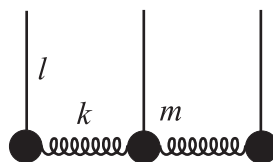


Рис. 1.10. К задаче 83

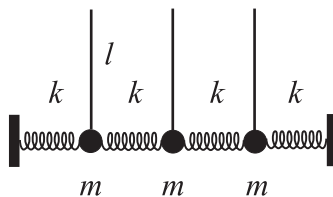


Рис. 1.11. К задаче 85

физический смысл решений волнового уравнения вида  $f(x \mp vt)$ . Для этого определите, как они ведут себя с течением времени, если при  $t = 0$  функция  $f(x)$  имеет вид уединенного прямоугольного импульса.

**90.** Поперечные волны в натянутой струне описываются волновым уравнением, причем скорость волны  $v = 1$  м/с. В начальный момент времени на струне существует два одинаковых импульса в форме равнобедренных треугольников разной полярности, распространяющихся влево и вправо, как показано на рис. 1.13 Нарисуйте профиль струны спустя 2 с и 4 с после начала.

**91.** Длинная струна прикреплена к стенке. По струне распространяется со скоростью 1 м/с возмущение, имеющее вид равнобедренного треугольного импульса (рис. 1.14). В начальный момент времени вершина импульса отстоит от стены на расстояние 2 м. Нарисуйте профиль струны спустя 2 с и спустя 5 с после начала.

**92.** Введем в волновом уравнении вместо переменных  $(x, t)$  новые переменные  $(\xi, \eta)$  с помощью соотношений  $\xi = x - vt$ ,  $\eta = x + vt$ . Как выглядит волновое уравнение в этих переменных? Покажите, что общее решение волнового уравнения представимо в виде

$$F(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt),$$

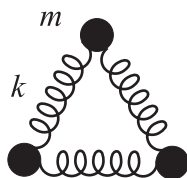


Рис. 1.12. К задаче 86

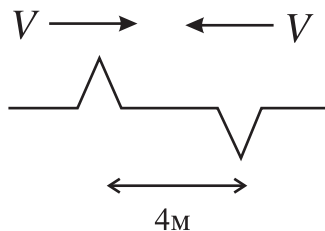


Рис. 1.13. К задаче 90

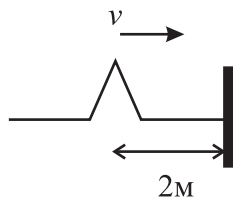


Рис. 1.14. К задаче 91

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции.

**93.** Получите общее решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$F(x, 0) = \varphi(x), \quad F_t(x, 0) = \psi(x).$$

**94.** Пусть скорость  $V$  — распространения возмущения в волновом уравнении равна. Как будет выглядеть решение при больших временах, если при  $t = 0$ :

- 1)  $f(x, 0)$  — прямоугольный импульс с шириной  $d$  и единичной высотой, а  $\partial f(x, t)/\partial x|_{t=0} = 0$ ;
- 2) наоборот,  $f(x, 0) = 0$ , а  $\partial f(x, t)/\partial x|_{t=0}$  — прямоугольный импульс с шириной  $d$  и единичной высотой?

**95.** Покажите, что малые отклонения натянутой рояльной струны от положения равновесия  $y(x, t)$  удовлетворяют линейному волновому уравнению. Натяжение невозмущенной струны  $T$ , линейная плотность  $\rho$ . Найдите скорость поперечных волн в струне.

**96.** Покажите, что звуковые волны в газе удовлетворяют линейному волновому уравнению. Получите формулу для скорости звука в газе. Вычислите эту скорость для кислорода, азота и воздуха.

**97.** Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Покажите, что любая отличная от нуля компонента электромагнитного поля удовлетворяет линейному волновому уравнению. Найдите выражение для показателя преломления среды.

## 1.8. Дисперсия

**98.** Дисперсионная характеристика для волнового уравнения, имеющая вид  $\omega^2 - v^2 k^2 = 0$  распадается на две независимых ветки  $\omega = \pm vk$ . Напишите соответствующее каждой ветке волновое уравнение в частных производных. Покажите, что функции  $f(x - vt)$  и  $g(x + vt)$  являются решениями этих уравнений. Установите физический смысл этих решений.

**99.** По заданным волновым уравнениям получите дисперсионные характеристики и нарисуйте их.

$$a). \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \omega_0^2 F = 0.$$

$$b). \quad \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0.$$

$$c). \quad i \frac{\partial F}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

**100.** Вычислите фазовые и групповые скорости для волн в средах со следующими дисперсионными уравнениями:

$$a) \omega = vk + \omega_0 \quad b) \omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2$$

$$c) \omega^2 = kg + \frac{k^3 \alpha}{\rho} \quad d) \omega^2 = c^2 k^2 / (1 + r_d^2 k^2)$$

Постройте зависимости  $v_\phi(k)$  и  $v_{gp}(k)$  графически.

**101.** Продольные упругие волны в тонком стержне описываются уравнением Лява

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial t^2 \partial x^2} = 0.$$



Получите соответствующее дисперсионное уравнение и постройте дисперсионную характеристику, а также зависимости фазовой и групповой скорости от волнового числа.

**102.** Волна в среде описывается уравнением

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} - i \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x - x') F(x', t) dx' = 0.$$

Получите соответствующее дисперсионное уравнение.

**103.** При некоторой длине волны зависимость  $v_{\phi}(\lambda)$  имеет минимум. Покажите, что на этой частоте  $v_{\phi} = v_{gp}$ .

**104.** Пусть  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны, соответствующая волне с частотой  $\omega$ . Докажите формулу Рэлея, связывающую фазовую  $v_{\phi}$  и групповую  $v_{gp}$  скорости:

$$v_{gp} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}.$$

**105.** Установите связь между волновым уравнением в Фурье-представлении и дисперсионным уравнением.

## 1.9. Волновые пакеты

**106.** По поверхности воды в реке распространяются волны, представляющие собой узкий спектральный волновой пакет. Наблюдатель, стоящий на берегу, видит, что пакет состоит из  $N \gg 1$  гребней. Сколько колебаний совершит поплавок, за то время, пока пакет будет распространяться мимо него? Волны гравитационные.

**107.** В среде с дисперсионной характеристикой  $\omega = \omega(k)$  создано начальное распределение поля вида  $f(x) = A(\cos k_1 x + \cos k_2 x)$ , причем  $|k_1 - k_2| \ll k_1, k_2$ . Покажите, что поле в последующие моменты времени представляется в виде произведения двух синусоидальной волн: медленно меняющейся амплитуды и быстро меняющегося заполнения. Найдите длины волн и скорости распространения волн заполнения и огибающей. Выразите эти скорости через дисперсию  $\omega(k)$ .

**108.** Предположим, что в условиях задачи 107 начальное распределение  $f(x)$  представляет собой волновой пакет со всевозможными волновыми

числами в интервале от  $k_0 - \Delta k/2$  до  $k_0 + \Delta k/2$  причем  $k_0 \gg \Delta k$ , одинаковыми амплитудами и начальными фазами. Покажите, что волновое поле при  $t > 0$  представляется в виде произведения гармонического заполнения и медленно меняющейся амплитуды. Найдите скорости движения заполнения и огибающей. Оцените характерный размер импульса огибающей  $\Delta x$  и покажите, что выполняется принцип неопределенности  $\Delta x \Delta k \sim 2\pi$ .

**109.** В среде с дисперсией  $\omega(k)$  при  $t = 0$  создан волновой пакет вида

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k-k_0)^2/(\Delta k)^2} e^{-ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

Найдите значение поля при  $t > 0$ , если выполняется условие  $k_0 \gg \Delta k$ .

**110.** В среде с дисперсией  $\omega(k)$  распространяется волновой пакет с центральным значением волнового числа  $k_0$  и шириной спектра  $\Delta k \ll k_0$ . Покажите, что если выполняется условие  $v_{gp}(k_0) \neq 0$ , то на некотором интервале времени  $\tau$  движение пакета можно представить в виде

$$f(x, t) = F[x - v_{gp}(k_0)t] e^{i(\omega(k_0)t - k_0x)},$$

где  $F(x)$  — медленно меняющаяся в масштабах длины волны  $2\pi/k_0$  огибающая. Дайте оценку временному интервалу  $\tau$ .

**111.** В условиях задачи 110 получите уравнение в частных производных, которому удовлетворяет огибающая волнового пакета  $F(x, t)$ .

**112.** В среде с дисперсией  $\omega(k)$  распространяется волновой пакет с центральным значением волнового числа  $k_0$  и шириной спектра  $\Delta k \ll k_0$ , причем  $v_{gp}(k_0) = 0$ . Покажите, что движение пакета можно представить в виде

$$f(x, t) = F(x, t) e^{i(\omega(k_0)t - k_0x)},$$

где  $F(x, t)$  — медленно меняющаяся в масштабах длины волны  $2\pi/k_0$  огибающая. Получите уравнение в частных производных для  $F(x, t)$ .

## 1.10. Эффект Доплера

**113.** Найдите систему отсчета в которой волна  $e^{i(\omega t - kx)}$  будет неподвижна.

**114.** В среде распространяется гармоническая волна вида  $e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ . Какое волновое поле увидит наблюдатель, двигающийся относительно среды со скоростью  $\vec{v}$ ? Найдите закон преобразования частоты и волнового числа при переходе из одной системы отсчета в другую.

**115.** Динамик громкоговорителя излучает звук на частоте  $\omega_0$ . Какую частоту будет воспринимать наблюдатель в случае, если:

- 1) Динамик укреплен на перроне, а наблюдатель движется на поезде со скоростью  $V$ ?
- 2) Наблюдатель стоит на перроне, а динамик находится на поезде?

Скорость звука  $c$ .

**116.** Оцените по порядку величины относительное изменение частоты гудка движущегося тепловоза.

**117.** Найдите формулы для эффекта Доплера в случае, когда наблюдатель движется с релятивистской скоростью.

**118.** Осциллятор с собственной частотой  $\omega_0$  движется со скоростью  $v$  и излучает электромагнитную волну. Угол между направлением движения осциллятора и направлением на удаленного наблюдателя в системе отсчета, связанной с осциллятором, равен  $\varphi$ . Какую частоту измерит наблюдатель?

**119.** Осциллятор с собственной частотой  $\omega_0$  движется с ультрарелятивистской скоростью  $v$ . Какова частота волн, излучаемых по направлению движения осциллятора? Выразите коэффициент преобразования частоты через релятивистский фактор  $\gamma$  в случае, когда  $\gamma \gg 1$ .

**120.** В среде распространяется электромагнитная волна, имеющая продольную компоненту электрического поля  $E(x, t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x)$ . В том же направлении летит электрон с нерелятивистской скоростью  $v_0$ . Под действием электрического поля электрон начинает совершать колебания с некоторой частотой. Найдите амплитуду этих колебаний, если при  $t = 0$  координата электрона  $x = 0$ . Известно, что амплитуда колебаний мала по сравнению с длиной волны.

**121.** На зеркало, движущееся относительно неподвижной системы отсчета с ультрарелятивистской скоростью  $v$ , падает перпендикулярно поверхности навстречу движению плоская электромагнитная волна с частотой  $\omega$ . Найдите частоту отраженной волны. Ответ выразите через релятивистский фактор  $\gamma \gg 1$ .

Комментарий. Работа одного из разновидностей лазера на свободных электронах - "убитрона" основана на рассеянии электромагнитной волны на сгустке релятивистских электронов, который в этом случае выполняет роль движущегося зеркала. Поэтому результат этой задачи дает коэффициент преобразования частоты в убитроне.

**122.** Дисперсионное уравнение электромагнитной волны в вакууме имеет вид  $\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$ , где  $c$  — скорость света. Как будет выглядеть дисперсионное в системе отсчета, двигающейся со скоростью  $\vec{v}$  по отношению к исходной?

**123.** Дисперсионное уравнение для электромагнитной волны в полой металлической трубе (металлическом волноводе) имеет вид  $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$ , где  $c$  — скорость света. Найдите вид дисперсионного уравнения в системе отсчета, движущейся вдоль оси волновода со скоростью  $v$  относительно исходной.

## 1.11. Эффект Вавилова-Черенкова.

### Излучение волн

**124.** Электрон движется с нерелятивистской скоростью  $v_0$  в среде с показателем преломления  $n$  и излучает фотон с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\vec{k}$ . Используя законы сохранения энергии и импульса, найдите, под каким углом к направлению движения излучается фотон. Энергия фотона мала по сравнению с кинетической энергией электрона.

**125.** В среде могут распространяться волны с фазовой скоростью  $v_\phi(\vec{k})$ . В этой среде движется с постоянной скоростью  $V$  источник возмущений и в каждой точке излучает плоскую волну с частотой  $\omega$  и волновым числом  $\vec{k}$ . Покажите, что по всем направлениям, кроме определяемого условием черенковского излучения  $\cos\theta = v_\phi/V$ , волны, испущенные в разных точках траектории будут взаимно гасить друг друга.

**126.** Система, имеющая внутренние степени свободы, движется с нерелятивистской скоростью  $v_0$  в среде с показателем преломления  $n$  и излучает фотон с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\vec{k}$ . Получите формулу, связывающую изменение внутренней энергии системы  $\Delta U$  с энергией фотона и направлением излучения. Энергия фотона мала по сравнению с кинетической энергией электрона.

**127.** Получите решение задач 124 и 126 для случая движения с релятивистской скоростью.

**128.** Электрон движется с нерелятивистской скоростью  $\vec{v}_0$  в среде с показателем преломления  $n > 1$  и взаимодействует с плоской электромагнитной волной, частота которой  $\omega$ , а волновое число —  $\vec{k}$ . Найдите в первом приближении возмущенную траекторию движения электрона. При каком условии взаимодействие волны и электрона будет наиболее эффективным? Амплитуда электрического поля равна  $\vec{E}_0$ , взаимодействием с магнитным полем можно пренебречь.

**129.** Вдоль оси  $x$  распространяется электромагнитная волна  $E = E \cos(\omega t - kx)$ , причем вектор электрического поля направлен вдоль оси  $x$ . В том же направлении движется электрон со скоростью  $v$  и в течение времени  $T$  взаимодействует с волной. Предполагая, что движение электрона нерелятивистское и что взаимодействие электрона и волны слабое:

- 1) Вычислите работу, совершаемую волной над электроном за время  $T$ .
- 2) Найдите, при каком условии это взаимодействие будет наиболее эффективным, если  $T \gg 1/\omega$ .
- 3) Пусть  $v \neq \omega/k$ . Чему равна работа за очень большое время ( $T \rightarrow \infty$ ) ?
- 4) Предположим, что имеется не один электрон, а непрерывный электронный поток со средней плотностью  $n$  электронов на единицу длины. Найдите среднюю мощность взаимодействия волны и всех электронов пучка, расположенных на одной длине волны электромагнитного поля.

**130.** При каких значениях постоянной скорости нерелятивистская частица будет излучать в среде с дисперсией  $\omega^2 = ck + \alpha k^3$ ? Найдите частоту такого излучения по направлению движения частицы. Коэффициенты  $c, \alpha > 0$ .

## 1.12. Волны на воде

**131.** Найдите связь между групповой и фазовой скоростью для гравитационных и капиллярных волн на поверхности глубокой воды.

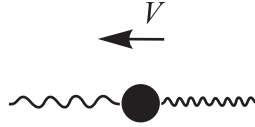


Рис. 1.15. К задаче 139

**132.** Постройте графики зависимости фазовой и групповой скорости капиллярно-гравитационных волн на глубокой воде от волнового числа  $k$ . С какой минимальной скоростью должен двигаться по поверхности жидкости объект, чтобы возбуждать бегущие волны? Выполните соответствующую оценку для глубокой воды.

**133.** Оцените длины волн на глубокой воде, которые могут считаться капиллярными (гравитационными). Выполните те же оценки для волн на поверхности ртути.

**134.** Какова групповая скорость волн, для которых океан является "мелким"?

**135.** К кораблю в океане стали приходить волны. Было замечено, что в 12 часов волны в 2 раза короче, чем в 10 часов. Когда начался шторм?

**136.** Модель корабля в 0.01 натуральной величины испытывается в бассейне. Проектная скорость равна 36 км/час. С какой скоростью надо буксировать модель, чтобы картинка гравитационных волн соответствовала реальной?

**137.** Покажите, что для гравитационных волн при условии  $kh \ll 1$  ( $h$  — глубина жидкости) можно использовать приближенный закон дисперсии  $\omega = ck - \beta k^3$  и найдите константы  $c$  и  $\beta$ . Покажите, что учет капиллярности в этом приближении приводит лишь к поправке на величину  $\beta$ .

**138.** При движении судна со скоростью  $V$  за его кормой образуется последовательность волн, которые движутся вместе с судном и их фронт перпендикулярен направлению движения. Найдите длину этих волн. Проведите оценку для  $V = 20$  км/час.

**139.** Поперек глубокого ручья лежит ствол дерева, наполовину погруженное в воду. Около ствола возникает картина стоячих волн, изображенная на рис. 1.15. Какова длина волн перед деревом и после него? Скорость воды  $V$ .

**140.** На поверхность спокойной воды падает камень. Найдите картину

волн на достаточно большом расстоянии от точки падения. Размер камня порядка 10 см.

**141.** В глубокую воду брошен камень. На расстоянии  $r$  от точки падения измеряют, как меняется длина проходящих через точку наблюдения волн с течением времени. Нарисуйте качественно эту зависимость. Волны гравитационные.

**142.** В глубокую воду брошен камень. Покажите, что вся картина волн заключена в пределах между двумя окружностями, с увеличивающимися с течением времени радиусами. По какому закону меняются эти радиусы? Волны гравитационные.

**143.** Покажите, что гравитационные волны на поверхности воды за движущимся судном заключены в пределах конуса с вершиной в точке мгновенного положения судна и углом раскрыва  $\approx 39^\circ$ .

**144.** Постройте картину гравитационных волн за движущимся судном.

**145.** На поверхность спокойной воды падает капля. Найдите картину капиллярных волн на достаточно большом расстоянии от точки падения. Закон дисперсии капиллярных волн  $\omega^2 = \sigma k^3 / \rho$ ,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность воды.

**146.** Постройте картину капиллярных волн, создаваемых движущимся точечным источником на поверхности воды.

**147.** Оцените коэффициент затухания гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости. Каков порядок величины коэффициента затухания для волн на воде с  $\lambda = 1$  м?

**148.** Оцените коэффициент затухания капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости. По какому закону зависит коэффициент затухания от длины волны? До каких значений длин волн имеет смысл говорить о распространении капиллярных волн? Проведите численные оценки для воды и ртути.

### 1.13. Связанные волны и волновые неустойчивости

**149.** Найдите дисперсионное уравнение для системы взаимодействующих волн

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x} = \varepsilon I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} - v_2 \frac{\partial I}{\partial x} = \pm \varepsilon F,$$

$v_1, v_2 > 0$ . Нарисуйте отдельно дисперсионные характеристики, соответствующие знакам  $+$  и  $-$  в правой части второго уравнения. В каком случае в системе реализуется неустойчивость, а в каком — непропускание?

**150.** Проведите решение задачи 149, считая, что волны распространяются в одну сторону (это соответствует знаку плюс перед пространственными производными в обоих уравнениях).

**151.** Исследуйте дисперсионные характеристики для систем связанных волн из задач 149 и 150 на наличие неустойчивости. Для каждого из четырех эталонных уравнений двух связанных волн определите тип неустойчивости, если она существует.

**152.** Нарисуйте дисперсионную характеристику

$$(\omega - ck^2)(\omega - vk) = \varepsilon^2$$

для случая слабой связи  $\varepsilon \ll 1$ . Найдите точки синхронизма несвязанных волн и получите приближенные дисперсионные уравнения в форме двух слабо связанных волн вблизи этих точек. Есть ли в этой системе неустойчивость?

**153.** Нарисуйте дисперсионную характеристику

$$(\omega - vk)(\omega + vk)(\omega - 2vk) = \varepsilon^3,$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Существует ли в этой системе неустойчивость? Если существует, то какого типа, абсолютная или конвективная?

**154.** Нарисуйте дисперсионную характеристику для случая слабой связи волн, описываемых дисперсионным уравнением

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p}{\omega - vk - \omega_0},$$



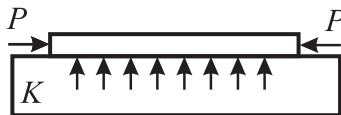


Рис. 1.16. К задаче 155

$0 < v < c$ . Существует ли в этой системе неустойчивость? Исследуйте все возможные случаи, реализующиеся при различных соотношениях между параметрами, входящими в дисперсионное уравнение.

Указание. Для уменьшения числа параметров при анализе следует перейти к безразмерным частоте и волновому числу.

**155.** На рис. 1.16 показана балка с погонной плотностью  $\rho$  и жесткостью на изгиб  $E$ , лежащая на упругой опоре с распределенным коэффициентом жесткости  $K$ . Балка подвергается продольному сжатию с силой  $P$ . Поперечное смещение балки  $y(x, t)$  описывается уравнением

$$\rho y_{tt} + Ky + Py_{xx} + Ey_{xxxx} = 0$$

При какой силе  $P$  малое поперечное смещение балки будет неограниченно возрастать?

**156.** Дисперсионная кривая на плоскости  $(\omega, k)$  задана уравнением  $\omega - \alpha\omega^3 - ck = 0$ , где  $\alpha, c > 0$ . Существует ли в такой системе неустойчивость? Если да, то для каких значений волновых чисел?

**157.** Отрезок системы длины  $l$  с законом дисперсии  $\omega^2 - c^2k^2 = -\varepsilon^2$  замкнули в кольцо. При какой длине в системе возникнет неустойчивость?

**158.** Система двух связанных волн описывается дисперсионным уравнением

$$[\omega - \omega_1(k, \beta)][\omega - \omega_2(k, \beta)] = -\varepsilon^2$$

где  $\omega_1(k, \beta)$  и  $\omega_2(k, \beta)$  — заданные функции частоты и параметра  $\beta$ , а  $\varepsilon$  — коэффициент связи. Найдите уравнения, определяющие на плоскости параметров  $(\beta, \varepsilon)$  границу области, в которой система будет неустойчива.

**159.** В пространстве параметров найдите область неустойчивости для дисперсионного уравнения  $(\omega - vk)(\omega - \omega_0 - ck^2) = -\varepsilon^2$ . Указание: Перенормировкой следует уменьшить число параметров в дисперсионном уравнении до двух.

**160.** Выясните характер неустойчивости в системе, описываемой дисперсионным уравнением

$$(\omega - kv + \omega_0)(\omega - kv - \omega_0) = \frac{\varepsilon^2}{k^2 + d^2}$$

вблизи границы возникновения неустойчивости.

**161.** Дисперсионное уравнение для плазменно-пучковой неустойчивости имеет вид

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{(\omega - vk)^2} = 1,$$

где  $\omega_p$  и  $\omega_b$  — ленгмюровские частоты для плазмы и пучка. В предположении, что плотность пучка гораздо меньше, чем плотность плазмы, найдите диапазон волновых чисел, при которых система будет неустойчива.

**162.** Решите задачу 161 не ограничиваясь условием малой плотности электронного пучка.

**163.** Получите дисперсионное уравнение и постройте дисперсионные характеристики для случая взаимодействия пучка с плазмой. Разбросом тепловых скоростей в пучке можно пренебречь, а для описания плазмы использовать гидродинамическое приближение, считая, что ее уравнение состояния  $p_p = n_p T$ ,  $T$  — температура плазменной компоненты.

**164.** Пусть взаимодействуют два безграничных в поперечном сечении электронных потока, невозмущенные плотности которых удовлетворяют условию  $\rho_1 \gg \rho_2$ . Получите дисперсионное уравнение системы. Покажите, что при  $v_1 v_2 > 0$  в системе реализуется конвективная неустойчивость, а при  $v_1 v_2 < 0$  — абсолютная неустойчивость.

**165.** Выясните характер неустойчивости в системе с дисперсионным уравнением

$$\tilde{\omega} = \tilde{k}^2 + \frac{1}{\tilde{k} - B - i\nu}, \quad \nu \rightarrow -0,$$

где  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{k}$  — безразмерные частота и волновое число.

**166.** В среде могут распространяться волны, дисперсионное уравнение которых имеет вид

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_0^2 - id)(\omega - kv) = -\varepsilon_0^3,$$

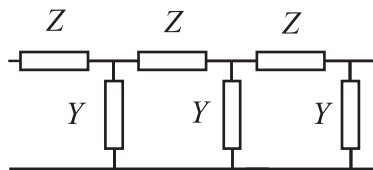


Рис. 1.17. К задаче 167

где  $v > c, d, \varepsilon_0 > 0, d, \varepsilon_0 \ll \omega_0$ . Длинный отрезок такой среды поместили между двумя частично отражающими зеркалами. При каких условиях система будет неустойчива?

### 1.14. Волны в дискретных цепочках

**167.** Обобщенная радиотехническая цепочка, по которой могут распространяться волны, имеет вид, показанный на рис. 1.17. Здесь  $Z$  — обобщенный комплексный импеданс, а  $Y$  — обобщенная комплексная проводимость. Найдите для нее закон дисперсии.

**168.** Получите закон дисперсии для системы из задачи 167 в случае, когда длина волны гораздо больше периода цепочки.

**169.** Имеются радиотехнические цепочки, составленные из емкостей и индуктивностей. Одно звено каждой цепочки показано на рис. 1.18 а)-д). Считая справедливым длинноволновое приближение, для каждой цепочки:

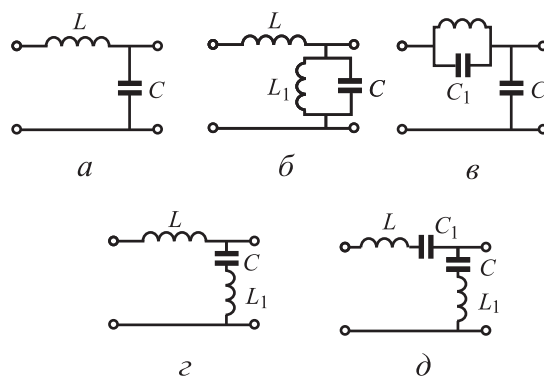


Рис. 1.18. К задаче 169

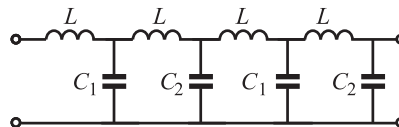


Рис. 1.19. К задаче 170

- 1). Найдите и нарисуйте закон дисперсии.
- 2). Постройте графики зависимости фазовой и групповой скорости от волнового числа.
- 3). Получите приближенный закон дисперсии для очень длинных волн ( $k \rightarrow 0$ ).

**170.** В LC-цепочке, показанной на рис. 1.19 величины емкости меняются с периодом в 2 звена и равны  $C_1, C_2, C_1, C_2, \dots$  и так далее. Найдите закон дисперсии в такой системе и нарисуйте дисперсионный характеристики.

**171.** Предположим, что по LC-цепочке, изображенной на рисунке 1.18,а, распространяется волна с фиксированной частотой  $\omega$ . В приближении, что длина волны гораздо больше, чем размер одного звена цепочки, получите непрерывный аналог дискретных уравнений.

**172.** В непрерывном пределе уравнения из задачи 171 соответствуют распространению волны на заданной частоте в так называемой двухпроводной линии, имеющей погонную емкость  $\bar{C}$  и погонную индуктивность  $\bar{L}$ . Эти уравнения описывают распространение одной Фурье-гармоники. Произведя обратное Фурье преобразование, получите систему уравнений, описывающие волны напряжения и тока в пространственно - временном представлении.

**173.** Уравнения, полученные в задаче 172, называются телеграфными. Какая дисперсионная характеристика им соответствует? Покажите, что исключив из телеграфных уравнений ток или напряжение, можно получить линейное волновое уравнение второго порядка.

**174.** Предположим, что по длинной линии, описываемой телеграфными уравнениями, распространяется возмущение, представляющее собой волну, бегущую в положительном направлении оси  $x$ . Найдите связь между амплитудами волн напряжения и тока. Как изменится ответ, если волна бежит в отрицательном направлении оси  $x$ ?

**175.** Пусть двухпроводная линия полубесконечна и в сечении  $x = 0$  она закорочена. Из  $-\infty$  в положительном направлении бежит волна с ам-

плитудой  $V_-$ . Чему равна амплитуда отраженной волны? Как изменится ответ, если линия при  $x = 0$  разомкнута?

**176.** Полубесконечная длинная линия с погонными емкостью  $\hat{C}$  и индуктивностью  $\hat{L}$  нагружена на параллельный колебательный контур с емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ . (рис. 1.20). Из  $-\infty$  в положительном направлении бежит волна с амплитудой  $V_-$ . Чему равна амплитуда отраженной волны? Найдите коэффициент отражения  $\Gamma = V_-/V_+$  в зависимости от частоты. Нарисуйте зависимости модуля и фазы коэффициента отражения от частоты.

### 1.15. Колебания и волны в ограниченных системах

**177.** Оцените силу натяжения рояльной струны, издающей звук ля первой октавы.

**178.** В некоторых озерах, имеющих сильно вытянутую форму, наблюдается явление, называемое сейши. Оно состоит в том, что поверхность воды в озере совершает колебания, напоминающие колебания в стакане с чаем, когда его подносят к столу. При этом колебания в двух точках, расположенных на противоположных удаленных берегах озера, происходят в противофазе. Объясните это явление и найдите частоту колебаний. Средняя глубина озера  $H$ , длина вдоль вытянутой стороны —  $L$ . Проведите численную оценку периода колебаний для  $L = 50$  км,  $H = 50$  м.

**179.** Найдите собственные типы колебаний (то есть собственные частоты и собственные векторы) системы из  $N$  идентичных связанных маятников, если два крайних маятника закреплены. Длины всех маятников  $l$ , массы  $m$ , жесткость соединяющих пружинок  $k$ .

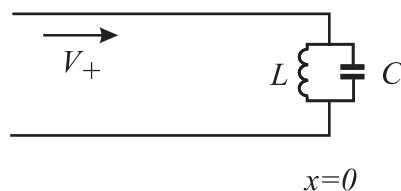


Рис. 1.20. К задаче 176

**180.** Найдите собственные типы колебаний (то есть собственные частоты и собственные векторы) системы из  $N$  идентичных связанных маятников, если два крайних маятника свободны. Длины всех маятников  $l$ , массы  $m$ , жесткость соединяющих пружин  $k$ .

**181.** Найдите частоты колебаний отрезка двухпроводной линии длиной  $l$ , если она замкнута на обоих концах. Погонные емкость и индуктивность линии  $\bar{C}$  и  $\bar{L}$ .

**182.** Длинная линия с погонными емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$  с одной стороны закорочена, а с другой нагружена на конденсатор  $C_0$ . Найдите наименьшую частоту колебаний в такой системе для случаев  $Cl \ll C_0$  и  $Cl \gg C_0$ .

**183.** Волны в натянутой струне описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,$$

где  $F(x, t)$  — смещение струны в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Струна длиной  $l$  жестко закреплена на обоих концах. Предполагая, что решение уравнения для колебаний струны может быть представлено в виде

$$F(x, t) = \operatorname{Re}\{e^{i\omega t} f(x)\},$$

найдите:

- а) дифференциальное уравнение которому подчиняется функция  $f(x)$ ;
- б) частоты колебаний  $\omega_n$ , которые могут существовать в такой системе;
- в) распределение профиля струны  $f_n(x)$  (собственные функции) на этих частотах.
- г) Покажите, что собственные функции  $f_n(x)$  из предыдущей задачи удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_0^l f_n(x) f_m(x) dx = 0, \quad \text{если } n \neq m.$$

**184.** Прделайте решение задачи 183 для случаев, когда граничные условия на концах струны имеют вид:

$$y(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

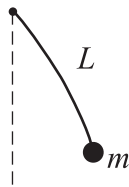


Рис. 1.21. К задаче 186

что соответствует струне, закрепленной на одном конце и свободной на другом, и

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

что соответствует струне, свободной на обоих концах.

**185.** Однородная струна длины  $L$  подвешена вертикально за один из концов. Найдите частоты собственных колебаний струны при малых отклонениях от положения равновесия.

**186.** Однородная струна, имеющая массу  $M$  и длину  $L$  подвешена вертикально за один из концов. На другом конце струны закреплен шарик массы  $m$  (рис. 1.21). Найдите частоты собственных колебаний струны при малых отклонениях от положения равновесия.

**187.** Круглая труба длиной  $L$  и радиуса  $R$  открыта с одного конца и закрыта с другого. Найдите частоту звуковых колебаний, возбуждаемых в трубе. Скорость звука  $c_0$ . Как изменится ответ, если труба открыта с обоих концов?

**188.** Круглая труба длиной  $L$  и радиуса  $R$ ,  $R \ll L$  открыта с обоих концов. Найдите частоту звуковых колебаний, возбуждаемых в трубе. Скорость звука  $c_0$ .

**189.** Круглая труба длиной  $L$  и радиуса  $R$ ,  $R \ll L$  открыта с одного конца и закрыта с другого. Оцените добротность звуковых колебаний, возбуждаемых в трубе. Скорость звука  $c_0$ . Вязкостью воздуха пренебречь.

**190.** Оцените наименьшую частоту колебаний круглой капли жидкости под действием собственных капиллярных сил. Капля находится в невесомости. Проведите численную оценку для капли воды радиуса 5 см.

**191.** Найдите собственные частоты колебаний круглой капли жидкости под действием собственных гравитационных сил. Капля находится в невесомости.

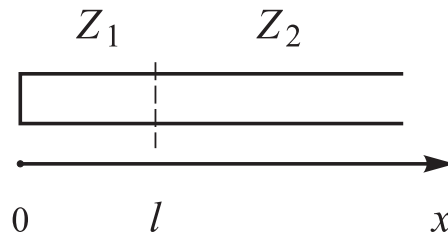


Рис. 1.22. К задаче 197

**192.** Резиновая мембрана натянута на круглую рамку радиуса  $R$ . Найдите собственные частоты колебаний мембраны, если известно, что поверхностная плотность резины равна  $\rho$ , а натяжение —  $T$ .

**193.** Волны Де-Бройля, описывающие квантомеханическое поведение электрона, подчиняются уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

где  $\Psi(x, t)$  — волновая функция. Считая, что электрон находится между двумя стенками, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга, найдите частоты колебаний волновой функции и спектр возможных энергий электрона. Спином электрона пренебречь.

**194.** Электрон находится в ящике, имеющим форму цилиндра длиной  $L$  и радиуса  $R$ . Вычислите собственные значения энергии электрона. Спином электрона пренебречь.

**195.** С помощью акустического источника на поверхности воды в ванночке прямоугольной формы возбуждаются стоячие волны. Найдите частоты, для которых такое явление возможно. Стороны ванночки  $a$  и  $b$ . Вода глубокая.

**196.** Найдите частоты колебаний акустического резонатора в форме сферы радиуса  $R$ .

**197.** Найдите комплексные собственные частоты колебаний в открытом резонаторе, образованном расширением коаксиальной линии (см. рис. 1.22). С левого конца линия закорочена. Длина резонатора  $l$ . Скорости распространения волн в обоих участках линии одинаковы, а волновые сопротивления при  $0 < x < l$  и при  $l < x < \infty$  равны соответственно  $Z_1$  и  $Z_2$ , причем  $Z_1 > Z_2$ .



## 1.16. Математическое дополнение

**198.** Используя формулу Тейлора, покажите, что  $\sin x \approx x - x^3/6$ . Используя эту аппроксимацию, найдите приближенное значение  $\sin(2^\circ)$ . Сравните с точным значением. Постройте графики функций  $y = \sin x$  и  $y = x - x^3/6$ . В какой области они совпадают, а в какой нет?

**199.** Покажите, что функция  $y = \sin x/x$  имеет бесконечное число экстремумов. Найдите координаты первых трех максимумов и трех минимумов (считая от начала координат). Постройте график функции.

**200.** Исследуйте уравнение  $px = \sin x$  при  $p > 0$ . Постройте график этого уравнения и убедитесь, что при уменьшении параметра  $p$  растет число корней. Установите интервалы значений параметра  $p$ , в пределах которых число корней уравнения не меняется.

**201.** Разложив функцию  $y = \sin y$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 5\pi/2$ , получите приближенные решения уравнения  $px = \sin x$ . При каких значениях параметра  $p$  существуют такие решения? Сравните результат с найденным численно в задаче 200 пороговым значением  $p$ .

**202.** Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что сумма диагональных элементов произвольной матрицы равна сумме ее собственных значений, а определитель матрицы равен их произведению. Проверьте выполнение этих свойств для матрицы  $\hat{A}$ .

**203.** Пусть для матрицы  $A$  порядка  $2 \times 2$   $\det A = 1$ . Покажите, что если  $|\operatorname{Sp} A| > 2$ , матрица имеет собственное число, превышающее по модулю 1.

**204.** Вычислите  $(1 + i)^{1999}$

**205.** С помощью формулы Эйлера получите тригонометрические формулы для  $\sin 3\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\sin(\alpha - \beta)$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$ .

**206.** С помощью формулы Эйлера вычислите сумму

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin N\alpha.$$

**207.** Используя метод комплексных амплитуд, покажите, что сумма двух гармонических колебаний  $x_1(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1)$  и  $x_2(t) = b \cos(\omega t + \varphi_2)$  тоже является гармоническим колебанием. Определите амплитуду

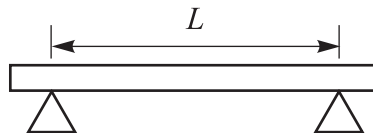


Рис. 1.23. К задаче 215

и фазу суммарного сигнала. Рассмотрите частный случай, когда  $x_1(t) = a \sin(\omega t)$  и  $x_2(t) = b \cos(\omega t)$

**208.** Используя формулу Эйлера, получите формулу для производной косинуса и синуса.

**209.** Вычислите интеграл

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx$$

**210.** Материальная точка движется по окружности радиуса  $r$  с угловой скоростью  $\omega$ . Введите комплексную координату точки  $z$  и получите закон ее изменения со временем. Рассмотрите частные случаи, когда начальные координаты точки равны  $(1,0)$ ,  $(0,-1)$ ,  $(2,2)$ . Покажите, что комплексная координата удовлетворяет уравнению  $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ .

**211.** Чем отличаются движения  $z = e^{i\omega t}$ ,  $z = re^{-i\omega t}$ ?

**212.** Частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется в плоскости  $xy$ . Магнитное поле  $B$  перпендикулярно этой плоскости. Покажите, что комплексная координата точки удовлетворяет уравнению  $\ddot{z} - i\omega\dot{z} = 0$ . Покажите, что решение этого уравнения имеет вид  $z = re^{i\omega t}$  и определите  $\omega$ .

**213.** Используя, что умножение комплексной координаты на  $e^{i\varphi}$  эквивалентно повороту системы координат на угол  $\varphi$ , получите матрицу, описывающую преобразование декартовых координат  $x$  и  $y$  при повороте.

**214.** Как расположены на комплексной плоскости относительно точки  $z$  точки  $x^*$ ,  $iz$ ,  $-iz$ ,  $-iz^*$ ?

**215.** Балка массы  $M$  лежит на двух симметрично расположенных узких опорах (см. рис. 1.23). Напишите формулу для давления, оказываемого на нижнюю поверхность балки, как функцию координаты  $x$ . Ширина балки  $a$ .

**216.** Напишите выражение для электрического поля как функции координаты  $x$ , вдоль оси, перпендикулярной плоскому конденсатору с очень узким зазором. Емкость конденсатора  $C$ , заряд на его пластинах  $q$ .

**217.** Два одинаковых шара с массами  $m$  движутся навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , упруго сталкиваются и разлетаются. Напишите формулу для силы взаимодействия  $F(t)$ . Координаты шаров в момент времени  $t = 0$  равны  $x_1$  и  $x_2$ .

**218.** В вершинах квадрата со стороной  $a$  расположены точечные заряды величины  $q$ . Напишите выражение для поверхностной плотности заряда  $\sigma$  и объемной плотности заряда  $\rho$ .

**219.** Установите вид функции  $\theta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ .

**220.** Выразите функцию  $\text{sign } x$  через функцию  $\theta(x)$ . Вычислите производную от функции  $\text{sign } x$

**221.** Представьте прямоугольный импульс

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > T, \\ f, & 0 < t < T, \end{cases}$$

в виде комбинации двух функций  $\theta(t)$ .

**222.** Постройте графики следующих функций:  $y = |x|$ ,  $y = [x]$ ,  $y = x$ . Здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ,  $x$  — дробная часть числа  $x$ . Вычислите производные:  $d|x|/dx$ ,  $d^2|x|/dx^2$ ,  $d[x]/dx$ ,  $d\{x\}/dx$ .

**223.** Решите уравнения

$$\begin{aligned} \text{а). } & \frac{df}{dt} - i\Omega f = \delta(t), \quad f|_{t<0} = 0, \\ \text{б). } & \frac{df}{dt} - i\Omega f = \theta(t), \quad f|_{t<0} = 0. \end{aligned}$$

**224.** Найдите преобразование Фурье для следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а). } & f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \\ \text{б). } & f(t) = \begin{cases} te^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \\ \text{в). } & f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq \tau, \\ 0, & |t| > \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

**225.** Докажите, что если функция  $f(t)$  имеет фурье-образ  $f_\omega$ , то функция  $f(at)$  имеет фурье-образ  $|a|^{-1}f_{\omega/a}$ .

**226.** Докажите, что

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt.$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что по определению  $\delta$ -функции  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$  при любом  $\varepsilon > 0$  и, кроме того,  $\int_{-\infty}^{\infty} (\sin t/t) dt = \pi$ .

**227.** Используя результат задачи 226, докажите формулы обратного преобразования Фурье.

**228.** Даны следующие варианты прямого преобразования Фурье. Напишите соответствующие формулы для обратного преобразования:

$$\begin{aligned} \text{а). } & \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \\ \text{б). } & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \\ \text{в). } & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \end{aligned}$$

**229.** Докажите, что функция  $f(t) = 1/(t^2 + \tau^2)$  имеет фурье-образ  $f_\omega = \pi e^{-|\omega|\tau}$ .

**230.** Вычислите преобразование Фурье для функций  $e^{i\omega t}$ ,  $\cos \Omega t$ ,  $\cos^2 \Omega t$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t - nT)$ .

**231.** Найдите функцию  $f(t)$ , которой отвечает фурье-образ в виде  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\Omega)$ . Покажите, что функция  $f(t)$  периодична и найдите ее период. Определите коэффициенты ряда Фурье, в который разлагается функция  $f(t)$ .

**232.** Сколько членов содержит ряд Фурье для следующих функций:  $\sin \Omega t$ ,  $\cos^n \Omega t$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t - nT)$ ?

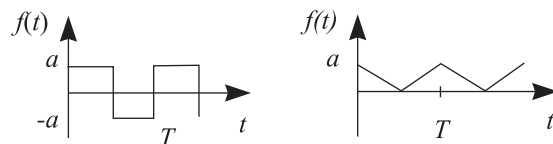


Рис. 1.24. К задаче 233

**233.** Разложите в комплексный ряд Фурье и в ряд Фурье по синусам и косинусам периодические функции, показанные на рис. 1.24

**234.** Функция  $f(t)$  равна нулю вне отрезка длины  $T$  и ее фурье-образ есть  $f_\omega$ . Найдите коэффициенты ряда Фурье периодической функции  $F(t)$ , полученной периодическим продолжением функции  $f(t)$ .

**235.** Докажите, что если  $n$ -ая производная функции  $f(t)$  имеет разрыв, то фурье-образ  $f_\omega$  при больших  $\omega$  спадает как  $1/\omega^{n+1}$ . Проверьте этот результат для функций из задачи 224.

**236.** Разложите периодическую функцию  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$  в ряд Фурье.

**237.** Оцените интегралы

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \sin(bx^2) e^{-ax^2} dx,$$

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}}{\sqrt{b^2 + x^2}} dx.$$

в пределах  $a \gg b$  и  $b \gg a$ . Сравните ваши ответы с точными значениями интегралов.

**238.** Используя интегральное представление функции Бесселя

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin t) dt$$

методом стационарной фазы получите ее асимптотическое разложения при  $z \rightarrow \infty$ .

**239.** Используя интегральное представление функции Эйри

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(tz + \frac{t^3}{3}\right) dt$$

методом перевала получите ее асимптотическое разложения при  $z \rightarrow \pm\infty$ .

**240.** Найдите функцию  $f(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t - \tau)}{\tau^2 + a^2} d\tau = \frac{1}{t^2 + b^2}.$$

При каких соотношениях между  $a$  и  $b$  существует решение?

## Глава 2.

# Ответы и решения

### 2.1. Физические примеры осцилляторов.

#### Период и частота колебаний

4. При отклонении шарика от положения равновесия на малую величину  $x$  можно считать, что сила натяжения жгута практически не изменилась. В то же время появилась возвращающая сила  $T$ , которая, как это следует из рис. 2.1, равна  $T \approx 4Fx/l$ . Поэтому уравнение движения шарика имеет вид  $m\ddot{x} = -4F/lx$  и частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{4F/ml}$ . При уменьшении силы натяжения  $F$  частота колебаний стремится к нулю.

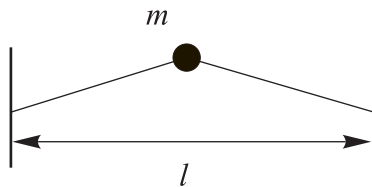


Рис. 2.1. К решению задачи 4

7.  $t = \pi\sqrt{R/g} \approx 42$  мин

8. При изменении размеров шарика в  $n$  раз его масса увеличивается в  $n^3$  раз. Изменение жесткости пружины можно определить из соображений размерности. Рассмотрим все геометрически подобные пружины,

выполненные из материала с модулем Юнга  $E$ . Коэффициент жесткости таких пружин будет определяться только модулем Юнга и характерным линейным размером  $L$ , в качества которого можно выбрать любой из геометрических размеров, например радиус или длину. Кроме модуля Юнга, свойства однородной деформации изотропного упругого тела определяется еще одним параметром — коэффициентом Пуассона  $\nu$ , связывающим деформации цилиндрического бруска под действием приложенного напряжения в продольном и поперечном направлениях. Он, однако, является безразмерным, поэтому можно записать  $k = CE^\alpha L^\beta$ , где  $C(\nu)$  — безразмерная величина. Из сравнения размерности справа и слева получаем  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ , то есть  $k \sim L$ . Таким образом жесткость пружины изменяется в  $n$  раз. Отсюда для периодов колебаний двух систем  $T_2/T_1 = n$ .

10.  $T \sim E^{1/3} \rho^{1/2} p^{-5/6}$

12.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$

13.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_1 + I_2)\xi}}$

14.  $T = 2\pi \sqrt{1/\frac{3g}{2} + \frac{3k}{m}}$

15. Если горизонтальный стержень поворачивается на угол  $\varphi$ , то два вертикальных отклоняются на угол  $\varphi/2$ . Момент инерции стержня относительно конца равен  $I_1 = ml^2/3$ , а момент инерции относительно центра стержня равен  $I_2 = ml^2/12$ . В этом случае кинетическую энергию системы можно записать как

$$K = 2 \frac{I_1 (\dot{\varphi}/2)^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ml^2}{8} \dot{\varphi}^2,$$

а потенциальная энергия равна

$$\Pi = \frac{1}{2} [2mg \frac{l}{2} (\varphi/2)^2 + mgl (\varphi/2)^2] = mgl \frac{(\varphi)^2}{2}.$$

Поэтому период колебаний равен  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$

16.  $\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$

17. Рассмотрим общий случай движения частицы массы  $m$  в одномерном потенциале  $U(x)$ , имеющим минимум в точке  $x_0$ . Разложим потенциальную энергию в ряд Тейлора вблизи минимума, ограничившись двумя



первыми неисчезающими членами ряда:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2},$$

При малых отклонениях частицы от положения равновесия можно записать закон сохранения энергии в виде  $m\xi^2/2^2 + k\xi^2/2 = \text{const}$ , где  $\xi = x - x_0$  и  $k = (d^2U/dx^2)_{x=x_0}$ . Отсюда следует, что вблизи минимума колебания частицы происходят по гармоническому закону с частотой  $\omega = \sqrt{U''(x_0)/m}$  и с периодом  $T = 2\pi\sqrt{m/U''(x_0)}$ .

Применим этот результат к условиям данной задачи. В случае а) потенциал имеет минимум в точке  $x_0 = l$  и  $U''(l) = 6U_0/l^2$ . Поэтому

$$T = 2\pi\sqrt{6U_0/ml^2}.$$

В случае б) минимум потенциала достигается в точке  $x = \sqrt[6]{2}b$  а вторая производная функции  $U(x)$  в этой точке равна  $36 \cdot 2^{2/3}a/b^2$ . Поэтому период колебаний вблизи минимума составляет

$$T = 2^{2/3} \frac{\pi b}{6} \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

**19.** Известно, что при движении в поле центральных сил, для радиальной составляющей движения можно пользоваться понятием эффективного потенциала [2], который равен

$$U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2},$$

где  $L$  — момент импульса. Так как равновесная орбита имеет радиус  $a$ , то эффективный потенциал при  $r = a$  должен иметь минимум:  $U'_{\text{эф}}(a) = 0$ . Подставляя сюда  $U(r) = Kr^3$ , получаем, что  $L^2 = 3mKa^5$ . Вторая производная потенциала вблизи минимума равна  $U''_{\text{эф}}(a) = 15Ka$ . Используя результат задачи 17, приходим к выводу, что период радиальных колебаний частицы равен  $T = 2\pi\sqrt{m/(15Ka)}$ .

**20.** Обозначим искомый период через  $T$ . Рассчитаем разность  $\Delta T = T - T_0$ . Выберем некоторый угол  $\beta$  такой, что  $\alpha \ll \beta \ll 1$ . и обозначим время, за которое маятник, первоначально отклоненный на угол  $\alpha$ , достигает угла  $\beta$  через  $t_1$ , а время, за которое он достигает того же угла, будучи отклоненным на угол  $\alpha/2$ , — через  $t_2$ .

Покажем, что  $\Delta T \approx 4(t_2 - t_1)$ . Это означает, что в обоих случаях время, необходимое маятнику, чтобы пройти от угла  $\beta$  до нижнего устойчивого положения равновесия почти одно и тоже. Это время выразить через интеграл:

$$\tau = \int_{\beta}^{\pi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}(\varphi)},$$

где  $\dot{\varphi}(\varphi)$  — угловая скорость маятника, когда его отклонение от верхнего положения равновесия составляет угол  $\varphi$ . Заметим, что  $\tau$  ограничено сверху четвертью периода колебаний маятника, который отклонили на угол  $\beta$  от верхнего положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Запишем соотношение, связывающее угловые скорости маятника в первом и втором случае при одном и том же  $\varphi$ . Как следует из закона сохранения энергии,  $\dot{\varphi}_2^2(\varphi) = \dot{\varphi}_1^2(\varphi) + \dot{\varphi}_2^2(\alpha)$  (индекс 1 соответствует первому случаю, 2 — второму). Если  $\varphi \gg \alpha$ , то  $\dot{\varphi}_2(\varphi) \gg \dot{\varphi}_2(\alpha)$ , и тогда это соотношение можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\dot{\varphi}_1(\varphi)} - \frac{1}{\dot{\varphi}_2(\varphi)} \approx \frac{\dot{\varphi}_2^2(\alpha)}{2\dot{\varphi}_2^2(\varphi)} \frac{1}{\dot{\varphi}_2(\varphi)}.$$

Подставляя в выражение для  $\tau$ , получим

$$\tau_1 - \tau_2 \approx \int_{\beta}^{\pi} \frac{\dot{\varphi}_2^2(\alpha)}{2\dot{\varphi}_2^2(\varphi)} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_2(\varphi)} \leq \frac{\dot{\varphi}_2^2(\alpha)}{2\dot{\varphi}_2^2(\beta)} \tau_2.$$

Величины  $v_2(\beta)$  и  $\tau_2$  конечны, а  $\dot{\varphi}_2^2(\alpha) = (g/l)(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/4)) \approx (3g/l)\alpha^2/16$ . Поэтому  $\tau_1 \approx \tau_2$  с точностью до первого порядка малости по  $\alpha$ .

Теперь рассчитаем  $t_1$  и  $t_2$ . Так как мы считаем, что  $\beta$  мало, то на всем участке движения маятника вплоть до угла  $\beta$ , можно использовать линеаризованные уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \varphi = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Теперь нетрудно получить, что  $t_1 = \omega_0^{-1} \ln(k + \sqrt{k^2 - 1})$ ,  $t_2 = \omega_0^{-1} \ln(2k + \sqrt{4k^2 - 1})$ , где  $k = \beta/\alpha$ . Учитывая, что  $\beta \gg \alpha$ , получаем  $t_2 - t_1 \approx \omega_0^{-1} \ln 2$ .

Окончательный ответ:  $T \approx T_0 + 4\sqrt{l/g} \ln 2$ .

**21.** Закон сохранения энергии при движении частицы массы  $m$  в одномерном потенциале  $U(x)$  имеет вид

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \mathcal{E} = \text{const},$$

откуда  $\dot{x} = \sqrt{2[\mathcal{E} - U(x)]/m}$ . Если  $U(x) = k|x|^n$ , то период колебаний равен

$$T = 4 \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{2[\mathcal{E} - U(x)]/m}} = 4\sqrt{\frac{m}{2k}} A^{1-n/2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^n}},$$

где  $A$  — максимальное отклонение осциллятора (или амплитуда колебаний), которая связана с полной энергией соотношением  $kA^n = \mathcal{E}$ . Из формулы для периода следует, что при  $n = 2$  он не зависит от амплитуды (изохронные колебания). Если  $1 < n < 2$ , то период колебаний уменьшается при  $A \rightarrow 0$ , если  $n > 2$ , то период колебаний увеличивается при  $A \rightarrow 0$ .

**23.** Запишем закон сохранения энергии для движения бусинки. Поскольку движение не является одномерным, у скорости бусинки есть две компоненты: вертикальная и горизонтальная. С учетом этого, закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + mgkx^2 = \mathcal{E}$$

( $\mathcal{E}$  — полная энергия). Так как проволочка жесткая, то  $x$  и  $y$ -координаты бусинки связаны между собой, так что  $\dot{y} = y'(x)\dot{x} = 2kx\dot{x}$ . Поэтому можно записать

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} (1 + 4k^2x^2) + mgkx^2 = \mathcal{E}.$$

Это соотношение является уравнением траекторий на фазовой плоскости. Если энергия колебаний очень мала ( $2kx \ll 1$ ), то фазовая траектория близка по форме к эллипсу  $m(gkx^2 + \dot{x}^2/2) = C$ . Следовательно период малых колебаний совпадает с периодом колебаний на эллипсе. Если же амплитуда колебаний велика, то фазовая траектория лежит внутри эллипса, соответствующего колебанию гармонического осциллятора с той же энергией, и касается его в точках пересечения с осями координат (см. рис. 2.2). При любом значении координаты  $x$ , кроме точек максимального отклонения и нуля, скорость бусинки меньше, чем

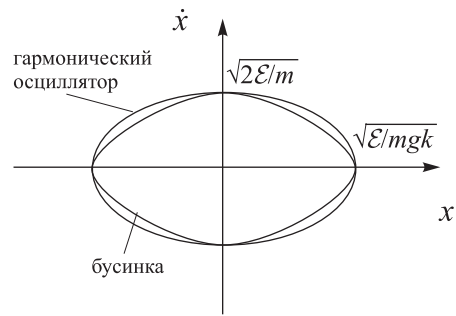


Рис. 2.2. К решению задачи 23.

соответствующая скорость гармонического осциллятора, поэтому период обращения по такой траектории больше, чем период колебаний гармонического осциллятора. Следовательно период растет с увеличением амплитуды.

## 2.2. Свободный осциллятор

**25.**  $V(t) = V(0) \cos \omega t$ ,  $I(t) = \omega CV_0 \sin \omega t$ , где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 6.28 \cdot 10^5$  рад/с. Максимальный заряд на конденсаторе равен  $Q_m = V(0)C = 1.6 \cdot 10^{-7}$  Кл.

**26.**  $\mathcal{E} \sim 0.3$  Дж;  $N \sim 10^{33}$

**27.** Воспользуемся концепцией эффективного потенциала (см. решение задачи 19). Потенциальная энергия спутника в гравитационном поле Земли равна  $U(r) = -GMm/r$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Земли. Поэтому для эффективной потенциальной энергии можно записать

$$U_{\text{эф}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

где  $L$  — момент импульса. Радиус стационарной круговой орбиты, по которой первоначально вращается спутник, найдем из условия  $U'_{\text{эф}}(R) = 0$ , откуда следует, что  $L^2 = GMm^2R$ . Разложим функцию  $U_{\text{эф}}(r)$  в ряд вблизи точки  $r = R$ , ограничившись квадратичным членом разложения

$$U_{\text{эф}}(r) \approx U_{\text{эф}}(R) + \frac{GMm}{2R^3}(r - R)^2.$$

Вблизи минимума потенциала спутник совершает малые радиальные колебания с частотой  $\omega = \sqrt{U''_{эф}(R)/m}$  (см. решение задачи 17), или  $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ . Эту величину можно выразить через ускорение свободного падения  $g$  на поверхности Земли, если учесть, что  $g = GM/R_0^2$ ,  $R_0$  — радиус Земли. Тогда

$$\omega = \frac{R_0}{R} \sqrt{\frac{g}{R_0}}.$$

Нетрудно убедиться, что период этих колебаний совпадает с периодом обращения спутника по круговой орбите радиуса  $R$ . Это естественно, так как в гравитационном поле замкнутая траектория движения материальной частицы должна быть эллипсом, поэтому при небольшом возмущении круговая орбита переходит в эллипс практически с тем же периодом обращения.

Отклонение спутника от первоначальной орбиты  $\tilde{r}(t) = r(t) - R$  подчиняется уравнению гармонического осциллятора с частотой  $\omega$ , его решение при заданных начальных условиях  $\tilde{r}(0) = 0$ ,  $\dot{\tilde{r}}(0) = \Delta P/m$  равно

$$\tilde{r}(t) = \frac{\Delta P}{m\omega} \sin \omega t.$$

Максимальное отклонение спутника от центра Земли произойдет через четверть периода обращения, оно равно  $r_{\max} = R + \Delta P/(m\omega)$ , а наиболее близко спутник будет к Земле через три четверти периода, в этой точке  $r_{\min} = R - \Delta P/(m\omega)$ . Отсюда следует, что большая полуось эллипса повернута относительно направления от центра Земли к точке, где произошло включение двигателя, на угол  $90^\circ$ .

Отметим, что найденные в этом приближении значения полуосей эллипса совпадают с  $R$ , поскольку при малом эксцентриситете  $\varepsilon$  они отличаются друг от друга на величину второго порядка малости по  $\varepsilon$ . Тем не менее, в этом приближении можно найти сам эксцентриситет. Для этого заметим, что один из фокусов эллипса, в котором находится центр Земли, сдвинут относительно центра симметрии траектории на величину  $\Delta P/(m\omega)$ . Из аналитической геометрии известно, что это расстояние равно равняется  $\varepsilon a$  ( $a$  — большая полуось). В нашем приближении  $a = R$ , поэтому окончательно  $\varepsilon = \Delta P/(m\omega R)$ .

**29.**  $Q = 455$ ,  $d = 6.9 \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma = 1.54 \cdot 10^{-3}$ .

**30.**  $C = 1/(2\pi f R Q) \approx 3.2 \cdot 10^{-9}$  Ф,  $L = R Q / (2\pi f) \approx 8 \cdot 10^{-4}$  Гн.

**31.** Выделившееся тепло совпадает с работой силы трения за один период, поэтому можно записать

$$Q = \int_t^{t+T} v F_{mp} dt = \lambda \int_t^{t+T} v^2 dt.$$

Вместо точного вычисления этого интеграла воспользуемся условием, что добротность колебаний велика. Значит можно считать, что в течении одного периода колебаний их амплитуда  $A$  неизменна, поэтому при вычислениях можно положить  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  и  $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Тогда интеграл легко вычисляется, что дает  $Q = \lambda T \omega^2 A^2 / 2$ . Пусть среднее значение энергии колебаний осциллятора есть  $\bar{W}$ . Тогда можно записать закон сохранения энергии в виде

$$\bar{W}(t+T) - \bar{W}(t) = -Q, \quad \text{или} \quad \frac{d\bar{W}}{dt} = -\lambda k A^2 / (2m).$$

При переходе к последнему соотношению мы использовали то обстоятельство, что средняя энергия мало меняется за один период колебаний. Так как  $\bar{W} = kA^2/2$ , то мы получаем  $d\bar{W}/dt = -2\gamma\bar{W}$ , где  $\gamma = \lambda/(2m)$ . Решение этого уравнения есть  $\bar{W}(t) = \bar{W}(0) \exp(-2\gamma t)$ , следовательно амплитуда колебаний меняется по закону  $A(t) = A(0) \exp(-\gamma t)$ .

Разумеется, тот же самый результат следует непосредственно из решения уравнений движения осциллятора.

**36.** Запишем уравнение движения электрона осциллятора в виде

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = \frac{e^2}{c^3} \ddot{\ddot{x}},$$

где слагаемое в правой части отвечает силе радиационного трения. Переходя к безразмерному времени  $\tau = \omega t$ , получаем безразмерное уравнение движения:

$$-\alpha \frac{d^3 x}{d\tau^3} + \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = 0.$$

где  $\alpha = 2e^2\omega/(3mc^2) \approx 6.26 \cdot 10^{-9}$ . Характеристическое уравнение для этого дифференциального уравнения имеет вид  $-\alpha p^3 + p^2 + 1 = 0$ , причем коэффициент при старшей степени очень мал. Поэтому для нахождения корней можно воспользоваться методом возмущений. В нулевом приближении  $p = \pm i$ , в следующем порядке ищем решение в виде  $p = \pm i + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \sim \alpha$ . Подставляя это выражение в характеристическое

уравнение, получаем  $p_{1,2} = \pm i + \alpha/2$ . Отметим, что имеется еще один действительный корень  $p \approx 1/\sqrt[3]{\alpha}$ , который очень велик, и, очевидно, не имеет отношения к колебательному движению<sup>1</sup>.

Возвращаясь в размерным переменным, получаем, что зависимость координаты электрона от времени описывается соотношением

$$x(t) = Ae^{-\alpha\omega t/2} \cos(\omega t - \varphi).$$

поэтому коэффициент затухания осциллятора равен  $\gamma = e^2\omega^2/3mc^3$ . Добротность колебаний есть  $Q = \omega/(2\gamma) = 3mc^3/(e^2\omega) \approx 1.59 \cdot 10^8$ . Энергия колебаний осциллятора равна  $W = m\omega^2 a^2/2$ , а за период колебаний излучается энергия  $\Delta W = 2\pi W/Q = 2\pi\omega^3 e^2 a^2/(3c^3)$ . Подставляя числовые значения, получим  $\Delta W \approx 1.8 \cdot 10^{-28}$  Дж. Энергия колебаний уменьшится вдвое за время  $\Delta t = \gamma^{-1} \ln 2 = 5.5 \cdot 10^{-8}$  с.

### 2.3. Вынужденные колебания

**37.**  $\bar{\mathcal{E}}_\kappa = m\omega^2 A^2/4$ ,  $\bar{\mathcal{E}}_n = mkA^2/4$ . Эти выражения записаны для случая осциллятора в виде шарика массы  $m$  на пружинке жесткостью  $k$ ,  $\omega$  — частота внешнего гармонического сигнала. Отсюда  $\bar{\mathcal{E}}_\kappa/\bar{\mathcal{E}}_n = m\omega^2/k = \omega^2/\omega_0^2$ .

**41.** Уравнение гармонического осциллятора под действием внешней силы с частотой  $\omega$  и амплитудой  $f_0$  имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t).$$

Его вынужденное решение, полученное методом комплексных амплитуд, есть  $x(t) = A \cos(\omega t + \psi)$ , где

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \\ \cos \psi &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \\ \sin \psi &= \frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Существование этого корня связано с известным парадоксом классической электродинамики, состоящем в самоускорении заряженной частицы под действием собственного поля. На самом деле, выражение для силы радиационного трения само получено как разложение по степеням временных производных координаты частицы  $dx^n/dt^n$  и является приближенным. Поэтому этот корень не имеет физического смысла.

Если  $\omega \ll \omega_0$ , то с точностью до линейных членов по  $\omega$  эти формулы дают  $A = f_0/\omega_0^2$ ,  $\psi = 0$ . Если же  $\omega \gg \omega_0$ , то  $A = f_0/\omega^2$ ,  $\psi = -\pi$ .

Эти же соотношения можно получить непосредственно из уравнения гармонического осциллятора.

Если  $\omega \ll \omega_0$ , то первые два слагаемых в левой части этого уравнения малы по сравнению с третьим. В случае механического осциллятора это означает, что при медленном движении упругая сила доминирует над силами инерции и трения: она одна практически полностью компенсирует внешнюю силу. Действительно, по порядку величины можно записать  $F_{ин} \sim \omega^2 x$ ,  $F_{тр} \sim \gamma \omega x$ ,  $F_{упр} \sim \omega_0^2 x$ , откуда следует сделанное утверждение. Поэтому  $\omega_0^2 x(t) \approx f_0 \cos \omega t$ , т.е.  $A \approx f_0/\omega_0^2$ ,  $\psi \approx 0$ .

Напротив, если частота внешней силы очень велика ( $\omega \gg \omega_0$ ), то доминирующей является сила инерции, в этом случае, пренебрегая трением и силой упругости, получаем  $\ddot{x}(t) = f_0 \cos \omega t$ . Дважды интегрируя по времени, приходим к формуле:  $x(t) \approx -f_0/\omega^2 \cos \omega t$ , т.е.  $A \approx f_0/\omega^2$ ,  $\psi \approx -\pi$ .

42.  $A/A_{пола} = (\omega_0/\omega)^2 = 0.01$ .

44. Уравнение гармонического осциллятора с  $\delta$ -образной внешней силой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = p\delta(t).$$

Проинтегрируем его по бесконечно малому промежутку времени, содержащему момент  $t = 0$ . Используя основное свойство  $\delta$ -функции, получаем

$$\dot{x}(+0) - \dot{x}(-0) + \omega^2 \int_{-0}^{+0} x(t) dt = p.$$

Интеграл слева равен нулю, так как функция  $x(t)$  — непрерывная (в противном случае потребовалась бы бесконечно большая мощность внешнего, воздействия, чтобы за бесконечно малый промежуток времени изменить координату осциллятора на конечную величину). Если осциллятор до воздействия импульса покоился, то  $\dot{x}(-0) = 0$ , следовательно его координата останется равной нулю, а скорость сразу после импульса станет равной  $\dot{x}(+0) = p$ . Решение уравнения консервативного осциллятора с такими начальными условиями есть

$$x(t) = \frac{p}{\omega} \sin \omega t.$$



**45.** Отклик осциллятора на единичный  $\delta$ -образный импульс был найден в задаче 44. Воспользуемся свойством линейности системы и сразу запишем отклик для случая, когда последовательно действуют  $N$   $\delta$ -образных импульсов:

$$x(t) = \frac{p}{\omega} \sum_{k=0}^{N-1} \sin \omega(t - kT)$$

Сумму проще всего вычислить с помощью формулы  $\sin \alpha = \text{Im}[\exp(i\alpha)]$ . Обозначим  $\omega T = \alpha$ . Тогда

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin \omega(t - kT) = \text{Im} \left( \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\omega(t-kT)} \right) = \text{Im} \left( e^{i\omega t} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-i\alpha k} \right)$$

Последняя сумма есть геометрическая прогрессия, которая равна

$$e^{-i(N/2-1)\alpha} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$x(t) = \frac{p}{\omega} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \sin \left[ \omega t - \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \alpha \right].$$

Амплитуда колебаний после окончания действия всех толчков равна

$$A = \frac{p}{\omega} \left| \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \right|.$$

График функции  $\sin(N\omega T/2)/\sin(\omega T/2)$  для  $N = 10$  приведен на рис. 2.3.

**46.** Условие  $v \gg l\omega_0$ , означает, что скорость “электрона” настолько велика, что за время его пролета осциллятор не успевает заметно сдвинуться из положения равновесия. Поэтому переданный ему импульс со стороны пролетающего “электрона” равен

$$\Delta P = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2(t)}} \frac{e^2}{l^2 + y^2(t)} dt.$$

Здесь  $y(t)$  — закон движения пролетающего “электрона”. В первом приближении можно полагать  $y(t) = vt$ , т.е. считать, что взаимодействие

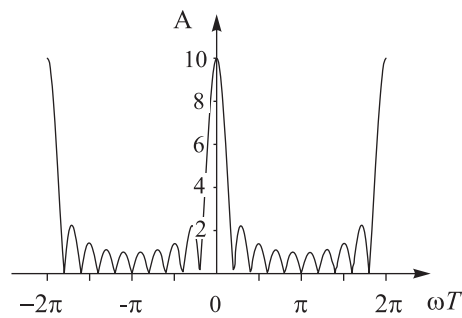


Рис. 2.3. К решению задачи 45.

между зарядами не влияет на движение “электрона”; тогда интеграл вычисляется элементарно, он равен  $\Delta P = 2e^2/(vl)$ .

Переданный осциллятору импульс возбуждает в нем колебания с амплитудой  $A = \Delta P/(m\omega_0) = 2e^2/(vlm\omega_0)$ .

49. Найдем разложение внешней периодической силы  $F(t)$  в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi nt}{T},$$

Коэффициенты Фурье определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  Подставляя конкретный вид функции  $F(t)$ , и вычисляя эти интегралы, получаем:

$$a_0 = f_0/2, \quad a_n = 0, \text{ при } n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{2f_0}{\pi n}, \text{ при } n = 1, 3, 5, \dots, \quad b_n = 0, \text{ при } n = 2, 4, 6, \dots$$

По условиям задачи осциллятор высокочастотный, поэтому из всего Фурье-спектра можно оставить только резонансное слагаемое с  $n = 1$ , а смещение положения равновесия обусловлено постоянной составляющей силы  $f_0/2$ . Следовательно вместо всего Фурье ряда можно учитывать только эти два слагаемых, положив

$$F(t) \sim \frac{f_0}{2} + \frac{2f_0}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Первое слагаемое вызывает смещение положения равновесия на  $\Delta = f_0/(2\omega^2)$ . Частота второго находится точно в резонансе с осциллятором, поэтому амплитуда отклика осциллятора на эту силу равна  $A = 2f_0Q/(\pi\omega^2)$

## 2.4. Неустойчивость

50.  $\omega < \sqrt{g/l}$ .

51. Круговая орбита будет устойчива, если эффективный потенциал радиального движения

$$U_{\text{эф}}(r) = -\frac{cm}{r^n} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

имеет минимум. Вычисляя производные потенциала, находим,

$$U'_{\text{эф}}(r) = \frac{nCm}{r^{n+1}} - \frac{L^2}{mr^3}, \quad U''_{\text{эф}}(r) = -\frac{n(n+1)Cm}{r^{n+2}} + \frac{3L^2}{mr^4}.$$

Момент импульса  $L$  определяется из условия, что радиус круговой орбиты  $R$  должен совпадать с экстремумом потенциала, отсюда можно найти  $L^2 = nCm^2/R^{n-2}$ . Подставляя это соотношение в  $U''_{\text{эф}}(r)$ , получаем

$$U''_{\text{эф}}(r) = \frac{Cm}{R^{n+2}} [-n(n+1) + 3n]$$

Потенциал имеет минимум, если  $U''_{\text{эф}}(r) > 0$ , т.е. или при выполнении условия  $0 < n < 2$ .

52. Обозначим искомое время через  $T$ . Максимальный угол отклонения  $\varphi(T) = 100\varphi_0 = 1^\circ$  очень мал, поэтому для описания движения маятника можно использовать линеаризованное уравнение:

$$\ddot{\varphi} - \omega_0^2\varphi = 0, ,$$

где  $\varphi$  — угол отклонения от верхнего положения равновесия,  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Решение этого уравнения, подчиняющееся необходимым начальным условиям есть  $\varphi(t) = \varphi_0[\exp(\omega_0 t) + \exp(-\omega_0 t)]/2$ . При  $t = T$  получаем уравнение

$$e^{\omega_0 T} + e^{-\omega_0 T} = 200.$$

Очевидно, что первое слагаемое значительно больше второго, поэтому

$$T \approx \frac{1}{\omega_0} \ln 200 = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln 200 = 1.69 \text{ с.}$$

**54.** Выясним, как выглядит потенциальная яма, для чего найдем две первые производные функции  $U(x)$ :

$$U'(x) = \frac{U_0}{l} [3(x/l)^3 - p], \quad U''(x) = \frac{6U_0 x}{l^3}.$$

Очевидно, что при  $p > 0$  функция  $U(x)$  имеет экстремумы, расположенные в точках  $x = \pm l\sqrt{p/3}$ . Левый из этих экстремумов соответствует максимуму, а правый — минимуму потенциала. Вид потенциальной ямы показан на рис. 2.4 Неустойчивое положение равновесия соответствует максимуму  $U(x)$ , поэтому оно существует только при  $p > 0$ . В точках экстремума вторая производная принимает значения  $\pm 2\sqrt{3p}U_0/l^2$  (верхний знак соответствует минимуму), потому, вводя вблизи точки минимума новую переменную  $\xi = x - x_{min}$ , для нее получаем уравнение  $\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$ , где  $\omega^2 = U''(x_{min})/m$ ,  $m$  — масса частицы. Аналогично вблизи максимума потенциала,  $\xi = x - x_{max}$ , и  $\ddot{\xi} - \omega^2 \xi = 0$ .

**55.** Используем для исследования устойчивости состояния равновесия динамической системы критерий Рауса-Гурвица, который состоит в следующем. Пусть характеристическое уравнение системы, линеаризованной вблизи точки равновесия, имеет вид

$$\Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (1)$$

причем  $a_0 > 0$ . Уравнение (1) имеет  $n$  корней  $p_m = \text{Re } p_m + i \text{Im } p_m$ . Задача об устойчивости сводится к оценке их расположения на комплексной плоскости  $p$ . Если все корни расположены в левой полуплоскости (слева от мнимой оси), то состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Если имеется хоть один корень в правой полуплоскости, то равновесие неустойчиво.

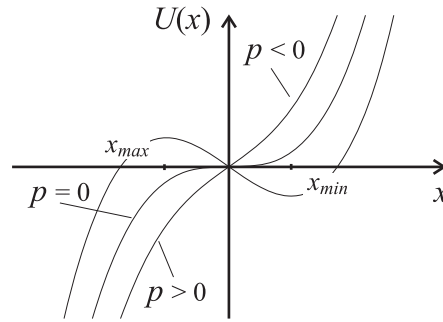


Рис. 2.4. К решению задачи 54.

Критерий устойчивости Рауса — Гурвица заключается в следующем. Для того чтобы все корни уравнения (1) имели отрицательные действительные части  $\operatorname{Re} p_m < 0$ , т.е. все корни многочлена  $\Delta(p)$  лежали слева от мнимой оси), необходима и достаточна положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Структура матрицы Гурвица такова: по главной диагонали расположены коэффициенты (от  $a_1$  до  $a_n$ ) уравнения (1); столбцы содержат поочередно коэффициенты только с нечетными или только с четными индексами (включая  $a_0$ ); все недостающие элементы (коэффициенты с индексами, меньшими нуля или большими  $n$ ) заменяются нулями. Главные диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

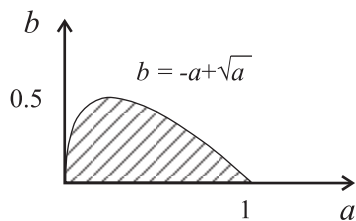


Рис. 2.5. К решению задачи 55.

Применим этот критерий к характеристическому уравнению

$$p^4 + (a + b)p^3 + p^2 + ap + b = 0.$$

Матрица Гурвица для него имеет вид

$$\begin{vmatrix} a + b & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a + b & 1 \\ 0 & b & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}.$$

а главные диагональные миноры равны  $\Delta_1 = a + b$ ,  $\Delta_2 = a$ ,  $\Delta_3 = b[a - (a + b)^2]$ ,  $\Delta_4 = b\Delta_3 = b^2[a - (a + b)^2]$ . Из условия положительности всех этих величин вытекает три независимых неравенства:

$$b > 0, \quad a + b > 0, \quad a - (a + b)^2 > 0.$$

Из последнего неравенства во всяком случае следует, что должно быть  $a > 0$ , поэтому второе неравенство также является следствием двух остальных. Третье неравенство, разрешенное относительно  $b$  дает  $-a - \sqrt{a} < b < -a + \sqrt{a}$ , но поскольку  $a, b > 0$ , то левая часть этих соотношений выполняется автоматически. Окончательно получаем условия, определяющие искомую область на плоскости параметров.

$$a > 0, \quad 0 < b < -a + \sqrt{a}.$$

На рис. 2.5 эта область заштрихована.

- 56.** 1.  $a > 0, b > 0$ ;  
 2.  $a > 0, b > 0$ ;  
 3.  $a > 0, b > 1/a$ ;  
 4.  $a > 0, b > 1/a + a$ .

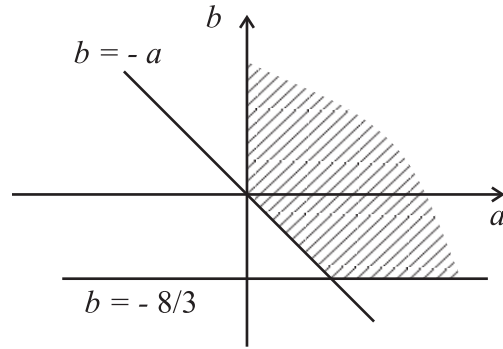


Рис. 2.6. К решению задачи 57.

**57.** Искомая область определяется системой неравенств

$$a > 0, \quad a > -b, \quad b > -8/3$$

На плоскости параметров  $(a, b)$  (рис. 2.6 соответствующая область заштрихована.

**58.** Выразим параметр  $\lambda$  из характеристического уравнения:  $\lambda = -1/p - 2/p^2 - 1/p^3 - 2/p^4 - 1/p^5$ . Подставляя  $p = i\omega$ , и разделяя действительную и мнимую части этого уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda' = \operatorname{Re} \lambda &= \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^4}, \\ \lambda'' = \operatorname{Im} \lambda &= \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^5}. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения задают в параметрической форме  $\lambda' = \lambda'(\omega)$ ,  $\lambda'' = \lambda''(\omega)$  кривую на плоскости  $(\lambda', \lambda'')$ , разделяющую области с различным числом корней характеристического уравнения, имеющих положительную действительную часть, или, другими словами, области с разным порядком неустойчивости.

Прежде всего заметим, что функция  $\lambda'(\omega)$  четная, а  $\lambda''(\omega)$  — нечетная относительно своего аргумента, это значит, что значениям  $\omega$ , отличающимся знаком, соответствуют точки на плоскости  $(\lambda', \lambda'')$ , симметрично расположенные относительно горизонтальной оси. Поэтому достаточно рассмотреть только положительные значения  $\omega$ . Исследуем асимптотическое поведение кривой при малых и больших значениях  $\omega$ .

При  $\omega \rightarrow 0$  из формул (1) следует, что  $\lambda' \sim -2\omega^{-4}$ ,  $\lambda'' \sim \omega^{-5}$  поэтому кривая вдали от начала координат ведет себя как  $\lambda'' \sim (-\lambda'/2)^{5/4}$ ,  $\lambda' \rightarrow$

$-\infty$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  кривая стремится к началу координат, при этом в формулах (1) слева можно оставить только первые слагаемые, что дает  $\lambda' \sim 2\omega^{-2}$ ,  $\lambda'' \sim \omega^{-1}$  или  $\lambda' \sim 2\lambda''^2$ .

Вычислим производную  $d\lambda''/d\lambda'$ . Используя правила дифференцирования параметрически заданной функции, получаем

$$\frac{d\lambda''}{d\lambda'} = \frac{\omega^4 - 3\omega^2 + 5}{4\omega^3 - 8\omega}.$$

Легко показать, что полином в числителе не имеет действительных корней, а знаменатель обращается в нуль при  $\omega = \pm\sqrt{2}$ . Поэтому искомая кривая имеет вертикальную касательную в точке с координатами  $(\lambda'(\sqrt{2}), \lambda''(\sqrt{2})) = (1/2, 3\sqrt{2}/8)$ , а горизонтальные касательные отсутствуют. Этим данным достаточно, чтобы качественно представить себе вид граничной кривой. С помощью компьютера ее можно построить более точно, результат такого построения показан на рис. 2.7.

Штриховкой показана та часть область, которая при движении вдоль кривой остается справа, когда в комплексной плоскости параметра  $p$  двигаемся вдоль мнимой оси от  $-i\infty$  до  $i\infty$ . При этом полуплоскость  $\text{Im } p > 0$  также остается справа. Таким образом, на плоскости  $\lambda$  при переходе из незаштрихованной области в заштрихованную порядок неустойчивости увеличивается на единицу. Осталось определить число корней характеристического уравнения с положительной действительной частью в какой-нибудь одной точке плоскости  $\lambda$ . Например при  $\lambda = 1$  найденные численно корни равны  $p_1 = -0.513376$ ,  $p_{2,3} = -0.65878 \pm i1.12403$ ,  $p_{4,5} = 0.415468 \pm i0.987388$ . Таким образом в этой точке имеется два корня с положительной действительной частью, следовательно порядок неустойчивости в незаштрихованной области равен  $D = 2$  а в заштрихованной  $D = 3$ .

**60.** Состояния равновесия определяются из решения системы уравнений

$$x^2 + y - 1 = 0, \quad xy = 0,$$

откуда следует, что существует три положения равновесия с координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ :  $P_1(0, 1)$ ,  $P_2(1, 0)$  и  $P_3(-1, 0)$ . Исследуем поведение системы вблизи каждой из этих точек, для чего линеаризуем исходные уравнения вблизи них, вводя новые координаты  $\xi = x - x_i$ ,  $\eta = y - y_i$ .

1. Для первой точки линеаризованные уравнения имеют вид

$$a\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = \xi,$$



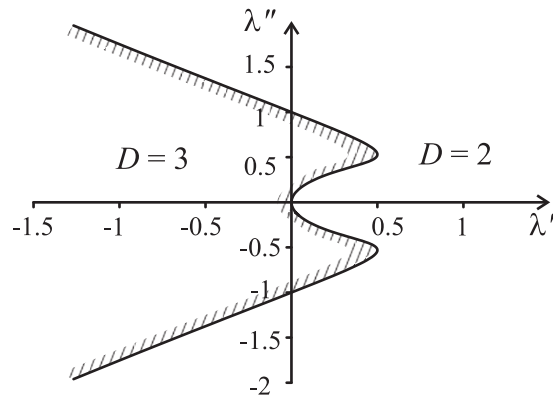


Рис. 2.7. К решению задачи 58.

Характеристическое уравнение для этой системы:  $ap^2 - 1 = 0$ . При  $a > 0$  оно имеет два действительных корня разных знаков:  $p_{1,2} = \pm\sqrt{1/a}$ , следовательно в этом случае точка  $P_1$  — седло. При  $a < 0$  имеем два чисто мнимых корня, поэтому линейного анализа недостаточно для вывода о типе особой точки (см. [8]) Дополнительный анализ, выходящий за рамки линейного приближения, позволяет показать, что эта особая точка — центр.

2. Вблизи точки  $P_2$  линеаризованные уравнения есть

$$a\dot{\xi} = 2\xi + \eta, \quad \dot{\eta} = \eta,$$

характеристическое уравнение:  $ap^2 - (a + 2)p + 2 = 0$ , его корни равны  $p_1 = 1, p_2 = 2/a$ , следовательно это неустойчивый узел при  $a > 0$  и седло при  $a < 0$ .

3. Аналогично для точки  $P_3$  получаем линейные уравнения

$$a\dot{\xi} = -2\xi + \eta, \quad \dot{\eta} = -\eta,$$

характеристическое уравнение  $ap^2 + (a + 2)p + 2 = 0$ , его корни  $p_1 = -1, p_2 = -2/a$ . Это устойчивый узел при  $a > 0$  и седло при  $a < 0$ .

**61.** Система имеет три положения равновесия: В точке  $P_1(0, 0)$  корни характеристического уравнения равны  $p_{1,2} = \pm 1/2$ , следовательно это седло. В точке  $P_2(1/2\beta, 0)$  получаем  $p_1 = -1/2, p_2 = +(1 - 2\alpha\beta)/[2(1 + 2\alpha\beta)]$ ,

оба корня отрицательны, — это устойчивый узел. В точке  $P_3(\alpha, \alpha(1 - 2\alpha\beta))$  характеристическое уравнение имеет вид  $8p^2 + (12\alpha\beta - 2)p - (2\alpha\beta - 1) = 0$ . Легко показать, что у этого уравнения корни чисто действительные, причем их произведение меньше нуля, следовательно  $P_3$  — седло.

**62.** Введем безразмерные переменные

$$y = (T - T_0)/(T_0 - T_1), \quad x = N/[k(T_0 - T_1)] - 1, \quad \tau = kt/mc.$$

В этих переменных уравнения динамики реактора примут вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = -r(x + 1)y, \quad \frac{dy}{d\tau} = x - y,$$

где  $r = \alpha mc(T_0 - T_1)/kl > 0$  — параметр. Здесь имеются две неподвижные точки:  $P_1(0, 0)$  и  $P_2(-1, -1)$ . Линеаризуя стандартным образом уравнения вблизи этих точек, и вычисляя корни характеристического уравнения, можно получить, что в точке  $P_1$  они равны  $p_{12} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4r})/2$ . При  $r < 1/4$  оба корня действительные и отрицательные, в этом случае  $P_1$  — устойчивый узел, при  $r > 1/4$  корни комплексно сопряженные с отрицательной действительной частью,  $P_1$  — устойчивый фокус.

Вблизи точки  $P_2$  корни характеристического уравнения есть  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = r$ , это седло.

**63.** Мальчик должен выпрямлять ноги в нижней точке траектории и приседать в моменты максимального отклонения качелей.

**64.** Пусть  $q$  — заряд на конденсаторе. В те моменты, когда емкость конденсатора скачком меняется, заряд остается неизменным, так же, как и ток в контуре, поэтому функции  $q(t)$  и  $\dot{q}(t)$  — непрерывные. Для описания динамики системы введем вектор-столбец  $x_n = [q_n, \dot{q}_n/\omega_0]^T$ , где индекс  $n$  соответствует значению каждой переменной в моменты переключения емкости,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ ,  $T$  — знак транспонирования. В промежутках между этими моментами динамика системы задается формулой

$$q(t) = q_n \cos \omega(t - t_n) + \frac{\dot{q}_n}{\omega} \sin \omega(t - t_n), \quad n\tau < t < (n + 1)\tau.$$

Здесь  $\omega$  — текущее значение частоты колебаний. В матричной форме можно записать:

$$x_{n+2} = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 \tau & \frac{\omega_0}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau \\ -\frac{\omega_2}{\omega_0} \sin \omega_2 \tau & \cos \omega_2 \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega_1 \tau & \frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau \\ -\frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \omega_1 \tau & \cos \omega_1 \tau \end{pmatrix} x_n \quad (1)$$

где  $\omega_{1,2} = 1/\sqrt{LC_{1,2}}$  (мы считаем, что в момент  $n$  значение емкости изменилось со значения  $C_2$  на значение  $C_1$ ). Легко проверить, что детерминант каждой из матриц в этой формуле равен единице, поэтому равен единице и детерминант матрицы произведения, которую будем обозначать через  $[A]$ . Матрица  $[A]$  определяет отображение динамических переменных за период изменения параметра системы. Наличие неустойчивости зависит от того, имеет ли матрица  $[A]$  собственные числа, по модулю большие единицы. Легко показать, что для матрицы второго порядка с единичным детерминантом это реализуется, если  $|\text{Sp}[A]| > 2$ , где  $\text{Sp}$  — след матрицы (докажите это утверждение!).

Граница между устойчивым и неустойчивым поведением системы определяется уравнением  $|\text{Sp}[A]| = 2$ , или

$$\begin{aligned} & \left| 2 \cos \omega_1 \tau \cos \omega_2 \tau - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1 \omega_2} \sin \omega_1 \tau \sin \omega_2 \tau \right| = \\ & = \left| \left( 1 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} \right) \cos(\omega_1 + \omega_2)\tau + \left( 1 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} \right) \cos(\omega_1 - \omega_2)\tau \right| = 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем безразмерный параметр  $\varepsilon = \Delta C/C_0 \ll 1$ , тогда

$$\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1 - \varepsilon/2} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_0/\sqrt{1 + \varepsilon/2}.$$

Раскладывая необходимые выражения в ряд по степеням  $\varepsilon$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} &= 1 + \varepsilon^2/8 + O(\varepsilon^4), \\ \omega_1 + \omega_2 &= 2\omega_0 + 3\omega_0 \varepsilon^2/16 + O(\varepsilon^4), \\ \omega_1 - \omega_2 &= \omega_0 \varepsilon/2 + 5\omega_0 \varepsilon^3/64 + O(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (2), преобразуем его к виду

$$\left| \cos 2\omega_0 \tau + [(\cos 2\omega_0 \tau - 1) - 3\omega_0 \tau \sin 2\omega_0 \tau] \frac{\varepsilon^2}{16} \right| = 1 \quad (3)$$

Слагаемое, пропорциональное  $\varepsilon^2$ , мало, поэтому уравнение может иметь корни только если  $|\cos(2\omega_0 \tau)| \approx 1$ , т.е. при  $\omega_0 \tau \approx \pi n/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Пусть  $n = 1$ ; положим  $\omega_0 \tau = \pi/2 + \delta$ ,  $|\delta| \ll 1$ . Тогда разложение выражения, стоящего под знаком модуля, в ряд по степеням  $\delta$ , дает  $(-1 + 2\delta^2 - \varepsilon^2/8 + \dots)$ . Очевидно, что при малых  $\varepsilon$  и  $\delta$  решение существует только для отрицательного знака модуля, поэтому  $\delta \approx \pm \varepsilon/4$ . Эта

формула дает границы зоны неустойчивости основного параметрического резонанса.

Аналогично действуем при  $n = 2$ , положив  $\omega_0\tau = \pi + \delta$ . Тогда под знаком модуля стоит величина  $(1 - 2\delta^2 - 3\pi/8\delta\varepsilon^2 + \dots)$ . Отсюда  $\delta_0 \approx 0$  и  $\delta_2 \approx -3\pi\varepsilon^2/16$ . Форма зоны неустойчивости несимметрична, в отличие от зоны основного резонанса, при этом ширина зоны  $\sim \varepsilon^2$ .

Легко видеть, что для всех нечетных  $n$  качественно получаются те же самые результаты, что и для  $n = 1$ : вблизи острия “клюва” границы зоны близки к прямым и его форма симметрична. Для всех четных  $n$  получаемые результаты качественно совпадают с результатами для  $N = 2$ .

**66.** Уравнение колебаний в контуре имеет вид

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2(1 - \varepsilon \cos pt)q = 0, \quad (1)$$

где  $q$  — заряд на конденсаторе,  $\omega = 1/\sqrt{LC_0}$ ,  $\varepsilon = \Delta C/C_0 \ll 1$ ,  $\gamma = \omega/(2Q)$  — коэффициент затухания. Заменой переменных  $q(t) = \exp(-\gamma t)x(t)$  это уравнение преобразуется в

$$\ddot{x} + \omega^2(1 - \varepsilon \cos pt)x = 0, \quad (2)$$

где  $\omega^2 = \omega_0 - \gamma^2$ . Так как добротность контура велика, то разницей между  $\omega$  и  $\omega_0$  будем пренебрегать.

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$x(t) = \frac{1}{2}A(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

причем комплексную амплитуду  $A(t)$  можно считать медленно меняющейся во времени величиной. Ее изменение описывает возможную неустойчивость в системе, а также смещение частоты колебаний относительно собственной частоты контура  $\omega_0$ . К.с. обозначает комплексно сопряженные величины. Вычислим производные от  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{2} \left[ i\omega_0 A(t) + \dot{A}(t) \right] e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}, \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{2} \left[ -\omega_0^2 A(t) + 2i\omega_0 \dot{A}(t) + \ddot{A}(t) \right] e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Так как, по предположению, амплитуда  $A(t)$  медленно меняется, величиной  $\ddot{A}(t)$  можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми. Под-

ставляя эти формулы в уравнение (2), получим

$$2i\omega_0\dot{A}(t)e^{i\omega_0 t} - \frac{\omega_0^2\varepsilon}{2}(e^{ipt} + e^{-ipt})A(t)e^{i\omega_0 t} - \\ - 2i\omega_0\dot{A}^*(t)e^{-i\omega_0 t} - \frac{\omega_0^2\varepsilon}{2}(e^{ipt} + e^{-ipt})A^*(t)e^{-i\omega_0 t} = 0.$$

Поделим это соотношение на  $\exp(i\omega_0 t)$  и усредним по времени  $2\pi/p$ . Все слагаемые, содержащие быстро меняющиеся экспоненты при этом обратятся в нуль, кроме содержащего экспоненту  $\exp[i(p-2\omega_0)t]$ , так как по условиям задачи  $p \approx 2\omega_0$ , и этот член не является осциллирующим. В результате усреднения получаем уравнение

$$\dot{A}(t) + \frac{i\omega_0\varepsilon}{4}A^*(t)e^{i(p-2\omega_0)t} = 0. \quad (3)$$

Введем обозначение  $\omega_0 - p/2 = \delta$  и новую переменную  $a(t) = A(t)\exp(i\delta t)$ . Для нее уравнение записывается так:

$$\dot{a}(t) - i\delta a(t) + \frac{i\omega_0\varepsilon}{4}a^*(t) = 0.$$

Представим это уравнение в действительной форме, положив  $a(t) = a'(t) + ia''(t)$ . Для действительных функций  $a'(t)$  и  $a''(t)$  получаем систему связанных уравнений

$$\dot{a}'(t) + \left(\delta + \frac{\omega_0\varepsilon}{4}\right)a''(t) = 0, \\ \dot{a}''(t) - \left(\delta - \frac{\omega_0\varepsilon}{4}\right)a'(t) = 0. \quad (4)$$

Решение будем искать в виде  $a'(t), a''(t) \sim \exp(\lambda t)$ , тогда из (4) следует условие существования нетривиального решения в виде

$$\begin{vmatrix} \lambda & \delta + \omega_0\varepsilon/4 \\ -\delta + \omega_0\varepsilon/4 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

или  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{(\omega_0\varepsilon/4)^2 - \delta^2}$ . Для того, чтобы в системе возникла неустойчивость, необходимо, чтобы  $|\lambda| > \gamma$ . Граница зоны неустойчивости определяется уравнением  $\gamma^2 = (\omega_0\varepsilon/4)^2 - \varepsilon^2$  или

$$(\delta/\omega_0)^2 = (\varepsilon/4)^2 - 1/(2Q)^2, \quad (5)$$

На плоскости параметров  $(\delta/\omega_0, \varepsilon)$  это гипербола, вершина которой находится в точке  $(0, 2/Q)$  (см. рис. 2.8). Минимальное значение модуляции

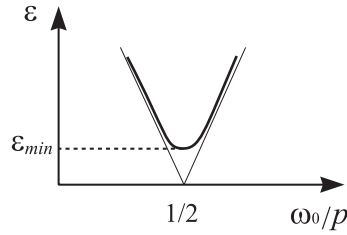


Рис. 2.8. К решению задачи 66.

емкости, при котором возможно возникновение неустойчивости, достигается при  $\delta = 0$ , оно равно  $\varepsilon_{min} = 2/Q$

**67.**  $A = -\pi \Delta C / C_0 \sin 2\varphi W$ , где  $\varphi$  — сдвиг фазы между законом изменения емкости и напряжением на ней.

**68.**  $\Delta C / C_0 > 2/Q$ .

**70.** В неинерциальной системе отсчета, связанной с колеблющимся подвесом, уравнение движения маятника вблизи верхнего положения равновесия выглядит следующим образом

$$\ddot{x} - (\omega_0^2 + \alpha p^2 \cos pt)x = 0,$$

где  $\alpha = a/l$ . Перепишем его в виде

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = f(x, t) = \alpha x p^2 \cos pt.$$

Мы получаем ситуацию, когда внешняя воздействие зависит не только от времени, но и от координаты осциллятора. Для построения приближенного решения воспользуемся условием  $p \gg \omega_0$ . Представим движение осциллятора в виде суммы:  $x(t) = y(t) + \xi(t)$ , где  $\xi$  есть малая, но быстро осциллирующая добавка к сравнительно медленно меняющемуся  $y$ , обусловленная колебаниями подвеса. Делая соответствующую подстановку, получим уравнение

$$\ddot{y} + \ddot{\xi} - \omega_0^2(y + \xi) = f(y + \xi, t).$$

Произведем усреднение по интервалу времени  $\tau = 2\pi/p$ :

$$\ddot{y} - \omega_0^2 y = \overline{f(y + \xi, t)}, \quad (1)$$

(черта обозначает операцию усреднения) и вычтем усредненное уравнение из исходного. В результате получаем:

$$\ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi = f(y + \xi, t) - \overline{f(y + \xi, t)}. \quad (2)$$

Заметим, что на временах порядка  $\tau$  величину  $y$  можно считать постоянной. Используя это обстоятельство, в уравнении (1) правую часть можно заменить на  $h(y) = \overline{\xi \partial f / \partial x}$ , а в уравнении (2) — на  $f(y, t)$ . Тогда из (2), пренебрегая слагаемым, пропорциональным  $\omega_0^2$  (так как  $\omega_0 \ll p$ ), получаем

$$\ddot{\xi}_1 = f(y, t) = \alpha y p^2 \cos pt,$$

откуда  $\xi \approx \xi_1 = -\alpha y \cos pt$ . Вычисляя величину  $h(y)$ , получаем, что уравнение (1) приобретает вид:

$$\ddot{y} + (\alpha^2 p^2 / 2 - \omega^2) y = 0.$$

Из этого уравнения следует, что верхнее положение равновесия становится устойчивым при  $ap > \sqrt{2Tg}$ .

## 2.5. Связанные колебания

**80.**  $\omega_1^2 = 0$ ,  $[X]_1 = [1, 1, 1]^T$ ;  $\omega_2^2 = k/m$ ,  $[X]_2 = [1, 0, 1]^T$ ;  $\omega_3^2 = 2k/m$ ,  $[X]_3 = [1, -1, 1]^T$ .

**82.** Так как считается, что колебания балки малы, а ее концы могут смещаться только в вертикальном направлении, в системе существует две собственные моды. Основная моды (с меньшей частотой) такова, что балка совершает только поступательное движение, так что смещения обоих концов балки в любой момент времени одинаковы. Собственная частота таких колебаний равна  $\omega_1 = \sqrt{k/M}$ , а собственный вектор  $[X]_1 = [1, 1]^T$ . Для колебаний со второй собственной частотой центр тяжести балки остается неподвижным, а балка совершает вращательное движение вокруг него. Собственная частота этих колебаний равна  $\omega_2 = \sqrt{6k/M}$ , а собственный вектор  $[X]_2 = [1, -1]^T$ . Используя эти сведения, законы движения концов балки можно выразить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [X]_1 (a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \sin \omega_1 t) + [X]_2 (b_1 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t).$$

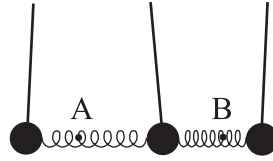


Рис. 2.9. К решению задачи 83.

Коэффициенты  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  находим из начальных условий, откуда получаем  $a_1 = b_1 = a/2$ ,  $a_2 = b_2 = 0$ . Окончательно запишем законы смещения концов балки во времени:

$$x_1(t) = \frac{a}{2} \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + \cos \sqrt{\frac{6k}{m}}t \right),$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t - \cos \sqrt{\frac{6k}{m}}t \right).$$

**83.** Система имеет три собственные моды. Две из них легко определить из соображений симметрии. Мода с наименьшей собственной частотой отвечает симметричному движению всех маятников, когда все пружинки остаются ни сжатыми, ни растянутыми. Частота этой моды  $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ , а собственный вектор  $[X]_1 = [1, 1, 1]^T$ . Вторая мода такова, что средний маятник остается неподвижным а крайние совершают колебания с частотой  $\omega_2 = \sqrt{g/l + k/m}$  в противофазе друг другу. Собственный вектор для этой моды  $[X]_2 = [1, 0, -1]^T$ .

Оставшуюся моду определим из следующих соображений. Предположим, что мы закрепили пружинки в точках А и В (см. рис. 2.9), которые делят их в пропорции 1/2 (длинные участки ближе к центральному маятнику). Тогда легко проверить, что получившиеся три несвязанных осциллятора имеют одну и ту же частоту собственных колебаний  $\omega_2 = \sqrt{g/l + 3k/m}$ . Это и есть частота третьей собственной моды. Чтобы возбудить ее в чистом виде, необходимо задать такие начальные смещения маятников, чтобы точки А и В в процессе колебаний оставались неподвижными. Очевидно, что это будет так, если задать, например,  $x_1(0) = x_3(0) = -2x_2(0)$ . Поэтому  $[X]_3 = [1, -2, 1]^T$ .

**84.** Воспользуемся общим методом расчета собственных типов колебаний в цепочке связанных осцилляторов, который применим также для



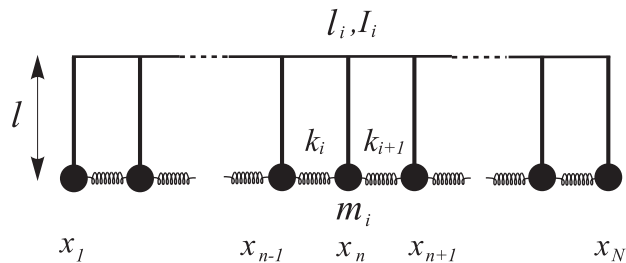


Рис. 2.10. К решению задачи 84.

случая неидентичных осцилляторов. Пусть цепочка состоит из  $N$  маятников, связанных пружинками (рис.2.10), причем каждый маятник имеет свою собственную массу  $m_i$ , момент инерции  $I_i$  и расстояние от точки подвеса до центра инерции  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Следовательно без пружинки каждый маятник имел бы свою собственную частоту  $\omega_{0i} = \sqrt{m_i g l_i / I_i}$ . Маятники связаны между собой пружинками, которые также могут быть неидентичными. Расстояние от точки подвеса маятников до точек прикрепления пружинки без ограничения общности можно считать у всех маятников одинаковым и равным  $l$ .

Обозначим угол отклонения  $i$ -го маятника через  $x_i$ . Тогда уравнения движения маятников запишутся в виде:

$$I_i \ddot{x}_i + m_i g l_i x_i = k_i l^2 (x_{i+1} - x_i) - k_{i-1} l^2 (x_i - x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \quad (1)$$

Уравнения для первого и последнего маятника зависят от того, как именно устроена система на концах. Если крайние маятники закреплены, то  $x_1 = 0$ ,  $x_N = 0$ . Если они свободны, как это показано на рис. 2.10, то для них следует записать такие же уравнения, как и для остальных маятников, считая, что  $k_0 = k_N = 0$ . Аналогично учитываются и более сложные типы граничных условий. Для определенности будем считать, что крайние маятники свободны.

Уравнения (1) удобно записывать в матричной форме, вводя вектор столбец  $[X] = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  и квадратные матрицы  $[K]$  и  $[M]$  поряд-

ка  $N$ :

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{I_1 \omega_{01}^2}{l^2} + k_1 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1 & \frac{I_2 \omega_{02}^2}{l^2} + k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \frac{I_3 \omega_{03}^2}{l^2} + k_2 + k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{N-1} & \frac{I_N \omega_{0N}^2}{l^2} + k_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$[M] = \begin{pmatrix} I_1/l^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2/l^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_3/l^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_N/l^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы называются, соответственно, матрицей жесткости и матрицей масс системы.

В матричных обозначениях уравнения динамики принимают вид

$$\frac{d^2}{dt^2} [M] [X] = [K] [X].$$

Собственные типы колебаний ищем, положив  $[X] = \text{Re}\{\exp(i\omega t) [\bar{X}]\}$ ,  $[\bar{X}] = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N]^T$  — вектор, составленный из комплексных амплитуд колебаний каждого осциллятора. Тогда вместо дифференциального уравнения получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно величин  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$ :

$$[K] [\bar{X}] = \omega^2 [M] [\bar{X}] \quad (2)$$

Нетривиальное решение этого уравнения существует, только если детерминант системы равен нулю, т.е. если

$$\text{Det}([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Раскрыв детерминант, приходим к характеристическому уравнению порядка  $N$  относительно  $\omega^2$ :

$$a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

здесь  $\lambda = \omega^2$ , коэффициенты  $a_i$  выражаются через элементы матриц  $[K]$  и  $[M]$ . Характеристическое уравнение имеет ровно  $N$  корней, которые

определяют собственные частоты колебаний системы. Вычислив одну из собственных частот  $\omega_i$  и подставив ее в уравнение (2), можно найти решение соответствующей однородной системы, т.е. определить компоненты собственного вектора  $[\bar{X}]_i$ , соответствующего этой собственной частоте.

Отметим, что в общем случае решение характеристического уравнения, определяющего собственные частоты невозможно провести. Отметим что в общем случае при  $N \geq 5$  корни алгебраического уравнения нельзя получить аналитически, поэтому для систем с большим числом осцилляторов необходимо пользоваться численными методами. Однако, если в системе есть симметрия, например если все осцилляторы одинаковы, то аналитическое решение возможно (см. задачи 179 и 180).

Вид матриц жесткости и масс существенно упрощается, если все маятники и пружинки одинаковы. Без ограничения общности маятники можно считать математическими, тогда

$$[K] = \begin{bmatrix} m\omega_0^2 + k & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & m\omega_0^2 + 2k & -k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k & m\omega_0^2 + 2k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -k & m\omega_0^2 + k \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & m \end{bmatrix} = m [I],$$

$[I]$  — единичная матрица,  $\omega^2 = g/l$ .

Вернемся к условию задачи. В этом случае  $N = 4$ , следовательно сразу можно записать алгебраическую проблему собственных значений:

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 + k/m & -k/m & 0 & 0 \\ -k/m & \omega_0^2 + 2k/m & -k/m & 0 \\ 0 & -k/m & \omega_0^2 + 2k/m & -k/m \\ 0 & 0 & -k/m & \omega_0^2 + k/m \end{bmatrix} [\bar{X}] = \omega^2 [I] [\bar{X}].$$

Это уравнение удобно преобразовать к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [\bar{X}] = \lambda [I] [\bar{X}] \quad (3)$$

где  $\lambda = m(\omega^2 - \omega_0^2)/k$ . Вычисляя детерминант уравнения, получаем характеристическое уравнение вида

$$\lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4) = 0. \quad (4)$$

Отсюда сразу получаем  $\lambda_1 = 0$  или  $\omega_1 = \omega_0$ . Первая собственная частота совпадает с частотой колебаний несвязанных маятников. Очевидно, что эта собственная мода отвечает синфазному колебанию всех маятников, когда пружинки не подвергаются сжатиям и растяжениям. Соответствующий собственный вектор есть  $[\bar{X}]_1 = [1, 1, 1]^T$ .

Оставшиеся три собственных числа есть корни полинома в скобках в (4). Для их определения обратимся к исходной системе и заметим, что еще одну собственную моду легко найти из соображений симметрии. Предположим, что в системе возбуждены такие колебания, что два крайних маятника совершают синфазные движения с одинаковой амплитудой, а два средних маятника движутся с той же самой амплитудой в противофазе к ним. Тогда центральная пружина остается нерастянутой, а у двух крайних пружин в процессе движения остаются неподвижными средние точки. Частота таких колебаний  $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ , что дает  $\lambda_2 = 2$ . Проверка показывает, что это действительно корень характеристического уравнения. Соответствующий собственный вектор равен  $[\bar{X}]_2 = [1, -1, -1, 1]^T$ .

Оставшиеся собственные числа определим, поделив полином (4) на  $\lambda(\lambda - 2)$ . Получаем квадратное уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$ , корни которого равны  $\lambda_{3,4} = 2 \mp \sqrt{2}$ . Частоты этих мод равны

$$\omega_{3,4} = \sqrt{\omega_0^2 + (2 \mp \sqrt{2}) \frac{k}{m}}$$

Собственные векторы можно вычислить, подставляя значения  $\lambda_{3,4}$  в уравнение (3). Опуская выкладки, приведем результат:

$$[\bar{X}]_3 = [1, -1, -1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}]^T, \quad [\bar{X}]_4 = [1, -1, -1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]^T,$$

**85.**  $\omega_1 = 2$ ,  $[\bar{X}]_1 = [1, 0, -1]^T$ ,  $\omega_2 = 2 - \sqrt{2}$ ,  $[\bar{X}]_2 = [1, \sqrt{2}, 1]^T$ ,  $\omega_3 = 2 + \sqrt{2}$ ,  $[\bar{X}]_3 = [1, -\sqrt{2}, 1]^T$ .

**87.** Уравнения, описывающие поведение системы проще всего получить, воспользовавшись методом Гамильтона. В качестве обобщенных координат выберем заряд на конденсаторе и расстояние от электрона до одной из пластин плоского конденсатора, потенциал которой будем считать

равной нулю. Полная функция Гамильтона системы состоит из гамильтониана свободного электрона, гамильтониана колебательного контура и гамильтониана взаимодействия:  $H = H_e + H_k + H_{\text{вз}}$ .

Для свободного электрона  $H_e = p^2/2m$ . Гамильтониан контура можно записать из следующих соображений. Известно, что гамильтониан гармонического осциллятора механической природы (например шарика на пружинке) имеет вид  $H_k = kx^2/2 + p^2/2m$ . С другой стороны, уравнения колебаний шарика на пружинке переходят в уравнения колебательного контура, если сделать замены  $x \rightarrow q$ ,  $\dot{x} \rightarrow I$ ,  $m \rightarrow L$ ,  $k \rightarrow 1/C$ , где  $I$  — ток в контуре,  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость. Поэтому функция Гамильтона колебательного контура равна  $H_k = q^2/(2C) + P^2/(2L)$ , где  $P = L\dot{q}$  — импульс, канонически сопряженный переменной  $q$ .

Осталось определить гамильтониан взаимодействия. Он равен энергии электрона в электрическом поле между пластинами конденсатора, или  $H_{\text{вз}} = eqx/(Cd)$ ,  $d$  — расстояние между пластинами. Теперь можно записать полную функцию Гамильтона:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{q^2}{2C} + \frac{P^2}{2L} + \frac{eqx}{Cd}.$$

Уравнения системы получаются из уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{eq}{Cd}, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{L}, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{C} - \frac{ex}{Cd}.\end{aligned}$$

Дифференцируя первое и третье уравнения и подставляя в них соответственно второе и четвертое, получаем систему связанных уравнений

$$\ddot{x} = -\frac{e}{mCd}q, \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = -\frac{e}{LCd}x,$$

$\omega_0^2 = 1/(LC)$ . Эта система описывает связанные колебания заряженной частицы и контура. Электрическое поле конденсатора, действуя на электрон, заставляет его “дрожать”, в свою очередь, за счет движения электрона наводится дополнительный ток в цепи контура, что приводит к его возбуждению.

Решение уравнений связанных колебаний ищем в виде

$$x(t) = \text{Re}[x_0 \exp(i\omega t)], \quad q(t) = \text{Re}[q_0 \exp(i\omega t)],$$

что приводит к системе

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & -e/(mCd) \\ -e/(LCd) & \omega^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ q_0 \end{bmatrix} = 0$$

Чтобы существовало нетривиальное решение этой системы, ее детерминант должен равняться нулю, откуда следует

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{e^2 \omega_0^2}{mCd^2}.$$

Поскольку конденсатор плоский, то  $C = \varepsilon_0 S/d$  (в системе Си); Введем, кроме того, плотность электронов внутри конденсатора  $n_0 = 1/(Sd) = 1/V$ . Тогда предыдущее уравнение можно представить в виде

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = \omega_0^2 \omega_p^2,$$

где  $\omega_p = \sqrt{e^2 n_0 / m \varepsilon_0}$  — ленгмюровская частота колебаний пространственного заряда. Как следует из проделанного вывода, это уравнение остается справедливым и для случая, когда внутри конденсатора находится много электронов, если пренебрегать кулоновским взаимодействием между ними. В частности, это выражение справедливо для разреженной плазмы, находящейся внутри металлического резонатора. Поскольку ионы обладают гораздо большей массой, чем электроны, они не участвуют в колебаниях, но зато эффективно экранируют электроны друг от друга.

Хотя частоты можно найти точно, естественно воспользоваться условием  $\omega \ll \omega_0$  которое очевидно выполняется, если в конденсаторе находится один электрон. Частота колебаний в контуре смещается очень мало относительно частоты  $\omega_0$ , поэтому, положив  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ , получим  $\delta\omega \sim \omega_p^2 / \omega_0$ . Вторую собственную частоту с необходимой точностью можно найти из условия, что произведение корней квадратного уравнения равно свободному члену. Отсюда  $\omega^2 = \omega_p^2$ . В случае плазмы, заполняющей резонатор, это решение соответствует ленгмюровским колебаниям плазмы, почти не связанным с колебаниями самого резонатора.

**86.** Прежде всего заметим, что в данной системе должно существовать всего 6 собственных типов колебаний и шесть собственных частот, по числу степеней свободы. Однако три частоты равно нулю, они соответствуют смещению системы как целое в  $x$  и  $y$  направлениях и равномерному вращению вокруг центра тяжести. При возбуждении остальных собственных мод импульс и момент импульса системы в целом должен

равняться нулю. Это накладывает определенную связь на координаты системы. В частности, если  $(x_i, y_i)$  — компоненты малого смещения каждого из шариков от положения равновесия, то должны выполняться соотношения

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Одну собственную моду легко определить из соображений симметрии. Очевидно, что таковой будет колебание, при котором каждый шарик вибрирует с одной и той же амплитудой вдоль направления биссектрисы угла треугольника, в вершине которого он находится. При смещении от положения равновесия на малую величину  $x \ll a$  ( $a$  — расстояние между шариками в положении равновесия) длина каждой пружины увеличивается на  $\Delta l = \sqrt{3}x$ . Поэтому кинетическая энергия всей системы равна  $3m\dot{x}^2/2$ , а потенциальная —  $9kx^2/2$ . Отсюда легко найти, что частота соответствующего колебания равна  $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$ .

Две другие ненулевые частоты колебаний найти сложнее, однако и здесь помогают соображения симметрии. Очевидно, что такое колебание должно оставлять один шариков в соответствующей плоскости симметрии системы, содержащей биссектрису угла, в вершине которого расположен шарик. Движения оставшихся шариков при этом будут зеркальным отражением друг друга в этой плоскости симметрии. Схематически такая собственная мода показана на рис. 2.11,а. Пунктиром на нем показано положение системы в равновесном состоянии, плоскость симметрии проходит через вторую вершину треугольника параллельно оси  $y$ . Для такого колебания выполняются соотношения

$$y_1 = y_3 \quad x_1 = -x_3, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -2y_1, \quad (1)$$

из которых следует, что существенных координаты всего две. В их качестве можно выбрать, например, координаты первого шарика  $x_1$  и  $y_1$ .

Выразим через них кинетическую и потенциальную энергию системы, считая, что  $x_1, y_1 \ll a$ . Простое вычисление, которое мы здесь опускаем, показывает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\kappa &= \frac{2m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{6m\dot{y}_1^2}{2}, \\ \mathcal{E}_n &= \frac{9kx_1^2}{4} + \frac{27ky_1^2}{4} - \frac{3\sqrt{3}kx_1y_1}{2}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, можно построить функцию Лагранжа системы  $\mathcal{L}(x_1, \dot{x}_1, y_1, \dot{y}_1) = \mathcal{E}_\kappa - \mathcal{E}_n$ , а затем получить уравнения динамики,

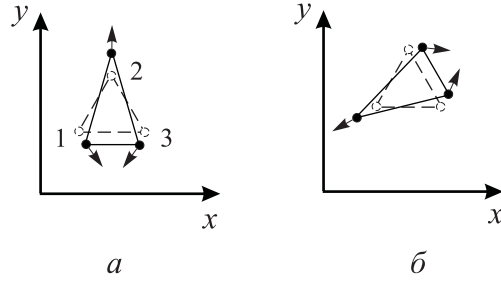


Рис. 2.11. К решению задачи 86.

которые имеют вид:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_1 &= -\frac{9k}{2}x_1 + \frac{3\sqrt{3}k}{2}y_1, \\ 6m\ddot{y}_1 &= -\frac{27k}{2}y_1 + \frac{3\sqrt{3}k}{2}x_1 \end{aligned}$$

Решение этой системы ищем, как обычно, в виде  $x_1, y_1 \sim \exp(i\omega t)$ , и получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 2m\omega^2 - 9k/2 & 3\sqrt{3}k/2 \\ 3\sqrt{3}k/2 & 6m\omega^2 - 9k/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Детерминант системы должен равняться нулю, что дает характеристическое уравнение  $6\omega^4 - (27k/m)\omega^2 + 27k^2/m^2 = 0$ . Его корни равны  $\omega_1^2 = 3k/m$ ,  $\omega_2^2 = 3k/(2m)$ . Вычисление соответствующих собственных векторов приводит к результату  $[x_1, y_1]_1^T = [1, \sqrt{3}/3]^T$  и  $[x_1, y_1]_2^T = [1, -\sqrt{3}/3]^T$ . Собственные векторы  $[X] = [x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]^T$ , дополненные значениями координат всех шариков, найденными из соотношений (1), имеют вид

$$\begin{aligned} [X]_1 &= [1, \sqrt{3}/3, 0, -2\sqrt{3}/3, -1, \sqrt{3}/3]^T, \\ [X]_2 &= [1, -\sqrt{3}/3, 0, 2\sqrt{3}/3, -1, -\sqrt{3}/3]^T. \end{aligned}$$

Очевидно, что первая из этих собственных мод совпадает с уже найденной нами из соображений симметрии, поэтому мы получили только одно дополнительное решение, соответствующее частоте  $\omega_2$ .

Однако сразу можно сказать, что третья собственная частота также должна равняться  $\omega_2$ :  $\omega_3 = \omega_2 = \sqrt{3k/(2m)}$ . Чтобы показать это, рассмотрим колебания, при которых на оси симметрии остается, например, первый шарик (см. рис. 2.11, б). Очевидно, что при этом мы снова



получим две собственные частоты, совпадающие с  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Соответствующие собственные векторы можно получить из  $[X]_1$  и  $[X]_2$  с помощью следующей процедуры.

Вектор с компонентами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  показывает направление смещения каждого шарика при возбуждении одной из собственных мод. Чтобы получить собственные векторы для “повернутой” системы, необходимо умножить вектор смещения каждого шарика на матрицу поворота на угол  $2\pi/3$  против часовой стрелки:

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = [U]_{2\pi/3} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix},$$

а затем циклически переставить индексы, нумерующие шарики, по правилу  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Пусть  $\hat{P}$  — знак такой операции. Тогда легко посчитать, что

$$\begin{aligned} [X]'_1 &= \hat{P} [X]_1 = [1, \sqrt{3}/3, 0, -2\sqrt{3}/3, -1, \sqrt{3}/3]^T, \\ [X]_3 &= \hat{P} [X]_2 = [0, 2\sqrt{3}/3, -1, -\sqrt{3}/3, 1, -\sqrt{3}/3]^T. \end{aligned}$$

Видно, что собственный вектор  $[X]'_1$  совпадает с  $[X]_1$ , в то время, как собственный вектор  $[X]_3$  является линейно независимым от  $[X]_1$  и  $[X]_2$ . По этой причине можно утверждать, что в системе существует вырождение: собственной частоте  $\omega_2$  отвечают два собственных вектора  $[X]_2$  и  $[X]_3$ . Следовательно полный спектр собственных частот таков:

$$\{0, 0, 0, \sqrt{3k/(2m)}, \sqrt{3k/(2m)}, \sqrt{3k/m}\}.$$

## 2.6. Волновое уравнение

**88.**  $\omega^2 = v^2 k^2$ . Это условие — дисперсионное уравнение задачи. Скорость распространения волны  $V = \omega/k = v$ .

**91.** См. рис. 2.12

**93.** Общее решение волнового уравнения имеет вид

$$F(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - vt) + \varphi(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\xi) d\xi.$$

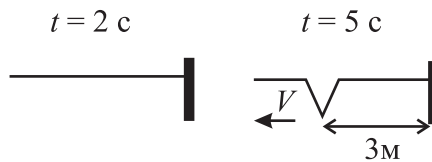


Рис. 2.12. К решению задачи 91.

94. См. рис. 2.13

95. Предположим, что при малом смещении струны в поперечном направлении ее натяжение остается постоянным. Обозначим смещение струны через  $y$ , а координату вдоль струны — через  $x$ . Линейная плотность (т.е. масса единицы длины) струны равна  $\rho$ . Рассмотрим закон движения небольшого элемента струны длиной  $dx$  (см. рис. 2.14). Сила, действующая в поперечном направлении на этот элемент равна  $-T \sin \alpha(x) + T \sin \alpha(x + dx)$ . Здесь  $\alpha(x)$  — угол отклонения струны, который считается малым. В этом случае можно приближенно считать  $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha(x) = y_x$ , где  $y_x = \partial \varphi / \partial x$ . Закон движения принимает вид:

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x + T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx},$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

где  $c = \sqrt{T/\rho}$  — скорость распространения поперечных возмущений вдоль струны.

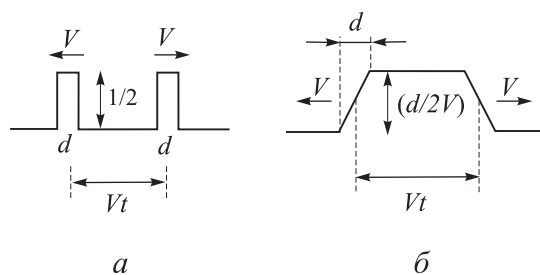


Рис. 2.13. К решению задачи 94.

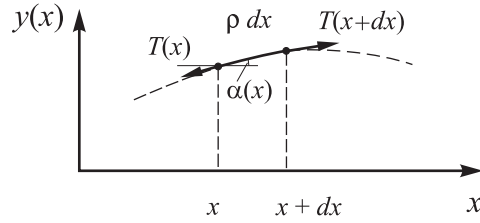


Рис. 2.14. К решению задачи 95.

**96.** Распространение звуковых волн в газе описывается уравнением движения единичного элемента газа, уравнением непрерывности и уравнением состояния:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{-\nabla p}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho = \rho(p, S). \quad (2)$$

Здесь  $S$  — энтропия. Будем считать, что плоская акустическая волна распространяется вдоль оси  $x$ . Все переменные величины представим в виде суммы постоянных и малых переменных составляющих:  $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho'(x, t)$ ,  $p(x, t) = p + p'(x, t)$ ,  $v_x(x, t) = v'(x, t)$ .

Подставляя эти формулы в уравнения (1)-(2), и учитывая, что малые изменения давления и плотности связаны соотношением

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho',$$

получаем

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \frac{\partial \rho'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0.$$

Дифференцирую первое из этих уравнений по  $t$ , а второе по  $x$  и подставляя одно в другое, получаем линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0,$$

где  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_S$  — квадрат скорости звука.

Сделаем необходимое пояснение. При выводе мы предполагали, что процесс движения частиц среды при распространении звуковой волны

является настолько быстрым, что теплота, возникающая в местах сжатия не успевает за счет процессов теплопроводности перераспределиться в соседние области. Другими словами, распространение звука считается адиабатическим процессом. Именно поэтому производная в выражении для скорости звука вычисляется при постоянной энтропии газа.

Из уравнения адиабатического процесса  $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$  находим

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

$T$  — температура,  $R$  — газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярная масса газа. Для азота  $\mu = 28$ , при температуре  $T = 293$  К получаем  $c = \sqrt{1.4 * 8.3 \cdot 10^3 * 293 / 28} = 349$  м/с, аналогично для кислорода  $\mu = 32$  и  $c = 326$  м/с, для воздуха  $\mu = 28.8$ ,  $c = 344$  м/с.

**97.** Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла, которые для однородной среды без зарядов и токов имеют вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (4)$$

Векторы электрической и магнитной индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  связаны с векторами напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  материальными соотношениями  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , причем по условиям задачи величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  — константы. Направление распространения волны выберем вдоль оси  $z$ , тогда, поскольку волна плоская, все компоненты поля будут зависеть только от этой пространственной координаты. В этом случае соотношение (3) принимает вид  $\partial E_z / \partial z = 0$ . Одновременно из  $z$ -компоненты уравнения (2) следует, что  $\partial E_z / \partial t = 0$ . Поэтому мы должны положить  $E_z = \text{const}$ . Совершенно аналогично можно показать, что  $H_z = \text{const}$ . Постоянные и однородные в пространстве электрические и магнитные поля не имеют характера распространяющихся волн и, благодаря линейности системы, их можно исключить из рассмотрения, положив равными нулю. Следовательно, распространяющаяся в однородной среде без свободных зарядов электромагнитная волна является поперечной — компоненты как электрического, так и магнитного полей в направлении распространения волны равны нулю.

С учетом этого обстоятельства распишем по компонентам два первых уравнения Максвелла:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (8)$$

Дифференцируя (5) по координате, а (8) по времени, из этих двух уравнений получаем линейное волновое уравнение для  $E_y$  компоненты поля:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0,$$

где  $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$  — скорость распространения волны. Аналогично получаются точно такие же уравнения для остальных компонент.

## 2.7. Дисперсия

99. а).  $\omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2$ ; б).  $\omega = vk - \alpha k^3$ ; в).  $\omega = \alpha k^2$ .

100.

$$\text{а) } v_\phi = v + \omega_0/k, \quad v_{zp} = v;$$

$$\text{б) } v_\phi = \sqrt{v^2 + \omega_0^2/k^2}, \quad v_{zp} = \frac{v^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2}};$$

$$\text{в) } v_\phi = \sqrt{g/k + \alpha k/\rho}, \quad v_{zp} = \frac{g + 3\alpha k^2/\rho}{2\sqrt{gk + \alpha k^3/\rho}};$$

$$\text{д) } v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 + r_d^2 k^2}}, \quad v_{zp} = \frac{c}{\sqrt{(1 + r_d^2 k^2)^3}}.$$

102. Подставим в волновое уравнение

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} - i \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x - x') F(x', t) dx' = 0$$

функцию  $F(x, t) = F_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ :

$$i\omega F_0 e^{i(\omega t - kx)} - iF_0 e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x - x') e^{-kx'} dx' = 0,$$

и преобразуем интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x - x') e^{-ikx'} dx' &= \\ &= e^{i(\omega t - kx)} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x - x') e^{ik(x - x')} d(x - x') = e^{i(\omega t - kx)} \Omega(k), \end{aligned}$$

где  $\Omega(k)$  — Фурье-образ функции  $\Omega(x)$ . В результате получаем дисперсионное уравнение в виде  $\omega = \Omega(k)$ .

Поскольку  $\Omega(k)$ , вообще говоря, произвольная функция, то мы имеем дело с общим случаем волнового уравнения, приводящего к дисперсионному, разрешенному относительно частоты. Тот же результат можно получить, если выполнить в исходном уравнении преобразование Фурье.

## 2.8. Волновые пакеты

106. 2*N*.

110. Динамика волновой функции описывается интегралом Фурье

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i[w(k)t - kx]} dk,$$

где  $\omega(k)$  — дисперсия системы, а функция  $F(k)$  определяется разложением Фурье начального распределения поля  $f(x, 0) = F(x) e^{-ik_0 x}$ :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{i(k - k_0)x} dx.$$

Условие, что волновой пакет является узким означает, что функция  $F(k)$  заметно отлична от нуля только при  $|k - k_0| \ll \Delta k$ . Разложим функцию  $\omega(k)$  вблизи точки  $k_0$  в ряд Тейлора:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \omega''(k_0)(k - k_0)^2/2 + \dots$$

и ограничимся только двумя первыми членами разложения, предполагая, что на отрезке шириной порядка  $\Delta k$  вблизи  $k_0$  достаточно хорошо работает линейная аппроксимация для дисперсии. Тогда

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} e^{i(\omega(k_0)t - k_0x)} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-i(k - k_0)[x - \omega'(k_0)t]} dk = \\ &= e^{i[\omega(k_0)t - k_0x]} F[x - \omega'(k_0)t]. \end{aligned}$$

Таким образом, для узкого спектрального волнового пакета решение представляется в виде произведения огибающей, которая распространяется не изменяя своей формы с групповой скоростью  $v_{gp} = \omega'(k_0)$ , и заполнения с частотой  $\omega_0 = \omega(k_0)$  и скоростью  $v_{\phi} = \omega_0/k_0$ .

Форму огибающей можно считать неизменной до тех пор, пока линейная аппроксимация закона дисперсии остается справедливым. Это выполняется на ограниченном интервале времени  $\tau$ , пока  $|\omega''(k_0)|(\Delta k)^2\tau/2 \ll 1$ . Отсюда  $\tau \ll [|\omega''(k_0)|(\Delta k)^2]^{-1}$ .

**111.**

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_{gp} \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

где  $v_{gp} = \omega'(k_0)$ .

**112.** Представим начальное возмущение в виде

$$f(x, 0) = F(x) = e^{-ik_0x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k - k_0)x} F(k) dk,$$

тогда эволюция пакета во времени будет описываться соотношением

$$f(x, t) = e^{-ik_0x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega(k)t - (k - k_0)x]} F(k) dk.$$

Разложим функцию  $\omega(k)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $k_0$  с учетом квадратичного члена разложения:  $\omega(k) = \omega(k_0) + \omega''(k_0)(k - k_0)^2/2 + \dots$ . Подставив это выражение в предыдущую формулу, получаем:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega''(k_0)(k - k_0)^2 t/2 - (k - k_0)x]} F(k) dk = \\ &= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} F(x, t), \end{aligned}$$

$\omega_0 = \omega(k_0)$ . Для огибающей  $F(x, t)$  можно получить дифференциальное уравнение, описывающее ее динамику в пространстве и во времени. Для этого вычислим следующие производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{i\omega''(k_0)}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k - k_0)^2 e^{i[\omega''(k_0)(k - k_0)^2 t/2 - (k - k_0)x]} F(k) dk, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k - k_0)^2 e^{i[\omega''(k_0)(k - k_0)^2 t/2 - (k - k_0)x]} F(k) dk. \end{aligned}$$

Интегралы в правых частях этих формул одинаковы, исключая их, получаем искомое уравнение для  $F(x, t)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + i \frac{\omega''(k_0)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Это параболическое уравнение, описывающее распространение волнового пакета в среде с квадратичным законом дисперсии. В частности, это уравнение совпадает с уравнением Шредингера для свободной частицы в нерелятивистской квантовой механике. Если ввести “мнимое время”  $\tau = i \operatorname{sign}(\omega''(k_0))t$ , то параболическое уравнение переходит в уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{|\omega''(k_0)|}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Если характерный пространственный масштаб для начального профиля огибающей  $\Delta x \sim 1/\Delta k$ , то характерное время ее изменения равно  $\Delta t \sim (\Delta x)^2/|\omega''(k_0)| \sim (|\omega''(k_0)|(\Delta k)^2)^{-1} \ll 1/\omega_0$ . Отсюда следует  $\omega_0 \Delta t \ll 1$ , то есть огибающая медленно меняется во времени по сравнению с высокочастотным заполнением.



## 2.9. Эффект Доплера

**113.** Это система отсчета, которая движется относительно исходной со скоростью  $V = \omega/k$

**114.** Уравнения преобразования частоты и волнового числа при переходе из одной системы отсчета в другую (эффект Доплера) в случае нерелятивистских скоростей имеют вид

$$\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}.$$

Штрихованная система отсчета движется относительно нештрихованной со скоростью  $\mathbf{V}$ .

**115.** Рассмотрим сначала случай, когда громкоговоритель расположен на перроне, а наблюдатель удаляется от него на поезде. Частота и волновое число звуковой волны в неподвижной системе отсчета равны  $\omega = \omega_0$  и  $k = \omega_0/c$ ,  $c$  — скорость звука. Переходя в систему отсчета, движущуюся с наблюдателем, получаем  $\omega' = \omega - Vk = \omega_0(1 - V/c)$ . Если поезд приближается к станции, то наблюдатель слышит звук с частотой  $\omega' = \omega_0(1 + V/c)$ .

В случае, когда источник звука движется на поезде, то в этой (штрихованной) системе отсчета частота звука равна  $\omega' = \omega_0$ . Она связана с частотой в неподвижной системе соотношением  $\omega' = \omega - Vk$ , а скорость звука в неподвижной среде равна  $c = \omega/k$ . Отсюда  $\omega = \omega_0/(1 - V/c)$ . Если поезд приближается, то  $\omega = \omega_0/(1 + V/c)$

**117.**  $\omega' = \gamma(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}), \quad \mathbf{k}' = \gamma(\mathbf{k} - \omega \mathbf{V}/c^2),$   
 $c$  — скорость света,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  — релятивистский фактор.

**118.** В системе отсчета, связанной с осциллятором, частота излучаемой волны равна  $\omega' = \omega_0$ , а волновой вектор  $\mathbf{k}' = (\omega_0 \cos \varphi/c, \omega_0 \sin \varphi/c)$  (считаем, что ось  $x$  направлена вдоль скорости осциллятора). В системе отсчета наблюдателя частота волны равна  $\omega = \gamma(\omega_0 + \omega_0 v \cos \varphi/c)$ . Если осциллятор движется с нерелятивистской скоростью, то

$$\omega = \omega_0(1 + \cos \varphi \frac{v}{c}).$$

**119.**  $\omega = \gamma(1 + v/c) \approx 2\gamma$ . Частота увеличивается в  $2\gamma \gg 1$  раз.

**120.** Так как известно, что амплитуда мала по сравнению с длиной волны, то электрическая сила, действующая на электрон равна  $eE_0 \cos(\omega_0 t - k_0 v_0 t) = qE_0 \cos[(\omega_0 - k_0 v_0)t]$ , где  $e$  — заряд электрона. Поэтому электрон будет колебаться с частотой  $\omega = \omega_0 - k_0 v_0$  и амплитудой  $A = eE_0/(m\omega^2)$ ,  $m$  — масса электрона.

**121.** Перейдем в систему отсчета связанную с зеркалом. Тогда из решения задачи 119 следует, что частота волны равна  $\omega' = \gamma\omega(1+v/c) \approx 2\gamma\omega$ . В этой системе волна, отразившись от зеркала, изменит направление волнового вектора на противоположное, а частота отраженной волны не изменится. Переходя назад в систему отсчета, связанную с наблюдателем, получаем, что  $\omega'' = 2\gamma\omega' = 4\gamma^2\omega$ .

**123.** Вид дисперсионного уравнения в движущейся системе координат не изменится, так как легко проверить, что  $(\omega^2 - c^2 k^2)$  — релятивистский инвариант.

## 2.10. Эффект Вавилова-Черенкова.

### Излучение волн

**125.** На рис. 2.15 показан участок траектории частицы, движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ . В каждой точке траектории частица излучает плоские волны по всем возможным направлениям и, вообще говоря, со всеми возможными частотами, которые допустимыми с точки зрения данного закона дисперсии. Интерференция всех этих волн формирует поле излучения. Покажем, что на фиксированной частоте  $\omega$  волны, испущенные под Черенковским углом в разных точках траектории, оказываются в фазе. Плоская волна излучаемая в точке  $A$  имеет фронт, показанные на рис. пунктирной линией, который движется с фазовой скоростью  $v_\phi(\mathbf{k})$  под углом  $\theta$  к скорости электрона. Если выполняется условие  $\cos \theta = v_\phi/V$ , то частица в каждой точке “видит” одну и ту же фазу этой волны. А так как в каждой точке она испускает новую волну в направлении угла  $\varphi$  с той же самой фазой, что и в точке  $A$ , то все такие волны в результате складываются в фазе.

Наоборот, если условие черенковского излучения нарушено, то фазы элементарных волны из разных точек траектории распределяются равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ , что приводит их взаимному гашению. Результирующее излучение по данному направлению в этом случае равно нулю.

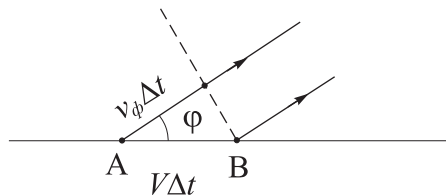


Рис. 2.15. К решению задачи 125.

**126.** Запишем законы сохранения энергии и импульса в процессе излучения фотона:

$$\begin{aligned} \frac{mV^2}{2} + U &= \frac{mV'^2}{2} + \hbar\omega + U', \\ mV &= mV' \cos \theta + \hbar k \cos \varphi, \\ 0 &= mV' \sin \theta - \hbar k \sin \varphi, \end{aligned}$$

где  $\theta$  — угол отдачи системы,  $\varphi$  — угол излучения фотона (см. рис.2.16,*а*),  $U$  и  $U'$  — внутренние энергии системы до и после излучения. Остальные обозначения ясны из рис. Так как энергия фотона мала по сравнению с кинетической энергией, очевидно, что угол отдачи  $\theta$  мал, поэтому третье уравнение можно не учитывать, а во втором положить  $\cos \theta \approx 1$ . По этой же причине можно считать, что изменение кинетической энергии системы  $\Delta \mathcal{E}_k \approx mV \Delta V$ ,  $\Delta V = V' - V$ . В результате получаем

$$\Delta U = -\hbar\omega \left( 1 - \frac{kV}{\omega} \cos \varphi \right) = -\hbar\omega \left( 1 - \frac{nV}{c} \cos \varphi \right) \quad (1)$$

Из этого соотношения следует, что если у системы есть внутренние степени свободы, то законы сохранения не определяют однозначно угол под которым может происходить излучение. Если излучение происходит под углом, большим черенковского:  $\varphi > \varphi_0 = \arccos(nV/c)$ , то из (1) получаем  $\Delta U < 0$  — излучение сопровождается уменьшением внутренней энергии системы. Такой случай называется *нормальным эффектом Доплера* (см. рис. 2.16,*б*). Если же угол излучения меньше черенковского:  $\varphi < \varphi_0$ , то система, излучая, одновременно увеличивает свою внутреннюю энергию. Это *аномальный эффект Доплера*. Разумеется, в таком случае никакого нарушения закона сохранения энергии не наблюдается. Энергия как на излучение, так и на увеличение внутренней энергии, черпается из кинетической энергии движения системы.

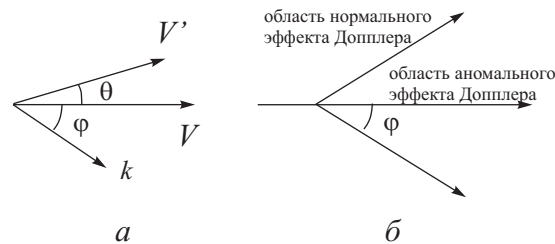


Рис. 2.16. К решению задачи 126.

**130.** Поскольку речь идет об излучении по направлению движения частицы, то условие черенковского излучения имеет вид  $\omega - kv = 0$ . Используя его вместе с дисперсионным уравнением, получаем

$$\alpha k^2 - kv^2 + c = 0.$$

Действительные решения этого уравнения существуют лишь при отрицательном дискриминанте:  $v^4 - 4\alpha c \geq 0$ . Таким образом, излучение волн будет происходить лишь при

$$v \geq \sqrt[4]{4\alpha c} = v_{min}.$$

Частот излучения две:

$$\omega = \frac{v^2}{2\alpha} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha c}{v^4}} \right).$$

Чтобы разобраться, откуда появилась вторая частота, рассмотрим дисперсионную характеристику и закон изменения фазовой скорости от волнового числа (рис. 2.17). Условие черенковского излучения дается прямой  $\omega = vk$ , которая также нанесена на графики. Излучаемые волновые числа и частоты определяются точками пересечения этих прямых с дисперсионными характеристиками. Видно, что в точках 1 и 2 наклон кривых дисперсии различен и отличается от наклона прямой. Следовательно групповые скорости излучаемых волн разные, причем в точке 1 групповая скорость меньше  $v$ , а в точке 2 — больше. Волновые пакеты с большей групповой скоростью будут опережать излучатель, а с меньшей — отставать от него. Таким образом, большие частоты излучаются вперед, а меньшие назад.

Заметим, что рассматриваемый закон дисперсии совпадает с дисперсией гравитационно-капиллярных волн на поверхности глубокой воды,

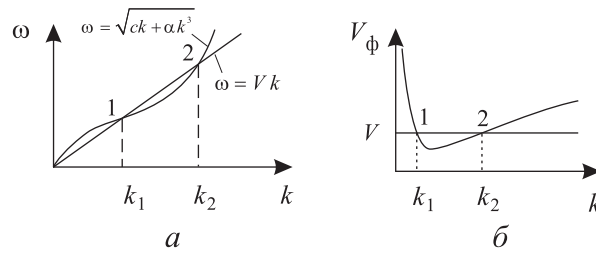


Рис. 2.17. К решению задачи 130.

если положить  $\alpha = \sigma/\rho$ ,  $c = g$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения. Численная оценка для воды дает  $v_{min} \approx 23$  см/с.

Отметим, что найденное условие относится к излучению волн по направлению движения, если оно не выполняется, то для излучения под конечным углом к скорости частицы оно также не будет выполняться, т.е. при  $v < v_{min}$  частица не излучает вообще. Таким образом, утка, плывущая со скоростью меньше, чем 23 см/с, не излучает волн.

Картина волн на поверхности воды в целом гораздо сложнее благодаря двумерности задачи и сильной дисперсии (см. задачи 141-144).

## 2.11. Волны на воде

**131.** Для гравитационных волн  $v_{gp} = v_{\phi}/2$ , а для капиллярных  $v_{gp} = 3v_{\phi}/2$ .

**132.** Графики зависимостей групповой и фазовой скорости от волнового числа приведены на рис. 2.18. Для глубокой воды минимальная скорость, при которой движущийся объект возбуждает поверхностные волны составляет  $v_{\phi min} \approx 23$  см/с (см. решение задачи 130).

**133.** Дисперсионное уравнение гравитационно-капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости есть  $\omega^2 = gk + \sigma k^3/\rho$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\rho$  — плотность жидкости. Первое слагаемое отвечает гравитационным, а второе — капиллярным волнам. Значения  $k$ , при которых оба слагаемых имеют один порядок величины, соответствуют переходной области от гравитационных к капиллярным волнам. Отсюда граничное значение волнового числа можно определить как  $k_* \sim \sqrt{g\rho/\sigma}$ . Легко видеть, что при этом значении

фазовая скорость имеем минимум. Подставляя для воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 74 \cdot 10^{-3} \text{ н/м}$ , получаем  $\lambda_* = 2\pi/k_* = 1.7 \text{ см}$ . Аналогично для ртути  $\rho = 13.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 465 \cdot 10^{-3} \text{ н/м}$ ,  $\lambda_* = 1.18 \text{ см}$ .

При  $\lambda \gg \lambda_*$  волны можно считать чисто гравитационными, а при обратном неравенстве — капиллярными.

**134.** Очевидно, что волны в океане являются гравитационными. Дисперсионное уравнение для волн на мелкой воде в пренебрежении дисперсией имеет вид  $\omega = \sqrt{gh}k$ , где  $h$  — глубина жидкости. Поэтому групповая скорость таких волн совпадает с фазовой и равна  $V = \sqrt{gh}$ . Для оценки примем  $h = 3 \text{ км}$ , тогда  $V \sim 170 \text{ м/с} \sim 600 \text{ км/ч}$ .

**135.** В 5 часов.

**136.** Критерий подобия для этой задачи есть число Фруда  $Fr = v^2/gL$ , где  $L$  — характерный линейный размер корабля. Для сохранения картины возникающих волн, числа Фруда для корабля и для модели должны совпадать. Поэтому скорость модели должна быть равна  $3.6 \text{ км/ч}$ .

**137.**  $c = \sqrt{gh}$ ,  $\beta = \sqrt{gh} [h^2/6 - \sigma/(2g\rho)]$ .

**138.**  $\lambda = 2\pi V^2/g \approx 20 \text{ м}$ .

**139.** Вверх по течению воды возбуждаются капиллярные волны, их длина волны  $\lambda_1 = (\pi v^2/g)(1 - \sqrt{1 - 4g\sigma/\rho v^4})$ . Вниз по течению возбуждаются гравитационные волны с длиной волны  $\lambda_2 = (\pi v^2/g)(1 + \sqrt{1 - 4g\sigma/\rho v^4})$ . Если  $g\sigma/\rho v^4 \ll 1$ , то  $\lambda_1 \approx 2\pi\sigma/(\rho v^2)$  и  $\lambda_2 \approx 2\pi v^2/g$ .

Указание. См. решение задачи 130.

**140.** Падающий камень создает возмущение поверхности жидкости и распределение скоростей, которое следует считать начальными для решения нестационарной задачи, описывающей динамику системы. Так

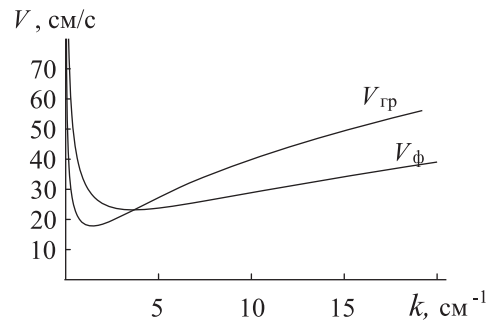


Рис. 2.18. К решению задачи 132.

как эти распределения, вообще говоря, неизвестны, а также потому, что повседневный опыт показывает, что качественная картина волн на воде от падающего камня не очень сильно зависит от того, каков его размер и с какой скоростью он падает, примем более простую модель, в которой будем считать, что после падения камня создано некоторое начальное возмущение на поверхности, а начальные скорости в любой точке жидкости равны нулю. Кроме того считаем камень круглым, поэтому картина волн будет обладать круговой симметрией относительно точки падения, которую примем за начало координат. Если поперечный размер камня порядка  $d$ , то таков же размер области начального возмущения. Очевидно, что пространственные Фурье-гармоники, составляющие это возмущение имеют максимальную амплитуду при  $k \sim 1/d$ , поэтому возбуждаются главным образом гравитационные волны.

Получим, следуя [3], волновые уравнения, описывающие поведение системы во времени. К качеству исходных выберем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla(p - p_0)}{\rho} - \nabla U, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $p$  — давление,  $p_0$  — атмосферное давления,  $\rho$  — плотность,  $U(\mathbf{r})$  — потенциальная энергия единицы объема во внешнем поле, а также уравнение непрерывности, которое для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) принимает вид

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

В нашей модели в начальный момент времени скорость жидкости равна нулю, поэтому ее движение будет оставаться потенциальным, т.е. можно положить  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ . В этом случае можно ввести скалярный потенциал скорости соотношением  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ , тогда (2) превращается в уравнение Лапласа для  $\varphi$ :

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3)$$

Поскольку направленное движение жидкости отсутствует, то при линеаризации уравнения Эйлера член  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$  можно отбросить, тогда уравнение (1) принимает вид  $\nabla[\partial \varphi / \partial t + (p - p_0) / \rho + U] = 0$ , что после интегрирования дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} + U = 0. \quad (4)$$

Постоянную интегрирования, вообще говоря, произвольную функцию времени, можно включить в определение  $\varphi$ , поэтому в уравнении (4) она положена равной нулю.

Направим ось  $z$  вертикально вверх, а плоскость  $xy$  выберем совпадающей с равновесной поверхностью жидкости. Пусть форма возмущенной поверхности задается функцией  $\eta(x, y, t)$ . Уравнение (4), записанное для точек, лежащих на поверхности, принимает вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + g\eta = 0. \quad (5)$$

Продифференцируем это соотношение по времени, и, с учетом формулы  $\dot{\eta} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\eta}$ , получим

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\eta} = 0.$$

Так как возмущение мало, можно считать, что это соотношение выполняется и при  $z = 0$ , тогда вместе с уравнением (3), получаем систему уравнений для линейных гравитационных волн на поверхности жидкости:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (6a)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (6b)$$

Уравнения (6) необходимо дополнить начальными условиями:

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Для решения нестационарной задачи (6)-(7) воспользуемся методом преобразования Лапласа [9]. Для этого умножим оба уравнения в (6) на  $\exp(-pt)$ , где  $p$  — комплексный параметр с  $\text{Re } p > 0$ , и проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $\infty$ :

$$\Delta \varphi_p = 0, \quad \left( g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + p^2 \varphi_p \right) \Big|_{z=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0, t=0} = -g\eta_0(x, y). \quad (8)$$

В последнем уравнении мы воспользовались соотношением (5), записанным для  $z = 0$ . Функция  $\varphi_p(x, y)$  зависит от  $p$  как от параметра. Так



как начальное возмущение  $\eta_0(x, y)$  обладает аксиальной симметрией, то оно, вместе со всеми остальными функциями координат, на самом деле зависит от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Решение первого уравнения в (8) ищем в виде

$$\varphi_p(r) = \int_0^{\infty} e^{kz} J_0(kr) F(k, p) k dk, \quad (9)$$

где  $J_0(kr)$  — функция Бесселя. Прямая проверка показывает, что для каждого  $k$  функция  $e^{kz} J_0(kr)$  является решением уравнения Лапласа, значит ему удовлетворяет и интеграл в (9). Интегрирование только по положительным значениям  $k$  удовлетворяет граничному условию на бесконечности: возмущения должны затухать вглубь жидкости при  $z \rightarrow -\infty$ . Подставляя (9) во второе уравнение (8), получим:

$$\int_0^{\infty} (gk + p^2) F(k, p) J_0(kr) k dk = -g\eta_0(r). \quad (10)$$

Это интегральное уравнение относительно функции  $F(k, p)$  можно решить с помощью преобразования Фурье - Бесселя [10]. Преобразование Фурье - Бесселя для действительной функции  $\eta_0(r)$  ставит ей в соответствие функцию  $\eta_0(k)$  по формуле

$$\eta_0(k) = \int_0^{\infty} \eta_0(r) J_m(kr) r dr, \quad (11)$$

где  $J_m(kr)$  — функция Бесселя порядка  $m$ . Справедливо также обратное преобразование

$$\eta_0(r) = \int_0^{\infty} \eta_0(k) J_m(kr) k dk, \quad (12)$$

Соотношения (11)-(12) выполняются, если функция  $\eta_0(r)$  удовлетворяет некоторым достаточно слабым условиям [10]. В частности, они справедливы, если функция  $\eta(r)$  непрерывна и интеграл  $\int_0^{\infty} |\eta_0(r)| dr$  существует, что мы будем предполагать выполненным.

Из вида соотношения (10) следует, что функция  $(gk + p^2)F(k, p)$  является преобразованием Фурье-Бесселя для  $-g\eta_0(r)$ . Поэтому можно записать

$$\varphi_p(r, z) = \int_0^{\infty} \frac{-g\eta_0(k)}{p^2 + gk} e^{kz} J_0(kr) k dk. \quad (13)$$

Производя обратное преобразования Лапласа, получаем пространственно - временную зависимость потенциала скорости:

$$\varphi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} dp \int_0^{\infty} \frac{-g\eta_0(k)}{p^2 + gk} e^{kz} J_0(kr) k dk. \quad (14)$$

Интегрирование в комплексной плоскости  $p$  производится по прямой  $L$ , параллельной мнимой оси и лежащей справа от всех особых точек функции  $\varphi_p(r, z)$ .

Нас интересует в первую очередь динамика поверхности, т.е. функция  $\eta(r, t)$ . Воспользовавшись уравнением (5) при  $z = 0$  и переставив порядок интегрирования, приходим к формуле

$$\eta(r, t) = \int_0^{\infty} \eta_0(k) J_0(kr) k dk \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \frac{p}{p^2 + gk} dp. \quad (15)$$

Хорошо известно, что функция  $p/(p^2 + a^2)$  — это результат преобразования Лапласа для функции  $\cos at$ , поэтому окончательно получаем

$$\eta(r, t) = \int_0^{\infty} \eta_0(k) J_0(kr) \cos[\omega(k)t] J_0(kr) k dk. \quad (16)$$

Здесь  $\omega(k) = \sqrt{gk}$  — уравнение дисперсии для гравитационных волн на глубокой воде.

Формулу (16) можно получить менее строгим, но физически более понятным способом, используя концепцию преобразования Фурье. Если в одномерной линейной волновой системе с законом дисперсии  $\omega(k)$  задано начальное возмущение в виде гармонического сигнала  $\exp(-ikx)$ , то его эволюция во времени описывается двумя волнами  $\exp[i(\omega(k)t - kx)]$  и  $\exp[-i(\omega(k)t + kx)]$ , бегущими соответственно в положительном и отрицательном направлении оси  $x$ . Существование двух волн с дисперсиями  $\pm\omega(k)$  обусловлено симметрией системы относительно замены

знака времени  $t \rightarrow -t$ . Если в системе существует несколько ветвей дисперсионной характеристики, то они обязательно входят в полный спектр парами, отличающимися знаком частоты. В этом случае полное возмущение получается суммированием по всем таким ветвям, чтобы удовлетворить всем начальным и граничным условиям.

Если ветвь дисперсионного уравнения всего одна, как в нашем случае, для произвольного начального возмущения получаем

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ A(k) e^{i\omega(k)t} + B(k) e^{-i\omega(k)t} \right] e^{-ikx} dk, \quad (17)$$

где функции  $A(k)$  и  $B(k)$  определяются начальными условиями.

Обобщение этого выражения на двумерных случай очевидно:

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ A(k_x, k_y) e^{i\omega(\mathbf{k})t} + \right. \\ \left. + B(k_x, k_y) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \right] e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (18) \end{aligned}$$

Из начальных условий (7) вытекает, что

$$A(k_x, k_y) = B(k_x, k_y) = \eta_0(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \eta_0 e^{i(k_x k + k_y y)} dx dy. \quad (19)$$

Функция  $\eta_0(k_x, k_y)$  является двумерным Фурье-образом начального возмущения  $\eta_0(x, y)$ . В аксиально симметричном случае, когда поле зависит только от радиальной координаты  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , в выражениях (18) и (19) можно перейти к интегрированию в полярной системе координат. Например для (19) это дает

$$\eta_0(k) = \int_0^{\infty} \eta_0(r) r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta = \int_0^{\infty} \eta_0(r) J_0(kr) r dr. \quad (20)$$

Здесь  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$ , кроме того, мы воспользовались интегральным представлением функции Бесселя:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta.$$

Аналогичное преобразование в формуле (18), приводит в точности к выражению (16). Таким образом, мы получили тот же результат, что и методом преобразования Лапласа.

Формально задача решена, однако исследование распространения волн с помощью формулы (16) сопряжено со значительными трудностями, так как точное вычисление интеграла в большинстве случаев невозможно, а его численный расчет при больших  $t$  требует очень больших затрат вычислительных ресурсов. Связано это с тем, что функции  $\cos[\omega(k)t]$  и  $J_0(kr)$  при больших  $t$  и  $r$  быстро осциллируют.

Для приближенного вычисления интеграла преобразуем его к другому виду. Как будет показано ниже, при больших  $t$  основной вклад в интеграл дает небольшая окрестность области интегрирования вблизи точки, для которой  $kr \gg 1$ . Поэтому можно представить функцию Бесселя ее асимптотическим разложением при больших значениях аргумента  $J_0(x) \approx \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x - \pi/4)$ . Подставим это разложение в (16) и получим:

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^{\infty} \eta_0(k) k^{1/2} \cos[\omega(k)t] \cos(kr - \pi/4) dk = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \int_0^{\infty} \eta_0(k) k^{1/2} \{ \cos[\omega(k)t - kr + \pi/4] + \cos[\omega(k)t + kr - \pi/4] \} dk = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} \eta_0(k) k^{1/2} e^{i[\omega(k)t - kr]} dk + \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} \eta_0(k) k^{1/2} e^{-i[\omega(k)t + kr]} dk \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} \eta_0(k) k^{1/2} e^{i[\omega(k)t - kr]} dk. \quad (22)$$

Метод приближенного вычисления интегралов такого типа был развит Кельвином и впоследствии он получил название метода стационарной фазы. Не вдаваясь в подробности, с которыми можно познакомиться, на-

пример, по книге [11], приведем лишь основной результат: интеграл вида

$$I(t) = \int_a^b F(k) e^{it\Psi(k)} dk, \quad (23)$$

где  $F(k)$  и  $\Psi(k)$  — действительные функции,  $a$  и  $b$  — конечные или бесконечные пределы интегрирования, при  $t \rightarrow \infty$  имеет следующие оценки: если уравнение

$$\Psi'(k) = 0 \quad (24)$$

имеет корень  $k_*$ ,  $a < k_* < b$ , то для интеграла (23) справедлива оценка

$$I(t) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|\Psi''(k_*)|t}} F(k_*) e^{i[t\Psi(k_*) \pm \pi/4]}; \quad (25)$$

плюс в экспоненте выбирается, если  $\Psi''(k_*) > 0$  и минус, если  $\Psi''(k_*) < 0$ . Если  $k_*$  совпадает с одним из концов интегрирования, то следует взять половину выражения (25). Если в интервале интегрирования у уравнения (24) действительных корней нет, то интеграл стремится к нулю по крайней мере, как  $O(1/t)$ . Если пределы интегрирования бесконечны и уравнение (24) не имеет действительных корней, то интеграл экспоненциально мал:  $I(t) \sim \exp(-\beta t)$ ,  $\beta > 0$ . Точка  $k = k_*$  называется стационарной.

Применим эти результаты к интегралу (22). Здесь  $\Psi(k) = \omega(k) - kr/t$ , уравнение для стационарной точки имеет вид

$$\omega'(k) = v_{zp}(k) = r/t. \quad (26)$$

Для волн на глубокой воде  $\omega = \sqrt{gk}$ , поэтому  $v_{zp}(k) = \sqrt{g/(4k)}$ , стационарная точка определяется выражением  $k_* = gt^2/(4r^2)$ . Отсюда фаза волны

$$\Phi(r, t) = t\Psi(k_*) = \omega(k_*)t - k_*r = \frac{gt^2}{4r}. \quad (27)$$

Кроме того,  $\Psi''(k_*) = \omega''(k_*) = -2r^3/(gt^3) < 0$ . Используя все эти соотношения, получаем, что интеграл  $I(t)$  приближенно равен

$$I_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{r}} \frac{gt^2}{2r^2} \eta_0 \left( \frac{gt^2}{4r^2} \right) e^{i(gt^2/4r - \pi/4)}.$$

Легко видеть, что второй интеграл в формуле (21) не имеет стационарных точек, поэтому его вклад в общий результат мал по сравнению с интегралом  $I$ . Таким образом, окончательно получаем

$$\eta(r, t) = \sqrt{2} \frac{gt^2}{4r^3} \eta_0 \left( \frac{gt^2}{4r^2} \right) \cos(gt^2/4r). \quad (28)$$

Это выражение дает форму волнового импульса при больших  $r$  и  $t$ , таких, что отношение  $r/t$  конечно.

Проведенное рассмотрение позволяет ввести очень полезную и эффективную трактовку процессов, происходящих при распространении импульсов в среде с дисперсией, называемую концепцией волновых пакетов. Если в начальный момент времени в среде создано локализованное в пространстве возмущение, то дальше распространение волн происходит следующим образом. Фурье гармоники с волновыми числами, лежащими вблизи некоторого  $k_0$ , скажем от  $k_0 - \Delta k/2$  до  $k_0 + \Delta k/2$ , где  $\Delta k \ll k_0$ , составляют волновой пакет, который распространяется в пространстве на большие расстояния с групповой скоростью  $\omega'(k_0)$ , примерно сохраняя форму огибающей. Через достаточно большое время волновые пакеты убегают от первоначального места возмущения и "разъезжаются" в пространстве, так как их скорости различаются. В момент времени  $t$  в точке  $r$  волновое поле определяется пакетом с волновым числом, задаваемым уравнением (26), а вклад других волновых чисел мал. Фаза возмущения в этой точке может быть определена как  $\Phi(r, t) = \omega(k_0)t - k_0r$ , а амплитуда задается амплитудой Фурье-гармоники начального возмущения с волновым числом  $k_0$ . Здесь необходимо, однако, учесть дисперсию групповой скорости: две крайние спектральные составляющие волнового пакета имеют групповые скорости, отличающиеся на  $\omega''(k_0)\Delta k$ , поэтому размер пространственной области, в которой сосредоточена энергия пакета увеличивается со временем как  $|\omega''(k_0)|\Delta t$ , плотность энергии пакета падает обратно пропорционально этой величине, а амплитуда получает дополнительный множитель  $1/\sqrt{|\omega''(k_0)|t}$ .

Нетрудно видеть, что эти соображения напрямую приводят к формуле (25), за исключением фазового множителя  $\pm\pi/4$ , определение которого требует более тщательного анализа, сводящегося, по сути, к методу стационарной фазы. В случае, если задача многомерная, необходимо сделать поправку в амплитудном множителе, учитывающую распыление волнового пакета по нескольким направлениям.

Детальная картина волн зависит, разумеется, от вида начальной функции  $\eta_0(r)$ . Однако некоторые общие закономерности можно выявить из

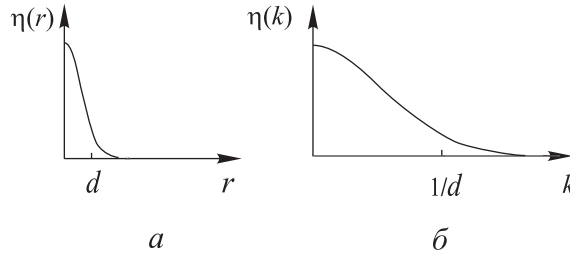


Рис. 2.19. Начальное возмущение и его спектральная плотность

анализа выражения (28) при самых общих предположениях относительно свойств начальной функции. Как уже говорилось, характерных масштаб ее изменения составляет порядка  $d$  — размера камня, поэтому предположим, что качественный вид этой функции таков, как показано на рис. 2.19,а. Свойства преобразования Фурье-Бесселя приводят к тому, что образ этой функции качественно выглядит так, как показано на рис. 2.19,б. Отсюда следует, что функция  $\eta_0(k)$  заметно отличается от нуля при  $k \lesssim 1/d$ . Поэтому, если  $gt^2/4r^2 \gtrsim 1/d$  (см. аргумент функции  $\eta_0$  в (28)), то поле близко к нулю. Это требование определяет внутренний радиус кольца на поверхности воды, в пределах которого сосредоточено возмущение:  $r_1 \sim \sqrt{gd}t/2$ . Видно, что этот радиус линейно увеличивается с течением времени, его скорость равна по порядку величины  $\sqrt{gd}/2$ .

Фаза поля (27) при фиксированном времени уменьшается с ростом  $r$ , и при  $\Phi \sim 1$  расположен первый горб возмущения: для того, чтобы были пространственные колебания, фаза должна меняться на величину порядка  $2\pi$ , при  $\Phi \ll 1$  колебаний нет. Положение этого горба определяется формулой  $r_2 \sim gt^2/4$ , он движется с ускорением  $g/2$ . На самом деле из (28) следует, что амплитуда этого горба очень быстро оказывается настолько малой, что он становится практически незаметным. Затем то же самое происходит со следующим горбом, и т.д. Каждый горб движется с локальной фазовой скоростью, которая вдвое превышает групповую скорость пакета. Отдельные горбы рождаются вблизи внутренней границы круга, пробегают по области возмущения и, постепенно уменьшаясь по амплитуде, исчезают вблизи внешней границы области. В фиксированный момент времени при увеличении радиуса значение локального волнового числа уменьшается, следовательно длина волн растет. Поэтому ширина горбов увеличивается по мере того, как он продвигается от внутренней границы области возмущения к внешней. Картина такого

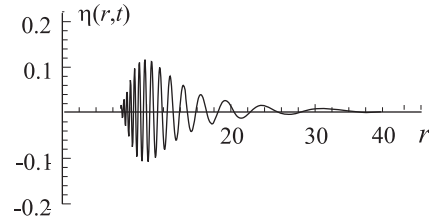


Рис. 2.20. Радиальное распределение возмущения через большое время после падения камня.

возмущения в некоторый момент времени показана на рис. 2.20.

**143.** Для простоты будем считать судно движущимся со скоростью  $V$  точечным источником. При движении источника в каждой точке траектории происходит излучение волновых пакетов по всем возможным направлениям со всеми возможными длинами волн. Однако, вследствие эффекта Вавилова-Черенкова, в результате интерференции всех таких волн излучение будет наблюдаться только на частотах, для которых фазовая скорость меньше скорости движения источника  $v_{\phi}(\omega) < V$ , причем направление излучения будет зависеть от частоты в соответствии с формулой

$$\cos \theta = \frac{v_{\phi}(\omega)}{V}.$$

По направлению, составляющему угол  $\theta$  со скоростью источника, излучаются волновые пакеты, частота которых определяется этой формулой. В свою очередь, двигаются пакеты с групповой скоростью, которая для гравитационных волн на глубокой воде вдвое меньше фазовой.

Рассмотрим картину излучения волн, показанную на рис. 2.21. Прямая  $AB$  представляет собой траекторию судна. Пусть оно в некоторый момент находилось в точке  $A$ , и за время  $t$  переместилось в точку  $B$ , значит  $|AB| = Vt$ . В точке  $A$  произошло излучение пакетов во всех направлениях, причем излученный под углом  $\theta$  пакет за время  $t$  переместится на расстояние  $r = v_{gp}t = Vt \cos \theta/2$  и попадет в точку  $C$ . Нетрудно убедиться, что местоположение всех пакетов, излученных в точке  $A$ , совпадает с полуокружностью радиуса  $Vt/4$  и центром в точке  $O$ , находящимся на расстоянии  $Vt/4$  от точки  $A$ . Действительно, введем систему координат с началом в  $B$  и осью  $x$ , совпадающей с направлением



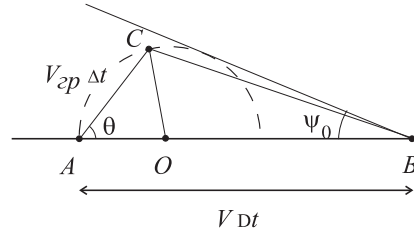


Рис. 2.21. Излучение волн движущимся на поверхности воды источником

движения источника. В ней координаты точки  $C$  даются соотношениями

$$\begin{aligned}x &= -Vt + r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta.\end{aligned}$$

Выразив  $r$  через  $t$  и  $\theta$ , получим

$$\begin{aligned}x &= -Vt + \frac{1}{2}Vt \cos^2 \theta = -\frac{3}{4}Vt + \frac{1}{4}Vt \cos 2\theta, \\y &= \frac{1}{2}Vt \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{4}Vt \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Отсюда  $(x + 3Vt/4)^2 + y^2 = (Vt/4)^2$  и утверждение доказано. Проведем касательную из точки  $B$  к окружности, показанной на рис. 2.21 пунктирной линией. Так как  $|OB| = 3Vt/4$ , угол  $\psi_0 = \arcsin(1/3) \approx 19.5^\circ$ . Замечательно, что этот угол не зависит от  $t$ , поэтому волны, испущенные в разных точках траектории будут лежать в пределах одного и того же клина! Все излучаемые волны остаются сзади судна, что неудивительно, так как  $v_{zp} < V$ .

**144.** Волны на поверхности воды за движущимся источником представляет собой эффект Вавилова-Черенкова в среде с дисперсией. Для построения картины волн обратимся к рис. 2.21. Введем систему координат с центром в точке мгновенного положения источника  $B$  и положительным направлением оси  $x$  вдоль его скорости. Находясь в точке  $A$ , источник излучил волновой пакет, который движется под углом  $\theta$  к оси  $x$ . Частота волн в пакете определяется условием черенковского излучения  $\cos \theta = v_{\phi}(\omega)/V$ , а скорость его движения равна групповой скорости. За время  $t$ , пока источник переместится в точку  $B$ , пакет пройдет вдоль направления  $\theta$  расстояние  $r = Vt \cos \theta/2$  и попадет в точку  $C$  (мы учли, что для гравитационных волн  $v_{zp} = v_{\phi}/2$ ). Воспользуемся форму-

лой  $\Phi(r, t) = gt^2/(4r)$  для фазы гравитационной волны, излучаемой точечным источником, найденной при решении задачи 140. Тогда из двух последних соотношений можно выразить  $r$  и  $Vt$  через величины  $\Phi$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned} r &= \frac{V^2\Phi}{g} \cos^2 \theta, \\ Vt &= \frac{2V^2\Phi}{g} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Координаты точки  $C$  задаются формулами

$$\begin{aligned} x &= -Vt + r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив формулы (1) в (2), получаем

$$\begin{aligned} x &= -\frac{V^2\Phi}{g} \cos \theta (2 - \cos^2 \theta), \\ y &= \frac{V^2\Phi}{g} \sin \theta \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (3) представляют собой уравнения для линий постоянной фазы в параметрической форме и они дают удобный способ нарисовать картину волн. Зафиксируем фазу  $\Phi$  и будем менять значения  $\theta$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , при этом точка с координатами  $(x, y)$  будет перемещаться вдоль линии постоянной фазы, например, вдоль одного из гребней. Задавая фазы, отличающиеся по величине на  $2\pi$ , можно получить всю видимую картину волн. Результат показан на рисунке 2.22.

Вся совокупность гребней сосредоточена внутри клиновидной области, причем отчетливо наблюдаются волны двух типов с различным поведением. Во-первых, это короткие волны, прижатые к границам клина и распространяющиеся под большими углами к оси  $x$ . Во-вторых, более длинные волны, бегущие вслед за кормой, фронт их почти перпендикулярен вектору скорости судна. Для таких волн условие черенковского излучения  $V \approx v_\phi = \sqrt{g/k}$ , поэтому их длина волны  $\lambda \approx 2\pi V^2/g$ . Гребни, соответствующие двум типам волн касаются друг друга в точках, лежащих на границе клина, в них распространение происходит под углом  $\theta_m = \arcsin(1/\sqrt{3}) = 35.3^\circ$ , фазовая скорость в этой точке  $c_m = \sqrt{2/3}V$ , а длина волн  $\lambda_m = 4\pi V^2/3g$ .

Построенная картина, вообще говоря, справедлива для излучателя бесконечно малых размеров, когда эффективно возбуждаются все возможные волновые числа. Если учитывать конечный размер судна  $l$ , то

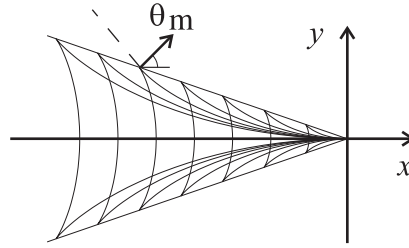


Рис. 2.22. Гравитационные волны на поверхности за движущимся источником

можно прийти к одному интересному выводу. Источник конечного размера  $l$  наиболее сильно возбуждает волны с  $k \sim 2\pi/l$  (если, разумеется, для них выполняется соотношение  $V > v_\phi$ ). Отсюда следует, что картина волн за источником конечного размера определяется безразмерным параметром  $Fr = V^2/gl$ , называемым в гидродинамике числом Фруда. Если  $Fr \ll 1$ , то волны, для которых  $\lambda \sim l$ , лежат вне пределов черенковского резонанса и интенсивность излучения в целом мала. В другом пределе  $Fr \gg 1$  следует ожидать интенсивного возбуждения волн и резкого повышения сопротивления движению судна. Если число Фруда порядка единицы, то меняя эту величину, можно наблюдать относительное изменение интенсивности волн с разными  $\lambda$ . При небольших числах  $Fr$  более сильно возбуждаются длинные волны, бегущие вслед за кормой (эта картина характерна для крупных судов), при больших  $Fr$  (быстроходный катер) — короткие волны, прижатые к границам клина.

**145.** Решение задачи аналогично решению задачи 140.

**146.** Решение задачи аналогично решению задачи 144 для гравитационных волн. Уравнения линий постоянной фазы капиллярных волн от движущегося источника в параметрической форме имеют вид

$$x = \frac{\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{2 \sin^2 \theta - \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta},$$

$$y = -\frac{\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{3 \sin \theta}{\cos^3 \theta}.$$

Для правильного построения картины излучения необходимо учесть, что фаза капиллярных волн принимает отрицательные значения.

**147.** Затухание волн на поверхности жидкости обусловлено ее вязкостью. Движение единичного объема жидкости в присутствии вязкости

подчиняется уравнению Навье-Стокса:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\text{grad } p + \mathbf{F} + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление,  $\mathbf{F}$  — суммарная внешняя сила,  $\eta$  — вязкость. В линейном приближении сносочный член  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$  мал по сравнению с  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  и им можно пренебречь. Оставшаяся слева производная по времени не может быть мала по сравнению со слагаемыми в правой части, в противном случае мы приходим к стационарной задаче, в которой колебательного движения нет. Поэтому по порядку величины выполняется соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \nu \Delta \mathbf{v},$$

где  $\nu = \eta / \rho$  — кинематическая вязкость.

Оценим, используя это соотношение, поглощаемую за счет вязкости мощность. Кинетическая энергия единицы объема жидкости  $\mathcal{E}_k \sim \rho v^2$ , а ее изменение во времени

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} \sim \rho v \frac{\partial v}{\partial t} \sim \rho \nu \Delta \mathbf{v}$$

Так как  $\Delta \mathbf{v} \sim v / L^2$ , где  $L$  — характерный пространственный масштаб, на котором изменяется скорость, то для коэффициента затухания получаем оценку

$$\gamma \sim \frac{1}{\mathcal{E}_k} \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} \sim \frac{\nu}{L^2} \quad (2)$$

Для случая гравитационных волн на глубокой воде в качестве характерного масштаба выступает длина волны, поэтому

$$\gamma \sim \nu k^2 \sim \frac{\nu \omega^4}{g^2}.$$

Величина  $\gamma$  определяет скорость затухания колебаний во времени. Если необходимо определить коэффициент пространственного затухания  $\beta = (\partial P / \partial x) P^{-1}$ ,  $P$  — переносимая волной мощность, то  $\gamma$  следует поделить на групповую скорость. Для гравитационных волн на глубокой воде  $v_{gp} \sim g / \omega$ , следовательно

$$\beta \sim \gamma / v_{gp} \sim \nu \omega^5 / g^3 = \nu k^{5/2} / g^{1/2}.$$

Подставляя  $\lambda = 1$  м,  $\nu = 1.75 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, получаем  $\gamma \sim 7 \cdot 10^{-5}$  1/с,  $\beta \sim 5 \cdot 10^{-5}$  1/м.

**148.** Коэффициент затухания во времени капиллярных волн

$$\gamma \sim \nu k^2 \sim \nu \left( \frac{\rho \omega^2}{\sigma} \right)^{2/3}.$$

Коэффициент затухания в пространстве  $\beta \sim \gamma/v_{zp} \sim \nu \sqrt{\rho k^3/\sigma}$ . О распространении волн имеет смысл говорить, если  $\beta \ll k$ , откуда  $\lambda \gg \lambda_{кр} = 2\pi\nu^2\rho/\sigma$ . Численная оценка дает для воды  $\lambda_{кр} \sim 0.3$  мкм, а для ртути  $\lambda_{кр} \sim 3 \cdot 10^{-3}$  мкм. Отсюда следует, что для всех разумных длин волн эффекты вязкости пренебрежимо малы.

## 2.12. Связанные волны и волновые неустойчивости

**149.** Ищем решение в виде  $F = F_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ ,  $I = I_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ . Такая подстановка в исходные уравнения дает систему уравнений

$$\begin{aligned} i(\omega - kv_1)F_0 &= \varepsilon I_0, \\ i(\omega + kv_1)I_0 &= \pm \varepsilon F_0, \end{aligned}$$

Перемножая их почленно, приходим к дисперсионному соотношению

$$(\omega - v_1k)(\omega + v_2k) = \mp \varepsilon^2. \quad (1)$$

Эти уравнения дисперсии представляют две из четырех эталонных ситуации слабой связи двух волн, наиболее широко распространенных в теории связанных волн.

При взаимодействии двух волн с законами дисперсии  $\omega = \omega_1(k)$  и  $\omega = \omega_2(k)$ , особую роль играют синхронные между собой волны, у которых примерно одинаковы частоты  $\omega$  и фазовая скорость  $\omega/k$ . В системе отсчета, движущейся с этой скоростью все остальные волны являются быстро осциллирующими и не вносят заметного вклада во взаимодействие. На плоскости  $(\omega, k)$  синхронные волны легко найти по точкам пересечения  $(\omega_0, k_0)$  дисперсионных характеристик свободных (не взаимодействующих) волн. Заметим, что в процесс взаимодействия вовлекаются и волны с близкими к точке синхронизма частотами и волновыми

числами. По этой причине дисперсионные характеристики связываются в некоторой окрестности  $(\Delta k, \Delta \omega)$  точки пересечения. Размер этой области связи тем больше, чем сильнее взаимодействие.

Если через область связи проходит еще одна дисперсионная характеристика, то соответствующие ей волны так же оказываются вовлеченными во взаимодействие. В зависимости от числа таких волн говорят о двух-, трехволновом (и т.д.) взаимодействии.

Обычно связанные волны легко узнать по дисперсионному уравнению, имеющему вид произведения множителей типа  $[\omega - \omega_1(k)]$ , например для двухволнового взаимодействия

$$[\omega - \omega_1(k)] [\omega - \omega_2(k)] = \delta, \quad (2)$$

где  $\delta$ , вообще говоря, функция  $\omega$  и  $k$ . Важное значение имеет случай слабого взаимодействия волн, когда область связи мала и дисперсионные характеристики вблизи точки синхронизма можно аппроксимировать первыми членами разложения в ряд Тейлора, а функцию  $\delta$  считать константой. Например, для двухволнового взаимодействия, если групповые скорости обеих волн в точке синхронизма отличны от нуля, можно записать

$$[\omega - \omega_0 - v_1(k - k_0)] [\omega - \omega_0 - v_2(k - k_0)] \approx \delta(\omega_0, k_0).$$

Здесь  $v_1 = (d\omega_1/dk)_{k=k_0}$ ,  $v_2 = (d\omega_2/dk)_{k=k_0}$ . Переносим начало координат на плоскости  $(\omega, k)$  в точку синхронизма, т.е. вводя новые переменные  $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$  и  $\tilde{k} = k - k_0$ , мы приходим к уравнению вида (1) (в котором тильды над переменными опущены). Два разных знака перед  $\varepsilon$  соответствуют разным знакам правой части дисперсионного уравнения в форме связанных волн (2) в точке синхронизма.

Легко понять, что всего имеется четыре эталонных ситуации при слабом взаимодействии двух волн. Рассматриваемый в данной задаче случай соответствует тому, что взаимодействующие волны имеют разные знаки групповой скорости в точке синхронизма, а знак в правой части дисперсионного уравнения может быть положительный или отрицательный. Оставшиеся два случая, когда групповые скорости имеют одинаковый знак, рассматриваются в задаче 150.

Дисперсионные характеристики, соответствующие уравнениям (1), приведены на рис. 2.23. Рисунок *a* соответствует знаку плюс, а рисунок *b* — знаку минус в исходных уравнениях. Дисперсионные кривые отличаются от прямых  $\omega = v_1 k$  и  $\omega = -v_2 k$  в некоторой окрестности точки пересечения. Размер этой окрестности по частоте  $\Delta \omega \sim \Delta \varepsilon$  и по

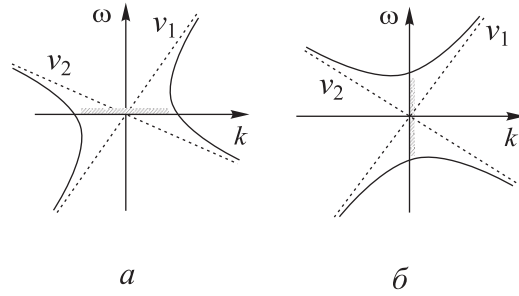


Рис. 2.23. Слабая связь двух волн, когда групповые скорости в точке синхронизма имеют разные знаки

волновым числам  $k \sim \varepsilon/\sqrt{v_1 v_2}$ . Оба размера определяются параметром  $\varepsilon$ , который называется коэффициентом связи, или параметром взаимодействия волн.

Обратим внимание, что в случае верхнего знака перед  $\varepsilon$  в исходных уравнениях, существует область волновых чисел  $|k| < 2\varepsilon/(v_1 + v_2)$  для которых значения  $\omega$ , найденные из дисперсионного уравнения, являются комплексными (на рис. эта область отмечена штриховкой). При этом один из корней обязательно имеет отрицательную мнимую часть:  $\text{Im } \omega < 0$ , следовательно возмущения с такими волновыми числами нарастают во времени, то есть в системе есть неустойчивость.

Для второго случая (знак минус перед  $\varepsilon$ ), наоборот, при любых волновых числах частоты действительны, следовательно здесь есть только пассивная связь волн друг с другом. С другой стороны, существует интервал частот  $|\omega| < 2\sqrt{v_1 v_2} \varepsilon / (v_1 + v_2)$ , для которых из дисперсионного уравнения получаются два комплексно сопряженных корня для волнового числа  $k$ . Поскольку в системе нет неустойчивости, это соответствует непропусканию: волны затухают в направлении своего распространения.

**150.** Дисперсионное уравнение в данном случае имеет вид

$$(\omega - v_1 k)(\omega - v_2 k) = \mp \varepsilon^2.$$

Для определенности считаем, что  $v_2 > v_1$ . Дисперсионные характеристики показаны на рис. 2.24. Верхний знак соответствует рисунку *a*, нижний — рисунку *б*. В первом случае для волновых чисел  $|k| < 2\varepsilon/(v_2 - v_1)$  имеем комплексно сопряженные частоты — в системе есть неустойчивость. Характер этой неустойчивости (абсолютная или конвективная)

будет определен в задаче 151. Одновременно для действительных частот  $\omega < 2\sqrt{v_1 v_2 \varepsilon} / (v_2 - v_1)$  имеем комплексно сопряженные волновые числа. Это свидетельствует о возможности усиления сигнала в системе.

Действительно, предположим, что мы имеем среду, описываемую дисперсионным уравнением  $D(\omega, k) = 0$  и в момент  $t = 0$  в точке  $x = 0$  включается источник, возбуждающий волны на частоте  $\Omega = \Omega' + i\Omega''$ , которая может быть комплексной. Физический смысл комплексной частоты ясен из зависимости возбуждающего сигнала от времени, она пропорциональна  $\exp(-\Omega''t) \exp(i\Omega't)$ : при  $\Omega'' < 0$  амплитуда колебаний источника экспоненциально нарастает во времени. Рассмотрим распространение волн справа от источника. Общее поле представляется суммой бегущих или затухающих волн, каждая из которых отвечает одной из ветвей дисперсионного уравнения, разрешенного относительно волнового числа:  $k_i(\Omega)$ , причем справа от источника могут быть отличными от нуля амплитуды только тех волн, которые переносят энергию в положительном направлении оси  $x$ . Чтобы выделить ветви дисперсионного уравнения, отвечающие таким волнам, предположим, что  $\Omega'' \rightarrow -\infty$ , т.е. источник включается бесконечно быстро. При этом в фиксированный момент времени мы должны получить пространственное затухание волн при  $x \rightarrow \infty$ , так они распространяются с конечной скоростью, и не успевают добежать от источника до точки наблюдения. Для этих волн должно быть  $k_i''(\Omega) < 0$ , иначе вместо затухания мы получим увеличение поля при удалении от источника. Волны, удовлетворяющие условию  $k_i''(\Omega) \rightarrow -\infty$  при  $\Omega'' \rightarrow -\infty$ , переносят энергию в положительном, а остальные — в отрицательном направлении оси  $x$ . Обозначим их соответственно через  $k_{+i}(\omega)$  и  $k_{-i}(\omega)$ .

Определив таким образом, какому типу волны соответствует каждая ветвь дисперсионного уравнения, можно найти, будет ли волна усиливающей или затухающей при действительном значении частоты  $\Omega$ . Если  $k_{+i}(\Omega) > 0$ , при  $\Omega'' = 0$ , то эта волна имеет распределение амплитуды в пространстве  $\exp[k_{+i}''(\Omega)x]$ , т.е. волна увеличивает амплитуду в направлении своего распространения — в системе есть усиление в положительном направлении оси  $x$ . Аналогично, если  $k_{-i}''(\Omega) < 0$ , то соответствующая волна усиливается при распространении в отрицательном направлении оси  $x$ .

Резюмируя, получаем следующий критерий различения пространственного усиления и непропускания в системе, принадлежащий Бриггсу [4, 1]: Если существует корень дисперсионного уравнения  $k_i(\omega)$ , такой, что при изменении мнимой части комплексной частоты от  $-\infty$  до нуля он пересекает действительную ось, то в системе существует усиление.



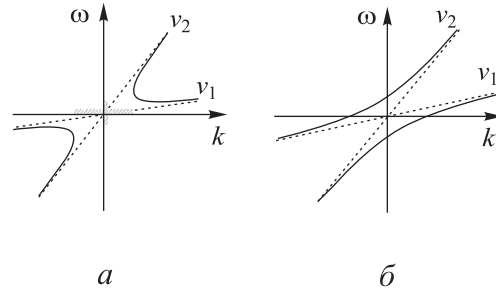


Рис. 2.24. Слабая связь двух волн, когда групповые скорости в точке синхронизма имеют одинаковые знаки

ние. Направление усиления определяется классом, к которому принадлежит корень:  $+$  или  $-$ . Важно подчеркнуть, что существенны только начальное и конечное положения корня: если он в процессе движения по комплексной плоскости  $k$  несколько раз переходит из нижней полуплоскости в верхнюю и обратно, но в конечном итоге остается в своей полуплоскости, такой корень соответствует непропусканию.

Возвращаясь к нашей задаче, видим, что при  $|\omega| \rightarrow \infty$  ветви дисперсионного уравнения стремятся к асимптотам  $\omega = v_1 k$ , и  $\omega = v_2 k$ , при  $\omega'' \rightarrow -\infty$ , для обеих корней имеем  $k''(\omega) \rightarrow -\infty$ . Следовательно обе волны распространяются вправо. При действительном  $\omega$  из интервала  $\omega < 2\sqrt{v_1 v_2} \varepsilon / (v_2 - v_1)$ , как уже отмечалось, имеем два комплексно сопряженных корня, один из которых перешел из нижней полуплоскости  $\omega$  в верхнюю, т.е. в системе имеется усиление волн, распространяющихся вправо.

Рассмотрим теперь нижний знак в исходных уравнениях. Дисперсионные характеристики показаны на рис. 2.24,б. В данном случае система пассивна, в ней нет неустойчивости и при всех частотах волны распространяются без усиления или непропускания.

**151.** В общем случае, когда знаки скоростей  $v_1$  и  $v_2$  произвольны, уравнения, описывающие слабое взаимодействие двух волн имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x} = \varepsilon I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + v_2 \frac{\partial I}{\partial x} = \pm \varepsilon F. \quad (1)$$

Из результатов задач 149 и 150 известно, что неустойчивость в системе существует только при верхнем знаке перед  $\varepsilon$  во втором уравнении, поэтому в дальнейшем ограничимся только этим случаем. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что  $v_2 > 0, v_2 > |v_1|$ .

Запишем дисперсионное уравнение для системы (1):

$$(\omega - v_1 k)(\omega - v_2 k) + \varepsilon^2 = 0. \quad (2)$$

Для выяснения характера неустойчивости в системе можно воспользоваться критерием, который позволяет сделать это с помощью исследования поведения корней дисперсионного уравнения на комплексных плоскостях  $\omega$  и  $k$ . Мы приведем один из таких критериев, принадлежащий Стэрроку (P.A.Sturrok), без доказательства, которое можно найти в [4]<sup>2</sup>.

Пусть дисперсионное уравнение общего вида  $D(\omega, k) = 0$  при некотором действительном  $k$  имеет корень  $\omega_i(k)$ , такой, что  $\omega_i''(k) < 0$ , тогда возмущения с этим волновым числом нарастают с течением времени, и в системе существует неустойчивость. Эта неустойчивость абсолютная, если: *существуют два корня дисперсионного уравнения  $k_i(\omega)$ , разрешенного относительно волнового числа, которые:*

- 1) лежат по разные стороны действительной оси на комплексной плоскости  $k$  при  $\omega'' \rightarrow -\infty$ ;
- 2) сливаются при некотором комплексном  $\omega = \omega_c$ , причем  $\omega_c'' < 0$ .

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то неустойчивость конвективная.

В некотором случае может происходить слияние в одной точке нескольких корней дисперсионного уравнения, эти случаи требуют дополнительного анализа.

Удобный способ поиска точек слияния основан на том, что в них должно выполняться условие

$$\frac{d\omega}{dk} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial \omega} \neq 0. \quad (3)$$

---

<sup>2</sup>Здесь необходимо сделать одно замечание. Всюду в этой книге мы выбираем пространственно-временную зависимость волн в виде  $\exp[i(\omega t - kx)]$ , как это принято обычно в радиофизике. В то же время, в теоретической физике наиболее распространенным является другой выбор знака перед мнимой единицей в показателе экспоненты. В излагаемом ниже критерии существенным являются знаки мнимых частей корней дисперсионного уравнения. Поэтому при исследовании конкретного случая необходимо учитывать, при каком выборе знака перед мнимой единицей в экспоненте получено уравнение дисперсии.

Решая это уравнение совместно с дисперсионным  $D(\omega, k) = 0$ , можно найти все седловые точки.

Применим критерий Стэррока к дисперсионному уравнению (2). Очевидно, что в системе есть неустойчивость для волновых чисел  $|k| < 2\varepsilon/|v_2 - v_1|$ . Чтобы выяснить, какая это неустойчивость, разрешим уравнение относительно  $k$ :

$$k_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2v_1v_2} \left[ (v_1 + v_2)\omega \pm \sqrt{(v_2 - v_1)^2\omega^2 - 4v_1v_2\varepsilon^2} \right].$$

Асимптотика корней при  $|\omega| \rightarrow \infty$  такова:  $k_1(x) \approx \omega/v_1$ ,  $k_2(x) \approx \omega/v_2$ . Очевидно, что если  $v_1v_2 > 0$ , то при  $\omega'' \rightarrow -\infty$  они лежат в одной полуплоскости комплексной плоскости  $k$  и первое условие критерия нарушено. Следовательно в этом случае неустойчивость конвективная.

Если  $v_1$  и  $v_2$  имеют разные знаки, корни при  $\omega'' \rightarrow -\infty$  лежат по разные стороны действительной оси  $k$  и первое условие критерия Стэррока выполнено. Корни  $k_{1,2}(\omega)$  сливаются при таком значении  $\omega$ , когда квадратный корень обращается в нуль, т.е. при  $\omega_c = \pm i2\sqrt{|v_1v_2|}/|v_2 - v_1|$ . Одна из этих седловых точек лежит в нижней полуплоскости  $\omega$ , т.е. второе условие критерия тоже выполнено. Следовательно неустойчивость абсолютная.

Резюмируя, можно сказать, что при слабой связи двух волн, приводящей к дисперсионному уравнению вида (2), реализуется конвективная неустойчивость, если знаки групповых скоростей волн в точке синхронизма совпадают, и абсолютная неустойчивость, если эти знаки противоположны.

Тот же результат поучительно получить другим способом. Для этого рассмотрим среду, описываемую уравнениями (1), и предположим, что в момент  $t = 0$  в ней создано  $\delta$ -образное возмущение. Найдем, как это возмущение эволюционирует во времени. Прежде всего перейдем в систему отсчета  $(x', t')$ , движущуюся со скоростью  $V = (v_1 + v_2)/2$  относительно исходной. В этой системе уравнения (1) перепишутся так:

$$\frac{\partial F}{\partial t'} - v \frac{\partial F}{\partial x'} = \varepsilon I, \quad \frac{\partial I}{\partial t'} + v \frac{\partial I}{\partial x'} = \varepsilon F, \quad (4)$$

$v = (v_2 - v_1)/2$ . Выражая  $I$  из первого уравнения и подставляя во второе, получаем, что  $F$  удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t'^2} - v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} - \varepsilon^2 F = 0. \quad (5)$$

Это уравнение следует дополнить начальными условиями  $F(x', +0) = \delta(x')$ ,  $F_t(x', +0) = 0$ . Для решения начальной задачи используем метод Лапласа. Применив преобразование Лапласа по времени к (5), получаем:

$$\frac{\partial F(x', p)}{\partial x'^2} - \frac{p^2 - \varepsilon^2}{v^2} F(x', p) = -\frac{p}{v^2} \delta(x'). \quad (6)$$

Здесь  $F(x', p)$  образ функции  $F(x', t')$ . Решение уравнения (6) имеет вид

$$F(x', p) = A e^{\mp \sqrt{p^2 - \varepsilon^2} x' / v},$$

где верхний знак выбирается при  $x' > 0$ , а нижний — при  $x' < 0$ . Решения, нарастающие при  $|x'| \rightarrow \infty$ , исключаются, чтобы существовало обратное преобразование Лапласа. Константу  $A$  находим из граничного условия  $dF/dx'|_{+0} - dF/dx'|_{-0} = -p/v^2$ , которое получается из (6) интегрированием по бесконечно малому интервалу, содержащему точку  $x' = 0$ . Отсюда  $A = p/(2v\sqrt{p^2 - \varepsilon^2})$ , и при  $x' > 0$  можно записать:

$$F(x', p) = \frac{p}{2v\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} e^{-\sqrt{p^2 - \varepsilon^2} x' / v}. \quad (7)$$

Дальнейшие выкладки можно производить только для  $x' > 0$ , поскольку ответ должен быть четной функцией относительно  $x'$ . Используя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$F(x', t') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p \exp(-\sqrt{p^2 - \varepsilon^2} x' / v)}{2v\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} e^{pt'} dp. \quad (8)$$

Интегрирование ведется по прямой, параллельно мнимой оси комплексной плоскости  $p$ , лежащей справа от особых точек подинтегрального выражения. Это соотношение можно представить в виде

$$F(x', t') = \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp(-\sqrt{p^2 - \varepsilon^2} x' / v)}{\sqrt{p^2 - \varepsilon^2}} e^{pt'} dp \right]. \quad (9)$$

Стоящий здесь интеграл является табличным [10], и результат равен

$$F(x', t') = \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial t'} \left[ I_0 \left( \varepsilon \sqrt{t'^2 - x'^2 / v^2} \right) \theta(t' - x' / v) \right]. \quad (10)$$

Здесь  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя,  $\theta(z)$  — функция-ступенька:  $\theta(z) = 0$  если  $z < 0$  и 1, если  $z > 0$ .

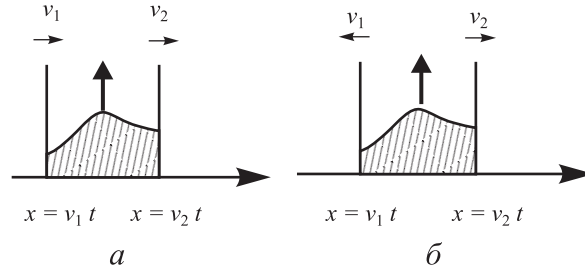


Рис. 2.25. К решению задачи 151. Эволюция  $\delta$ -импульса в среде с конвективной (а) и абсолютной (б) неустойчивостью.

При вычислении производной по времени необходимо учесть, что выражение в квадратных скобках претерпевает скачок при  $t' = |x'|/v$  высотой  $1/(2v)$ , поэтому в результате появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное  $\delta$ -функции Дирака:

$$F(x', t') = \begin{cases} 0 & \text{при } t' < |x'|/v, \\ \frac{1}{2}\delta(x' - vt') + \frac{\varepsilon t' I_1\left(\varepsilon\sqrt{t'^2 - x'^2/v^2}\right)}{2v\sqrt{t'^2 - x'^2/v^2}} & \text{при } t' \geq |x'|/v. \end{cases}$$

Решение для  $x' < 0$  получается отсюда сменой знака перед  $x'$ .

Возвращаясь в исходную систему отсчета, получаем

$$F(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < x/v_1, t > x/v_2, \\ \frac{1}{2} [\delta(x - v_1 t) + \delta(x - v_2 t)] + \frac{\varepsilon t I_1\left(\varepsilon\sqrt{t^2 - (x - Vt)^2/v^2}\right)}{2v\sqrt{t^2 - (x - Vt)^2/v^2}} & \text{при } x/v_1 \leq t \leq x/v_2. \end{cases} \quad (11)$$

Пользуясь этим выражением, легко установить поведение решения в фиксированной точке пространства при  $t \rightarrow \infty$ . При этом аргумент функции Бесселя становится большим и можно воспользоваться ее асимптотическим представлением  $I_0(z) \sim e^z/\sqrt{2\pi z}$  при  $z \rightarrow \infty$ . Отсюда очевидно, что распространение волны происходит так, как показано на рис. 2.25. Между двумя  $\delta$ -функциями, движущимися со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , бежит нарастающий горб.

Если  $v_1 > 0$ ,  $v_2 > 0$ , в любой фиксированной точке через некоторое время возмущение пробежит мимо и поле станет равным нулю, так что мы имеем конвективную неустойчивость.

При  $v_1 < 0$ ,  $v_2 > 0$  оба импульса распространяются в разные стороны, и область, охватываемая возмущением, расширяется. В фиксированной точке  $x$  имеем нарастание по закону  $F(x, t) \sim \exp \varepsilon t / \sqrt{t}$  при  $t \rightarrow \infty$ , так что в данном случае реализуется абсолютная неустойчивость.

**154.** Введем безразмерные частоту и волновое число соотношениями  $\tilde{\omega} = \omega / \omega_0$ ,  $\tilde{k} = kc / \omega_0$ , а также параметры  $\beta = v/c < 1$  и  $\varepsilon = \omega_p / \omega_0$  и перепишем дисперсионное уравнение в безразмерной форме:

$$(\tilde{\omega}^2 - \tilde{k}^2)(\tilde{\omega} - \beta\tilde{k} - 1) = \varepsilon\tilde{\omega}^2. \quad (1)$$

Видно, что это уравнение отвечает трем связанным волнам, дисперсионные уравнения которых в отсутствии связи ( $\varepsilon = 0$ ) имеют вид  $\omega = k$ ,  $\omega = -k$  и  $\omega = vk + 1$ . Здесь и в дальнейшем тильды над безразмерными переменными будем опускать. Первые две волны отвечают электромагнитным волнам, бегущим в противоположных направлениях, а третья — быстрой циклотронной волне в электронном потоке, находящемся в продольном магнитном поле.

Уравнение (1) кубическое, поэтому его прямой анализ затруднителен. Можно, однако, воспользоваться следующим приемом, позволяющим качественно построить дисперсионные характеристики и выяснить области параметров, при которых возможна неустойчивость. Введем величины  $x = \omega/k$  и  $y = 1/k$ . Здесь  $x$  по существу является безразмерной фазовой скоростью, а  $y$  — длиной волны. В новых переменных легко выразить  $y$  через  $x$ :

$$y = \frac{(x^2 - 1)(x - \beta)}{(1 + \varepsilon)x^2 - 1}. \quad (2)$$

Функция  $y(x)$  является отношением двух полиномов, ее график легко построить. Она имеет нули в точках  $x = -1$ ,  $x = \beta$  и  $x = 1$  и полюса в точках  $x = \pm 1/\sqrt{1 + \varepsilon}$ , соответственно, в зависимости от соотношения между  $\beta$  и  $1/\sqrt{1 + \varepsilon}$ , функция имеет качественно различный вид.

Для случая  $\beta < 1/\sqrt{1 + \varepsilon}$  график функции  $y(x)$  показан на рис. 2.26, а. Из него видно, что для каждого значения  $y$  имеется ровно три действительных корня  $x$ . Это значит, что каждому действительному значению волнового числа соответствует три значения частоты. Поскольку исходное уравнение (1) имеет третий порядок относительно  $\omega$ , то других корней нет. Значит при таком соотношении параметров неустойчивость отсутствует.

Дисперсионные характеристики в координатах  $(k, \omega)$  легко перестроить из графика 2.26, а. Для этого нужно исследовать предельное поведение кривых дисперсии в одних и других переменных в характерных

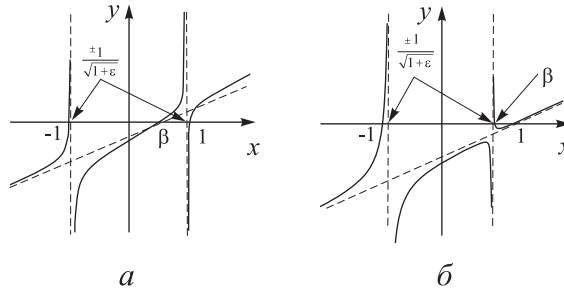


Рис. 2.26. К решению задачи 154. Дисперсионные характеристики в переменных  $(1/k, v_\phi)$ .

точках: при стремлении  $x$  и  $y$  к нулю или к бесконечности. Например, при  $x \rightarrow \pm\infty$  из уравнения (2) имеем  $y \approx (x - \beta)/(1 + \varepsilon)$ , откуда получаем, что одна из ветвей дисперсионной характеристики ведет себя при  $k \rightarrow 0$  как  $\omega = 1 + \varepsilon + \beta k$ . При  $x \rightarrow \beta$  получаем  $y \rightarrow \pm 0$ , т.е. существуют ветви, для которых  $\omega = \beta k$  при  $k \rightarrow \pm\infty$ . При  $x \rightarrow 1$  получаем  $y = 2(1 - \beta)(x - 1)/\varepsilon$  или  $\omega = k + \varepsilon/(2(1 - \beta))$  при  $k \rightarrow \pm\infty$ . Это уравнение дает вторую асимптоту на бесконечности. Аналогично предел  $x \rightarrow -1$  дает третью асимптоту в переменных  $(k, \omega)$ :  $\omega = -k + \varepsilon/(2(1 + \beta))$ . Наконец при  $x \rightarrow \pm 1/\sqrt{1 + \varepsilon}$  получаем две ветви, проходящие на плоскости  $(k, \omega)$  через начало координат под углами  $\pm 1/\sqrt{1 + \varepsilon}$ .

Этих данных достаточно, чтобы построить кривые дисперсии, которые приведены на рис. 2.27,а.

Рассмотрим теперь случай  $1/\sqrt{1 + \varepsilon} < \beta < 1$ . Дисперсионные кривые в переменных  $(x, y)$  показаны на рис. 2.27,б. Отличие от предыдущего случая в том, что теперь на этом графике имеются локальные максимум и минимум. Важное заключение состоит в том, что значение  $y$  в правом минимуме должно быть не меньше, чем его значение в левом максимуме, иначе на графике будет такая область значений  $y$ , при которых кубическое относительно  $x$  уравнение (2) будет иметь пять корней. Следовательно при таком соотношении между параметрами обязательно существует область значений  $y$ , при которых имеются два комплексно сопряженных корня  $x$ . Один из этих корней приводит к частоте, лежащей в нижней полуплоскости  $\omega$ , что соответствует неустойчивости.

Графики кривых дисперсии в координатах  $(k, \omega)$  можно построить таким же образом, как и в предыдущем случае. Результат такого построения приведен на рис. 2.26,б.

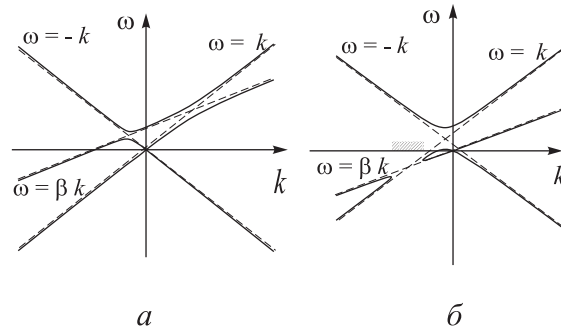


Рис. 2.27. К решению задачи 154. Дисперсионные характеристики в переменных  $(k, \omega)$ . Пунктиром показаны дисперсии несвязанных волн. Штриховкой на оси  $k$  отмечена область неустойчивости.

**155.**  $P > 2(KEI)^{1/2}$ .

**157.**  $L > 2\pi c/\varepsilon$ .

**158.** Прежде всего заметим, что если дисперсионные характеристики несвязанных волн  $\omega_1(k, \beta)$  и  $\omega_2(k, \beta)$  пересекаются, то в системе заведомо есть неустойчивость, так как частоты в точке синхронизма равны  $\omega = \pm i\varepsilon$ . Поскольку нас интересует граница зоны неустойчивости, предположим, что точек пересечения дисперсионных характеристик нет. Для определенности считаем, что  $\omega_1(k, \beta) > \omega_2(k, \beta)$ . Разрешим уравнение дисперсии относительно  $\omega$ :

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ \omega_1(k, \beta) + \omega_2(k, \beta) \pm \sqrt{D(k)} \right]. \quad (1)$$

где  $D(k) = [\omega_1(k, \beta) - \omega_2(k, \beta)]^2 - 4\varepsilon^2$  — дискриминант уравнения, являющийся известной функцией волнового числа.

На рис. 2.28 показаны три возможных случая поведения функции  $D(k)$ . Если при всех  $k$  дискриминант положителен (кривая 1), обе частоты действительны и неустойчивости нет. Если в некотором интервале волновых чисел дискриминант принимает отрицательные значения, для этих волновых чисел неустойчивость есть (кривая 2). Ясно, что пограничная ситуация между этими случаями соответствует кривой 3, когда глобальный минимум функции  $D(k)$  лежит на действительной оси. Условия этого выглядят так:  $D(k_0) = 0$ ,  $dD(k_0)/dk = 0$ ,  $D''(k_0) > 0$ .



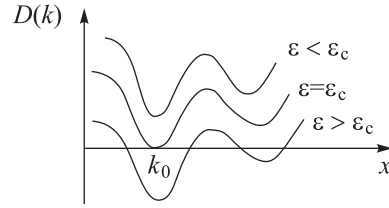


Рис. 2.28. К решению задачи 158. Характерное поведение дискриминанта дисперсионного уравнения в области устойчивости ( $\varepsilon < \varepsilon_c$ ), в критической точке ( $\varepsilon = \varepsilon_c$ ) и в области неустойчивости ( $\varepsilon > \varepsilon_c$ ).

Подставляя сюда выражение для  $D(k)$  получаем

$$\begin{aligned}\omega_1(k_0, \beta) - \omega_2(k_0, \beta) &= 2\varepsilon, \\ \omega'_1(k_0, \beta) - \omega'_2(k_0, \beta) &= 0, \\ \omega''(k_0, \beta) - \omega''(k_0, \beta) &> 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Исключив отсюда  $k$ , получаем искомые уравнения, определяющие границу зоны неустойчивости на плоскости параметров  $(\varepsilon, \beta)$ . Отметим, что это необходимые, но не достаточные условия, так как таким же уравнениям подчиняется и локальный минимум функции  $D(k)$ . Поэтому для каждой линии, найденной с помощью уравнений (2), необходима дополнительная проверка. Для этого можно, например, проверить на неустойчивость одну из точек на каждой из таких линий. Если неустойчивость в этой точке есть, то такая линия соответствует локальному минимуму, и вся она лежит в области неустойчивости.

Интересно задаться вопросом, какой тип неустойчивости возникает при переходе через границу? Для ответа на него, можно воспользоваться методом теории слабо связанных волн. Пусть при некотором  $\beta$  критическое значение параметра  $\varepsilon$  равно  $\varepsilon_c$ . При  $\varepsilon < \varepsilon_c$  неустойчивости в системе нет, а при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  она появляется для волновых чисел, лежащих вблизи  $k_0$ . Если превышение критического значения мало,  $\varepsilon - \varepsilon_c \ll \varepsilon_c$ , то область ширина области неустойчивости по волновым числам и частотам также мала  $\Delta k, \Delta \omega \sim \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0}$ , поэтому в этой области дисперсионные характеристики можно разложить в ряд Тейлора. Проще сделать это не в исходной дисперсионном уравнении, а выражении (1). Положим в нем  $\omega = \omega_0 + \tilde{\omega}$ ,  $k = k_0 + \tilde{k}$ ,  $\omega_0 = [\omega_1(k_0) + \omega_2(k_0)]/2$ ,  $D(k) \approx D''(k_0)(\tilde{k})^2/2$ ,

тогда

$$\tilde{\omega} = v\tilde{k} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_c[\omega_1''(k_0) - \omega_2''(k_0)]\tilde{k}^2 - (\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2)}.$$

где для краткости введено обозначение  $v = d\omega_1(k_0)/dk = d\omega_2(k_0)/dk$  и использованы уравнения (2) Эти корни соответствуют квадратному уравнению

$$[(\tilde{\omega}) - v\tilde{k}]^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_c[\omega_1''(k_0) - \omega_2''(k_0)] + (\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2) = 0,$$

или

$$\left[ \tilde{\omega} - \left( v - \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_c[\omega_1''(k_0) - \omega_2''(k_0)]} \right) \tilde{k} \right] \cdot \left[ \tilde{\omega} - \left( v + \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_c[\omega_1''(k_0) - \omega_2''(k_0)]} \right) \tilde{k} \right] = -(\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2).$$

Последнее уравнение имеет вид стандартного дисперсионного уравнения теории двух слабо связанных волн, причем, как это и должно быть, при  $\varepsilon > \varepsilon_c$  в системе существует неустойчивость. Кроме того, можно утверждать, что эта неустойчивость будет конвективной, если наклоны асимптот кривых дисперсии несвязанных волн имеют одинаковые знаки, и абсолютной в противном случае. Поэтому точка на плоскости параметров, определяемая, вместе с соотношениями (2), уравнением

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_c[\omega_1''(k_0) - \omega_2''(k_0)]}, \quad (3)$$

будет тройной точкой — в ней сходятся области абсолютной, конвективной неустойчивостей и устойчивости. Ясно, что вблизи этой точки динамика возмущений в среде будет выглядеть наиболее сложно.

**159.** Перенормировкой переменных и параметров  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_0$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon/\omega_0$ ,  $\tilde{k} = k\sqrt{c/\omega_0}$ ,  $v_0 = v/\sqrt{v/(c\omega_0)}$  дисперсионное уравнение сводится к уравнению с двумя параметрами:

$$(\tilde{\omega} - v_0\tilde{k})(\tilde{\omega} - 1 - \tilde{k}^2) = -\varepsilon_0^2.$$

Мы имеет дисперсионное уравнение в форме двух связанных волн, поэтому для нахождения границ зоны неустойчивости можно использовать метод, развитый при решении задачи 158. Используя уравнения (2)

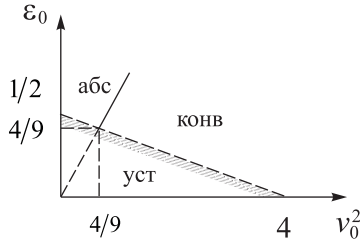


Рис. 2.29. Плоскость параметров с различным поведением системы для дисперсионного уравнения из задачи 159.

из этого решения, задачи, получаем необходимые условия для границы неустойчивости:

$$1 + \tilde{k}^2 - v_0 \tilde{k} = 2\varepsilon, \quad v_0 = 2\tilde{k},$$

или

$$1 - \frac{v_0^2}{4} = 2\varepsilon_0.$$

Плоскость параметров удобно представить в координатах  $(v_0^2, \varepsilon_0)$  (рис. 2.29). В этом случае граничная линия представляет отрезок прямой. Поскольку мы получили одну границу, то ясно, что он соответствует глобальному минимуму дискриминанта (см. решение задачи 158). Также очевидно, что при очень больших  $\varepsilon$  неустойчивость есть, поэтому область устойчивости ограничена осями координат и найденной линией.

Найдем на граничной линии точку, где сходятся области абсолютной, конвективной неустойчивостей и устойчивости. Воспользовавшись уравнением (3) из задачи 158, получаем  $v_0^2 = \varepsilon$ , что совместно с уравнением для границы дает  $v_0^2 = 4/9$ ,  $\varepsilon = 4/9$ .

**160.** Прежде всего заметим, что величины  $\omega_0$  и  $d$  можно исключить из дисперсионного уравнения перенормировкой, что мы будем предполагать сделанным:

$$(\omega - vk - 1)(\omega - vk + 1) = -\frac{\varepsilon^2}{1 + k^2}.$$

Область неустойчивых волновых чисел определяется условием  $\omega_1(2) - \omega_2(2) < 2\varepsilon/(1 + k^2)$ , где  $\omega_1(k)$  и  $\omega_2(k)$  — дисперсии несвязанных волн.

Отсюда получаем  $\sqrt{1+k^2} < \varepsilon$ . Из этого соотношения следует, что неустойчивость существует при  $\varepsilon > 1$ , причем возникает она для волновых чисел, близких к  $k_0 = 0$ .

Пусть  $\varepsilon$  слегка превышает единицу. В этом случае в правой части дисперсионного уравнения для малых волновых чисел можно записать  $\varepsilon^2/(1+k^2) \approx \varepsilon^2(1-k^2)$ . Тогда оно принимает вид  $(\omega - kv - 1)(\omega - kv + 1) = \varepsilon^2(1 - k^2)$  или

$$[\omega - (v + \varepsilon)k][\omega - (v - \varepsilon)k] = 1 - \varepsilon^2.$$

Мы пришли к эталонному уравнению теории двух связанных волн, в котором есть неустойчивость при  $\varepsilon > 1$ . Характер этой неустойчивости определяется наклоном асимптот. Она будет конвективной при  $v > \varepsilon$  и абсолютной при  $v < \varepsilon$ . Плоскость параметров показана на рис. 2.30.

**165.** Прежде всего поясним, что введение мнимой добавки в дисперсию одной из несвязанных волн отвечает бесконечно малому затуханию этой волны в процессе распространения. Распространение гармонической волны с частотой  $\omega$  происходит по закону  $\exp[i(\omega t - iBx + \nu x)]$ . Волна затухает при возрастании  $x$  ( $\nu < 0$ ), поэтому если в системе без связи неустойчивости нет, то следует считать, что эта волна распространяется вправо.

Нарисуем дисперсионные характеристики для связанных волн (рис. 2.31). Область связи охватывает диапазон волновых чисел  $\Delta k \sim 1$ , по этой причине при  $B \gg 0$  во взаимодействие вовлечена ветвь параболы, соответствующая распространению второй несвязанной волны направо, а при  $B \ll 0$  — налево. Так как первая волна, как мы установили, распространяется направо, то в первом случае мы имеем взаимодействие однонаправленных волн и конвективную неустойчивость, а во втором — разнонаправленных и абсолютную неустойчивость. При  $|B| \sim 1$  все волны сильно взаимодействуют и разобраться с характером неустойчивости не так просто.

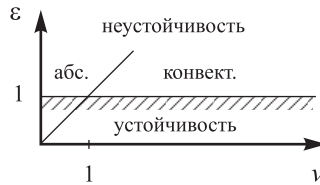


Рис. 2.30. Плоскость параметров с различным поведением системы для дисперсионного уравнения из задачи 160.

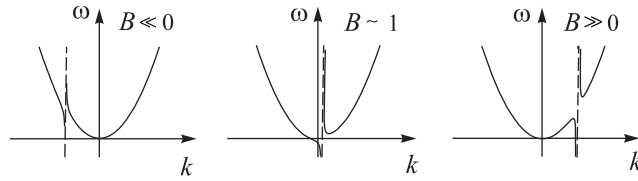


Рис. 2.31. Дисперсионные характеристики для системы из задачи задачи 165.

Найдем граничное значение параметра  $B$ , при котором происходит смена характера неустойчивости. Для этого воспользуемся следствием из критерия Стэррока разделения абсолютной и конвективной неустойчивости, сформулированного в решении задачи 151. Возникновение в системе абсолютной неустойчивости связано с тем, что одна из седловых точек дисперсионного уравнения переходит в комплексной плоскости  $\omega$  из верхней полуплоскости в нижнюю. В момент перехода выполняются соотношения

$$\omega = \omega(k), \quad \frac{d\omega}{dk} = 0, \quad \text{Im } \omega(k) = 0. \quad (1)$$

Они дают в пространстве  $N$  параметров задачи уравнение гиперповерхности, размерностью  $N - 1$ . Например для плоскости параметров мы получаем линию, а если параметр всего один — критическую точку. Нужно подчеркнуть, что условия (1) являются необходимыми, но не достаточными, так как они определяют момент пересечения седловой точкой действительной оси, но эта точка может быть не первой в нижней полуплоскости, или она может отвечать слиянию корней дисперсионного уравнения, соответствующих волнам, распространяющимся в одну сторону.

Применим этот критерий к нашему уравнению дисперсии. Первые два соотношения из (1) имеют вид

$$\omega = k^2 + \frac{1}{k - B}, \quad \frac{d\omega}{dk} = 2k - \frac{1}{(k - B)^2}.$$

Если ввести  $z = k - B$ , то отсюда легко исключить  $k$  и выразить  $\omega$  и  $B$  через  $z$ :

$$\omega = \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{z}, \quad B = -z + \frac{1}{2z^2}. \quad (2)$$

Если задано действительное значение  $B$ , то из второго уравнения можно определить  $z$  и подставить в первое, чтобы определить положение седловой точки на плоскости  $\omega$ . Относительно  $z$  второе уравнение является кубическим, поэтому его решение дает либо три действительных корня, либо одно действительное и два комплексно сопряженных. Очевидно, что в первом случае все три седловые точки, полученные из первого уравнения в (2), будут лежать на действительной оси в комплексной плоскости  $\omega$ , а во втором две комплексно сопряженные точки лежат симметрично относительно этой оси, а третья находится на ней. Выход одной из точек в нижнюю полуплоскость происходит при таком значении  $B$ , когда кубическое уравнение  $2z^3 + 2Bz^2 - 1 = 0$  имеет комплексно сопряженные корни. Легко определить, что это происходит при  $B < B_c = 3/2$ , следовательно при  $B > 3/2$  в системе существует конвективная неустойчивость, а при  $B < 3/2$  — абсолютная.

**166.** Прежде всего отметим, что система, рассматриваемая в это задаче, представляет собой распределенный резонатор, у которого существует бесконечный набор собственных частот. Причина их появления поясняется на рис. 2.32. На нем показана дисперсионная характеристика некоторой среды, заключенной между двумя зеркалами, расстояние между которыми  $L$ . Предположим, что зеркала идеально отражающие, тогда по длине системы должно укладываться целое число полуволн, иначе говоря, в системе возбуждаются только волновые числа, удовлетворяющие соотношению  $k_i = \pi i/L$ , где  $i$  — целое. Им соответствуют частоты  $\omega_i = \omega(k_i)$ . Это и есть собственные частоты резонатора. Их значения определяются дисперсионной характеристикой среды и длиной системы. Отметим, что при увеличении  $L$  точки на графике  $\omega(k)$  все более плотно заполняют дисперсионную кривую, так что в пределе  $L \rightarrow \infty$  собственные частоты существуют практически при любом заданном значении частоты из некоторых интервалов. Например для дисперсии, показанной на рис. 2.32, собственные частоты бесконечно длинной системы плотно заполняют интервал  $(0, \omega_0)$ . Если зеркала не идеально отражающие и их коэффициенты отражения зависят от частоты, то набор возможных волновых чисел уже не будет эквидистантным, но все равно, при увеличении длины системы они будут более плотно заполнять всю ось  $k$ , следовательно точки, отвечающие собственным частотам, будут также плотно заполнять дисперсионную кривую.

Что изменится, если среда имеет потери или, наоборот, активная? В этом случае значения возможных волновых чисел останутся такими же, как и в пассивной среде, так как они определяются только длиной

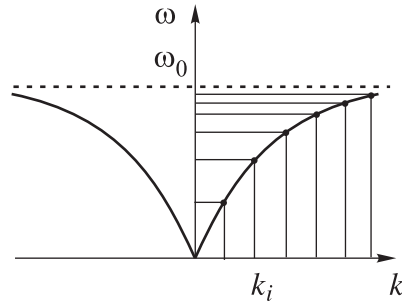


Рис. 2.32. Дискретный набор собственных частот волновой среды, помещенной в резонатор

системы и условиями на границе, а вот частоты изменятся. В среде с затуханием или неустойчивостью дисперсионная характеристика такова, что действительным значениям волновых чисел отвечают комплексные частоты, поэтому колебаниям системы будут отвечать комплексные собственные частоты  $\omega_i = \omega' + i\omega''$ . Колебания будут затухать, если  $\omega''_i > 0$ , и нарастать, если  $\omega''_i < 0$ .

*Если при заданных параметрах среды и зеркал в системе существуют такие собственные частоты, у которых  $\omega''_i$  меньше нуля, система неустойчива.*

Из сказанного следует, что для выявления неустойчивости в ограниченных волновых системах, необходимо решать задачу с учетом условий на ее границах.

Существует, однако, ситуация, когда устойчивость или неустойчивость конечной системы определяется целиком свойствами среды. Такая ситуация возникает в пределе систем с очень большой длиной и носит название *глобальной неустойчивости*.

Понятие глобальной неустойчивости введено в 1966 году А.Г. Куликовским, как и критерий, позволяющий выявить существование глобальной неустойчивости в конкретной системе. Суть этого критерия состоит в следующем<sup>3</sup>.

Разрешим дисперсионное уравнение относительно волновых чисел  $k = k_i(\omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  ( $s$  — число ветвей дисперсионного уравнения). В среде с потерями и неустойчивостью для действительных частот функции  $k_i(\omega)$  комплексные, причем некоторые из них имеют положительные, а некоторые — отрицательные мнимые части. Разделим волны по

<sup>3</sup>В изложении этого критерия мы следуем [4].

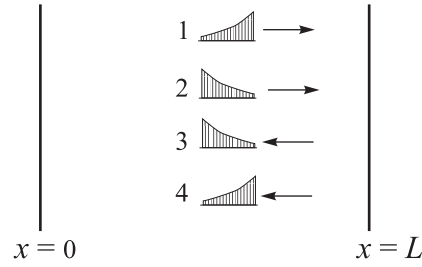


Рис. 2.33. Усиливаемые и затухающие волны.

направлению их распространения, критерий такого разделения сформулирован в решении задачи 150: те волны, у которых  $k''(\omega) \rightarrow -\infty$  при  $\omega'' \rightarrow -\infty$ , распространяются вправо, а те, у которых  $k''(\omega) \rightarrow +\infty$  — влево. Дисперсионные характеристики этих волн будем соответственно обозначать  $k_{+i}$  и  $k_{-i}$ . В задаче 150 мы также установили, что волны из первого класса, у которых  $k''_{+i} > 0$ , и волны из второго класса, у которых  $k''_{-i} < 0$  усиливаются в среде, а остальные — затухают, или, если мнимая часть их волнового числа равна нулю, распространяются без усиления и затухания. На рис. 2.33 схематически показана картина распространения волн. Рядом с номером каждой волны стрелкой показано направление ее распространения и приведена эюра, изображающая изменение амплитуды волны в пространстве. Волны 1 и 2 принадлежат классу  $\{+\}$ , а волны 3 и 4 — классу  $\{-\}$ . При этом волны 1 и 3 усиливаются, а волны 2 и 4 — затухают.

Упорядочим ветви дисперсионного уравнения следующим образом: при каждом комплексном значении частоты волны из класса  $\{+\}$  расположим в порядке уменьшения алгебраической величины мнимой части волнового числа:  $k''_{+1} \geq k''_{+2} \geq \dots$ , а волны из класса  $\{-\}$  в порядке увеличения алгебраической величины мнимой части волнового числа:  $k''_{-1} \leq k''_{-2} \leq \dots$ . Если при фиксированной частоте нанести значения  $k_i(\omega)$  на комплексную плоскость  $k$ , то корень  $k_{+1}(\omega)$  лежит выше всех остальных корней из класса  $\{+\}$ , а корень  $k_{-1}(\omega)$  — ниже всех других корней из класса  $\{-\}$ . Обозначим эти корни просто как  $k''_+$  и  $k''_-$ . Волны  $k_+$  и  $k_-$  усиливаются сильнее всех остальных, либо затухают медленнее всех остальных волн своего класса.

Пусть амплитуда волны  $k_+$  вблизи зеркала левого зеркала равна  $A_+(0)$ . При распространении до правого зеркала она станет равной  $A_+(0) \exp(k''_+ L)$ . Амплитуды остальных волн, бегущих вправо, либо увеличиваются не столь быстро, либо затухают, поэтому, при достаточно



большой длине системы, в поле, падающем на правое зеркало, преобладает волна  $k_+$ . После отражения от зеркала часть энергии этой волны переходит в волну  $k_-$  с коэффициентом трансформации  $R_2$ . Амплитуда этой волны вблизи правого зеркала будет равна  $|R_2|A_+(0)\exp(k_+''L)$ , а на левом зеркале она станет равной  $|R_2|A_+(0)\exp[(k_+'' - k_-'')L]$ . Остальные бегущие налево волны затухают быстрее, и их вклад в полное поле вблизи левого зеркала пренебрежимо мал. Наконец, при отражении в точке  $x = 0$  волна  $k_-$  преобразуется в волну  $k_+$  с коэффициентом трансформации  $R_1$ , амплитуда последней в результате оказывается равной  $A_+(0)|R_1||R_2|\exp[(k_+'' - k_-'')L]$ . Чтобы цепь обратной связи замкнулась, необходимо выполнение равенства

$$|R_1||R_2|\exp[(k_+'' - k_-'')L] = 1.$$

Устремим в этом соотношении длину к бесконечности. Его левая часть стремится к нулю или бесконечности, в зависимости от того, отрицательна или положительна величина  $(k_+'' - k_-'')$ . Единственная возможность сохранения равенства в пределе бесконечной длины, состоит в выполнении условия

$$F(\omega', \omega'') = \text{Im}[k_+(\omega) - k_-(\omega)] = 0. \quad (1)$$

Это уравнение определяет на комплексной плоскости  $\omega$  линию, на которой лежат точки, отвечающие собственным частотам системы. Если  $L \rightarrow \infty$ , то точки заполняют эту линию плотно<sup>4</sup>. Таким образом, если какой-нибудь участок кривой, определяемой уравнением (1), лежит в нижней полуплоскости  $\omega$ , то в системе существует глобальная неустойчивость.

Сформулируем достаточное условие существования глобальной неустойчивости, проверка которого обычно более проста, чем использование условия (1). Пусть при некотором действительном  $\omega = \omega_0$  выполняется  $F(\omega_0, 0) > 0$ . Это значит, что корень  $k_+(\omega_0)$  лежит выше на комплексной плоскости  $k$  корня  $k_-(\omega_0)$ . Будем уменьшать мнимую часть  $\omega$  от нуля до  $-\infty$ , при этом  $k_+$  должен сдвигаться вниз, а  $k_-$  — вверх, так что при некотором конечном  $\omega'' < 0$  условие (2) будет выполнено, следовательно в системе будет существовать глобальная неустойчивость. Подчеркнем, что это *достаточное*, но не *необходимое* условие.

Точно таким же образом можно показать, что если глобальная неустойчивость отсутствует, то *необходимо*, чтобы  $F(\omega', 0) \leq 0$  при всех  $\omega'$ .

<sup>4</sup>Подчеркнем, что функция  $F(\omega', \omega'')$  не является аналитической функцией комплексной частоты  $\omega$ .

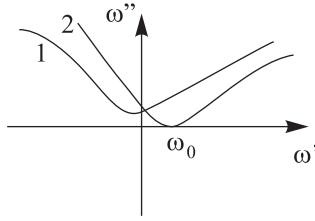


Рис. 2.34. Решение уравнения (1) на комплексной плоскости  $\omega$ . 1 — глобальной неустойчивости нет, 2 — система находится на границе неустойчивости.

Пусть система зависит от параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Будем говорить, что система находится на границе глобальной неустойчивости, если при данном значении параметров  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots$  она устойчива, но существуют такие бесконечно малые вариации параметров, которые делают ее глобально неустойчивой.

Очевидно, если система находится на границе неустойчивости, то точки кривой, определяемой уравнением (1), лежат либо на действительной оси плоскости  $\omega$ , либо выше ее (см. рис. 2.34). Пусть  $\omega = \omega_0 + i0$  — точка первого типа, тогда  $F(\omega_0, 0) = 0$ . Для остальных  $\omega$  на действительной оси должно быть  $F(\omega', 0) \leq 0$ . Из этого следует, что на границе глобальной неустойчивости выполняется условие

$$\max F(\omega', 0) = 0, \quad \text{при } -\infty < \omega' < \infty. \quad (2)$$

Уравнение (2) определяет в пространстве параметров гиперповерхность (возможно не одну), размерность которой на единицу меньше размерности самого пространства, и которой должны принадлежать все точки границы между глобально устойчивыми и глобально неустойчивыми системами.

Таким образом, для исследования системы на глобальную неустойчивость можно, используя уравнение (2), найти возможные границы неустойчивости, которые разобьют все пространство параметров на области с одним типом поведения (есть глобальная неустойчивость или нет), а затем в каждой из областей достаточно проверить условие выполнения критерия (1) в одной из точек, либо определить наличие или отсутствие неустойчивости из дополнительных соображений.

После столь длинного теоретического введения, вернемся к условию задачи. Разберемся сначала в картине взаимодействующих волн. Пред-

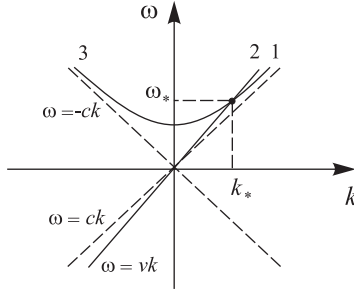


Рис. 2.35. Картина волн в системе с “выключенным” взаимодействием.

ставим дисперсионное уравнение задачи в форме трех связанных волн:

$$\left( \sqrt{\omega^2 - id} - \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2} \right) \left( \sqrt{\omega^2 - id} + \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2} \right) (\omega - vk) = -\varepsilon_0^3, \quad (3)$$

и “выключим” взаимодействие, положив  $\varepsilon_0 = 0$ . Видно, что в этом пределе в системе существует три волны  $\omega_{1,3}(k) \approx id/(2\omega) \pm \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}$ , и  $\omega_2(k) = vk$ . Картина волн показана на рис. 2.35. При  $|\omega| \rightarrow \infty$  можно приближенно записать  $\omega_{1,3}(k) \approx \pm ck$ ,  $\omega_2 = vk$ , откуда следует, что волны 1 и 2 распространяются направо, а волна 3 — налево. Волны 1 и 3 в системе без взаимодействия являются затухающими, их дисперсии приближенно можно представить в виде

$$\omega_{1,3}(k) = \pm \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2} + i \frac{d}{2\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}}.$$

При  $\varepsilon_0 \neq 0$  дисперсионные характеристики стремятся к тем же асимптотам, что и при  $\varepsilon_0 = 0$ , поэтому разбиение волн на прямые и встречные сохраняется.

Когда параметр  $\varepsilon_0$  отличен от нуля, но мал, как это предполагается в условиях задачи, эффективное взаимодействие волн происходит в точках синхронизма. Из рис. видно, что такая точка одна:  $k_* = \omega_0/\sqrt{v^2 - c^2}$ ,  $\omega_* = vk_*$ , она соответствует пересечению дисперсионных характеристик волн 1 и 2. Вблизи этой точки возникает неустойчивость из-за активной связи этих волн. В то же время, волна 3 находится вдали от синхронизма и введение конечного параметра взаимодействия  $\varepsilon_0$  практически не влияет на ее дисперсию.

Следовательно, в дисперсионном уравнении (3) для частот близких к  $\omega_*$ , можно скобку, соответствующую третьей волне, заменить на  $2\omega_*$ , а в двух других скобках все величины разложить в ряд относительно  $\tilde{k} = k - k_*$  и  $\tilde{\omega} = \omega - \omega_*$ . Таким образом, в системе связанных волн дисперсия первых двух волн определяется квадратным уравнением

$$(\tilde{\omega} - V\tilde{k} - i\gamma)(\tilde{\omega} - v\tilde{k}) = -\varepsilon^2, \quad (4)$$

а дисперсию третьей волны можно считать не изменившейся по сравнению со случаем невзаимодействующих волн:

$$\omega_3(k) = -Vk + i\gamma. \quad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) введены обозначения  $V = \omega'_1(k_*) = c^2/v$ ,  $\gamma = d/(2\omega_*)$ ,  $\varepsilon^2 = \varepsilon_0^3/(2\omega_*)$ . Решив квадратное уравнение (4) относительно  $\tilde{k}$ , получаем

$$\tilde{k}_{1,2}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{V} + \frac{1}{v} \right) \tilde{\omega} - i\frac{\gamma}{V} \pm \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{v} \right) \tilde{\omega} - i\frac{\gamma}{V} \right]^2 - \frac{4\varepsilon^2}{Vv}} \right\}. \quad (6)$$

Как будет показано ниже, при действительных  $\tilde{\omega}$  мнимая часть квадратного корня в этом выражении всегда больше, чем  $\gamma/V$ , поэтому  $\text{Im } k_1 > 0$ ,  $\text{Im } k_2 < 0$ . Поскольку обе волны, как было установлено, распространяются направо, то корень  $k_1$  соответствует усиливаемой волне, а корень  $k_2$  — затухающей.

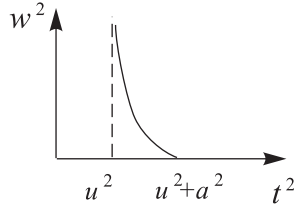
Для использования критерия (2) требуется найти максимум  $\text{Im } k_1(\omega)$  как функции действительной частоты. Обозначим  $Z = w + iu = (1/V - 1/v)\tilde{\omega} - i\gamma/V$ ,  $a^2 = 4\varepsilon^2/Vv$ , тогда комплексный корень в (6) можно записать как

$$\sqrt{Z^2 - a^2} = s + it.$$

(величины  $s, t, w, u$  действительные). Возводя в квадрат это выражение, после простых преобразований получаем:

$$w^2 = -\frac{(t^2 - u^2 - a^2)t^2}{t^2 - u^2}.$$

Это соотношение можно рассматривать как связь между величинами  $t^2$  и  $w^2$  при фиксированном  $u^2$ . График функции  $w^2(t^2)$ , построенный с учетом того, что обе эти величины не отрицательны, приведен на рис.

Рис. 2.36. График функции  $w^2(t^2)$ .

2.36. Из него следует, что  $t$  (абсолютная величина мнимой части квадратного корня) при изменении величины  $w$  от  $-\infty$  до 0 увеличивается от  $\gamma/V$  до  $\sqrt{\gamma^2/V^2 + 4\varepsilon^2/(Vv)}$ , а затем при дальнейшем увеличении  $w$  от 0 до  $\infty$  вновь уменьшается до  $\gamma/V$ . Так как  $w$  пропорциональна  $\tilde{\omega}$ , то максимальное значение  $\text{Im } k_1(\tilde{\omega})$  достигается при  $\tilde{\omega} = 0$ , оно равно  $-\gamma/(2V) + \sqrt{\gamma^2/V^2 + 4\varepsilon^2/(Vv)}/2$ .

Поскольку  $\text{Im } k_3 = -\gamma/V$  в наших приближениях не зависит от частоты, то уравнение (2), определяющее возможную границу неустойчивости, принимает вид

$$-\frac{\gamma}{2V} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{V^2} + \frac{4\varepsilon^2}{Vv}} = \frac{\gamma}{V}. \quad (7)$$

Отсюда  $\varepsilon^2 = 2\gamma^2 v/V = \varepsilon_{\text{кр}}^2$ . При  $\varepsilon > \varepsilon_{\text{кр}}$ , максимум функции  $F(\omega', 0) > 0$ , при этом в системе существует глобальная неустойчивость. Поскольку при  $\varepsilon = 0$  неустойчивости нет, то мы приходим к выводу, что найденной соотношению между параметрами

$$\varepsilon^2 = \frac{2\gamma^2 v}{V}$$

определяет единственную границу глобальной неустойчивости в пространстве параметров.

## 2.13. Колебания и волны в ограниченных системах

178.  $T \sim 2L/\sqrt{gh} \sim 4.5 \cdot 10^3 \text{ с} = 1.25 \text{ ч}$ .

179. Рассмотрим цепочку механических маятников, связанных пружинками (рис. 2.37). Все маятники и пружинки одинаковы и расположены

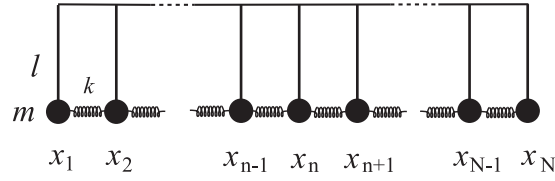


Рис. 2.37. Связанные идентичные маятники.

на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга. Таким образом мы имеем динамическую систему с  $N - 2$  степенями свободы. Пронумеруем все осцилляторы числами от 1 до  $N$  и обозначим через  $x_n$  угол отклонения  $n$ -го из них. Тогда можно записать следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_n + \omega_0^2 x_n &= \frac{k}{m}(x_{n+1} - x_n) - \frac{k}{m}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 2, \dots, N-1, \\ x_N &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Введем комплексные амплитуды  $X_n$  с помощью формулы  $x_n(t) = \text{Re}\{e^{i\omega t} X_n\}$ ; для  $X_n$  из (1) следуют разностные уравнения

$$X_1 = 0, \quad (2a)$$

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) X_n = \frac{k}{m}(X_{n+1} + X_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2b)$$

$$X_N = 0. \quad (2c)$$

Решение этих уравнения будем искать в виде  $X_n = A \sin[\psi(n-1)]$ , где  $A$  и  $\psi$  — некоторые постоянные. Тогда уравнение (2a) выполняется автоматически, а из уравнения (2b) после простых тригонометрических преобразований следует

$$\omega^2(\psi) = \omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (3)$$

Остается неиспользованным условие (2c), из которого находим, что должно выполняться  $\sin[\psi(N-1)] = 0$ , или

$$\psi_j = \frac{\pi j}{N-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (4)$$

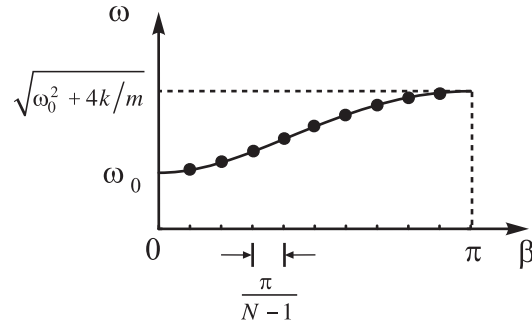


Рис. 2.38. Распределение собственных частот системы связанных идентичных маятников.

Совместно уравнения (3) и (4) определяют собственные частоты колебаний цепочки осцилляторов:

$$\omega_j = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi j}{2(N-1)}}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad (5)$$

а формула

$$X_n^{(j)} = A_j \sin[\psi_j(n-1)] \quad (6)$$

задает распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для  $j$ -ой собственной моды. Отметим, что в системе существуют  $N-2$  собственные моды, что совпадает с числом степеней свободы. Другие целые значения  $j$ , лежащие вне диапазона  $1, 2, \dots, N$ , не приводят к новым типам колебаний.

Распределение собственных частот удобно представить графически так, как показано на рис. 2.38 на котором в координатах  $(\psi, \omega)$  построен график функции  $\omega(\psi)$ , задаваемой уравнением (3). Положение собственных частот на графике отмечено точками, координаты которых по оси абсцисс выражаются формулой (4). Все частоты лежат в интервале между значениями  $\bar{\omega}_1 = \omega_0$  и  $\bar{\omega}_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 4k/m}$ , причем сами эти крайние точки в данном случае не являются собственными частотами. Совокупность всех собственных частот системы называется ее *спектром*.

Расстояние между любыми двумя точками спектра вдоль оси  $\psi$  равно  $\pi/(N-1)$ , т. е. их расположение эквидистантно. При этом распределение собственных частот вдоль оси  $\omega$  существенно неоднородное. Особенно хорошо это становится видно, если увеличивать количество осцилляторов  $N$ , тогда плотность проекций точек, изображающих собственные

частоты, на ось  $\omega$  будет возрастать около крайних точек спектра  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  быстрее, чем в его средней части.

Если в системе возбуждена одна собственная мода, то ее амплитуду  $A_j$  можно выбрать чисто действительной величиной, тогда из (6) следует, что все  $X_n^{(j)}$  действительны, т. е. колебания всех осцилляторов в цепочке происходят либо в фазе, либо в противофазе друг с другом. Наглядно вид собственных мод можно представить, если отложить на графике вдоль оси абсцисс номера осцилляторов, а вдоль оси ординат — амплитуду колебаний. На рис. 2.39 показаны такие распределения для трех первых собственных мод в случае, когда  $N = 9$ . Картина похожа на колебания струны, закрепленной в двух конечных точках, однако следует помнить, что в нашем примере речь идет о продольных колебаниях.

Для первой собственной моды, имеющей наименьшую собственную частоту, все осцилляторы колеблются в фазе, максимальную амплитуду имеет центральный осциллятор, если число  $N$  — нечетное, или два ближайших к центру осциллятора, если  $N$  — четное. Для следующей моды осцилляторы разбиваются на две группы, колебания в которых происходят в противофазе. Для третьей моды таких групп три, и так далее. Мы приходим к выводу, что картина колебаний имеет вид стоячих волн, причем по длине системы должно укладываться целое число полуволен (условие резонанса), если длиной волны называть расстояние вдоль системы между двумя осцилляторами, совершающими одинаковое движение.

$$181. \omega_n = 1/\sqrt{LC}(\pi n/l), \quad l = 1, 2, \dots$$

182. Телеграфные уравнения, описывающие распространение вдоль длинной линии волн напряжения  $U(x, t)$  и тока  $I(x, t)$  имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t}.$$

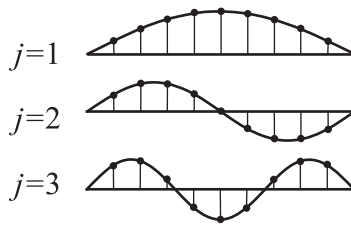


Рис. 2.39. Распределение амплитуд колебаний осцилляторов вдоль цепочки для первых трех собственных мод.



Подставляя в них  $U, I \sim \exp(i\omega t)$ , легко получить решение для комплексных амплитуд  $\bar{U}(x)$  и  $\bar{I}(x)$ :

$$\begin{aligned}\bar{U}(x) &= U_+ e^{-ikx} + U_- e^{ikx}, \\ \bar{I}(x) &= \frac{1}{Z_0} (U_+ e^{-ikx} - U_- e^{ikx}),\end{aligned}$$

где  $U_+$  и  $U_-$  — амплитуды волн напряжения, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях  $x$ ,  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  — волновое сопротивление линии,  $k = \sqrt{LC}\omega$ . На левом конце линии должно быть  $U(0) = 0$ , отсюда  $U_+ = -U_-$ , на правом конце линия нагружена на конденсатор, поэтому в сечении  $x = l$  должно выполняться условие  $I(l, t) = C_0 dU(l, t)/dt$  которое в комплексных переменных записывается в виде  $\bar{I}(l) = i\omega C_0 \bar{U}(l)$ . Подчиняя решение этим условиям, нетрудно получить следующее уравнение относительно безразмерной переменной  $z = kl = \omega\sqrt{LC}l$ :

$$\operatorname{ctg} z = \frac{C_0}{CL} z.$$

Графическое решение этого уравнения показано на рис. 2.40. Из него видно, что при  $C_0/CL \ll 1$  наименьший корень близок к  $z \approx \pi/2$ . Полагая  $z = \pi/2 - \Delta$ , в первом порядке малости для  $\Delta$  получим  $\Delta = -(C_0/CL)(\pi/2)$ , поэтому в этом пределе

$$\omega = \frac{\pi}{2l\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{C_0}{Cl}\right).$$

Во втором случае ( $C_0/Cl \gg 1$ ) значение корня близко к нулю, при этом можно положить  $\operatorname{ctg} z \approx 1/z$ , тогда  $z = \sqrt{Cl/C_0}$ , а значение частоты основного колебания равно

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LlC_0}}.$$

Отметим, что в этом случае колебания происходят как в сосредоточенном колебательном контуре с емкостью  $C_0$  и индуктивностью  $L_0 = Ll$ , равной полной индуктивности линии.

**185.** См. решение задачи 186.

**186.** Прежде всего получим уравнения, описывающие колебания струны с шариком на конце. Для этого введем систему координат, как показано

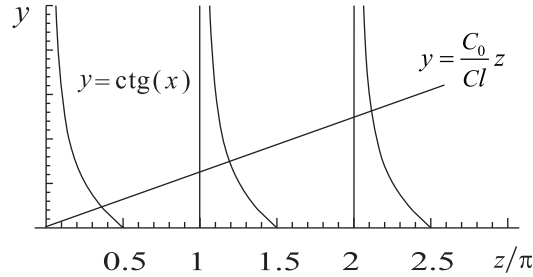


Рис. 2.40. К решению задачи 182

на рис. 2.41 и рассмотрим движение элемента струны длиной  $dx$ , с координатами концов  $x$  и  $x + dx$ . Проекция закона Ньютона для движения этого элемента на горизонтальное направление имеет вид

$$\rho dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T(x + dx) \sin \theta(x + dx) - T(x) \sin \theta(x).$$

Здесь  $T(x)$  — натяжение струны в точке с координатой  $x$ ,  $\theta(x)$  — наклон струны к вертикали. Так как мы считаем отклонения от положения равновесия малыми, то можно положить  $T(x) = g[m + M(1 - x/L)]$  — натяжение струны под действием собственного веса и веса шарика,  $M = \rho L$  — полная масса струны,  $\theta(x) \approx \partial y(x, t) / \partial x$ . Устремляя  $dx$  к нулю, получаем дифференциальное уравнение для колебаний струны:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right]. \quad (1)$$

Его необходимо дополнить граничными условиями. При  $x = 0$  струна закреплена, поэтому одно из условий есть  $y(0, t) = 0$ . Условие на нижнем конце струны получим, записав проекцию уравнения движения шарика на горизонтальную ось. В этом направлении на него действует единственная сила — сила натяжения струны, поэтому можно записать

$$m \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial t^2} = -T(L) \sin \theta(L).$$

Учтем, что  $T(L) = mg$ , тогда граничные условия принимают окончательный вид:

$$y(0, t) = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L} = 0. \quad (2)$$

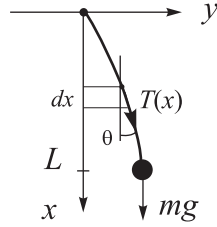


Рис. 2.41. К решению задачи 186

Будем искать решение с заданной частотой, для чего положим  $y(x, t) = \text{Re}[e^{i\omega t} Y(x)]$ . Кроме того введем безразмерную координату  $\xi = \alpha + 1 - x/L$ , и параметры  $\alpha = m/M$ ,  $\kappa^2 = L\omega^2/g$ , тогда уравнение для  $Y(\xi)$  записываются следующим образом:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dY(\xi)}{d\xi} \right) + \kappa^2 Y(\xi) = 0.$$

После еще одной замены  $\zeta = 2\sqrt{\kappa}\xi$  приходим к уравнению Бесселя с индексом  $m = 0$ .

$$\zeta^2 \frac{d^2 Y(\zeta)}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dY(\zeta)}{d\zeta} + Y(\zeta) = 0.$$

с граничными условиями

$$Y(2\sqrt{\alpha}) = 0, \quad \left( \frac{dY(\zeta)}{d\zeta} + \frac{\zeta}{2} Y(\zeta) \right)_{\zeta=2\sqrt{1+\alpha}} = 0.$$

Общее решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$Y(\zeta) = C_1 J_0(\zeta) + C_2 N_0(\zeta).$$

Здесь  $J_0$  и  $N_0$  — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, которые определяются из граничных условий. Подставив это решение в граничные условия, после некоторых преобразований получаем систему двух уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_1 J_0(2\sqrt{1+\alpha\kappa}) + C_2 N_0(2\sqrt{1+\alpha\kappa}) &= 0, \\ C_1 [J_1(2\sqrt{\alpha\kappa}) - \sqrt{\alpha\kappa} J_0(2\sqrt{\alpha\kappa})] + C_2 [N_1(2\sqrt{\alpha\kappa}) - \sqrt{\alpha\kappa} N_0(2\sqrt{\alpha\kappa})] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы использовали известные формулы для функций Бесселя

$$J'_0(\zeta) = -J_1(\zeta) \quad \text{и} \quad N'_0(\zeta) = -N_1(\zeta).$$

Рассмотрим отдельно случай свободного конца струны ( $m = 0$ ). При этом  $\alpha = 0$ , и аргумент функции  $N_0$  на одном из концов струны обращается в бесконечность. Чтобы избежать этого, необходимо потребовать  $C_2 = 0$ , тогда вместо приведенной выше системы уравнений получаем единственное соотношение  $C_1 J_0(2\kappa) = 0$ , откуда следует, что  $\kappa = \nu_{0n}/2$ , где  $\nu_{mn}$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $m$ -го порядка. Из справочника можно найти  $\nu_{01} = 2.405$ ,  $\nu_{02} = 5.520$ ,  $\nu_{03} = 8.654$ . Тогда первые три собственные частоты есть  $\omega_1 = 1.2\sqrt{g/L}$ ,  $\omega_2 = 2.76\sqrt{g/L}$ ,  $\omega_3 = 4.33\sqrt{g/L}$

В случае, если  $m \neq 0$ , из условия существования нетривиального решения системы (3) получаем уравнение

$$\begin{aligned} [J_1(2\kappa\sqrt{\alpha}) - \kappa\sqrt{\alpha}J_0(2\kappa\sqrt{\alpha})] N_0(2\kappa\sqrt{\alpha}) - \\ - [N_1(2\kappa\sqrt{\alpha}) - \kappa\sqrt{\alpha}N_0(2\kappa\sqrt{\alpha})] J_0(2\kappa\sqrt{\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

При заданном  $\alpha$  это уравнение возможно решить только численно. Например, при  $\alpha = 1$  (масса струны равна массе шарика), оно дает следующие первые корни для параметра  $\kappa$ :  $\kappa_1 = 1.056$ ,  $\kappa_2 = 4.082$ ,  $\kappa_3 = 7.738$ . Следовательно, первые собственные частоты равны  $\omega_1 = 1.056\sqrt{g/L}$ ,  $\omega_2 = 4.082\sqrt{g/L}$ ,  $\omega_3 = 7.738\sqrt{g/L}$ .

**187.** При условии  $R \ll L$  в каждой точке сечения трубы скорость газа направлена вдоль нее и, если пренебречь вязкостью, не меняется по сечению. Поэтому справедливо одномерное приближение, и линеаризованные уравнения гидродинамики имеют тот же самый вид, как они были получены в задаче 96:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x}. \end{aligned}$$

Напомним, что здесь  $v'$  — скорость газа,  $\rho'$  — возмущение его плотности. Обратим внимание, что эти уравнения с точностью до переобозначений совпадают с телеграфными уравнениями, описывающими распространение волн напряжения и тока в длинной линии (см. решение задачи 182). Действительно, при замене  $v' \rightarrow U$ ,  $\rho' \rightarrow I$ ,  $c_0^2/\rho_0 \rightarrow \bar{L}$ ,  $\rho_0 \rightarrow \bar{C}$ , одни уравнения переходят в другие. Аналогия оказывается еще более полной, если рассмотреть условия на концах трубки. На закрытом конце

$v'(0, t) = 0$ , что соответствует закороченному концу длинной линии, а на открытом конце должно выполняться условие  $\rho' = 0$ , что совпадает с условием для тока на разомкнутом конце линии. Граничное условие для возмущения плотности требует некоторого пояснения. Поскольку дисперсии нет, то длина волны для низших типов колебаний порядка  $L$ , следовательно  $R \ll \lambda$ . Как будет показано в задаче 189, при таком соотношении длины волны и поперечного размера трубки, излучение из нее пренебрежимо мало, поэтому амплитуда падающей волны равна амплитуде отраженной. Это означает, что на открытый конец трубки должен приходиться максимум волны скорости, следовательно в этом же сечении находится нуль волны плотности (или давления). Другое объяснение этому состоит в том, что трубка соединена с бесконечно большим внешним резервуаром, который мгновенно компенсирует возмущения давления в плоскости соединения.

Из сказанного становится ясным, что вдоль трубки должно укладываться нечетное число четвертей длин волн, т.е. должно выполняться соотношение  $L = (2n + 1)\lambda/4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , откуда, с учетом закона дисперсии  $\omega = 2\pi c_0/\lambda$ , получаем

$$\omega_n = \pi \left( n + \frac{1}{4} \right) \frac{c_0}{L}.$$

**188.**  $\omega_n = \pi n c_0 / L$ .

**189.** Для оценки добротности колебаний необходимо рассчитать мощность излучения из открытого конца трубки. Точное решение представляет собой трудную задачу (она была решена Л.А.Вайнштейном), для оценки достаточно использовать качественные соображения. Они базируются на условии, что низших типов колебаний  $\lambda \sim L \gg R$ . В таких условиях открытый конец трубки представляет собой излучатель звуковых волн, поперечный размер которого мал по сравнению с длиной волны. Пусть амплитуда волны скорости в этом сечении равна  $v(L) = v_0$ . Тогда можно представить весь процесс как излучение звука поршнем площадью  $S = \pi R^2$ , который совершает колебания с частотой  $\omega = \pi c_0 / (4L)$  (для низшего типа колебаний) и амплитудой скорости  $v_0$ .

Процесс излучения волн описывается трехмерным волновым уравнением для потенциала скорости  $\varphi$  ( $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ ):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

которое должно быть дополнено граничным условием на поверхности колеблющегося тела:  $\partial\varphi/\partial n = u_n(t)$  — скорость газа на поверхности равняется нормальной к ней компоненте скорости движения. Решение вблизи источника существенно зависит от его формы, однако в дальней зоне ( $r \gg \lambda$ ), излучаемые волны становятся практически сферически симметричными<sup>5</sup>. Отсюда следует, что в таком случае интенсивность излучаемой волны слабо зависит от формы излучателя, и для ее оценки можно исследовать самый простой случай.

Рассмотрим, например, излучатель в форме сферы радиуса  $R_0 \ll \lambda$ , совершающей пульсации, так что ее радиус гармонически меняется со временем. Решение уравнения (1), соответствующее сферически симметричной убегающей от излучателя волне, имеет вид  $\varphi(r, t) = A \exp[i(\omega t - kr)]/r$ ,  $k = \omega/c_0$ , что дает для радиальной скорости выражение

$$v(r, t) = A \left( \frac{-ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i(\omega t - kr)}. \quad (2)$$

Отношение первого слагаемого ко второму в круглых скобках по порядку величины равно  $kr$ . Вблизи поверхности сферы  $r \sim R_0 \ll \lambda$ , поэтому преобладает второе слагаемое. На сфере должно выполняться

$$v(R_0) = v_0 e^{i\omega t} \approx -\frac{Ae^{i\omega t}}{R_0^2},$$

откуда  $a = -v_0 R_0^2$ . На большом расстоянии от точки излучения, наоборот, превалирует первое слагаемое, в итоге для скорости газа в этой зоне можно записать

$$v(r, t) = \frac{-iv_0 R_0^2 k e^{i(\omega t - kr)}}{r}.$$

Выберем сферу достаточно большого радиуса  $R$  с центром в начале координат и подсчитаем среднюю за период мощность излучения, проходящую через поверхность сферы:

$$I = 4\pi R^2 \rho_0 \overline{v^2} = c_0 \sim 2\pi \rho_0 v_0^2 R_0^2 \frac{\omega^2 R_0^2}{c_0^2}.$$

---

<sup>5</sup>Это утверждение работает, если изменяется объем излучающего тела. Если оно совершает колебания без изменения объема, амплитуда сферической волны оказывается равной нулю, при этом излучение носит дипольный характер. Подробности можно посмотреть в [3]

Вся эта энергия излучается сферой, поэтому мощность излучения единицы ее поверхности равна

$$P \sim \rho c_0 v_0^2 \frac{\omega^2 R_0^2}{2c_0^2}. \quad (3)$$

Вернемся к излучению из открытого конца трубки. Его интенсивность можно оценить как  $I \sim PR^2 \sim \rho_0 v_0^2 R^4 \omega^2 / c_0$ , где  $R$  теперь радиус трубки. Энергия, запасенная в трубке, равна по порядку величины  $W = \rho_0 v_0^2 L$ . Добротность равна  $Q \sim 2\pi W / I$ , что после преобразований дает

$$Q \sim \frac{c_0 L}{\omega R^2} = \frac{L\lambda}{R^2}.$$

При  $\lambda \sim L \gg R$  получаем  $Q \sim L^2 / R^2 \gg 1$ . Таким образом, добротность колебаний в узкой длинных трубках велика.

**190.**  $\omega \sim \sqrt{\sigma / (\rho R^3)} \sim 1$  с. Точное вычисление (см. [3]) дает

$$\omega_l^2 = \frac{l(l-1)(l+2)\sigma}{\rho R^3}, \quad l = 2, 3, \dots$$

Для низшей моды ( $l=2$ ) оно отличается от приведенной оценки множителем  $2\sqrt{2}$  в частоте.

**191.**  $\omega_l^2 = [8\pi\rho_0 G l(l-1)] / [3(2l+1)]$ . Решение см. в [7].

**192.** Колебания мембраны описываются двумерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $f$  — ее вертикальное смещение,  $v = \sqrt{T/\rho}$ . Собственные частоты ищем, представив  $f$  в виде  $f(x, y, t) = \text{Re}\{F(x, y) \exp[i\omega t]\}$ . Для функции  $F(x, y)$  получаем двумерное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (2)$$

Поскольку мембрана закреплена по краям, то  $F(r = R) = 0$ .

Решение ищем в полярной системе координат методом разделения переменных, представив  $F(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$ . Для функций  $R(r)$  и  $\Phi(\varphi)$

получаем уравнения вида

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - m^2) R &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $m^2$  — константа разделения. Запишем решение для функции  $\Phi(\varphi)$ :

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi).$$

Она должна быть однозначной, поэтому  $m$  — целое число. Уравнение для  $R(r)$  является уравнением Бесселя, его решение, ограниченное при всех  $r$ , равно

$$R(r) = C J_m(kr).$$

Чтобы выполнялось граничное условие на краю мембраны, необходимо, чтобы  $J_0(kR) = 0$ , поэтому  $k = k_{mn} = \nu_{mn}/R$ , где  $\nu_{mn}$  — нули функции Бесселя. Для каждого  $m$  и  $n$  существуют две линейно независимые собственные функции

$$F_{mn}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\} J_m(\nu_{mn}r/R).$$

Собственные частоты  $\omega_{mn} = vk_{mn} = v\nu_{mn}/R$  двукратно вырождены.

**193.**  $E_n = \hbar^2 \pi^2 n^2 / (2mL^2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**194.** Считая, что одна из торцевых крышек цилиндра совпадает с плоскостью  $x = 0$ , ищем решение для волновой функции в полярной системе координат в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = A e^{iEt/\hbar} \sin\left(\frac{\pi n z}{L}\right) \psi(r, \varphi),$$

$n$  — целое. Подставляя это решение в уравнение Шредингера, получаем для функции  $\psi(r, \varphi)$  уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} \psi + k^2 \psi = 0,$$

где  $k^2 = 2mE/\hbar^2 - \pi^2 n^2/L^2$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — поперечный оператор Лапласа. Вид зависимости от координаты выбран таким образом, чтобы удовлетворялись нулевые граничные условия на торцах. Равенство нулю волновой функции на боковой поверхности цилиндра приводит



к граничному условию  $\psi(R) = 0$ . Вместе с приведенным выше уравнением мы получаем краевую задачу из задачи 192 о колебаниях резиновой мембраны, найденное решение для которой имеет вид:

$$\psi(r, \varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array} \right\} J_m(\nu_{mn}r/R),$$

$k_{mn}^2 = \nu_{mn}^2/R^2$ . Отсюда вытекает выражение для энергии электрона:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\nu_{mn}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \right).$$

**195.**  $\omega_{nm} = \sqrt{gk_{nm} \operatorname{th} \hbar k_{mn}}$ , где  $k_{mn} = \pi \sqrt{(1/(a^2 m^2) + 1/(b^2 n^2))}$ ,  $m, n$  — целые числа, не равные нулю одновременно.

**196.** Волны в линии подчиняются телеграфным уравнениям (см. задачу 182), которые легко свести к волновому уравнению второго порядка для напряжения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь  $c^2 = 1/\sqrt{LC}$  — скорость распространения волн в линии. Волновое сопротивление  $Z = \sqrt{L/C}$  меняется скачком в сечении  $x = l$ , причем, поскольку по условию задачи скорость при этом остается неизменной, для волновых сопротивлений выполняется соотношение  $g = Z_1/Z_2 = \bar{L}_1/\bar{L}_2 > 1$ .

Установим граничные условия. На закороченном конце линии при  $x = 0$  должно быть  $V(0, t) = 0$ , в сечении скачка волнового сопротивления непрерывны напряжение и ток в линии. Используя первое из телеграфных уравнений, получаем следующие соотношения

$$V(x = l - 0) = V(x = l + 0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=l-0} = g \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=l+0}.$$

Кроме того, потребуем, чтобы при  $x > l$  в системе существовала волна, бегущая только вправо. Это требование представляет собой граничное условие на бесконечности для собственных мод системы.

Исходя из этих условий, напряжение в линии ищем в виде  $V(x, t) = \operatorname{Re}\{V(x) \exp i\omega t\}$ , причем для комплексной волны  $V(x)$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} V(x, t) &= A \sin kx, & 0 \leq x \leq l, \\ V(x, t) &= B e^{-ikx}, & x \geq l, \end{aligned}$$

$k = \omega/c$ . В них уже учтены граничные условия при  $x = 0$  и на бесконечности. Удовлетворяя граничные условия при  $x = l$ , получаем:

$$A \sin kl = B e^{-ikl}, \quad A \cos kl = -ig B e^{-ikl}.$$

Условие разрешимости этих уравнений  $\operatorname{tg} kl = i/g$  есть характеристическое уравнение задачи. Его решение ищем в виде  $kl = \pi n + i\delta$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Тогда должно выполняться уравнение

$$\operatorname{th} \delta = \frac{1}{g}.$$

Отсюда

$$\delta = \operatorname{arcth}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{g+1}{g-1}.$$

Мы получаем набор комплексных собственных частот "резонатора", образованного неоднородностью регулярной линии передачи:

$$\omega_n = \frac{\pi n c}{l} + i \frac{\delta c}{l}.$$

Мнимая часть всех частот  $\omega_n'' > 0$ . Это значит, что собственные колебания в "резонаторе" затухают за счет излучения энергии, которая уносится от него по отрезку линии  $x > l$ . Интересно отметить, что при  $x > l$  соответствующая собственная функция оказывается нарастающей в пространстве:  $V_n \sim \exp(-ik_n x) = \exp(\delta x/l) \exp(-i\pi n z/l)$ . Так как при  $g > 1$  имеем  $\delta > 0$ , то амплитуда этой волны экспоненциально растет с увеличением  $x$ . Кажущийся парадокс разрешается тем, что сигнал в системе распространяется с конечной скоростью  $c$ . Значение поля в точке  $x$  в момент времени  $t$  на большом расстоянии от резонатора, определяется тем, какое поле было в нем в более ранний момент времени  $t' = t - x/c$ . Поскольку поле в самом резонаторе экспоненциально затухает со временем пропорционально  $\exp(-\delta c t'/l)$ , то в точке наблюдения поле должно быть пропорционально  $\exp(-\delta c t/l) \exp(\delta x/l)$ . Мы получили как раз необходимый закон изменения собственного поля в пространстве в фиксированный момент времени. Такая ситуация свойственна *открытым* резонаторам, потери в которых обусловлены излучением волн в пространство.

Найденные решения для затухающих колебаний в модели открытого резонатора на самом деле не являются "настоящими" собственными модами, в том смысле, как это обычно понимают в теории колебаний.

Главное их отличие состоит в том, что они не образуют полную систему собственных функций, т.е. произвольное поле нельзя представить в виде суперпозиции собственных мод. В той модели, которая рассмотрена здесь это ясно уже из того, что произвольное начальное возмущение для волнового уравнения всегда порождает волны, бегущие в обоих направлениях оси  $x$ , в то время, как найденные решения при  $x > l$  состоят только из волн, бегущих от резонатора. Все же они обладают некоторыми свойствами, привычными для обычных собственных мод. В частности, произвольное начальное возмущение в асимптотике больших  $t$  представляется суперпозицией таких "квазимод", кроме того, начальное возмущение, совпадающее по форме с распределением поля "квазимоды", меняется во времени по гармоническому закону с единственной частотой  $\omega_n$ . Такие "квазимоды" полностью аналогичны квазистационарным уровням энергии, известным в квантовой механике.

В заключении рассмотрим два предельных случая. Если  $g \gg 1$ , то непосредственно из уравнения для  $\delta$  можно получить  $\delta \approx 1/g$ . В этом случае потери на излучение малы. Если  $g \approx 1$ , то, положив  $g = 1 + \Delta$ , получаем  $\delta \approx (1/2) \ln(2/\Delta)$ . В этом пределе логарифм порядка единицы, то есть время затухания колебаний, первоначально локализованных в резонаторе, оказывается порядка  $\tau \sim 1/\omega'' \sim l/c$  — времени прохождения сигнала по длине резонатора.

## Литература

1. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. - М.: Наука, 1988.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. - М.: Наука, 1986.
4. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
6. *Крайнов В.П.* Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. — М.: Высшая школа, 1989.
7. *Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В.* Сборник задач по физике с решениями. — М.: Атомиздат, 1971.
8. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. — Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та. 1995.
9. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1965.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968.
11. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.