Введение в теорию нелинейных колебаний.

О.М. Киселев

Предисловие

Это учебное пособие написано по курсу лекций, прочитанному во время весеннего семестра 1999 года студентам Уфимского Государственного Авиационного Технического Университета, специализирующимся по прикладной математике. Основная цель – познакомить с методами исследования обыкновенных нелинейных уравнений. Изложение материала по возможности индуктивно, от простого к сложному, и основано исключительно на примерах. Часто глубокие и громоздкие математические теории возникают при обобщениях решений одной или нескольких хорошо изученных и понятых задач. Подробный анализ решений этих задач представляется намного более важным при изучении некоторых разделов математики, чем формулировки и доказательства десятков теорем.

Большинство разобранных задач взято из механики, начиная с гармонического осциллятора и заканчивая волчком Ковалевской. Несколько лекций в начале курса базируется на Ньютоновской механике, в остальных будет делаться крен в сторону Гамильтонова подхода к механическим системам. Большая часть лекций посвящена качественному анализу уравнений, исследованию решений в терминах эллиптических функций и теории возмущений.

Приведенный здесь по возможности аккуратный и полный разбор элементарных примеров, конечно, преследует не только образовательные цели. Хочется попроще познакомить слушателей с современными проблемами теории колебаний, изучавшимися во второй половине двадцатого столетия. В их число входят тесно связанные между собой проблема малых знаменателей, вопросы возмущения сепаратрисных решений и хаотического поведения динамических систем с более чем одной степенью свободы.

Очевидно, что теория колебаний для систем с одной степенью свободы во многом – законченная область современной математики. За последнее столетие написано большое количество прекрасных учебников как с точки зрения полноты и глубины изложения, так и с точки зрения педагогического мастерства. Часть из них использовалась при подготовке этого курса. Ссылки на такие книги приводятся в конце каждой лекции.

О. Киселев
ok@ufanet.ru

Содержание

1 Линейные системы

Здесь мы изучим уравнение гармонического осциллятора с притягивающей и отталкивающей силой. Вводится понятие фазовой плоскости фазовых кривых и сепаратрис. Показано возникновение проблемы малых знаменателей в решении уравнения гармонического осциллятора с возбуждающей силой.

1.1 Гармонический осциллятор

Исследование нелинейных колебаний начнем с изучения свойств линейных уравнений с периодическими решениями. В качестве примера рассмотрим линейный осциллятор.

$$u'' + \omega^2 u = 0. \tag{1}$$

Конечно, любой из студентов, успешно сдавших экзамен по обыкновенным дифференциальным уравнениям, знает общее решение этого уравнения. Обычно это рашание находится простой подстановкой $u = c\exp(kx)$. Поиск решений Дифференциальных уравнений с помощью подстановки один из немногих работающих способов. Однако, если решение не выражается в виде элементарной функции воспользоваться таким способом, как правило не удается.

1.1.1 Сведение к уравнению первого порядка

Здесь нашей целью является не явная формула, а подходы к качественному анализу движений, определяемых этим уравнением. Существующие подходы не очень успешно применяются к анализу решений уравнений второго порядка, однако уж решения уравнений первого порядка позволяют исследовать с исчерпывающей полнотой. Поэтому удобно от уравнения (1) перейти к уравнению первого порядка. Для этого умножим уравнение на u', получим:

$$u''u' + \omega^2 uu' = 0.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по t от некоторого значения t_0 до t. В результате получим:

$$\frac{1}{2}(u')|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2}\omega^2 u^2|_{t_0}^{t} = 0.$$

Будем считать, что при $t = t_0$ известны данные Коши для уравнения (1): $u|_{t=t_0} = u_0$, $u'|_{t=t_0} = u_1$. Перенесем известные величины в правую часть:

$$\frac{(u')^2}{2} + \frac{\omega^2 u^2}{2} = E, \quad E = \frac{u_1^2}{2} + \frac{\omega^2 u_0^2}{2}. \tag{2}$$

Обычно говорят, что E – постоянная интегрирования. В механике эта постоянная называется *полной энергией* системы, первое слагаемое в левой части формулы – кинетическоя энергия, а второе – потенциальная энергия линейного осциллятора.

Таким образом, от линейного уравнения второго порядка мы перешли к нелинейному уравнению первого порядка.

1.1.2 Анализ эквивалентности уравнений (1) и (2)

Прежде, чем исследовать свойства решений уравнения (1), воспользовавшись уравнением (2) надо выяснить совпадают ли множества решений этих уравнений и научиться выделять подмножества решений уравнения (1) из уравнения (2).

Множества решений уравнений (1) и (2) не совпадают – множество решений уравнения (2) шире:

$$U_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$$

– не являются решениями (1) если $E \neq 0$. Эти "дополнительные"решения (2) появились из-за умножения (1) на u'. Действительно, $U'_{1,2} = 0$ и в результате умножения уравнения (1) на $U'_{1,2}$ получим тождество.

Следующий вопрос – как однозначно выделить среди решений уравнения (2) решения (1)? Ответ, казалось бы ясен, – надо к уравнению (2) дописать начальное условие: $u|_{t=0} = u_0$. Этого вроде должно быть достаточно, потому что $u'|_{t=0} = u_1$ уже использовано при получении постоянной E. Оказывается этого недостаточно. Решение уравнения первого порядка (2) однозначно определяется **двумя** начальными условиями – значением функции $u|_{t=t_0}$ и **знаком** ее производной. Это становится понятным, если уравнение (2) записать в виде, разрешенном относительно производной:

$$u' = \pm\sqrt{2E - \omega^2 u^2}.$$

Область значений функции $u(t)$ – отрезок $[-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}, \frac{\sqrt{2E}}{\omega}]$. Однако, уравнение (2) неразрешимо на этом отрезке. Когда решение уравнения $u' = \pm\sqrt{2E - \omega^2 u^2}$ достигает значения $\pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$, тогда его можно продолжить либо постоянной $u \equiv \pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$, либо функцией, удовлетворяющей уравнению $u' = \mp\sqrt{2E - \omega^2 u^2}$. То есть в точках $u = \pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ решение уравнения (2) теряет однозначность.

Нас интересуют решения уравнения (2), являющиеся одновременно и решениями уравнения (1). Из (1) лекго видеть, что $u'' = \mp\omega\sqrt{2E}$ при $u = \pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. То есть, функция $u(t)$ в этих точках принимает максимальное (минимальное) значение. При этом ее производная меняет знак. Следовательно, решения уравнения (1) после $\pm\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ должны продожаться уравнением $u' = \mp\sqrt{2E - \omega^2 u^2}$.

Производная решения уравнения (1) при прохождении через $\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ *меняет знак на противоположный.* Если пользоваться этим дополнительным рецептом, тогда решение уравнения (2) однозначно.

1.1.3 Фазовый портрет

Часто анализ движений, определяемых тем или иным уравнением, проводят, основываясь на форме кривой для потенциальной энергии (*потенциала*). В случае уравнения гармонического осциллятора потенциал – квадратичная парабола, и материальная точка колеблется на этой кривой. Максимальное и минимальное значение координат точки определяются полной энергией и достигаются, когда кинетическая энергия равна нулю ($u_\pm = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$).

Формула (2) связывает скорость u' и координату линейного осциллятора u. В системе координат (u, u') эту зависимость нетрудно изобразить графически в виде концентрических эллипсов. Плоскость (u, u') называется *фазовой плоскостью*, а график, определяемый уравнением (2), – *фазовым портретом* уравнения (1). Разным значениям постоянной E соответствуют разные эллипсы, а значению $E = 0$ соответствует точка начала координат – положение равновесия. Решения уравнения (1), соответствующие эллипсам, – периодические по времени решения с одной степенью свободы. Одной, потому что параметры гармонического осциллятора – координата и скорость – связаны соотношением (2) и независимо изменяться может только один из них.

Если в начальный момент точка лежала на одном из эллипсов, то далее при изменении времени она будет перемещаться по этому эллипсу. Но в какую сторону? Покажем, как на фазовом портрете системы выбрать направление движения. Пусть в начальный момент скорость точки была равна нулю, а координата равна $-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. В следующий момент координата увеличится, скорость станет положительной. Это соответствует направлению движения по фазовым кривым по часовой стрелке.

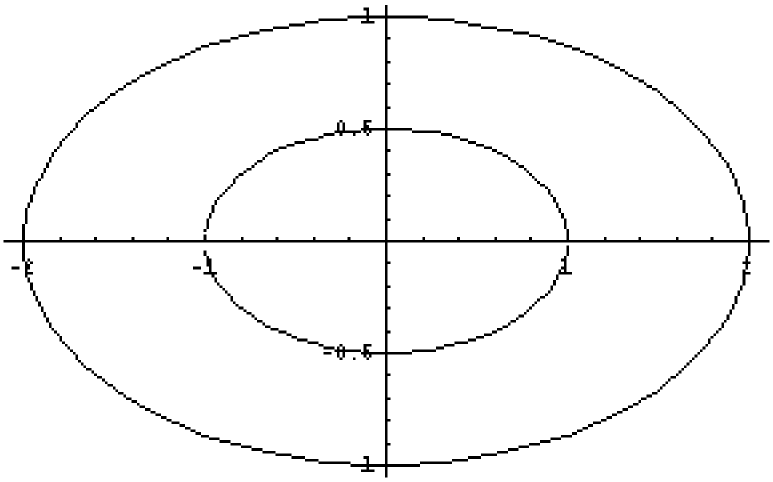

Рис. 1: Фазовый портрет гармонического осциллятора ($\omega = 0.5$).

1.1.4 Решение уравнения (2)

Вычислим период осцилляций. Для этого рассмотрим уравнение первого порядка:

$$u' = \pm\sqrt{2E - \omega^2 u^2}. \tag{3}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$dt = \frac{du}{\pm\sqrt{2E - \omega^2 u^2}}. \tag{4}$$

За период точка обежит весь эллипс и вернется в исходное положение. Пусть опять в начальный момент скорость точки равнялась нулю, а координата равнялась $-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. Тогда сначала точка пробежит по верхней половине эллипса, а затем – по нижней. Поэтому в (4) сначала надо выбрать знак $+$, координата при этом изменяется от $u_- = -\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ до $u_+ = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$, а затем минус, координата меняется от $u_+ = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ до $u_- = -\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. В результате для периода колебаний получим формулу:

$$T = \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{2E - \omega^2 u^2}} - \int_{u_+}^{u_-} \frac{du}{\sqrt{2E - \omega^2 u^2}}.$$

Эту формулу легко упростить, воспользовавшись свойством четности подынтегральной функции:

$$T = 2\int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{2E - \omega^2 u^2}}. \tag{5}$$

На первый взгляд значение интеграла зависит от энергии E. Однако, для решений уравнения гармонического осциллятора это не так. В формуле (5) можно избавиться от постоянной E с помощью подходящей замены переменной интегрирования:

$$v = \frac{\omega u}{\sqrt{2E}}, \quad v_{\pm} = \mp 1.$$

Тогда формула для периода колебаний гармонического осциллятора:

$$T = \frac{2}{\omega}\int_{-1}^{1} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

В этой формуле нет зависимости от E.

Решим, в конце концов, уравнение первого порядка (3). Формула для решения уравнения (1) получается, если проинтегрировать уравнение (4):

$$\int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{u_0}^{u} \frac{dy}{\sqrt{2E - \omega^2 y^2}}.$$

Сделаем замену $y = \frac{\omega u}{\sqrt{2E}}$, тогда:

$$(t - t_0) = \frac{1}{\omega}\int_{\frac{\omega u_0}{\sqrt{2E}}}^{\frac{\omega u}{\sqrt{2E}}} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Возьмем стандартный интеграл, в результате:

$$(t + t_0)\omega = arccos(\frac{\omega u}{\sqrt{2E}}) - arccos(\frac{\omega u_0}{\sqrt{2E}}).$$

или

$$\omega t + \phi_0 = arccos(\frac{\omega u}{\sqrt{2E}}), \quad \phi_0 = arccos(\frac{\omega u_0}{\sqrt{2E}}) - \omega t_0.$$

После обращения этой формулы получим:

$$u = A\cos(\omega t + \phi_0). \tag{6}$$

Здесь $A = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ – *амплитуда колебаний*, ω – *частота колебаний*, а постоянная ϕ_0 – *сдвиг фазы колебаний*. Периодом колебаний называется величина $T = \frac{2\pi}{\omega}$, она совпадает с формулой (5), если вычислить табличный определенный интеграл.

1.2 Гармонический осциллятор с отталкивающей силой

Рассмотрим гармонический осциллятор с отталкивающей силой:

$$u'' - \omega^2 u = 0. \tag{7}$$

Для этого уравнения проведем качественный анализ, подобный тому, что был сделан в предыдущем пункте. Выражение для полной энергии имеет вид:

$$\frac{(u')^2}{2} - \frac{\omega^2 u^2}{2} = E. \tag{8}$$

Здесь потенциал – квадратичная парабола с ветвями, направленными вниз. Максимальное и минимальное значения координат так же, как и в предыдущем пункте определяются значением полной энергии. Однако, если значение полной энергии $E > 0$, тогда кинетическая энергия никогда не обращается в нуль, и материальная точка, перевалив через максимальное значение потенциала, будет продолжать движение в $\pm\infty$ по другой ветви параболы. Если $E < 0$, тогда точка не сможет достигнуть вершины параболы и скатится обратно по той же ветви, по которой прикатилась. Если $E = 0$, то в зависимости от начального условия точка либо бесконечно долго будет стремиться к вершине параболы, либо будет находиться в состоянии неустойчивого равновесия на вершине, либо будет скатываться по одной из ветвей к $\pm\infty$.

Кривые на фазовой плоскости (u, u') при $E \neq 0$ – гиперболы. Особняком стоит значение $E = 0$, в этом случае на фазовой плоскости мы получим ПЯТЬ (!) фазовых кривых (напомним, что для гармонического осциллятора с притягивающей силой при $E = 0$ была лишь одна фазовая кривая – точка). Поясним, что это за особые кривые. Прежде всего, это точка равновесия (неустойчивого) $u = 0$, $u' = 0$. Далее, уравнение

$$\frac{(u')^2}{2} - \frac{\omega^2 u^2}{2} = 0$$

имеет два решения в виде пересекающихся прямых:

$$u' = \omega u, \quad \text{и} \quad u' = -\omega u.$$

Но фазовые кривые уравнения (7) при $E = 0$ – это четыре луча, лежащие на этих прямых и выходящие из начала координат, причем начало координат – вырожденная фазовая кривая – точка – не принадлежит этим четырем особым фазовым кривым. Стрелки на кривых легко расставить,

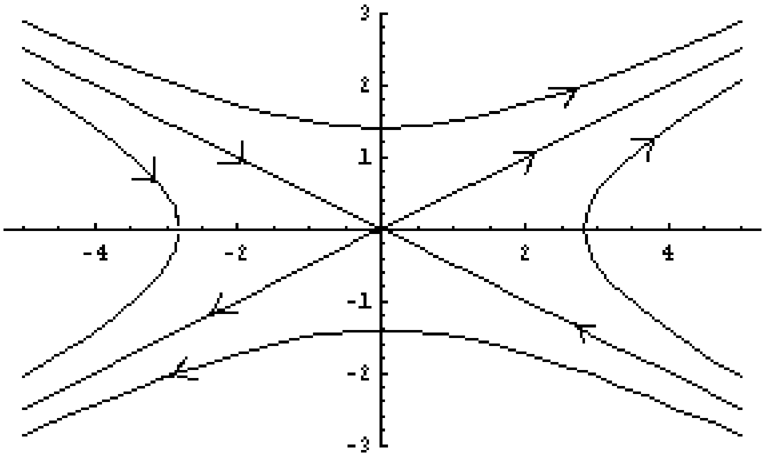

Рис. 2: Фазовый портрет осциллятора с отталкивающей силой ($\omega = 0.5$).

пользуясь рассмотрениями, проведенными в предыдущем пункте. Четыре особых фазовых кривых, лежащие на лучах, отделяют возвратные движения точки, имеющие максимальное или минимальное значение координаты, от движений неограниченных. Кривые, отделяющие один вид движений от другого, называются *сепаратрисами.*

1.3 Вынужденные колебания. Резонанс. Малые знаменатели

Уравнение вынужденных колебаний гармонического осциллятора:

$$u'' + \omega^2 u = f(t). \tag{9}$$

Это уравнение определяет неконсервативную систему. Энергия в такой системе не сохраняется. Поэтому анализ, подобный проведенному выше, здесь сделать не удается. Однако, метод построения общего решения хорошо известен из курса дифференциальных уравнений. Будем считать, что функция $f(t)$ представима в виде суммы ряда:

$$f(t) = \sum_{\lambda_n} \Big(\phi_n \cos(\lambda_n t) + \psi_n \sin(\lambda_n t)\Big).$$

Тогда частное решение уравнения можно представить в виде:

$$u(t) = u_R(t) + \sum_{\lambda_n \neq \omega} \Big(\frac{\phi_n}{\omega^2 - \lambda_n^2} \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\omega^2 - \lambda^2} \psi_n \sin(\lambda_n t)\Big), \tag{10}$$

где

$$u_R(t) = t\Big(-\frac{\psi_n}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{\phi_n}{2\omega}\sin(\omega t)\Big),$$

если существует $\lambda_k = \omega$ и $u_R \equiv 0$, если нет значения λ_k, совпадающего с ω. Слагаемое u_R обычно называется *резонансным*.

Основная трудность в представлении решения уравнения (9) в виде суммы кроется в том, что ряд может оказаться расходящимся из-за наличия малых знаменателей $\omega^2 - \lambda_n^2$. Это хорошо известное явление *малых знаменателей* в теории колебаний.Легко построить пример такой функции. Пусть последовательность λ_n, такая, что при $n \to \infty$ $\lambda_n^2 - \omega^2 = n^{-3}$, а коэффициенты ϕ_n при $n \to \infty$ таковы, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{n^2} = 1$. Конечно, решение уравнения (9) существует, однако, его поведение при больших значениях времени отличается и от линейного роста, который проявляется при наличии резонансных членов в правой части, и от ограниченных решений, получающихся, если все знаменатели в представлении (10) отделены от нуля или их скорость убывания меньше, чем скорость убывания коэффициентов разложения функции $f(t)$.

Задача 1. Исследовать решение уравнения:

$$u'' + u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\Big((1 - \frac{1}{n^3})t\Big).$$

Указать асимптотику амплитуды решения по времени.

1.4 Литература

В раздел литературы к этой лекции можно включить любой учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ограничимся двумя.

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

2 Уравнение Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом

В этой лекции изучаются свойства решений уравнения Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом. Показано чрезвычайно важное для дальнейшего изложения явление параметрического резонанса. В качестве примера вычислены данные монодромии для ступенчатого периодического коэффициента.

2.1 Свойства уравнений с периодическими коэффициентами

Здесь мы будем изучать уравнение второго порядка с коэффициентом, зависящим от времени:

$$u'' + (\omega^2 + q(t))u = 0. \tag{11}$$

Это уравнение обычно называется уравнением Штурма-Лиувилля или одномерным уравнением Шредингера. Оно играет важную роль в математической физике от теории рассеяния частиц до вопросов теории интегрирования нелинейных уравнений в частных производных.

В этой лекции мы будем изучать уравнение (11) с периодической функцией $q(t)$. Обозначим период функции $q(t)$ через $2T$. Пусть $\phi(t, t_0, \omega)$ и $\bar{\phi}(t, t_0, \omega)$ – линейно независимые решения этого уравнения, определяющиеся начальными условиями (здесь черта означает комплексное сопряжение):

$$\begin{pmatrix} \phi(t_0, t_0, \omega) & \bar{\phi}(t_0, t_0, \omega) \\ \phi'(t_0, t_0, \omega) & \bar{\phi}'(t_0, t_0, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}.$$

Функции ϕ и $\bar{\phi}$ определяют столбец фундаментального решения $\Phi(t, t_0, \omega)$. Поэтому в точке $t+2T$ фундаментальное решение можно выразить через фундаментальное решение в точке t:

$$\Phi(t + 2T, t_0, \omega) = \Phi(t, t_0, \omega)\hat{T}(t_0, \omega). \tag{12}$$

Матрица

$$\hat{T}(t_0, \omega) = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей монодромии*. Ниже понадобится формула, связывающая элементы этой матрицы. Вронскиан двух решений уравнения

(11) постоянен. Поэтому вронскиан фундаментальной системы решений Φ:

$$W(\Phi) = \phi\bar{\phi}' - \bar{\phi}\phi' = -2i\omega.$$

После вычисления вронскианов правой и левой частей в формуле связи (12) получим:

$$|a|^2 - |b|^2 = 1.$$

2.2 Функция Блоха и параметрический резонанс

Рассмотрим вопрос о свойствах решений уравнения (11). С одной стороны понятно, что период изменения коэффициента – $2T$ существенно влияет на решение, и возникает желание найти хоть одно периодическое решение с периодом кратным $2T$. С другой стороны, если считать функцию $q(t)$ малой по величине, тогда выясняется, что если и есть периодическое решение, то его период, как в случае гармонического осциллятора, должен быть близок к $2\pi/\omega$.

Здесь мы построим специальное решение уравнения (11). Оно определяется соотношением:

$$\psi(t_0, t_0, \omega) = 1, \quad \psi(t + 2T, t_0, \omega) = \lambda\psi(t, t_0, \omega). \tag{13}$$

Решение это будем искать как линейную комбинацию решений из фундаментальной системы, введенной в предыдущем пункте:

$$\psi = C\phi + D\bar{\phi}.$$

Соотношение (13) в точке $t_0 + 2T$ дает:

$$C(a\phi + b\bar{\phi}) + D(\bar{b}\phi + \bar{a}\bar{\phi}) = \lambda(C\phi + D\bar{\phi}).$$

Приравняем коэффициенты при линейно независимых функциях. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{array}{c} (a - \lambda)C + \bar{b}D = 0, \\ bC + (\bar{a} - \lambda)D = 0. \end{array}$$

Для существования ненулевого решения этой системы уравнений необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. Это условие приводит к уравнению для постоянной λ:

$$(\alpha - \lambda)(\bar{a} - \lambda) - |b|^2 = 0,$$

или

$$\lambda^2 - (a + \bar{a})\lambda + |a|^2 - |b|^2 = 0,$$

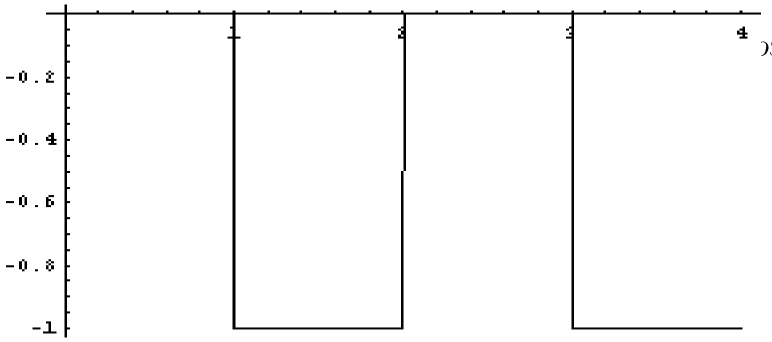

Рис. 3: Функция $q(t)$, $(T = 1,\, \varepsilon = 1)$.

или

$$\lambda^2 - 2a_R\lambda + 1 = 0,$$

где a_R – вещественная часть постоянной a. Это уравнение имеет два решения.

$$\lambda_{12} = a_R \pm \sqrt{a_R^2 - 1}.$$

Вещественные решения этого уравнения существуют при $|a_R| \geq 1$. Причем, если $a_R = \pm 1$, тогда $\lambda = \pm 1$ и функция Блоха периодическая или антипериодическая. Если $|a_R| > 1$, тогда одно из значений $|\lambda| > 1$ и функция Блоха не ограничена на оси t. Значениям $|a_R| < 1$ соответствуют комплексные значения λ. Для того, чтобы выяснить, как ведет себя при этом функция Блоха, вычислим $|\lambda|$. Числа λ_1 и λ_2 – комплексно сопряженные. По теореме Виета произведение корней:

$$\lambda_1\lambda_2 = 1.$$

Это означает, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Следовательно, функция Блоха в этом случае ограничена.

Таким образом, показано, если $|a_R| > 1$, тогда существует растущее решение уравнения Штурма-Лиувилля. Явление возрастания решения уравнения с периодически меняющимся коэффициентом в механике называется *параметрическим резонансом.*

2.3 Пример

В качестве примера уравнения Штурма-Лиувилля, для которого можно в явном виде построить фундаментальную систему решений и функцию Блоха рассмотрим уравнение (11) с периодической функцией $q(t)$ вида (см. рис.1):

$$q(t) = 0, \quad \text{при}\, 0 < t \leq T; \quad q(t) = -\varepsilon \quad \text{при}\, T < t \leq 2T.$$

Построим фундаментальную систему решений $(\phi, \bar{\phi})$ такую, что:

$$\phi(t_0, t_0, \omega) = 1, \quad \phi'(t_0, t_0, \omega) = i\omega.$$

Для меньшей громоздкости в вычислениях мы будем считать, что $t_0 = 0$ и опустим зависимость ϕ от t_0. Тогда при $0 < t \leq T$ получим:

$$\phi(t, \omega) = \exp(i\omega t),$$

при $T < t \leq 2T$ для построения ϕ необходимо решить задачу Коши:

$$\phi|_{t=T} = \exp(i\omega T), \quad \phi'|_{t=T} = i\omega \exp(i\omega T).$$

Решение этой задачи для уравнения

$$u'' + (\omega^2 - \varepsilon)u = 0$$

имеет вид:

$$\phi(t, \omega) = A \exp(i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}(t - T)) + B \exp(-i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}(t - T)).$$

Постоянные A и B определяются формулами:

$$\exp(i\omega T) = A + B, \quad i\omega \exp(i\omega T) = iA\sqrt{\omega^2 - \varepsilon} - iB\sqrt{\omega^2 - \varepsilon},$$

или

$$= \frac{1}{2}\exp(i\omega T)\Big(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}\Big), \quad B = \frac{1}{2}\exp(i\omega T)\Big(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}\Big).$$

Определение матрицы монодромии приводит к системе уравнений для функций a, b – элементов этой матрицы:

$$\begin{gathered} \phi(2T, \omega) = a\phi(0, \omega) + b\bar{\phi}(0, \omega) \\ \phi'(2T, \omega) = a\phi'(0, \omega) - b\bar{\phi}'(0, \omega), \end{gathered}$$

или

$$\begin{aligned} A \exp(iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}) + B \exp(-iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}) &= a + b, \\ iA\sqrt{\omega^2 - \varepsilon} \exp(iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}) - iB\sqrt{\omega^2 - \varepsilon} \exp(-iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}) &= ia\omega - ib\omega. \end{aligned}$$

После простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} a = \frac{1}{2}\Big[&A \exp(iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon})(1 + \frac{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}{\omega}) + \\ &B \exp(-iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon})(1 - \frac{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}{\omega})\Big], \\ b = \frac{1}{2}\Big[&A \exp(iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon})(1 - \frac{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}{\omega}) + \\ &B \exp(-iT\sqrt{\omega^2 - \varepsilon})(1 + \frac{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}{\omega})\Big]. \end{aligned}$$

Подставив в формулу для коэффициента a выражения для A и B, получим:

$$a = \frac{\exp(iT(\omega + \sqrt{\omega^2 - \varepsilon}))}{4}\Big(1 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}\Big)\Big(1 + \frac{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}{\omega}\Big) - $$
$$- \frac{\exp(iT(\omega - \sqrt{\omega^2 - \varepsilon}))}{4}\Big(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}\Big)\Big(1 - \frac{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}}{\omega}\Big).$$

После умножения и приведения подобных слагаемых получим:

$$a = \exp(i\omega T)\Big(\cos(T\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}) + \frac{2\omega^2 - \varepsilon}{2\omega\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}} i \sin(T\sqrt{\omega^2 - \varepsilon})\Big).$$

Выражение для вещественной части:

$$\Re(a) = \cos(T\omega)\cos(T\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}) - \frac{2\omega^2 - \varepsilon}{2\omega\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}} \sin(\omega T)\sin(T\sqrt{\omega^2 - \varepsilon}).$$

Задача 2. Показать зоны неустойчивости по отношению к параметрическому возмущению на графике соотношения между частотой ω и параметром ε.

2.4 Литература

Вопрос о свойствах линейных уравнений с периодическими коэффициентами обычно излагается в курсе дифференциальных уравнений:

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Изложение в первых двух пунктах этого раздела почти дословно повторяет

3. Абловитц М., Сегур Х.. Солитоны и метод обратной задачи.

Пример близок к примеру разобранному в книге

4. Арнольд В.И.. Математические методы классической механики.

3 Математический маятник

Здесь подробно исследуется движение математического маятника. Выписывается решение в эллиптических функциях. Рассматривается движение маятника вблизи положения устойчивого равновесия и на сепаратрисе.

3.1 Вывод уравнения математического маятника

Рассмотрим материальную точку массы m, подвешенную к некоторой точке на невесомом стержне длины l. Пусть стержень отклонен на угол ϕ от вертикального положения. Напишем уравнения Ньютона для этой механической системы. Для этого спроектируем все силы, действующие на материальную точку, на направление, перпендикулярное стержню. Сила натяжения самого стержня дает ноль, остается сила инерции – ее проекция равна $ml\phi''$ и сила тяжести – равная $mg\sin(\phi)$. В результате получим дифференциальное уравнение:

$$\phi'' + \omega^2 \sin(\phi) = 0,$$

где $\omega^2 = g/l$.

В этом уравнении можно избавиться от коэффициента ω^2 с помощью замены независимой переменной $t \to t/\omega$. Формально при этом необходимо новую переменную называть другой буквой, однако, здесь ее будем обозначать также через t. Таким образом, мы будем исследовать уравнение *математического маятника* в виде:

$$\phi'' + \sin(\phi) = 0. \tag{14}$$

3.2 Фазовые траектории

Легко найти бесконечно много решений этого уравнения: $\phi = 2\pi k$ и $\phi = \pi(2k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Конечно, если обратиться от уравнения обратно к маятнику, то окажется, что все эти решения соответсвуют всего двум его положениям равновесия: $\phi = 0$ – нижняя точка равновесия и $\phi = \pi$ – верхняя точка равновесия.

Кроме равновесных имеются еще и периодические, и вращающиеся траетории движения маятника. Для их исследования построим фазовый портрет уравнения. Это можно сделать, благодаря тому, что уравнение (31) – автономное.

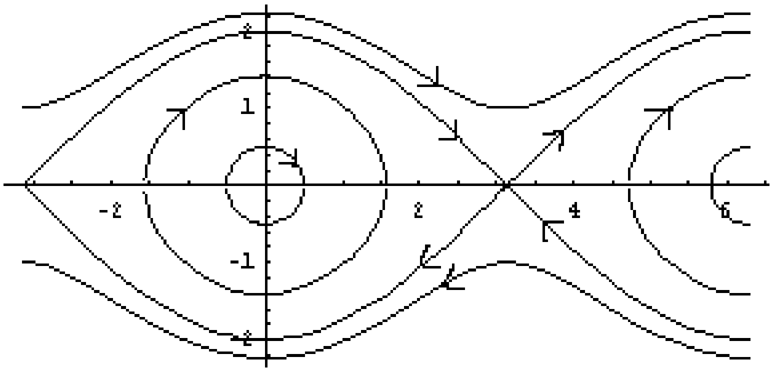

Рис. 4: Фазовый портрет уравнения математического маятника.

Умножим уравнение на ϕ' и проинтегрируем по t, в результате получим[1]:

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - \cos(\phi) = E. \tag{15}$$

Здесь E– постоянная интегрирования, а с физической точки зрения – полная энергия математического маятника, и формула (15) есть просто закон сохранения энергии для математического маятника.

Формула (15) позволяет исследовать поведение решения уравнения (31) в фазовом пространстве (ϕ, ϕ'). Здесь надо заметить, что фазовое пространство динамической системы, соответствующей математическому маятнику, – поверхность кругового цилиндра. Ведь координата ϕ может изменяться только от 0 до 2π. Однако, мы "забудем"про механическую интерпретацию уравнения (31) и будем рассматривать всю фазовую плоскость, а не только полосу $\phi \in [0, 2\pi]$, склеенную по прямым $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$.

Разным фазовым траекториям уравнения (31) соответствуют разные значения постоянной E. Выясним, какие значения может принимать постоянная E. Во-первых, если мы исследуем только вещественные решения уравнения (31), тогда $2E + 2\cos(\phi) \geq 0$, то есть $E \geq -1$. Значение $E = -1$ соответствует стационарным решениям $\phi \equiv 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Во-вторых, при $E > 1$ скорость – ϕ' никогда не обращается в нуль. То есть,

[1]Здесь переход от (31) к (15) сделан формально. Обсуждение эквивалентности уравнения второго порядка и, полученного после формального интегрирования, уравнения первого порядка см. в п.1.1.2.

$E > 1$ соответсвует вращающимся решениям. Если $E > -1$ и $E < 1$, тогда уравнение (15) определяет семейство замкнутых кривых. Крайние значения ϕ достигаются при $\phi' = 0$ и равны $\phi_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\arccos(-E) + 2\pi k$. Максимальные значения скоростей достигаются в точках $\phi = 2\pi k$ и равны $\pm\sqrt{2E}$. Значению $E = 1$ соответствуют два типа траекторий, это точки равновесия $\phi = \pi(2k+1)$ и сепаратрисы, отделяюще колебательные от вращательных решений уравнения (31).

3.3 Явная формула для решения и период колебаний

Явная формула для решения легко получается из уравнения с разделяющимися коэффициентами (15):

$$t + t_0 = \int_{\phi_-}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{2E + 2\cos(s)}}, \tag{16}$$

здесь t_0 –произвольная постоянная. Эта формула верна при изменении ϕ от ϕ_- до ϕ_+. При движении маятника в обратную сторону формула для решения имеет другой вид:

$$t + t_1 = \int_{\phi}^{\phi_+} \frac{ds}{-\sqrt{2E + 2\cos(s)}}, \tag{17}$$

где $t_1 = t_0 + T/2$. Через обозначаен период колебаний.

Формулы (16) и (17) позволяют вычислить период колебаний математического маятника:

$$T = \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{ds}{\sqrt{2E + 2\cos(s)}} - \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{ds}{-\sqrt{2E + 2\cos(s)}},$$

или

$$T = \sqrt{2}\int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{ds}{\sqrt{E + \cos(s)}}.$$

Преобразуем формулы (16) и (17) так, чтобы избавиться от зависимости пределов интегрирования от E. Для этого обозначим: $\cos\phi_0 = -E$, тогда подкоренное выражение в знаменателе можно записать как разность: $\cos(s) - \cos(\phi_0)$. Далее воспользуемся тригонометрической формулой: $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$. В результате из (16) получим:

$$t + t_0 = \int_{-\phi_0}^{\phi} \frac{ds}{2\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(s/2)}}.$$

Теперь сделаем замену переменной интегрирования так, чтобы нижний предел интегрирования был равен $-\pi/2$:

$$\sin(u) = \frac{\sin(s/2)}{\sin(\phi_0/2)},$$

здесь u – новая переменная интегрирования. Верхний предел будет равен

$$U(\phi) = \arcsin\left(\frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_0/2)}\right).$$

При такой замене дифференциал новой переменной определится из формул:

$$\frac{\cos(s/2)ds}{2\sin(\phi_0/2)} = \cos(u)du,$$

здесь удобна замена:

$$\cos(s/2) = \sqrt{1-\sin^2(\phi/2)\sin^2(u)}.$$

Тогда:

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2)-\sin^2(s/2)}} =$$
$$\frac{2\sin(\phi_0/2)\cos(u)du}{\sqrt{1-\sin^2(\phi/2)\sin^2(u)}}\frac{1}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2)-\sin(\phi_0/2)\sin^2(u)}} =$$
$$\frac{2du}{\sqrt{1-\sin^2(\phi/2)\sin^2(u)}}.$$

Окончательно, выражение для решения принимает вид:

$$t + t_0 = \int_{-\pi/2}^{U(\phi)} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2(\phi_0/2)\sin^2(u)}}. \tag{18}$$

Легко видеть, что максимальное значение, которое может принять верхний предел интегрирования равно $\pi/2$. Формула (18) удобна для дальнейшего анализа решения в первую очередь тем, что если $E \neq 1$, тогда знаменатель подынтегральной функции никогда не обращается в нуль.

Из этой формулы следует, что период колебаний математического маятника зависит от полной энергии системы или, что то же самое, – от амплитуды колебаний ϕ_0:

$$t + t_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2(\phi_0/2)\sin^2(u)}}. \tag{19}$$

Интеграл в формуле для периода имеет специальное название и обозначение:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}}.$$

$K(k)$ – это полный эллиптический интеграл первого рода.

Замечание. Обратная функция к

$$t = \int_0^{\eta} \frac{du}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2(u)}}$$

называется *синус амплитуды* (синус Якоби): $\eta(t,k) = \mathrm{sn}(t|k)$.

3.4 Колебания малой амплитуды

Колебания малой амплитуды, как следует из анализа фазового портрета, происходят при значениях энергии чуть больших чем -1. Обозначим: $E = -1 + 2\varepsilon^2$. В этом случае из $-E = 1 - 2\sin(\phi_0/2)$ следует, что $\sin(\phi_0/2) = \varepsilon$. Тогда формула для решения уравнения (16) примет вид:

$$t + t_0 = \int_{-\pi/2}^{U(\phi)} \frac{du}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(u)}}. \tag{20}$$

Разложим подынтегральное выражение по формуле Тейлора и почленно проинтегрируем. В результате получим:

$$t + t_0 = U(\phi) + \pi/2 + \varepsilon^2 Q(\phi, \varepsilon),$$

где

$$U(\phi) = \arcsin\left(\frac{\sin(\phi/2)}{\varepsilon}\right);$$

$Q(\phi, \varepsilon)$ – ограниченная функция.

В результате для малых колебаний получаем формулу:

$$\sin(\phi(t,\varepsilon)/2) = \varepsilon \sin(t + t_* + \varepsilon^2 Q(\phi, \varepsilon)).$$

если амплитуда колебаний мала, тогда, представив синус в левой части по формуле Тейлора , получим:

$$\phi + 2\pi k = 2\varepsilon \sin(t + t_* + \varepsilon^2 Q(\phi, \varepsilon)) + \varepsilon^3 R(\phi, \varepsilon).$$

Малые колебания математического маятника близки к гармоническим.

Воспользовавшись формулой для периода (19) легко получить и зависимость периода малых колебаний от их амплитуды:

$$T = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2(u) + \ldots) = 2\pi + \varepsilon^2/2 + \ldots.$$

3.5 Сепаратрисное решение

Особые – сепаратрисные решения получаются, если значение энергии $E = 1$. В этом случае эллиптический интеграл в формуле (16) вырождается и его можно проинтегрировать в элементарных функциях. Подкоренное выражение в (16), если $E = 1$, можно представить в виде: $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$, тогда:

$$t + t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\phi_0}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{2}\sin(s/2)},$$

проинтегрировав табличный интеграл, получим

$$t + t_0 = \ln(\tan(s/2))|_{-\phi_0/2}^{\phi/2},$$

или

$$t + t_* = \ln(\tan(\phi/4)).$$

Окончательно для решения получим формулу:

$$\phi(t) = 4\arctan(\exp(t + t_*)). \tag{21}$$

Второе сепаратрисное решение получается, если те же манипуляции произвести с формулой (17). Оно имеет тот же вид, лишь меняется знак перед t в экспоненте.

Это решение непериодическое и асимптотически стремится к своему минимальному или максимальному значению, впрочем, никогда его не достигая.

Задача 3. Написать несколько первых членов ряда в разложении $K(k)$ в окрестности $k = 1$.

3.6 Литература

В списке литературы к этой лекции ограничимся лишь одним учебником:

1. Федорюк М.В.. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

4 Эллиптические функции

Здесь эллиптические функции Якоби вводятся как решения дифференциальных уравнений. Исследуются свойства функций синус амплитуды, косинус амплитуды и дельта амплитуды как функций вещественного переменного. Изложение не касается свойств эллиптических функций относительно комплексной переменной и, в частности, наличия у таких функций двух периодов.

4.1 Решение уравнения математического маятника и функция синус амплитуды

Решение уравнения математического маятника можно записать в виде:

$$t + t_0 = \frac{1}{2}\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{ds}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(s/2)}}.$$

Эту формулу оказывается удобнее рассматривать, когда в подынтегральной функции под знаком корня вместо синуса есть полиномиальная зависимость от переменной интегрирования. Для перехода к такой записи можно сделать замену:

$$ku = \sin(s/2) \quad k = \sin(\phi_0/2).$$

Тогда

$$kdu = \frac{\cos(s/2)}{2}ds, \quad \text{или} \quad ds = \frac{2kdu}{\sqrt{1-k^2u^2}}.$$

Следовательно, решение уравнения математического маятника выражается через интеграл вида:

$$t = \int_0^{\frac{\sin(\phi/2)}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \tag{22}$$

Теперь удобно рассматривать функцию, обратную интегралу как новую специальную функцию.

$$u = \mathrm{sn}(t|k), \quad \text{где} \quad \sin(\phi/2) = u\sin(\phi_0/2).$$

Эта новая функция называется *синус амплитуды или синус Якоби.*

4.2 Эллиптические функции Якоби

Эллиптические функции в анализе обычно вводятся либо как мероморфные двоякопериодические функции комплексного переменного либо, как обратные функции эллиптических интегралов. Здесь мы воспользуемся определением эллиптических функций Якоби при помощи дифференциальных уравнений.

Продифференцировав (22) по t, легко увидеть, что функция синус амплитуды удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$y' = \sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}.$$

Обозначим: $\mathrm{cn}^2(t|k) = 1 - \mathrm{sn}^2(t|k)$, $\mathrm{dn}^2 = 1 - k^2\mathrm{sn}^2(t|k)$. Функция $\mathrm{cn}(t|k)$ называется *косинус амплитуды или косинус Якоби*, а $\mathrm{dn}(t|k)$ – *дельта амплитуды*. Выведем формулы для производных этих функций.

$$2\mathrm{cn}'(t|k)\mathrm{cn}(t|k) = -2\mathrm{sn}(t|k)\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2(t|k))(1-k^2\mathrm{sn}^2(t|k))},$$

$$2\mathrm{dn}'(t|k)\mathrm{dn}(t|k) = -2k^2\mathrm{sn}(t|k)\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2(t|k))(1-k^2\mathrm{sn}^2(t|k))}.$$

Или

$$\mathrm{sn}'(t|k) = \mathrm{cn}(t|k)\mathrm{dn}(t|k),$$
$$\mathrm{cn}'(t|k) = -\mathrm{sn}(t|k)\mathrm{dn}(t|k),$$
$$\mathrm{dn}'(t|k) = -k^2\mathrm{sn}(t|k)\mathrm{cn}(t|k).$$

Таким образом, тройка функций $\mathrm{sn}(t|k), \mathrm{cn}(t|k), \mathrm{dn}(t|k)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$y_1' = y_2y_3, \quad y_2' = -y_1y_3, \quad y_3' = -k^2y_1y_2, \tag{23}$$

с начальными условиями, легко получающимися из интегрального представления $\mathrm{sn}(t|k)$:

$$y_1|_{u=0} = 0, \quad y_2|_{u=0} = 1, \quad y_3|_{u=0} = 1. \tag{24}$$

Если отвлечься от истоков появления функции $\mathrm{sn}(t|k)$ – как обращения интеграла (22), то можно вводить эллиптические функции как решения задачи Коши (23), (24). Один первый интеграл этой системы получается, если первое уравнение умножить на $2y_1$, второе – на $2y_2$ и сложить оба полученных выражения.

$$2y_1y_1' + 2y_2y_2' = (y_1^2 + y_2^2)' = 0.$$

Еще один интеграл получается, если первое уравнение умножить на $2k^2y_1$, третье – на $2y_3$ и сложить их:

$$2k^2y_1'y_1 + 2k^2y_3'y_3 = (k^2y_1^2 + y_3^2)' = 0.$$

В результате два первых интеграла:

$$y_1^2 + y_2^2 = c_1, \quad k^2y_1^2 + y_3^2 = c_2.$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий (24). Это приводит к тождествам:

$$\mathrm{sn}^2(t|k) + \mathrm{cn}^2(t|k) = 1, \quad k^2\mathrm{sn}^2(t|k) + \mathrm{dn}^2(t|k) = 1. \tag{25}$$

4.3 Свойства Функций Якоби

Исследуем свойства введенных эллиптических функций.

4.3.1 Область значений

Область значений эллиптических функций Якоби легко выяснить из тождеств (25):

$$-1 \le \mathrm{sn}(t|k) \le 1, \quad -1 \le \mathrm{cn}(t|k) \le 1, \quad \sqrt{1-k^2} \le \mathrm{dn}(t|k) \le 1.$$

4.3.2 Область определения

Здесь мы рассматриваем эллиптические функции как вещественные функции вещественной переменной. Поэтому приходится ограничиваться значениями $k \in [0, 1]$. Значения параметра $k > 1$ приводят к комплексным решениям системы (23). Это следует из тождеств (25).

Теорема о существовании решений задачи Коши утверждает, что решение задачи (23), (24) существует в интервале $-\delta < t < \delta$. Однако, функции ограничены во всей области их существования. Из системы уравнений (23) следует, что их производные также ограничены и дифференцируемы. поэтому на подобные интервалы можно разбить всю вещественную ось и доказать существование решения системы при $-\infty < t < \infty$.

4.3.3 Свойства четности

Выясним как меняются уравнения (23) при замене знака независимой переменной: $z_j(t) = y_j(-t)$. Система уравнений для z_j имеет почти тот же вид, что и (23). Только знаки правых частей заменены на противоположные. Начальные данные для функций z_j останутся теми же, что и для y_j. Тогда функции z_j легко выразить через y_j:

$$z_1(t) = -y_1(-t), \quad z_2(t) = y_2(-t) \quad z_3(t) = y_3(-t).$$

Таким образом:

$$\mathrm{sn}(-t) = -\mathrm{sn}(t), \quad \mathrm{cn}(-t) = \mathrm{cn}(t) \quad \mathrm{dn}(-t) = \mathrm{dn}(t).$$

4.3.4 Монотонность

Области монотонности решений системы (23) определяется знаком производной. При $t = 0$ производная функций $\mathrm{sn}(t)$ равна единице. То есть, функция возрастает и

$$y_1' = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - k^2 y_1^2)}.$$

Эта функция возрастает до тех пор, пока не достигнет своего максимума $\mathrm{sn}(K(k)|k) = 1$. Значение $K(k)$ определяется из интеграла:

$$K(k) = \int_0^1 dx \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

При этом $\mathrm{cn}(K(k)|k) = 0$, $\mathrm{dn}(K(k)|k) = \sqrt{1 - k^2}$.

4.3.5 Сдвиг

Здесь приведем вывод формулы для $\mathrm{sn}(t + v)$, этот метод принадлежит Эйлеру.

Предположим, что t и v изменяются так, что $t + v = \alpha = \mathrm{const}$, то есть,

$$\frac{dv}{dt} = -1.$$

Для удобства обозначим $s_1 = \mathrm{sn}(t)$, $s_2 = \mathrm{sn}(v)$, тогда

$$2s_2' s_1'' = -(1 + k^2) 2 s_1 s_1' + 4k^2 s_1^3 s_1', \quad 2s_2' s_2'' = -(1 + k^2) 2 s_2 s_2' + 4k^2 s_2^3 s_2'$$

Здесь штрих означает дифференцирование по t. Отсюда и из выражений для квадратов первых производных:

$$(s_1')^2 = (1 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2), \quad (s_2')^2 = (1 - s_2^2)(1 - k^2 s_2^2),$$

получим:
$$\frac{s_1''s_2 - s_2''s_1}{(s_1')^2s_2^2 - (s_2')^2s_1^2} = \frac{2k^2s_1s_2(s_1^2 - s_2^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(1 - k^2s_1^2s_1^2)}.$$
Тогда
$$(s_1's_2 - s_2's_1)^{-1}\frac{d}{du}(s_1's_2 - s_2's_1)(1 - k^2s_1^2s_2^2)^{-1}\frac{d}{du}(1 - k^2s_1^2s_2^2).$$
Проинтегрировав, получим
$$\frac{s_1's_2 - s_2's_1}{1 - k^2s_1^2s_2^2} = C.$$
Таким образом:
$$\frac{\mathrm{cn}(t)\mathrm{dn}(t)\mathrm{sn}(v) + \mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v)\mathrm{sn}(t)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(t)\mathrm{sn}^2(v)} = C.$$
То есть, выражение в правой части есть функция от α: $f(t + v) = f(\alpha)$. Положив $v = 0$, получим, что $f(t) = \mathrm{sn}(t)$.

В результате доказана *формула сложения*:
$$\mathrm{sn}(t + v) = \frac{\mathrm{cn}(t)\mathrm{dn}(t)\mathrm{sn}(v) + \mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v)\mathrm{sn}(t)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(t)\mathrm{sn}^2(v)}, \tag{26}$$

4.3.6 Периодичность

Для вычисления значений функций Якоби при сдвиге на $K(k)$ воспользуемся полученной формулой (26):
$$\mathrm{sn}(t + K) = \frac{\mathrm{cn}(t)}{\mathrm{dn}(t)}. \tag{27}$$
Тогда
$$\mathrm{cn}^2(t + k) = 1 - \frac{\mathrm{cn}^2(t)}{\mathrm{dn}^2(t)} = \frac{\mathrm{dn}^2(t) - \mathrm{cn}^2(t)}{\mathrm{dn}^2(t)} = \frac{1 - k^2\mathrm{sn}^2(t) - \mathrm{cn}^2(t)}{\mathrm{dn}^2(t)}.$$
или
$$\mathrm{cn}^2(t + k) = (1 - k^2)\frac{\mathrm{sn}^2(t)}{\mathrm{dn}^2(t)}.$$
В результате получим:
$$\mathrm{cn}(t + K) = -\sqrt{1 - k^2}\frac{\mathrm{sn}(t)}{\mathrm{dn}(t)}. \tag{28}$$

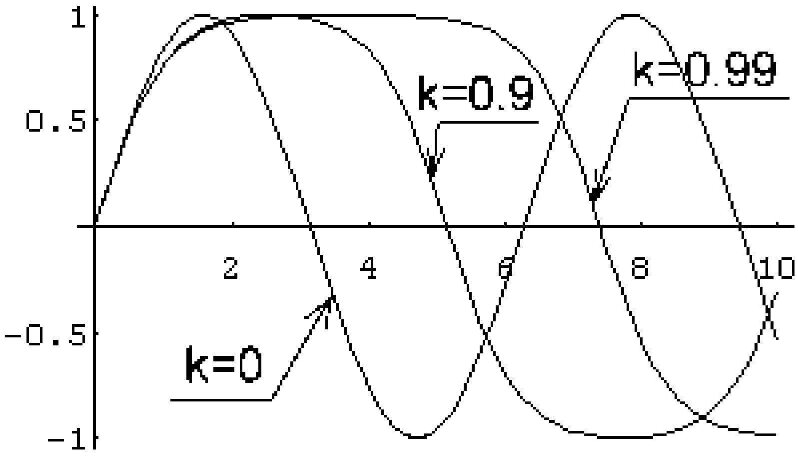

Рис. 5: Функция $\mathrm{sn}(t|k)$ при разных значениях k.

Знак минус при вычислении корня выбирается, исходя из следующих соображений. При $K < t < 2K$ $\mathrm{sn}(t) > 0$ и убывает, а функция $\mathrm{cn}(t)$ меньше нуля и также убывает. То есть, функция $\mathrm{cn}(t)$ имеет разные знаки при $0 < t < K$ и $k < t < 2K$.

Аналогичные вычисления дают:

$$\mathrm{dn}(t+K) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\mathrm{dn}(t)}. \tag{29}$$

Формулы (27) – (29) приводят к выражениям для сдвига на $2K$:

$$\mathrm{sn}(t+2K) = \frac{\mathrm{cn}(t+K)}{\mathrm{dn}(t+K)} = -\mathrm{sn}(t),$$
$$\mathrm{cn}(t+2K) = -\sqrt{1-k^2}\frac{\mathrm{sn}(t+k)}{\mathrm{dn}(t+K)} = -\mathrm{cn}(t+K),$$
$$\mathrm{dn}(t+2K) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\mathrm{dn}(t+k)} = \mathrm{dn}(t).$$

Тогда:

$$\mathrm{sn}(t+4K) = \mathrm{sn}(t), \quad \mathrm{cn}(t+4K) = \mathrm{cn}(t).$$

Функции $\mathrm{sn}(t)$ и $\mathrm{cn}(t)$ – периодические с периодом $4K$, функция $\mathrm{dn}(t)$ – периодическая с периодом $2K$.

4.4 Литература

Изложение в пунктах 1 и 2 во многом следует учебнику

М.В. Федорюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Свойства эллиптических функций изложены в соответствии с книгой

Э.Т. Уиттекер. Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа. т.2

5 Аппроксимация функций Якоби

Здесь изучается поведение функции sn$(t|k)$ в окрестности нуля переменной t и значений параметра $k = 0$ и $k = 1$. В силу того, что эллиптические функции аналитически зависят как от аргумента, так и от параметра k, их можно разложить в сходящиеся степенные ряды по этим параметрам. Первые несколько членов таких рядов и будут выписаны ниже.

5.1 Разложение в окрестности нуля аргумента

Пусть значение t достаточно мало. Тогда $\operatorname{sn}(t|k)$ можно искать в виде ряда по степеням t.

$$\operatorname{sn}(t|k) = f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \ldots.$$

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение для функции $\operatorname{sn}(t|k)$:

$$(y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

В результате получим:

$$\begin{gathered}(f_1(k) + 2f_2(k)t + 3f_3(k)t^2 + \ldots)^2 = \\ (1 - (f_1(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \ldots)^2) \times \\ (1 - k^2(f_(k)t + f_2(k)t^2 + f_3(k)t^3 + \ldots)^2).\end{gathered}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t. Тогда:

$$f_1^2(k) \equiv 1 \quad 4f_1(k)f_2(k) \equiv 0, \quad 6f_1(k)f_3(k) + 4f_2(k) = -f_1^2(k) - k^2f_1(k).$$

Окончательно, разложение в окрестности нулевого значения аргумента:

$$\operatorname{sn}(t|k) = t - \frac{1}{6}(1 + k^2)t^3 + \ldots.$$

Выражение для общего члена этого ряда неизвестно.

5.2 Разложение в окрестности нулевого значения параметра

Пусть параметр k близок к нулю, тогда функция $\operatorname{sn}(t|k)$ близка к тригонометрическому синусу. Это легко показать, если искать представление $\operatorname{sn}(t|k)$ в виде:

$$\operatorname{sn}(t|k) = \phi_0(t) + \phi_1(t)k + \phi_2(t)k^2 + \phi_3(t)k^3 + \ldots.$$

Подставим это выражение в дифференциальное выражение для функции $\mathrm{sn}(t|k)$.

$$(\phi_0' + \phi_1' k + \phi_2' k^2 + \phi_3 k^3 + \ldots)^2 = (1 - (\phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \phi_3 k^3 + \ldots)^2) \times \\ (1 - k^2(\phi_0 + \phi_1 k + \phi_2 k^2 + \phi_3 k^3 + \ldots)^2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k. В результате получим дифференциальные уравнения для функций ϕ_j:

$$(\phi_0')^2 = 1 - \phi_0^2, \quad 2\phi_1'\phi_0' = -2\phi_0\phi_1, \quad 2\phi_0'\phi_2' + (\phi_1')^2 = -2\phi_0\phi_2 - \phi_0^2, \quad \ldots.$$

Начальные условия для функций ϕ_j:

$$\phi_0|_{t=0} = 1, \quad \phi_j|_{t=0} = 0,\ j = 1, 2, \ldots.$$

Решения этой рекурентной системы уравнений:

$$\phi_0 = \sin(t), \quad \phi_1 \equiv 0, \quad \phi_2 = (-t\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t))/2,\ \ldots.$$

В результате получим:

$$\mathrm{sn}(t|k) = \sin(t) + \frac{k^2}{2}(-t\cos(t) + \sin(t)\cos^2(t)) + \ldots.$$

5.3 Разложение в окрестности $k = 1$

Рассмотрим случай, когда параметр k близок к 1. В этом случае его удобно выразить через дополнительный модуль $k^2 = 1 - (k')^2$. Решение уравнения для синуса амплитуды опять будем искать в виде ряда, но уже по степеням дополнительного модуля k':

$$\mathrm{sn}(t|k) = \psi_0(t) + k'\psi_1(t) + (k')^2\psi_2(t) + \ldots.$$

Подставим это разложение в дифференциальное уравнение для $\mathrm{sn}(t|k)$:

$$(\psi_0' + \psi_1' k' + \psi_2'(k')^2 + \ldots)^2 = (1 - (\psi_0 + \psi_1 k' + \psi_2 (k')^2 + \ldots)^2) \times \\ (1 - (1 - (k')^2)(\psi_0 + \psi_1 k' + \psi_2 k^2 + \ldots)^2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k'. В результате получим рекурентную последовательность уравнений.

$$(\psi_0')^2 = (1 - \psi_0^2)^2, \quad 2\psi_1'\psi_0' = -2\psi_0\psi_1, \\ 2\psi_0'\psi_2' + (\psi_1')^2 = -2\psi_0\psi_2(1 - \psi_0^2) - (2\psi_0\psi_2 - \psi_0^2)(1 - \psi_0^2), \quad \ldots.$$

Начальные условия для функций ψ_j такие же, как и для функций ϕ_j в предыдущем пункте. Решив уравнений для первых трех коэффициентов разложения, получим:

$$\mathrm{sn}(t|k) = \mathrm{th}(t) + \frac{1}{2}(k')^2(\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t) - t)\frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} + \dots$$

Задача. Выразить через эллиптические функции Якоби решение уравнения (эллиптическую функцию Вейерштрасса):

$$(P')^2 = 4P^3 - g_2 P - g_1.$$

5.4 Литература

Для более глубокого изучения эллиптических функций можно обратиться, например, к книге Уиттекера и Ватсона, или к учебнику

В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьёв. Эллиптические функции.

6 Устойчивость решений нелинейных уравнений

Здесь напоминаются определения устойчивости решений уравнений с одной степенью свободы, начиная с классификации точек равновесия и заканчивая устойчивостью по линейному приближению. Основное внимание уделено исследованию устойчивости решений уравнения математического маятника. Показано, что периодическое решение уравнения математического маятника не является устойчивым по Ляпунову, а сепаратрисное решение неустойчиво.

6.1 Положения равновесия

Консервативные системы с одной степенью свободы обычно интерпретируются как движение шарика по потенциальной кривой. При таком движении у шарика может быть два типа равновесных состояний: либо равновесие на вершине (максимуме) кривой, либо равновесие во впадине. Конечно, при небольшом отклонении шарика от положения равновесия на вершине (в точке максимума потенциальной кривой) шарик потеряет равновесие и скатится. Такое равновесие обычно называют неустойчивым. Если отклонить шарик из положения равновесия во впадине, тогда шарик будет колебаться около точки минимума. Поэтому положение равновесия в точке минимума потенциальной энергии устойчиво. Минимум, конечно, не обязательно должен быть глобальным, колебания возникнут и около локального минимума, если не слишком сильно отклонить шарик от равновесного положения.

Такие простые рассуждения естественно приводят к математическим формулировкам об устойчивом положении равновесия. Для автономной системы уравнений

$$y' = f(y). \tag{30}$$

Положение равновесия $y \equiv a$ *называется устойчивым (по Ляпунову) положением равновесия системы уравнений (30), если, во-первых,– существует такое* $\delta_0 > 0$, *что если* $|y(0) - a| < \delta_0$, *то решение системы (30) существует при* $0 \le t < \infty$; *во-вторых, – для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что если* $|y(0) - a| \le \delta$, *тогда* $|y(t) - a| \le \varepsilon$ *при* $0 \le t < \infty$.

То есть, траектория движения будет находиться вблизи положения равновесия бесконечно долго.

На фазовой плоскости около устойчивых по Ляпунову точек равновесия фазовые траектории – это узел или центр.

6.2 Устойчивость по линейному приближению

Практически при исследовании решений нелинейных уравнений часто оказывается довольно трудно исследовать на устойчивость то или иное положение равновесия. Дело здесь в том, что для выяснения устойчивости положения равновесия приходится, исследовать, во-первых, – область существования этого решения с неравновесным начальным положением, во-вторых, – доказывать близость этого решения к положению равновесия. Часто такие исследования оказываются весьма затруднительными. С другой стороны, ведь в определении устойчивости можно начальное отклонение взять очень маленьким. Поэтому оказывается достаточно разумным исследовать на устойчивость не решение нелинейного уравнения, а решение линеаризованного уравнения около положения равновесия.

Будем искать решение системы (30) в виде:

$$y(t) = a + x(t).$$

Тогда система уравнений для новой неизвестной функции $x(t)$ примет вид:

$$x' = f(a + x(t)).$$

Эта система уравнений опять нелинейна. Пусть правая часть – функция $f(a + x(t))$ – гладкая функция. Представим ее с помощью формулы Тейлора в виде:

$$f(a + x) = f(a) + f'(a)x + O(x^2).$$

В точке равновесия $f(a) = 0$ при линеаризации обычно предполагают, что квадратичные слагаемые малы по сравнению с линейными и их можно отбросить. В результате получается линейная система уравнений для x:

$$x' = f'(a)x$$

Вопрос об устойчивости решения этого линейного уравнения легко решается исследованием собственных чисел мартрицы $f'(a) = (\partial_{x_j} f(a + x))$.

Теорема Ляпунова. Пусть вектор-функция $f(y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности положения равновесия $y \equiv a$. Если вещественные части всех собственных значений матрицы $f'(a)$, тогда положение равновесия a асимптотически устойчиво. Справедлива оценка:

$$|x(t) - a| \leq C \exp(-\alpha t)|x(0) - a|, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

где $\alpha > 0,\ C > 0$ для всех $x(0)$, достаточно близких к a.

6.3 Периодические решения консервативных систем и орбитальная устойчивость

В качестве примера консервативной системы уравнений рассмотрим математический маятник.

$$\phi'' + \sin(\phi) = 0. \tag{31}$$

Потенциальная функция для уравнения математического маятника имеет вид:

$$P = \cos(\phi). \tag{32}$$

Периодические решения математического маятника соответствуют значениям $-1 < E < 1$.

Выясним устойчиво ли по Ляпунову периодическое решение уравнения математического маятника по отношению к малому изменению начальных условий. Для этого наряду с решением уравнения математического маятника с $E = E_0$ надо рассмотреть решение уравнения математического маятника с достаточно близкой энергией $E = E_1$.

Глядя на фазовые траектории периодических решений с близкими значениями энергии, легко видеть, что эти траектории находятся близко друг к другу. Однако, периоды колебаний этих решений различны (период колебаний зависит от энергии E):

$$T = 4\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(u)}}, \quad k = \sin(\phi_0/2).$$

Таким образом, период решения $T_1 > T_0$, если $E_1 > E_0$. Это приводит к тому, что если рассматривать решения с близкими начальными данными, тогда за время $t = T_0$ точка, лежащая на внутренней траектории, немного обгонит точку на внешней траектории. Дальше так будет происходить на каждом витке. И, несмотря на близость фазовых траекторий, два решения со сколь угодно близкими начальными условиями могут разойтись на величину порядка единицы за достаточно большое время. То есть периодические решения уравнения математического маятника не являются устойчивыми по Ляпунову.

Тем не менее, фазовые траектории периодических решений устойчивы относительно малых изменений начальных условий. Такая устойчивость фазовых траекторий называется *орбитальной устойчивостью.*

6.4 Линеаризованное в окрестности периодического решения уравнение математического маятника

Более детальный анализ можно провести с помощью линеаризованного уравнения. Рассмотрим линеаризованное на периодическом решении уравнение математического маятника:

$$\psi'' + \psi \cos(\phi(t,E)) = 0. \tag{33}$$

Это линейное уравнение с периодическим коэффициентом. Как известно, по крайней мере одно из решений этого уравнения может оказаться растущим по времени из-за явления параметрического резонанса. Такое растущее решение как раз отвечает за постепенное отставание решения уравнения математического маятника с меньшей полной энергией. В этом пункте будут построены решения линеаризованного уравнения – одно периодическое, второе растущее по времени.

Решения линеаризованного уравнения легко получить из решения нелинейного уравнения. Для этого надо продифференцировать решение нелинейного уравнения по параметрам, от которых зависит решение нелинейного уравнения. Для уравнения математического маятника этими параметрами являются время и полная энергия E. Покажем, что производная по E – решение линеаризованного уравнения:

$$\partial_E(\phi'') + \partial_E(\sin\phi) = 0,$$

или

$$(\partial_E\phi)'' + (\partial_E\phi)\cos(\phi) = 0.$$

Таким образом, два линейно независимых решения линеаризованного уравнения математического маятника имеют вид:

$$\psi_1(t,E) = \partial_t\phi(t,E), \quad \psi_2(t,E) = \partial_E\phi(t,E).$$

Исследуем свойства первого из этих решений:

$$\psi_1 = \partial_t(\phi(t,E)) = \pm\sqrt{2E + 2\cos(\phi(t,E))}.$$

Здесь, как и в решении нелинейного уравнения, важно правильно выбрать знак перед корнем. При движении маятника от $-\phi_0 = -\arccos(E)$ до ϕ_0 будем выбирать знак плюс, при движении в другую сторону – знак минус. В результате получим периодическое решение с периодом $T = 4K(E)$, то есть период этого решения совпадает с периодом решения нелинейного уравнения.

Исследуем свойства второго решения линеаризованного уравнения. Для этого продифференцируем по ∂_E интегральную формулу для ϕ:

$$\partial_E(t-t_0) = \partial_E\Big(\int_0^{\phi(t,E)} \frac{du}{\pm\sqrt{2E+2\cos(u)}}.\Big).$$

В результате получим:

$$\frac{\partial_E\phi(t,E)}{\pm\sqrt{2E+2\cos(\phi(t,E))}} + \int_0^{\phi(t,E)} \frac{-du}{\pm(2E+2\cos(u))^{3/2}} = 0.$$

Здесь знаки $\pm$ сокращаются. Таким образом, второе линейно независимое решение линеаризованного уравнения имеет вид:

$$\psi_2 = \sqrt{2E+2\cos(\phi(t,E))}\int_0^{\phi(t,E)} \frac{du}{(2E+2\cos(u))^{3/2}}. \qquad (34)$$

Коэффициент перед интегралом и подынтегральная функция всегда положительны. Поэтому, во-первых, – $\psi_2 \geq 0$, во-вторых, – интеграл растет, и при каждом изменении времени на период колебаний функции ϕ функция ψ_2 может быть представлена в виде:

$$\psi_2(t+T) = A\psi_1(t) + \psi_2(t). \qquad (35)$$

На первый взгляд для вычисления коэффициента, на который возрастает функция ψ_2 за период колебаний T, достаточно вычислить интеграл в формуле ψ_2 за период T. Однако, легко видеть, что знаменатель подынтегральной функции на отрезке такой длины дважды обращается в нуль – в точках $u = \pm\phi_0$. Для выяснения поведения интеграла крайне важно выяснить особенности подынтегральной функции в этих точках. Рассмотрим поведение подынтегральной функции в окрестности точки ϕ_0:

$$2E - 2\cos(\phi_0-\varepsilon) = 2E - 2\cos(\phi_0)\cos(\varepsilon) + 2\sin(\phi_0)\sin(\varepsilon).$$

Разложим функции, зависящие от ε, по формуле Тейлора в окрестности нуля. В результате получим:

$$2E-2\cos(\phi_0-\varepsilon) = 2E-2\cos(\phi_0)(1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\varepsilon^4R_1(\varepsilon))+2\sin(\phi_0)(\varepsilon-\varepsilon^3R_2(\varepsilon)),$$

или

$$2E - 2\cos(\phi_0-\varepsilon) = \varepsilon(2\sin(\phi_0) + \varepsilon R_3(\varepsilon)).$$

Здесь $R_j(\varepsilon)$, $j = 1,2,3$ – ограниченные функции при $\varepsilon \in [0, C]$, $C > 0$.

Приведенные формулы показывают, что подынтегральная функция в точке ϕ_0 имеет особенность: $(u-\phi_0)^{3/2}$. Эта особенность неинтегрируема. Таким образом, запись решения ψ_2 в виде (34) пригодна только при $0 \leq \phi < \phi_0$.

Для того, чтобы пользоваться формулой (34) на большем промежутке, вычислим разложение этого интеграла в окрестности ϕ_0.

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\phi_0-\varepsilon} \frac{du}{(2\sin(\phi_0))^{3/2}(\phi_0-u)^{3/2}} +$$
$$\int_0^{\phi_0-\varepsilon} du \Big(\frac{1}{(2E-2\cos(u))^{3/2}} - \frac{1}{(2\sin(\phi_0))^{3/2}(\phi_0-u)^{3/2}} \Big)$$

Второе слагаемое в этой формуле в точке ϕ_0 имеет интегрируемую особенность. Интеграл в первом слагаемом легко вычисляется:

$$I = \frac{2}{(2\sin(\phi_0))^{3/2}\sqrt{\varepsilon}} +$$
$$\int_0^{\phi_0-\varepsilon} du \Big(\frac{1}{(2E-2\cos(u))^{3/2}} - \frac{1}{(2\sin(\phi_0))^{3/2}(\phi_0-u)^{3/2}} \Big).$$

Таким образом, интеграл имеет особенность по рядка $|\phi_0-\phi|^{1/2}$ в окрестности ϕ_0. С другой стороны, в формуле (34) множитель перед интегралом при $\phi=\phi_0$ обращается в нуль, причем, в окрестности ϕ_0 этот множитель имеет порядок:

$$\sqrt{2E+2\cos(\phi(t,E))} = \sqrt{2\sin(\phi_0)\varepsilon} + \varepsilon R_4(\varepsilon).$$

Здесь $R_4(\varepsilon)$ – ограниченная функция.

Итак, доказано, что функция ψ_2 ограничена при $\forall t > 0$. Для того, чтобы она была решением линеаризованного диффенциального уравнения, надо еще доказать, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема по t. Во всех точках определения, кроме точек $T/4+Tn/2$, $n \in \mathbf{Z}$, свойство дифференцируемости не вызывает сомнений. В точках $t = T/4 + Tn/2$ верхний предел интегрирования равен $\pm\phi_0$, существование производных по времени надо доказывать особо.

Перейдем к доказательству непрерывной дифференцируемости функций ψ_1 и ψ_2 по времени. Вычислим производную по времени функции ψ_1:

$$\psi_1' = \frac{-\phi'\sin(\phi)}{\sqrt{2E-2\cos(\phi)}} = -\sin(\phi),$$

то есть функция дифференцируема при $\forall t$.

Вычислим первую производную по t функции ψ_2:

$$\psi_2' = \frac{-\phi' \sin(\phi)}{\sqrt{2E - 2\cos(\phi)}} \int_0^{\phi} \frac{du}{(2E + 2\cos(u))^{3/2}} +$$
$$\sqrt{2E - 2\cos(\phi)} \frac{\phi'}{\sqrt{2E - 2\cos(\phi)}} =$$
$$-\sin(\phi) \int_0^{\phi} \frac{du}{(2E + 2\cos(u))^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{2E - 2\cos(\phi)}}.$$

Из представления интеграла в окрестности ϕ_0 следует, что сингулярные в окрестности ϕ_0 члены в формуле для производной ϕ_0 входят с различными знаками и сокращаются. Остаток является ограниченной непрерывной функцией.

Непрерывность и ограниченность вторых производных, следует непосредственно из линеаризованного уравнения.

Функция ψ_2 растет по времени. Следствие этого – решения линеаризованного на периодическом решении уравнения математического маятника не являются устойчивыми по Ляпунову .

6.5 Неустойчивость сепаратрисного решения

Сепаратрисное решение отделяет два вида фазовых траекторий. Для уравнения математического маятника – это траектории соответствующие периодическим и наматывающимся решениям. Поэтому очень важным является вопрос о том, что произойдет при возмущении начальных условий, соответствующих сепаратрисному решению. Очевидно, что решение будет либо вращающимся, либо периодическим. Ведь сепаратрисное решение одно, и после возмущения начальные данные уже не обязаны удовлетворять специальным условиям сепаратрисы. Таким образом, очевидно, что сепаратрисное решение не обладает устойчивостью по Ляпунову. Более того, это решение неустойчиво по линейному приближению. То есть линеаризованное на сепаратрисе уравнение имеет экспоненциально растущее решение, которое приводит к быстрому удалению решений от сепаратрисы.

Сепаратрисное решение математического маятника имеет вид:

$$\phi(t) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp(t)).$$

Линеаризованное на сепаратрисе уравнение можно записать в виде:

$$\psi'' + \psi \cos(4\,\mathrm{arctg}(\exp(t))) = 0.$$

Это уравнение можно упростить, если воспользоваться тригонометрическими формулами для кратных углов:

$$\cos(4\alpha) = \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = \left(\frac{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha)}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)}\right)^2 - \left(\frac{2\,\mathrm{tg}(\alpha)}{1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)}\right)^2.$$

Эти формулы приводят к более простой форме линеаризованного уравнения:

$$\psi'' + \left(\mathrm{th}^2(t) - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\right)\psi = 0. \tag{36}$$

Одно из решений линеаризованного уравнения легко получить продифференцировав по времени решение нелинейного уравнения:

$$\psi_1(t) = (4\,\mathrm{arctg}(\exp(t)))' = \frac{2}{\mathrm{ch}^2(t)}. \tag{37}$$

Второе линейно независимое решение уравнения (36) можно построить, воспользовавшись условием постоянства вронскиана для линейно независимых решений уравнения (36):

$$\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2' = 1.$$

Функция $\psi_2(t)$ может быть построена методом вариации постоянных:

$$\psi_2 = A(t)\psi_1(t),$$

тогда

$$\psi_1^2(t)A' = 1, \quad \text{или} \quad A(t) = \frac{1}{4}\int \mathrm{ch}^2(t)dt.$$

После интегрирования получим:

$$\psi_2(t) = \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{8\mathrm{ch}(t)} + \frac{t}{\mathrm{ch}(t)}. \tag{38}$$

Функция $\psi_2(t)$ – одно из решений линеаризованного уравнения (36) экспоненциально растет. Это означает, что сепаратрисное решение неустойчиво по линейному приближению и, следовательно, просто неустойчиво.

Задача. Вычислить коэффициент A в формуле (35).

6.6 Литература

Теория устойчивости положений равновесия подробно излагается практически в любом курсе Дифференциальных уравнений. Здесь определения устойчивости по Ляпунову даны в соответствии с учебником

М.В. Федорюк, Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Вопросы устойчивости периодических решений и сепаратрисного решения по отношению к возмущению начальных данных, как правило, не входят в стандартный курс дифференциальных уравнений. Эти темы обсуждаются, например, в книгах

В.И. Арнольд, Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений.

Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Введение в нелинейную физику.

Н.Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики.

7 Элементы теории бифуркаций

Теория бифуркаций изучает, как меняются решения при изменении параметров уравнений. Здесь подробно рассмотрены простейшие бифуркации консервативных систем второго порядка: типа седло-центр, бифуркация удвоения. Простейшие бифуркации интересны тем, что они чаще всего возникают в приложениях теории дифференциальных уравнений. Например, бифуркация типа седло-центр приводит к потере устойчивости решения и отвечает за жесткий режим возникновения колебаний. Бифуркация удвоения играет важную роль в описании возникновения турбулентности в модели турбулентности Ландау. Более сложные бифуркации, как правило, соответствуют вырожденным случаям и, поэтому, встречаются реже. Приведен пример нелокальной бифуркации – перестройки сепаратрис.

7.1 Локальный анализ неограниченного движения

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$x'' = F(x), \tag{39}$$

где $F(x)$ – гладкая функция.

В малой окрестности точки общего положения x_0 функцию $F(x)$ можно представить в виде:

$$F(x) = F(x_0) + O(x - x_0).$$

Если пренебречь остатком, тогда вместо уравнения (39) можно исследовать уравнение

$$y'' = C_0, \tag{40}$$

где $y = x - x_0$, $C_0 = F(x_0)$.

Это уравнение легко решить, но нас будет интересовать не столько решение, сколько потенциальная функция и фазовый портрет этого уравнения. Для получения потенциальной функции надо умножить обе части уравнения на $2y'$ и проинтегрировать по t. В результате получим

$$(y')^2 - 2C_0 y = E.$$

Потенциальная функция этого уравнения

$$\Pi = -2C_0 y.$$

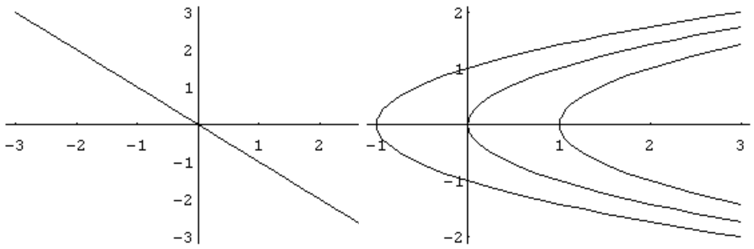

Рис. 6: Потенциальная функция и фазовый портрет без точек равновесия.

Фазовые кривые – параболы. Фазовый портрет не содержит никаких особых точек. Движение ограничено только с одной стороны и очевидно, что решение растет со временем, и наша аппроксимация уравнения (39) уравнением (40) довольно скоро становится непригодной. Однако, если интересоваться локальной картиной происходящего, не забегая далеко вперед, тогда подобное поведение системы следует признать наиболее типичным. Ведь после того, как наше приближение в окрестности точки x_0 станет непригодным, такое же приближение можно устроить вблизи любой другой неособой точки, и картина фазовых кривых окажется похожей.

7.2 Окрестность точки равновесия

Картина движения, приведенная выше, разрушается в окрестности точки $x = x_1$, где $F(x_1) = 0$. Это означает, что в окрестности точки x_1 необходима другая аппроксимация функции $F(x)$

$$F(x) = F'(x_1)(x - x_1) + O((x - x_1)^2).$$

Локально, вблизи точки x_1 уравнение (40) можно приблизить уравнением

$$y'' + \omega^2 y = 0, \tag{41}$$

где $y = (x - x_1)$, $\omega^2 = -F(x_1)$.

Это уравнение гармонического осциллятора с притягивающей ($\omega^2 > 0$) или отталкивающей ($\omega^2 < 0$) силой. Потенциальная функция для этого уравнения:

$$\Pi = \omega^2 y^2.$$

Уравнение для фазовых кривых:

$$(y')^2 + \omega^2 y^2 = E.$$

В результате на фазовой плоскости получим либо центр ($\omega^2 > 0$), либо седло ($\omega^2 < 0$). Точка x_1 – точка устойчивого или неустойчивого равновесия.

Седла и центры неустранимым образом встречаются при изучении консервативных систем.

7.3 Бифуркация седло-центр

Для исследования более сложных фазовых кривых будем рассматривать функцию F, зависящую от дополнительного вещественного параметра α.

$$F = F(x, \alpha).$$

В общем случае этот дополнительный параметр ничего не меняет в фазовом портрете. Однако, в ситуации общего положения существует точка α_1 и значение x_1, при которых обращаются в нуль и значение функции, и значение ее производной.

$$\begin{aligned} F(x_1, \alpha_1) = 0, \\ F'(x_1, \alpha_1) = 0. \end{aligned}$$

Приведенные равенства можно рассматривать как уравнения для определения значений x_1 и α_1.

В окрестности точки в пространстве параметров (x_1, α_1) функцию F можно представить в виде

$$F(x, \alpha) = F(x_1, \alpha) + \partial_\alpha F(x_1, \alpha_1)(a - \alpha_1) + F''(x_1, \alpha)(x - x_1)^2/2 + \\ O((x - x_1)^3 + (a - \alpha)^2).$$

Это приводит к уравнению

$$y'' = y^2 + g_1, \tag{42}$$

где $y = (x - x_1)C$, $g_1 = f(\alpha)$.

Решение этого уравнения – функция Вейерштрасса. Она может быть выражена через эллиптические функции Якоби.

Потенциальная функция для уравнения (42)

$$\Pi = \frac{-1}{3} y^3 - g_1 y.$$

Уравнение для фазовых кривых:

$$(y')^2 - \frac{1}{3} y^3 - g_1 y = E.$$

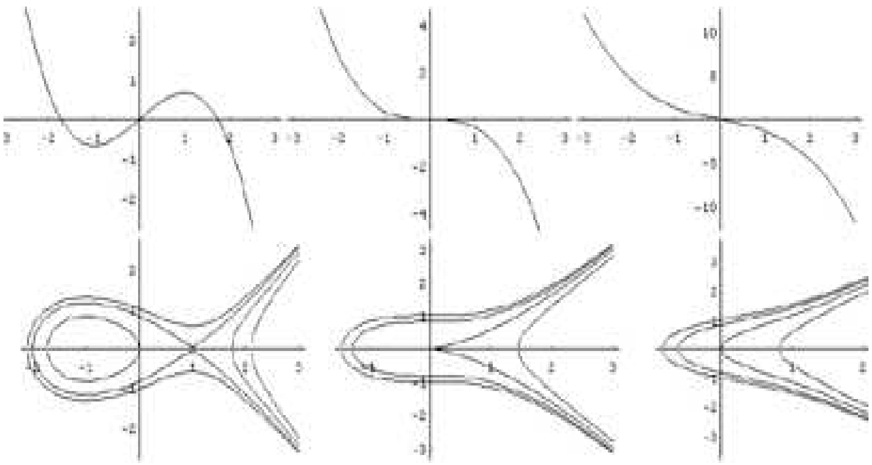

Рис. 7: Бифуркация седло-центр.

Если $g_1 < 0$, тогда на фазовом портрете есть две точки равновесия – устойчивая и неустойчивая. При $g_1 = 0$ точки равновесия слипаются, образуя сложную точку равновесия, которая называется седло-узел. При $g_1 > 0$ точек равновесия нет. Решение уравнения (42) описывает бифуркацию рождения двух точек равновесия. Такая бифуркация называется *седло-узел*.

Бифуркация седло-узел отвечает за явление *жесткой потери устойчивости*. При жесткой потере устойчивости решение системы при малом изменении параметра далеко уходит от исходного состояния равновесия. Это легко наблюдать на картинках потенциальных кривых. При изменении параметра g_1 устойчивое состояние равновесия при $g_1 = 0$ становится неустойчивым и вообще пропадает при $g_1 > 0$.

7.4 Бифуркация удвоения

Более сложная ситуация возникает, когда функция F зависит от двух дополнительных параметров. Тогда в ситуации общего положения существует решение системы уравнений

$$F(x_1, \alpha_1, \beta_1) = 0,$$
$$F'(x_1, \alpha_1, \beta_1) = 0,$$
$$F''(x_1, \alpha_1, \beta_1) = 0.$$

То есть существует точка в трехмерном пространстве параметров, при котором обращаются в нуль три первых члена в разложении Тейлора по

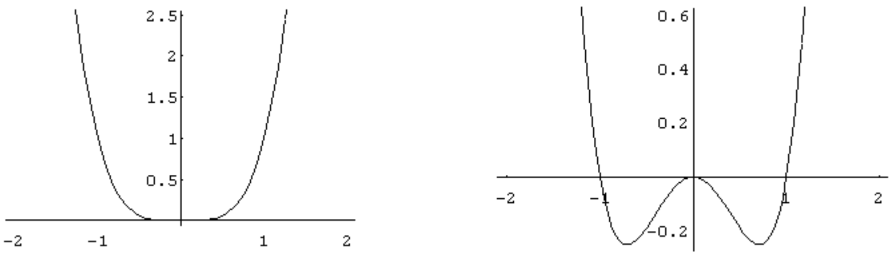

Рис. 8: Потенциальные функции при бифуркации удвоения.

x функции F. Тогда для локального исследования уравнения его можно аппроксимировать уравнением с нелинейностью третьего порядка.

$$y'' = -a_1 - a_2 y - 2y^3. \tag{43}$$

Потенциальная функция для этого уравнения:

$$\Pi = 2a_1 y + a_2 y^2 + y^4.$$

Уравнение для фазовых кривых:

$$(y')^2 + 2a_1 y + a_2 y^2 + y^4 = E.$$

Потенциальные кривые при различных соотношениях параметров a_1, a_2 будут иметь различные формы парабол четвертого порядка.

Кривые с двумя разными минимумами и кривую с перегибом и минимумом локально можно разбить на уже исследованные случаи. Нас будут интересовать картинки, на которых единственная точка равновесия становится неустойчивой и вблизи нее возникают две точки минимума. Такая бифуркация описывается уравнением:

$$y'' = -y(2y^2 - \gamma). \tag{44}$$

При $\gamma < 0$ есть только одна точка устойчивого равновесия $y = 0$. При $\gamma = 0$ – сложная точка равновесия, при $\gamma > 0$ – три точки равновесия $y = \pm\sqrt{\gamma/2}$, 0. Такая бифуркация называется *бифуркацией удвоения*. Эта бифуркация описывает *мягкий режим потери устойчивости*. Действительно, несмотря на потерю устойчивости точки равновесия, решение остается вблизи этой точки. Последовательные бифуркации удвоения рассматриваются как один из механизмов возникновения турбулентности (модель турбулентности Ландау).

Решение уравнения (44) – функция синус амплитуды при различных значениях модуля.

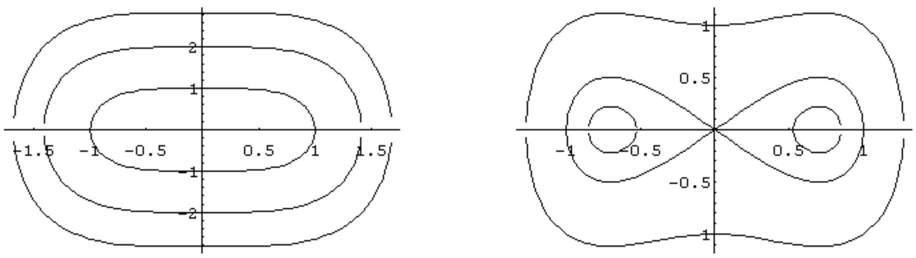

Рис. 9: Фазовые портреты при бифуркации удвоения.

7.5 Нелокальные бифуркации

Бифуркации точек равновесия можно классифицировать с помощью общих принципов теории катастроф. Однако, в динамических системах возникают бифуркации, связанные не только с точками равновесия, но и с перестройками сепаратрис. Такие перестройки в принципе носят нелокальный характер и до сих пор не поддаются классификации. В этом пункте рассмотрим пример одной из таких перестроек.

Рассмотрим обруч радиуса a, вращающийся вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью Ω. По обручу скользит материальная точка массы m. Составим уравнения движения материальной точки. Для этого сложим моменты сил относительно центра обруча. В результате получим:

$$I\theta'' = m\Omega^2 \sin(\theta) a^2 \cos(\theta) - mga\sin(\theta).$$

Здесь $I = ma^2$ – момент инерции материальной точки, $m\omega^2 \sin(\theta) a^2 \cos(\theta)$ – момент центробежной силы, $-mga\sin(\theta)$ – момент силы тяжести.

Введем параметр $\lambda = \frac{g}{\Omega^2 a}$ и новое время $t = \Omega t$. Представим уравнение в виде системы

$$\theta' = \omega, \quad \omega' = (\cos(\theta) - \lambda)\sin(\theta).$$

Рассмотрим это уравнение при разных значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$.

Уравнение фазовых кривых

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{(\cos(\theta) - \lambda)\sin(\theta)}{\omega}.$$

Интеграл энергии

$$\omega^2 - (\sin^2(\theta) + 2\lambda\cos(\theta)) = h.$$

Из этой формулы следует, что фазовые кривые симметричны относительно осей координат θ, ω.

Найдем положения равновесия при различных значениях параметра λ.

При $|\lambda| > 1$ есть три положения равновесия $\theta = 0, \pm\pi$. При $|\lambda| \leq 1$ – пять точек равновесия, кроме приведенных выше добавляются еще $\theta_0 = \pm\arccos(\lambda)$. Исследуем эти точки равновесия на устойчивость по Ляпунову. Для этого надо вычислить вторую производную потенциальной функции: там где она положительна – точка минимума, где отрицательна – максимум.

$$\Pi'' = -2\cos(2\theta) + 2\lambda\cos(\theta).$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \lambda > 1: \quad & \theta = \pm\pi \quad \text{седло;} \\ & \theta = 0 \quad \text{центр.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \lambda \leq 1: \quad & \theta = \pm\pi \quad \text{седло;} \\ & \theta = \pm\theta_0 \quad \text{центр;} \\ & \theta = 0 \quad \text{седло.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda < -1: \quad & \theta = \pm\pi \quad \text{центр;} \\ & \theta = 0 \quad \text{седло.} \end{aligned}$$

То есть, с точки зрения рождения точек равновесия, бифуркационными значениями параметра λ являются значения $\lambda = \pm 1$.

Перейдем к построению сепаратрис. При $\lambda > 1$ сепаратрисы выходят из точек $\theta = \pm\pi$. Уравнение сепаратрис имеет вид:

$$\omega^2 = \sin^2(\theta) - 2\lambda(\cos(\theta) + 1).$$

При $0 < \lambda < 1$ сепаратрисы выходят из седел. Из седла $\theta = 0$ выходят две сепаратрисы в форме петель:

$$\omega^2 = \sin^2(\theta) + 2\lambda(\cos(\theta) - 1).$$

Из седел $\theta = \pm\pi$ выходят сепаратрисы:

$$\omega^2 = \sin^2(\theta) + 2\lambda(\cos(\theta) + 1).$$

При $\lambda = 0$ пары сепаратрис выходящих из разных седел слипаются:

$$\omega^2 = \sin^2(\theta).$$

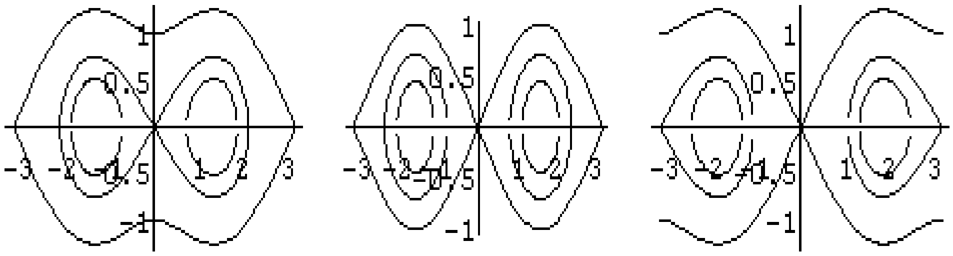

Рис. 10: Перестройки сепаратрис $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = 0$, $\lambda = -\frac{1}{4}$.

При $-1 \leq \lambda < 0$ петлеобразные сепаратрисы выходят из седел $\theta = \pm\pi$:

$$\omega^2 = \sin^2(\theta) + 2\lambda(\cos(\theta) + 1).$$

Кроме них есть еще две сепаратрисы:

$$\omega^2 = \sin^2(\theta) + 2\lambda(\cos(\theta) - 1).$$

При $\lambda < -1$ картина существенно упрощается. Есть только две сепаратрисы, выходящие из точки $\theta = 0$ и охватывающие центры $\theta = \pm\pi$.

Описанная картина показывает, что значение $\lambda = 0$ – бифуркационное. При этом происходит перестройка сепаратрис, а число и характер точек равновесия не изменяется. В результате этой перестройки существенно меняется характер колебательных движений, охватывающих оба центра $\theta = \pm\theta_0$ и седло $\theta = 0$. После этой перестройки большие колебания по-прежнему охватывают оба центра, но уже охватывают не седло в $\theta = 0$, а охватывают седло в $\theta = \pm\pi$.

Литература Основы теории бифуркаций изложены, например, в книге

Андронов А.А., Витт А.А.,Хайкин С.Э.. Теория колебаний.

В частности, оттуда взят пример перестройки сепаратрис, рассмотренный в последнем пункте этой лекции.

8 Принцип наименьшего действия

В этой лекции уравения механики выводятся из принципа наименьшего действия для функции Лагранжа. Введена функиця Гамильтона. Приведен общий вид уравнений для консервативной системы. Сформулирована теорема Лиувилля о фазовом потоке и теорема Пуанкаре о возвращении.

8.1 Генезис уравнений механики

Один из возможных способов вывода уравнений механики состоит в использовании вариационного принципа. Этот подход альтернативен способу вывода уравнений непосредственно из законов Ньютона. Рассмотрим механическую систему, которая в моменты времени t_1 и t_2 занимает определенные положения. Тогда между этими положениями система ведет себя так, что функционал действия принимает минимальное значение. Формально вывод уравнений механики рассматривается как задача вариационного исчисления

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, q', t)dt \to \min.$$

Здесь функция $L(q, q', t)$ называется функцией Лагранжа. Переменные $q = q_1, q_2, \ldots, q_n$ и их производные по времени называются обощенными координатами и обобщенными скоростями. Зависимость функции Лагранжа только от времени, самих обобщенных координат и обобщенных скоростей считается экспериментальным фактом и используется в качестве одного из постулатов.

Вывод уравнений движения из вариационного принципа стандартен. Искомая зависимость координат от времени – $q(t)$. Минимум функционала действия означает, что любая замена $q(t)$ на $q(t) + \delta q(t)$ приведет к возрастанию значения функционала. Вариации $\delta q(t)$ в конечных точках временного интервала равны нулю $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Изменение функционала действия:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, q' + \delta q', t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, q', t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (\partial_q L \delta q + \partial_{q'} L \delta q')dt + \ldots,$$

где многоточие заменяет члены более высокого порядка по δq и $\delta q'$.

Линейная часть этой формулы называется вариацией функционала. В окрестности минимума она равна нулю.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\partial_q L \delta q + \partial_{q'} L \delta q')dt = 0.$$

Эту формулу неудобно использовать, потому что здесь присутствуют как вариация неизвестной функции, так и вариация ее производной. От производной легко избавиться, проинтегрировав второе слагаемое по частям.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q'}\delta q|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'})\delta q dt = 0.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю, так как вариация δq равна нулю в граничных точках интервала. Вариация δq может любой, поэтому для равенства нулю вариации δS должен равняться нулю множитель в скобках. Это приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'} = 0.$$

Эти уравнений в математике обычно называются уравнениями Эйлера, а в механике – уравнениями Лагранжа. Преймущество такого подхода при исследовании механической системы состоит, например, в том, что уравнения движения не зависят от выбранной системы координат.

8.2 Функция Лагранжа

Для дальнейшего исследования материальной системы необходимо определить вид функции Лагранжа. Общетеоретические соображения здесь уже не очень-то пригодны. Понятно, что результаты надо сравнивать с уравнениями движения, получающимися из законов Ньютона. Это приводит к заключению, что уравнения Лагранжа для механической системы должны иметь вид:

$$\frac{d}{dt}(m_i q_i') + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

где U–потенциальная энергия системы. Эта формула выражает третий закон Ньютона: сумма изменения обобщенного импульса системы и действующих на систему обощенных сил равна нулю.

С помощью прямой подстановки легко убедиться, что уравнения Лагранжа будут совпадать с уравнениями Ньютона, если в качестве функции Лагранжа взять разность кинетической и потенциальной энергии системы

$$L = T - U, \quad T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (q_i')^2}{2}, \quad U = U(q).$$

Рассмотрим примеры функций Лагранжа и уравнений Лагранжа для различных механических систем.

Пример 1. Математический маятник. В качестве обобщенной координаты выберем угол отклонения маятника от положения равновесия ϕ. Массу маятника обозначим через m, длину маятника – l. Тогда выражение для кинетической энергии:

$$T = m(l\phi')2/2,$$

Потенциальная энергия:

$$U(\phi) = -mlg\cos(\phi).$$

Функция Лагранжа:

$$L = m(l\phi')^2/2 + mlg\cos(\phi).$$

Уравнение Лагранжа:

$$ml^2\phi'\phi'' + ml\phi'\sin(\phi) = 0.$$

Пример 2. Две взаимодействующие материальные точки. Обобщенные координаты точек – их радиус-векторы. Взаимодействие зависит от расстояния, то есть от разности радиус-векторов.

$$L = \frac{m_1(r_1')^2}{2} + \frac{m_2(r_2')^2}{2} - U(|r_1 - r_2|).$$

8.3 Функция Гамильтона

Может быть, более естественно рассматривать в качестве неизвестных функций не только обобщенные координаты, но и обобщенные импульсы. Обозначим вектор обобщенных импульсов системы через p. По определению обобщенный импульс системы – это $p = \partial_{q'}L$. Тогда приращение функции Лагранжа можно записать в виде:

$$dL = \partial_q L dq + \partial_{q'} L dq' = \partial_q L dq + p dq'.$$

С другой стороны, из уравнений Лагранжа следует:

$$p' = \partial_q L.$$

Поэтому

$$dL = p'dq + pdq'.$$

Теперь можно выразить приращение функции Лагранжа только через обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Для этого представим:

$$pdq' = d(pq') - p'dq,$$

тогда
$$d(pq' - L) = -p'dq + q'dp.$$

Под знаком дифференциала слева стоит выражение полной энергии системы через обобщенные координаты и обобщенные импульсы:

$$H(p, q, t) = pq' - L.$$

Выражение полной энергии системы, как функции обобщенных координат и обобщенных импульсов, называется функцией Гамильтона.

Обобщенные координаты и обобщенные импульсы здесь являются независимыми переменными. Поэтому из выражения для дифференциала функции Гамильтона легко получить уравнения движения:

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона. Из-за простоты записи их иногда называют каноническими.

Примеры. Функция Гамильтона для уравнения математического маятника:
$$H = \frac{p^2}{2m} + mlg\cos(q).$$

Функция Гамильтона для двух маятников одинаковой длины, подвешенных на расстоянии a на одинаковой высоте, связанных пружиной длиной a жесткости k. Обозначим через q_i углы отклонения маятников от положений равновесия, тогда функция Гамильтона будет иметь вид:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + m_1lg\cos(q_1) + m_2lg\cos(q_2) + \frac{k}{2}(-l\sin(q_1) + l\sin(q_2))^2.$$

8.4 Общий вид уравнений для консервативной системы

Будем говорить, что система уравнений с одной степенью свободы является консервативной, если траектории этой системы на фазовой плоскости имеют вид:
$$F(p, q) = C.$$

Уравнения движения можно получить исходя из этой формулы. Для этого вычислим дифференциал:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial p}dp = 0.$$

Тогда дифференциальное уравнение кривой на фазовой плоскости имеет вид:
$$\frac{dp}{dq} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial p}}.$$
Отсюда следует, что общее уравнение движения консервативной системы может быть записано в виде:
$$q' = \frac{1}{Q(q,p)}\frac{\partial F}{\partial p},$$
$$p' = \frac{-1}{Q(q,p)}\frac{\partial F}{\partial q}.$$
Эти уравнения называются *уравнениями Пфаффа.* При выводе этих уравнений предполагалось, как обычно, что F и Q – однозначные аналитические функции p и q.

Пример. Система Вольтерра. Система Вольтерра – один из примеров негамильтоновой консервативной системы, которая приводится к уравнениям Пфаффа.

Рассмотрим систему типа караси-щуки. Число карасей в пруду – N_1. Караси размножаются пропорционально их численности с коэффициентом ε_1. С другой стороны, их едят щуки. Это приводит к уменьшению числа карасей пропорционально числу щук с коэффициентом γ_1. Сами щуки, оказавшись без карасей, мрут с голоду с коэффициентом пропорциональности ε_2, и размножаются пропорционально количеству карасей с коэффициентом пропорциональности γ_2. Такая картина наглядно описывается системой дифференциальных уравнений.
$$N_1' = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2),$$
$$N_2' = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_2).$$
Оказывается, что эта система консервативна. Получим уравнение фазовых кривых. Для этого умножим первое уравнение на γ_2, второе на γ_1 и сложим эти уравнения.
$$\gamma_2 N_1' + \gamma_1 N_2' = \varepsilon_1\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2\gamma_1 N_2.$$
Умножим первое уравнение на $\frac{\varepsilon_2}{N_1}$, второе – на $\frac{\varepsilon_2}{N_1}$ и сложим полученные выражения.
$$\varepsilon_2\frac{N_1'}{N_1} + \varepsilon_1\frac{N_2'}{N_2} = -\varepsilon_2\gamma_2 N_2 + \varepsilon_1\gamma_2 N_1.$$
В результате, сложив два полученных равенства:
$$\gamma_2 N_1' + \gamma_1 N_2' - \varepsilon(\ln(N_1))' - \varepsilon_2(\ln(N_2))' = 0.$$

После интегрирования получим:

$$\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \varepsilon_2 \ln(N_1) - \varepsilon_1 \ln(N_2) = C.$$

Таким образом, система уравнений Вольтерра может рассматриваться, как система уравнений Пфаффа, где

$$F(N_1, N_2) = \gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \varepsilon_2 \ln(N_1) - \varepsilon_1 \ln(N_2), \quad Q(N_1, N_2) = \frac{1}{N_1 N_2}.$$

8.5 Фазовый поток и теорема Лиувилля

В фазовом пространстве динамической системы

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

рассмотрим элемент объема

$$d\Gamma = dpdq.$$

Выясним, как изменяется объем этого элемента фазового пространства со временем. В момент t координаты точки (p^0, q^0) в фазовом пространстве станут равными (p^t, q^t). Тогда объем элемента фазового пространства в этих новых координатах станет равным

$$d\Gamma = \frac{\partial(p^t, q^t)}{\partial(p^0, q^0)} dpdq.$$

То есть, надо вычислить якобиан преобразования $g^t(p^0, q^0) = (p^t, q^t)$. В окрестности точки $t = 0$ преобразование имеет вид:

$$p^t = p^0 - t\frac{\partial H}{\partial q}(q^0, p^0, t) + O(t^2),$$
$$q^t = q^0 + t\frac{\partial H}{\partial p}(q^0, p^0, t) + O(t^2).$$

Поэтому при малом изменении t якобиан можно представить в виде:

$$\frac{\partial(p^t, q^t)}{\partial(p^0, q^0)} = \det \left\| \begin{array}{cc} 1 - t\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(q^0, p^0, t) + O(t^2) & t\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(q^0, p^0, t) + O(t^2) \\ t\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(q^0, p^0, t) + O(t^2) & 1 + t\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(q^0, p^0, t) + O(t^2) \end{array} \right\|.$$

Для простоты рассмотрим систему с одной степенью свободы. Тогда изменение элемента фазового объема при $t = 0$:

$$\frac{d\Gamma}{dt}\Big|_{t=0} = \Big[-\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(q^0, p^0, t) + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(q^0, p^0, t) \Big] dpdq = 0.$$

То есть, фазовый объем не меняется со временем. Это утверждение называется *теоремой Лиувилля.*

Хотя объем капли фазовой жидкости в гамильтоновых системах не изменяется, со временем вид капли претерпевает значительные деформации. Чтобы понять это, рассмотрим несколько тривиальных примеров.

Фазовый поток гармонического осциллятора. Уравнения Гамильтона для гармонического осциллятора:

$$q' = p \quad p' = -q.$$

Тогда $q(t) = A\cos(t + \phi_0)$, $p(t) = -A\sin(t + \phi_0)$. То есть преобразование фазового потока сводится к повороту относительно начала координат.

Фазовый поток материальной точки в поле тяжести. Уравнения Гамильтона

$$q' = p, \quad p' = -g.$$

Тогда

$$q(t) = q_0 + p_0 t - gt^2/2, \quad p(t) = p_0 - gt.$$

Фазовый поток двигается с постоянной отрицательной скоростью вдоль оси p и ускоряется вдоль оси y с постоянным отрицательным ускорением. Кроме того, скорость вдоль оси q пропорциональна значению p. Это приводит к неравномерному смещению слоев с разными значениями p вдоль оси q.

8.6 Терема Пуанкаре о возвращении

Интересное следствие постоянства фазового объема для гамильтоновых систем называется теоремой Пуанкаре о возвращении.

Пусть g^t – сохраняющее фазовый объем непрерывное взаимно однозначное отображение ограниченного многообразия D в себя. Тогда в любой окрестности U любой точки из D найдется $x \in D$ такая, что существует $T > 0$, такое, что $g^T(x) \in U$.

Доказательство. Рассмотрим последовательные отображения области U. При отображениях объем не изменяется, стало быть, отображения будут пересекаться $g^l(U) \cap g^n(U) \neq \emptyset$. Следовательно, $g^{l-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. Возьмем в качестве искомой точки x – точку из области пересечения этих областей, а $T = l - n$.

Литература.

Функция Лагранжа и функция Гамильтона введены, следуя книге Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Механика.

Пункт об общей форме уравнений консервативной системы, примеры фазовых потоков гармонического осциллятора и материальной точки в поле тяжести взяты из

Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.. Теория колебаний.

Формулировки и доказательства теорем Лиувилля о фазовом потоке и Пуанкаре о возвращении извлечены из книги

Арнольд В.И.. Математические методы классической механики.

9 Примеры вполне интегрируемых систем

Здесь с различной степенью подробности разобраны примеры нелинейных вполне интегрируемых механических систем. Задача Кеплера, волчок Эйлера и волчок Ковалевской.

9.1 Задача Кеплера

Рассмотрим задачу о движении материальной точки в поле тяжести. Будем считать, что поле тяжести создается неподвижным телом. Запишем функцию Гамильтона для материальной точки. В качестве обобщенных координат будем рассматривать полярные координаты точки $r = q_1$ и $\phi = q_2$. Обобщенные импульсы – импульс в радиальном направлении p_1 и момент импульса p_2. В результате функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mq_1^2} + U(q_1).$$

Здесь первое слагаемое – кинетическая энергия радиального движения. Второе слагаемое - кинетическая энергия углового движения. $U(q)$ – потенциальная энергия материальной точки в поле тяжести. Уравнения Гамильтона для материальной точки:

$$\begin{aligned} q_1' &= \tfrac{\partial H}{\partial p_1} \equiv \tfrac{p_1}{m}, \\ q_2' &= \tfrac{\partial H}{\partial p_2} \equiv \tfrac{p_2}{mq_1^2} \\ p_1' &= -\tfrac{\partial H}{\partial q_1} \equiv \tfrac{p_2^2}{mq_1^3} - \partial_{q_1} U(q_1), \\ p_2' &= -\tfrac{\partial H}{\partial q_2} \equiv 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Фазовое пространство этой задачи четырехмерно. Однако, последнее равенство означает, что угловой момент не зависит от времени и является одним из двух интегралов системы. Второй интеграл – сама функция Гамильтона. Поэтому в четырехмерном фазовом пространстве многообразие решений системы уравнений двумерно. Это многообразие определяется уравнениями:

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^1}{2q_1^2 m} + U(q_1) = E, \quad p_2 = M,$$

где $E, M = \text{const}$.

Система уравнений движения легко разделяется на угловое и радиальное. Уравнение для угловой координаты:

$$q_2' = \frac{M}{mq_1^2}.$$

Координата q_2 соответствует полярному углу, поэтому область ее изменения – от 0 до 2π. Уравнение для q_2 интегрируется после того, как определена зависимость от времени координаты $q_1(t)$. Период функции $q_2(t)$ вычисляется по формуле:

$$2\pi = \int_0^{T_2} \frac{M dt}{m q_1^2(t)}.$$

Продифференцируем уравнение для радиальной координаты и подставим выражение производной p_1' из третьего уравнения системы уравнений движения (45). В результате получается уравнение второго порядка

$$m q_1'' = -\frac{M^2}{m q_1^3} - \partial_{q_1} U(q_1). \tag{46}$$

Это ни что иное, как уравнение радиального движения, которое можно было получить, рассматривая систему, исходя из законов Ньютона.

Уравнение (46) легко приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными[2]:

$$(q_1')^2 = (E - U(q_1))\frac{2}{m} - \frac{M^2}{m^2 q_1^2}.$$

Нас интересуют периодические движения материальной точки. Поэтому будем считать, координата q_1 принимает значения между q_{min} и q_{max}. Максимальное и минимальное значения – это решения уравнения:

$$\frac{2}{m}(E - U(q_1) - \frac{M^2}{m^2 q_1^2} = 0.$$

Уравнение для q_1 легко интегрируется:

$$t = \int_{q_{min}}^{q} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)) - \frac{M^2}{m^2 q_1^2}}} + t_0.$$

Знак плюс выбирается, когда точка движется от положения с минимальным значением q_1 в сторону максимального значения и наоборот.

Период радиального движения:

$$T_1 = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)) - \frac{M^2}{m q_1^2}}}.$$

---

[2] О переходе от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка см. лекцию 1.

Выясним, как изменяется угловая координата за половину периода изменения первой координаты. Для этого производную по времени выразим через производную по радиальной координате:

$$q_2' = \frac{dq_2}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} = \frac{M}{mq_1^2},$$

или

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{M}{mq_1^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(q_1)) - \frac{M^2}{mq_1^2}}}.$$

Тогда

$$\Delta q_2 = \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{\frac{M}{m^2x^2}dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x)) - \frac{M^2}{m^2x^2}}}.$$

Если считать, что потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию

$$U(r) = -\frac{\gamma m}{r},$$

тогда интеграл в формуле для Δq_2 интегрируется в квадратурах.

$$\Delta q_2 = -\int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{\frac{M}{m^2}d(\frac{1}{x})}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\gamma m(\frac{1}{x})) - \frac{M^2}{m^2}(\frac{1}{x})^2}} = \pi.$$

Следовательно, в этом случае период движения по радиусу равен периоду движения по угловой координате.

Если закон об обратной пропорциональности не выполняется, тогда, вообще говоря, $\Delta q_2 \neq \frac{2\pi m}{n}$ и, следовательно, траектория движения не замкнута и плотно заполняет кольцо $q_{min} \leq r \leq q_{max}$.

Замечание. При движении спутника вокруг Земли потенциальная энергия

$$U \sim -\frac{\gamma}{r}[1 - (\frac{a}{r})^2 AP(\cos(\phi))],$$

где $A = 0.00108265$, $P(\cos(\phi)) = \frac{1}{2}(3\cos(\phi) - 1)$. То есть, орбиты спутников не замкнуты.

9.1.1 Инвариантное многообразие в задаче Кеплера

Рассмотрим подробнее траекторию системы в четырехмерном пространстве обобщенных параметров. Как уже отмечалось, траектории лежат на двумерной поверхности

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^1}{2q_1^2 m} + U(q_1) = E, \quad p_2 = M.$$

Координаты на этой поверхности изменяются циклически

$$
\begin{aligned}
q_1 \in [q_{min}, q_{max}], &\quad q_1(t+T_1) = q_1(t),\\
q_2 \in [0, 2\pi), &\quad q_2(t+T_2) = q_2(t).
\end{aligned}
$$

Таким образом, инвариантная поверхность диффеоморфна двумерному тору.

На этой поверхности есть два линейно независимых фазовых потока. Один из них – фазовый поток, определяемый гамильтонианом (законом сохранения энергии) $H(p,q)$, второй – законом сохранения момента импульса $M(p,q)$. Уравнения движения, определяемые функцией M:

$$p_1' = 0, \quad p_2' = 0, \quad q_1' = 0, \quad q_2' = 1.$$

Фазовый поток, определяемый гамильтонианом H, будем обозначать g_1^t, фазовый поток, определяемый функцией M – g_2^t. Локально, около точки (p_0, q_0), эти фазовые потоки в главном порядке по времени t определяются двумя касательными векторами к инвариантному многообразию. Касательные векторы легко получить из условия равенства нулю дифференциалов законов сохранения

$$dH = 0, \quad dM = 0.$$

Локально эти фазовые потоки можно записать в виде:

$$
g_1^t(p,q) = \begin{cases}
p_1^t = p_1^0 + (\frac{(p_2^0)^2}{m(q_1^0)^3} - \partial_{q_1^0} U(q_1^0))t + O(t^2),\\
p_2^t = p_2^0\\
q_1^t = q_1^0 + \frac{p_1^0}{m} t + O(t^2),\\
q_2^t = q_2^0 + \frac{p_2^0}{m(q_1^0)^2} t + O(t^2).
\end{cases}
$$

$$
g_2^t(p,q) = \begin{cases}
p_1^t = p_1^0,\\
p_2^t = p_2^0,\\
q_1^t = q_1^0,\\
q_2^t = q_2^0 + t.
\end{cases}
$$

Легко видеть, что это разные фазовые потоки. Кроме того, оказывается, что они коммутируют, то есть

$$g_1^t g_2^t(p,q) = g_2^t g_1^t(p,q).$$

Это легко понять, если заметить, что матрица первого преобразования координат не зависит от q_2, а матрица преобразования, соответствующая второму фазовому потоку, вообще не зависит от координат.

Таким образом, инвариантное многообразие задачи Кеплера – диффеоморфно тору, и на этом многообразии существуют два коммутирующих фазовых потока. Траектории движения на инвариантном многообразии можно рассматривать как обмотку двумерного тора. Если траектории замкнуты, тогда говорят, что обмотка тора периодическая, если не замкнуты, то траектории всюду плотно заполняют инвариантное многообразие.

9.2 Волчок Эйлера

Еще один пример, в котором удается явно исследовать инвариантное многообразие это волчок Эйлера. Здесь не приводится вывод дифференциальных уравнений. Поясним, лишь, что волчок Эйлера – это твердое тело, закрепленное в центре тяжести. Вообще говоря, фазовое пространство движения твердого тела в трехмерном пространстве шестимерно. Однако, в случае волчка Эйлера импульс движения центра тяжести равен нулю. Поэтому остаются лишь вращательные составляющие движения, их три – это моменты импульса относительно трех координат. В результате уравнения движения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} M_1' &= M_2M_3(a_2-a_3), \\ M_2' &= M_3M_1(-a_1+a_3), \\ M_3' &= M_1M_2(a_1-a_2), \end{aligned}$$

где a_i – статические моменты инерции тела $a_1 > a_2 > a_3$.

Есть два интеграла движения. Это полная энергия

$$H(M) = \frac{1}{2}(a_1M^2 + a_2M_2^2 + a_3M_3^2)$$

и полный момент импульса

$$F(M) = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2.$$

Из вида этих интегралов следует, что инвариантное многообразие в трехмерном пространстве – это пересечение эллипсоида $H = \mathrm{const}$ и сферы $F = \mathrm{const}$. Вращение вокруг малой и большой осей устойчиво, а вокруг средней – неустойчиво. Это можно заметить из прямого рассмотрения системы уравнений. Если нарисовать траектории движения, тогда можно заметить, что окрестности вершин средней оси – седла.

Проинтегрируем уравнения движения волчка Эйлера.

$$M_1' = M_2M_3(a_2-a_3),$$

$$\frac{1}{2}(a_1M^2 + a_2M_2^2 + a_3M_3^2) = h,$$
$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = f.$$

Тогда

$$M_3^2 = f - M_1^2 - M_2^2,$$
$$\frac{1}{2}(a_1M_1^2 + a_2M_2^2 + a_3f - a_3M_1^2 - a_2M_2^2) = h,$$
$$(a_1 - a_3)M_1^2 + (a_2 - a_3)M_2^2 = 2h - a_3f,$$
$$M_2 = \frac{1}{a_2 - a_3}(2h - a_3f - (a_1 - a_3)M_1^2),$$
$$M_3^2 = f - M_1^2 - \frac{1}{a_2 - a_3}(2h - a_3f - (a_1 - a_3)M_1^2),$$
$$M_2^2 = c_1 - c_2M_1^2,$$
$$M_3^2 = c_3 - c_4M_1^2.$$

Окончательно получим

$$(M_1')^2 = (c_1 - c_2M_1^2)(c_3 - C_4M_1^2)(a_2 - a_3)^2.$$

Задача. Выразить M_i через эллиптические функции Якоби.

9.3 Волчок Ковалевской

Кроме уже разобранного случая волчка Эйлера, уравнения движения закрепленного твердого тела имеют еще два случая, когда они полностью проинтегрированы. Это так называемые волчки Лагранжа и Ковалевской. Волчок Лагранжа – это осесимметричное твердое тело, закрепленное в произвольной точке. Здесь рассмотрим волчок Ковалевской. В этом случае кроме законов сохранения энергии, момента импульса и условия связи для углов Эйлера есть еще один закон сохранения, не имеющий простого механического толкования. Интегрирование волчка Ковалевской связано с красивыми математическими преобразованиями – так называемым преобразованием Абеля и задачей обращения Якоби. Поэтому, несмотря на громозкость формул, кажется полезным хотя бы познакомиться с идеями, лежащими в основе интегрирования волчка Ковалевской.

Уравнения волчка Ковалевской имеют вид:

$$2p' = qr,$$
$$2q' = -pr - \mu\gamma_3,$$

$$\begin{aligned} r' &= \mu\gamma_2, \\ \gamma_1' &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ \gamma_2' &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \gamma_3' &= q\gamma_3 - p\gamma_2. \end{aligned}$$

Здесь $\mu = \mathrm{const}$.

Есть четыре интеграла движения:
полная энергия

$$H = 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\mu\gamma_1,$$

момент импульса

$$L = 2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3,$$

условие связи

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

и интеграл Ковалевской

$$K = (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2.$$

Рассмотрим поверхность уровня этих интегралов

$$H = 6h, \quad L = 2l, \quad K = k^2.$$

Введем на этой поверхности координаты S_1 и S_2

$$S_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \pm \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2},$$

где

$$x_{1,2} = p \pm iq, \quad R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu lz + \mu^2 - k^2,$$
$$R(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2^2 + 6hx_1x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2.$$

В переменных $S_{1,2}$ уравнения движения записываются в виде:

$$S_1' = \frac{i\sqrt{P_5(S_1)}}{2(S_1 - S_2)}, \quad S_2' = \frac{i\sqrt{P_5(S_2)}}{2(S_2 - S1)}, \tag{47}$$

где

$$P_5(z) = [z[(z - 3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2]((z - 3h)^2 - k^2).$$

Уравнения для $S_{1,2}$ интегрируются преобразованием Абеля $\Gamma \to J(\Gamma)$, где Γ – риманова поверхность рода 2: $w^2 = P_5(z)$. Это преобразование имеет вид:

$$\zeta_1 = \int_{P_0}^{S_1} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{S_2} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}},$$
$$\zeta_2 = \int_{P_0}^{S_1} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{S_2} \frac{zdz}{\sqrt{P_5(z)}},$$

где P_0– фиксированная точка на римановой поверхности. Система уравнений движения (47) принимает вид:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = i.$$

Эти уравнения легко интегрируются, однако для выяснения поведения решения в исходных переменных необходимо обратить преобразование Абеля. Задачу об обращении гиперэллиптических интегралов называют задачей обращения Якоби. Она решается с использованием так называемых тэта-функций. Покажем, что в ситуации общего положения преобразование Абеля локально обратимо. Для этого вычислим Якобиан преобразования и покажем, что он не равен нулю.

$$\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}{\partial(S_1,S_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{P_5(S_1)}} & \frac{S_1}{\sqrt{P_5(S_1)}} \\ \frac{1}{\sqrt{P_5(S_@)}} & \frac{S_2}{\sqrt{P_5(S_2)}} \end{vmatrix} = \frac{S_2 - S_1}{\sqrt{P_5(S_1)P_5(S_2)}}.$$

Если $P_5(S_{1,2}) \neq 0$, тогда существует обратное преобразование.

9.4 Литература

При подготовке этой лекции использовались книги

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Механика.

Арнольд В.И.. Математические методы классической механики.

Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.. Введение в нелинейную физику.

Раздел об интегрирование волчка Ковалевской написан по обзору

Дубровин Б.А.. Нелинейные уравнения и тэта-функции. Успехи математических наук, т., n, с.

10 Теорема Лиувилля об интегрируемых системах

В этой лекции вводится понятие о скобках Пуассона, коммутирующих фазовых потоках. Построены переменные действие-угол и сформулирована теорема Лиувилля о вполне интегрируемых системах.

Примеры динамических систем, рассмотренные в предыдущей лекции, показывают, что в некоторых случаях решение уравнений движения сводится к исследованию инвариантных многообразий. Иногда эти инвариантные многообразия можно рассматривать как n-мерные торы, а траектории системы – как обмотки этих торов. Естественно поставить вопрос о том, при каких общих условиях задача об интегрировании $2n$-мерных гамильтоновых систем сводится к задаче о динамике на n-мерном торе. Ответ на этот вопрос дает теорема Лиувилля о вполне интегрируемых системах.

Рассмотрим гамильтонову динамическую систему в $2n$-мерном фазовом пространстве. Для того, чтобы размерность пространства системы понизить до размерности n, необходимо, чтобы эта система обладала n независимыми первыми интегралами. В этом случае траектория решения системы будет лежать на n-мерном многообразии. Далее, для выделения n-мерного тора и независимых движений на нем необходимо, чтобы это n-мерное многообразие было компактным и чтобы на нем существовало n-независимых коммутирующих фазовых потоков. Именно эти независимые фазовые потоки позволяют разделить переменные на многообразии решений и впоследствии проинтегрировать уравнения движения в квадратурах.

Прежде чем формулировать теорему Лиувилля, выясним, каким условиям должны удовлетворять первые интегралы системы, чтобы фазовые потоки на инвариантном многообразии коммутировали.

10.1 Скобки Пуассона

Полная производная функции $F(t,p,q)$ по времени в силу системы уравнений Гамильтона имеет вид:

$$\frac{dF}{dt} = \partial_t F + \partial_p F p' + \partial_q F q' = \partial_t F - \partial_p F \partial_q H + \partial_q F \partial_p H.$$

В этом выражении первое слагаемое никак не зависит от системы Гамильтона. Второе и третье слагаемые определяются гамильтонианом. Для краткости эти два слагаемых обозначают в виде:

$$\{FH\} = \partial_q F \partial_p H - \partial_p F \partial_q H.$$

Это выражение называется *скобками Пуассона.*

Легко понять, что если функция F не зависит от времени и является интегралом системы, тогда скобка Пуассона равна нулю. Если скобка Пуассона двух функций равна нулю, то говорят, что эти функции *находятся в инволюции.*

Замечательное свойство скобки Пуассона двух функций состоит в том, что если эти две функции f и g находятся в инволюции третьей функции h, тогда скобка Пуассона $\{fg\}$ также находится в инволюции функции h. Это утверждение называется *теоремой Пуассона.* С помощью теоремы Пуассона в некоторых случаях можно по двум известным интегралам движения построить еще один и далее еще один и еще один, до тех пор пока не будут построены все интегралы движения системы или инволюция двух последующих интегралов не будет равняться нулю. Такое построение новых интегралов движения с помощью скобок Пуассона удается редко. Прежде чем доказывать инволютивность скобки Пуассона докажем формулу, называющуюся *тождеством Якоби*:

$$\{f\{gh\}\} + \{h\{fg\}\} + \{g\{hf\}\} = 0.$$

Тождество Якоби можно доказать с помощью прямых вычислений. После вычисления всех скобок Пуассона и приведения подобных слагаемых оказывается, что сумма равна нулю.

Теорема Пуассона является прямым следствием тождества Якоби. Если $\{gh\} = 0$ и $\{fh\} = 0$, тогда $\{fg\}$ некуда деваться, как только или равняться нулю или быть в инволюции к h и, следовательно быть еще одним первым интегралом системы Гамильтона с гамильтонианом h.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть P – импульс системы, $M = [r, P]$ – момент импульса. Тогда

$$\{M_xP_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(yP_z - zP_y) = -P_z, \quad \{M_xP_z\} = P_y, \quad \{M_xP_x\} = 0.$$

$$\{M_xM_y\} = -M_z, \quad \{M_yM_z\} = -M_x, \quad \{M_zM_x\} = -M_y.$$

Если забыть о физическом смысле обобщенных координат и обобщенных импульсов и переписать системы уравнений Гамильтона как систему уравнений $2n$ независимых координат $y_i = q_i$ и $y_{n+i} = p_i$, тогда скобки Пуассона можно записать в виде:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{2n} h_{i,j} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial y_j},$$

где $h_{i,i+n} = 1, i = 1, \ldots, n$, $h_{i,i-n} = -1, i = n+1, \ldots, 2n$. Матрица h называется *симплектической матрицей.* Эти обозначения позволяют записать уравнения Гамильтона в еще более простой форме

$$\frac{dy_i}{dt} = \{y_i, H\}, \quad H = H(y_1, \ldots, y_{2n}).$$

10.2 Коммутирующие фазовые потоки

Если функции $F(p,q)$ и $H(p,q)$ находятся в инволюции, тогда не только $F(p,q)$ – первый интеграл для системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H(p,q)$, но и функция $H(p,q)$ является первым интегралом для другой системы уравнений уравнений Гамильтона с гамильтонианом $F(p,q)$. В результате, на инвариантном многообразии решений $H(p,q) = h, \quad F(p,q) = f$ есть два разных фазовых потока g_1^t и g_2^t. Касательные векторы этих фазовых потоков коммутируют. Покажем это.

Для краткости перейдем к координатам y_i, введенным в конце предыдущего раздела. Касательный вектор фазового потока в точке y^0 это производная фазового потока по времени в точке $t = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} g_1^t g_2^s y^0 - g_2^s g_1^t y^0 = g_1^t(y^0 + \{y^0 F\}s + O(s^2)) - g_2^s(y^0 + \{y^0 H\}s + O(s^2)) = \\ = y^0 + \{y^0 F\}s + \{y^0 H\}t + \{\{y^0 F\}H\}st - \\ y^0 - \{y^0 H\}s - \{y^0 F\}s - \{\{y^0 H\}F\}ts + O(t^2 + s^2). \end{aligned}$$

В результате получим:

$$g_1^t g_2^s y^0 - g_2^s g_1^t y^0 = (\{\{y^0 F\}H\} - \{\{y^0 H\}F\})st + O(t^2) + O(s^2)$$

В силу тождества Якоби

$$\{\{y^0 F\}H\} - \{\{y^0 H\}F\} = \{y^0\{FH\}\} = 0.$$

То есть, линейная часть приращений по t и s коммутатора фазовых потоков равна нулю. Следовательно, касательные векторы фазовых потоков коммутируют.

Если система Гамильтона имеет n функционально независимых первых интегралов в инволюции, тогда на n-мерном инвариантном многообразии этой системы существует n коммутирующих фазовых потоков.

10.3 Переменные действие-угол

Следующий естественный шаг – ввести на n-мерном инвариантном многообразии в фазовом пространстве n независимых координат. Эти координаты меняются со временем. В качестве еще n независимых координат в $2n$-мерном фазовом пространстве системы можно взять те самые значения n первых интегралов – законов сохранения – или набор переменных, функционально зависящих только от значений первых интегралов. Эти переменные не изменяются со временем и полностью определяют многообразие на котором лежат траектории системы.

Обозначим переменные, определяющиеся как функции от значений первых интегралов, через $I_i = I(h, f_1, \ldots, f_{n-1})$, $i = 1, \ldots, n$.

$$\frac{dI_i}{dt} = 0.$$

Эти переменные называются *переменными типа действия.*

Переменные на инвариантном многообразии обозначим через ϕ_i, $i = 1, \ldots, n$. Будем считать, что инвариантное многообразие компактно. Поэтому переменные ϕ – периодические $\phi_i \in [0, 2\pi)$. Зависимость от времени этих переменных

$$\phi_i' = \omega_i(I_1, \ldots, I_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Переменные ϕ_i называются *переменными типа угол.*

Построим производящую функцию $S(I, q)$, такую, что

$$p = \frac{\partial S(I,q)}{\partial q}, \quad \phi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}.$$

Тогда функция $S(I, q)$ – решение уравнения

$$H(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = h(I).$$

Это уравнение – уравнение первого порядка в частных производных называется уравнением *Гамильтона-Якоби.*

Дифференциал производящей функции:

$$dS|_{I=\mathrm{const}} = \frac{\partial S}{I_i} dI_i + \frac{\partial S}{q_i} dq_i.$$

Тогда

$$S(I, q) = \int_{q_i^0}^{q_i^t} p_i dq_i, \quad \Delta S = \int_{M_f} p_i dq_i = 2\pi I_i(h, f_1, \ldots, f_{n-1}),$$

где M_f – инвариантное многообразие. Переменные I_i и ϕ_i можно выразить в виде:

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{M_f} p_i dq_i, \quad \phi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}.$$

Покажем, что так определенные переменные действительно являются переменными типа действие-угол.

$$\phi_i' = \frac{d}{dt}(\frac{\partial S}{\partial I_i}) = \frac{\partial^2 S}{\partial I_i \partial I_j}\frac{dI_j}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial I_i \partial q_j}\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial I_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \text{const}.$$

$$\frac{dI_i}{dt} = 0.$$

Пример. Для математического маятника переменные действие-угол:

$$I = f(H), \quad \phi = \int_{u_0}^{u} \frac{dx}{\sqrt{2H - 2cos(x)}}.$$

10.4 Теорема Лиувилля об интегрируемых системах

Результаты предыдущих разделов формулируются в форме теоремы Лиувилля об интегрируемых системах.

Пусть на симплектическом $2n$-мерном многообразии заданы n функций в инволюции:

$$F_1, \ldots, F_n, \quad \{F_i F_j\} = 0,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим множество уровня F_i:

$$M_f = \{x :\ F_i(x) = f_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Пусть на M_f n функций F_i независимы, тогда:

1) M_f – гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока с функцией Гамильтона $h = F_1$.

2) Если M_f компактно и связно, тогда оно диффеоморфно n-мерному тору

$$T^n = \{(\phi_1, \ldots, \phi_n) \,\mathrm{modd} 2\pi\}.$$

3) Фазовый поток с функцией Гамильтона H определяет на M_f условно-периодическое движение, то есть в угловых координатах $\phi(\phi_1, \ldots, \phi_n)$:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i, \quad \omega_i = \omega(f_1, \ldots, f_n).$$

4) Канонические уравнения с функцией Гамильтона H интегрируются в квадратурах.

10.5 Литература

При подготовке к этой лекции использовались учебники

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Механика.

Арнольд В.И.. Математические методы классической механики.

А также мой конспект лекций по вполне интегрируемым системам, прочитанных проф. В.Ю.Новокшеновым на математическом факультете БГУ (осенний семестр 1989/90 учебного года).

11 Почти интегрируемые системы

В этой лекции вводится понятие прямого ряда теории возмущений, формулируется теорема Пуанкаре о зависимости решения системы от параметра. Показано появление секулярных членов в прямых разложениях теории возмущений. Вводится понятие адиабатического инварианта.

11.1 Прямое разложение теории возмущений

Исследуем методом теории возмущений решение уравнения Дуффинга.

$$u'' + \omega^2 u + \varepsilon u^3 = 0. \tag{48}$$

Конечно, решение этого уравнения выражается через подробно исследованную функцию синус амплитуды. Однако, здесь мы построим решение другим способом и в другом виде – в виде прямого ряда теории возмущений. Знание же свойств функции синус амплитуды поможет понять причины ограниченных возможностей прямого разложения теории возмущений, по крайней мере, в рассматриваемом случае.

Будем считать ε независимым параметром задачи. Построим решение уравнения (48). Если $\varepsilon = 0$, тогда решение хорошо известно:

$$u_0(t) = A\cos(\omega t + \phi_0).$$

Следующий шаг состоит в поиске решения уравнения Дуффинга в виде ряда по степеням ε:

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots. \tag{49}$$

Попытаемся построить члены этого ряда. Для этого подставим выражение u_ε в уравнение.

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + \varepsilon^2 u_2'' + \omega^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) + \varepsilon u_0^3 + \varepsilon^2 3u_0^2 u_1 + \dots = 0.$$

Здесь под многоточием понимаются слагаемые с множителем ε^n, где $n \geq 3$. Как это обычно делается в методе неопределенных коэффициентов, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим уравнения:

$$u_0 + \omega^2 u_0 = 0,$$

$$u_1 + \omega^2 u_1 = -u_0^3,$$

$$u_2 + \omega^2 u_2 = -3u_0^2 u_1.$$

Подставим решение уравнения для u_0

$$u_0(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

в уравнение для u_1

$$u_1'' + \omega^2 u_1 = -A^3 \cos^3(\omega t + \phi_0).$$

Правую часть этого уравнения удобно преобразовать к виду:

$$A^3 \cos^3(\omega t + \phi_0) = A^3 \cos(\omega t + \phi_0) - \frac{A^3}{2}\sin(2(\omega t + \phi_0))\sin(\omega t + \phi_0) =$$
$$A^3 \cos(\omega t + \phi_0) - \frac{A^3}{4}(\cos(\omega t + \phi_0) - \cos(3(\omega t + \phi_0)))$$

Теперь легко написать частное решение уравнения для u_1

$$u_1 = -\frac{3A^3}{4\omega} t \sin(\omega t + \phi_0) + \frac{A^3}{\omega^2 - 9\omega^2}\cos(3(\omega t + \phi_0)).$$

Легко понять, что частное решение уравнения для u_2 можно представить в виде:

$$u_2 = B_2 t^2 \cos(\omega t + \phi_0) + B_1 t \sin(\omega t + \phi_0) + C_1 \cos(5(\omega t + \phi_0)) + C_2 \cos(3(\omega t + \phi_0)).$$

Постоянные $B_{1,2}$ и $C_{1,2}$ вычисляются явно.

Действуя также и далее, можно получить выражения для любого коэффициента ряда по степеням ε разложения решения уравнения (48). Полученный ряд называется *прямым разложением теории возмущений* для решения уравнения (48).

11.2 Аналитическая зависимость от параметра

Посмотрев на уравнение (48), и разложение его решения в виде (49), становится понятно, что это просто разложение в ряд Тейлора решения уравнения (48), которое аналитически зависит от параметра ε. Ясно также, такое разложение можно получить для решения любого уравнения, аналитически зависящего от параметра. Более того, такой ряд, наверное, будет сходиться к решению, если параметр ε достаточно мал.

Это достаточно простое наблюдение и сформулировано в теореме Пуанкаре. Прежде чем формулировать эту теорему, определимся с терминологией.

Рассмотрим систему уравнений:

$$z' = f(z, t, \varepsilon). \tag{50}$$

Будем предполагать, что функция в правой части этой системы аналитически зависит от ε, z и непрерывно дифференцируема по t.

Систему уравнений:

$$z_0' = f(z_0, t, 0)$$

будем называть *порождающей* для системы уравнений (50).

Теорема. Если общий интеграл порождающей системы известен, тогда

1) решение системы (50) может быть найдено в виде

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i y_i(t), \tag{51}$$

где $y_i(t)$ вычисляются с помощью операций дифференцирования и взятия квадратур;

2) решение уравнения (50) – аналитическая функция параметра ε, то есть ряд (51) сходится при достаточно малых по абсолютной величине значениях ε и, следовательно, этот ряд представляет собой разложение по степеням ε первого интеграла уравнения (50).

Докажем первое утверждение теоремы. Для этого выпишем уравнения для $y_i(t)$. Эти уравнения легко выписать, если вместо $z(t, \varepsilon)$ в уравнение (50) подставить формулу (51). В левой части уравнения (50) ряд по ε почленно продифференцировать:

$$z' = z_0'(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i y_i'(t),$$

а в правой части функцию

$$f(z_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i y_i(t), t, \varepsilon)$$

разложить в ряд Тейлора по ε:

$$\begin{aligned} f(z, t, \varepsilon) = f(z_0, t, 0) + \varepsilon\Big(\partial_z f(z_0, t, 0) y_1 + \partial_\varepsilon f(z_0, t, 0)\Big) + \\ \varepsilon^2\Big(\partial_z f(z_0, t, 0) y_2 + \frac{\partial_z^2 f(z_0, t, 0)}{2!} y_1^2 + \partial_\varepsilon^2 f(z_0, t, 0)\Big) + \ldots . \end{aligned} \tag{52}$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений для определения $y_i(t)$, так же, как это было в примере для уравнения Дуффинга.

Уравнение, получившееся при ε^i, определяет функцию $y_i(t)$. Важно, что уравнения для всех поправок y_i – линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

$$y_i' = \partial_z f(z_0, t, 0) y_i + F_i(t). \tag{53}$$

Неприятность состоит в том, что это уравнения с переменными коэффициентами. В общем виде решить такие уравнения непросто. Даже подробное исследование их свойств – весьма нетривиальная задача (см., например, лекцию 2). Однако, в нашем случае эти линеаризованные уравнения легко решаются. Для получения фундаментальной системы решений однородного линеаризованного уравнения (53) заметим, что этому уравнению удовлетворяет решение порождающего уравнения, продифференцированное по любому из своих параметров.

По условию теоремы известно общее решение порождающей системы. Число параметров, от которых зависит это решение равно размерности системы уравнений. Матрица, составленная из производных решения порождающего уравнения по всем его параметрам, и есть фундаментальная система решений однородной системы линеаризованных уравнений (53):

$$Y(t) = \partial_c z_0(t; c).$$

Эта матрица неособая. Решение неоднородного уравнения для y_i выражается формулой:

$$y_i(t) = Y(t) \int_{t_0}^{t} d\tau Y^{-1}(\tau) F_i(\tau).$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Построенный ряд по степеням параметра ε, вообще говоря, не обязан сходиться. Такой формальный ряд, не обязательно сходящийся, называется *формальным решением* уравнения (50).

Следующий шаг – доказать сходимость полученного ряда. Однако это доказательство довольно громоздко и здесь оно не приводится.

11.3 Ограниченная пригодность прямого разложения теории возмущений, секулярные члены

Рассмотрим прямое разложение теории возмущений, полученное для решения уравнения Дуффинга (49). Из формул для коэффициентов разложения $u_1(t)$, $u_2(t)$ видно, что они растут по времени. Причем, первая поправка растет пропорционально t, вторая – пропорционально t^2. Далее можно показать, что n-я поправка растет пропорционально t^n. Такой рост поправок по времени приводит к тому, что при $t \sim \varepsilon^{-1}$ малость ε не обеспечивает сходимость – в каждой поправке есть члены, которые на столь больших временах ведут себя как ε^0. В конечном счете, это приводит к расходимости построенных рядов.

Непригодность прямого разложения теории возмущений в случае уравнения Дуффинга легко понять. Период решения этого уравнения зависит от параметров уравнения и, в частности, от величины ε. В то же время, при построении прямого разложения мы приближаем решение функциями, период которых не зависит от ε. Естественно, что это противоречие приводит к тому, что наше приближение с ростом времени все больше и больше отличается от истинного решения.

Такое же явление роста поправок можно усмотреть и при вычислении поправок y_i. При доказательстве первого утверждения теоремы Пуанкаре – чтобы вычислить n-ю поправку надо n раз проинтегрировать по t, и в результате в n-ой поправке могут появиться члены вида $A\varepsilon^{-n}$. Если ε малый параметр, тогда такие члены играют важную роль при больших временах T. Они называются *секулярными* или *вековыми* членами. Дело в том, что в задачах небесной механики, в которых видимо впервые применялись разложения теории возмущений, такие члены начинают влиять на сходимость рядов теории возмущений при попытках рассмотрения формальных решений на больших временах.

11.4 Основная задача механики.

Задачу о возмущении гамильтоновой системы естественно рассматривать в наиболее простом виде – когда порождающая система приведена к переменным действие-угол. В этом случае гамильтониан возмущенной системы имеет вид:

$$H(I, \theta, t; \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta, t).$$

Система уравнений Гамильтона:

$$I' = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta}, \quad \theta' = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \tag{54}$$

где $\omega(I) = \partial_I H_0$.

Задачу об исследовании системы (54) Пуанкаре назвал *основной задачей механики.*

11.5 Адиабатические инварианты

Рассмотрим основную задачу механики в одномерном случае с гамильтонианом, независящим от времени. Переменную действия и переменную типа угол будем искать в виде рядов по степеням ε:

$$I(t,\varepsilon) = I_0(t) + \varepsilon I_1(t) + \varepsilon^2 I_2(t) + \dots,$$

$$\phi(t,\varepsilon) = \phi_0(t) + \varepsilon \phi_1(t) + \varepsilon^2 \phi_2(t) + \dots.$$

Подставим эти ряды в систему уравнений (54). Разложим получившиеся функции в ряды по степеням ε и приравняем в полученной формуле коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате для главных членов и первых поправок получим:

$$I_0' = 0, \quad I_1' = -\frac{\partial H_1}{\partial \phi}(I_0, \phi_0),$$

$$\phi_0' = \omega(I_0), \quad \phi_1 = \omega'(I_0) I_1 + \frac{\partial H_1}{\partial I}(I_0, \phi_0).$$

Таким образом, главный член переменной действия просто не изменяется. Первая поправка I_1, вообще говоря, зависит от времени, однако, ее изменение за период равно нулю. Это можно показать, проинтегрировав по периоду уравнение для I_1. Таким образом, порядок изменения переменной действия возмущенной системы за период меньше порядка возмущения. Величины, порядок изменения которых меньше, чем порядок возмущения, называются *адиабатическими инвариантами.*

11.6 Резонансные множества

Рассмотрим двумерную гамильтонову систему:

$$\begin{aligned}
I_1' &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_1}(I, \phi),\\
I_2' &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_2}(I, \phi)\\
\phi_1' &= \omega_1(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_1}(I, \phi, t),\\
\phi_2' &= \omega_2(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_2}(I, \phi, t).
\end{aligned}$$

Целочисленные решения уравнения

$$k\omega_1(I) + l\omega_2(I) = 0, \quad k, l \in \mathbf{Z},$$

соответствуют резонансам. В этом случае уравнения для переменных действия содержат непериодические члены в правой части, поэтому переменные действия могут существенно изменяться.

Если рассмотреть плоскость (ω_1, ω_2), тогда решения резонансного уравнения – прямые с целочисленными коэффициентами, проходящие через начало координат. Система – гамильтонова, то есть:

$$H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \phi, \varepsilon) = \text{const}.$$

Тогда на плоскости (ω_1, ω_2) значения частот, которые удовлетворяют функции Гамильтона, лежат на кривой. Малые окрестности пересечений этой кривой с резонансными прямыми – области резонансов. Резонансные частоты, а следовательно и переменные действия, при которых наступает резонанс – лежат в малых, несвязных окрестностях точек пересечения кривой допустимых частот и резонансных прямых. При выходе значений переменных действия из резонансных – правые части дифференциальных уравнений для них становятся периодическими, и система выходит из резонанса.

Рассмотрим систему с тремя степенями свободы. В этом случае резонансы в пространстве частот $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$– прямые, проходящие через начало координат. Однако, в отличии от двумерного случая, эти плоскости пересекаются по прямым. Поверхность, на которой могут лежать частоты: $\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2, I_3), \omega_2 = \omega_2(I_1, I_2, I_3), \omega_3 = \omega_3(I_1, I_2, I_3)$. Эта поверхность пересекается с резонансными плоскостями. На этой поверхности окрестности пересечения образуют связное множество. Поэтому значения переменных действия могут медленно дрейфовать по окрестностям резонансных линий. Это явление называется *диффузией Арнольда.* В известных примерах для нелинейных систем дрейф переменных действия происходит с экспоненциально малой скоростью.

11.7 Литература

При подготовке к лекции использовались

Арнольд В.И. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений.

Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику.

12 Метод малого параметра

Прямые разложения теории возмущений, не позволяют исследовать решения нелинейных уравнений на большом интервале времени, потому что ряды по малому параметру, о которых говорится в теореме Пуанкаре, перестают сходиться. С формальной точки зрения это часто означает, что надо переразложить ряд или, что то же самое, ввести какое-нибудь другое определение суммирования. Технически же обычно меняют вид разложения. В частности коэффициенты разложения по малому параметру ε сами становятся зависимы от этого малого параметра.

Здесь построены периодические решения осциллятора Дуффинга. Эти решения строятся с помощью одного из вариантов метода малого параметра – метода Пуанкаре-Ляпунова.

Построено периодическое решение осциллятора Дуффинга с резонансным возмущением. Это периодическое решение неаналитично по параметру возмущения ε– оно разлагается в ряд по дробным степеням ε.

12.1 Периодическое решение осциллятора Дуффинга с малой амплитудой

Рассмотрим уравнение
$$u'' + \omega_0^2 u - u^3 = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде прямого ряда теории возмущений
$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \varepsilon^4 u_4(t) + \dots. \qquad (55)$$

Подставим *анзатц* (55) в уравнение, продифференцируем почленно ряд по ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим рекурентную последовательность уравнений для u_k.

$$\begin{aligned} u_1'' + \omega^2 u_1 &= 0,\\ u_2'' + \omega^2 u_2 &= 0,\\ u_3'' + \omega^2 u_3 &= u_1^3,\\ u_4'' + \omega^2 u_4 &= 3u_1^2 u_2,\\ &\dots\\ u_k'' + \omega^2 u_k &= P_k(u_{k-2},\dots,u_1), \end{aligned}$$

где P_k – полином третьего порядка.

В качестве первой поправки возьмем:

$$u_1(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0).$$

Вторую поправку примем равной нулю. Решение уравнения для третьей поправки:

$$u_3(t) = \frac{3t}{4}\sin(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{1}{\omega^2 - 9\omega^2}\sin(3(\omega_0 t + \phi_0)).$$

Четвертую поправку тоже можно принять равной нулю. Далее легко понять, что решения уравнений для поправок с четными номерами можно выбирать нулевыми, а решения с нечетными номерами будут содержать члены вида:

$$u_{2n+1}(t) = A_{2n+1}t^n \cos(\omega_0 t + \phi_0 + \frac{\pi n}{2}) + o(t^n).$$

Известно, что исходное уравнение имеет периодическое по времени решение. Однако, здесь периодическое решение приближается непериодическими. Это приводит к тому, что при $t \sim \varepsilon^{-2}$ ряд (55) перестает сходиться.

Построим другой ряд по степеням ε, каждый член которого – периодическая функция по времени. Для этого, однако, придется допустить, чтобы коэффициенты ряда по ε сами зависели от ε. Поэтому этот ряд не будет являться разложением по ε первого интеграла нелинейного уравнения, о котором говорилось в теореме Пуанкаре на предыдущей лекции.

Будем искать разложение решения по ε в виде:

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon u_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^3 u_3(t,\varepsilon) + \dots. \qquad (56)$$

Каждый коэффициент разложения – периодическая функция по времени t с неизвестным пока периодом T. Для этого проще перейти к новой переменной $\tau = t\omega(\varepsilon)$. Тогда уравнение для $u(\tau,\varepsilon)$ в новой переменной будет иметь вид:

$$\omega^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \omega_0^2 u - u^3 = 0. \qquad (57)$$

Частота $\omega(\varepsilon)$ раскладывается в ряд по ε.

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \dots. \qquad (58)$$

Решение уравнения (57) будем искать в виде:

$$u(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \varepsilon^3 u_3(\tau) + \dots. \qquad (59)$$

Тогда уравнения для поправок разложения (59) будут иметь вид:

$$\omega_0^2\frac{d^2u_1}{d\tau^2}+\omega_0^2u_1=0,$$
$$\omega_0^2\frac{d^2u_2}{d\tau^2}+\omega_0^2u_2+2\omega_0\omega_1\frac{d^2u_1}{d\tau^2}=0,$$
$$\omega_0^2\frac{d^2u_3}{d\tau^2}+\omega_0^2u_3-u_1^3+2\omega_0\omega_2\frac{d^2u_1}{d\tau^2}+\omega_1^2\frac{d^2u_1}{d\tau^2}=0,$$
$$\ldots .$$

Решение уравнения для u_1:

$$u_1(\tau)=\cos(\tau+\phi_0).$$

Решение уравнения для второй поправки можно выбрать равным нулю, для этого следует считать равной нулю и поправку ω_1.

Уравнение для третьей поправки имеет вид:

$$\omega_0^2\frac{d^2u_3}{d\tau^2}+\omega_0^2u_3-\cos^3(\tau+\phi_0)-2\omega_0\omega_2\cos(\tau+\phi_0)=0.$$

Решение этого уравнения ограничено, если в уравнении коэффициент при $\cos(\tau)$ будет равным нулю. Для этого ω_2 надо взять в виде:

$$\omega_2=\frac{3}{8\omega_0}.$$

Таким образом, третья поправка оказывается периодической с периодом 2π по параметру τ. Дальше четные поправки можно выбирать равными нулю, а требование периодичности по τ приводит к последовательному определению поправок ω_{2n+1}.

Построенная асимптотика интересна тем, что хотя период решения по новой переменной известен и равен 2π, частота $\omega(\varepsilon)$ неизвестна и коэффициенты её разложения определяются из рекурентной последовательности задач вместе с соответствующими поправками u_{2n+1}.

Решение уравнения в исходной переменной t имеет вид:

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon\cos((\omega_0+\varepsilon^2\frac{3}{8\omega_0}+\ldots)t+\phi_0)+$$
$$\varepsilon^3\frac{1}{8}\sin(3((\omega_0+\varepsilon^2\frac{3}{8\omega_0}+\ldots)t+\phi_0))+\ldots . \qquad (60)$$

Это решение – периодическое по времени t, кроме того, можно показать, что так построенный ряд по степеням ε сходится при достаточно малом ε. Можно заметить, что этот ряд получается, если суммировать в ряду прямой теории возмущений растущие по t слагаемые.

12.2 Вынужденные нерезонансные колебания

Рассмотрим уравнение Дуффинга с вынуждающей силой, не входящей в резонанс с собственными колебаниями уравнения.

$$u'' + \omega_0^2 u - u^3 = \varepsilon \sin(\Omega t).$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \dots. \tag{61}$$

Подставим анзатц в уравнение. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, В результате получим рекурентную последовательность для определения коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} u_1'' + \omega^2 u_1 &= \sin \Omega t, \\ u_2'' + \omega^2 u_2 &= 0, \\ u_3'' + \omega^2 u_3 &= u_1^3(t), \\ &\dots. \end{aligned}$$

Решая последовательно эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t), \\ u_2 &= 0, \\ u_3(t) = \frac{3\sin(\Omega t)}{4(\omega^2 - \Omega^2)^4} &- \frac{\sin(3\Omega t)}{4(\omega^2 - 9\Omega^2)(\omega^2 - \Omega^2)^3}, \\ &\dots. \end{aligned}$$

Следовательно, в отсутствии резонанса частота вынужденных колебаний решения нелинейного уравнения зависит только от частоты возмущающей силы.

12.3 Резонансные колебания уравнения Дуффинга

Построим периодическое решение возмущенного уравнения Дуффинга, когда частота возмущающей силы равна частоте линейной части порождающего уравнения.

$$u'' + u - u^3 = \varepsilon \sin(t). \tag{62}$$

Самый простой способ – попытаться построить решение с помощью прямого разложения теории возмущений, который привел к успеху в предыдущем пункте, когда изучались вынужденные колебания. Для этого, как всегда, попытаемся построить формальное решение в виде ряда по степеням ε.

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \dots.$$

Уравнения для коэффициентов этого ряда легко получаются после подстановки ряда в уравнение (62).

$$u_1'' + u_1 = \sin(t), \quad u_1(t) = -t\cos(t);$$
$$u_2'' + u_2 = 0, \quad u_2 = 0;$$
$$x_3'' + x_3 = -t^3\cos^3(t), \quad u_3 = -t^4\frac{3}{16}\sin(t) + \text{члены меньшего порядка по t}$$
$$\dots.$$

Очевидно, что прямое разложение не дает периодического решения. Кроме того, от первого слагаемого в третьей поправке не удается избавиться простой модификацией частоты в главном члене решения, как это было при построении периодического решения уравнения Дуффинга в первом части этой лекции.

С другой стороны, известно, что период решения уравнения Дуффинга зависит от амплитуды решения. Кроме того, из прямого разложения видно – главный член решения растет по времени. Следовательно для того, чтобы построить периодическое решение, следует начинать построения с поправок больших, чем ε. В этом случае изменится и частота колебаний. Она уже будет отлична от частоты возмущающей силы, и система не будет находиться в резонансе.

Заменим переменную $\tau = t/\omega$, уравнение в переменной τ будет иметь вид:

$$\omega^2 u'' + u - u^3 = \varepsilon\sin(\tau\omega).$$

Будем искать решение в виде:

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/3}u_1 + \varepsilon^{2/3}u_2 + \varepsilon u_3 + \varepsilon^{4/3}u_4 + \varepsilon^{5/3}u_5 + \varepsilon^2 u_6 + \dots.$$

Частоту $\omega(\varepsilon)$ также будем строить в виде разложения по степеням $\varepsilon^{1/3}$.

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/3}\omega_1 + \varepsilon^{2/3}\omega_2 + \varepsilon\omega_3 + \varepsilon^{4/3}\omega_4 + \varepsilon^{5/3}\omega_5 + \dots.$$

Для коэффициентов разложения получим рекурентную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
u_1'' + u_1 &= 0,\\
u_2'' + u_2 &= -2\omega_1 u_1,\\
u_3'' + u_3 &= \sin(t) + u_1^3,\\
u_4'' + u_4 &= 3u_1^2 u_2,\\
u_5'' + u_5 &= 3u_1^2 u_3, \dots.
\end{aligned}$$

Уравнение для u_1 имеет решение:

$$u_1 = A_1 \sin(\tau) + B_1 \cos(\tau).$$

Здесь амплитуда колебаний еще не определена. Она определится при решении уравнений для следующих поправок из условия отсутствия в этих поправках растущих слагаемых.

Будем считать, что

$$u_2 = 0.$$

Наша задача – подобрать амплитуду первой поправки и первую поправку частоты так, чтобы в правой части уравнения уравнения для u_3 не было слагаемых, приводящих к резонансу. Выпишем правую часть этого уравнения

$$f_3 = \sin(t) + (A_1 \sin(t) + B_1 \cos(t))^3.$$

Легко понять, что для этого

$$B_1 = 0, \quad A_1^3 \frac{3}{4} = 0,$$

или

$$A_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}.$$

Тогда уравнение для u_3 примет вид:

$$u_3'' + u_3 = -\frac{1}{3} \sin(3t).$$

Решение этого уравнения:

$$u_3 = -\frac{1}{24} \sin(3t) + (A_3 \sin(t) + B_3 \cos(t)).$$

Решение уравнения для u_4 примем равным нулю, а коэффициенты A_3 и B_3 будем подбирать так, чтобы в правой части уравнения для u_5 не было резонансных слагаемых.

$$f_5 = 3A_1^2 \sin(t)(A_3 \sin(t) + B_3 \cos(t) - \frac{1}{24} \sin(3t)).$$

Если воспользоваться тригонометрическими формулами для приведения степеней тригонометрических функций к функциям кратных углов, получим:

$$f_5 = 3A_1^2 A_3 (\frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)) + 3A_1^2 B_3 \sin^2(t) \cos(t) - \frac{1}{8} A_1^3 (-\frac{1}{4} \sin(5t) - \frac{1}{4} \sin(t)).$$

Требование отсутствия резонансных слагаемых приводит к определению постоянных A_3 и B_3.
$$A_3 = -\frac{1}{54}, \quad B_3 = 0.$$
Теперь можно построить периодическое решение уравнения для u_5. В этом решении есть две постоянных, которые будут определены при построении следующих поправок.

Формальное решение уравнения (62) имеет вид
$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/3}\sin(t) - \varepsilon(\frac{1}{24}\sin(3t) + \frac{1}{54}\sin(t)) + \varepsilon^{5/3}u_5(t) + \dots.$$
Это решение разлагается в ряд по дробными степеням параметра возмущения, и главный член этого разложения имеет больший порядок, чем само возмущение.

12.4 Литература

При подготовке к этой лекции использовался учебник

Н.Н. Моисеев Асимптотические методы нелинейной механики.

13 Метод малого параметра для решения с конечной амплитудой

Периодические решения, построенные на предыдущей лекции, обладают одним существенным ограничением – это решения достаточно малой амплитуды. Здесь построено периодическое решение конечной, не обязательно малой, амплитуды. При этом вместо линейных уравнений с постоянными коэффициентами приходится решать нелинейное уравнение для главного члена формального решения и линеаризованные с периодическими коэффициентами – для поправок. Здесь приведены лишь формулы, получающиеся, если искать решение в рамках подхода Пуанкаре. По большому счету задача осталась нерешенной. Буду рад библиографическим указаниям.

13.1 Периодическое решение уравнения Дуффинга

Здесь построим периодическое решение возмущенного уравнения Дуффинга без предположения о малости его амплитуды. Будем рассматривать уравнение:

$$u'' + \omega_0^2 u - u^3 = \varepsilon f(t). \tag{63}$$

Решение будем искать в виде:

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \dots. \tag{64}$$

Как обычно, при построении решения в виде ряда по ε для вычисления коэффициентов этого разложения подставим ряд (64) в уравнение (63) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε.

$$\begin{gathered} u_0'' + \omega_0^2 u_0 - u_0^3 = 0, \qquad (65)\\ u_1'' + \omega_0^2 u_1 - 3u_0^2 u_1 = f(t),\\ u_2'' + \omega^2 u_2 - 3u_0^2 u_2 = +3u_0 u_1^2,\\ \dots. \end{gathered}$$

Решение уравнения для главного члена выражается через функцию синус амплитуды.

$$u_0(t) = A\mathrm{sn}(\omega t, k).$$

Здесь надо вспомнить, что функция $y(\tau) = \mathrm{sn}(\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + (1+k^2)y - 2k^2y^3 = 0. \tag{66}$$

Для того, чтобы найти связь между амплитудой A, параметром ω и модулем эллиптической функции, подставим u_0 в уравнение (65):

$$A\omega^2 y'' + \omega_0^2 A y - A^3 y^3 = 0.$$

Выразим вторую производную из уравнения (66), и приравняем коэффициенты при y и y^3. В результате получим:

$$\omega^2(k^2+1) = \omega_0^2, \quad \omega^2 k^2 = A^2,$$

или

$$A^2 + \omega^2 = \omega_0^2, \quad \omega^2 k^2 = A^2.$$

Эти уравнения связывают амплитуду решения уравнения для главного члена формального решения u_0 и частоту колебаний функции u_0.

13.2 Условие периодичности решения уравнения для первой поправки.

Рассмотрим уравнение для первой поправки формального решения – функции u_1. Это линейное уравнение с периодическим коэффициентом. Решение этого уравнения можно представить в явном виде через решение нелинейного уравнения для главного члена. Два линейно независимых решения однородного уравнения для первой поправки:

$$v(t) = \mathrm{cn}(\omega t, k)\mathrm{dn}(\omega t, k), \quad w(t) = v(t)\int_0^t \frac{d\tau}{v^2(\tau)}.$$

С помощью этих решений легко построить общее решение неоднородного уравнения

$$u_1(t) = v(t)\int_0^t w(\tau)f(\tau)d\tau - w(t)\int_0^t d\tau v(\tau)f(\tau) \\ + c_1 v(t) + c_2 w(t).$$

Выясним, при каких условиях функция u_1 будет периодична, то есть:

$$u_1(t+T) = u_1(t).$$

Для вычисления изменения первой поправки за период T следует учесть формулу (см. лекцию 2)

$$w(t+T) = Bv(t) + w(t).$$

Удобно обозначить $f(u_0(t), u_0'(t)) = \phi(t)$. Тогда

$$u(t+T) = v(t)\int_0^{t+T} d\tau\phi(\tau)w(\tau) - (Bv(t)+w(t))\int_0^{t+T} d\tau f(\tau)v(\tau) +$$
$$+c_1 v(t) + c_2(Bv(t)+w(t)) = v(t)\int_0^T d\tau f(\tau)w(\tau) +$$
$$+v(t)\int_0^t f(\tau)(Bv(\tau)+w(\tau)) - Bv(t)\int_0^T d\tau f(\tau)v(\tau) -$$
$$-w(t)\int_0^T d\tau f(\tau)v(\tau) - Bv(t)\int_0^t d\tau f(\tau)v(\tau) - w(t)\int_0^t d\tau f(\tau)v(\tau).$$

Сократим подобные слагаемые. В результате получим

$$u(t+T) = v(t)\int_0^t d\tau f(\tau)w(\tau) - w(t)\int_0^t d\tau f(\tau)v(\tau) +$$
$$+v(t)\Big(\int_0^T d\tau f(\tau)w(\tau) + c_1 + c_2 B\Big) - w(t)\Big(\int_0^T d\tau f(\tau)v(\tau) - c_2\Big).$$

Нас интересуют периодические решения, то есть

$$u(t+T) - u(t) = 0.$$

Это условие приводит к уравнениям:

$$\int_0^T d\tau f(\tau)v(\tau) = 0,$$
$$\int_0^T d\tau f(\tau)w(\tau) + c_2 B = 0.$$

Таким образом, решение уравнения для первой поправки периодическое, если

$$J = \int_0^T d\tau f(\tau)v(\tau) = 0.$$

Если функция $f(t)$ периодическая, ее период совпадает с периодом решения порождающего уравнения, и интеграл J не равен нулю, тогда первая поправка прямого разложения теории возмущений растет пропорционально квадрату времени. В этом случае ряд прямого разложения теории возмущений перестает сходиться уже при значениях времени порядка $\varepsilon^{-1/2}$. Это типичная ситуация для нелинейных уравнений.

13.3 Разложение по дробным степеням малого параметра

Если не удается построить ряд теории возмущений для периодического решения уравнения (63) по целым степеням параметра возмущения, попытаемся построить такой ряд по дробным степеням ε.

$$u(t,\varepsilon) = u_0 + \varepsilon^{1/3}u_1 + \varepsilon^{2/3}u_2 + \varepsilon u_3 + \varepsilon^{4/3}u_4 + \varepsilon^{5/3}u_5 + \dots . \tag{67}$$

Как обычно, подставим исходный анзатц в уравнение, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε. В результате получим рекурентную последовательность уравнений для поправок.

$$\begin{aligned}
u_0'' + \omega^2 u_0 - u_0^3 &= 0,\\
u_1'' + \omega^2 u_1 - 3u_1u_0^2 &= 0,\\
u_2'' + \omega^2 u_2 - 3u_2u_0^2 &= 3u_1^2u_0,\\
u_3'' + \omega^2 u_3 - 3u_3u_0^2 &= f(t) + u_1^3 + 2u_0u_1u_2,\\
u_4'' + \omega^2 u_4 - 3u_4u_0^2 &= 3u_0u_2^2 + 3u_1^2u_2 + 2u_0u_1u_3,\\
u_5'' + \omega^2 u_5 - 3u_5u_0^2 &= 2u_0u_2u_3 + 3u_1^2u_3 + 3u_1u_2^2 + 2u_0u_1u_4,\\
&\dots .
\end{aligned}$$

Периодическое решение уравнения для первой поправки:

$$u_1 = \alpha_1 \mathrm{cn}(\omega t)\mathrm{dn}(\omega t).$$

Чтобы выяснить периодическая ли вторая поправка вычислим интеграл:

$$\int_0^T dt \mathrm{sn}(t\omega)(\mathrm{cn}(\omega t)\mathrm{dn}(\omega t))^3 = \frac{1}{\omega}\int_0^T (\mathrm{cn}(\omega t)\mathrm{dn}(\omega t))^2 d(\mathrm{sn}^2(\omega t)).$$

Используя формулы для эллиптических функций Якоби, получим:

$$\int_0^T dt \mathrm{sn}(t\omega)(\mathrm{cn}(\omega t)\mathrm{dn}(\omega t))^3 = \frac{1}{\omega}\Big(\int_0^1 (1-y)(1-k^2y)dy + \int_1^0 (1-y)(1-k^2y)dy +$$

$$\int_0^1 (1-y)(1-k^2y)dy + \int_1^0 (1-y)(1-k^2y)dy\Big) = 0.$$

Следовательно, вторая поправка – периодическая функция. Причем она определена неоднозначно – можно добавить периодическое решение однородного уравнения – функцию $\alpha_2 v(t)$.

$$u_2 = \alpha_1^2 A U_2(t) + \alpha_2 v(t).$$

Здесь $\alpha_1^2 A U_2(t)$ – периодическое решение неоднородного уравнения для второй поправки. Так же, как и в первой поправке, параметр α_2 определяется при построении следующих поправок.

Требование периодичности третьей поправки приводит к уравнению:

$$\int_0^T dt f(t)v(t) + \alpha_1\alpha_2\int_0^T dt u_0 v^3(t) + \alpha_1^3\int_0^T dt v^4(t) + \alpha_1^3 A\int_0^T dt u_0 U_2 v^2(t) = 0.$$

Разберем по-отдельности каждое слагаемое в этой формуле. Первое слагаемое не равно нулю по условию. Второе слагаемое равно нулю, это было показано при анализе второй поправки. Интеграл в третьем слагаемом не равен нулю, потому что это интеграл от положительной функции. Отдельно выпишем интеграл в четвертом слагаемом.

$$\int_0^T dt u_0 U_2 v^2(t) = A \int_0^T dt \mathrm{sn}(\omega t) U_2 v^2(t) dt = A\Omega.$$

Здесь через Ω обозначена некоторая постоянная. В результате из условия периодичности третьей поправки получим:

$$(B + A^2\Omega)\alpha_1^3 = -F \tag{68}$$

– уравнение для определения α_1. Здесь приняты обозначения:

$$B = \int_0^T dt v^4(t),$$

$$F = \int_0^T dt f(t) v(t).$$

Вопрос о разрешимости уравнения для α_1 здесь остается открытым. Дело в том, что это уравнение не столь просто, как кажется на первый взгляд. Конечно для разрешимости достаточно, чтобы $(B + A^2\Omega) \neq 0$, однако, B и Ω определяются только через решения линеаризованного уравнения и, в конечном счете, зависят от A – амплитуды главного члена. Поэтому для выяснения вопроса о разрешимости уравнения (68) необходим дополнительный анализ выражения $(B + A^2\Omega)$.

Уравнения для следующих поправок получаются аналогично – в каждой из них следует оставлять произвол вида $\alpha_k v(t)$. Постоянные α_k определятся из условия периодичности $k+2$ поправки. Причем, в отличие от постоянной α_1, уравнения для остальных α_k линейны.

Задача. Выяснить вопрос о разрешимости уравнения для α_1.

13.4 Литература

К сожалению, я не нашел никакой более менее внятной литературы по возмущениям периодических решений нелинейных уравнений с большой амплитудой. Непонятно, означает ли это, что задача просто не решена, или я плохо искал. С другой стороны, конечно, есть достаточно известные работы про асимптотики решений, период которых медленно меняется:

Кузмак Г.Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. ПММ, 1959, т.23, №3, с.515-526.

Федорюк М.В. Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка. ЖФМ и МФ, 1986, т.26, №2, с.198-210.

14 Задачи к зачету

Здесь собраны задачи, решив одну из которых, можно получить зачет

Задача 1. Исследовать решение уравнения

$$u'' + u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\Big((1 - \frac{1}{n^3})t\Big).$$

Указать асимптотику амплитуды решения по времени.

Задача 2.

Показать зоны неустойчивости по отношению к параметрическому возмущению решения уравнения

$$u'' + (\omega^2 + q(t))u = 0, \quad q(t) = 0,\, t \in (0, T], \quad q(t) = -\varepsilon,\, t \in (T, 2T], \\ q(t + 2T) = q(t),$$

на графике (ε, ω).

Задача 3. Написать три первых члена ряда в разложении $K(k)$ в окрестности $k = 1$, где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}}.$$

$K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Задача 4. Выразить через эллиптические функции Якоби решение уравнения (эллиптическую функцию Вейерштрасса):

$$(P')^2 = 4P^3 - g_2 P - g_1$$

и исследовать его свойства.

Задача 5. Линеаризованное уравнение математического маятника на периодическом решении имеет два решения – периодическое $\phi_1(t)$ с периодом T и растущее $\phi_2(t)$. Вычислить коэффициент A в представлении растущего решения в виде:

$$\phi_2(t + T) = A\phi_1(t) + \phi_2(t).$$

Задача 6. Указать бифуркационные значения параметра X уравнения Пенлеве-4 с "замороженными коэффициентами":

$$w_{xx} = \frac{w_x^2}{2w} + \frac{3w^3}{2} + 4Xw^2 + 2(X^2 - a)w + \frac{b}{w}$$

Задача 7. Исследовать фазовый поток уравнения осциллятора Дуффинга:

$$u'' + u - u^3 = 0$$

в терминах функций Якоби. Нарисовать поведение капли фазовой жидкости вблизи сепаратрисы.

Задача 8. Проинтегрировать уравнение сферического маятника.

15 Вопросы к зачету

1. Гармонический осциллятор. Решение уравнения осциллятора с возбуждающей силой. Резонанс и малые знаменатели.

2. Уравнение Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом. Функция Блоха. Параметрический резонанс. Данные монодромии.

3. Решение уравнения Штурма-Лиувилля с периодическим ступенчатым коэффициентом.

4. Фазовые траектории и решение уравнения математического маятника. Период колебаний маятника.

5. Колебания математического маятника малой амплитуды. Формула для периода колебаний. Сепаратрисное решение уравнения математического маятника.

6. Функция синус амплитуды и решение уравнения математического маятника. Эллиптические функции Якоби.

7. Свойства эллиптических функций Якоби.

8. Аппроксимация функций Якоби в окрестности нуля аргумента, в окрестности нулевого значения параметра и в окрестности параметра равного единице.

9. Положение равновесия и устойчивость по Ляпунову.

10. Орбитальная устойчивость.

11. Решение линеаризованного уравнения математического маятника.

12. Неустойчивость сепаратрисного решения уравнения маятника.

13. Простейшие бифуркации положений равновесия.

14. Пример бифуркации сепаратрис.

15. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа.

16. Функция Гамильтона и уравнения Гамильтона.

17. Фазовый поток и теорема Лиувилля. Теорема Пуанкаре о возвращении.

18. Система Лоттки-Вольтерры, уравнения Пфаффа.

19. Задача Кеплера.

20. Волчок Эйлера.

21. Волчок Ковалевской.

22. Скобки Пуассона. Коммутирующие фазовые потоки.

23. Переменные действие-угол. Теорема Лиувилля об интегрируемых системах.

24. Метод малого параметра и теорема Пуанкаре.

25. Прямое разложение по малому параметру решения уравнения Дуффинга. Метод Пуанкаре-Ляпунова.

26. Метод малого параметра для вынужденных нерезонансных и резонансных колебаний осциллятора Дуффинга.

27. Метод малого параметра для ограниченных периодических решений уравнения Дуффинга.