

БИБЛИОТЕКА

R&C
Dynamics

РЕГУЛЯРНАЯ И
ХАОТИЧЕСКАЯ
ДИНАМИКА

В. И. Арнольд, А. Авец

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



11
ТОМ

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

REGULAR & CHAOTIC DYNAMICS

ТОМ 11

Редакционный совет:

главный редактор: *В. В. Козлов*
ответственный редактор: *А. В. Борисов*
редактор-консультант: *Ю. А. Данилов*

Editorial Board:

Editor-in-Chief: *V. V. Kozlov*
Managing Editor: *A. V. Borisov*
Advisory Editor: *Y. A. Danilov*

СЕРИЯ

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

ВЫШЛИ В СВЕТ:

1. *Э. Картан*. Интегральные инварианты (с добавлением В.В.Козлова).
2. *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*. Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях.
3. *А. Д. Морозов, Т. Н. Драгунов и др.* Инвариантные множества динамических систем в WINDOWS.
4. *В. В. Козлов*. Общая теория вихрей.
5. *М. Оден*. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем.
6. *В. В. Голубев*. Талант без почвы.
7. *А. В. Борисов, И. С. Мамаев*. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.
8. *Д. Биркгоф*. Динамические системы.
9. *Э. Уиттекер*. Аналитическая динамика.
10. *В. М. Алексеев*. Лекции по небесной механике.
11. *В. И. Арнольд, А. Авец*. Эргодические проблемы классической механики.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Ю. Мозер. Интегрируемые системы.

В. В. Козлов. Методы качественного анализа в динамике твердого тела.

А. Пуанкаре. Теория вихрей.

А. Пуанкаре. Фигуры равновесия вращающихся масс жидкости.

Дж. Марсден, Т. Ратью. Введение в механику и симметрию.

E-mail: borisov@uni.udm.ru
<http://www.rcd.com.ru>

В.И. Арнольд, А.Авец

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Перевод с английского и французского
выполнен в редакции журнала
“Регулярная и хаотическая динамика”

(А.В. Борисов, Ю.А. Данилов, А.В. Летчиков, И.С. Мамаев)

Редакция журнала
“Регулярная и хаотическая динамика”

Ижевская республиканская типография

1999

УДК 530.14
А 76

Библиотека «*R & C Dynamics*»
Том 11

*Серия организована издательством «УРСС» и редакцией
журнала «Регулярная и хаотическая динамика» в 1998 г.*

А 76 **В. И. Арнольд, А. Авец**

Эргодические проблемы классической механики. —
Ижевск: Ижевская республиканская типография. — 1999,
284 стр.

ISBN 5-89806-018-9

Книга представляет собой русский перевод ставшей уже классической монографии, написанной авторами на французском языке. В ней изложены основы эргодической теории без излишнего формализма, приводится ряд примеров из классической и небесной механики.

Книга полезна математикам и физикам — от студентов младших курсов до научных сотрудников и преподавателей.

ISBN 5-89806-018-9



Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»

<http://www.rcd.com.ru>

- © Арнольд В. И., Авец А., 1999
- © Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 1999

Содержание

Предисловие к английскому изданию	9
Глава 1. Динамические системы	11
§ 1. Классические системы	11
§ 2. Абстрактные динамические системы	15
§ 3. Проблемы вычисления средних	18
§ 4. Проблемы классификации. Изоморфизм абстрактных динамических систем	19
§ 5. Проблемы общего случая	20
Общая литература к главе 1	21
Глава 2. Эргодические свойства	22
§ 6. Временные и пространственные средние	22
§ 7. Эргодичность	23
§ 8. Перемешивание	26
§ 9. Спектральные инварианты	29
§ 10. Лебеговские спектры	34
§ 11. K -системы	38
§ 12. Энтропия	42
Общая литература к главе 2	56
Глава 3. Неустойчивые системы	57
§ 13. U -системы	57
§ 15. Расслоенные структуры, ассоциированные с U -системами	66
§ 16. Структурная устойчивость U -систем	68
§ 17. Эргодические свойства U -систем	73
§ 18. Эргодическая гипотеза Больцмана–Гиббса	78
Общая литература к главе 3	81

ГЛАВА 4. Устойчивые системы	82
§ 19. Качели и соответствующее каноническое отображение	82
§ 20. Неподвижные точки периодических движений	86
§ 21. Инвариантные торы и квазипериодические движения	93
§ 22. Теория возмущений	100
§ 23. Топологическая неустойчивость и усатые торы	108
Общая литература к главе 4	112

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Теорема Якоби	114
Приложение 2. Геодезические потоки на торе	116
Приложение 3. Движение Эйлера–Пуансо	118
Приложение 4. Геодезические потоки на группах Ли	119
Приложение 5. Простой маятник	120
Приложение 6. Измеримые пространства	122
Приложение 7. Изоморфизм преобразования пекаря и схемы Бернулли $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	124
Приложение 8. Несовпадение на всюду плотном множестве пространственного и временного средних	126
Приложение 9. Теорема о равномерном распределении по модулю 1	128
Приложение 10. Приложения эргодической теории к дифференциальной геометрии	130
Приложение 11. Эргодические преобразования торов	131
Приложение 12. Среднее время пребывания траектории в множестве	133
Приложение 13. Среднее движение перигелия	136

Приложение 14. Пример эндоморфизма с перемешиванием	141
Приложение 15. Косые произведения	143
Приложение 16. Дискретный спектр классических систем	145
Приложение 17. Спектры K -систем	151
Приложение 18. Условная энтропия разбиения относительно другого разбиения	157
Приложение 19. Энтропия автоморфизма α	163
Приложение 20. Примеры римановых многообразий отрица- тельной кривизны	168
Приложение 21. Доказательство теоремы Лобачевского–Ада- мара	177
Приложение 22. Доказательство теоремы Синая	189
Приложение 23. Признак структурной устойчивости Андро- нова–Понтрягина	192
Приложение 24. Пример Смейла	195
Приложение 25. Доказательство лемм к теореме Аносова .	200
Приложение 26. Интегрируемые системы	208
Приложение 27. Линейные симплектические отображения плоскости	213
Приложение 28. Устойчивость неподвижных точек	217
Приложение 29. Параметрические резонансы	219
Приложение 30. Метод усреднения для периодических сис- тем	225
Приложение 31. Поверхности сечения	228

Приложение 32. Производящие функции канонических отображений	232
Приложение 33. Глобальные канонические отображения . .	239
Приложение 34. Доказательство теоремы о сохранении инвариантных торов при слабом возмущении канонического отображения	245
Приложение 35. Конструкция Смейла У-диффеоморфизмов	264
Список литературы	266
Предметный указатель	278

Предисловие к английскому изданию

Основная задача механики заключается в вычислении или качественном изучении эволюции динамической системы с заданными начальными условиями.

Численные методы позволяют вычислять траектории на конечных временных интервалах, но неприменимы при бесконечном увеличении времени. Задача трех тел дает типичный пример: существуют ли произвольно малые возмущения начальных данных, при которых одно из тел уходит на бесконечность? На математическом языке задача заключается в исследовании траекторий векторного поля в фазовом пространстве. Будучи далеко не решенной, данная проблема включает в себя различные области научного знания от теории вероятностей и топологии до теории чисел и дифференциальной геометрии. Николá Бурбаки наверняка простит нас за смешивание такого количества областей.

Максвелл, Больцман, Гиббс и Пуанкаре впервые предложили статистическое изучение сложных динамических систем, которое известно сейчас как эргодическая теория¹. Однако математические определения и первые важные теоремы появились благодаря Дж. фон Нейману, Дж. Д. Биркгофу, Э. Хопфу и П. Р. Халмошу, да и то в тридцатых годах нашего столетия. В последние годы появилось новое направление, основанное на теории информации Шеннона. Основным результатом, полученный Колмогоровым, Рохлиным, Синаем и Аносовым основан на глубоком исследовании класса сильно стохастических динамических систем. В этот класс включаются все достаточно неустойчивые классические системы. Среди этих систем особую роль играют геодезические потоки на пространствах отрицательной кривизны. Этот случай изучался Адамаром, Морсом, Хедлундом, Хопфом, Гельфандом, Фоминым. С другой стороны, Синай доказал, что модель Больцмана–Гиббса, которая является системой жестких сфер с упругими столкновениями, принадлежит также к этому классу, что доказывает «эргодическую гипотезу».

¹Эргодическая теория зародилась в механике, но применима к другим областям, такие как теория чисел. Например, как распределена первая десятичная цифра степени 2^n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ...? (См. приложение 12.)

Эта книга ни в коей мере не является законченным трудом по эргодической теории, а ссылки — вполне исчерпывающими.

Представленная в этой книге работа основана на лекциях, прочитанных одним из авторов весной-осенью 1965 года, который также написал главу 4. Второй автор был ответственен за доказательства в главах 1, 2 и 3.

Мы выражаем благодарность профессорам Шоке-Брюа, Х. Кабаннису и П. Герману, Дж. Ковалевскому, Дж. Рибу, Л. Шварцу, Р. Тому и М. Цернеру, которые высоко оценили эти лекции. Также мы благодарим профессора С. Мандельбройта, который предложил написать эту книгу. Конечный вариант рукописи был просмотрен Я. Синаем, который предложил внести некоторые важные изменения, за что мы ему искренне благодарны.

*В. И. Арнольд
А. Авец*

ГЛАВА 1

Динамические системы

В этой главе приведены примеры динамических систем и связанные с ними проблемы.

§ 1. Классические системы

Определение 1.1. *Классическая динамическая система* (M, μ, φ_t) — это набор, состоящий из гладкого многообразия M , меры μ на M с непрерывной положительной плотностью и однопараметрической группы φ_t диффеоморфизмов многообразия M , сохраняющих меру:

$$\mu(A) = \mu(\varphi_t A) \text{ при всех } t \text{ и всех измеримых } A.$$

Параметр t — действительное или целое число: $t \in \mathbb{R}$ или \mathbb{Z} . Если $t \in \mathbb{R}$, то группа φ_t определяется в локальных координатах соотношениями:

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad n = \dim M.$$

Если $t \in \mathbb{Z}$, то φ_t — дискретная группа, порожденная сохраняющим меру диффеоморфизмом $\varphi = \varphi_1$. Такую систему принято обозначать (M, μ, φ) , а φ называется автоморфизмом.

Пример 1.2. *Квазипериодическое движение.* Пусть M — двумерный тор $\{(x, y) \bmod 1\}$, снабженный обычной мерой $dx dy$, а группа φ_t задана соотношениями

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \alpha, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что α — рациональное число: $\alpha = \frac{p}{q}$, p — целое число, q — целое положительное число, взаимно простое с p .

Траектории, соответствующие начальным условиям $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, удовлетворяют уравнению:

$$y = y_0 + \frac{p}{q}(x - x_0) \pmod{1}.$$

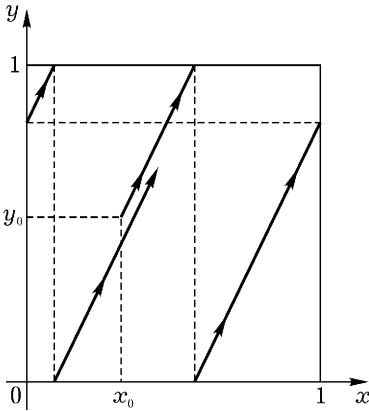


Рис. 1.3

В силу этого, если $x = q + x_0$, то y принимает значение $y_0 + p$ и соответствующая точка на M совпадает с начальной (x_0, y_0) . Таким образом, тор M покрывается замкнутыми траекториями. Если α — иррациональное число, то каждая орбита всюду плотна (Якоби, 1835; см. приложение 1).

В более общем случае, пусть $\mathbb{T}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \bmod 1\}$ — n -мерный тор, снабженный мерой $dx^1 \dots dx^n$, и φ_t — однопараметрическая группа, определяемая соотношениями

$$\dot{x}^i = \omega^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \omega^i \in \mathbb{R}.$$

Каждая орбита всюду плотна на \mathbb{T}^n тогда и только тогда, когда из того, что $k_1\omega^1 + \dots + k_n\omega^n = 0$ при $k_i \in \mathbb{Z}$, следует, что $k_1 = \dots = k_n = 0$.

ПРИМЕР 1.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ. Пусть $M = T_1V$ — унитарное касательное расслоение над компактным римановым многообразием V . Единичный вектор $\xi \in T_1V_x$, касательный к V в точке x , однозначно определяет геодезическую γ , имеющую в точке x касательный вектор ξ . Обозначим через $\gamma(\xi, s)$ точку, полученную движением из x за время s по этой геодезической со скоростью 1, и через

$$G_t\xi = \left. \frac{d}{ds}\gamma(\xi, s) \right|_{s=t} \in T_1V_{\gamma(\xi, t)} \quad (1.5)$$

единичный вектор, касательный к γ в точке $\gamma(\xi, t)$.

Формула (1.5) определяет однопараметрическую группу диффеоморфизмов:

$$G_t: M \rightarrow M, \quad M = T_1V.$$

Определение 1.6. Группа G_t называется *геодезическим потоком* на V .

Можно показать, что G_t сохраняет меру μ , индуцированную на M метрикой многообразия V (теорема Лиувилля).

ЧАСТНЫЕ ПРИМЕРЫ 1.7. Описание геодезического потока на обычном торе в евклидовом пространстве E^3 имеется в приложении 2, на эллипсоиде — в работе Кагана [1] и на группах Ли, снабженных левоинвариантной метрикой, — в приложениях 3 и 4.

Наконец, заметим, что в механике геодезический поток известен под названием «движение материальной точки, вынужденной перемещаться по гладкой поверхности V и не подверженной действию никакой внешней силы».

Другие механические системы приводят к более общим потокам.

ПРИМЕР 1.8. ГАМИЛЬТОНОВЫЕ ПОТОКИ. Пусть $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ (кратко — p, q) — система координат в \mathbb{R}^{2n} , $H(p, q)$ — гладкая функция. Система $2n$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.9)$$

определяет однопараметрическую группу диффеоморфизмов пространства \mathbb{R}^{2n} . Эта группа называется гамильтоновым потоком в \mathbb{R}^{2n} .

Теорема Лиувилля 1.10. Гамильтонов поток сохраняет меру $dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n$.

Доказательство.

Дивергенция поля векторов (1.9) равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема о сохранении энергии 1.11. Функция H есть первый интеграл системы уравнений (1.9).

Доказательство.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Обозначим через M поверхность уровня $H(p, q) = h$. При почти всех h M есть многообразие. Это многообразие инвариантно относительно потока.

Следствие 1.12. Существует инвариантная мера на многообразии M .

Доказательство.

Инвариантная мера на M определяется соотношением

$$d\mu = \frac{d\sigma}{\|\text{grad } H\|},$$

где $\|\cdot\|$ — длина, σ — элемент объема многообразия M , индуцированный метрикой пространства \mathbb{R}^{2n} .

Если система (1.9) имеет несколько первых интегралов I_1, I_2, \dots, I_k , то уравнения (1.9) определяют классическую динамическую систему на каждом многообразии размерности $2n - k$, задаваемом равенствами $I_1 = h_1, \dots, I_k = h_k$, где h_1, \dots, h_k — константы. ■

ЧАСТНЫЙ ПРИМЕР 1.13. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ. В этом случае гамильтониан H равен

$$H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2).$$

Система (1.9) имеет два первых интеграла:

$$I_1 = p_1^2 + q_1^2, \quad I_2 = p_2^2 + q_2^2.$$

Соответствующие поверхности уровня имеют вид двумерных торов. Динамические системы, индуцированные на этих торах, изоморфны динамическим системам из примера (1.2).

Другие примеры приведены в приложении 5.

Замечание 1.14. Глобальные гамильтоновы потоки. Пространство \mathbb{R}^{2n} в примере 1.8 можно заменить симплектическим¹ многообразием M^{2n} размерности $2n$, а H — замкнутой 1-формой $\omega_1 (= dH)$. Тогда систему (1.9) можно записать в виде

$$\dot{x} = I\omega_1, \quad x \in M^{2n},$$

где $I: T^*M_x \rightarrow TM_x$ определяется как

$$\omega(I\omega_1, \xi) = \omega_1(\xi) \quad \text{при всех } \xi \in TM_x.$$

Приведем теперь примеры систем с дискретным временем $t \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 1.15. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТОРА. Пусть M — тор $\{(x, y) \bmod 1\}$, снабженный мерой $d\mu = dx dy$. Автоморфизм φ определяется как

$$\varphi(x, y) = (x + \omega_1, y + \omega_2) \pmod{1}, \quad \omega_i \in \mathbb{R}.$$

Если $1, \omega_1, \omega_2$ рационально несоизмеримы, то каждая траектория группы

$$\{\varphi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

всюду плотна на M (см. приложение 1).

¹Симплектическим многообразием M^{2n} называется гладкое многообразие с симплектической структурой, заданной замкнутой 2-формой ω ранга n . ПРИМЕР: $\omega = dp \wedge dq$ на \mathbb{R}^{2n} .

ПРИМЕР 1.16. АВТОМОРФИЗМЫ ТОРА. M и μ — такие же, как в предыдущем примере, автоморфизм φ определяется соотношением

$$\varphi(x, y) = (x + y, x + 2y) \pmod{1}.$$

На плоскости это — линейное преобразование с матрицей

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

имеющей детерминант, равный 1. Следовательно, φ сохраняет меру μ . На рисунке 1.17 изображены образы множества A под действием сначала отображения φ , а затем отображения φ^2 . Матрица $\tilde{\varphi}$ имеет два действительных собственных значения λ_1 и λ_2 :

$$0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1.$$

Следовательно, при достаточно большом n образ $\tilde{\varphi}^n A$ имеет вид очень длинной и очень узкой полоски плоскости (x, y) .

На $\mathbb{T}^2 = M$ эта полоса располагается примерно в окрестности конечного отрезка орбиты системы:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \lambda_2 - 1.$$

По теореме Якоби (пример 1.2), поскольку $\lambda_2 - 1$ — иррациональное число, $\varphi^n A$ стремится к винтовой линии, всюду плотно заполняющей тор при $n \rightarrow +\infty$.

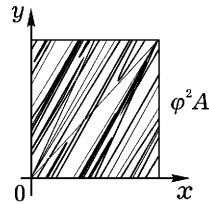
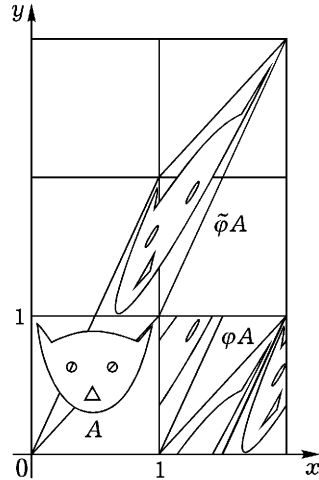


Рис. 1.17

§ 2. Абстрактные динамические системы

Определение 2.1². *Абстрактной динамической системой* (M, μ, φ_t) называется набор, состоящий из измеримого пространства M с мерой μ и группы φ_t автоморфизмов mod 0, сохраняющих меру

$$\mu(\varphi_t A) = \mu(A)$$

при всех t и всех измеримых A ; φ_t измерима на $M \times \mathbb{R}$.

²Относительно этих понятий см. приложение 6.

В дальнейшем (M, μ) — всегда *пространство Лебега* без атомов, т. е. изоморфно по модулю 0 отрезку $[0, 1]$, снабженному обычной мерой Лебега. В частности, $\mu(M) = 1$.

Если φ_t — дискретная группа, порожденная автоморфизмом φ , то такую систему мы будем обозначать (M, μ, φ) .

В дальнейшем мы будем опускать термин mod 0. Все ранее рассмотренные системы принадлежат к числу абстрактных динамических систем. Каждое компактное риманово многообразие M , снабженное естественной мерой μ , $\mu(M) = 1$, изоморфно отрезку $[0, 1]$.

ПРИМЕР 2.2 СХЕМА БЕРНУЛЛИ.

Пространство M . Пусть $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ — множество, элементами которого служат n первых неотрицательных целых чисел; $M = \mathbb{Z}_n^{\mathbb{Z}}$ — прямое произведение счетного числа экземпляров множеств \mathbb{Z}_n . Тогда элементы M — двусторонние бесконечные последовательности элементов \mathbb{Z}_n :

$$m \in M, \quad m = \dots a_{-1}, a_0, a_1, \dots, \quad \text{где } a_i \in \mathbb{Z}_n.$$

Измеримая σ -алгебра множества M . Это — σ -алгебра, порожденная множествами вида:

$$A_i^j = \{m \mid a_i = j\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}_n.$$

Мера μ . Определим нормированную меру μ на \mathbb{Z}_n , положив

$$\mu(0) = p_0, \dots, \mu(n-1) = p_{n-1}, \quad \sum p_i = 1.$$

Пусть $\mu(A_i^j) = p_j$ при всех i и j . Мера на σ -алгебре есть прямое произведение мер, т. е. мера пересечения различных генераторов A_i^j есть произведение их мер:

$$\mu\{m \mid a_{i_1} = j_1, \dots, a_{i_k} = j_k\} = p_{j_1} \dots p_{j_k}$$

Очевидно, что (M, μ) образует пространство Лебега.

Автоморфизм φ . Это — сдвиг. Если $m = (\dots, a_i, \dots)$, то

$$\varphi(m) = (\dots, a'_i, \dots),$$

где $a'_i = a_{i-1}$ при всех i .

Ясно, что φ — биективное отображение; чтобы доказать, что оно сохраняет меру, достаточно рассмотреть сдвиг генераторов:

$$\varphi(A_i^j) = \{\varphi(m) \mid a_i = j\} = \{m' \mid a'_{i+1} = j\} = A_{i+1}^j,$$

следовательно,

$$\mu[\varphi(A_i^j)] = \mu[A_{i+1}^j] = p_j = \mu(A_i^j).$$

Обозначения. Динамическая система, построенная выше, называется схемой Бернулли. Ее принято обозначать $B(p_0, \dots, p_{n-1})$.

Замечание. Случай $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ соответствует игре «орел или решка», которую исследовал Я. Бернулли. Элементами $M = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}$ служат двухсторонние бесконечные последовательности исходов бросаний: 0 — орел, 1 — решка. Множество A_i^0 (соответственно A_i^1) представляет собой множество исходов бросаний, в котором после i -го бросания выпал «орел» (соответственно выпала «решка»). Поэтому естественно положить

$$\mu(A_i^j) = \text{prob}(A_i^j) = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕКАРЯ. Пусть M — тор $\{(x, y) \bmod 1\}$, снабженный мерой $dx dy$. Автоморфизм φ' определяется соотношениями

$$\varphi'(x, y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{1}{2}y\right) \bmod 1, & \text{при } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \left(2x, \frac{1}{2}(y+1)\right) \bmod 1, & \text{при } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Для изучения φ' удобно ввести индуцированное преобразование $\tilde{\varphi}'$ в накрывающей плоскости (x, y) . Действие $\tilde{\varphi}'$ можно описать следующим образом: сначала совершаем аффинное преобразование квадрата, при котором в направлении Ox происходит растяжение в 2 раза, а в направлении оси Oy — сжатие в 2 раза. Затем отрезаем правую половину от получившегося прямоугольника и помещаем ее сверху левой (см. рис. 2.4). Если $A \subset M$ и число n стремится к $+\infty$, то $\varphi'^n A$ состоит из «очень большого числа» отрезков, параллельных Ox .

Упомянем теперь о некоторых проблемах теории динамических систем.

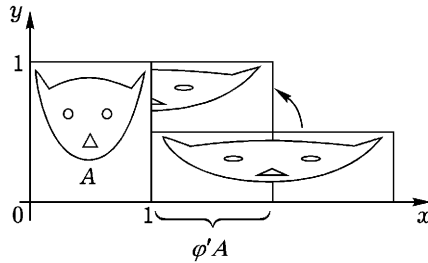


Рис. 2.4

§ 3. Проблемы вычисления средних

ПРИМЕР 3.1. Занимаясь теорией движения планет, Лагранж [1] пришел к следующей задаче: вычислить (если он существует) предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Arg} \sum_{k=1}^3 a_k e^{i\omega_k t},$$

где $a_k > 0$, a_k и ω_k — действительные константы, а $\operatorname{Arg} z$ означает «аргумент комплексного числа z ».

ПРИМЕР 3.2. Свяжем с последовательностью $\{2^n \mid n = 1, 2, \dots\}$ последовательность первых цифр десятичной записи ее членов:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$$

Пусть $\tau(7, N)$ — число, показывающее, сколько раз цифра 7 фигурирует среди N первых членов построенной последовательности. Требуется вычислить предел (если он существует)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(7, N)}{N} = p_7.$$

ПРИМЕР 3.3. Пусть D — область риманова пространства, $\gamma(t)$ — геодезическая. Чему равно среднее время, которое $\gamma(t)$ проводит в D ? Другими словами, пусть

$$\tau(T) = \text{мера} \{t \mid 0 \leq t \leq T, \gamma(t) \in D\}$$

и требуется вычислить предел (если он существует)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(T)}{T}.$$

Три предыдущие задачи являются частными случаями более общей задачи:

Пусть f — комплекснозначная, μ -измеримая функция, определенная на пространстве M динамической системы (M, μ, φ_t) . Требуется вычислить предел (если он существует)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t m) dt, \quad \text{где } m \in M.$$

В примере (3.3) f является характеристической функцией $T_1 D$. Само собой разумеется, что существуют и другие задачи вычисления средних.

ПРИМЕР 3.4. Пусть (M, μ, φ_t) — динамическая система, A и B — два измеримых множества многообразия M . Требуется вычислить предел (если он существует)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu[\varphi_t A \cap B]$$

(см. рис. 1.17 и 2.4).

Предполагается, что для «достаточно стохастических» систем этот предел равен $\mu(A) \cdot \mu(B)$.

§ 4. Проблемы классификации. Изоморфизм абстрактных динамических систем

Для того, чтобы провести классификацию динамических систем, естественно искать их инварианты относительно соответствующей группы: группы аффинных преобразований для геодезических потоков, группы канонических преобразований для гамильтоновых систем, группы сохраняющих меру диффеоморфизмов для классических систем. Абстрактные инварианты имеют более глубокий смысл и задаются следующим определением.

Определение 4.1. Две абстрактные динамические системы (M, μ, φ) и (M', μ', φ') изоморфны, если существует изоморфизм $f: M \rightarrow M'$ (mod 0) измеримых пространств такой, что нижеприведенная диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} M' & & M' \\ & \varphi' & \\ & & \end{array}$$

Аналогичное определение мы получим, если φ заменить на φ_t .

ПРИМЕР 4.2. Схемы Бернулли $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ и $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ изоморфны (см. Мешалкин [1], Blum and Hanson [1]).

ПРИМЕР 4.3. Преобразования тора (1.15) не изоморфны автоморфизмам тора (1.16) (см. гл. 2, 12.40).

ПРИМЕР 4.4. Рассмотрим на торе $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \bmod 1\}$, снабженном метрикой $dx dx$, автоморфизмы φ и φ' :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= (3x + y, 2x + y) \pmod{1}, \\ \varphi'(x, y) &= (3x + 2y, x + y) \pmod{1}.\end{aligned}$$

Они оба неизоморфны автоморфизмам из примера (1.16) (см. гл. 2, следствие 12.30), однако вопрос об изоморфизме систем (M, μ, φ) и (M, μ, φ') до сих пор остается открытым.

ПРИМЕР 4.5. Схема Бернулли $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ изоморфна преобразованию пекаря (доказательство см. в приложении 7).

Одна из фундаментальных проблем эргодической теории состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, при которых две схемы Бернулли изоморфны.

§ 5. Проблемы общего случая

Принимая во внимание разнообразие динамических систем, можно ожидать, что ситуацию удастся прояснить, если пренебречь «исключительными» случаями. Чтобы придать смысл понятию «исключительные», группу автоморфизмов можно снабдить топологией или мерой. Некий класс динамических систем может быть исключительным в абстрактных рамках и общим — в рамках классических или наоборот.

ПРИМЕР 5.1. Существуют абстрактные динамические системы, не реализуемые диффеоморфизмами компактных многообразий (см. гл. 2, 12.39).

ПРИМЕР 5.2. Системы с «перемешиванием» в абстрактных рамках принадлежат к числу исключительных в смысле слабой топологии (см. Халмош [1], Рохлин [1]). Наоборот, все диффеоморфизмы, близкие (в C^1 -топологии) к автоморфизму тора из примера 1.16, — «перемешивающие» (см. [3]).

Следовательно, в классических рамках «перемешивание» может быть общим случаем.

ПРИМЕР 5.3. В абстрактных рамках эргодические системы являются общим случаем в смысле слабой топологии (см. Халмош [1]). Наоборот, гамильтоновы системы на $H = \text{const}$, окрестностях геодезического потока на торе (см. приложение 2), не эргодичны. См. также систему трех тел (гл. 4).

Таким образом, в классических рамках эргодичность не является общим случаем.

Общая литература к главе 1

- [1] R. Abraham, *Foundation of Mechanics*. Benjamin, 1967.
- [2] Д. Д. Биркгоф, *Динамические системы*. М.-Л.: ОГИЗ, 1941.
- [3] С. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique*. Hermann, Paris, 1968.
- [4] P. R. Halmos, *Measure Theory*. Chelsea, New York, 1958.
- [5] P. R. Halmos, *Lecture on Ergodic Theory*. Chelsea, New York, 1959.
- [6] Е. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*. ОНТИ НКТП СССР, 1937.

ГЛАВА 2

Эргодические свойства

Для описания свойств орбит в метрической теории динамических систем вводится целый набор понятий: эргодичность, перемешивание, спектр, энтропия и т. д. Определения этих понятий приведены в данной главе. Их приложения к описанию классических систем см. в главах 3 и 4.

§ 6. Временные и пространственные средние

Определение 6.1. Временное среднее. Пусть (M, μ, φ_t) — динамическая система. *Временным средним* (если оно существует) функции f на M по определению называется величина

$$f^*(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi^n x), \quad x \in M, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad (6.2)$$

в дискретном случае и величина

$$f^*(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t x) dt, \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R} \quad (6.2)'$$

в непрерывном случае.

Определение 6.3. Пространственное среднее. По определению, *пространственным средним* называется величина

$$\bar{f} = \int_M f(x) d\mu$$

(напомним, что $\mu(M) = 1$).

Теорема 6.4 (Дж.Д. Биркгоф – А.Я. Хинчин¹). Пусть (M, μ, φ_t) — абстрактная динамическая система, $f \in L_1(M, \mu)$ — μ -суммируемая комплекснозначная функция на M . Тогда:

- a) $f^*(x)$ существует почти всюду (сокращенно: п. в.), т. е. всюду, за исключением, может быть, множества меры нуль;
- b) $f^*(x)$ — μ -суммируема и инвариантна п. в., т. е. $f^*(\varphi_t x) = f^*(x)$ при всех t , за исключением, может быть, множества меры нуль, независимо от t ;
- c)

$$\int_M f^*(x) d\mu = \int_M f(x) d\mu.$$

Для дискретного случая доказательство можно найти у Халмоща [1], а для непрерывного — у Немыцкого и Степанова [1].

Замечание 6.5. Временное среднее f^* может не существовать или не быть равным пространственному среднему $\bar{f}(x)$ на множестве, всюду плотном в M , даже если f — аналитическая функция и (M, μ, φ_t) — классическая система (см. примеры 1.2 и 1.15, а также приложение 8).

Замечание 6.6. При сдвигах на торе (гл. 1, примеры 1.2 и 1.15) f^* существует всюду, если функция f непрерывна или интегрируема в смысле Римана (см. приложение 9).

§ 7. Эргодичность

Определение 7.1. Абстрактная динамическая система (M, μ, φ_t) называется *эргодической*, если для любой μ -суммируемой комплекснозначной функции $f \in L_1(M, \mu)$ ее временное среднее равно ее пространственному среднему п. в.:

$$f^*(x) = \overline{f(x)} \quad \text{п. в.} \quad (7.2)$$

Таким образом, для эргодической системы временное среднее не зависит от начальной точки x .

¹Относительно приложений этой теоремы в дифференциальной геометрии см. приложение 10.

ПРИМЕР 7.3. Пусть M — объединение двух непересекающихся множеств M_1 и M_2 положительной меры и инвариантных относительно φ (см. рис. 7.4):

$$\varphi M_1 = M_1, \quad \varphi M_2 = M_2.$$

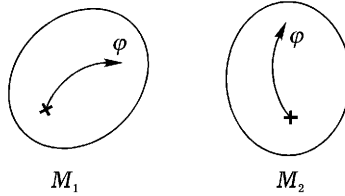


Рис. 7.4

При этих условиях принято говорить, что система (M, μ, φ) разложима. Разложимая система не эргодична, поскольку, если положить

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in M_1, \\ 0 & \text{при } x \in M_2, \end{cases}$$

то временное среднее $f^* = f(x)$ зависит от x .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Верно и обратное утверждение: если система (M, μ, φ) не эргодична, то она разложима.

Действительно, если система не эргодична, то существует функция f , временное среднее $f^*(x)$ которой зависит от x и отлично от константы почти всюду.

Положим

$$M_1 = \{x \mid f^*(x) < a\}, \quad M_2 = \{x \mid f^*(x) \geq a\}.$$

При подходящем выборе a справедливы неравенства

$$\mu(M_1) > 0, \quad \mu(M_2) > 0.$$

По теореме Биркгофа временное среднее инвариантно относительно φ , следовательно,

$$\varphi M_1 = M_1, \quad \varphi M_2 = M_2,$$

и наша система разложима.

Следствие 7.6. *Абстрактная динамическая система эргодична в том и только том случае, если она неразложима, т. е. если все инвариантные измеримые множества имеют меру 0 или 1.*

Приведенное выше рассуждение доказывает также, что система эргодична в том и только том случае, если любая инвариантная функция $f \in L_1(M, \mu)$ постоянна п. в.

ПРИМЕР 7.7. Гамильтонов поток (гл. 1, теорема 1.11) никогда не бывает эргодическим, поскольку энергия H — инвариантная функция. Тем не менее, геодезический поток на унитарном касательном расслоении в некоторых случаях может быть эргодическим (см. гл. 3, 17.12). Однако если V обычный тор, то геодезические потоки на T_1V неэргодичны, поскольку функция $\dot{\psi}(1+r \cos \psi)^2$ является инвариантом (см. приложение 2)².

ПРИМЕР 7.8. Вращение $\varphi: x \rightarrow x + \alpha \pmod{1}$ окружности $M = \{x \pmod{1}\}$ эргодично в том и только том случае, если число α иррационально.

Доказательство.

Пусть сначала число α рационально. Положим $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, q положительно и взаимно просто с p . Поскольку функция $f(x) = e^{2\pi i q x}$ инвариантна, отлична от константы и измерима, то система (M, μ, φ) не эргодична.

Теперь предположим, что число α иррационально. Пусть A — множество с положительной мерой, инвариантное относительно φ ; в дальнейшем мы докажем, что $\mu(A) = 1$. Поскольку $\mu(A) > 0$, A содержит точку накопления x_0 , т.е. при любом $\varepsilon > 0$ найдется интервал $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (длина которого зависит от ε) такой, что

$$\mu(A \cap I) \geq (1 - \varepsilon)\mu(I).$$

Из инвариантности A и μ получаем

$$\mu(A \cap \varphi^n I) \geq (1 - \varepsilon)\mu(\varphi^n I).$$

Таким образом, если n_1, \dots, n_k такие целые числа, для которых отрезки $\varphi^{n_1} I, \dots, \varphi^{n_k} I$ не пересекаются, получаем

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^k \mu(A \cap \varphi^{n_i} I) \geq (1 - \varepsilon)\mu\left(\sum_{i=1}^k \varphi^{n_i} I\right).$$

²Точно также при возмущениях этой метрики на T^2 геодезический поток не является эргодическим (см. гл. 4).

С другой стороны, траектории, соответствующие концам отрезка I , всюду плотны (см. теорему Якоби в приложении 1). Так как $\mu(I) \leq \varepsilon$, существуют целые числа n_1, \dots, n_k , при которых множества $\varphi^{n_1} I, \dots, \varphi^{n_k} I$ не пересекаются и покрывают M с точностью до множества меры 2ε . Следовательно,

$$\mu\left(\sum_{i=1}^k \varphi^{n_i} I\right) \geq 1 - 2\varepsilon$$

и

$$\mu(A) \geq (1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon).$$

Поскольку ε произвольно, $\mu(A) = 1$ и система эргодична. С помощью подобных рассуждений доказывается, что системы из примеров (1.2) и (1.15) эргодичны вследствие того, что их траектории всюду плотны (см. приложение 11).

Другие примеры см. в приложениях 12 и 13. ■

§ 8. Перемешивание

Пусть M — шейкер, наполненный несжимаемой жидкостью, состоящей на 10% из джина и на 90% из мартини (см. рис. 8.1). Предположим, что первоначально часть A в M занята джином. После n встряхиваний φ содержание джина в произвольном объеме B шейкера будет равно

$$\frac{\mu(\varphi^n A \cap B)}{\mu(A)}.$$

Физически естественно ожидать, что после достаточно большого числа встряхиваний ($n \rightarrow \infty$) доля джина в любом объеме B внутри M будет порядка 10%.

Эта приводит к следующему определению.

Определение 8.2. Абстрактная динамическая система (M, μ, φ_t) есть *перемешивание*, если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu[\varphi_t A \cap B] = \mu(A) \cdot \mu(B) \quad (8.3)$$

для любой пары измеримых множеств A и B .

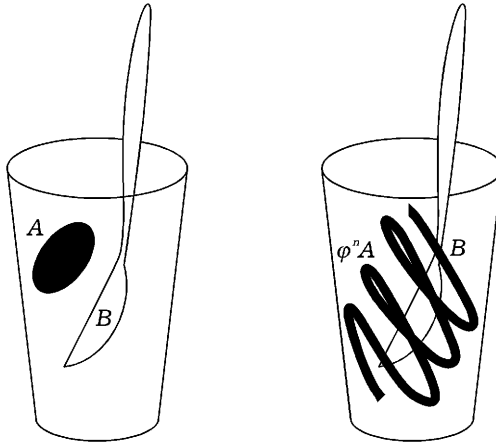


Рис. 8.1

Очевидно, что динамическая система, изоморфная перемешивающей, сама обладает свойством перемешивания. Таким образом, перемешивание является инвариантным свойством динамических систем.

Следствие 8.4. *Динамическая система с перемешиванием эргодична.*

Доказательство.

Пусть A — инвариантное измеримое множество. Полагая $B = M \setminus A$, получаем:

$$\varphi_t A \cap B = A \cap B = \emptyset.$$

С учетом соотношения (8.3) это означает, что $\mu(A) \cdot \mu(B) = 0$, откуда $\mu(A) = 0$ или 1. ■

Следующий пример показывает, что обратное неверно: эргодическая система не обязательно должна быть с перемешиванием³.

ПРИМЕР 8.5. Динамическая система $M = \{x \pmod{1}\}$, $\varphi = x \rightarrow x + \alpha \pmod{1}$ эргодична, если число α иррационально (пример 7.8). Эта система не есть перемешивание, поскольку образом малого отрезка A служит отрезок той же длины, пересечение которого с другим малым

³Наоборот, если $\mu(M) = \infty$, то справедлив следующий результат (А.В. На́жан [1]):

Пусть (M, μ, φ_t) — эргодическая система с $\mu(M) = \infty$, A и B — два измеримых множества. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдутся сколь угодно большие действительные t такие, что $\mu[\varphi_t A \cap B] < \varepsilon$.

отрезком B то пусто, то положительной меры. Например, эргодические преобразования торов (примеры 1.2 и 1.15, глава 1) не могут быть перемешиванием.

ПРИМЕР 8.6. Сравнение рис. 1.17, 2.4 и 8.1 наводит на предположение о том, что автоморфизм тора T^2 из примера 1.16 и схемы Бернулли являются перемешиванием. Позднее мы докажем это предположение (см. 10.5 и 10.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.7. Понятие перемешивание для динамических систем (M, μ, φ) можно определить и в том случае, когда φ — эндоморфизм (см. приложение 6), не будучи автоморфизмом (см. приложение 14).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.8. Существует одно понятие, занимающее промежуточное положение между понятиями эргодичности и перемешивания, которое также является инвариантом эргодических систем — понятие слабого перемешивания (см. Халмош [1]).

Мы говорим, что динамическая система (M, μ, φ_t) обладает свойством слабого перемешивания, если

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mu(\varphi_t A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B)| dt = 0$$

в непрерывном случае и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(\varphi^n A \cap B) - \mu(A) \cdot \mu(B)| = 0$$

в дискретном случае для любой пары измеримых множеств A и B . Р. В. Шапон (неопубликовано) доказал, что если система (M, μ, φ) эргодична, то существует измеримое изменение модуля скорости, которое реализует слабое перемешивание.

В. А. Рохлин [1] вводит понятие перемешивания n -го порядка (см. Халмош [1]) как новый инвариант динамических систем: динамическая система (M, μ, φ_t) по определению есть перемешивание n -го порядка, если

$$\lim_{\substack{\inf_{i \neq j} |t_i - t_j| \rightarrow +\infty \\ i=1, \dots, n}} \mu[\varphi_{t_1} A_1 \cap \varphi_{t_2} A_2 \cap \dots \cap \varphi_{t_n} A_n] = \prod_{i=1}^n \mu(A_i)$$

при любом наборе измеримых множеств A_1, \dots, A_n . Обычное перемешивание есть частный случай ($n = 2$). Остается открытым вопрос, существует ли перемешивание, которое не является перемешиванием порядка $n > 2$.

§ 9. Спектральные инварианты

Пусть (M, μ, φ) — абстрактная динамическая система. Обозначим через $L_2(M, \mu)$ гильбертово пространство определенных на M комплекснозначных функций, квадрат модуля которых μ -суммируем. Если $f, g \in L_2(M, \mu)$, то положим

$$\langle f | g \rangle = \int_M f \bar{g} d\mu,$$

где \bar{z} — величина, комплексно сопряженная с величиной z ,

$$\|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle}.$$

Определение 9.1. Пусть $f \in L_2(M, \mu)$. Положим

$$U f(x) = f(\varphi(x)). \quad (9.2)$$

Тогда отображение U называется *оператором, индуцированным φ* .

Теорема 9.3 (Купман [1]). U — унитарный оператор на $L_2(M, \mu)$.

Доказательство.

а) U линеен: если $a, b \in \mathbb{C}$, $f, g \in L_2(M, \mu)$, то

$$U(af + bg) = (af + bg) \circ \varphi = a(f \circ \varphi) + b(g \circ \varphi) = a \cdot Uf + b \cdot Ug.$$

б) U есть биективное отображение, так как φ обратим п. в.

в) U есть изометрия, поскольку φ сохраняет меру; действительно, если положить $\varphi(y) = x$, то

$$\begin{aligned} \|Uf\|^2 &= \int_M |f(\varphi(y))|^2 d\mu(y) = \int_M |f(\varphi(y))|^2 d\mu(\varphi(y)) = \\ &= \int_M |f(x)|^2 d\mu(x) = \|f\|^2. \end{aligned}$$

■

Замечание 9.4. В непрерывном случае (M, μ, φ_t) мы получим непрерывную однопараметрическую группу U_t унитарных операторов.

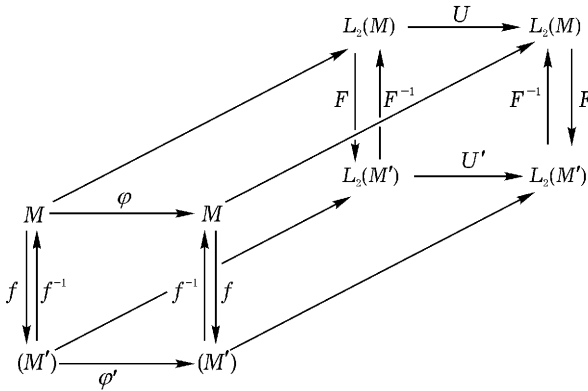


Рис. 9.6

Определение 9.5. Ясно, что если две динамические системы (M, μ, φ) и (M', μ', φ') изоморфны (см. определение 4.1), то они определяют эквивалентные унитарные операторы U и U' , т.е. существует изоморфизм $F: L_2(M, \mu) \rightarrow L_2(M', \mu')$ что $U' = FUF^{-1}$ в соответствии с диаграммой на рис. 9.6 (где $U' = F \cdot U \cdot F^{-1}$).

Следовательно, инварианты оператора U являются некоторыми инвариантами динамической системы (M, μ, φ) . Такие инварианты называются спектральными. Интерес к ним вызван, в частности, тем, что можно найти полную систему спектральных инвариантов оператора U : меры и спектральные кратности (относительно этих понятий см. Халмош [3]). Например, спектр оператора U есть спектральный инвариант⁴.

Наоборот, операторы U и U' двух динамических систем могут быть эквивалентны (о таких системах говорят, что они одного и того же спектрального типа) без того, чтобы эти системы были изоморфными (см. гл. 2, § 12. Энтропия. См. также о «косых произведениях» Анзай [1] в приложении 15).

⁴В непрерывном случае, если U_t — индуцированная унитарная группа, то спектр U_t есть спектр ее инфинитезимального оператора, а также спектр, связанный с разложением единицы E , для которого по теореме Стоуна

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \lambda t} dE(\lambda).$$

Ниже мы приводим несколько примеров эргодических свойств, которые допускают точный перевод на спектральный язык.

Теорема 9.7 (Эргодичность). Система (M, μ, φ) эргодична в том и только том случае, если 1 — простое собственное число индуцированного оператора U .

Доказательство.

Если f принадлежит $L_2(M, \mu)$, то f инвариантна тогда и только тогда, когда $Uf = f$. Но φ эргодично тогда и только тогда, когда все инвариантные функции постоянны п. в. Поскольку постоянные п. в. функции отличаются друг от друга с точностью до умножения на константу, φ эргодично тогда и только тогда, когда подпространство решений уравнения $Uf = f$ имеет размерность 1.

В непрерывном случае эргодичность φ_t эквивалентна тому, что собственное число $\lambda = 0$ имеет кратность 1 в спектре U_t . ■

Теорема 9.8 (Перемешивание). Динамическая система (M, μ, φ) обладает свойством перемешивания в том и только том случае, если при любых $f, g \in L_2(M, \mu)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle U_t f \mid g \rangle = \langle f \mid 1 \rangle \cdot \langle 1 \mid g \rangle. \quad (9.9)$$

Доказательство.

Если f и g — характеристические функции подмножества многообразия M , то (9.9) сводится к определению перемешивания (8.2). В общем случае функции f и g могут быть аппроксимированы линейными комбинациями характеристических функций, и мы снова возвращаемся к предыдущему случаю. ■

В спектральных терминах ясно, что система (M, μ, φ_t) обладает перемешиванием, если она эргодична и спектр U_t (за исключением $\lambda = 0$) абсолютно непрерывен относительно меры Лебега. Обратное утверждение неверно. Мы говорим, что эргодическая динамическая система имеет собственно непрерывный спектр, если константы являются единственными собственными функциями операторов U_t . Можно доказать, что для того, чтобы эргодическая динамическая система имела собственно непрерывный спектр, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо перемешиванием (см. примечание 8.9).

Рассмотрим теперь случай, когда спектр операторов U_t дискретен.

ПРИМЕР 9.10. Пусть $M = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ — окружность, снабженная обычной мерой μ ,

$$\varphi = \theta \cdot z, \quad \theta = e^{2\pi i \omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

— сдвиг на M .

По определению оператора U ,

$$Uz^p = (Uz)^p = \theta^p \cdot z^p, \quad \text{где } p \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, z^p — собственные функции оператора U с соответствующими собственными значениями θ^p . Множество $\{z^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$, называемое дискретным спектром оператора U , образует полную ортонормированную систему в $L_2(M, \mu)$. Тем самым мы приходим к следующему определению.

Определение 9.11. Динамическая система (M, μ, φ) есть *система с чисто точечным спектром*, если собственные функции индуцированного оператора U образуют базис в $L_2(M, \mu)$.

Вернемся к примеру 9.10. По теореме 9.7 эта система эргодична в том и только в том случае, если 1 — простое собственное значение. Таким образом, необходимое и достаточное условие эргодичности заключается в том, что

$$p\omega \notin \mathbb{Z} \quad \text{при } p \neq 0,$$

т. е. число ω должно быть иррациональным. Иначе говоря, наша система (M, μ, φ) эргодична в том и только том случае, если траектории плотны на M (см. пример 7.8 и приложение 1). В этом последнем случае все собственные значения θ^p различны и просты. Наша система — не перемешивающая, так как, полагая в (9.9) $f = g = z^p$, мы получаем

$$\langle U^n z^p \mid z^p \rangle = \theta^{pn} \neq \langle f \mid 1 \rangle \langle 1 \mid f \rangle.$$

Если $p \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^{pn}$ не существует и условие (9.9) не выполняется. Этот результат допускает непосредственное обобщение на n -мерный тор.

Приведенный пример наводит на мысль о следующей теореме.

Теорема 9.12. Пусть (M, μ, φ) — эргодическая динамическая система, U — оператор, индуцированный диффеоморфизмом φ . Тогда:

- a) абсолютная величина любой собственной функции оператора U есть константа п. в.;
- b) каждое собственное значение просто;
- c) множество всех собственных значений оператора U образует подгруппу окружности $\{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$;
- d) если система (M, μ, φ) перемешивающая, то единственное собственное значение равно 1.

Доказательство.

Пусть f — собственная функция, отвечающая собственному значению λ :

$$Uf = \lambda f.$$

Так как U — унитарный оператор, $|\lambda| = 1$; следовательно, $U|f| = |f|$. Отсюда мы заключаем, что величина $|f|$ инвариантна; поскольку система эргодична, это означает (см. следствие 7.6), что

$$|f| = \text{const} \quad \text{п. в.}$$

В частности, $f \neq 0$ п. в. и $|f|^2 \in L_2(M, \mu)$.

Пусть h — другая собственная функция, отвечающая тому же собственному значению λ , что и f . Поскольку $f \neq 0$ п. в., то можно составить отношение $\frac{h}{f} \in L_2(M, \mu)$ и убедиться, что

$$U\left(\frac{h}{f}\right) = \frac{Uh}{Uf} = \frac{\lambda h}{\lambda f} = \frac{h}{f}.$$

Следовательно, $\frac{h}{f}$ — инвариант. Поскольку система эргодична, делаем вывод, что

$$h = \text{const} \cdot f \quad \text{п. в.}$$

Таким образом, собственные значения простые, что доказывает (b).

Из того, что $Uf = \lambda f$, мы заключаем, что $U\bar{f} = \bar{\lambda}\bar{f}$; следовательно, $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ — собственное значение. Пусть μ — некоторое собственное значение, g — соответствующая ему собственная функция. Тогда

$$U(f \cdot g) = Uf \cdot Ug = (\lambda\mu)(f \cdot g).$$

Следовательно, $\lambda\mu$ — собственное значение. Это доказывает (c).

Наконец, если система (M, μ, φ) — перемешивающая, то, выбирая в качестве f и g в (9.9) собственную функцию, отвечающую собственному значению λ , получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U^n f \mid f \rangle = \langle f \mid 1 \rangle \cdot \langle 1 \mid f \rangle,$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \text{const.}$$

Таким образом, $\lambda = 1$. Это доказывает пункт (d). ■

Перечисленные выше свойства дискретного спектра имеют аналогии среди свойств непрерывного спектра (Синай [2], [3]). Ясно, что группа собственных значений есть инвариант динамической системы. Если спектр чисто точечный, то эта группа образует полную систему инвариантов. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема о дискретном спектре 9.13 (фон Нейман, Халмош).

- a) *Две эргодические динамические системы с чисто точечными спектрами изоморфны в том и только том случае, если они обладают одним и тем же спектром.*
- b) *Любая счетная подгруппа окружности $\{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ есть спектр некоторой эргодической системы с чисто точечным спектром.*

Доказательство см. у Халмоша [1]. Оно сводится к доказательству того, что эргодическая система с чисто точечным спектром изоморфна компактной абелевой группе, на которой действует вращение.

Эта теорема показывает, что в случае дискретного спектра проблема классификации полностью решена. С другой стороны, неизвестно, например, существуют ли классические системы, реализующие данный дискретный спектр (или лебеговский конечной кратности⁵). Некоторые результаты на эту тему приведены в приложении 16.

§ 10. Лебеговские спектры

Начнем с рассмотрения примера.

ПРИМЕР 10.1. Вернемся еще раз к примеру 1.16 из гл. 1: M — тор $\{(x, y) \bmod 1\}$, снабженный обычной мерой, автоморфизм определяется соотношением

$$\varphi(x, y) = (x + y, x + 2y) \pmod{1},$$

⁵Определение см. в § 10.

U — оператор, индуцированный автоморфизмом φ . Хорошо известно, что множество D функций

$$\{e_{p,q}(x, y) = e^{2\pi i(px+qy)}, \quad p, q \in \mathbb{Z}\},$$

образует полный ортонормированный базис в $L_2(M, \mu)$. Множество D может быть отождествлено с решеткой $\mathbb{Z}^2 = \{(p, q)\} \subset \mathbb{R}^2$. Поскольку

$$Ue_{p,q} = e_{p+q, p+2q},$$

то оператор U индуцирует на D автоморфизм u :

$$u(p, q) = (p + q, p + 2q).$$

Докажем, что $(0, 0)$ — единственная ограниченная траектория автоморфизма u . Предположим, что $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ принадлежит ограниченной траектории. Тогда существует целое число k такое, что $u^k(p, q) = (p, q)$.

Следовательно, если K — корень k -й степени из единицы, то

$$K^{k-1}(p, q) + K^{k-2}u(p, q) + \dots + u^{k-1}(p, q)$$

— собственный вектор автоморфизма u с собственным значением K .

Но собственные значения автоморфизма u являются собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

и не являются корнями из единицы. Отсюда следует, что $(p, q) = (0, 0)$ и что $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ разлагается на множество I орбит автоморфизма u , и каждая орбита находится во взаимно однозначном соответствии с \mathbb{Z} .

Но вернемся к $D = \{e_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$. $D \setminus \{e_{0,0}\}$ разлагается на орбиты автоморфизма U : $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$; $i \in I$. Если $f_{i,0} \in C_i$, то можно записать

$$C_i = \{f_{i,n} \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

где $f_{i,n} = U^n f_{i,0}$. Подводя итог, можно сказать, что H_i — пространство, порожденное векторами орбиты C_i , и $L_2(M, \mu)$ — прямая сумма пространств H_i и одномерного пространства функций-констант, порождаемых $e_{0,0}$. Каждое из H_i инвариантно относительно U и обладает полным ортонормированным базисом $\{f_{i,n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ таким, что

$$Uf_{i,n} = f_{i,n+1}.$$

Эта ситуация встречается достаточно часто для того, чтобы оправдать следующее определение.

Определение 10.2. Пусть (M, μ, φ) — абстрактная динамическая система, U — индуцированный унитарный оператор. Говорят, что эта система обладает лебеговским спектром L^I , если существует полный ортонормированный базис пространства $L_2(M, \mu)$, образованный функцией 1 и функциями $f_{i,j}$ ($i \in I, j \in \mathbb{Z}$) такими, что

$$U f_{i,j} = f_{i,j+1} \quad \text{для любых } i, j.$$

Тогда мощность множества I однозначно определена; она называется *кратностью* лебеговского спектра. Если множество I (счетно) бесконечно, то лебеговский спектр называется (счетно) бесконечным⁶. Если множество I состоит из одного элемента, то лебеговский спектр называется простым. Аналогичное определение имеется и в непрерывном случае.

Пусть (M, μ, φ_t) — динамическая система, U_t — однопараметрическая группа индуцированных унитарных операторов. Говорят, что эта система имеет лебеговский спектр кратности I , если каждый оператор U_t ($t \neq 0$) имеет лебеговский спектр кратности I .

Замечание 10.3. Эта терминология возникла следующим образом. Рассмотрим спектральное разложение оператора U_t , задаваемое теоремой Стоуна:

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t \lambda} dE(\lambda).$$

Система (M, μ, φ_t) имеет лебеговский спектр в том и только том случае, если мера $\langle E(\lambda)f | f \rangle$ абсолютно непрерывна по мере Лебега при любой $f \in L_2(M, \mu)$, $\langle f | 1 \rangle = 0$.

Теорема 10.4. *Динамическая система с лебеговским спектром обладает перемешиванием.*

Доказательство.

По теореме 9.8 необходимо доказать, что для всех $f, g \in L_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U^n f | g \rangle = \langle f | 1 \rangle \cdot \langle 1 | g \rangle.$$

⁶Такой спектр принято называть счетнократным лебеговским. — *Прим. ред.*

Это эквивалентно тому, что для каждых f и g из ортогонального дополнения к функции 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U^n f | g \rangle = 0.$$

Достаточно доказать это для случая, когда f и g являются базисными векторами. Если $f = f_{i,j}$, $g = f_{k,r}$, то

$$\langle U^n f | g \rangle = \langle f_{i,n+j} | f_{k,r} \rangle,$$

где правая часть равна нулю, если $k \neq i$ или если n достаточно велико. Общий случай может быть выведен из рассмотренного нами с помощью непрерывности и линейности. ■

Следствие 10.5. *Автоморфизм $\varphi(x, y) = (x+y, x+2y) \pmod{1}$ тора*

$$M = \{(x, y) \pmod{1}\}$$

(см. пример 1.16, гл. 1) имеет лебеговский спектр (см. пример 10.1). Следовательно, $\varphi(x, y)$ есть перемешивание и, таким образом, эргодичен (см. следствие 8.4).

ПРИМЕР 10.6. Схемы Бернулли имеют бесконечный счетный лебеговский спектр и, следовательно, все принадлежат к одному и тому же спектральному типу.

Доказательство.

Докажем это утверждение для $B(1/2, 1/2)$; те же рассуждения остаются в силе и для $B(p_1, \dots, p_n)$ с точностью до обозначений. Напомним (см. пример 2.2, гл. 1), что $M = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}$, где $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — это пространство последовательностей

$$m = \dots, m_{-1}, m_0, m_1, \dots; \quad m_i \in \{0, 1\}.$$

Выберем в качестве ортонормированного базиса в пространстве $L_2(\mathbb{Z}_2, \mu)$, связанном с n -м экземпляром \mathbb{Z}_2 , функцию 1 и функцию

$$y_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Базис для ортогонального дополнения $L_2'(M, \mu)$ к функциям-константам на $L_2(M, \mu)$ мы получим, взяв конечные произведения функций y_n с различными индексами:

$$y_{n_1} \cdots y_{n_k}.$$

Пусть U — унитарный оператор, индуцированный сдвигом φ : $m \rightarrow m'$ ($m'_i = m_{i-1}$ при любых i). Назовем два элемента из построенного базиса эквивалентными, если некоторая степень оператора U переводит один элемент в другой. Тогда базис разбивается на счетное множество классов эквивалентности. Каждый такой класс эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с \mathbb{Z} : действие оператора U на класс переводит элемент, соответствующий $n \in \mathbb{Z}$, в элемент, соответствующий $n + 1$.

Следовательно, в $L_2^!(M, \mu)$ существует полный ортонормированный базис $e_{p,q}$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $q \in \mathbb{Z}$ такой, что

$$Ue_{p,q} = e_{p,q+1} \quad \text{при любых } p, q.$$

Число p указывает номер класса эквивалентности, а $q \in \mathbb{Z}$ — номер элемент $e_{p,q}$ в соответствующем классе. Следовательно, $B(1/2, 1/2)$ имеет счетнократный лебеговский спектр.

Пусть $M(M_1, \mu_1, \varphi_1)$, $M(M_2, \mu_2, \varphi_2)$ — две схемы Бернулли. Тогда существуют полные ортонормированные базисы $\{1, f_{i,j}^1\}$ и $\{1, f_{i,j}^2\}$, соответственно, на $L_2(M_1, \mu_1)$ и $L_2(M_2, \mu_2)$ такие, что

$$U_1 f_{i,j}^1 = f_{i,j+1}^1, \quad U_2 f_{i,j}^2 = f_{i,j+1}^2 \quad \text{при любых } i, j.$$

Изометрия $L_2(M_1, \mu_1)$ на $L_2(M_2, \mu_2)$, определяемая соответствием

$$1 \rightarrow 1, \quad f_{i,j}^1 \rightarrow f_{i,j}^2,$$

показывает, что две наши схемы Бернулли одного и того же спектрального типа. ■

§ 11. K -системы

В этом разделе мы намереемся определить один класс динамических систем с сильно вероятностными свойствами.

Определение 11.1⁷. Динамическая система (M, μ, φ) называется K -системой⁸, если существует подалгебра⁹ \mathfrak{A} алгебры измеримых множеств $(\text{mod } 0)$ $\widehat{\mathfrak{I}}$ (см. приложение 6) такая, что

⁷Относительно обозначений \subset, \wedge, \vee — и т. д. см. приложение 17. Рохлин придерживается следующих (стандартных) обозначений: $\widehat{\mathfrak{I}} = \mathfrak{M}$, $\widehat{\mathfrak{O}} = \mathfrak{N}$.

⁸А. Н. Колмогоров [2] ввел этот класс систем под названием «квазирегулярные системы».

⁹Здесь и в дальнейшем речь идет о σ -алгебрах.

$$a) \mathfrak{A} \subset \varphi \mathfrak{A},$$

$$b) \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A} = \widehat{0}, \text{ где } \widehat{0} \text{ — алгебра множеств меры } 0 \text{ или } 1,$$

$$c) \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A}} = \widehat{1}, \text{ где } \varphi, \text{ если воспользоваться неточностью речи, — автоморфизм, индуцированный } \varphi \text{ на } \widehat{1}.$$

В непрерывном случае (M, μ, φ_t) приведенные выше условия подлежат замене на следующие:

$$a') \mathfrak{A} \subset \varphi_t \mathfrak{A} \quad \text{при } t \geq 0,$$

$$b') \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \varphi_t \mathfrak{A} = \widehat{0},$$

$$c') \overline{\bigcup_{t=-\infty}^{\infty} \varphi_t \mathfrak{A}} = \widehat{1}.$$

По определению, система, изоморфная *K*-системе, есть *K*-система.

ПРИМЕР 11.2. СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ (см. гл. 1, 2.2). *Схемы Бернулли являются K-системами.*

Доказательство.

Напомним, что если $B(p_1, \dots, p_n)$ — схема Бернулли, то

$$A_i^j = \{m = \dots m_{-1}, m_0, m_1, \dots \mid m_j = j\}, \quad j \in \mathbb{Z}_n, i \in \mathbb{Z}.$$

Пусть \mathfrak{A} — алгебра, порожденная $A_i^j, i \leq 0$. Если φ — сдвиг, то

$$\varphi(A_i^j) = A_{i+1}^j.$$

Следовательно, $\varphi \mathfrak{A}$ — алгебра, порожденная генераторами $A_k^j, k \leq 1$, и

$$\mathfrak{A} \subset \varphi \mathfrak{A},$$

что доказывает (a).

С другой стороны, любой генератор A_i^j алгебры $\widehat{1}$ есть $\varphi^q(A_i^j) = A_{i+q}^j, i \leq 0$, если взять $q \geq k - i, q \in \mathbb{Z}$. Мы получаем свойство (c):

$$\overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A}} = \widehat{1}.$$

Докажем, что

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A} = \widehat{0}.$$

Пусть \mathfrak{B} — подалгебра алгебры $\widehat{1}$, каждый элемент которой принадлежит какой-нибудь подалгебре, порожденной конечным числом генераторов A_i^j . Нетрудно видеть, что каждому $A \in \mathfrak{B}$ соответствует число $N \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ при всех $B \in \varphi^{-n} \mathfrak{A}$, $n \geq N$. Таким образом, соотношение $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ выполняется еще и при всех $A \in \widehat{1}$ и $B \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} \mathfrak{A}$. В частности, $\mu(B) = \mu(B \cap B) = [\mu(B)]^2$, т. е. $\mu(B) = 0$ или 1 для всех $B \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} \mathfrak{A} = \widehat{0}$, и мы заключаем, что

$$\widehat{0} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} \mathfrak{A}. \quad \blacksquare$$

Следствие 11.3. *Преобразование пекаря есть K -система.*

Доказательство.

Преобразование пекаря изоморфно $B(1/2, 1/2)$ (см. приложение 7). ■

ПРИМЕР 11.4. В гл. 3 мы рассмотрим обширный класс K -систем — так называемые классические K -системы. Этому классу принадлежат автоморфизмы торов, геодезические потоки на компактных римановых пространствах отрицательной кривизны, ансамбли «упруго сталкивающихся ся частиц» Больцмана–Гиббса и многие другие системы.

Докажем, что в дискретном случае¹⁰ K -системы имеют бесконечный лебеговский спектр (Колмогоров [2]).

Следовательно, K -системы являются перемешивающими и эргодичны (теорема 10.4).

Теорема 11.5. *K -система имеет счетнократный лебеговский спектр на ортогональном дополнении к функциям-константам.*

Приведем схему доказательства, которое полностью дано в приложении 12.

¹⁰Непрерывный случай см. Синай [6].

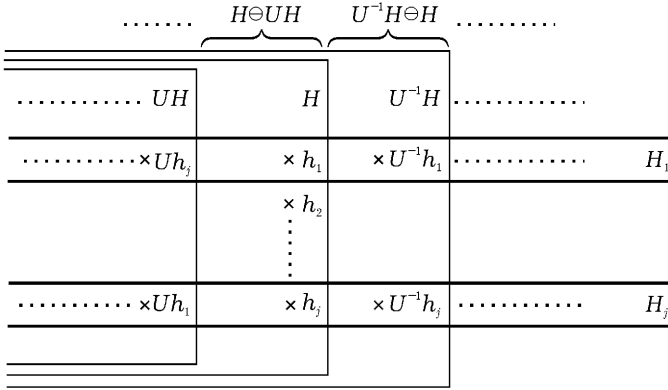


Рис. 11.6

Пусть \mathfrak{A} — подалгебра из определения 11.1. Обозначим через H подпространство функций из $L_2(M, \mu)$, порожденное характеристическими функциями элементов подалгебры \mathfrak{A} . Если U — оператор, индуцированный автоморфизмом φ , то свойства (11.1) подалгебры \mathfrak{A} переходят в следующие (рис. 11.6):

$$H_0 = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n H \subset \dots \subset UH \subset H \subset \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U^n H} = L_2(M, \mu),$$

$$\subset U^{-1}H \subset \dots \subset \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U^n H = L_2(M, \mu),$$

где H_0 — пространство, порожденное функцией 1.

На ортогональном дополнении $H \ominus UH$ пространства UH к H выберем полный ортонормированный базис $\{h_j\}$. Последовательность

$$\dots, U^{-1}h_j, h_j, U h_j, \dots$$

порождает пространство H_j . Пространства H_j инвариантны относительно U , и их ортогональная сумма есть $L_2(M, \mu) \ominus H_0$. Следовательно, если положить

$$e_{i,j} = U^j h_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad j \in \mathbb{Z},$$

то функции $\{e_{i,j}\}$ и функция 1 образуют полный ортонормированный базис в $L_2(M, \mu) \ominus H_0$ такой, что

$$U e_{i,j} = e_{i,j+1} \quad \text{для всех } i, j$$

(определение лебеговского спектра).

Можно доказать, что размерность $H \ominus UH$ бесконечна (приложение 17), следовательно, лебеговский спектр бесконечен.

§ 12. Энтропия

Определим теперь инвариант динамических систем, который не является спектральным инвариантом¹¹.

Пусть $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ — измеримое конечное разбиение M (см. приложение 18):

$$\mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0, \quad \mu(A_i \cap A_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

В дальнейшем предполагается, что I конечно (или счетно).

Определение 12.1¹². Величина

$$h(\alpha) = - \sum_{i \in I} \mu(A_i) \log \mu(A_i),$$

где \log — двоичный логарифм и $x \log x = 0$ при $x = 0$, называется *энтропией* $h(\alpha)$ разбиения α .

Сумма в правой части может быть конечной или бесконечной, так как элементы последовательности $\{\mu(A_i) \log \mu(A_i)\}$ отрицательны или равны нулю ($0 \leq \mu(A_i) \leq 1$).

ПРИМЕР 12.2. РАЗБИЕНИЕ НА N ЭЛЕМЕНТОВ ОДИНАКОВОЙ МЕРЫ. В этом случае $\mu(A_i) = \frac{1}{N}$, поэтому $h(\alpha) = \log N$. Заметим, что если α — некоторое разбиение на N элементов, то

$$h(\alpha) \leq \log N,$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, если все элементы имеют одну и ту же меру $1/N$.

Действительно, функция

$$z(x) = \begin{cases} -x \log x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

¹¹Этот инвариант введен А. Н. Колмогоровым [4].

¹²Относительно вероятностного подхода см. А. М. Яглом и И. М. Яглом [1].

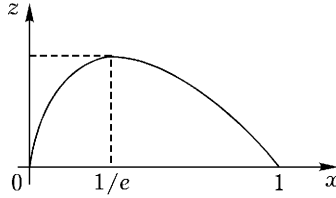


Рис. 12.3

строго выпукла, так как

$$z''(x) = -\frac{\log e}{x} < 0.$$

Поэтому из неравенства Йенсена мы получаем, что

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \sum z(\mu(A_i)) = N \sum \frac{1}{N} z(\mu(A_i)) \leq \\ &\leq Nz \left(\frac{1}{N} \sum \mu(A_i) \right) = Nz \left(\frac{1}{N} \right) = \log N. \end{aligned}$$

Иначе говоря, $h(\alpha)$ есть не что иное, как взвешенный двоичный логарифм от числа элементов разбиения α .

Заметим также, что если два разбиения эквивалентны, т.е. отличаются лишь на множестве меры нуль, то они обладают одинаковой энтропией. Наконец, равенство $h(\alpha) = 0$ означает, что все меры $\mu(A_i)$ равны нулю, кроме одной, равной единице.

Определение 12.4. Средняя энтропия разбиения α относительно разбиения β . Пусть $\alpha = \{A_i \mid i = 1, \dots, r\}$, $\beta = \{B_j \mid j = 1, \dots, s\}$ — два измеримых конечных разбиения.

Можно предположить, что $\mu(A_i) > 0$, $\mu(B_j) > 0$ при всех i, j .

Разбиение α индуцирует на каждом B_i конечное разбиение

$$B_i \cap A_1, \dots, B_i \cap A_r.$$

Если считать, что B_i имеет меру 1 (в результате перенормировки), то это — конечное разбиение, обладающее энтропией.

Взвешенная сумма этих энтропий по всем B_i называется энтропией α относительно β и обозначается

$$h(\alpha \mid \beta) = \sum_{i=1}^s \mu(B_i) \left[- \sum_{k=1}^r \frac{\mu(B_i \cap A_k)}{\mu(B_i)} \log \left(\frac{\mu(B_i \cap A_k)}{\mu(B_i)} \right) \right].$$

Аналогичное определение существует и в том случае, если α и β — счетные и измеримые разбиения (приложение 18).

В приложении 18 приведено доказательство следующей теоремы.

Теорема 12.5. Пусть α, β, γ — измеримые конечные (или счетные) разбиения. Тогда

$$h(\alpha | \beta) \geq 0, \quad (12.6)$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, если $\alpha \leq \beta \pmod{0}$.

$$h(\alpha \vee \beta | \gamma) = h(\alpha | \gamma) + h(\beta | \alpha \vee \gamma), \quad (12.7)$$

$$\alpha \leq \beta \pmod{0} \implies h(\alpha | \gamma) \leq h(\beta | \gamma), \quad (12.8)$$

$$\beta \leq \gamma \pmod{0} \implies h(\alpha | \gamma) \geq h(\alpha | \beta), \quad (12.9)$$

$$h(\alpha \vee \beta | \gamma) \leq h(\alpha | \gamma) + h(\beta | \gamma). \quad (12.10)$$

Пусть ν — тривиальное разбиение $\{M\}$ и возьмем $\gamma = \nu$ в выписанных выше соотношениях. Поскольку $h(\alpha | \nu) = h(\alpha)$, получаем

$$h(\alpha \vee \beta) = h(\alpha) + h(\beta | \alpha), \quad (12.11)$$

$$\alpha \leq \beta \implies h(\alpha) \leq h(\beta), \quad (12.12)$$

$$h(\alpha | \beta) \leq h(\alpha), \quad (12.13)$$

$$h(\alpha \vee \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta). \quad (12.14)$$

Заметим, наконец, что если φ — автоморфизм измеримого пространства (M, μ) , то

$$\varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta), \quad (12.15)$$

$$h(\alpha | \beta) = h(\varphi\alpha | \varphi\beta). \quad (12.16)$$

Определение 12.17. Энтропия разбиения относительно автоморфизма. Пусть (M, μ, φ) — динамическая система, α — конечное (или счетное) измеримое разбиение многообразия M . Энтропией α относительно φ называется число

$$h(\alpha, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(\alpha \vee \varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha)}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Докажем, что этот предел существует. Так как n — положительное целое число, положим:

$$h_n = h(\alpha \vee \varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha),$$

$$s_n = h_n - h_{n-1}.$$

Лемма 12.18. $s_n \geq 0$.

Доказательство.

Из свойства 12.8 и из того, что

$$\alpha \vee \varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha \leq \alpha \vee \dots \vee \varphi^n\alpha,$$

следует, что $h_{n-1} \leq h_n$. ■

Лемма 12.19. s_n — убывающая последовательность.

Доказательство.

По свойству (12.9) имеем:

$$\begin{aligned} s_n &= h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^n\alpha) - h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha) = \\ &= h(\varphi^n\alpha \mid \alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha). \end{aligned} \quad (12.20)$$

Следовательно,

$$s_{n-1} = h(\varphi^{n-1}\alpha \mid \alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-2}\alpha),$$

т. е. с учетом (12.15) и (12.16)

$$s_{n-1} = h(\varphi^n\alpha \mid \varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha).$$

Поскольку $\varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha \leq \alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha$, из свойства (12.12) следует, что $s_{n-1} \geq s_n$. ■

Теорема 12.21. Энтропия $h(\alpha, \varphi)$ существует и равна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\varphi^n\alpha \mid \alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha).$$

Доказательство.

$\{s_n\}$ — это убывающая последовательность положительных чисел, имеющая предел s . Если заметить, что $h_n = h(\alpha) + s_1 + \dots + s_n$, то из теоремы о средних арифметических в смысле Чезаро мы заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n} = s.$$

Теорема 12.21 следует из определения энтропии $h(\alpha, \varphi)$ и выражения (12.20) для s_n . ■

ПРИМЕР 12.22. СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ. Пусть $B(p_1, \dots, p_k)$ — схема Бернулли (см. гл. 1, пример 2.2), φ — ее автоморфизм. Рассмотрим конечное разбиение α с k элементами

$$A_0^i = \{m \mid m_0 = i\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Докажем, что

$$h(\alpha, \varphi) = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i.$$

Поскольку $\varphi^n A_0^i = A_n^i = \{m \mid m_n = i\}$, то $\alpha \vee \varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha$ имеет элементами

$$A_0^{i_0} \cap A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{n-1}^{i_{n-1}},$$

мера которых равна $p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}}$. Поэтому мы заключаем, что

$$h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha) = - \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}} \cdot \log(p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}}).$$

Суммируя по i_0 и замечая, что

$$\sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}} = 1,$$

получаем:

$$h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha) = - \sum_i p_i \log p_i + h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-2}\alpha).$$

По индукции мы заключаем:

$$h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha) = n \left(- \sum_i p_i \log p_i \right),$$

откуда

$$h(\alpha, \varphi) = - \sum_i p_i \log p_i.$$

Определение 12.23. Энтропия автоморфизма¹³. Энтропией $h(\varphi)$ автоморфизма φ называется величина

$$h(\varphi) = \sup h(\alpha, \varphi),$$

где α пробегает множество конечных измеримых разбиений. Очевидно, что $h(\varphi) \geq 0$.

¹³Это понятие введено Колмогоровым [4]. См. также Синай [7], [8].

Теорема 12.24. Энтропия $h(\varphi)$ — инвариант динамической системы (M, μ, φ) .

Доказательство.

Предположим, что системы (M, μ, φ) и (M', μ', φ') изоморфны (см. гл. 1, определение 4.1). Тогда существует изоморфизм $f: M \rightarrow M'$ такой, что $\varphi' = f\varphi f^{-1}$. Если α — измеримое конечное разбиение многообразия M , то $f\alpha$ — измеримое конечное разбиение многообразия M' . Из (12.15) и (12.16) получаем

$$\begin{aligned} h(f\alpha, \varphi') &= h(f\alpha, f\varphi f^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(f\alpha \vee \dots \vee f\varphi^{n-1} f^{-1} f\alpha)}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(f(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1} \alpha))}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1} \alpha)}{n} = h(\alpha, \varphi). \end{aligned}$$

С другой стороны, если α пробегает множество измеримых конечных разбиений многообразия M , то $f\alpha$ пробегает аналогичное множество для M' . Следовательно,

$$\sup h(\alpha', \varphi') = \sup h(\alpha, \varphi). \quad \blacksquare$$

Приведем способ вычисления $h(\varphi)$.

Определение 12.25. Образующее разбиение относительно автоморфизма. Пусть α — измеримое разбиение, конечное или счетное, $\mathfrak{M}(\alpha)$ — порождаемая α измеримая алгебра. Говорят, что α — образующее разбиение относительно φ , если

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{M}(\alpha) = \hat{1}.$$

Теорема 12.26 Колмогорова¹⁴. Если α — образующее разбиение относительно φ , то $h(\varphi) = h(\alpha, \varphi)$.

Доказательство см. в приложении 19.

Приведем примеры применения этой теоремы.

Пример 12.27. Схемы Бернулли.

Энтропия схемы Бернулли $B(p_1, \dots, p_k)$ есть величина

$$h(\varphi) = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i.$$

¹⁴См. А. Н. Колмогоров [2], [4], Синай [7], [8].

Доказательство.

Пусть $B(p_1, \dots, p_k)$ — схема Бернулли. Алгебра $\widehat{1}$ порождается множествами

$$A_i^j = \{m \mid m_i = j\}, \quad j \in \mathbb{Z}_k, i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим разбиение $\alpha = \{A_0^i, i = 1, \dots, k\}$ из примера 12.22. Так как $\varphi^n A_0^i = A_n^i$, алгебра $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathcal{M}(\alpha)$ содержит все множества, порождающие алгебру $\widehat{1}$. Следовательно, α — образующее разбиение относительно φ , и теорема следует из 12.22 и 12.26. ■

Следствие 12.28.

1) Для любого неотрицательного числа a существует абстрактная динамическая система, а именно — схема Бернулли, энтропия которой равна a .

2) Мы видели (пример 10.6), что все схемы Бернулли принадлежат к одному и тому же спектральному типу. Так как эти схемы могут иметь различные энтропии, а энтропия — инвариант, ясно, что существуют абстрактные динамические системы, которые не изоморфны, но принадлежат к одному и тому же спектральному типу.

Существует гипотеза о том, что если две K -системы принадлежат к одному и тому же спектральному типу и обладают одной и той же энтропией, то они изоморфны. Известно лишь, что они слабо изоморфны, каждая из них гомоморфна другой (Синай [9]).

К этому же кругу вопросов относится и результат Мешалкина [1]:

$B(p_1, \dots)$ и $B(q_1, \dots)$ изоморфны, если обладают одной и той же энтропией и если p_i, q_i — отрицательные степени одного и того же целого числа.

Например, схемы Бернулли $B(1/2, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8)$ и $B(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ изоморфны. Блюм и Хансон [1] обобщили этот результат.

ПРИМЕР 12.29. АВТОМОРФИЗМЫ ТОРА. Если φ — эргодический автоморфизм тора $\{(x, y) \pmod{1}\}$:

$$\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy) \pmod{1}, \quad ad - bc = 1,$$

то, как показал Синай [7], его энтропия равна

$$h(\varphi) = \log |\lambda_1|,$$

где λ_1 — собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

модуль которого больше 1.

В более общем случае, если φ — эргодический автоморфизм r -мерного тора $T^r = \mathbb{R}^r / \mathbb{Z}^r$ и матрица φ имеет r различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, то

$$h(\varphi) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|,$$

(см. Генис [1] и исправление Абрамова [1]).

Следствие 12.30 (См. гл. 1, пример 4.4.). *Динамические системы на T^2 , задаваемые матрицами*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

не изоморфны.

Динамические системы, задаваемые матрицами

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

принадлежат к одному и тому же спектральному типу и обладают одинаковой энтропией. Неизвестно, изоморфны ли они. Известно лишь, что они слабо изоморфны, каждая из них является системой-фактором другой (Синай [9]).

Теорема 12.31. Энтропия K -систем¹⁵. *Энтропия K -системы положительна.*

Доказательство.

По определению 11.1, существует подалгебра \mathfrak{A} алгебры $\widehat{\mathbb{I}}$ такая, что

$$\widehat{\mathfrak{0}} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A} \subset \dots \subset \mathfrak{A} \subset \varphi \mathfrak{A} \subset \dots \subset \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A}} = \widehat{\mathbb{I}}.$$

¹⁵ А. Н. Колмогоров [4].

Докажем, что в \mathfrak{A} существует конечная подалгебра \mathfrak{B} такая, что

$$\bigvee_{k \leq n} \varphi^k \mathfrak{B} \supset \bigvee_{k \leq n'} \varphi^k \mathfrak{B} \quad \text{для } n > n'; \quad n, n' \in \mathbb{Z}. \quad (12.32)$$

Предположим, что для конечной подалгебры $\mathfrak{B} \in \mathfrak{A}$ существуют целые числа n, n' такие, что $n > n'$ и

$$\bigvee_{k \leq n} \varphi^k \mathfrak{B} = \bigvee_{k \leq n'} \varphi^k \mathfrak{B}.$$

Так как (M, μ) — лебегово пространство, существует возрастающая последовательность $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{A}$ конечных алгебр \mathfrak{B}_i таких, что

$$\overline{\bigvee \mathfrak{B}_i} = \mathfrak{A}.$$

Из принятого нами предположения следует, что

$$\varphi^n \left(\bigvee_{k \leq 0} \varphi^k \mathfrak{B}_i \right) = \bigvee_{k \leq 0} \varphi^k \mathfrak{B}_i$$

при всех i . Следовательно,

$$\varphi^n \mathfrak{A} = \bigvee_{k \leq n} \varphi^k \mathfrak{A} = \overline{\bigvee_i \varphi^n \left(\bigvee_{k \leq 0} \varphi^k \mathfrak{B}_i \right)} = \overline{\bigvee_i \left(\bigvee_{k \leq 0} \varphi^k \mathfrak{B}_i \right)} = \mathfrak{A},$$

и мы приходим к противоречию.

Пусть теперь β — конечное разбиение, порождающее \mathfrak{B} (см. определение П18.5). Из 12.21 мы заключаем, что

$$h(\varphi) \geq h(\beta, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\beta \mid \varphi^{-1} \beta \vee \dots \vee \varphi^{-n} \beta).$$

Последовательность $\varphi^{-1} \beta, \varphi^{-1} \beta \vee \varphi^{-2} \beta, \dots$ — невозрастающая, поэтому (см. (12.9))

$$h(\varphi) \geq h\left(\beta \mid \bigvee_{k \leq -1} \varphi^k \beta\right).$$

Достаточно доказать теперь, что

$$h\left(\beta \mid \bigvee_{k \leq -1} \varphi^k \beta\right) > 0.$$

Если предположить, что имеет место равенство нулю, то из (12.6) мы получили бы

$$\beta \leq \bigvee_{k \leq -1} \varphi^k \beta \pmod{0}$$

и, следовательно,

$$\bigvee_{k \leq 0} \varphi^k \beta = \beta \vee \left(\bigvee_{k \leq -1} \varphi^k \beta \right) = \bigvee_{k \leq -1} \varphi^k \beta,$$

т. е.

$$\bigvee_{k \leq 0} \varphi^k \mathfrak{B} = \bigvee_{k \leq -1} \varphi^k \mathfrak{B},$$

что противоречит (12.32). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 12.33. Гирсанов [1] привел пример динамической (не классической) системы с нулевой энтропией и бесконечным лебеговским спектром. Но это — не K -система.

Гуревич [1] показал, что орициклический поток на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны имеет бесконечный лебеговский спектр, но нулевую энтропию. Следовательно, это классическая система с лебеговским спектром, но она не является K -системой.

ЗАМЕЧАНИЕ 12.34. По определению, энтропия потока φ_t в непрерывном случае равна $h(\varphi_t)$. Если (M, μ, φ_t) — K -поток (см. определение 11.1), то (M, μ, φ_1) — K -система. Следовательно (теорема 12.31), энтропия $h(\varphi_1)$ K -потока положительна.

Теорема Кушниренко 12.35¹⁶. Энтропия классических систем. Энтропия классических систем конечна.

Доказательство.

Пусть (M, μ, φ) — классическая система. Так как многообразие M компактно и гладко, оно несет риманову метрику g . Деформируя g конформно, можно предполагать, что ее элемент объема равен $d\mu$. Площадь любого подмногообразия есть площадь в смысле метрики g .

Назовем классическим разбиением многообразия M его конечное разбиение на комплексы с кусочно дифференцируемыми границами; таким образом, сумма площадей границ конечна. Поскольку M компактно и гладко, такое разбиение всегда существует (Cairns [1]).

Сделаем два очевидных замечания.

¹⁶См. Кушниренко [1].

1) Поскольку любое конечное разбиение можно аппроксимировать классическим разбиением и энтропия $h(\alpha, \varphi)$ непрерывна по α (приложение 19), имеем:

$$h(\varphi) = \sup_{\alpha \text{ классическое}} h(\alpha, \varphi).$$

2) Если σ — подмногообразие размерности $(\dim M - 1)$ и площади $S(\sigma)$, то, поскольку M компактно, существует не зависящая от σ постоянная λ такая, что

$$\frac{S(\varphi\sigma)}{S(\sigma)} < \lambda. \quad (12.36)$$

Пусть α — классическое разбиение, $S(\alpha)$ — площадь границ его комплексов. Тогда

$$S(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha) \leq S(\alpha) + \lambda S(\alpha) + \dots + \lambda^{n-1} S(\alpha) < \lambda^n \frac{S(\alpha)}{\lambda - 1}.$$

Из изопериметрического неравенства следует, что существует константа $C > 0$ такая, что если $N = \dim M$, то

$$\mu(A_i)^{(N-1)/N} \leq C \cdot S(A_i), \quad \text{где } A_i \in \alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha.$$

Если A_1, A_2, \dots, A_k — элементы рассматриваемого разбиения, то, используя (12.36), получаем

$$\sum_{i=1}^k [\mu(A_i)]^{(N-1)/N} \leq C \cdot \lambda^n \frac{S(\alpha)}{\lambda - 1}.$$

Следовательно,

$$\log \sum_{i=1}^k [\mu(A_i)]^{(N-1)/N} \leq n \log \lambda + \text{const}. \quad (12.37)$$

Но $f(x) = \log x$ — выпуклая функция, $\mu(A_i) \geq 0$, $\sum \mu(A_i) = 1$, поэтому применение неравенства Йенсена к левой части дает

$$f\left(\sum \mu(A_i)\omega_i\right) \geq \sum \mu(A_i)f(\omega_i).$$

Полагая $\omega_i = \mu(A_i)^{-1/N}$, получаем с учетом (12.37):

$$\sum_{i=1}^k [\mu(A_i) \log \mu(A_i)]^{-1/N} \leq n \log \lambda + \text{const},$$

откуда

$$\frac{-\sum_{i=1}^k \mu(A_i) \log \mu(A_i)}{n} \leq N \cdot \log \lambda + \frac{\text{const}}{n}.$$

Если $n \rightarrow +\infty$, то

$$h(\alpha, \varphi) \leq N \cdot \log \lambda,$$

и в силу замечания (1)

$$h(\varphi) \leq N \cdot \log \lambda.$$

В итоге делаем вывод:

Для любой классической системы (M, μ, φ) и постоянной λ , задаваемой неравенством (12.36), выполняется неравенство

$$h(\varphi) \leq (\dim M) \cdot \log \lambda. \quad (12.38)$$

■

Следствие 12.39. *Существуют абстрактные динамические системы, не изоморфные классическим. Энтропия таких систем бесконечна, например, бесконечная схема Бернулли:*

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots, \underbrace{\frac{1}{2^{2n}}, \dots, \frac{1}{2^{2n}}}_{2^{2n-n-1} \text{ раз}}, \dots\right).$$

Следствие 12.40. *Если ранг спектра динамической системы с чисто точечным спектром конечен, то такая система имеет нулевую энтропию.*

Доказательство.

Действительно, это классическая система (компактная абелева группа конечной размерности), на которой действует вращение. Следовательно, $\lambda = 1$ и, согласно (12.38), $h(\varphi) = 0$. ■

Проблема 12.41. Неизвестно, зависит ли энтропия $h(\varphi)$ классической системы непрерывным образом от φ .

Замечание 12.42. Теорема Кушниренко связана с результатами М. Артина и Б. Мазура [1]:

Пусть M — компактное гладкое многообразие, $\varphi: M \rightarrow M$ — структурно устойчивый C^1 -дiffeоморфизм, тогда число $N(n)$ изолированных неподвижных точек диффеоморфизмов φ^n , $n = 1, 2, \dots$ возрастает не более чем экспоненциально:

$$N(n) \leq C \cdot e^{\lambda n}, \quad C = C(\varphi), \quad \lambda = \lambda(\varphi).$$

Замечание 12.43. Недавно Кушниренко¹⁷ ввел некоторые новые нетривиальные инварианты абстрактной динамической системы, A -энтропии. Пусть A — монотонная последовательность целых чисел

$$A: a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

Тогда A -энтропия автоморфизма φ относительно разбиения α определяется как

$$h_A(\varphi, \alpha) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\varphi^{a_1} \alpha \vee \dots \vee \varphi^{a_n} \alpha)}{n}.$$

Подобно определению 12.23, A -энтропия равна

$$h_A(\varphi) = \sup h_A(\varphi, \alpha).$$

Обычная энтропия получается, если $A = \{0, 1, 2, \dots\}$. A -энтропии могут различать некоторые системы с обычной энтропией, равной 0.

Приведем пример.

Пусть $A = \{2^n\}$. Тогда A -энтропия орициклического потока (см. главу 3) равна h , $0 < h < \infty$. Рассмотрим прямое произведение этого потока на самого себя. Его A -энтропия равна $2h$, $0 < 2h < \infty$. Поскольку $2h \neq h$, произведение не изоморфно орициклическому потоку. Тем не менее, они оба имеют нулевую обычную энтропию и счетнократный лебеговский спектр.

Замечание 12.44. Недавно Каток и Степин [1]¹⁸ ввели несколько новых нетривиальных инвариантов абстрактных динамических систем, скорости периодических аппроксимаций.

Пусть (M, μ, φ) — абстрактная динамическая система, ξ_n — разбиение (M, μ) на множества C_n^i меры $\frac{1}{n}$ ($i = 1, \dots, n$). Автоморфизм S_n пространства (M, μ) называется циклическим относительно разбиения ξ_n , если:

¹⁷См. его доклад на Международном Математическом Конгрессе, Москва, 1966.

¹⁸См. их доклад на Международном Математическом Конгрессе, Москва, 1966.

a) $S_n \xi_n = \xi_n,$

b) $(S_n)^n = E, (S_n)^k \neq E$ для $k < n$ (E — тождественное преобразование).

Будем говорить, что φ допускает аппроксимацию циклическим преобразованием порядка $O[f(q_n)]$, если для возрастающей последовательности натуральных чисел q_n существует последовательность разбиений ξ_{q_n} , сходящаяся к $\hat{1}$, и последовательность автоморфизмов S_{q_n} циклических относительно ξ_{q_n} таких, что

$$\sum_{i=1}^{q_n} \mu(\varphi C_{q_n}^i \Delta S_{q_n} C_{q_n}^i) = O[f(q_n)].$$

Каток и Степин доказали некоторые важные теоремы, которые связывают определение порядка аппроксимации периодическими преобразованиями с энтропией и спектром. Важность этих результатов подтверждается тем фактом, что во многих случаях возможно получить некоторую информацию о скоростях аппроксимации конкретных систем, даже если точное вычисление спектра невозможно. Некоторые из этих теорем следующие:

1) Если автоморфизм φ допускает аппроксимацию циклическими преобразованиями порядка $O\left(\frac{1}{\ln^2 q_n}\right)$, тогда $h(\varphi) = 0$.

2) Автоморфизм, допускающий аппроксимацию циклическими преобразованиями порядка $O\left(\frac{1}{q_n}\right)$, эргодичен. Более того, имеет место сильная сходимость $U^{q_n} \Rightarrow E$, где U — унитарный оператор на $L^2(M, \mu)$, индуцированный преобразованием φ . Как следствие, φ не обладает свойством перемешивания, и максимальный спектральный тип U сингулярен.

Можно найти больше теорем об аппроксимациях и их приложениях к изучению конкретных динамических систем таких, как, к примеру, отображение

$$\underbrace{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3}_{\longrightarrow} \quad \underbrace{\Delta_3 \quad \Delta_2 \quad \Delta_1}$$

или поток на торе

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{F(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\lambda}{F(x, y)}$$

в статьях Катка и Степина в «Докладах АН СССР» (1967), в журналах «Функциональный анализ и его приложения» (1967), и «Успехи математических наук» (1967).

Общая литература к главе 2

- [1] P. R. Halmos, *Lecture on Ergodic Theory*. Chelsea (New York).
- [2] P. R. Halmos, *Entropy in Ergodic Theory: Lecture Notes*. University of Chicago, 1959.
- [3] E. Hopf, *Ergodentheorie*. Springer, Berlin, 1937.
- [4] J. von Neumann, *Zur operatoren Methode in der klassischen Mechanik*. Ann. Math. 33, 1932, pp. 587–642.
- [5] В. А. Рохлин, *Новые прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой*, Успехи мат. наук, 1960, **15**, № 4(94), с. 3–28.
- [6] Ya. Sinai, *Probabilistic Ideas in Ergodic Theory*. Transl. Math. Soc. Series 2, 31, 1963, pp. 62–84.

ГЛАВА 3

Неустойчивые системы

В этой главе мы рассмотрим множество классических динамических систем, обладающих существенно стохастическими свойствами, \mathcal{U} -системы¹.

Орбиты \mathcal{U} -систем очень неустойчивы: две орбиты с близкими начальными условиями экспоненциально «разбегаются» друг от друга. Это свойство приводит к асимптотической независимости будущего и прошлого: \mathcal{U} -автоморфизмы эргодичны, являются «перемешиванием», обладают бесконечным лебеговским спектром и положительной энтропией, словом, они представляют собой K -системы. \mathcal{U} -системы образуют открытое множество в пространстве классических систем. Следовательно, все системы, близкие к \mathcal{U} -системе, обладают такими же стохастическими свойствами. В частности, это относится к геодезическим потокам на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны. Таков первый пример \mathcal{U} -систем.

§ 13. \mathcal{U} -системы

ПРИМЕР 13.1. На торе $M = \{(x, y) \bmod 1\}$, снабженном римановой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$, рассмотрим диффеоморфизм

$$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

Это — гиперболический поворот, т. е. матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет два действительных собственных значения λ_1 и λ_2 таких, что

$$0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1.$$

¹Термин \mathcal{U} -системы введен Аносовым. Буква \mathcal{U} используется потому, что эти системы удовлетворяют «условию \mathcal{U} ». В оригинале — C -systems (от «condition»).

Пусть X и Y — два собственных направления, соответствующих λ_1 и λ_2 . Расстояния в направлении X «растягиваются», а в направлении Y «сжимаются». Более точно, пусть TM_m — пространство, касательное к M в точке m , X_m и Y_m — подпространства, параллельные, соответственно, X и Y , $\varphi^*: TM_m \rightarrow TM_{\varphi(m)}$ — дифференциальное отображение φ . Тогда

$$\|\varphi^*\xi\| \geq \lambda_1 \cdot \|\xi\| \quad \text{при } \xi \in X_m, (\lambda_1 > 1);$$

$$\|\varphi^*\xi\| \leq \lambda_2 \cdot \|\xi\| \quad \text{при } \xi \in Y_m, (0 < \lambda_2 < 1),$$

где $\|\cdot\|$ означает длину (см. рис. 13.2).

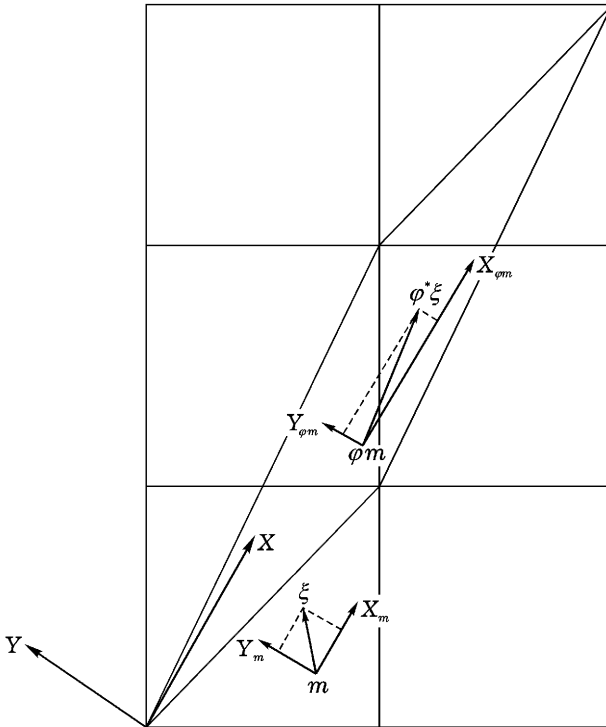


Рис. 13.2

Этот пример служит характерным представителем Y -систем, к определению которых мы сейчас переходим.

Определение 13.3. Пусть φ — диффеоморфизм класса C^2 связного

компактного риманова многообразия M класса C^∞ . Обозначим через $\varphi^*: TM_m \rightarrow TM_{\varphi(m)}$ дифференциал отображения φ .

Мы говорим, что φ удовлетворяет условию У, или что φ — У-диффеоморфизм, если существуют два поля касательных плоскостей X_m и Y_m положительных размерностей таких, что:

- 1) TM_m — прямая сумма X_m и Y_m :

$$TM_m = X_m \oplus Y_m;$$

- 2) при всех целых положительных n

$$\begin{aligned} \|(\varphi^n)^*\xi\| &\geq a \cdot e^{\lambda n} \|\xi\|, & \|(\varphi^{-n})^*\xi\| &\leq b \cdot e^{-\lambda n} \|\xi\| & \text{при } \xi \in X_m, \\ \|(\varphi^n)^*\xi\| &\leq b e^{-\lambda n} \|\xi\|, & \|(\varphi^{-n})^*\xi\| &\geq a \cdot e^{\lambda n} \|\xi\| & \text{при } \xi \in Y_m, \end{aligned}$$

где положительные константы a , b , λ не зависят от n и ξ , $\|\xi\|$ означает длину вектора ξ . Пространство X_m называется растягивающимся, а пространство Y_m — сжимающимся.

Пример 13.1 удовлетворяет условию У:

$$a = b = 1, \quad e^\lambda = \lambda_1, \quad e^{-\lambda} = \lambda_2 \quad (\lambda_1 \lambda_2 = 1).$$

Приведенное выше определение распространяется на непрерывный случай.

Пусть φ_t — группа с параметром $t \in \mathbb{R}$ диффеоморфизмов класса C^2 связного компактного риманова многообразия M класса C^∞ . Говорят, что φ_t — У-поток, если:

- 1) вектор скорости $\frac{d}{dt}\varphi_t m|_{t=0}$ не равен нулю;
 2) TM_m — касательное пространство в точке m разлагается в прямую сумму:

$$TM_m = X_m \oplus Y_m \oplus Z_m,$$

где Z_m — пространство, порожденное вектором скорости в m , и $\dim X_m = k \neq 0$, $\dim Y_m = l \neq 0$;

- 3) при положительном вещественном t

$$\begin{aligned} \|(\varphi_t)^*\xi\| &\geq a \cdot e^{\lambda t} \|\xi\|, & \|(\varphi_{-t})^*\xi\| &\leq b \cdot e^{-\lambda t} \|\xi\|, & \text{если } \xi \in X_m, \\ \|(\varphi_t)^*\xi\| &\leq b \cdot e^{-\lambda t} \|\xi\|, & \|(\varphi_{-t})^*\xi\| &\geq a \cdot e^{\lambda t} \|\xi\|, & \text{если } \xi \in Y_m, \end{aligned}$$

где постоянные a , b , λ положительны и не зависят от ξ и t .

Условие 1 означает, что система не находится в равновесном состоянии. Условие 3 описывает поведение решений системы $(TM, (\varphi_t)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13.4. Нетрудно доказать, что:

- 1) подпространства X_m и Y_m однозначно определяются своими свойствами (и являются наиболее «растягивающимся» и «сжимающимся» подпространствами в TM_m);
- 2) $\dim X_m = k$ и $\dim Y_m = l$ не зависят от m (k — непрерывная функция от m , принимающая целочисленные значения на связном M);
- 3) X_m и Y_m непрерывно зависят от m .

Наконец, заметим, что \mathcal{U} -система не является классической системой (см. определение 1.1), поскольку мы не постулировали существование инвариантной меры.

Покажем теперь, что, отправляясь от \mathcal{U} -диффеоморфизма, можно построить некоторый \mathcal{U} -поток.

ПРИМЕР 13.5 (С. СМЕЙЛ).

Пространство M .

Пусть $T^2 = \{(x, y) \bmod 1\}$ — двумерный тор, $[0, 1] = \{u \mid 0 \leq u \leq 1\}$. Построим цилиндр $T^2 \times [0, 1]$ и затем отождествим $T^2 \times \{0\}$ и $T^2 \times \{1\}$ по формуле

$$((x, y), 1) \equiv (\varphi(x, y), 0) = ((x + y, x + 2y), 0) \pmod{1},$$

где φ — диффеоморфизм из 13.1:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

В результате мы получим компактное многообразие M . Пусть $(x, y, u) \in M$; отображение $p: M \rightarrow S^1 = \{u \bmod 1\}$, $p(x, y, u) = u$ всюду имеет ранг 1. Следовательно, многообразие M есть расслоенное пространство² с базой S и слоем типа T^2 .

Поток φ_t .

Группа диффеоморфизмов φ_t многообразия M определена соотношением

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{u} = 1. \tag{13.7}$$

²Напомним определение расслоенного пространства. Пусть M — гладкое, связное, компактное многообразие размерности $n + q$, B — гладкое многообразие размерности n , называемое базой, $p: M \rightarrow B$ — C^2 -дифференцируемое отображение, имеющее всюду ранг n и называемое проекцией. Набор (M, B, p) называется расслоенным пространством над M , $p^{-1}(x)$, $(x \in B)$ — слоями. Эти слои имеют размерность q и диффеоморфны между собой.

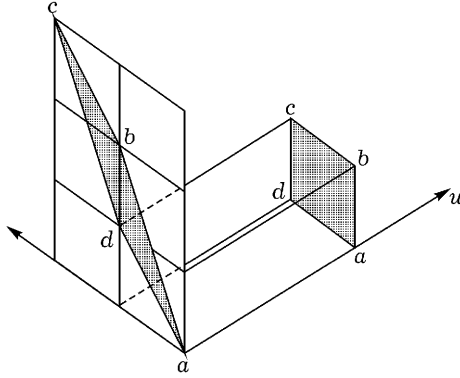


Рис. 13.6

Метрика на M.

Пусть λ_1, λ_2 ($0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$) — собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Метрика на $T^2 \times [0, 1]$ определена соотношением

$$ds^2 = \lambda_1^{2u} [\lambda_1 dx + (1 - \lambda_1) dy]^2 + \lambda_2^{2u} [\lambda_2 dx + (1 - \lambda_2) dy]^2 + du^2. \quad (13.8)$$

Нетрудно убедиться в том, что эта метрика инвариантна относительно отображения

$$(x, y, u) \rightarrow (x + y, x + 2y, u - 1).$$

Иначе говоря, эта метрика совместима с произведенным выше отождествлением $T^2 \times \{0\}$ и $T^2 \times \{1\}$. Следовательно, это метрика на M .

(M, φ) — У-поток.

Проверим три условия из определения 13.3.

1) Из (13.7) следует, что вектор скорости не обращается в нуль.

2) Пусть $m = (x, y, z) \in M$. Определим три подпространства X_m, Y_m, Z_m пространства TM_m : X_m (соответственно, Y_m) касается слоя $T^2 \times u$ и параллелен собственному направлению, соответствующему собственному значению λ_1 (соответственно λ_2), диффеоморфизма φ слоя $T^2 \times \{u\}$:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pmod{1},$$

подпространство Z_m коллинеарно вектору скорости (13.7). Имеем:

$$\begin{aligned} TM_m &= X_m \oplus Y_m \oplus Z_m, \\ \dim X_m &= \dim Y_m = 1. \end{aligned}$$

3) Пусть $\xi \in X_m$; компоненты ξ в системе координат (x, y, u) имеют вид

$$(s, s(\lambda_1 - 1), 0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны, согласно (13.7) матрица диффеоморфизма φ_s^* есть не что иное, как единичная матрица. Следовательно, из (13.8) получаем:

$$\|(\varphi_t^*)\xi\|^2 = \lambda_1^{2(u+t)}[\lambda_1 s + (1 - \lambda_1)(\lambda_1 - 1)s]^2 = \lambda_1^{2t} \cdot \|\xi\|^2,$$

откуда

$$\|(\varphi_t^*)\xi\| = \lambda_1^t \|\xi\|.$$

Таким образом, первая группа условий 3 (определение 13.3) выполняется, если принять $a = b = 1$, $e^\lambda = \lambda_1$.

Вторая группа условий проверяется таким же образом.

Ясно, что поле 2-плоскостей $X_m \oplus Z_m$ (соответственно, $Y_m \oplus Z_m$) гладкое и вполне интегрируемо; следовательно, оно определяет над M расслоенную структуру³.

Интегральные многообразия (или слои) состоят из орбит, асимптотически сближающихся при $t \rightarrow -\infty$ (или $t \rightarrow +\infty$) (см. рис. 13.9). В общем случае, как мы увидим, это свойство следует из условия У.

Замечание 13.10. Приведенная выше конструкция носит общий характер.

Пусть (V, φ_0) — C -диффеоморфизм на многообразии V . Если в топологическом произведении $V \times [0, 1]$ мы отождествим точки $(v, 0)$ и $(\varphi_0 v, 1)$, то получим компактное многообразие M .

Определим У-поток на M , полагая

$$\varphi_t(v, s) = (\varphi_0^{[t+s]} v, t + s - [t + s]),$$

где $v \in V$, $s \in [0, 1]$, и $[a]$ означает целую часть числа a .

³Расслоенная структура над многообразием M задается полем вполне интегрируемых p -плоскостей. Связные компоненты интегральных многообразий называются слоями. Слои — это подмногообразия размерности p .

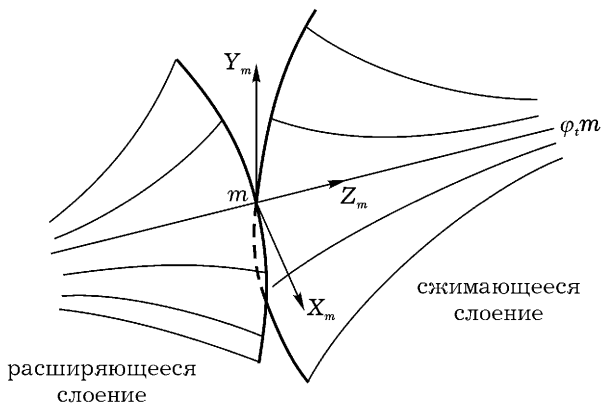


Рис. 13.9

§ 14. Геодезические потоки компактных римановых многообразий отрицательной кривизны

Приведем важный пример У-системы.

Определение 14.1. Многообразия отрицательной кривизны⁴. Пусть v — точка на римановом многообразии V , TV_v — касательное пространство в точке v . Два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 пространства TV_v задают 2-плоскость. Исходящие из точки v геодезические и касательная к ним 2-плоскость порождают поверхность Σ — риманово подмногообразии многообразия V .

Полная кривизна поверхности Σ в точке v называется *кривизной сечения* $\rho(e_1, e_2)$ многообразия V в точке v 2-плоскости (e_1, e_2) . Говорят, что V — *многообразии отрицательной кривизны*, если кривизна сечения отрицательна при всех v и всех (e_1, e_2) .

Если многообразии V компактно, то непрерывность кривизны сечения $\rho(e_1, e_2)$ обеспечивает существование отрицательной постоянной $-k^2$ такой, что

$$\rho(e_1, e_2) \leq -k^2$$

при всех v и всех (e_1, e_2) . Пример многообразия отрицательной кривизны см. в приложении 20.

⁴Относительного этого понятия см. S. Helgason [1], гл. 1.

Неустойчивость геодезических потоков 14.2

Геодезический поток φ_t риманова многообразия V описывает возможные движения точки, вынужденной оставаться на гладком многообразии V и не подверженной действию внешней силы (см. пример 1.4). Если V — многообразие отрицательной кривизны, то геодезические сильно неустойчивы: если $v, v_0 \in T_1\tilde{V}$,⁵ то расстояние $|\varphi_t v, \varphi_t v_0|$ экспоненциально возрастает со временем t . Более точно, справедлива следующая теорема, доказанная Лобачевским для поверхностей постоянной отрицательной кривизны и обобщенная Адамаром для поверхностей произвольной отрицательной кривизны.

Теорема Лобачевского–Адамара 14.3. Пусть V — связное компактное риманово многообразие отрицательной кривизны. Тогда геодезический поток на касательном унитарном расслоенном пространстве $M = T_1V$ — Y -система.

Приведем схему доказательства (см. рис. 14.4). Полное доказательство см. в приложении 21.

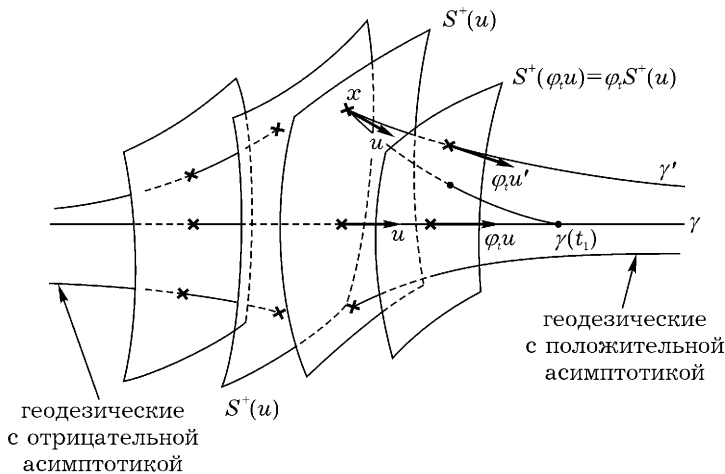


Рис. 14.4

Пусть $\gamma(u, t) = \gamma(t) = \gamma$ — геодезическая, исходящая из точки $u \in T_1V$ и параметризуемая своей дугой t . Если x — точка мно-

⁵ \tilde{V} — универсальное накрытие многообразия V .

гообразия V , то через любую точку $\gamma(t_1)$ проходит некоторая геодезическая γ_1 , исходящая из точки x . При $t_1 \rightarrow +\infty$ она стремится к предельной геодезической $\gamma'(u', t)$, исходящей из точки $u' \in TV_x$.

При разумном выборе начала отсчета на γ можно доказать, что

$$\text{расстояние } (\gamma(t), \gamma'(t)) \leq b \cdot e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (14.5)$$

где b и λ — положительные постоянные, не зависящие от γ, γ' и t . Такие геодезические, как γ' образуют *семейство геодезических, положительно асимптотических к γ* . Доказано, что эти траектории ортогональны к семейству $(n-1)$ -мерных поверхностей ($n = \dim V$), так называемым положительным орисферам S^+ .

Будем обозначать через $S^+(u)$ орисферу, исходящую из начальной точки $u \in T_1V$ и которая ортогональна положительным асимптотам $\gamma(u, t)$. Каждую орисферу можно интерпретировать как $(n-1)$ -мерное подмногообразие в T_1V — объединение нормальных к T_1V единичных векторов, ориентированных в сторону $t > 0$. Если $u \in T_1V$, то плоскость, касательная к орисфере $S^+(u)$ и содержащая u , есть $(n-1)$ -плоскость Y_u многообразия $T(T_1V_n)$.

Произведя замену t на $-t$ можно аналогичным образом определить *отрицательно асимптотические геодезические* и *отрицательные орисферы* S^- . Плоскость, касательная к орисфере $S^-(u)$ и содержащая u , есть $(n-1)$ -плоскость X_u многообразия $T(T_1V_u)$. Исходя из определенных, получаем:

$$T(T_1V) = X_u \oplus Y_u \oplus Z_u,$$

где Z_u — одномерное пространство, порожденное вектором скорости геодезического потока. *Это условие 2 У-потока (определение 13.3).*

Условие 3 следует из соотношения (14.5).

Заметим, что поля X_u и Y_u вполне интегрируемы: интегральными многообразиями служат орисферы S^+ и S^- . Следовательно, над T_1V имеются две расслоенные структуры: S^+ и S^- . Эти расслоенные пространства инвариантны относительно геодезического потока, так как орисферы ортогональны $(n-1)$ -параметрическому семейству геодезических многообразия V .

Как мы увидим, существование и инвариантность этих расслоенных пространств принадлежат к числу общих свойств У-систем.

§ 15. Расслоенные структуры, ассоциированные с \mathcal{U} -системами

Покажем теперь, что для наиболее общих \mathcal{U} -систем существуют две расслоенные структуры, аналогичные орициклам из предыдущего раздела.

Пусть (M, φ) — \mathcal{U} -система, где φ — \mathcal{U} -диффеоморфизм M . Если $m \in M$, то обозначим через X_m (соответственно, Y_m) поле растягивающихся (соответственно, сжимающихся) k -плоскостей (соответственно, l -плоскостей).

Теорема Синая. 15.1⁶. Пусть φ — \mathcal{U} -диффеоморфизм. Тогда:

1) существуют два расслоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} , инвариантные относительно φ , которые касательны соответственно к растягивающемуся полю X_m и сжимающемуся полю Y_m . Следовательно, эти поля всегда интегрируемы.

2) Если диффеоморфизм $\varphi' : M \rightarrow M$ C^2 -близок к φ , то φ' — \mathcal{U} -диффеоморфизм. В частности, расслоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} структурно устойчивы (см. § 16).

Приведем схему доказательства. Полное доказательство см. в приложении 22.

Конструкция 15.2.

Доказательство основано на следующей конструкции. Рассмотрим пространство полей k -плоскостей, касательных к M . Пусть ρ — поле, $\rho(m)$ — k -плоскости из TM_m . Преобразование φ индуцирует преобразование в пространстве полей. Обозначим это индуцированное преобразование через φ^{**} . По определению,

$$\varphi^{**}\rho(m) = \varphi^*\rho(\varphi^{-1}m),$$

где $\varphi^* : TM \rightarrow TM$ — дифференциал преобразования φ , который отображает k -плоскость из TM_m в k -плоскость из $TM_{\varphi(m)}$.

Пространство полей ρ снабжено естественной метрикой $|\rho_1 - \rho_2|$. Таким образом, это полное пространство. Можно доказать (см. приложение 22), что в силу аксиом \mathcal{U} -систем отображение φ^{**} (или, по крайней мере, некоторая его положительная целая степень $(\varphi^{**})^n$) действует

⁶По существу это было доказано в статье В. И. Арнольда и Я. Г. Синая [6]. Хотя их рассуждения касались частного случая малых возмущений автоморфизмов двумерного тора, доказательство распространяется и на общий случай.

как сжимающее в окрестности растягивающего поля X_m :

$$|\varphi^{**}\rho_1 - \varphi^{**}\rho_2| \leq \theta \cdot |\rho_1 - \rho_2|, \quad 0 < \theta < 1, \quad (15.3)$$

при

$$|\rho_1 - X_m| < \delta, \quad |\rho_2 - X_m| < \delta,$$

где δ достаточно мало. Неравенство (15.3) доказано для φ ; ясно, что оно верно для всех преобразований φ' , C^2 -близких к φ , поскольку φ'^* C^1 -близко к φ^* .

Но из теоремы о сжимающих преобразованиях следует, что отображение, удовлетворяющее неравенству (15.3), допускает неподвижную точку. Нетрудно видеть, что полем неподвижных плоскостей ρ для φ служит X . Но для φ' эту роль играет другое поле ρ' . Ясно, что

$$\begin{aligned} p' &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi'^{**})^n X, \\ \varphi'^* \rho'(m) &= \rho'(\varphi' m), \end{aligned}$$

и поле p' растягивающееся для φ' .

Рассуждая аналогичным образом с φ^{-1} , мы получаем сжимающееся поле, близкое к полю Y . Поэтому φ' — C -диффеоморфизм.

Инвариантные слоения 15.4.

Предположим сначала, что система (M, φ) допускает два инвариантных слоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} касательных, соответственно, к X и Y . Тогда система (M, φ') обладает теми же свойствами. Действительно, поле ρ' , инвариантное относительно φ' , получается следующим образом:

$$\rho' = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi'^{**})^n X.$$

Но $(\varphi'^{**})^n X$ — поле плоскостей, касательных к слоению $\varphi'^n \mathcal{X}$. Следовательно, предельное поле ρ' интегрируемое, т. е. касательно к некоторому слоению \mathcal{X}' . Тем самым часть 2 теоремы доказана.

В действительности то же рассуждение доказывает существование слоения \mathcal{X} . В самом деле, покроем (компактное) многообразие M конечным числом локальных карт (C_i, ψ) ; каждое из c_i — некоторая окрестность точки m_i , ψ_i — отображение $\psi_i: C_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$).

В каждой окрестности C_i рассмотрим слоение \mathcal{X}_i^0 такое, что $\psi_i(\mathcal{X}_i^0)$ — слоение образа $\psi_i(C_i)$ на плоскости, параллельные $\psi_i(X_{m_i})$. Карты можно выбрать достаточно малыми для того, чтобы поле $X_i^0(m)$,

касательное к \mathcal{X}_i^0 в каждой точке $m \in C_i$, было достаточно близко к растягивающему полю X_m . Ясно, что если точка m принадлежит одновременно нескольким C_i , то в точке m существует несколько плоскостей $X_i^0(m)$.

Рассмотрим теперь слоение $\mathcal{X}_i^n = \varphi^n \mathcal{X}_i^0$, определенное на $\varphi^n C_i$. Эти слоения покрывают M , и, как следует из неравенства (15.3), их касательные поля стремятся к X_m , когда $n \rightarrow \infty$. Из этого нетрудно сделать вывод о том, что существует предельное слоение \mathcal{X} , касательное к X_m . Тем самым теорема полностью доказана. ■

Замечание 15.5. Если система (M, φ) достаточно число раз дифференцируема, то каждый слой слоения \mathcal{X} также достаточно число раз дифференцируем. Аналогичное утверждение относительно самого слоения неверно: нормальные производные к слоям могут не существовать.

Можно доказать⁷, что слоение \mathcal{X} , т. е. поле X_m , принадлежит классу C^1 , если размерность плоскостей X_m равна 1. По-видимому, в общем случае поле X_m недифференцируемо. Во всяком случае, существуют примеры, в которых поля X_m и Y_m не принадлежат классу C^1 .

Замечание 15.6. Приведенное выше доказательство обобщается для U -поток.

§ 16. Структурная устойчивость U -систем

Докажем теперь, что U -системы структурно устойчивы.

Определение 16.1. Структурная устойчивость.

А) *Структурная устойчивость диффеоморфизма.*

Пусть M — компактное φ -дифференцируемое многообразие, $\varphi: M \rightarrow M$ — C^r -диффеоморфизм.

Говорят, что диффеоморфизм φ *структурно устойчив*, если в любой окрестности $V(\text{Id}_M)$ (в C^0 -топологии) тождественного отображения Id_M существует окрестность $W(\varphi)$ (в C^1 -топологии) диффеоморфизма φ такая, что каков бы ни был диффеоморфизм ψ из $W(\varphi)$, существует гомеоморфизм k из $V(\text{Id}_M)$, который порождает следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & & M \\ & \psi & \\ & & \end{array}$$

⁷В. И. Арнольд и Я. Г. Синай [6].

т. е. $k \circ \varphi = \psi \circ k$. Иначе говоря, k преобразует орбиты диффеоморфизмов $\{\varphi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ в орбиты диффеоморфизмов $\{\psi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

В) *Структурная устойчивость потока.*

Пусть M -компактное дифференцируемое многообразие, X — поле C -дифференцируемых векторов на M , порожденное потоком φ_t

$$X(m) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(m) \right|_{t=0}, \quad m \in M.$$

Говорят, что поток φ_t *структурно устойчив*, если для любой окрестности $V(\text{Id}_M)$ (в C^0 -топологии) тождественного отображения Id_M существует окрестность $W(X)$ (в C^r -топологии) поля X такая, что каким бы ни было поле $Y \in W(X)$ C^r -дифференцируемых векторов, существует гомеоморфизм k из $V(\text{Id}_M)$, который отображает любую орбиту поля X в какую-то орбиту поля Y .

Далее мы будем предполагать, что $r \leq 2$.

Замечание 16.2. Можно было бы предположить, что k — не просто гомеоморфизм, но диффеоморфизм. Действительно, рассмотрим в \mathbb{R}^2 систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - Ky,$$

где K — положительная постоянная.

Орбиты имеют вид спиралей, а особая точка $(0, 0)$ — фокус (см. рис. 16.3). Но по теореме Пуанкаре о собственных значениях⁸, K — непрерывный инвариант диффеоморфизмов. Следовательно, фокус $(0, 0)$ не мог бы быть структурно устойчивым.

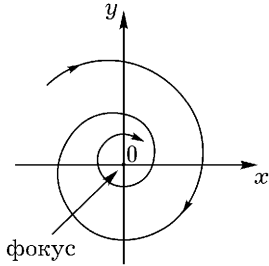


Рис. 16.3

Можно было бы попытаться предложить в непрерывном случае определение, аналогичное тому, которое было дано в дискретном случае: существование гомеоморфизма k в окрестности $V(\text{Id}_M)$, который порождает следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & k & k^{-1} & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ & M & \psi_t & & M \end{array}$$

где ψ_t — поток, порожденный полем Y . Но тогда предельный цикл (см. рис. 16.4) не был бы структурно устойчивым, поскольку связанный с ним период есть непрерывный инвариант⁹.

Немедленно возникают две проблемы.

⁸См., например К. Coddington, N. Levinson [1].

⁹См. например, К. Coddington, N. Levinson [10].

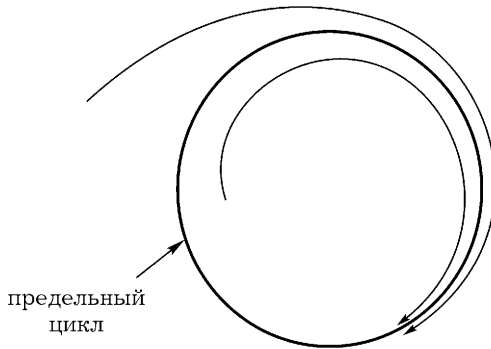


Рис. 16.4

- 1) Какую конфигурацию имеют структурно устойчивые орбиты?
- 2) Являются ли структурно устойчивые системы общим случаем? Т. е. можно ли приблизить сколь угодно точно произвольное векторное поле структурно устойчивым полем?

Андронов и Понтрягин [2] ответили на эти вопросы для случая, когда M есть сфера S^2 (см. приложение 23). Двумерные многообразия, отличные от S^2 , рассмотрел Пейксото (Peixoto [1]).

С более сложной ситуацией мы сталкиваемся в случаях, когда размерность больше двух. Например, система из примера 13.1 структурно устойчива, хотя и очень сложна (эргодична, со всюду плотными циклами и т. д.¹⁰).

С другой стороны, С. Смейл (S. Smale [2]) привел пример, который показывает, что структурно устойчивые системы не образуют всюду плотное множество в пространстве классических динамических систем (см. приложение 24). Таким образом, структурно устойчивые системы не являются общим случаем.

Теорема Аносова¹¹ 16.5. *Любая $У$ -система (M, φ) структурно устойчива.*

Приведем идею доказательства (см. приложение 25).

Пусть $W(\varphi)$ — окрестность (в C^2 -топологии) диффеоморфизма φ в пространстве диффеоморфизмов многообразия M .

¹⁰см. S. Smale [1].

¹¹см. Аносов [1].

Прежде всего докажем, что любому $\varphi' \in W(\varphi)$ соответствует единственный малый гомеоморфизм $k: M \rightarrow M$ такой, что

$$\varphi' = k \circ \varphi \circ k^{-1}, \quad \sup d[k(m), m] < \varepsilon,$$

где $d[\cdot, \cdot]$ — риманово расстояние. Докажем также, что величина ε , зависящая от φ' , ограничена на $W(\varphi)$:

$$\sup_{\varphi' \in W(\varphi)} \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Отсюда следует, что диффеоморфизм φ структурно устойчив. Действительно, каждому $\varepsilon_1 > 0$ можно было бы поставить в соответствие некоторую окрестность $W(\varphi)$ такую, что при любом $\varphi' \in W(\varphi)$ существовал бы гомеоморфизм $k: M \rightarrow M$ такой, что

$$\varphi' = k \circ \varphi \circ k^{-1} \quad \sup_{m \in M} d[k(m), m] < \varepsilon_1.$$

Итак, если $\varphi' \in W(\varphi)$ — диффеоморфизм, близкий к φ в C^2 -метрике, то φ' — \mathcal{Y} -система. Мы уже доказали (теорема Синая 15.1), что φ и φ' имеют растягивающиеся инвариантные слои \mathcal{X} и \mathcal{X}' и сжимающиеся инвариантные слои \mathcal{Y} и \mathcal{Y}' . Если существует ε -гомеоморфизм $k: M \rightarrow M$ такой, что $\varphi' = k \circ \varphi \circ k^{-1}$, то, положив $m' = km$, $m \in M$, мы увидим, что

$$d[\varphi'^n(m'), \varphi^n(m)] = d[k \circ \varphi^n(m), \varphi^n(m)] < \varepsilon \quad (16.6)$$

при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, из определения \mathcal{Y} -систем видно, что не существует более одной точки m' , удовлетворяющей соотношению (16.6). Действительно, при всех $\xi \neq 0$ имеем:

$$|(\varphi'^*)_{\xi}^n| \rightarrow +\infty$$

в одном из двух случаев: $n \rightarrow +\infty$ или $n \rightarrow -\infty$.

Единственность нашего гомеоморфизма k , если он существует, будет доказана, если каждой точке $m \in M$ поставить в соответствие единственную точку $m' \in M$, удовлетворяющую соотношению (16.6) при всех n . Следовательно, необходимо доказать, что такая точка m' существует. Для того, чтобы найти m' , воспользуемся следующей конструкцией.

Ясно, что образы $\varphi^n \beta$ ($n > 0$) каждого растягивающегося слоя $\beta \in \mathcal{X}'$, близкого к t , имеют точки, близкие к $\varphi^n t$ (более точный смысл этого утверждения см. в лемме А, приложение 25). Можно доказать (см. лемму В, приложение 25), что среди этих слоев существует единственный слой $\beta(m)$ такой, что его образы $\varphi^n \beta(m)$ ($n < 0$) также близки к $\varphi^n(m)$.

Точно так же доказывается, что существует, притом только один, сжимающийся слой $\delta(m) \in \mathcal{Y}$ такой, что его образы $\varphi^n \delta(m)$ остаются близкими к $\varphi^n(m)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Так как слоения \mathcal{X}' и \mathcal{Y}' трансверсальны, то $\beta(m)$ и $\delta(m)$ пересекаются в единственной точке m' из окрестности t . Без труда можно доказать, что $\varphi'(m') = (\varphi m)'$ и что отображение $k: t \rightarrow m'$ — малый гомеоморфизм, если φ' — диффеоморфизм, C^2 -близкий к φ .

Случай У-потокков 16.7

Теорема Аносова распространяется на У-потокки.

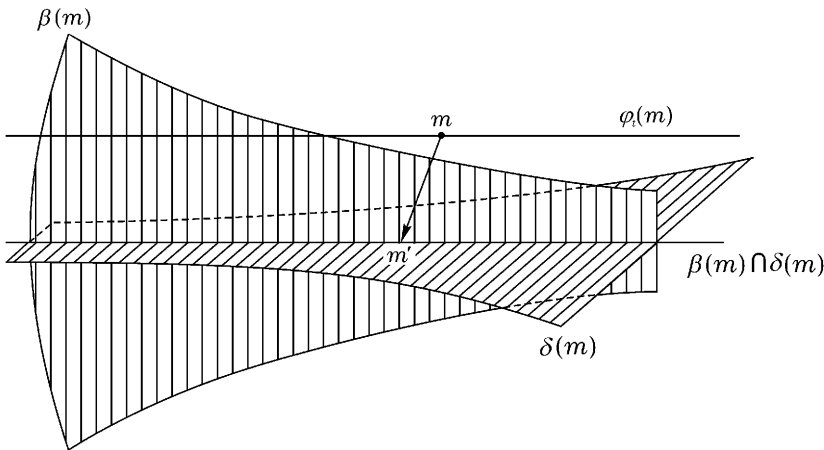


Рис. 16.8

В этом случае подобная конструкция (см. рис. 16.8) дает два слоя $\beta(m)$ и $\delta(m)$, образованных траекториями диффеоморфизма φ'_t , асимптотическими (соответственно, при $t \rightarrow +\infty$ для $\beta(m)$ и $t \rightarrow -\infty$ для $\delta(m)$) к траектории диффеоморфизма φ'_t , которая представляет собой пересечение слоев. Эта орбита близка к орбите $\varphi_t m$ (не как пара-

метризованная кривая, а как геометрическая кривая). Для того, чтобы получить гомеоморфизм k , необходимо взять точку из $\beta(m) \cap \delta(m)$, например, самую близкую в смысле риманова расстояния.

§ 17. Эргодические свойства U -систем

В этом параграфе мы будем изучать U -системы, которые обладают положительной и инвариантной мерой μ . Поэтому, в отличие от предыдущего параграфа, мы ограничимся рассмотрением классических динамических систем (см. определение 1.1).

Начнем с изучения эргодических свойств автоморфизма тора из примера 13.1. Пусть M — тор $\{(x, y) \pmod{1}\}$, снабженный мерой $d\mu = dx dy$, φ — автоморфизм:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

Теорема 17.1. (M, μ, φ) есть K -система (см. определение 11.1).

Для того, чтобы доказать теорему, построим подалгебру \mathfrak{A} алгебры $\widehat{1}$.

Подалгебра \mathfrak{A} 17.2

В плоскости (x, y) матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

обладает двумя действительными положительными собственными значениями λ_1, λ_2 :

$$0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1,$$

отвечающими, соответственно, собственным направлениям X и Y . Через вершины квадрата $0 \leq x, y \leq 1$ плоскости (x, y) проведем прямые, параллельные X и Y (см. рис. 17.3). Эти прямые разделят квадрат $0 \leq x, y \leq 1$ на четыре треугольника 1, 1', 2, 2' и параллелограмм 3. Отождествляя противоположные стороны 1 и 1', 2 и 2' квадрата 3, образуем три непересекающихся параллелограмма $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и \mathcal{P}_3 на M . Обозначая через β полученное таким образом разбиение M , получаем:

$$\alpha = \bigvee_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} \beta.$$

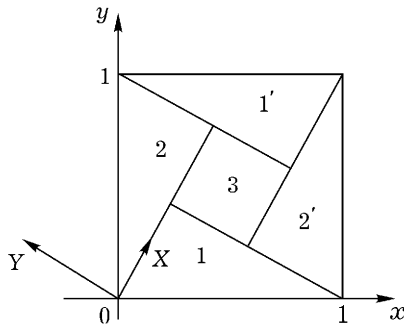


Рис. 17.3

Подалгебра \mathfrak{A} есть замыкание измеримой алгебры $\mathfrak{M}(\alpha)$, порожденной α (см. приложение 18),

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{M}(\alpha)} = \overline{\bigvee_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} \mathfrak{M}(\beta)}.$$

Лемма 17.4. Пусть A — число, мажорирующее длины сторон параллелограммов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ разбиения β . Если константа A достаточно мала, то

- 1) Неразложимыми элементами алгебры \mathfrak{A} служат отрезки, параллельные сжимающемуся собственному направлению Y .
- 2) Мера (в смысле $dx dy$) множества неразложимых элементов алгебры \mathfrak{A} , длина которых меньше 1, не более $C \cdot 1$, где C — некоторая постоянная. В частности, почти каждый неразложимый элемент алгебры \mathfrak{A} есть отрезок и не сводится к точке.

Доказательство.

Если p — целое число, то $\varphi^p \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, 3$ — параллелограмм, сторона которого, параллельная X , имеет длину меньше $\lambda_1^p A$, а сторона, параллельная Y , имеет длину меньше $\lambda_2^p A$. Следовательно, элементами разбиения

$$\beta \wedge \varphi^{-1} \beta \wedge \dots \wedge \varphi^{-n} \beta, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

служат параллелограммы, связанные компоненты которых имеют вид

$$\mathcal{P}_{i_0} \cap \dots \cap \varphi^{-n} \mathcal{P}_{i_n},$$

где $i_0, \dots = 1, 2, 3$. Стороны этих параллелограммов, параллельные X , имеют длину меньше $\lambda_1^{-n} \cdot A$, а стороны, параллельные y , имеют длину меньше A . Так как $\lambda_1 > 1$, при $n \rightarrow +\infty$ мы получаем первую часть леммы. Пусть L — сумма длин сторон, параллельных X , параллелограммов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ разбиения β . Аналогичная сумма для разбиения $\varphi^p \beta$ равна $\lambda_1^p \cdot L$. Следовательно, аналогичная сумма для α мажорируется величиной

$$L + (\lambda_1)^{-1}L + (\lambda_1)^{-2}L + \dots = \frac{L}{1 - \lambda_1^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} C.$$

Мера множества элементов разбиения α , стороны которых параллельны Y , есть величины меньше l и поэтому мажорируется величиной $C \cdot l$. ■

Сжимающееся слоение 17.5

Рассмотрим на M поле векторов длины 1, параллельных сжимающемуся собственному направлению Y . Интегральные кривые этого поля называются *сжимающимися слоями* (см. § 15). Мы говорим, что это *слоение эргодично*, если любое объединение положительной меры сжимающихся слоев совпадает с M почти всюду.

Лемма 17.6. *Сжимающееся слоение инвариантно относительно φ и эргодично.*

Доказательство.

Инвариантность следует из инвариантности направления Y .

Для того, чтобы доказать эргодичность, достаточно убедиться в том, что каждый слой всюду плотен (см. приложение 11) или что он не замкнут (теорема Якоби, приложение 1). Докажем это от противного.

Если \mathcal{F} — замкнутый слой длины f , то $\varphi^n \mathcal{F}$ — замкнутый (в силу инвариантности) слой, длина которого равна $\lambda_2^n f$. Поскольку $0 < \lambda_2 < 1$, то, устремляя n к $+\infty$, мы получаем $\lambda_2^n f \rightarrow 0$. Но это противоречит тому очевидному факту, что длина слоя больше 1. ■

Доказательство теоремы 17.1.

Из определения \mathfrak{A} ясно, что $\mathfrak{A} \subset \varphi \mathfrak{A}$. Это — условие (a) определения 11.1 U -систем. Проверим условие (c)

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi_n \mathfrak{A}} = \hat{1}.$$

Достаточно доказать, что неразложимые элементы

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} \varphi^n \alpha$$

имеют сколь угодно малую длину.

По лемме 17.4, неразложимые элементы $\alpha \wedge \dots \wedge \varphi^n \alpha$ имеют вид

$$A_0 \cap \varphi A_1 \cap \dots \cap \varphi^n A_n; \quad A_0, \dots, A_n \in \alpha,$$

где A_i — отрезки, параллельные Y , длина которых меньше A . Но φ — отображение, сжимающее в λ_2 ($0 < \lambda_2 < 1$) раз в направлении Y , следовательно,

$$A_0 \cap \dots \cap \varphi^n A_0$$

образовано отрезками, параллельными Y и имеющими длину меньше λ_2^n . Условие (с) мы получаем, устремляя n к ∞ .

Проверим условие (b). Пусть H — элемент положительной меры пересечения

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A}.$$

Это означает, что H — объединение неразложимых элементов из $\alpha, \varphi^{-1}\alpha, \varphi^{-2}\alpha, \dots$ и т. д. Пусть ε — число, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < l$ такое, что

$$C \cdot l < \varepsilon \mu(H),$$

где C — постоянная из леммы 17.4. За исключением множества E меры, меньшей, чем $\varepsilon \cdot \mu(H)$, неразложимые элементы разложения α имеют длину, превышающую l . Так как φ^{-1} сохраняет меру $dx dy$ и растягивает в $(\lambda_2)^{-1}$ раз в направлении Y , мы видим, что за исключением множества $\varphi^{-n}E$ меры, меньшей, чем $\varepsilon \mu(\mathcal{H})$, неразложимые элементы разбиения $\varphi^{-n}\alpha$ имеют длину, превышающую $(\lambda_2)^{-n}l$. Устремляя n к ∞ , мы получаем, что за исключением множества меры, меньше $\varepsilon \mu(H)$, H состоит из сжимающихся слоев.

Из произвольности числа ε и эргодичности сжимающихся слоев (лемма 17.6) следует, что $\mu(H) = 1$. Таким образом,

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A} = (\emptyset, M) \pmod{0}. \quad \blacksquare$$

Приведенные выше рассуждения распространяются на C -диффеоморфизмы самого общего вида. Деликатным вопросом является конструкция разбиения, аналогичного разбиению β , и меры площади слов. Эту трудность устраняет теорема Аносова [2], которую мы сейчас формулируем.

Рассмотрим расслоение риманового n -мерного многообразия M на p -мерные слои. Выберем два дифференцируемых $(n-p)$ -мерных многообразия Π и Π' локально трансверсальных к слоям. Мы предполагаем, что если $t \in \Pi$, то слой проходит через t и пересекает Π' в точке t' , и что точка t' близка к точке t в римановой метрике, индуцированной на слое. Это определяет отображение $f: \Pi \rightarrow \Pi'$, переводящее t в t' .

Определение 17.7. Абсолютная непрерывность слоения. Если при любых парах многообразий Π и Π' f — непрерывный обобщенный якобиан и если этот якобиан непрерывно изменяется при малых деформациях многообразия Π' , то мы говорим, что слоение абсолютно непрерывно.

С каждой C -системой связаны два трансверсальных слоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} (см. § 15). Для этих слоений Аносов доказал следующую теорему.

Теорема 17.8. *Слоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} абсолютно непрерывны.*

Мы не приводим здесь доказательства теоремы 17.8, которое слишком длинное. Мы только представим конечный результат, полученный с ее помощью. Рассуждения, используемые при доказательстве 17.1, обобщаются и приводят к следующим теоремам (Аносов [2]).

Теорема 17.9. *Все U -системы (U -диффеоморфизмы или U -потoki) эргодичны.*

Теорема 17.10 (см. Синай [11]). *Всякий U -диффеоморфизм есть K -система.*

Наоборот, пример 15.5 показывает, что для U -потoka φ_t могут существовать отличные от постоянных собственные функции. В этом случае φ_t не может иметь лебеговский спектр на ортогональном дополнении к функциям-константам (см. § 10). Следовательно, φ_t не может быть K -потокom (см. теорему 11.5). Как показывает следующая теорема, пример 15.5 является единственным исключением.

Теорема 17.11. *Пусть φ_t — U -поток на n -мерном многообразии M . Тогда*

- 1) либо φ_t есть K -система,
- 2) либо φ_t имеет собственную непостоянную функцию.

В последнем случае эта собственная функция непрерывна, и существуют $(n - 1)$ -мерное компактное подмногообразие V многообразия M и U -дiffeоморфизм $\varphi: V \rightarrow V$ такой, что φ_t — U -поток, получаемый из φ с помощью конструкции из замечания 13.10 (§ 13 гл. 3) с точностью до изменения масштаба времени t ($t \rightarrow Ct$, C — константа).

Следствие 17.12. *Геодезический поток на унитарном расслоенном пространстве, касательном к компактному риманову многообразию отрицательной кривизны, есть K -система.*

Доказательство.

По теореме Лобачевского–Адамара (14.3) геодезический поток есть U -система. Следовательно, по теореме 17.9, он эргодичен. Но, как показывает следствие П16.10 (приложение 16), геодезический поток не имеет непрерывной собственной функции¹². Тем самым исключается вторая возможность теоремы 17.11. Таким образом, из теоремы 17.11 мы заключаем, что геодезические потоки на унитарных расслоенных пространствах T_1V , касательных к компактным римановым многообразиям отрицательной кривизны, являются K -системами. Следовательно, они обладают положительной энтропией (теорема 12.31, гл. 2), имеют бесконечный лебеговский спектр¹³ (теорема 11.5, гл. 2), являются перемешиванием¹⁴ (теорема 10.4, гл. 2) и эргодичны¹⁵ (следствие 8.4 гл. 2).

§ 18. Эргодическая гипотеза Больцмана–Гиббса

Идеи и методы, изложенные в предыдущих параграфах, применимы к проблемам классической механики, например, к модели газа Больцмана–Гиббса. В этой модели газ представляет собой твердые шары в ящике с твердыми стенами, имеющем форму прямоугольного па-

¹²С учетом формулы Гаусса–Бонне можно утверждать, что многообразие отрицательной кривизны не может быть тором T .

¹³Для случая постоянной кривизны этот результат получен И. М. Гельфандом и С. В. Фоминым [2], для поверхностей непостоянной отрицательной кривизны Я. Г. Синаем [10].

¹⁴Для случая многообразий постоянной кривизны это доказано Э. Хопфом [1].

¹⁵Этот результат получен Хедлундом [1] и Э. Хопфом для поверхностей отрицательной кривизны и многообразий постоянной отрицательной кривизны.

раллелепипеда. Предполагается, что столкновения шаров между собой, равно как и шаров с перегородками и стенками абсолютно упруги.

Эргодичность такой системы¹⁶ доказана для поверхностей уровней энергии $T = \text{const} \neq 0$.

Источником эргодичности таких систем служат столкновения. Рассмотрим простейший случай двух идеальных круглых частиц на поверхности тора \mathbb{T}^2 , снабженного евклидовой метрикой. Упростим задачу еще больше, предположив, что одна из частиц неподвижна, а другая выродилась в точку. Задача сводится к исследованию движения одной частицы «на бильярде в форме тора» (см. рис. 18.1) с упругими столкновениями со стенками неподвижной окружности согласно закону: угол падения α равен углу отражения β .

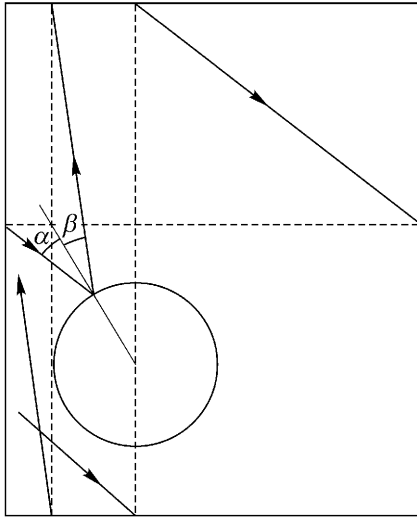


Рис. 18.1

В то же время рассмотрим эллиптический бильярд (рис. 18.2).

¹⁶Этот результат был сформулирован в виде предположения, получившей название «эргодической гипотезы». Она вызвала оживленные дискуссии, положившие начало эргодической теории, когда эргодичность не была ни доказана, ни опровергнута. Но ценность эргодической проблемы для статистической механики, возможно, была преувеличена: нас интересует асимптотическое поведение газа при $N \rightarrow \infty$ (N — число частиц), а не при фиксированном N и $t \rightarrow +\infty$.

Эллипс можно рассматривать как сплюснутый эллипсоид, по которому точка движется, описывая геодезическую. Отражение соответствует переходу с одной стороны такого эллипсоида на другую. Точно так же наш торический бильярд можно рассматривать как двусторонний тор с одной дыркой (окружностью). Точка по такому бильярду движется по геодезической, а отражение соответствует переходу с одной стороны тора на другую.

Но если двусторонний эллипс есть сплюснутый эллипсоид, то двусторонний тор с дыркой есть сплюснутая поверхность рода 2. Таким образом, движение по нашему бильярду есть предельный случай геодезического потока на поверхности рода 2.

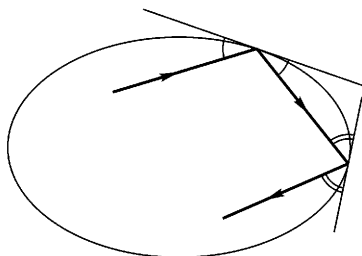


Рис. 18.2

Эллипсоид обладает положительной кривизной, интеграл от которой равен 4π (формула Гаусса–Бонне). При сплющивании эллипсоида в эллипс, положительная кривизна сосредотачивается на границе эллипса. Для поверхностей рода 2 интеграл от кривизны равен -4π . Следовательно, торический бильярд можно рассматривать как предельный случай геодезического потока на поверхности отрицательной кривизны: вся кривизна сосредоточена на упругой окружности.

Разумеется, приведенное выше рассуждение (Арнольд [4]) не является доказательством эргодичности; то же относится и к случаю, который мы рассмотрели. Однако, используя методы и характерные понятия U -систем (асимптотические орбиты, растягивающиеся и сжимающиеся расслоения), Синай [4], [5] сумел доказать, что модель Больцмана–Гиббса эргодична на каждом подмногообразии $T = \text{const} \neq 0$ и, более того, является K -системой.

Доказательства этих результатов занимают несколько страниц и используют теорию обобщенных U -систем, расслоения которых разрыв-

ны. Заметим лишь, что общий случай сводится к задаче о бильярде в конфигурационном пространстве.

Общая литература к главе 3

- [1] Д. В. Аносов, *Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны*. Труды Института им. Стеклова, 90, 1967.
- [2] E. Hopf, *Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig 91, 1939, pp. 261–304.
- [3] Я. Синай. *Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром II*. Изв. АН СССР, 1966, **30**, № 1, с. 15–68.

ГЛАВА 4

Устойчивые системы

Существует обширный класс динамических систем, траектории которых обладают замечательной устойчивостью, не заполняют эргодическим образом поверхность уровня энергии $H = \text{const}$ и остаются все время в некоторой области фазового пространства. Это случай систем, близких к «интегрируемым» системам, и систем, к которым применима «теория возмущений» небесной механики. К этому классу принадлежит задача трех тел, а также исследование быстрых вращений тяжелого твердого тела, движения свободной точки по геодезической на выпуклых поверхностях, системы с адиабатическими инвариантами и т. д.

Только в последние годы, после появления работ К. Л. Зигеля [1] (1942) и А. Н. Колмогорова [5] (1954), можно констатировать определенный прогресс в исследовании таких систем. В этой главе мы кратко изложим современное состояние проблемы; подробности см. в работах Арнольда¹.

Начнем с примера.

§ 19. Качели и соответствующее каноническое отображение

Уравнения движения 19.1

Уравнения движения маятника имеют вид

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 \sin q, \quad (19.2)$$

где ω — «собственная частота», которая зависит от длины маятника. Качели представляют собой маятник, длина которого l периодически изменяется (под действием человека, который находится на качелях, см. рис. 19.3) Уравнения движения качелей имеют вид

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2(t) \sin q, \quad (19.4)$$

где $\omega(t + \tau) \equiv \omega(t)$.

¹См. В. Арнольд [4], [5].

Систему (19.2) мы исследуем в приложении 5, используя фазовую плоскость. Уравнения (19.4) явно содержат время t . Следовательно, речь идет об исследовании векторного поля в трехмерном пространстве p, q, t (см. рис. 19.5).

Отображение T 19.6

Начальные условия $p(0) = p_0, q(0) = q_0$ определяют траекторию движения $p = p(t), q = q(t)$. Принимая во внимание периодичность уравнений (19.4) по t , можно отождествить поверхности $t = 0$ и $t = \tau$ и рассматривать уравнения (19.4) в пространстве $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1(p, q \pmod{2\pi}, t \pmod{\tau})$. В результате мы получаем отображение T поверхности $\Sigma(t = 0)$ в себя:

$$T(p_0, q_0) = (p(\tau), q(\tau)).$$

Ясно, что

$$(p(n\tau), q(n\tau)) = T^n(p_0, q_0).$$

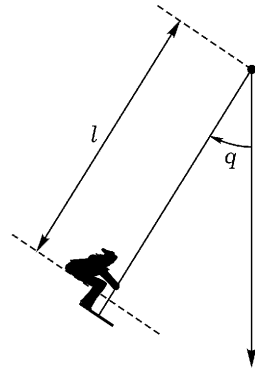


Рис. 19.3

Следовательно, изучение $p(t), q(t)$ при $t \rightarrow \infty$ сводится к исследованию итераций $T^n, n \in \mathbb{Z}$. Уравнения (19.4) — канонические, поэтому отображение также T канонично. Иначе говоря, T сохраняет площадь $dp \wedge dq$.

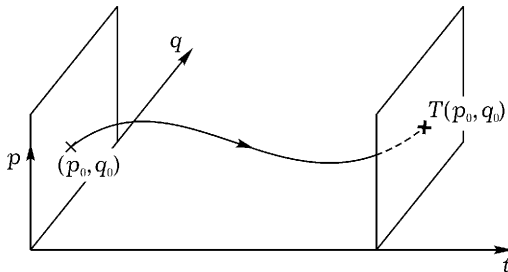


Рис. 19.5

Положение равновесия $p = 0, q = k\pi (k = 0, 1)$ является решением уравнений (19.4). Следовательно, точки $p = 0, q = k\pi$ — неподвижные точки отображения T .

Интегрируемый случай 19.7

Чтобы лучше понять структуру отображения T , рассмотрим прежде всего «интегрируемый случай» — $\omega = \text{const}$. В этом случае система консервативна, поэтому энергия является интегралом. Иначе говоря, кривые на поверхности Σ , заданные уравнением

$$\Gamma: \frac{1}{2}p^2 - \omega^2 \cos q = n$$

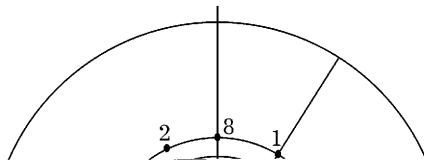
(см. рис. П5.1, приложения 5) — инвариантны при отображении T .

Рассмотрим часть поверхности Σ , заключенную внутри сепаратрисы ($h < \omega^2$). Чтобы исследовать отображение T , используем координаты действие-угол I, φ . Можно доказать (см. приложение 26), что существует каноническое преобразование $\varphi: p, q \rightarrow I$ такое, что уравнение $I = \text{const}$ определяет инвариантную кривую $\Gamma = \Gamma_I$. Координата $\varphi \pmod{2\pi}$ есть угловая координата на Γ_I , и в системе координат I, φ отображение T имеет вид:

$$T: I, \varphi \rightarrow I, \varphi + \lambda(I).$$

Иначе говоря, каждая кривая Γ_I поворачивается на угол $\lambda(I)$, который изменяется от одной кривой к другой, но остается постоянным вдоль каждой кривой (если φ выбрать за параметр). Нетрудно видеть, что для кривых, близких к сепаратрисе $\frac{1}{2}p^2 - \omega^2 \cos q = \omega^2$, $\lim \lambda(I) = 0$, а для кривых, близких к точке $(0, 0)$, $\lim \lambda(I) = \omega\tau$.² Отсюда следует, что одна часть кривых Γ_I поворачивается на угол $\lambda(I)$, соизмеримый с 2π , а другая часть кривых поворачивается на угол, несоизмеримый с 2π . Рассмотрим итерации отображения T точки $x = (p, q)$, принадлежащей кривой Γ такой, что $\lambda = 2\pi \frac{m}{n}$. Мы, очевидно, имеем $T^n x = x$. Следовательно, каждая точка кривой Γ является неподвижной точкой отображения T^n , и траектория точки x состоит из конечного числа точек (см. рис. 19.8). Если угол $\lambda(I)$, соответствующий кривой Γ_I , несоизмерим с 2π , то точки $T^n x$ образуют множество всюду плотное на кривой Γ_I (см. приложение 1). Наконец, заметим, что положение равновесия $p = q = 0$ устойчиво: если величина $|x_0| = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}$ достаточно мала, то величина $|T^n x_0|$ остается малой для всех $n \in \mathbb{Z}$.

²Это следует из того, что линеаризованные в нуле уравнения ($p, q \ll 1$) соответствуют вращению с частотой ω (см. приложение 5); таким образом, за время τ происходит поворот на угол $\omega\tau$.



[The text in this section is almost entirely obscured by heavy black redaction bars.]

$(\frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q \leq \omega_0^2)$, исключая множество меры Лебега, малой вместе с ε .

Иначе говоря, при достаточно малом ε инвариантные кривые Γ_ε , для которых угол $\lambda(I)$ «достаточно несоизмерим» с 2π , не исчезают, а лишь слегка деформируются. Образы $T_\varepsilon^n x$ точек $x \in \Gamma_\varepsilon$ лежат на кривых Γ_ε .

Из теоремы 19.20 также следует, что движения, соответствующие начальным условиям, которые не лежат на кривых Γ_ε , а расположены между этими кривыми, устойчивы. Действительно, кривая Γ_ε , инвариантная относительно T_ε , представляет собой в силу уравнений (19.4) инвариантный тор³ в пространстве p, q, t ($q \pmod{2\pi}$, $t \pmod{\tau}$). Следовательно, интегральная кривая уравнений (19.4), выходящая из точки, расположенной между двумя инвариантными торами, никогда не может покинуть слой, ограниченный двумя такими торами (см. рис⁴. 19.21).

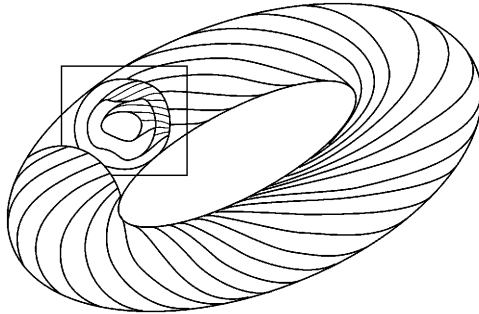


Рис. 19.21

Теорема 19.20 является непосредственным следствием из теоремы 21.11 (§ 21), доказательство которой приведено в приложении 34.

§ 20. Неподвижные точки периодических движений

Чтобы лучше понять структуру зон, расположенных между кривыми Γ_ε , рассмотрим неподвижные точки отображения T_ε и его итераций. Эти точки соответствуют периодическим движениям качелей.

³Т. е. квазипериодическое движение качелей.

⁴Рис. из работы В. И. Арнольда [5].

Эллиптические и гиперболические точки 20.1

Исключая в окрестности неподвижной точки все члены, начиная со второго порядка, получим его линейную часть, то есть дифференциал. Дифференциал канонического отображения есть каноническое линейное отображение. Линейные канонические отображения рассмотрены в приложении 27. Если это линейное отображение гиперболично (соответственно, гиперболично с отражением, эллиплично), то говорят, что неподвижная точка называется гиперболической (соответственно, гиперболической с отражением, эллиптической). Несложно показать, что гиперболические неподвижные точки неустойчивы не только для линейной части отображения, но и для всего нелинейного отображения (Адамар). Проблема устойчивости эллиптических точек известна как «проблема Биркгофа». В общем случае эллиптические точки двумерных систем являются устойчивыми (см. приложение 28).

Устойчивость верхнего положения равновесия 20.2

Рассмотрим теперь неподвижную точку $p = q = 0$ отображения T_ε из § 19. При $\varepsilon = 0$ отображение $T_\varepsilon = T$ эллиплично в нуле; действительно, линейная часть отображения T представляет собой эллиптический поворот на угол $\lambda = \omega\tau = 2\pi\frac{\omega}{\nu}$. Следовательно, при достаточно малом ε отображение T_ε также эллиплично при $\lambda \neq k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$). Иначе говоря, устойчивость может изменяться только при

$$\nu \approx \frac{2\omega}{1}, \frac{2\omega}{2}, \frac{2\omega}{3}, \dots \quad (20.3)$$

Несложные вычисления показывают, что при этих значениях (называемых значениями «параметрического резонанса», см. приложение 29) отображение T_ε действительно гиперболично в точке $p = q = 0$. Иначе говоря, положение свободного равновесия качелей становится неустойчивым (а качели начинают колебаться), если присесть во время целого числа полупериодов собственных колебаний. Этот вывод эмпирически хорошо известен⁵.

⁵ Впрочем, заметим, что амплитуда колебаний системы (19.4) остается малой при достаточно малом ε , поскольку, по теореме 19.20 траектория пролегает между кривыми Γ_ε . Это объясняется нелинейным характером системы: частота λ зависит от амплитуды, колебания не успевают усиливаться, и условие (20.3) более не выполняется.

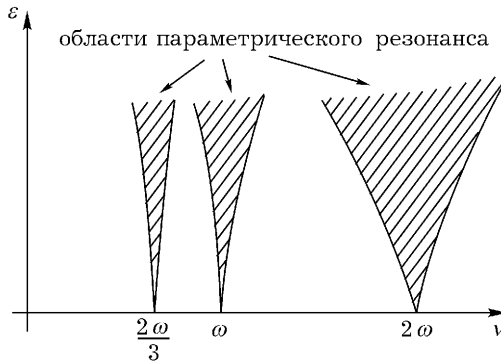


Рис. 20.4

Неподвижные точки итераций отображения T_ε : существование 20.5

Рассмотрим теперь неподвижные точки отображения T_ε^n . Пусть Γ — инвариантная кривая отображения T , образованная неподвижными точками отображений T^n (см. § 19). Пусть

$$\lambda(I) = 2\pi \frac{m}{n}, \quad \frac{d\lambda}{dI} \neq 0.$$

n -кратная итерация отображения T возвращает каждую точку Γ в первоначальное положение. Это свойство отображения T пропадает при наложении малого возмущения ($T \rightarrow T_\varepsilon$). Но, как было показано Пуанкаре, при достаточно малом ε отображение T_ε^n имеет $2kn$ неподвижных точек вблизи кривой Γ . Действительно, рассмотрим две кривые, инвариантные относительно T и близкие к Γ : кривые Γ^+ и Γ^- с углами поворота $\lambda^+ > \lambda > \lambda^-$ (см. рис. 20.6). Следовательно, отображение T^n поворачивает кривую Γ^+ в положительном направлении, а кривую Γ^- — в отрицательном.

В результате это свойство сохраняется для T_ε^n при достаточно малом ε . Следовательно, на каждом радиусе $\varphi = \text{const}$ существует точка $r(\varphi, \varepsilon)$, которая под действием отображения T_ε^n смещается по радиусу:

$$\varphi(T_\varepsilon^n r(\varphi, \varepsilon)) = \varphi.$$

Кроме того, при достаточно малом ε точки $r(\varphi, \varepsilon)$ образуют замкнутую аналитическую кривую R_ε , близкую к Γ . Напомним, что отображение T_ε^n — каноническое, следовательно, оно сохраняет площадь. Это

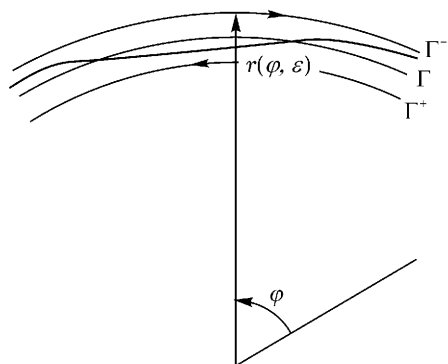


Рис. 20.6

означает, что образ T_ε^n кривой R_ε не может находиться ни внутри, ни снаружи кривой R_ε . Следовательно, $T_\varepsilon^n R_\varepsilon$ пересекает кривую R_ε (см. рис. 20.7). Но поскольку T_ε^n смещает каждую точку кривой R_ε по радиусу $\varphi = \text{const}$, точки пересечения R_ε и $T_\varepsilon^n R_\varepsilon$ являются неподвижными точками отображения T_ε^n . Таким образом, существование неподвижных точек отображения T_ε^n в окрестности кривой Γ доказано.

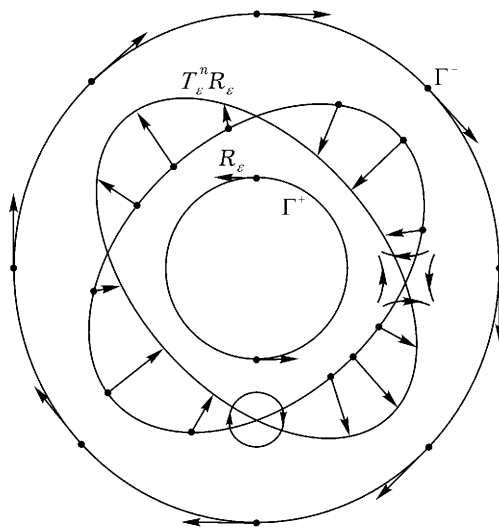


Рис. 20.7

Неподвижные точки итераций отображения T_ε : классификация 20.8

Рассмотрим теперь характер этих неподвижных точек: выясним, являются ли они эллиптическими или гиперболическими. При $\varepsilon = 0$ все эти неподвижные точки параболические и соответствуют собственным значениям $\lambda_{12} = 1$. Следовательно, при достаточно малом ε выполняется $\lambda_{12} \approx 1$ и гиперболический случай с отражением невозможен.

С другой стороны, рассмотрим «радиальное смещение»

$$\Delta(\varphi) = I(T_\varepsilon^n r(\varphi)) - I(r(\varphi)).$$

В неподвижных точках отображения T_ε^n функция $\Delta(\varphi)$ имеет нули. В общем случае эти нули простые ($\Delta' = d\Delta/d\varphi \neq 0$). Таким образом, нули, в которых $\Delta' > 0$, чередуются с другими нулями, в которых $\Delta' < 0$. Следовательно, число неподвижных точек четно.

Рассмотрим теперь векторное поле, образованное в окрестности кривой Γ векторами с началом в точке x и концом в точке $T_\varepsilon^n x$ (см. рис. 20.7). Нетрудно видеть (рис. 20.7), что индекс (приложение 27) этого поля в неподвижных точках определяется по формуле

$$\text{Ind} = \text{sign} \left(\frac{d\lambda}{dI} \cdot \frac{d\Delta}{d\varphi} \right).$$

Следовательно, одна половина неподвижных точек имеет индекс $+1$, а другая — индекс -1 . Это означает, что одну половину составляют эллиптические неподвижные точки, а другую — гиперболические неподвижные точки (индекс эллиптической точки равен $+1$, индекс гиперболической точки равен -1). Эллиптические и гиперболические неподвижные точки иллюстрируются на рис. 20.7.

Рассмотрим теперь эллиптическую неподвижную точку $T_\varepsilon^n x = x$. Траектория этой точки состоит из точек $x, T_\varepsilon x, T_\varepsilon^2 x, \dots, T_\varepsilon^{n-1} x$. Следовательно,

$$\varphi(T_\varepsilon^l x) \approx \varphi(x) + 2\pi l \frac{m}{n}.$$

Таким образом, все эти точки являются неподвижными точками отображения $T_\varepsilon^n x$ и эллиптически (все они имеют те же собственные значения, что и точка x). Это означает, что множество всех эллиптических неподвижных точек разделяется на орбиты, каждая из которых состоит из n точек. Пусть k — число таких орбит; тогда число эллиптических точек равно kn , а общее число неподвижных точек, как и было отмечено в § 20.5, равно $2kn$.

Зоны неустойчивости 20.9

Рассмотрим теперь окрестности найденных выше эллиптических и гиперболических точек. Следуя В. И. Арнольду [7], каждая эллиптическая точка «общего» типа (см. также приложение 28) окружена замкнутыми кривыми, инвариантными относительно T_ε^n . Эти кривые образуют «островки» (см. рис⁶. 20.10). Каждый островок в миниатюре воспроизводит всю структуру в целом — с кривыми Γ'_ε , островками внутри этих кривых и т. д.

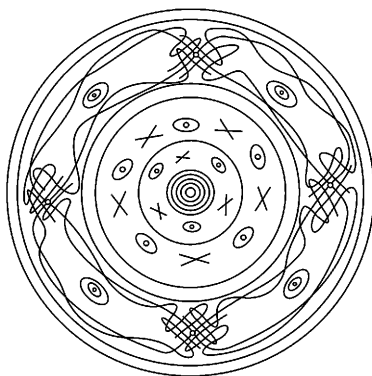


Рис. 20.10

Между островками и кривыми Γ_ε остаются еще зоны вблизи гиперболических точек. Действительно, рассмотрим сепаратрисы гиперболических точек отображения T_ε^n . Можно показать⁷, что эти сепаратрисы гиперболических точек образуют сложную сеть, в общих чертах изображенную на рис. 20.10. Открывший ее А. Пуанкаре писал ([2], t. 3, chap. 33, p. 389⁸):

«Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще, всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла и в которых ряды Болина расходятся.»

⁶Рис. воспроизведен из работ В. И. Арнольда [4].

⁷См. Н. Poincaré [2], В. К. Мельников [1].

⁸А. Пуанкаре «Избранные труды», Т. II. — М. Наука, 1972, с. 339.

Неизвестно, обладают ли движения в зонах неустойчивости эргодическими свойствами. Возможно, что среди эргодических составляющих встречаются системы с сингулярным спектром, а также K -системы.

Замечание 20.11. Заметим, что существование бесконечного числа эллиптических островков при заданном $\varepsilon \ll 1$ не следует из наших рассуждений. В силу последней геометрической теоремы Пуанкаре⁹, в кольце, расположенном между инвариантными кривыми Γ_ε , существует бесконечное число неподвижных точек отображения T_ε^n ($n \rightarrow \infty$) с индексом $+1$ (см. теорему 19.10). Однако может случиться так, что некоторые из этих точек будут не эллиптическими, а гиперболическими с отражением. Численные эксперименты¹⁰, по-видимому, свидетельствуют в пользу такого вывода.

Следующие иллюстрации (рис. 20.12–20.14) заимствованы из работы Хеннона и Хейлеса [1]; на них изображены орбиты отображения типа T_ε , вычисленные с помощью компьютера. Все точки, расположенные не на кривых, принадлежат одной-единственной траектории.

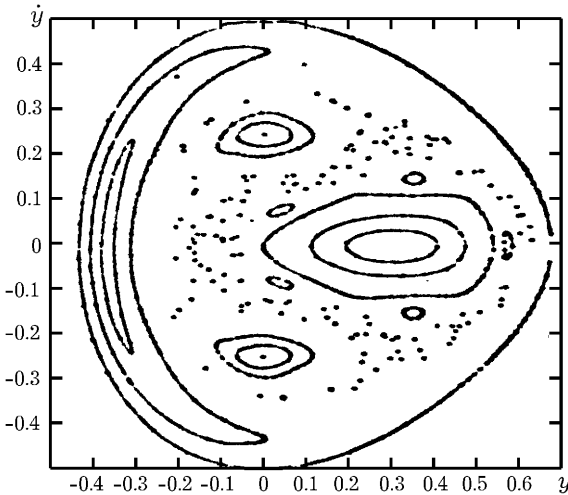


Рис. 20.12

⁹См. Н. Poincare [3], G. D. Birkhoff [1].

¹⁰См. Гельфанд, Граев, Зуева, Михайлова, Морозов [3]; Охоцимский, Сарычев и т. д. [1], М. Henon и С. Heiles [1].

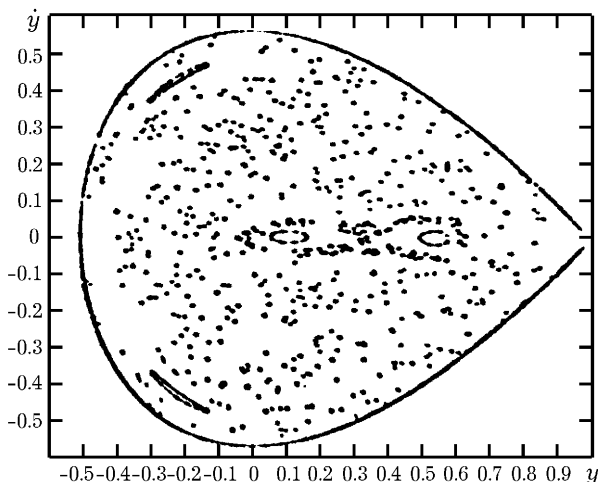


Рис. 20.13

§ 21. Инвариантные торы и квазипериодические движения

Пример, рассмотренный нами в §§ 19 и 20, представляет собой частный случай общей ситуации, которая встречается для всех систем, близких к так называемым «интегрируемым системам».

А) Интегрируемые системы 21.1

Рассматривая интегрируемые задачи в классической механике¹¹, мы обнаруживаем, что для каждой из них ограниченные траектории либо периодические, либо квазипериодические. Иначе говоря, фазовое пространство расслоено на инвариантные торы, несущие квазипериодические движения.

ПРИМЕР 21.2. Пусть фазовое пространство $\Omega = \mathbb{T}^n \times B^n$ есть прямое произведение ограниченной области B^n евклидова пространства \mathbb{R}^n и тора \mathbb{T}^n , $p = (p_1, \dots, p_n)$ — координаты на B^n , $q = (q_1, \dots, q_n) \pmod{2\pi}$ — координаты на \mathbb{T}^n . Система гамильтоновых уравнений с га-

¹¹Например, движение свободной точки по геодезическим на трехосном эллипсоиде или торе (см. 1.7, гл. 1 и приложение 2), тяжелое твердое тело (случай Эйлера, Лагранжа и Ковалевской) и т. д.

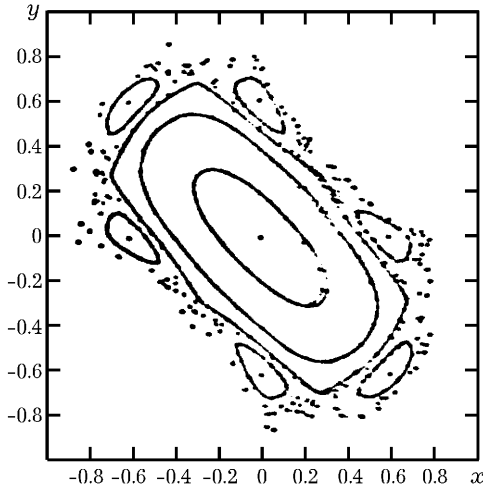


Рис. 20.14

мильтонианом $H = H_0(p)$

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \omega_0(p), \quad \text{где} \quad \omega_0(p) = \frac{dH_0}{dp}, \quad (21.3)$$

описывает квазипериодическое движение с частотами $\omega(p)$ на инвариантных торах $p = \text{const}$. Частоты изменяются от тора к тору; если

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = \frac{\partial \omega_0}{\partial I} \neq 0,$$

то в каждой окрестности тора $p = \text{const}$ существуют инвариантные торы, на которых частоты независимы, а орбиты всюду плотны¹². Существуют также другие торы с соизмеримыми частотами; такие торы «исключительны» в том смысле, что они образуют множество меры нуль. Координаты (p, q) на $B^n \times \mathbb{T}^n$ называются координатами «действие-угол».

Можно доказать¹³, что во всех «интегрируемых» системах фазовое пространство разделено гиперповерхностями-сепаратрисами на инвариантные области, каждая из которых расслоена на инвариантные

¹²См. приложение 1.

¹³См. приложение 26.

n -мерные многообразия. Если область ограничена, то эти многообразия являются торами, несущими квазипериодические движения. Для такой системы могут быть введены переменные действие-угол, а система может быть записана в виде (21.3).

В) Системы, близкие к интегрируемым 21.4

Рассмотрим теперь возмущенную функцию Гамильтона:

$$H = H_0(p) + H_1(p, q), \quad H_1(p, q + 2\pi) = H_1(p, q) \ll 1,$$

где «возмущение» H_1 «мало». Соответствующие гамильтоновы уравнения имеют вид:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \quad \dot{q} = \omega_0(p) + \frac{\partial H_1}{\partial p}. \quad (21.5)$$

А. Н. Колмогоров [6] доказал, что для большинства начальных условий движение остается квазипериодическим (см. теорему 21.7). Отсюда следует, что системы (21.5) не эргодичны на поверхности $H = \text{const}$ и что среди эргодических компонент имеются компоненты с дискретным спектром, дополнение к которым имеет настолько малую лебеговскую меру, насколько мало возмущение H_1 .

Предположим, что функция $H(p)$ аналитична в комплексной окрестности $[\Omega]$ фазового пространства Ω ($\text{Re } p, \text{Re } q \in \Omega$, $|\text{Im } p| < \rho$, $|\text{Im } q| < \rho$), а также что невозмущенная система невырождена:

$$\det \left| \frac{\partial \omega_0}{\partial p} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right| \neq 0. \quad (21.6)$$

Выберем вектор несоизмеримых¹⁴ частот $\omega = \omega^*$. Пусть $T_0(\omega^*)$ — инвариантный тор невозмущенной системы (21.3), имеющий уравнение $p = p^*$, где $\omega_0(p^*) = \omega^*$. Тогда система (21.3) имеет на торе $T_0(\omega^*)$ частоты ω^* .

Теорема 21.7. *Если возмущение H_1 достаточно мало, тогда при почти любом¹⁵ ω^* существует инвариантный тор $T(\omega^*)$ возмущенной системы (21.5), и тор $T(\omega^*)$ близок к $T_0(\omega^*)$.*

¹⁴Т. е. $(\omega, k) \neq 0$ для всех целых k .

¹⁵За исключением множества лебеговой меры нуль.

Более точно: при любом $\alpha > 0$ существует $\varepsilon > 0$ и отображение $p = p(Q)$, $q = q(Q)$ абстрактного тора $\mathbb{T} = \{Q \pmod{2\pi}\}$ в $T(\omega^*)$ такое, что в силу гамильтоновых уравнений (21.5)

$$\dot{Q} = \omega^*$$

и

$$|p(Q) - p^*| < \varepsilon, \quad |q(Q) - Q| < \varepsilon$$

при условии, что в $[\Omega]$

$$|H_1| < \varepsilon = \varepsilon(\alpha, \omega^*, H_0, \Omega, \rho), \quad \varepsilon > 0.$$

Кроме того, торы $T(\omega)^*$ образуют множество положительной меры; мера дополнения к этому множеству стремится к нулю вместе с $|H_1|$. Доказательство теоремы 21.7 можно найти в работе Арнольда [5].

Поведение траекторий в этом дополнении до сих пор недостаточно изучено. Для систем с двумя степенями свободы ($n = 2$) фазовое пространство Ω четырехмерно. Инвариантная гиперповерхность $H = \text{const}$, имеющая размерность, равную 3, разделена на инвариантные торы возмущенной системы. Дополнительные области образуют торические кольца между инвариантными торами (см. рис. 19.21). При $n > 2$ инвариантные n -мерные торы не разделяют гиперповерхность $H = \text{const}$ размерности $2n - 1$, а траектории, не лежащие на торах $T(\omega^*)$, могут продолжаться весьма далеко вдоль поверхности $H = h$ (см. § 23).

С) Приложения и обобщения 21.8

Теорема 21.7 применима к движению свободной точки по геодезической на поверхностях, близких к поверхностям вращения или эллипсоидам. Эта теорема позволяет доказать устойчивость «планетоида» в ограниченной плоской круговой задаче трех тел¹⁶. Из нее можно также вывести устойчивость быстрых вращений тяжелого несимметричного твердого тела¹⁷.

Но эта теорема неприменима в том случае, если возмущенная система несет больше частот, чем невозмущенная (вырожденный случай), поскольку при этом не выполняется условие (21.6):

$$\det \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \equiv 0.$$

¹⁶А. Н. Колмогоров [7].

¹⁷В. И. Арнольд [5].

Случай «предельного вырождения», который встречается в теории колебаний (точки равновесия, периодические движения) также требует особого рассмотрения. Укажем несколько результатов в этом направлении, обобщающих теорему 21.7. В. И. Арнольд [7] доказал *устойчивость положений равновесия и периодических движений* систем с двумя степенями свободы для общего эллиптического случая. В качестве следствия А. М. Леонтович [1] доказал *устойчивость периодических лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел (плоской и круговой)*.

Образование новых частот после возмущения вырожденных систем исследовано в работах В. И. Арнольда [8], [9], [10]. В качестве следствия доказана вечная адиабатическая инвариантность действия при $-\infty < t < \infty$ в нелинейных системах с одной степенью свободы, параметры которых изменяются периодически, а также что «магнитная ловушка» с осесимметричным магнитным полем может бесконечно долго удерживать заряженные частицы.

Наконец, в задаче n тел получено множество квазипериодических движений *положительной меры* для случая, когда массы $n-1$ тел достаточно малы по сравнению с массой «центрального тела». Эти квазипериодические движения имеют «планетарный» характер: эксцентриситеты и наклоны кеплеровских (оскулирующих) эллипсов малы, и длины больших всегда остаются близкими к своим начальным значениям (см. В. И. Арнольд [4]).

С другой стороны, Ю. Мозер предложил обобщение теоремы 21.7. Мозер доказал, что требование об аналитичности в теореме 21.7 не обязательно: *достаточно предположить существование конечного числа производных*. Например, для системы с двумя степенями свободы достаточно, чтобы гамильтониан H был дифференцируем 333 раза!

D) Инвариантные торы канонических отображений 21.9

Теорему 21.7 можно сформулировать иначе, если воспользоваться «поверхностями сечения» Пуанкаре–Биркгофа. Предположим, что в (23.1) первая компонента вектора ω отлична от нуля: $\omega_1 \neq 0$. Рассмотрим подмногообразие Σ^{2n-2} фазового пространства Ω^{2n} , заданное уравнениями

$$q_1 = 0, \quad H = h = \text{const.}$$

Пусть x — точка подмногообразия Σ^{2n-2} , $x(t)$ — траектория гамильтоновой системы (21.5), выходящая из x . Обозначим через Ax

первую точку пересечения орбиты $x(t)$ с Σ^{2n-2} при возрастании t от нуля (см. рис. 19.21). Отображение $\mathbf{A}: \Sigma^{2n-2} \rightarrow \Sigma^{2n-2}$ вполне определено в окрестности тора размерности $n - 1$, заданного уравнениями $p = \text{const}$, $q = 0$ при $\omega_1(p) \neq 0$ и при достаточно малом возмущении H_1 . Из того, что

$$\frac{\partial H}{\partial I_1} = \omega_1 \neq 0,$$

следует, что в этой окрестности переменные $p_2, \dots, p_n; q_2, \dots, q_n \pmod{2\pi}$ являются координатами действие-угол. Отображение \mathbf{A} — каноническое (см. приложение 31). Рассмотрим теперь невозмущенный случай ($H_1 = 0$). В силу (21.3) отображение \mathbf{A} можно представить в виде

$$\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega(p); \quad \omega_k(p) = 2\pi \frac{\omega_k}{\omega_1}, \quad (k = 2, \dots, n). \quad (21.10)$$

Иначе говоря, каждый тор $p = \text{const}$ инвариантен и при отображении \mathbf{A} поворачивается на угол $\omega(p)$.

Если возмущение H_1 достаточно мало, то соответствующее каноническое отображение \mathbf{A} поверхности Σ^{2n-2} близко к (21.10). Ясно, что $(n - 1)$ -мерные инвариантные торы отображения \mathbf{A} соответствуют n -мерным инвариантным торам системы (21.5). Аналогом теоремы (21.7) для таких отображений является приводимая ниже теорема 21.11. Пусть снова ω — фазовое пространство p, q :

$$\Omega = \mathbb{T}^n \times B^n, \quad B^n = \{p\}, \quad \mathbb{T}^n = \{q \pmod{2\pi}\}.$$

Предположим, что $\mathbf{B}: p, q \rightarrow p'(p, q), q'(p, q)$ — глобальное каноническое отображение, т. е.

$$\oint_{\gamma} p dq = \oint_{\mathbf{B}\gamma} p' dq'$$

для любой замкнутой кривой γ в Ω (см. приложение 33). Предположим также, что функции $p'(p, q), q'(p, q) - q$ аналитические в комплексной окрестности $[\Omega]$ фазового пространства Ω :

$$\text{Re}(p), \text{Re}(q) \in \Omega; \quad |\text{Im } p|, |\text{Im } q| < \rho.$$

Пусть $\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega(p)$ — каноническое отображение, заданное функцией $\omega(p)$, аналитической в $[\Omega]$ и $T_0(\omega^*)$ — тор $\{p = p^*, \omega(p^*) = \omega^*\}$, инвариантный относительно \mathbf{A} .

Теорема 21.11. *Если отображение \mathbf{B} достаточно близко к тождественному, то почти при любом¹⁸ ω^* существует тор $T(\omega^*)$, инвариантный относительно $\mathbf{B}\mathbf{A}$ и близкий к $T_0(\omega^*)$.*

Более точно, при любом $\alpha > 0$ существует $\varepsilon > 0$ и отображение $\mathbf{D}: \mathbf{T} \rightarrow \omega$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q})$ абстрактного тора $T = \{Q \pmod{2\pi}\}$ в Ω такое, что

$$\mathbf{D}(Q + \omega^*) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}(Q),$$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\mathbf{B}} \\ \mathbf{D} \uparrow & & \uparrow \\ Q & \longrightarrow & Q + \omega^* \end{array}$$

и

$$|p(Q) - p^*| < \alpha, \quad |q(Q) - Q| < \alpha,$$

если в $[\Omega]$ выполняется неравенство

$$|p' - p| + |q' - q| < \varepsilon = \varepsilon(\alpha, \omega^*, \mathbf{A}, \Omega, \rho) > 0.$$

Кроме того, торы $T(\omega^*)$ образуют множество положительной меры, дополнение к которому имеет меру, стремящуюся к нулю вместе с $|p' - p| + |q' - q|$. Теорема 19.10 непосредственно следует из теоремы 21.11 при $n = 1$.

Теорема 21.11 известна с 1954 года, хотя ее доказательство никогда не было опубликовано. Ю. Мозер [1] дал ее доказательство для случая отображений плоскости ($n = 1$). В этом доказательстве используется топология \mathbb{R}^2 . Доказательство теоремы для произвольного n см. в приложении 34: топологическая часть сводится к методу производящих функций глобальных канонических отображений (см. приложение 33).

Сравнение теоремы 21.7 с 21.11 и 21.12

Неизвестно, можно ли построить любое каноническое аналитическое преобразование, близкое к \mathbf{A} , используя сечение подходящей гамильтоновой системы. Следовательно, теорему 21.11 невозможно вывести из теоремы 21.7.

¹⁸Исключая множество лебеговой меры нуль.

Точно так же, если ограничиться гамильтоновой системой (21.5), то теоремы 21.7 и 21.11 не приводят к эквивалентным результатам. Действительно, условия невырожденности теорем 21.7 и 21.11

$$\det \left| \frac{\partial \omega}{\partial p} \right| \neq 0, \quad \det \left| \frac{\partial \omega}{\partial p} \right| \neq 0$$

представимы в терминах невозмущенной функции Гамильтона H_0 в виде

$$\det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right| \neq 0, \quad \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} & \frac{\partial H_0}{\partial p} \\ \frac{\partial H_0}{\partial p} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ясно, что эти последние два условия независимы. Каждое из них достаточно для существования инвариантных торов. Кроме того, второе условие гарантирует наличие инвариантных торов на любом уровне энергии, что влечет за собой устойчивость (см. рис. 19.21) в случае двух степеней свободы ($n = 2$ в теореме 21.7, $n = 1$ в теореме 21.11).

Кроме того, в приложениях оба условия (21.13) либо одновременно выполняются, либо ни одно из них не справедливо.

§ 22. Теория возмущений

Обратимся к асимптотической теории, т. е. ограничимся изучением поведения траекторий при $0 < t < 1/\varepsilon$, где ε — возмущение. Кроме того мы можем теперь рассматривать негамильтоновы системы.

А) Метод усреднения¹⁹ 22.1

Пусть $\mathbb{T}^k = \varphi \pmod{2\pi}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ — k -мерный тор, $B^l = I$, $I = (I_1, \dots, I_l)$ — ограниченная область евклидова пространства \mathbb{R}^l . Рассмотрим в фазовом пространстве $\omega = \mathbb{T}^k \times B^l$ невозмущенную систему

$$\dot{\varphi} = \omega(I), \quad \dot{I} = 0, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k). \quad (22.2)$$

Ясно, что это — обобщение системы (21.3) из § 21: каждый тор $I = \text{const}$ инвариантен, и если частоты ω несоизмеримы на торе \mathbb{T} , то траектории $\omega(t)$ всюду плотны на этом торе. В этом случае движение (22.2) на

¹⁹Этот метод использовали в небесной механике еще Лагранж, Лаплас и Гаусс.

торе \mathbb{T} называется квазипериодическим. Если частоты соизмеримы, то замыкание орбиты есть тор, размерность которого k меньше n (резонанс).

Рассмотрим теперь возмущенную систему, обобщающую систему (21.5) из § 21:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi), \\ \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi), \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} f(I, \varphi + 2\pi) = f(I, \varphi), \\ F(I, \varphi + 2\pi) = F(I, \varphi), \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (22.3)$$

Ясно, что при $t \approx 1$ эволюция $I(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|I(t) - I(0)| \sim \varepsilon \ll 1.$$

Заметные (порядка единицы) эффекты эволюции могут наблюдаться лишь на достаточно больших интервалах времени $t \sim 1/\varepsilon$.

Рассмотрим теперь применение теории возмущений. Пусть $\bar{F}(I)$ — среднее:

$$\bar{F}(I) = \frac{1}{(2\pi)^{-k}} \oint \cdots \oint F(I, \varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_k.$$

Рассмотрим «усредненную систему», или «систему эволюции»:

$$\dot{J} = \varepsilon \cdot \bar{F}(I). \quad (22.4)$$

Предполагая, что $\varepsilon \ll 1$, получаем:

$$|I(t) - J(t)| \ll 1 \quad \text{при любом} \quad 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (22.5)$$

где $I(t)$, $\varphi(t)$ — решение уравнений (22.3), $J(t)$ — решение уравнения, соответствующее начальным условиям $J(0) = I(0)$.

Проблема, которая теперь возникает, заключается в следующем: *какая существует связь между истинным возмущенным движением $I(t)$ и динамикой усредненной системы $J(t)$ при $0 < t < 1/\varepsilon$? Выполняется ли неравенство (22.5)?*

В самом простом случае периодических движений ($k = 1$) нетрудно доказать (см. приложение 30 и Боголюбов и Митропольский [1]), что если $\omega \neq 0$, то

$$|I(t) - J(t)| < C\varepsilon \quad \text{при любом} \quad 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Но уже в случае двух частот ($k = 2$) ситуация более сложная.

В) Контрпример 22.6

Пусть $k = l = 2$, $a > 1$. Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi} = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2, \quad \dot{I}_1 = \varepsilon, \quad \dot{I}_2 = \varepsilon a \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ясно, что усредненная система имеет вид

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \quad \dot{J}_2 = 0$$

(что соответствует малым стрелкам на рис. 22.7). Рассмотрим теперь начальные условия

$$I_1 = I_2 = J_1 = J_2 = 1, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{1}{a}.$$

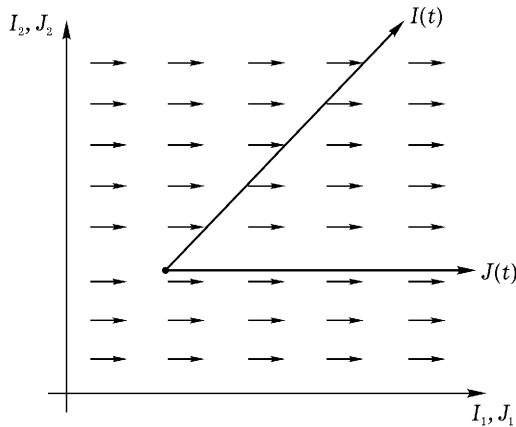


Рис. 22.7

Имеем:

$$I_1(t) = I_2(t) = 1 + \varepsilon t, \quad J_1(t) = 1 + \varepsilon t, \quad J_2(t) = 1,$$

следовательно,

$$\left| I\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| = 1.$$

Иначе говоря, по истечении времени $1/\varepsilon$ усредненное движение утрачивает всякое отношение к истинному движению, которое захватывается в резонанс $\omega_1 = \omega_2$.

С) Математическое обоснование метода усреднения 22.8

Существуют по крайней мере четыре различных подхода к вопросу математического обоснования метода усреднения. Пока все четыре позволили получить достаточно скромные результаты.

1) Можно подробно исследовать *окрестности частных решений усредненной системы* (например, окрестности положений равновесия ($\bar{F} = 0$)). Притягивающим точкам системы (22.4) соответствуют притягивающие торы (аттракторы) системы (22.3). Ясно, что в окрестности такого тора имеет место устойчивость ($0 < t < \infty$). Существование притягивающих торов для возмущенных систем доказано Н. Н. Боголюбовым [2], Ю. Мозером [2] и И. Купкой [1].

Такой подход неприменим к гамильтоновым системам, поскольку для таких систем по теореме Лиувилля 1.10 (см. гл. 1) притягивающие множества (аттракторы) не существуют.

2) Отношение между $I(t)$ и $J(t)$ можно исследовать *для большей части (в смысле теории меры) начальных условий*, пренебрегая точками, соответствующих резонансам. Аносов [3] и Касуга [1] доказали теоремы следующего типа.

Пусть $R(\varepsilon, \rho)$ — множество начальных условий в Ω таких, что при некоторых $0 < t < 1/\varepsilon$ выполняется неравенство $|I(t) - J(t)| > \rho$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{мера } R(\varepsilon, \rho) = 0 \quad \text{для всех } \rho > 0.$$

Метод, о котором идет речь, позволяет получить аналогичные результаты для систем гораздо более общих, чем система (22.3), но в этом и заключается его слабость: оценка меры множества начальных условий $R(\varepsilon, \rho)$ нереальна и не содержит никакой информации о характере движения в $R(\varepsilon, \rho)$.

3) Можно исследовать явление прохождения через состояние резонанса.

4) Больше результатов можно получить, если *ограничиться гамильтоновыми системами*.

D) Прохождение через резонанс 22.9

Начнем с примера

$$\dot{\varphi}_1 = I_1 + I_2, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2, \quad \dot{I}_1 = \varepsilon, \quad \dot{I}_2 = \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

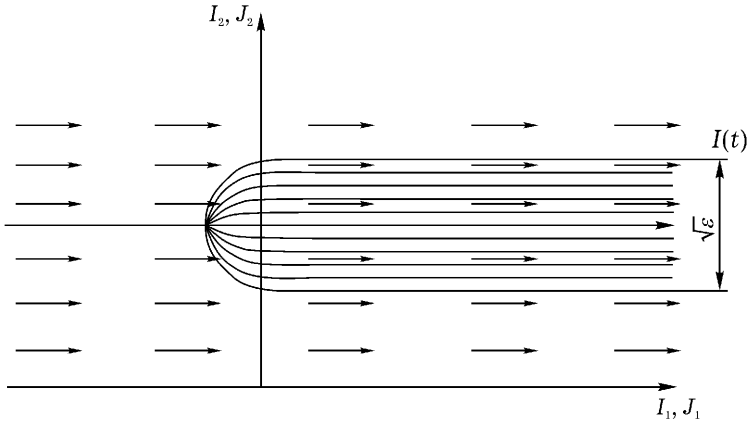


Рис. 22.10

Усредненная система имеет вид (см. рис. 22.10)

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \quad \dot{J}_2 = 0.$$

Рассмотрим начальные условия, соответствующие резонансу $\omega_1 = \omega_2$:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = I_1(0) = I_2(0) - 1 = 0.$$

После несложных выкладок получим:

$$|I(t) - J(t)| = |I_2(t) - 1| = \sqrt{2\varepsilon} \int_0^\tau \cos x^2 dx, \quad \tau = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} t.$$

Следовательно, при $t = 1/\varepsilon$ разность составляет

$$\left| I\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - J\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| = C\sqrt{\varepsilon}.$$

Таким образом, при прохождении резонанса $\omega_1 = \omega_2$ орбита $I(t)$ отличается от орбиты усредненного движения на величину порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Можно также заметить, что пучок траекторий $I(t), \varphi(t)$, различающихся только фазами $\varphi(0)$ в начальный момент времени, рассеивается на этом резонансе, причем рассеяние величины I_2 при прохождении резонанса $\omega_1 = \omega_2$ имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$ (см. рис. 22.10). Для общей системы (22.3) с двумя частотами ($k = 2$) можно получить следующую теорему²⁰.

²⁰В. И. Арнольд [12].

Разность между точным и усредненным решениями оценивается величиной

$$|I(t) - J(t)| < C\sqrt{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{для всех } 0 < t < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (22.11)$$

если $\frac{\partial \omega_1}{\partial I} \neq 0$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial I} \neq 0$ и функция

$$A(I, \varphi) = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial I} F \right) \omega_2 - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial I} F \right) \omega_1$$

не обращается в нуль в Ω . Ограничение $A \neq 0$ означает, что если $A \neq 0$, то система не захватывается в резонанс, при этом в силу (22.3)

$$\frac{(d\omega_1/\omega_2)}{dt} \neq 0.$$

В примере (22.6) условие $A \neq 0$ не выполняется: функция $A(I, \varphi) = I_2 - I_1 a \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ изменяет знак при $I_1 = I_2$, если $a > 1$. Этот пример показывает, что условие $A \neq 0$ невозможно заменить аналогичным условием для усредненной системы.

Доказательство неравенства (22.11) основано на том, что рассеивающее действие каждого резонанса по порядку величины составляет $C\sqrt{\varepsilon}$ и что среди бесконечно многих резонансов $\omega_1/\omega_2 = m/n$ только самый сильный резонанс $\ln^2(1/\varepsilon)$ ($m, n < \ln(1/\varepsilon)$) производит заметный эффект. Для систем с более чем двумя частотами ($k > 2$) прохождение через резонанс не исследовано.

Е) Усреднение гамильтоновых систем 22.12

Применим метод усреднения к гамильтоновым системам (21.5). Если выполняется условие невырожденности (21.6), то большая часть невозмущенных орбит эргодична на торах $p = \text{const}$. Поэтому такие системы можно представить в виде (22.3) с $I = p$, $\varphi = q$, $k = n$:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \\ \dot{i} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

где

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad \omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}.$$

Усредненную систему можно записать в виде $\dot{J} = 0$, так как

$$\overline{F}(J) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \oint \dots \oint \frac{\partial H_1(I, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi_1 \dots d\varphi_n \equiv 0.$$

Иначе говоря, в невырожденных гамильтоновых системах эволюции переменных действия не происходит.

Этот вывод может быть строго подтвержден теоремой о сохранении квазипериодических движений (21.7). Из этой теоремы также следует, что

$$|I(t) - J(t)| < \alpha \quad \text{при любом} \quad -\infty < t < +\infty, \quad \varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$$

(при всех начальных условиях в случае $n = 2$ и при

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

для большей части начальных условий в общем случае). Теперь становится ясной роль условий сохранения в теореме (21.7): они препятствуют эволюции²¹. Точно также в теореме (21.11) эволюция невозможна в связи с тем, что отображение является глобальным каноническим.

С другой стороны, понятна также роль условия невырожденности. Действительно, в случае вырождения орбита общего положения невозмущенной системы эргодична на торе меньшей размерности $k < n$, но не на торе размерности n . Алгоритм теории возмущений позволяет в этом случае предсказать усреднение на торе размерности k . Но тогда эволюция становится возможной и для канонических систем.

²¹Простой пример возмущения центра (см. рис. 22.13)

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon_1, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon y \end{cases}$$

уже показывает особый характер канонических систем: в первом случае (канонические) возмущения смещают орбиты в направлении, ортогональном возмущению, не вызывая эволюции; во втором случае (неканоническое) возмущение вызывает эволюцию к нулю. Примеры эволюции можно было бы построить в четырехмерном пространстве для систем, сохраняющих элемент объема:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \varepsilon y, \quad \dot{z} = u, \quad \dot{u} = -z + \varepsilon u.$$

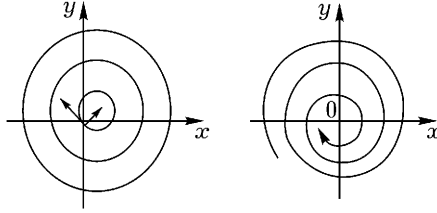


Рис. 22.13

ПРИМЕР 22.14. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + \varepsilon H_1(I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad I \in B^n, \\
 \varphi &\in \mathbb{T}^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \pmod{2\pi}\}, \\
 H_0 &= H_0(I_1, \dots, I_k), \quad \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Эта система имеет вид (22.3) с $k < n$, $l = 2n - k$, а усредненная система представима в виде

$$\begin{cases}
 \dot{J}_0 = 0, \quad J_0 = (J_1, \dots, J_k), \quad \varphi_0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \pmod{2\pi}, \\
 \dot{J} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \psi}, \quad J = (J_{k+1}, \dots, J_n), \\
 \dot{\psi} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J}, \quad \psi = (\psi_{k+1}, \dots, \psi_n) \pmod{2\pi},
 \end{cases}$$

где

$$\bar{H}_1(J_0, J, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^k} \oint \dots \oint H_1(J_0, J; \varphi_0, \psi) d\varphi_0.$$

Если полученная таким образом усредненная система интегрируема (как, например, в плоской задаче трех тел) или близка к интегрируемой (как, например, в планетном варианте задаче n тел), то можно доказать²² существование соответствующих квазипериодических решений исходной системы. Эти квазипериодические движения обладают k «быстрыми» частотами $(\omega_1, \dots, \omega_k) \sim 1$, происходящими от невозмущенной системы, и $l = n - k$ «медленными» частотами $(\omega_{k+1}, \dots, \omega_n) \sim \varepsilon$, происходящими от усредненной системы.

²²См. В. И. Арнольд [10], [4].

В общем случае, когда усредненная система неинтегрируема, о связи между решениями возмущенной и усредненной задач известно мало даже при $0 < t < 1/\varepsilon$. Единственные результаты, которые известны, получены в рамках подходов 2 и 3 из (22.8).

Заметим еще, что даже в случае невырожденной системы остается еще исследовать движения в «зонах неустойчивости» (дополнении к инвариантным торами) в случае $n > 2$ и по крайней мере при $t \sim 1/\varepsilon$ или $t \sim 1/\varepsilon^m$. Возможно, в этих зонах существуют²³ инвариантные $(n - 1)$ -мерные торы «эллиптического» и «гиперболического» типа (обобщение на случай произвольной размерности периодических движений из § 20). Напомним, что при $n > 2$ инвариантные торы размерности n не делят гиперповерхность энергии $H = h$ размерности $2n - 1$. Следовательно, «сепаратрисы» указанных «гиперболических» торов могут уходить очень далеко по этой гиперповерхности, вызывая неустойчивость системы. Аналогичный механизм неустойчивости исследуется в следующем разделе.

§ 23. Топологическая неустойчивость и усатые торы

Приведем теперь пример²⁴ гамильтоновых систем, удовлетворяющих условиям теорем (21.7) и (21.11), но топологически неустойчивых: величина $|I(t) - J(t)|$ неограничена при $-\infty < t < \infty$. По теоремам 21.7 и 21.11 такая система устойчива при большей части начальных условий (соответствующие движения квазипериодичны). Вековой уход истинного решения $I(t)$ есть величина порядка $\exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$, следовательно, неустойчивость не появляется ни в каком порядке теории возмущений.

Прежде всего введем несколько определений.

А) Усатые торы 23.1

Пусть \mathbb{T} — инвариантный тор в фазовом пространстве динамической системы. Предложим, что движение системы квазипериодично на \mathbb{T} и траектории всюду плотны на \mathbb{T} . Мы говорим, что \mathbb{T} — *усатый*

²³Соответствующую мотивацию можно найти у В. И. Арнольда [14]. Как только эта работа была написана, доказательства были даны В. К. Мельниковым [2], Ю. Мозером [5] и Г. А. Красинским [1].

²⁴Пример (23.10) достаточно искусственен. Однако нечто подобное механизму цепей усатых торов, вызывающему неустойчивость, может встречаться и в общих задачах (например, в задаче трех тел).

тор, если он представляет собой связную компоненту пересечения двух усов $\mathbb{T} = M^+ \cap M^-$ — инвариантных открытых многообразий таких, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t) - \mathbb{T}| &= 0 && \text{при } x(0) \in M^+ \quad (\text{исходящий ус}), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \mathbb{T}| &= 0 && \text{при } x(0) \in M^- \quad (\text{входящий ус}). \end{aligned}$$

Например, тор $\mathbb{T}^k : x = y = z = 0$ в системе

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \dot{y} = -\mu y, \quad \dot{z} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega \quad (23.2)$$

($\lambda, \mu > 0$, $\varphi \pmod{2\pi} \in \mathbb{T}^k$, частоты ω несоизмеримы) определяет в пространстве $\mathbb{R}^{l^+} \times \mathbb{R}^{l^-} \times \mathbb{R}^{l_0} \times \mathbb{T}^k$ ус M^+ размерности $l_+ + k$ ($y = z = 0$) и ус M^- размерности $l_- + k$ ($x = z = 0$).

В) Переходные торы 23.3

Пусть M — гладкое подмногообразие пространства X , $\Omega \subset X$ — подмножество пространства X . Говорят, что Ω *загораживает* M в некоторой точке $x \in M$, если каждое многообразие N , трансверсальное к M в точке x , пересекает Ω .

Например²⁵, спираль Ω загораживает свой предельный цикл M во всех точках M (см. рис. 16.4, гл. 3).

Усатый тор \mathbb{T} называется *переходным тором*, если объединение всех образов Ω произвольной окрестности U каждой точки ξ входящего уса M^- загораживает исходящий ус M^+ в каждой точке $\eta \in M^+$ (см. рис. 23.4).

Лемма 23.5. *Тор $x = y = z = 0$ в (23.2) есть переходный тор.*

Доказательство.

Пусть $\xi = (0, y_0, 0, \varphi_0)$, $\eta = (x_1, 0, 0, \varphi_1)$. Так как частоты ω несоизмеримы, существует последовательность t_i , $t_i \rightarrow +\infty$ такая, что расстояние между $\varphi_0 + \omega t_i$ и φ_1 стремится к нулю. Рассмотрим часть V окрестности U , задаваемую соотношением $y = y_0$. Через $\Omega = \bigcup_{t>0} U(t)$ мы обозначаем множество всех точек траекторий, исходящих из U . Ω содержит множество образов $g_{t_i} V$, где g_t — группа преобразований,

²⁵Эта идея уже была использована Ситниковым [1] и А. Леонтовичем [1].

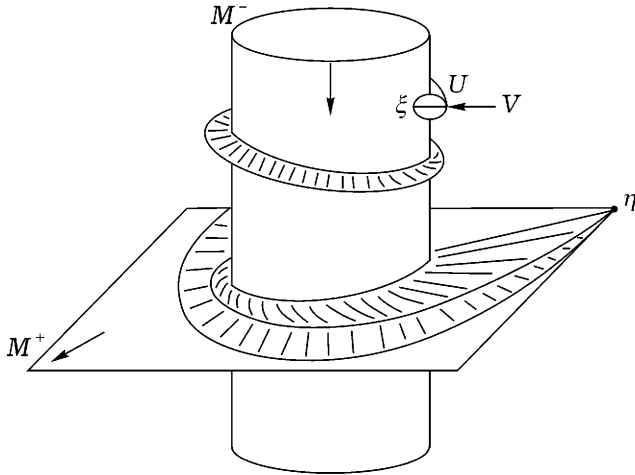


Рис. 23.4

определяемая уравнениями (23.2). При достаточно больших t_i эти образы $g_{t_i}V$ пересекают окрестность точки η (так как $\lambda > 0$). Точки пересечения задаются уравнениями

$$y = y_i, \quad y_i = e^{-\mu t_i} y_0 \rightarrow 0.$$

Следовательно, Ω содержит множество всех поверхностей $g_{t_i}V$, параллельных усу M^+ и имеющих M^+ своим пределом; эти поверхности уже загораживают M^+ в точке η , что и доказывает лемму. ■

С) Переходные цепочки 23.6

Последовательность переходных торов $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \dots, \mathbb{T}_s$ называется переходной *цепочкой*, если их усы пересекаются трансверсально следующим образом (см. рис. 23.7):

$$M_1^+ \cap M_1^- \neq \emptyset, \quad M_2^+ \cap M_3^- \neq \emptyset, \dots, M_{s-1}^+ \cap M_s^- \neq \emptyset.$$

Лемма 23.8. Пусть $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \dots, \mathbb{T}_s$ — переходная цепочка. Тогда для любой окрестности U произвольной точки $\xi \in M_1^-$ и любой окрестности V произвольной точки $\eta \in M_s^+$ существует траектория $\xi(t)$ такая, что

$$\xi(0) \in U, \quad \xi(t) \in V.$$

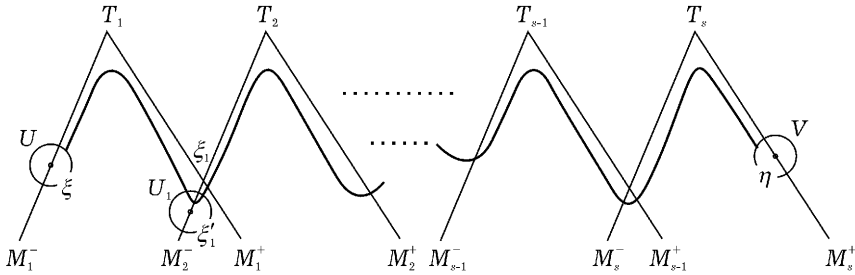


Рис. 23.7

Доказательство.

Рассмотрим будущее $\Omega = \bigcup_{t>0} U(t)$ окрестности U . Поскольку T_1 — переходный тор, то Ω загораживает ус M_1^+ в точке пересечения ξ_1 усов M_1^+ и M_2^- . Следовательно, многообразие M_2^- пересекает открытое множество Ω . Пусть $\xi'_1 \in M_2^- \cap \Omega$, тогда вся окрестность U_1 точки ξ'_1 принадлежит Ω . Будущее окрестности U_1 принадлежит Ω . Достаточно повторить те же рассуждения s раз, чтобы убедиться в том, что Ω загораживает M_s^+ в точке η . ■

D) Пример неустойчивой системы 23.9

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^3$ — пятимерное пространство

$$I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, t \quad (\varphi_1, \varphi_2, t \pmod{2\pi}).^{26}$$

Рассмотрим систему, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + \varepsilon(1 + \mu B) \cos(\varphi_1 - 1), \tag{23.10}$$

$$B = \sin \varphi_2 + \cos t,$$

т. е. систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = I_2, \quad \dot{I}_1 = \varepsilon \sin \varphi_1 (1 + \mu B),$$

$$\dot{I}_2 = \varepsilon (1 - \cos \varphi_1) \mu \cos \varphi_2,$$

где $\mu \ll \varepsilon \ll 1$ — два параметра.

²⁶Уравнения (23.10) можно было бы записать в виде консервативной системы с 3 степенями свободы.

Теорема 23.11. Пусть $0 < A < B$. При любом $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 = \mu_0(A, B, \varepsilon) > 0$ такое, что для $0 < \mu < \mu_0$ система (23.10) имеет решение, удовлетворяющее при некотором t неравенствам $I_2(0) < A$, $I_2(t) > B$.

В силу леммы (23.8) для доказательства теоремы достаточно найти переходную цепочку $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_s$ такую, что $I_2 < A$ на \mathbb{T}_1 и $I_2 > B$ на \mathbb{T}_s .

Лемма 23.12. Для системы (23.10) любой двумерный тор \mathbb{T}_ω , заданный соотношениями $I_1 = \varphi_1 = I_2 - \omega = 0$, где ω — иррациональное число, есть усатый тор.

Действительно,

- 1) ясно, что \mathbb{T}_ω — инвариантный тор системы (23.10);
- 2) при $\mu = 0$ трехмерные усы определяются уравнениями

$$I_1 = \pm 2\sqrt{\varepsilon} \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad I_2 = \omega;$$

3) при $\mu < \mu_0(\varepsilon)$ усы еще существуют и могут быть найдены методом Адамара (см. § 15, гл. 3). Рассуждение леммы (23.5) доказывает, что торы \mathbb{T}_ω также являются переходными торами. Наконец, используя вариационные формулы для усов при «малом» μ , мы доказываем следующую лемму.

Лемма 23.13. Пусть $A < \omega < B$. Тогда исходящий ус M_ω^+ тора \mathbb{T}_ω трансверсально пересекает входящие усы $M_{\omega'}^-$ близких торов $\mathbb{T}_{\omega'}$ (поскольку $|\omega - \omega'| \leq \alpha$, где $\alpha = \alpha(\varepsilon, \mu, A, B) > 0$).

Для доказательства этой леммы необходим анализ, который приведен в работе В. И. Арнольда [13]. Этот анализ также показывает,

что $\alpha \sim \mu \cdot e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}}$. Из лемм (23.12) и (23.13) следует, что усатые торы $\mathbb{T}_{\omega_1}, \dots, \mathbb{T}_{\omega_s}$ (ω_i иррациональны, $|\omega_i - \omega_{i+1}| \leq \alpha$, $\omega_1 < A$, $\omega_s > B$) образуют цепочку. Теорема (23.11) следует из леммы (23.8), примененной к этой цепочке.

Общая литература к главе 4

- [1] В. И. Арнольд, *Малые знаменатели* I. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1961, **25**, № 1, с. 21–86. *Малые знаменатели* II. Успехи мат. наук, 1963, № 5, с. 13–40.
- [2] Д. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, М.-Л.: ОГИЗ, 1941.

- [3] J. Moser, *On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus*. Göttingen Nachr. № 1, 1962.
- [4] H. Poincare, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, I, II, III. Gauthier-Villars, Paris (1892, 1893, 1899).
- [5] C. L. Siegel, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*. Springer, Berlin (1956).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теорема Якоби

(См. пример 1.2, гл. 1)

Пусть $S^1 = \{x \pmod{1}\}$ — окружность, снабженная обычной мерой, φ — автоморфизм: $x \rightarrow x + \omega \pmod{1}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Траектории автоморфизма φ всюду плотны в том и только том случае, если ω иррационально.

Доказательство.

Предположим, что ω рационально.

Тогда $\omega = p/q$, где p, q — целые числа, число q положительно и взаимно просто с p . Следовательно,

$$\varphi^q x = x + q\omega = x + p = x \pmod{1}.$$

Таким образом, траектории состоят из конечного числа точек.

Предположим, что ω иррационально.

Пусть $x \in S^1$, все точки $\varphi^n x$ различны, так как из равенства

$$\varphi^n x = \varphi^m x$$

мы заключаем, что $(n - m)\omega \in \mathbb{Z}$; следовательно, $n = m$, так как ω иррационально. Поэтому траектория состоит из бесконечного множества различных точек, обладающего предельной точкой на S^1 (S^1 — компактное множество). Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ существуют различные целые числа n и m такие, что

$$|\varphi^n x - \varphi^m x| < \varepsilon.$$

Поскольку φ сохраняет расстояние на S^1 , предыдущее неравенство представимо в виде

$$|\varphi^p x - x| < \varepsilon, \quad \text{где } p = |n - m|.$$

Следовательно $\varphi^p x, \varphi^{2p} x, \dots, \varphi^{kp} x, \dots$ делят S^1 на отрезки, длина которых меньше ε . Поскольку величина ε произвольна, теорема доказана. ■

Эта теорема является частным случаем следующей.

Теорема. Пусть $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ — n -мерный тор, снабженный обычной мерой, φ — автоморфизм $x \rightarrow x + \omega \pmod{1}$, где $\omega \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{T}^n$. Тогда траектории автоморфизма φ всюду плотны в том и только том случае, если из того, что $(k, \omega) \in \mathbb{Z}$ при $k \in \mathbb{Z}^n$ следует, что $k = 0$.

В непрерывном случае справедлива следующая теорема:

Если φ_t определяется соотношением $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + t\omega \pmod{1}$, где $x \in \mathbb{T}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^n$, то траектории автоморфизма φ_t всюду плотны в том и только том случае, если из того, что $(\omega, k = 0$ при $k \in \mathbb{Z}^n$ следует, что $k = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Геодезические потоки на торе

(См. пример 1.7, гл. 1)

Пусть V — двумерный тор, порождаемый вращением окружности радиуса r вокруг прямой Oz , лежащей в плоскости окружности. Расстояние от центра окружности до оси считается равным 1. V определяется уравнениями

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi (1 + r \cos \psi), \\y &= \sin \varphi (1 + r \cos \psi), \\z &= r \sin \psi,\end{aligned}$$

где φ — долгота, ψ — широта.

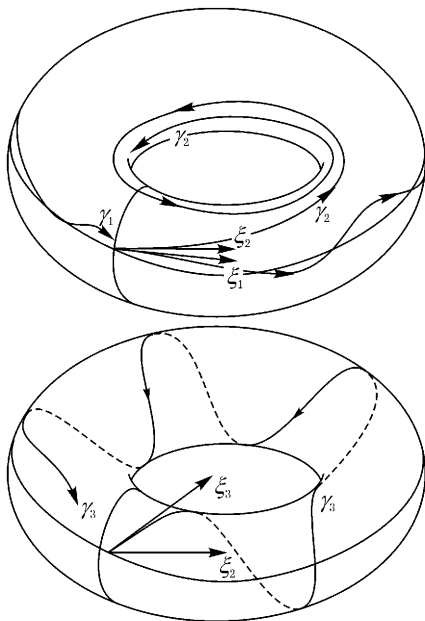


Рис. П2.1

Законы сохранения энергии и момента импульса относительно оси Oz дают уравнения геодезических:

$$\begin{aligned}r^2 \dot{\psi}^2 + (1 + r \cos \psi)^2 \dot{\varphi}^2 &= h = \text{const}, \\ \dot{\varphi}(1 + r \cos \psi)^2 &= k = \text{const}.\end{aligned}$$

Геодезический поток на $M = T_1V$ получается при $h = 1$. Он инвариантен при поворотах $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$. Поэтому за начальную точку геодезической можно принять точку на окружности с любой долготой.

На рис. П2.1 две геодезические общего положения γ_1 и γ_3 разделены геодезической γ_2 .

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Движение Эйлера–Пуансо

(См. пример 1.7, гл. 1)

Это — движение твердого тела вокруг его центра тяжести. Размерность фазового пространства равна 6. Существует 4 первых интеграла, независимых и однозначных: энергия T и три составляющие момента количества движения m относительно фиксированных осей. Точки фазового пространства, для которых T и m принимают заданные значения, образуют в общем случае многообразие M размерности $2 = 6 - 4$, являющееся тором. Так как многообразие M инвариантно относительно динамического потока φ_t , M несет инвариантную меру μ (теорема Лиувилля). Следовательно, (M, μ, φ_t) — классическая система. Это доказывает также, что M несет на себе поле касательных векторов, не имеющее особых точек, — инфинитезимальный генератор потока φ_t .

Поскольку ясно, что многообразие M компактно и ориентируемо, мы заключаем, что M диффеоморфно тору \mathbb{T}^2 .

Каноническое преобразование сводит систему (M, μ, φ_t) к системе вида $\dot{x} = 1, \dot{y} = \alpha$ (пример 1.2, гл. 1) (см. приложение 26). Отсюда следует, что движение Эйлера–Пуансо в общем случае квазипериодично и траектории всюду плотны на M .

Два периодических движения называются, соответственно, прецессией и нутацией (Эйлер [1]).

Приложение 4

Геодезические потоки на группах Ли

(См. пример 1.7, гл. 1)

Если M — группа Ли, снабженная инвариантной слева (или справа) метрикой, то геодезический поток имеет важные приложения.

Если $M = SO(3)$ — связная составляющая единицы группы вращений трехмерного пространства E^3 , то геодезический поток представляет вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Каждая орбита соответствует какому-нибудь движению.

Группа гомотетий с положительными коэффициентами и трансляций n -мерного аффинного пространства порождает геодезический поток $(n+1)$ -мерного пространства постоянной отрицательной кривизны.

Рассмотрим группу $S \text{ Diff}(\mathcal{D})$ диффеоморфизмов компактной римановой области \mathcal{D} , сохраняющих меру. Соответствующая алгебра состоит из векторных полей V на \mathcal{D} , удовлетворяющих условию $\text{div } V = 0$.

Энергия $\langle V, V \rangle = \int_{\mathcal{D}} V^2 dx$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму для данного векторного поля и определяет некоторую правоинвариантную римановую метрику на группе $S \text{ Diff}(\mathcal{D})$.

Геодезические, соответствующие этой метрике, образуют идеальный (несжимаемый и невязкий) поток на \mathcal{D} . Можно вычислить риманову кривизну данного бесконечномерного «многообразия» $S \text{ Diff}(\mathcal{D})$. Например, если $\mathcal{D} = \mathbb{T}^2$ — тор $\{x, y \pmod{2\pi}\}$ с обычной мерой, то для любого сечения, содержащего ламинарный поток вида

$$V_x = \cos y, \quad V_y = 0,$$

кривизна неположительна.

См. также: В.И. Арнольд [1] и Л. Ауслендер, Л. Грин и Ф. Хан (L. Auslander, L. Green, F. Hahn [1]).

Приложение 5

Простой маятник

(См. 1.13, гл. 1)

Уравнение движения маятника имеет вид $\ddot{q} + k \sin q = 0$, где k — положительная постоянная. Оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -k \sin q. \end{cases}$$

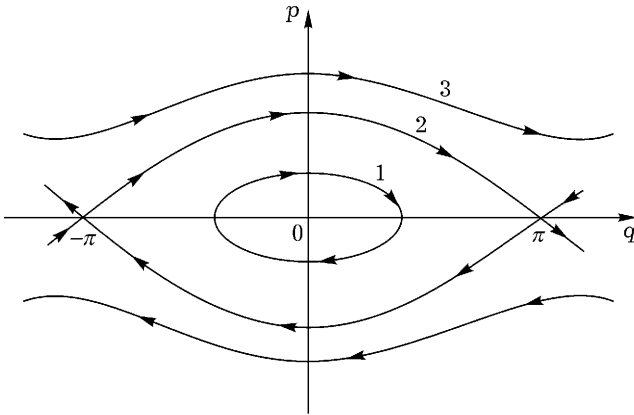


Рис. П5.1

Гамильтониан имеет вид $H = \frac{p^2}{2} - k \cos q$, фазовые траектории изображены на рис. П5.1. Система инвариантна относительно зеркального отражения относительно оси Oq и преобразований

$$(q, p) \rightarrow (q + 2K\pi, p), \quad K \in \mathbb{Z}.$$

Точки $(k\pi, 0)$ — особые: точки $(2\pi k, 0)$ — центры (устойчивое равновесие), точки $((2k + 1)\pi, 0)$ — седла (неустойчивое равновесие).

Существуют три типа траекторий: траектории 1 (малые колебания), сепаратриса 2, соединяющая два седла, траектории 3 (полные обороты вокруг точки подвеса).

Естественным фазовым пространством служит не плоскость (p, q) , а цилиндр $(q \pmod{2\pi}, p)$. Таким образом, простой маятник — глобальная гамильтонова система.

Приложение 6

Измеримые пространства

(См. § 2, гл. 1)

σ -алгеброй \mathcal{B} на множестве M называется семейство содержащихся в M подмножеств, замкнутое относительно операций взятия счетного объединения и перехода к дополнению. Счетно аддитивное множество функций μ на \mathcal{B} с неотрицательными значениями (возможно, бесконечными) называется мерой. Пусть $A_i \in \mathcal{B}$, $\{A_i\}_{i \in I}$ — счетное множество, $A_i \cap A_j = \emptyset$, если $i \neq j$. Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i).$$

Набор (M, \mathcal{B}, μ) , или проще (M, μ) , называется измеримым пространством; \mathcal{B} — семейство измеримых множеств, μ — мера (относительно всех этих понятий см. Халмош (Halmos [2]) и Рохлин [3]).

Придадим смысл выражению «с точностью до множества меры нуль». Пусть $A, B \in \mathcal{B}$. Обозначим через $A = B \pmod{0}$, если $\mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 0$. Это отношение есть отношение эквивалентности. Класс \emptyset есть класс множеств меры нуль. Фактор-множество обозначим $\mathcal{B} \pmod{0}$ — это алгебра Буля, поскольку, если

$$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \quad A_1 = A_2 \pmod{0}, \quad B_1 = B_2 \pmod{0},$$

то

$$A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 \pmod{0}, \quad A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 \pmod{0}, \\ M \setminus A_1 = M \setminus A_2 \pmod{0}.$$

Если $A = B \pmod{0}$, то $\mu(A) = \mu(B)$, следовательно, μ можно рассматривать как функцию на $\mathcal{B} \pmod{0}$.

При исследовании абстрактных динамических систем множества меры нуль рассматриваются как пренебрежимо малые. Это означает, что изучение набора (M, \mathcal{B}, μ) заменяется исследованием набора $(M, \mathcal{B} \pmod{0}, \mu)$, который мы нестрого будем обозначать (M, μ) ,

поскольку функция μ полностью определяет $\mathcal{B} \pmod{0}$ (но не \mathcal{B}). $\mathcal{B} \pmod{0}$ называется измеримой σ -алгеброй на (M, μ) .

Пусть (M, μ) и (M', μ') — два измеримых пространства. Гомоморфизм (измеримых пространств) $\varphi: M \rightarrow M'$ есть сюръекция, сохраняющая меру.

Из $A' \in \mathcal{B}'$ следует, что

$$\varphi^{-1}(A') \in \mathcal{B} \quad \text{и} \quad \mu(\varphi^{-1}A') = \mu'(A'). \quad (\text{Пб.1})$$

Таким образом, φ индуцирует гомоморфизм $\varphi^{-1}: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ измеримых алгебр. Если $M = M'$, то φ называется эндоморфизмом. Если φ — биекция M на M' , то φ называется изоморфизмом; если, кроме того, $M = M'$, то φ называется автоморфизмом.

Пусть (M, μ) , (M', μ') — два измеримых пространства. Говорят, что отображение $\varphi: M \rightarrow M'$ — гомоморфизм по модулю нуль, если:

- a) φ определен на всем M , за исключением, может быть, множества I меры нуль;
- b) $\varphi(M \setminus I)$ отличается от M' лишь на множестве меры нуль;
- c) φ сохраняет меру (по формуле (Пб.1)).

Если $(M, \mu) = (M', \mu')$, то φ называется эндоморфизмом $(\text{mod } 0)$. Если отображения φ и φ^{-1} являются гомоморфизмами $(\text{mod } 0)$, то φ называется изоморфизмом $(\text{mod } 0)$; если при этом совпадают (M, μ) и (M', μ') , то φ — автоморфизм $(\text{mod } 0)$.

Приложение 7

Изоморфизм преобразования пекаря и схемы Бернулли $B_{\mathbb{Z}_2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(См. пример 4.5, гл. 1)

$$f \quad f^{-1} \qquad f^{-1} \quad f$$

Речь идет о построении изоморфизма $f \pmod{0}$ такого, что следующая диаграмма должна быть коммутативной

Определение f . Пусть $m = \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$ — точка на $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}$. Положим $f(m) = (x, y)$, где

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{-i}}{2^{i+1}}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}. \quad (\text{П7.1})$$

Отображение f взаимно однозначно, за исключением тех элементов $(x, y) \in T^2$, у которых x или y — двоичная дробь. Такие элементы образуют счетное множество. Следовательно, их мера равна нулю.

f сохраняет меру. Достаточно рассмотреть $A_i^j = \{m \mid a_i = j\}$ в качестве образующих измеримой алгебры в $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}}$. Множество

$$f(A_i^j) = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{-k}}{2^{k+1}}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \right) \mid a_i = j \right\}$$

состоит из $2^{|i|}$ прямоугольников длиной 1 и шириной $\frac{1}{2^{|i|+1}}$. Следовательно,

$$\mu[f(A_i^j)] = \frac{1}{2} = \mu(A_i^j).$$

Диаграмма коммутативна. Пусть x и y заданы формулой (П7.1). Имеем:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x, y) &= \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots \\ \varphi \circ f^{-1}(x, y) &= \dots, a'_{-1}, a'_0, a'_1, \dots, \quad \text{где } a'_i = a_{i-1}, \\ f \circ \varphi \circ f^{-1}(x, y) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{2^k}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}} \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$f \circ \varphi \circ f^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{1}{2}y\right) & \text{при } a_0 = 0, \\ & \text{т. е. } 0 \leq x < 1/2; \\ \left(2x, \frac{1}{2}(y+1)\right) & \text{при } a_0 = 1, \\ & \text{т. е. } 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f \circ \varphi \circ f^{-1} = \varphi'. \quad \blacksquare$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Несовпадение на всюду плотном множестве пространственного и временного средних

(См. примечание 6.5, гл. 2)

Рассмотрим снова динамическую систему из примера 1.16. Пусть M — тор $\{(x, y) \pmod{1}\}$, снабженный мерой $dx dy$, автоморфизм φ имеет вид

$$\varphi(x, y) = (x + y, x + 2y) \pmod{1}.$$

На плоскости (x, y) это линейное преобразование с матрицей $\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Эта матрица имеет два собственных значения: $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$.

Прямая:

$$\begin{cases} x = s, \\ y = (\lambda_2 - 1)s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

в плоскости (x, y) инвариантна относительно $\tilde{\varphi}$. Следовательно, кривая γ :

$$\begin{cases} x = s \pmod{1}, \\ y = (\lambda_2 - 1)s \pmod{1}, \end{cases}$$

на торе M инвариантна относительно φ .

Так как число $\lambda_2 - 1$ иррационально, кривая γ плотна на M (теорема Якоби, приложение 1). С другой стороны, если $m = (x, y)$ — точка кривой γ , то

$$\varphi^n(m) = (\lambda_2^n x, \lambda_2^n y) \pmod{1}.$$

Так как $0 < \lambda_2 < 1$, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(m) = (0, 0).$$

Установив это, возьмем аналитическую функцию $f(x, y) = e^{2\pi i x}$ на M . Для нее выполняется равенство:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi^n m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i x \lambda_2^n}.$$

Следовательно, поскольку обычная сходимость влечет за собой сходимость в смысле Чезаро и $\lim_{n \rightarrow \infty} x \lambda_2^n = 0$, получаем:

$$f^*(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi^n m) = 1.$$

Кроме того,

$$\bar{f} = \int_M f(x, y) dx dy = \int_0^1 e^{2\pi i x} dx = 0.$$

Таким образом, каким бы ни было m на плотном подмножестве γ , мы получаем

$$f^*(m) \neq \bar{f},$$

хотя f — аналитическая функция.

Приложение 9

Теорема о равномерном распределении по модулю 1

(См. 6.6, гл. 2)

Докажем¹ теорему Боля–Серпинского–Вейля: пусть φ — поворот окружности M на угол, не соизмеримый с 2π :

$$M = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, \quad \varphi(z) = \theta z, \quad \theta = e^{2\pi i \omega},$$

где ω — иррациональное число и f — непрерывная функция на M (или, по крайней мере, функция, интегрируемая в смысле Римана). Тогда временное среднее функции f существует всюду и совпадает с пространственным средним.

Доказательство.

1-й случай: $f(z) = z^p$, $p \in \mathbb{Z}$. Имеем:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi^n z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\theta^n z)^p = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \\ \frac{1}{N} z^p \frac{\theta^{Np} - 1}{\theta^p - 1} & \text{при } p \neq 0. \end{cases}$$

Так как число ω иррационально, мы имеем

$$\theta^p - 1 \neq 0 \quad \text{и} \quad |\theta^{Np} - 1| < 2.$$

Следовательно, временное и пространственное средние совпадают:

$$\bar{f} = f^*(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \\ 0 & \text{при } p \neq 0. \end{cases}$$

2-й случай: f — тригонометрический полином, т. е.

$$f(z) = \sum a_p z^p, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad z \in M,$$

¹См. G. Polya, G. Szegő [1], с. 73.

где только конечное число коэффициентов a_p отлично от нуля. Из 1-го случая получаем:

$$f^*(z) = a_0 = \bar{f}.$$

3-й случай: f — действительная непрерывная функция (или функция, интегрируемая в смысле Римана; мы используем в дальнейшем теорему для случая, когда f — кусочно непрерывная функция). Как известно, каждому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие два действительных тригонометрических полинома P_ε^- и P_ε^+ таких, что

$$P_\varepsilon^-(z) < f(z) < P_\varepsilon^+(z) \quad \text{для всех } z \in M$$

и

$$\int_M (P_\varepsilon^+(z) - P_\varepsilon^-(z)) d\mu < \varepsilon.$$

Из второго случая получаем:

$$\begin{aligned} \int_M P_\varepsilon^- d\mu &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi^n z) \leq \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\varphi^n z) \leq \int_M P_\varepsilon^+ d\mu. \end{aligned} \tag{П9.1}$$

Следовательно, $\limsup - \liminf < \varepsilon$. Но поскольку число ε произвольно, временное среднее $f^*(z)$ существует при всех z . Из (П9.1) следует, что это среднее постоянно, поэтому

$$f^*(z) = \bar{f}. \quad \blacksquare$$

Полученный результат допускает непосредственное обобщение на случай преобразований на торах: временные и пространственные средние непрерывных функций совпадают всюду в том и только том случае, если траектории всюду плотны.

Приложение 10

**Приложения эргодической теории
к дифференциальной геометрии**

А. Авец [1] воспользовался теоремой Биркгофа для доказательства следующего результата.

Если M — компактное риманово многообразие размерности n постоянной кривизны R без сопряженных точек, $\Delta = -\nabla^\alpha \nabla_\alpha$ — лапласиан от функций, то собственные значения оператора $\Delta - \frac{R}{n-1}$ неотрицательны. В частности,

$$\int_M R \cdot \eta \leq 0.$$

Если X — векторное поле на M , $\delta X = \nabla^\alpha X_\alpha$,

$$(\mathcal{L}(X)g)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha X_\beta + \nabla_\beta X_\alpha,$$

$$\text{Ric}(X) = R_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta,$$

то

$$\int_M \left[(n-1) \left\{ (\delta X)^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}(X)g)^2 \right\} - R \|X\|^2 - 2 \text{Ric}(X) \right] \eta \geq 0.$$

Приложение 11

Эргодические преобразования торов

(См. пример 7.8, гл. 2)

Докажем, что преобразования торов (примеры 1.2 и 1.15, гл. 1) эргодичны в том и только том случае, если их орбиты всюду плотны (или: в том и только том случае, если временные и пространственные средние непрерывных функций совпадают всюду).

Пусть $M = \{(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ — n -мерный тор, снабженный обычной мерой μ , φ — преобразование¹:

$$e^{2\pi i x} \rightarrow e^{2\pi i(x+\omega)}, \quad \text{где } \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема. *Динамическая система (M, μ, φ) эргодична в том и только том случае, если ω и 1 несоизмеримы: из $(k, \omega) \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ следует, что $k = 0$.*²

Доказательство.

Пусть f — инвариантная измеримая функция. Ее коэффициенты Фурье определяются выражением

$$a_k = \int_M e^{-2\pi i(k, x)} f(x) d\mu.$$

Коэффициенты Фурье функции $f(\varphi(x))$ равны

$$b_k = \int_M e^{-2\pi i(k, x-\omega)} \cdot f(x) d\mu = e^{2\pi i(k, \omega)} \cdot a_k.$$

Инвариантность функции f эквивалентна равенствам $b_k = a_k$ при всех k , т. е. $a_k = 0$ или $(k, \omega) \in \mathbb{Z}$.

Если ω и 1 несоизмеримы, то из второго случая следует, что $k = 0$, и от нуля может быть отличен только коэффициент Фурье a_0 . Таким

¹В непрерывном случае: $\varphi_t: e^{2\pi i x} \rightarrow e^{2\pi i(x+t\omega)}$.

²В непрерывном случае из $(k, \omega) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$ следует $k = 0$. Те же условия необходимы и достаточны для плотности орбит (теорема Якоби, приложение 1).

образом, функция f — постоянна, и динамическая система (M, μ, φ) эргодична (см. 7.2, гл. 2).

Если существует $k \neq 0$ такое, что $(k, \omega) \in \mathbb{Z}$, то функция $f(x) = e^{2\pi i(k, x)}$ инвариантна и отлична от постоянной; следовательно, динамическая система (M, μ, φ) не эргодична. ■

Приложение 12
Среднее время пребывания траектории
в множестве

(См. § 7, гл. 2)

Теорема П12.1. *Динамическая система (M, μ, φ_t) эргодична в том и только том случае, если время $\tau(T)$ пребывания траектории $\{\varphi_t x \mid 0 \leq t \leq T\}$, выходящей из точки x , в произвольном измеримом множестве A асимптотически пропорционально мере множества A :*

$$\begin{aligned} \tau(T) &= \text{мера}\{t \mid 0 \leq t \leq T, \varphi_t x \in A\}, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(T)}{T} &= \mu(A) \quad \text{для почти всех } x \in M. \end{aligned} \tag{П12.2}$$

Доказательство.

Предположим, что (M, μ, φ) — эргодическая система, A — измеримое множество. Выберем в соотношении $f^*(x) = \bar{f}$ (см. 7.1, гл. 2) $f = \mathcal{X}_A$ (\mathcal{X}_A — характеристическая функция множества A). Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(T)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{X}_A(\varphi_t x) dt = \int_M \mathcal{X}_A(x) d\mu = \mu(A)$$

для почти всех x из M .

Наоборот, если соотношение (П12.2) выполняется для всех измеримых множеств A , то динамическая система (M, μ, φ) эргодична. Достаточно заметить, что пространство, порожденное характеристическими функциями \mathcal{X}_A , плотно на $L_1(M, \mu)$. ■

Пример П12.3. Применим теорему П12.1 к преобразованиям торов.

Пусть $M = \{(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n}) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ — n -мерный тор, снабженный обычной мерой μ , φ — преобразование

$$\varphi: e^{2\pi i x} \rightarrow e^{2\pi i(x+\omega)}, \quad \text{где } \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Если ω и 1 несоизмеримы, то система эргодична (приложение 11). Следовательно, при почти всех начальных точках $e^{2\pi i x}$ соотношение (П12.2) выполняется. Иначе говоря, если $\tau(N, A)$ — число элементов последовательности

$$e^{2\pi i x}, e^{2\pi i(x+\omega)}, \dots, e^{2\pi i(x+(N-1)\omega)}$$

в измеримом множестве A , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(N, A)}{N} = \mu(A) \quad (\text{П12.4})$$

при почти всех начальных точках $e^{2\pi i x}$.

Доказательство.

Действительно, если множество A измеримо в смысле Жордана, т. е. если \mathcal{X}_A интегрируема в смысле Римана, то соотношение (П12.4) выполняется при любой начальной точке. Достаточно использовать теорему из приложения 9, положив $f = \mathcal{X}_A$. ■

Приведенное доказательство допускает непосредственное обобщение на непрерывный случай.

Полученный результат, принадлежащий П. Болю (P. Bohl [1]), В. Серпинскому (W. Sierpinsky) и Г. Вейлю (H. Weyl) [1], [2], [3], часто называют теоремой о равномерном распределении по модулю 1.¹ Это одна из первых эргодических теорем. Исторически она родилась из попыток Лагранжа [1] решить проблему «среднего движения» (см. пример 3.1, гл. 1, и приложение 13).

Переходим к некоторым приложениям².

Приложение П12.5. Распределение первых цифр в десятичной записи числа 2^n . (См. пример 3.2, гл. 1)

В системе счисления с основанием 10 число 2^n записывается в виде

$$k \cdot 10^r + l \cdot 10^{r-1} + \dots, \quad 0 < k \leq 9, \quad 0 \leq l, \dots \leq 9.$$

Первая цифра в десятичной записи числа 2^n есть цифра k в том и только том случае, если

$$k \cdot 10^r \leq 2^n < (k+1) \cdot 10^r,$$

¹Элементарное доказательство см. в работе F. P. Callahan [1].

²Относительно других приложений см. N. B. Slater [1].

или

$$r + \log_{10} k \leq \log_{10} 2 \leq r + \log_{10}(k + 1).$$

Обозначая через $\alpha = \log_{10} 2$ и через $(n\alpha)$ разность между числом $n\alpha$ и его целой частью, полученное выше неравенство можно записать в виде

$$\log_{10} k \leq (n\alpha) < \log_{10}(k + 1).$$

Но α — число иррациональное; следовательно, динамическая система $x \rightarrow x + \alpha \pmod{1}$ на $S^1 = \{x \pmod{1}\}$ эргодична. Следовательно, числа $\{(n\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$ равномерно распределены. В частности, полагая в (П12.4)

$$A = [\log_{10} k, \log_{10}(k + 1)],$$

получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(N, A)}{N} = \mu(A) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Но $\tau(N, A)$ есть не что иное, как число целых чисел в последовательности $1, 2, \dots, 2^{N-1}$, десятичная запись которых начинается с цифры k . В обозначениях из примера 3.2 (гл. 1) имеем:

$$p_7 = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{7}\right).$$

Таким образом, в последовательности первых цифр десятичной записи чисел $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ вопреки тому, что подсказывает просмотр первых членов последовательности, семерок больше, чем восьмерок. Это связано с тем, что число $\alpha = \log_{10} 2 = 0,30103 \dots$ близко к $3/10$.

Замечание П12.6. Поскольку та часть времени, которую точка эргодической системы проводит в области A , пропорциональна мере этой области, естественно поинтересоваться величиной дисперсии. Некоторые результаты получил Синай [1]. Например, пусть (T_1V, μ, φ_t) — геодезический поток на компактной поверхности V отрицательной кривизны, A — область многообразия T_1V , ограниченная кусочно дифференцируемой поверхностью. Тогда разность между средним временем, которое точка $\varphi_t x$ проводит в области A , и мерой области A распределена по закону Гаусса и удовлетворяет центральной предельной теореме:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu \left\{ x \mid \frac{\tau_T(x)}{T} - \mu(A) < \frac{\alpha}{\sqrt{T}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{C\alpha} e^{-u^2/2} du,$$

где $\tau_T(x)$ = мера $\{t \mid \varphi_t x \in A, 0 \leq t \leq T\}$, C — константа.

Приложение 13

Среднее движение перигелия

(См. пример 3.1, гл. 1, и приложение 12)

При создании теории движения больших планет Лагранжу [1] понадобилось вычислить среднюю угловую скорость суммы плоских векторов, имеющих постоянную длину и равномерно вращающихся:

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Arg} \sum_{k=1}^n a_k e^{i\omega_k t}, \quad \text{где } t, \omega_k \in \mathbb{R}, \quad a_k \in \mathbb{C}. \quad (\text{П13.1})$$

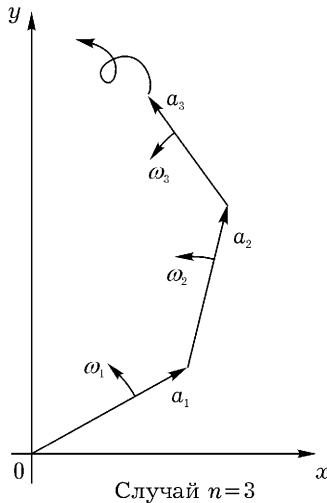


Рис. П13.1. Случай $n=3$: начальные положения векторов

Теорема П13.2 (см. Н. Weyl [1–5]). *Предположим, что угловые скорости ω_k несоизмеримы, т. е. если*

$$(\omega, k) = 0 \text{ и } k \in \mathbb{Z}^n, \quad \text{то } k = 0. \quad (\text{П13.3})$$

Тогда среднее движение (П13.1) существует, и выражается как ба-
рицентрическое среднее угловых скоростей ω_k :

$$\Omega = p_1\omega_1 + \dots + p_n\omega_n, \quad p_k \geq 0, \quad \sum p_k = 1. \quad (\text{П13.4})$$

Весовые коэффициенты p_k зависят только от длин $|a_k|$ векторов.

Определим функцию от n положительных переменных $p(\alpha_1; \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ как вероятность того, что сумма плоских векторов, имеющих постоянные длины $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ и ориентированных хаотически, имеет длину не менее α_1 (см. приводимую ниже формулу П13.12). Тогда:

$$\begin{aligned} p_1 &= p(|a_1|; |a_2|, \dots, |a_n|), \\ &\dots, \\ p_n &= p(|a_n|; |a_2|, \dots, |a_{n-1}|). \end{aligned} \quad (\text{П13.5})$$

В частности, при $n = 3$, если можно образовать треугольник с длинами сторон $|a_1|, |a_2|, |a_3|$, то (формула П. Боля):

$$\Omega = \frac{A_1\omega_1 + A_2\omega_2 + A_3\omega_3}{\pi}, \quad (\text{П13.6})$$

где A_i — углы треугольника.

Случай, когда треугольник со сторонами $|a_1|, |a_2|, |a_3|$ не может быть построен, был рассмотрен Лагранжем [1].

В общем случае p можно выразить через функции Бесселя J_0 и J_1 :

$$p(\alpha_1; \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \int_0^\infty J_1(\alpha_1 \rho) \prod_{k=2}^n J_0(\alpha_k \rho) d\rho.$$

Таким образом, соотношение $\sum p_k = 1$ определяет «теорему сложения» для функций Бесселя.

Доказательство теоремы П13.2.

Соответствующая динамическая система П13.7

Рассмотрим динамическую систему (M, μ, φ_t) , где

$$M = \mathbb{T}^n = \{z \mid z = (z_1, \dots, z_n)\}, \quad z_k = e^{2\pi i \theta_k} \quad \theta_k \in \mathbb{R}$$

— n -мерный тор, снабженный мерой $d\mu = d\theta_1 \dots d\theta_n$ и φ_t — группа трансляций

$$\varphi_t z = (z_1 e^{i\omega_1 t}, \dots, z_n e^{i\omega_n t}).$$

Определим на M функцию:

$$\alpha(z) = \text{Arg} \sum_{k=1}^n |a_k| z_k, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \quad (\text{П13.8})$$

Эта функция разрывна на срезе $\Sigma = \{z \mid \alpha(z) = 0\}$ и не определена на так называемом сингулярном многообразии $S = \{z \mid \sum_{k=1}^n |a_k| z_k = 0\}$, которое состоит из всех возможных состояний замкнутой n -звенной ломаной с заданными длинами сторон $|a_k|$. Тем не менее, функция

$$\beta(z) = \left. \frac{d}{dt} \alpha(\varphi_t z) \right|_{t=0} \quad (\text{П13.9})$$

аналитична вне S . Предел (П13.1) есть не что иное, как временное среднее функции β :

$$\left| \text{Arg} \sum_{k=1}^n a_k e^{i\omega_k t} \right|_{t=0}^{t=T} = \int_0^T \beta(\varphi_t z) dt. \quad (\text{П13.10})$$

Пространственное среднее П13.11

Система (M, μ, φ_t) является эргодической для всех целочисленно несоизмеримых ω_k (приложение 11). Если бы функция β была интегрируемой в смысле Римана, то ее временное среднее $\bar{\beta} = \Omega$ совпадало бы с пространственным средним по теореме о равномерном распределении (приложение 9):

$$\Omega = \bar{\beta} = \int_M \beta(z) d\mu.$$

Во всяком случае из теоремы Биркгофа следует, что $\Omega = \bar{\beta}$ почти для всех начальных фаз. Исследуем пространственное среднее $\bar{\beta}$. Из (П13.9) следует, что функция β линейно зависит от ω . Следовательно, пространственное среднее $\bar{\beta}$ является линейной функцией от ω :

$$\bar{\beta}(\omega) = p_1 \omega_1 + \dots + p_n \omega_n.$$

Чтобы вычислить, например, p_1 положим

$$\omega_1 = 2\pi, \quad \omega_2 = \dots = \omega_n = 0.$$

Имеем:

$$p_1 = \frac{1}{2\pi} \bar{\beta}(2\pi, 0, \dots, 0),$$

где

$$\bar{\beta}(2\pi, 0, \dots, 0) = \int \dots \int_{T^{n-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} d\theta_1 \right) d\theta_2 \dots d\theta_n$$

и, согласно (П13.8),

$$\int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} d\theta_1 = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } |a_2|e^{2\pi i\theta_2} + \dots + |a_n|e^{2\pi i\theta_n} < |a_1|, \\ 0, & \text{если } |a_2|e^{2\pi i\theta_2} + \dots + |a_n|e^{2\pi i\theta_n} > |a_1|. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p_1 = p(|a_1|; |a_2|, \dots, |a_n|),$$

где

$$p(\alpha_1; \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{мера} \{z \in \mathbb{T}^n \mid |\alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n| < |\alpha_1|\}. \quad (\text{П13.12})$$

Таким образом, формула (П13.5) доказана.

Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 2\pi$, мы легко получаем $\sum p_k = 1$.

Существование временно́го среднего П13.13

Итак, формулы (П13.4), (П13.5) доказаны для почти всех начальных фаз $\text{Arg } a_k$. Чтобы доказать их для всех начальных фаз, Г. Вейль (H. Weyl [4], [5]) воспользовался особым приемом.

Определим на торе M функцию:

$N(z) =$ алгебраическое число точек пересечения z_j кривой $\{\varphi_t z, -2\pi < t < 0\}$ с гиперповерхностью Σ .

Условимся засчитывать точку пересечения z_j один раз, если $\beta(z_j) > 0$, и минус один раз, если $\beta(z_j) < 0$ (см. рис. П13.15).

Можно доказать, что функция $N(z)$ ограничена¹. Как следует из соотношения П13.10, соотношение

$$\left| \int_0^T \beta(\varphi_t z) dt - \int_0^T N(\varphi_t z) dt \right| < C \quad (\text{П13.14})$$

выполняется равномерно на \mathbb{T}^n .

¹В лагранжевом случае $S = \partial\Sigma$. Если, кроме того, $n = 3$, то S — «окружность» и Σ — линейное подмногообразие; следовательно, функция $N(z)$ ограничена.

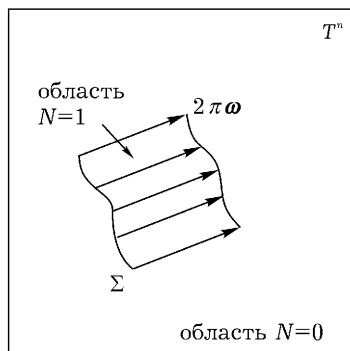


Рис. П13.15

Но, поскольку функция $N(z)$ кусочно непрерывна, ее временное среднее существует всюду и равно пространственному (приложение 9).

С учетом равенства (П13.14) доказательство можно считать законченным. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 14

Пример эндоморфизма с перемешиванием

(См. примечание 8.8, гл. 2)

Рассмотрим на торе $M = \{(x, y) \pmod{1}\}$, снабженном мерой $dx dy$, преобразование¹

$$\varphi: (x, y) \rightarrow (2x, 2y) \pmod{1}.$$

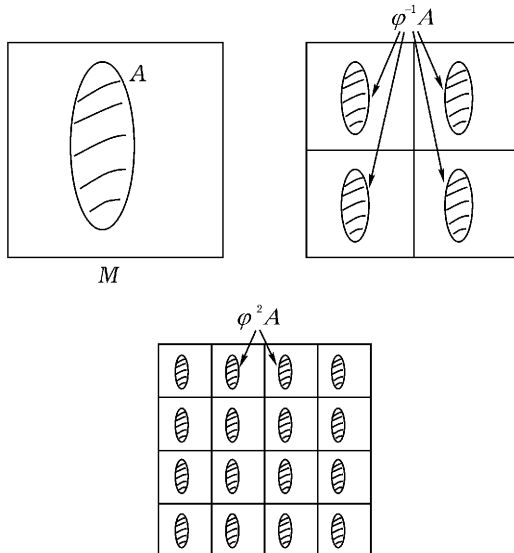


Рис. П14.1

¹Как видно из рис. П14.1, это преобразование, известное под названием «умножение хлебов», дает решение одной древней исторической задачи (20 г. до н. э.).

В более подробной записи преобразование имеет следующий вид:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \begin{cases} (2x, 2y), & \text{если } 0 \leq x, y < 1/2; \\ (2x, 2y - 1), & \text{если } 0 \leq x < 1/2, \quad 1/2 \leq y < 1; \\ (2x - 1, 2y), & \text{если } 1/2 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1/2; \\ (2x - 1, 2y - 1), & \text{если } 1/2 \leq x, y < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Преобразование φ сюръективно, но не инъективно: $\varphi^{-1}m$ состоит из четырех элементов.

Проводя рассуждения с прямоугольниками, стороны которых параллельны осям Ox и Oy , и замечая, что эти прямоугольники образуют базис алгебры измеримых множеств, мы видим, что φ сохраняет меру: $\mu(\varphi^{-1}A) = \mu(A)$ для любого измеримого множества A .

Преобразование φ есть перемешивание: для любых измеримых A, B

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu[\varphi^{-N}A \cap B] = \mu(A)\mu(B). \quad (\text{П14.2})$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда B — квадрат:

$$\left(\frac{l}{2^p}, \frac{l+1}{2^p} \right) \times \left(\frac{m}{2^p}, \frac{m+1}{2^p} \right), \quad l, m \in \mathbb{Z}^+.$$

Если $N \geq p$, то B содержит 4^{N-p} прообразов множества A относительно преобразования φ^{-N} . Каждый из этих прообразов имеет меру $4^{-N}\mu(A)$, следовательно,

$$\mu[\varphi^{-N}A \cap B] = 4^{N-p} (4^{-N}\mu(A)) = \mu(A)\mu(B).$$

Поскольку p произвольно, получаем (П14.2).

Точно также можно было бы доказать, что преобразования

$$\varphi_k: (x, y) \rightarrow (kx, ky) \pmod{1}, \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

сохраняющие меру, обладают свойством перемешивания. Так как $\varphi_k \circ \varphi_r = \varphi_{kr}$, $k, r \in \mathbb{Z}^+$, то $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ — полугруппа с перемешиванием относительно композиции².

²Эта полугруппа может быть выражена через полиномы Чебышева (см. R. Alder, T. Rivlin [1]).

Приложение 15

Косые произведения

(См. определение 9.5, гл. 2)

Пусть (X, p) и (Y, q) — два пространства с мерами, соответственно, p и q , (M, μ) — прямое произведение $M = X \times Y$, снабженное мерой $\mu = p \cdot q$.

Предположим, что $S: X \rightarrow Y$ — автоморфизм и каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие автоморфизм $T_x: Y \rightarrow Y$ такой, что отображение $(x, y) \rightarrow T_x y$ измеримо при любых $x \in X, y \in Y$. Тогда отображение φ , определяемое соотношением

$$\varphi(x, y) = (Sx, T_x y),$$

измеримо и оставляет меру μ инвариантной.

Действительно, по теореме Фубини, для любой измеримой функции F

$$\begin{aligned} \mu(\varphi^{-1}F) &= \int_M \mathcal{X}_F(\varphi m) d\mu = \int_X \left(\int_Y \mathcal{X}_F(Sx, T_x y) dq \right) dp = \\ &= \int_X \left(\int_Y \mathcal{X}_F(Sx, y) dq \right) dp = \int_Y \left(\int_X \mathcal{X}_F(Sx, y) dp \right) dq = \\ &= \int_Y \left(\int_X \mathcal{X}_F(x, y) dp \right) dq = \mu(F), \end{aligned}$$

где \mathcal{X}_F — характеристическая функция F .

Динамическая система (M, μ, φ) называется косым произведением динамических систем (X, p, S) и (Y, q, T_x) .

ПРИМЕР П15.1. Если $T_x = T$ — постоянная функция, то $\varphi = SXT$, и косое произведение есть не что иное, как произведение динамических систем (X, p, S) и (Y, q, T) .

ПРИМЕР П15.2. Выберем в качестве S эргодический автоморфизм измеримого пространства (X, ρ) , в качестве Y — окружность $S^1 = \{x \pmod{1}\}$. Если $\alpha(x)$ — измеримая функция, определенная на X , со значениями в Y , то

$$\varphi(x, y) = (Sx, \alpha(x) + y \pmod{1}).$$

Это — косоe произведение, ассоциированное с функцией α .

Конкретизируем рассматриваемую динамическую систему, выбрав в качестве $X = \{x \pmod{1}\}$, а в качестве S — эргодическое преобразование $x \rightarrow x + \beta \pmod{1}$. В качестве функции α выберем

$$\alpha_n(x) = nx \pmod{1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Следовательно, с каждым положительным целым n связано некоторое косоe произведение: Анзай (Anzai [1]) доказал, что динамические системы (M, μ, φ_n) , определенные указанным выше образом, принадлежат к одному и тому же спектральному типу, не будучи изоморфными¹.

¹Все динамические системы (M, μ, φ_n) имеют нулевую энтропию.

ПРИЛОЖЕНИЕ 16

Дискретный спектр классических систем

(См. 9.13, гл. 2)

Пусть (M, μ, φ_t) — классическая система, U_t — унитарная группа, порожденная диффеоморфизмом φ_t . Рассмотрим дискретную компоненту спектра U_t , это — *дискретный спектр*.

Динамические системы, построенные во второй части теоремы о дискретном спектре (9.13, гл. 2), являются классическими системами, если ранг¹ абелевой группы собственных значений конечен.

Во всех известных примерах классических эргодических систем ранг дискретного спектра меньше или равен размерности пространства M .² Естественно предположить, что этот ранг всегда конечен. Вот результат, полученный в этом смысле.

Собственные функции классической системы могут быть всюду разрывны (см. пример А. Н. Колмогорова [1]), но если они непрерывны, то ранг дискретного спектра меньше или равен первому числу Бетти $b_1 = \dim H_1(M, \mathbb{Z})$ пространства M . Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема П16.1. *Пусть (M, μ, φ_t) — классическая эргодическая динамическая система. Если собственные функции индуцированной унитарной группы U_t непрерывны, то*

$$\text{ранг дискретного спектра} \leq b_1.$$

Ясно, что эта теорема является следствием следующей.

Теорема П16.2. *Пусть (M, μ, φ_t) — классическая эргодическая система. Ранг подгруппы дискретного спектра, образованного собственными значениями непрерывных собственных функций, меньше или равен b_1 .*

Прежде чем доказывать эту теорему, введем понятие чисел вращения.

¹Рангом группы называется максимальное число независимых генераторов.

²Этот факт является общим для систем с непрерывными собственными функциями (Авец [2]).

Числа вращения П16.3

Пусть (M, μ, φ_t) — предыдущая система. Так как M — компактное дифференцируемое многообразие, любой паре точек a, b из M можно поставить в соответствие дифференцируемую дугу \widehat{ab} , длина³ которой ограничена некоторым числом A , не зависящим от a и b .

Пусть, далее, $\gamma_1, \dots, \gamma_{b_1}$ — образующие группы целочисленных гомологий $H_1(M, \mathbb{R})$. Каждый элемент γ_k — это замкнутая кривая на M , которую можно предполагать дифференцируемой.

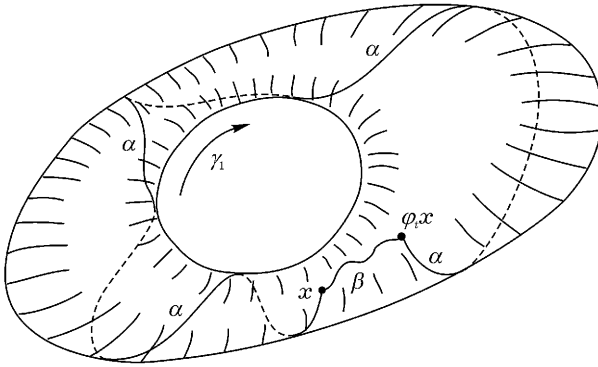


Рис. П16.3'

Если $\alpha = \{\varphi_t x \mid x \in M, 0 \leq t \leq T\}$ — отрезок траектории, то его концы связаны кривой β из семейства \widehat{ab} , введенного выше. Таким образом, $\gamma(T) = \alpha\beta$ — кусочно дифференцируемая замкнутая кривая (см. рис. П16.3'). Это означает, что существуют целые числа $n_k(T)$ такие, что

$$\gamma(T) = n_1(T)\gamma_1 + \dots + n_{k_1}(T)\gamma_{k_1}.$$

Пусть (ω_k) — дуальный базис к (γ_k) первой группы когомологий $H^1(M, \mathbb{R})$, т. е. замкнутых 1-форм таких, что

$$\int_{\gamma_k} \omega_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

³«Длину» здесь надлежит понимать в смысле некоторой вспомогательной римановой метрики на M .

Имеем:

$$\int_{\gamma(T)} \omega_k = n_k(T),$$

или, иначе,

$$\int_0^T (\dot{\gamma}, \omega_k) dt + \int_{\beta} \omega_k = n_k(T), \quad (\text{П16.4})$$

где $(\dot{\gamma}, \omega_k)$ — значение 1-формы ω_k на касательном векторе $\dot{\gamma}$ к потоку φ_t в точке $\varphi_t x$. Так как длина кривой β ограничена величиной M , получаем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\beta} \omega_k = 0. \quad (\text{П16.5})$$

С другой стороны, из эргодичности следует (7.1, гл. 2), что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dot{\gamma}, \omega_k) dt = \int_M (\dot{\gamma}, \omega_k) d\mu \quad (\text{П16.6})$$

для почти всех начальных точек x , и предел не зависит от выбора точки x на траектории.

Таким образом, из соотношений (П16.4), (П16.5) и (П16.6) заключаем, что предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_k(T)}{T} = \int_M (\dot{\gamma}, \omega_k) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_k \quad (\text{П16.7})$$

существует при почти всех x и не зависит от x .

Числа $\sigma_k = e^{2\pi i \mu_k}$, $k = 1, \dots, b_1$, являются образующими абелевой мультипликативной группы \mathfrak{A} , которая называется группой чисел вращений.

Ясно, что \mathfrak{A} не зависит от базиса (γ_k) .

Нетрудно видеть, что φ_t определяет класс вещественных гомологий

$$\gamma = \mu_1 \gamma_1 + \dots + \mu_{b_1} \gamma_{b_1};$$

числа вращений μ_k определяют «гомологическое положение» траектории γ .

Введением этого понятия мы обязаны А. Пуанкаре [1], который воспользовался им при изучении дифференциальных систем на торе \mathbb{T}^2 . Дальнейшие исследования систем

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y)$$

на торе \mathbb{T}^2 содержатся в работах А. Данжуа [1] и К. Л. Зигеля.

Доказательство теоремы П16.2⁴.

Заметим, что, по построению, ранг группы чисел вращений меньше или равен b_1 , равенство достигается только в том случае, если числа вращений линейно независимы над \mathbb{Z} . Поэтому достаточно доказать следующую лемму.

Лемма П16.8. *Подгруппа дискретного спектра, образованная собственными числами непрерывных собственных функций, есть подгруппа группы чисел вращений.*

Доказательство.

Пусть $f(x)$ — отличная от нуля непрерывная собственная функция диффеоморфизма φ_t :

$$f(\varphi_t x) = e^{2\pi i \lambda t} f(x).$$

Функция f дифференцируема по направлению $\dot{\gamma}(t)$:

$$(\dot{\gamma}(t), df(\varphi_t x)) = 2\pi i \lambda e^{2\pi i \lambda t} f(x),$$

или при $t = 0$:

$$(\dot{\gamma}, df(x)) = 2\pi i \lambda f(x). \quad (\text{П16.9})$$

Вследствии эргодичности системы из теоремы 9.12 (гл. 2) следует, что

$$|f(x)| = \text{const.}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, мы заключаем, что

$$|f(x)| = \text{const} \neq 0,$$

т. е. с точностью до постоянной

$$f(x) = e^{2\pi i \psi(x)},$$

⁴См. И. М. Гельфанд, И. И. Шапиро-Пятецкий [1], Schwartzmann [1].

где $\psi(x)$ — непрерывная действительная функция $\psi: M \rightarrow S^1$, для которой вследствие (П16.9) выполняется соотношение

$$(\dot{\gamma}, d\psi) = \lambda. \quad (\text{П16.10})$$

Таким образом, $d\psi$ — замкнутый поток в смысле де Рама⁵ и который гомологичен замкнутой дифференциальной 1-форме $[d\psi]: d\psi = [d\psi] + dh$. Следовательно, так как $\dot{\gamma}$ козамкнута (φ_t сохраняет элемент объема) и (П16.9) можно записать в виде (П16.10), имеем:

$$\int_M (\dot{\gamma}, [d\psi]) d\mu = \int_M (\dot{\gamma}, d\psi) d\mu = \lambda.$$

С учетом П16.3 достаточно доказать, что периоды формы $[d\psi]$ целые. Пусть $\xi: [0, 1] \rightarrow M$ — дифференцируемая петля в M . Так как форма $d\psi$ гомологична $[d\psi]$, имеем:

$$\int_{\xi} [d\psi] = \int_{\xi} d\psi = \psi[\xi(1)] - \psi[\xi(0)] \in \mathbb{Z}.$$

■

Следствие П16.10 (Арнольд [2], [3]). Пусть V — компактное риманово многообразие размерности $n \geq 2$, не являющееся тором. Если геодезический поток на унитарном касательном расслоении $M = T_1V$ эргодичен, то непрерывные собственные функции — константы.

Доказательство.

По лемме П16.8 достаточно доказать, что числа вращений равны нулю. Можно показать (Gysin [1]), что при сделанных топологических предположениях каждая замкнутая не гомологичная нулю 1-форма ω из T_1V является поднятием замкнутой формы, не гомологичной нулю, из V , также обозначенному через ω .

Установив это, запишем числа вращений в виде (П16.7):

$$\mu = \int_{T_1V} (\dot{\gamma}, \omega) \eta \wedge \sigma,$$

где η и σ — элементы объема, соответственно, в V и слое S^{n-1} .

⁵G. de Rham. Variétés différentiables. Hermann (Paris) 1955.

Так как

$$\int_{S^{n-1}} \dot{\gamma}\sigma = 0,$$

мы заключаем, что

$$\mu = \int_V \left(\int_{S^{n-1}} (\dot{\gamma}, \omega)\sigma \right) \eta = \int_V \left(\int_{S^{n-1}} \dot{\gamma}\sigma, \omega \right) \eta = 0.$$

■

Приложение 17

Спектры K -систем

(См. теорему 11.5, гл. 2)

А. Подалгебры измеримых множеств

Пусть (M, μ) — измеримое пространство. Обозначим через $\widehat{1}$ алгебру всех измеримых множеств и через $\widehat{0}$ — алгебру подмножеств меры 0 или 1 (речь всегда идет об алгебрах по модулю нуля).

Определение П17.1. *Подалгебра измеримых множеств* \mathfrak{A} алгебры $\widehat{1}$ есть часть этой алгебры, замкнутая относительно взятия счетного объединения и перехода к дополнению:

$$\text{из } A \in \mathfrak{A} \text{ следует } M \setminus A \in \mathfrak{A},$$

и содержит M .

Включение П17.2.

Пусть \mathfrak{A}_0 и \mathfrak{A}_1 — две подалгебры алгебры $\widehat{1}$. Условимся записывать

$$\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1,$$

если любому элементу $A_0 \in \mathfrak{A}_0$ соответствует некоторый элемент $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ такой, что $A_0 = A_1 \pmod{0}$, т. е.

$$\mu((A_0 \cup A_1) \setminus (A_0 \cap A_1)) = 0.$$

Пересечение П17.3.

Пусть $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ — семейство подалгебр алгебры $\widehat{1}$. Обозначим через

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$$

наибольшую из подалгебр алгебры $\widehat{1}$, содержащуюся в каждой \mathfrak{A}_i .

Сумма П17.4

Аналогичным образом обозначим через

$$\overline{\bigvee_{i \in I} \mathfrak{A}_i}$$

сумму всех подалгебр алгебры $\widehat{\mathbb{1}}$ таких, что каждая из них содержит все \mathfrak{A}_i .

Пространство $L_2(\mathfrak{A})$. П17.5

Пусть \mathfrak{A} — подалгебра алгебры $\widehat{\mathbb{1}}$. Обозначим через $L_2(\mathfrak{A})$ подпространство пространства $L_2(M, \mu)$, порожденного характеристическими функциями \mathcal{X}_A элементов $A \in \mathfrak{A}$.

Нетрудно проверить, что имеют место следующие свойства:

из $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ следует, что $L_2(\mathfrak{A}) \subset L_2(\mathfrak{B})$,

$$L_2\left(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right) = \bigcap_{i \in I} L_2(\mathfrak{A}_i),$$

$$L_2\left(\overline{\bigvee_{i \in I} \mathfrak{A}_i}\right) = \overline{\bigcup_{i \in I} L_2(\mathfrak{A}_i)},$$

$L_2(\widehat{\mathbb{0}}) = H_0$ — пространство функций, постоянных почти всюду.

В. Спектры K -систем

Докажем следующую теорему (см. теорему 11.5).

Теорема П17.6. *K -система (M, μ, φ) имеет счетнократный лебеговский спектр.*

По определению 11.1 (гл. 2), существует подалгебра \mathfrak{A} алгебры $\widehat{\mathbb{1}}$ такая, что

$$\widehat{\mathbb{0}} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^n \mathfrak{A} \dots \subset \varphi^{-1} \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A} \subset \varphi \mathfrak{A} \subset \dots \subset \overline{\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \dots \varphi^n \mathfrak{A}} = \widehat{\mathbb{1}}. \quad (\text{П17.7})$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству следующих лемм.

Лемма П17.8. Пусть U — унитарный оператор, индуцированный диффеоморфизмом φ . Если обозначить $H = L_2(\mathfrak{A})$, то

$$\begin{aligned} H_0 &= \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n H \subset \dots \subset UH \subset H \subset \\ &\subset U^{-1}H \subset \dots \subset \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U^n H} = L_2(M, \mu), \end{aligned}$$

а если обозначить временно $H \ominus H_0 = H'$ (ортогональное дополнение), то

$$\begin{aligned} \{0\} &= \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n H' \subset \dots \subset UH' \subset H' \subset \\ &\subset U^{-1}H' \subset \dots \subset \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} U^n H'} = L'_2 = L_2(M, \mu) \ominus H_0. \end{aligned}$$

Доказательство.

Пусть $A \in \mathfrak{A}$, \mathcal{X}_A — характеристическая функция элемента A . Тогда

$$U\mathcal{X}_A(x) = \mathcal{X}_A(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) \notin A, \\ 1, & \text{если } \varphi(x) \in A, \end{cases}$$

т. е.

$$U\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \varphi^{-1}A, \\ 1, & \text{если } x \in \varphi^{-1}A. \end{cases}$$

Следовательно,

$$U\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{\varphi^{-1}A}.$$

Поэтому из определения $L_2(\mathfrak{A})$ получаем

$$UL_2(\mathfrak{A}) = L_2(\varphi^{-1}\mathfrak{A}).$$

Таким образом, лемма следует из свойств П17.5. ■

Лемма П17.9. На $L'_2 = L_2(M, \mu) \ominus H_0$ оператор U имеет лебеговский спектр с кратностью, равной $\dim(H \ominus UH)$.

Доказательство.

Выберем в $H' \ominus UH'$ полный ортонормированный базис $\{h_i\}$. Пусть \mathcal{H}_i — замыкание подпространства, порожденного $\{h_i, Uh_i, \dots\}$. Следовательно, по построению $U^j h_i$, \mathcal{H}_i попарно ортогональны. Так как (см. предыдущую лемму) $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} U^n H' = \{0\}$, система $\{U^j h_i\}$ полна в H' :

$$H' = \bigoplus_i \mathcal{H}_i. \quad (\text{П17.10})$$

Установив это, запишем предыдущую лемму в виде

$$\overline{\bigcup_{n=-\infty}^n U^n H'} = L'_2,$$

или

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{-n} H'} = L'_2.$$

Таким образом, с учетом (П17.10) получаем:

$$L'_2 = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{-n} \left(\bigoplus_i \mathcal{H}_i \right)} = \bigoplus_i \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{-n} \mathcal{H}_i},$$

или, полагая

$$H_i = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{-n} \mathcal{H}_i}, \quad (\text{П17.11})$$

преобразуем к виду

$$L'_2 = \bigoplus_i H_i. \quad (\text{П17.12})$$

По формуле (П17.11), исходя из базиса $\{h_i, Uh_i, \dots\}$ в \mathcal{H}_i , построим полный ортонормированный базис в H_i :

$$\{e_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} U^j h_i \mid j \in \mathbb{Z}\},$$

и

$$U e_{i,j} = U(U^j h_i) = U^{j+1} h_i = e_{i,j+1} \quad \text{при любых } i \text{ и любых } j.$$

Итак, используя соотношение (П17.12), мы заключаем, что U имеет на L'_2 лебеговский спектр. Порядок его кратности равен числу подпространств H_j , т. е.

$$\dim(H' \ominus UH') = \dim(H \ominus UH). \quad \blacksquare$$

Лемма П17.13.

$$\dim(H \ominus UH) = \infty.$$

Доказательство.

По лемме П17.8

$$\dots \leq \dim UH \leq \dim H \leq \dim U^{-1}H \leq \dots$$

Это означает, что $\dim H = \infty$ и что $UH \neq H$. В противном случае, начиная с некоторого $n > 0$, выполнялось бы соотношение $\dim U^n H = \dim U^{n+1} H = \dim \{0\}$, т. е. $H = 0$. По той же причине $\dim UH = \infty$.

Так как $UH \neq H$, можно найти $0 \neq f \in H \ominus UH$. Обозначим $F = \{m \mid m \in M, f(m) \neq 0\}$. Поскольку $F \in \mathfrak{A}$ и $\mu(F) > 0$ для $f \in L_2(\mathfrak{A})$, пространство

$$L = \{g\mathcal{X}_F \mid g \in H\}$$

имеет бесконечную размерность при $\dim H = \infty$ (\mathcal{X}_F — характеристическая функция F).

Точно также, поскольку $\mu(F) > 0$ и $\dim UH = \infty$, пространство

$$L_1 = \{g\mathcal{X}_F \mid g \in UH\}$$

имеет бесконечную размерность. Пусть $L_0 = L \ominus L_1$. Если $g\mathcal{X}_F \in L_0$ и $h \in UH$, то

$$\langle g\mathcal{X}_F \mid h \rangle = \langle g\mathcal{X}_F \mid h\mathcal{X}_F \rangle = 0,$$

следовательно,

$$L_0 \subset H \ominus UH,$$

и достаточно доказать, что $\dim L_0 = \infty$.

Так как пространство L_1 бесконечномерно, можно выбрать последовательность линейно независимых ограниченных действительных функций $h_1, h_2, \dots \in UH$ таких, что

$$\mathcal{X}_F h_1, \mathcal{X}_F h_2, \dots, \in L_1$$

будут линейно независимы.

Приложение 18

Условная энтропия разбиения относительно другого разбиения

(См. § 12, гл. 2)

А. Измеримые разбиения

Определение П18.1. Пусть (M, μ) — измеримое пространство; разбиением $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ пространства M называется набор непустых измеримых множеств таких, что

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0.$$

Разбиение α называется измеримым, если существует счетное множество $\{B_j\}_{j \in I}$ измеримых множеств таких, что:

- 1) каждое B_j есть объединение элементов разбиения α ;
- 2) для любой пары A_i, A_j элементов разбиения α существует B_k такое, что $A_i \subset B_k, A_j \not\subset B_k$ или $A_i \not\subset B_k, A_j \subset B_k$.

Если разбиение α конечно или счетно, то оно измеримо.

Определение П18.2. Два измеримых разбиения α и β , совпадающих всюду за исключением, может быть, множества нуль, называются тождественными по модулю 0:

$$\alpha = \beta \pmod{0}.$$

В дальнейшем всюду подразумевается совпадение $\pmod{0}$.

Определение П18.3. Условимся записывать $\alpha \leq \beta$, если для каждого $B \in \beta$ существует $A \in \alpha$ такое, что $B \subset A$.

Отношение \leq есть отношение порядка на множестве измеримых разбиений.

Приложение 18

Условная энтропия разбиения относительно другого разбиения

(См. § 12, гл. 2)

А. Измеримые разбиения

Определение П18.1. Пусть (M, μ) — измеримое пространство; разбиением $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ пространства M называется набор непустых измеримых множеств таких, что

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0.$$

Разбиение α называется измеримым, если существует счетное множество $\{B_j\}_{j \in I}$ измеримых множеств таких, что:

- 1) каждое B_j есть объединение элементов разбиения α ;
- 2) для любой пары A_i, A_j элементов разбиения α существует B_k такое, что $A_i \subset B_k, A_j \not\subset B_k$ или $A_i \not\subset B_k, A_j \subset B_k$.

Если разбиение α конечно или счетно, то оно измеримо.

Определение П18.2. Два измеримых разбиения α и β , совпадающих всюду за исключением, может быть, множества нуль, называются тождественными по модулю 0:

$$\alpha = \beta \pmod{0}.$$

В дальнейшем всюду подразумевается совпадение $\pmod{0}$.

Определение П18.3. Условимся записывать $\alpha \leq \beta$, если для каждого $B \in \beta$ существует $A \in \alpha$ такое, что $B \subset A$.

Отношение \leq есть отношение порядка на множестве измеримых разбиений.

Определение П18.4. Пусть $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ — семейство измеримых разбиений. Обозначим через

$$\alpha = \bigvee_{i \in I} \alpha_i$$

наименьшее разбиение, содержащее все α_i . Иначе говоря,

$$\alpha = \left\{ \bigcap_{j \in I} A_j \mid A_j \in \alpha_j \text{ для всех } j \right\}.$$

Операция \bigvee коммутативна и ассоциативна. С другой стороны, если

$$\alpha \leq \alpha' \quad \text{и} \quad \beta \leq \beta',$$

то

$$\alpha \vee \beta \leq \alpha' \vee \beta'.$$

Определение П18.5. Пусть α — измеримое разбиение. Множество счетных объединений элементов разбиения α называется алгеброй $\mathfrak{M}(\alpha)$, порожденной разбиением α .

Доказано, что для любой подалгебры \mathfrak{A} алгебры $\widehat{\Gamma}$ существует измеримое разбиение α такое, что

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(\alpha).$$

Алгебра $\mathfrak{M}(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\alpha = \beta \iff \mathfrak{M}(\alpha) = \mathfrak{M}(\beta),$$

$$\alpha \leq \beta \iff \mathfrak{M}(\alpha) \subset \mathfrak{M}(\beta),$$

$$\mathfrak{M}\left(\bigvee_{i \in I} \alpha_i\right) = \bigvee_{i \in I} \mathfrak{M}(\alpha_i).$$

Приведенные выше обозначения введены в 1932 А. Н. Колмогоровым [3], а также Рохлиным [3].

В. Условная энтропия

Пусть $\alpha = \{A_i \mid i = 1, \dots, r\}$, $\beta = \{B_j \mid j = 1, \dots, s\}$ — два измеримых конечных множества. Не ограничивая общности, предположим, что $\mu(A_i) > 0$, $\mu(B_j) > 0$ при всех i, j (определение П18.2).

Определение П18.6. Пусть

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 0, \\ -t \log t & \text{при } 0 < t \leq 1 \text{ (логарифм двоичный)}. \end{cases}$$

Условной энтропией разбиения α относительно разбиения β называется величина

$$h(\alpha | \beta) = \sum_{i=1}^s \mu(B_i) \left[\sum_{k=1}^r z \left(\frac{\mu(B_i \cap A_k)}{\mu(B_i)} \right) \right].$$

Свойство П18.7.

$$h(\alpha \vee \beta | \beta) = h(\alpha | \beta).$$

Доказательство.

Элементами $\alpha \vee \beta$ служат $A_i \cap B_j$, поэтому

$$h(\alpha \vee \beta | \beta) = \sum_{i=1}^s \mu(B_i) \left[\sum_{j,k} z \left(\frac{\mu(B_i \cap A_j \cap B_k)}{\mu(B_i)} \right) \right].$$

Если

$$i \neq k, \quad \mu(B_i \cap B_k) = 0,$$

то

$$h(\alpha \vee \beta | \beta) = \sum_{i=1}^s \mu(B_i) \left[\sum_j z \left(\frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} \right) \right] = h(\alpha | \beta).$$

Свойство П18.8.

$$h(\alpha | \beta) \geq 0,$$

причем равенство имеет место, если $\alpha \leq \beta$.

Доказательство.

По определению, $h(\alpha | \beta) \geq 0$.

Так как $\mu(B_i) > 0$, из $h(\alpha | \beta) = 0$ следует, что

$$z \left(\frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} \right) = 0 \quad \text{при всех } i, j.$$

Поэтому

$$\mu(B_i \cap A_j) = 0 \quad \text{или} \quad \mu(B_i) = \mu(B_i \cap A_j).$$

Свойство П18.9.

$$h(\alpha \vee \beta) = h(\beta) + h(\alpha | \beta).$$

Доказательство.

Пусть

$$\mu(B_i) = b_i, \quad \mu(B_i \cap A_k) = c_{ik}.$$

тогда

$$\begin{aligned} h(\beta) + h(\alpha | \beta) &= - \sum_{i=1}^s b_i \log b_i - \sum_{i=1}^s b_i \left[\sum_{k=1}^s \frac{c_{ki}}{b_i} \log \left(\frac{c_{ki}}{b_i} \right) \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^s b_i \log b_i - \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s c_{ki} [\log c_{ki} - \log b_i] = \\ &= - \sum_{i,k} c_{ki} \log c_{ki} = h(\alpha \vee \beta). \end{aligned}$$

Свойство П18.10. Если $\alpha \leq \alpha'$, то $h(\alpha) \leq h(\alpha')$.

Доказательство.

В силу предыдущего свойства и П18.8 имеем:

$$h(\alpha') = h(\alpha' \vee \alpha) = h(\alpha) + h(\alpha' | \alpha) \geq h(\alpha).$$

Свойство П18.11. Если $\alpha \leq \alpha'$, то $h(\alpha | \beta) \leq h(\alpha' | \beta)$.

Доказательство.

По свойствам П18.9 и П18.10 получаем:

$$h(\alpha | \beta) = h(\alpha \vee \beta) - h(\beta) \leq h(\alpha' \vee \beta) - h(\beta) = h(\alpha' | \beta).$$

Свойство П18.12.

$$h(\alpha \vee \alpha' | \beta) \leq h(\alpha | \beta) + h(\alpha' | \beta).$$

Доказательство.

В силу выпуклости функции $z(x)$

$$h(\alpha \vee \alpha' \vee \beta) + h(\beta) \leq h(\alpha \vee \beta) + h(\alpha' \vee \beta)$$

или

$$h(\alpha \vee \alpha' \vee \beta) - h(\beta) \leq h(\alpha \vee \beta) - h(\beta) + h(\alpha' \vee \beta) - h(\beta).$$

Следовательно, по свойству П18.9,

$$h(\alpha \vee \alpha' | \beta) \leq h(\alpha | \beta) + h(\alpha' | \beta). \quad \blacksquare$$

Свойство П18.13. Если $\beta \leq \beta'$, то $h(\alpha | \beta) \geq h(\alpha | \beta')$.

Доказательство.

Пусть

$$\frac{\mu(B'_k \cap B_j)}{\mu(B_j)} = \mu(B'_k | B_j),$$

где

$$\{B'_k\} = \beta', \quad \{B_j\} = \beta.$$

Так как меры $\mu(B'_k | B_j)$ положительны, а их сумма при фиксированном j равна 1, из выпуклости функции $z(x)$ следует, что

$$\sum_k z[\mu(A_i | B'_k)] \cdot \mu(B'_k | B_j) \leq z \left[\sum_k \mu(A_i | B'_k) \cdot \mu(B'_k | B_j) \right].$$

Поскольку $\beta \leq \beta'$, каждое B_j есть объединение некоторых B'_k :

$$B_j = \bigcup_{k'} B'_{k'};$$

следовательно,

$$\sum_k \mu(A_i | B'_k) \mu(B'_k | B_j) = \sum_{k'} \mu(A_i | B'_{k'}) \frac{\mu(B'_{k'})}{\mu(B_j)} = \mu(A_i | B_j).$$

Отсюда мы заключаем:

$$\sum_k z[\mu(A_i | B'_k)] \cdot \mu(B'_k | B_j) \leq z[\mu(A_i | B_j)].$$

Умножая правую и левую части на $\mu(B_j)$ и суммируя по i и j , получаем П18.13. \blacksquare

Предыдущие свойства распространяются на счетные измеримые разбиения (см. Рохлин и Синай [5]).

Если α и β — два счетных измеримых разбиения, то α индуцирует на каждом элементе B_i разбиения β с ренормированной мерой измеримое разбиение α_{B_i} с энтропией $h(\alpha_{B_i})$, которая *определяет условную энтропию разбиения α относительно β* :

$$h(\alpha | \beta) = \int_{M|\beta} h(\alpha_{B_i}) d\mu_\beta.$$

Здесь $M | \beta$ — пространство, точками которого являются элементы разбиения β . Мера μ_β на $M | \beta$ определяется следующим образом:

если $p: M \rightarrow M | \beta$ — каноническая проекция и $p^{-1}(K)$ измеримо, то $K \subset M | \beta$ называется и $\mu_B(K) = \mu_B(p^{-1}K)$.

Нетрудно проверить, что предыдущее определение энтропии $h(\alpha|\beta)$ совпадает с определением, данным в конечном случае, когда разбиения α и β конечны. Можно проверить также свойства П18.7–П18.13 и следующие свойства.

Свойство П18.14.

Пусть $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\alpha_n | \beta) = h(\alpha | \beta)$.

Свойство П18.15. Пусть $h(\alpha) < \infty$ и $\beta_1 \leq \dots \leq \bigvee_{n=1}^{\infty} \beta_n = \beta$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\alpha | \beta_n) = h(\alpha | \beta).$$

Приложение 19

Энтропия автоморфизма α

(См. теорему 12.26, гл. 2)

Докажем следующую теорему¹.

Теорема П19.1 (А. Н. Колмогоров). *Если α — образующее разбиение относительно φ , то $h(\varphi) = h(\alpha, \varphi)$.*

Прежде всего приведем несколько лемм.

Обозначим через \mathcal{F} множество измеримых разбиений с конечной энтропией. Для заданных $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ определим

$$|\alpha, \beta| = h(\alpha | \beta) + h(\beta | \alpha).$$

Лемма П19.2. $|\alpha, \beta|$ есть расстояние на \mathcal{F} .

Доказательство.

Ясно, что $|\alpha, \beta| \geq 0$. Если $|\alpha, \beta| = 0$, то $h(\alpha | \beta) = 0$, следовательно, $\alpha \leq \beta$ (формула 12.7, гл. 2). Точно также $\beta \leq \alpha$, следовательно, $\alpha = \beta$. Ясно, что $|\alpha, \beta| = |\beta, \alpha|$. По формулам (12.11), (12.12) и (12.9) (гл. 2),

$$\begin{aligned} h(\alpha | \gamma) &= h(\alpha \vee \gamma) - h(\gamma) \leq h(\alpha \vee \beta \vee \gamma) - h(\beta \vee \gamma) + h(\beta \vee \gamma) - h(\gamma) = \\ &= h(\alpha | \beta \vee \gamma) + h(\beta | \gamma) \leq h(\alpha | \beta) + h(\beta | \gamma). \end{aligned}$$

Точно также имеем

$$h(\gamma | \alpha) \leq h(\beta | \alpha) + h(\gamma | \beta).$$

Кроме того, мы заключаем, что

$$|\alpha, \gamma| \leq |\alpha, \beta| + |\beta, \gamma|. \quad \blacksquare$$

Лемма П19.3. *При фиксированном φ энтропия $h(\alpha, \varphi)$ непрерывна по α на \mathcal{F} . Более того, если $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, то*

$$|h(\alpha, \varphi) - h(\beta, \varphi)| \leq |\alpha, \beta|.$$

¹Приводимое доказательство основано на идеях доказательства Рохлина [4].

Доказательство.

По формуле 12.11 (гл. 2), если положить

$$\alpha_n = \alpha \vee \varphi\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha, \quad \beta_n = \beta \vee \varphi\beta \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\beta,$$

получаем

$$\begin{aligned} h(\beta_n | \alpha_n) - h(\alpha_n | \beta_n) &= [h(\alpha_n \vee \beta_n) - h(\alpha_n)] - [h(\alpha_n \vee \beta_n) - h(\beta_n)] = \\ &= h(\beta_n) - h(\alpha_n). \end{aligned}$$

Поскольку $h(\cdot | \cdot) \geq 0$, получаем

$$|h(\beta_n) - h(\alpha_n)| \leq h(\beta_n | \alpha_n) + h(\alpha_n | \beta_n).$$

С другой стороны, (см. формулу (12.10), гл.2)

$$\begin{aligned} h(\alpha_n | \beta_n) &= h(\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha | \beta_n) \leq \\ &\leq (\alpha | \beta_n) + h(\varphi\alpha | \beta_n) + \dots + h(\varphi^{n-1}\alpha | \beta_n), \end{aligned}$$

а так как $\beta, \varphi\beta, \dots, \varphi^{n-1}\beta \leq \beta_n$, получаем (см. формулу (12.9), гл. 2):

$$h(\alpha_n | \beta_n) \leq h(\alpha | \beta) + h(\varphi\alpha | \varphi\beta) + \dots + h(\varphi^{n-1}\alpha | \varphi^{n-1}\beta) = n h(\alpha | \beta).$$

Аналогичным образом,

$$h(\beta_n | \alpha_n) \leq n h(\alpha | \beta).$$

Суммируя, получаем:

$$|h(\beta_n) - h(\alpha_n)| \leq n[h(\alpha | \beta) + h(\beta | \alpha)] = n h|\alpha, \beta|.$$

Утверждение леммы мы получим, разделив правую и левую части равенства на n и устремив n к $+\infty$. ■

Лемма П19.4. *Конечные разбиения плотны в \mathcal{F} .*

Доказательство.

Пусть $\alpha \in \mathcal{F}$; обозначим через C_1, C_2, \dots — элементы положительной меры разбиения α . Предположим, что число этих элементов бесконечно.

Пусть α_n — разбиение элементов

$$C_1, \dots, C_{n-1}, E_n, \quad \text{где } E_n = M \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n).$$

Так как $\alpha_n \leq \alpha$, имеем:

$$\begin{aligned} |\alpha, \alpha_n| &= h(\alpha | \alpha_n) + h(\alpha_n | \alpha) = h(\alpha) - h(\alpha_n) = \\ &= \mu(E_n) \log \mu(E_n) - \sum_{i=0}^{\infty} \mu(C_i) \log \mu(C_i). \end{aligned}$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$, и ряд $\sum \mu(C_i) \log \mu(C_i)$ сходится; следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha, \alpha_n| = 0. \quad \blacksquare$$

Лемма П19.5. Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — последовательность разбиений таких, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \dots, \\ \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}(\alpha_n) = \hat{1}, \end{aligned} \quad (\text{П19.6})$$

то множество разбиений β конечной энтропии таких, что $\beta \leq \alpha_n$, по крайней мере при некотором n всюду плотно в \mathcal{F} .

Доказательство.

По предыдущей лемме, достаточно доказать, что для любого конечного разбиения α и любого $\delta > 0$ существуют некоторое n и $\beta \in \mathcal{F}$ такие, что

$$\beta \leq \alpha_n, \quad |\alpha, \beta| < \delta.$$

Пусть C_1, C_2, \dots, C_m — элементы разбиения α . Из (П19.6) следует, что при всех $\delta' > 0$ существует некоторое n и множества C'_1, \dots, C'_{m-1} алгебры $\mathfrak{M}(\alpha_m)$ такие, что

$$\mu((C_i \cup C'_i) \setminus (C_i \cap C'_i)) < \delta', \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Построим разбиение β множества M ; его элементы D_1, \dots, D_m определяются следующим образом:

$$D_1 = C'_1, \quad D_2 = C'_2 \setminus (C'_2 \cap C'_1), \quad D_i = C'_i \setminus (C'_i \cap (C'_1 \cup \dots \cup C'_{i-1}))$$

при $i = 2, \dots, m-1$, и

$$D_m = M \setminus (C'_1 \cup \dots \cup C'_{m-1}).$$

Ясно, что $\beta \leq \alpha_n$ и

$$\begin{aligned} |\alpha, \beta| &= h(\alpha | \beta) + h(\beta | \alpha) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \log \mu(C_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i) \log \mu(D_i) - \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(C_i \cap D_j) \log \mu(C_i \cap D_j). \end{aligned}$$

Это доказывает, что $|\alpha, \beta|$ непрерывно зависит от C'_1, \dots, C'_{m-1} и обращается в нуль при $C'_1 = C_1, \dots, C'_{m-1} = C_{m-1}$. Следовательно, $|\alpha, \beta| < \delta$ при достаточно малом δ' . ■

Доказательство теоремы П19.1.

Пусть α — образующее разбиение относительно φ . Положим

$$\tilde{\alpha}_n = \varphi^{-n+1}\alpha \vee \dots \vee \varphi^{n-1}\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2 \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\alpha}_{n+1} \leq \dots, \\ \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}(\tilde{\alpha}_n) = \hat{1}. \end{aligned}$$

Из предыдущей леммы следует, что множество \mathfrak{B} разбиений β таких, что $\beta \leq \tilde{\alpha}_n$ при по крайней мере одном n , плотно в \mathcal{F} . Пусть $\beta \in \mathfrak{B}$.

Полагая $\tilde{\lambda}_q = \varphi^{-q+1}\lambda \vee \dots \vee \varphi^{q-1}\lambda$ при любом разбиении λ и любом целом q , получаем:

$$\tilde{\beta}_m \leq (\tilde{\alpha}_n)_m = \tilde{\alpha}_{n+m-1}.$$

Следовательно (см. формулу 12.12, гл. 2),

$$h(\tilde{\beta}_m) \leq h(\tilde{\alpha}_{n+m-1}),$$

откуда

$$\frac{h(\tilde{\beta}_m)}{m} \leq \frac{h(\tilde{\alpha}_{n+m-1})}{n+m-1} \cdot \frac{n+m-1}{m}.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{h(\tilde{\lambda}_q)}{q} &= \frac{h(\varphi^{-q+1}\lambda \vee \dots \vee \varphi^{q-1}\lambda)}{q} = \\ &= \frac{h(\lambda \vee \dots \vee \varphi^{2q-2}\lambda)}{2q-1} \cdot \frac{2q-1}{q} \rightarrow 2h(\lambda, \varphi) \quad \text{при } q \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, устремляя m к $+\infty$, получаем:

$$h(\beta, \varphi) \leq h(\alpha, \varphi).$$

Но множество \mathfrak{B} плотно в \mathcal{F} , и $h(\beta, \varphi)$ непрерывна в β по лемме П19.3. Следовательно,

$$h(\alpha, \varphi) \geq \sup_{\mathfrak{B}} h(\beta, \varphi) = h(\varphi),$$

то есть

$$h(\alpha, \varphi) = h(\varphi).$$

■

Приложение 20

**Примеры римановых многообразий
отрицательной кривизны**

(См. 14.1, гл. 3)

Рассмотрим группу G сдвигов и положительных гомотетий прямой $\{t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Элемент g группы G вида

$$g: t \rightarrow yt + x, \quad x, y \in \mathbb{R}, y > 0,$$

можно обозначить (x, y) .

Если $g' \in G$ соответствует (x', y') , то

$$g'(g(t)) = y(yt + x) + x' = y'y t + y'x + x'.$$

Это доказывает, что если \perp означает закон композиции группы G , то

$$(x', y') \perp (x, y) = (y'x + x', y'y).$$

Единичным элементом e является $(0, 1)$. Элементом, обратным (x, y) , служит $\left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$.

Операция \perp и переход к обратному элементу — операции дифференцируемые. Следовательно, G — группа Ли, диффеоморфная полуплоскости $\{(x, y) \mid y > 0\}$.

Теорема П20.1. *Метрика группы G . Левоинвариантная метрика на группе G , удовлетворяющая при $x = 0, y = 1$ условию $ds^2 = dx^2 + dy^2$, имеет вид:*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Доказательство.

Обозначим через L_X левое действие:

$$L_X(U) = X \perp U, \quad X, U \in G.$$

Если $X = (x, y)$, $U = (u, v)$, то

$$L_{X^{-1}}(U) = \left(\frac{u-x}{y}, \frac{v}{y} \right).$$

Следовательно, касательное линейное отображение $L_{X^{-1}}^*$ имеет вид

$$L_{X^{-1}}^* \xi = \begin{pmatrix} y^{-1} \xi_1 \\ y^{-1} \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in TG_X. \quad (\text{П20.2})$$

Установив это, определим метрику на алгебре Ли TG_e следующим образом:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle_e = (\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in TG_e.$$

В каждой точке X из G это определяет левоинвариантную метрику, если положить

$$\langle \xi | \xi \rangle_X = \langle L_{X^{-1}}^* \xi | L_{X^{-1}}^* \xi \rangle.$$

Следовательно, из соотношений (П20.2) получаем:

$$\langle \xi | \xi \rangle_X = \frac{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}{y^2} \quad \text{при} \quad X = (x, y) \in G.$$

Таким образом, метрика ds^2 имеет вид:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (\text{П20.3})$$

■

Определение П20.4. Полу плоскость $\{(x, y) | y > 0\}$, снабженная метрикой (П20.3), называется *плоскостью Лобачевского*.

Глобальная система координат (x, y) называется *моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского*.

Условимся представлять точку (x, y) плоскости Лобачевского комплексным числом $z = x + iy$.

Теорема П20.5. Изометрии группы G .

Симметрия $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ и гомографии

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1, \quad (\text{П20.6})$$

являются изометриями метрики (П20.3).

Доказательство сводится к простым вычислениям, если заметить, что

$$ds^2 = \frac{-4 dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}, \quad \text{где } \bar{z} = x - iy. \quad \blacksquare$$

Теорема П20.7. *Углы метрики (П20.3) совпадают с углами евклидовой метрики.*

Доказательство.

Величина

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

пропорциональна $dx^2 + dy^2$. ■

Теорема П20.8. Геодезические. *Геодезические метрики (П20.3) — полупрямые, параллельные Oy : $x_0, y > 0$, и полуокружности с центрами на Ox . В частности, существует одна и только одна геодезическая, проходящая через две заданные точки.*

Доказательство.

По теореме П20.5, симметрия $x \rightarrow -x$ сохраняет метрику. Поскольку эта симметрия сохраняет также полупрямую $x = 0, y > 0$, эта полупрямая — геодезическая.

Образ геодезической $x = 0, y > 0$ под действием изометрии (П20.6) есть геодезическая. Таким образом, получаются все полуокружности с центрами на оси Ox и все полупрямые $x = x_0, y > 0$. Этими полуокружностями и полупрямыми исчерпываются все геодезические, так как для любого вектора полуплоскости всегда существует полуокружность с центром на оси Ox (или полупрямая, параллельная оси Oy), касательная к этому вектору. ■

Теорема П20.9. Кривизна. *Полная кривизна метрики (П20.3) постоянна и равна -1 .*

Доказательство.

Инвариантность метрики относительно преобразований (П20.6) доказывает, что кривизна K постоянна.

Если $ABC = \Delta$ — геодезический треугольник, то по теореме Гаусса–Бонне

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \iint_{\Delta} K d\sigma = \pi + K \times (\text{площадь треугольника } \Delta).$$

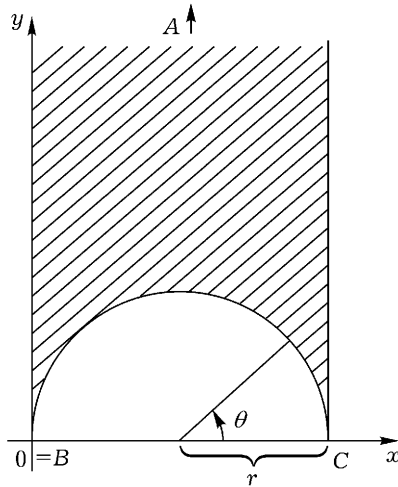


Рис. П20.10

Выберем заштрихованный треугольник в качестве геодезического (рис. П20.10)

Его углы равны нулю, гиперболический элемент площади равен

$$d\sigma = \frac{dx dy}{y^2},$$

следовательно,

$$\text{площадь } ABC = 2 \int_0^r dx \int_{r \sin \theta}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \pi.$$

Таким образом, $K = -1$. ■

Теорема П20.11. Асимптотические геодезические. Пусть $\gamma(\mathbf{u}, t) = \gamma(t)$ — геодезическая, параметризованная длиной своей дуги, g — точка полуплоскости. Тогда

- 1) через точки g и $\gamma(t_1)$ проходит геодезическая и притом только одна;
- 2) при $t_1 \rightarrow +\infty$ (соответственно, при $t_1 \rightarrow -\infty$) эта геодезическая стремится к предельному положению;

- 3) это предельное положение есть геодезическая, проходящая через точку g и пересечение $\gamma(+\infty)$ (соответственно, $\gamma(-\infty)$) кривой γ с осью Ox . Эта геодезическая называется геодезической, положительно (соответственно, отрицательно) асимптотической к γ .

Доказательство.

Пусть $\gamma(t_1)$ — точка кривой γ . Через g и $\gamma(t_1)$ проходит окружность, имеющая единственный центр на оси Ox (в пределе эта окружность вырождается в прямую, параллельную оси Oy). По теореме П20.8, это доказывает утверждение 1.

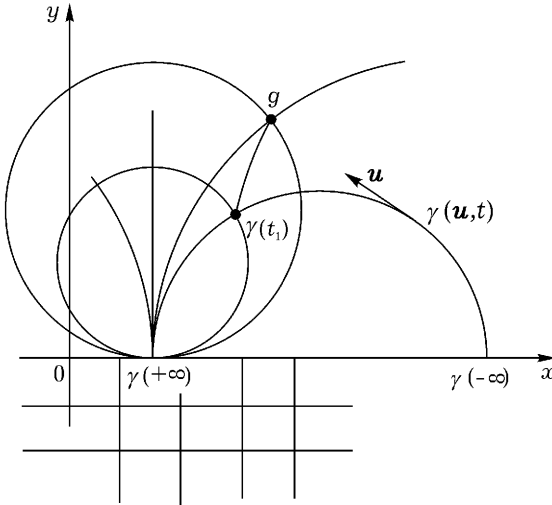


Рис. П20.12

Из формулы (П20.3) для метрики видно, что при $t_1 \rightarrow +\infty$ (соответственно, при $t_1 \rightarrow -\infty$) $\gamma(t_1)$ стремится к оси Ox , т.е. к пересечению $\gamma(+\infty)$ (соответственно, $\gamma(-\infty)$) геодезической γ с осью Ox (см. рис. П20.12). Это делает очевидным остальную часть теоремы. Таким образом, геодезические, положительно асимптотические к $\gamma(t)$, являются полуокружностями с центрами на оси Ox и полупрямыми, параллельные оси Oy , проходящие через $\gamma(+\infty)$. ■

Определение П20.13. Орициклы¹. Траектории, ортогональные по-

¹Понятие, введенное Н. И. Лобачевским.

ложительной (соответственно, отрицательной) асимптотике геодезической γ , называются положительными (соответственно, отрицательными) *орициклами* геодезической γ .

Теорема П20.14. *Орициклами служат окружности, касательные (сверху) к $y = 0$, и прямые $y = \text{const} > 0$.*

Доказательство.

Найдем (для определенности) положительные орициклы геодезической γ .

По определению П20.13 и теореме П20.11, это — траектории, ортогональные полуокружностям, проходящим через $\gamma(+\infty)$ с центрами на оси Ox (и расположенным над ней).

Инверсия с полюсом $\gamma(+\infty) = (0, a)$:

$$x + iy - a \rightarrow \frac{-1}{x - iy - a}$$

преобразует эти полуокружности в полупрямые

$$y < 0, \quad x = \text{const}.$$

Траекториями, ортогональными этим полупрямым, служат прямые, параллельные оси Ox :

$$y = \text{const} < 0. \tag{П20.15}$$

Но наша инверсия есть инволюция, сохраняющая углы, и евклидовы углы равны римановым углам (теорема П20.7). Поэтому образами прямых (П20.15) относительно нашей инверсии служат искомые ортогональные траектории: это окружности, проходящие через $\gamma(+\infty)$, касательные к оси Ox и расположенные над осью Ox (см. рис. П20.12). ■

Теорема П20.16. Римановы окружности. *Орициклами служат римановы окружности бесконечного радиуса с центрами на бесконечности.*

Доказательство.

Рассмотрим все геодезические, проходящие через точку m : это семейство полуокружностей, проходящих через точку m и ортогональных оси Ox (теорема П20.8).

Их траектории, ортогональные в римановом (или евклидовом, см. теорему П20.7) смысле, имеют вид римановых окружностей с центром в точке m . Это — окружности пучка с точками Понселе m и m' (точка m' симметрична точке m относительно оси Ox). В частности, степень точки оси Ox относительно одной из этих окружностей равна $\frac{1}{4}(mm')^2$.

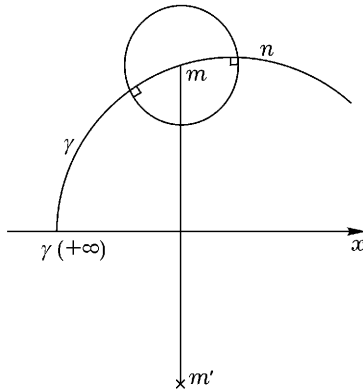


Рис. П20.17

Установив это, рассмотрим риманову окружность, проходящую через неподвижную точку n геодезической γ и центр m на геодезической γ (см. рис. П20.17). Если точка m удаляется в бесконечность по γ , т. е. стремится к Ox , то $mm' \rightarrow 0$. Следовательно, степень точки оси Ox относительно нашей окружности стремится к нулю. Таким образом, наша окружность в пределе переходит в окружность, касающуюся оси Ox в точке $\gamma(+\infty)$ и проходящую через точку n , т. е. в орицикл (теорема П20.16). Наоборот, ясно, что таким образом получают все орициклы. ■

Теорема П20.18. Пусть $\gamma(u, t)$ и $\gamma'(u', t')$ — две взаимно асимптотические геодезические, параметризованные дугой t . При подходящем выборе начала отсчета на γ и γ' имеем:

$$d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq ae^{-t}, \quad t \geq 0,$$

где d — риманово расстояние между точками геодезических $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$, a — постоянная, не зависящая от t .

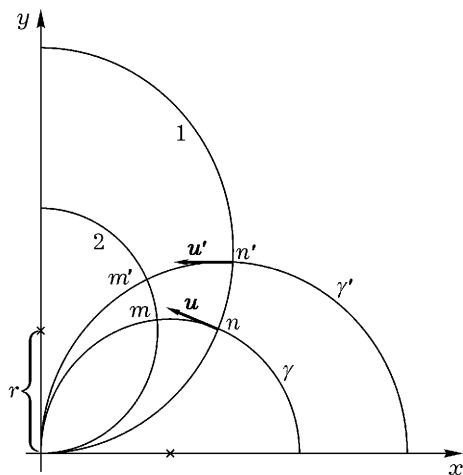


Рис. П20.19

Доказательство.

Выберем начала отсчета n на геодезической γ и n' — на геодезической γ' на одном и том же орицикле (см. рис. П20.19). Если m и m' — точки пересечения геодезических γ и γ' с орициклом 2, то дуги \overrightarrow{nm} и $\overrightarrow{n'm'}$ равны (1 и 2 — параллельные кривые). Пусть

$$\overrightarrow{nm} = \overrightarrow{n'm'} = t.$$

Вычислим $\overrightarrow{mm'}$ на орицикле 2. Уравнение орицикла 2 имеет вид:

$$x = r \sin u, \quad y = r + r \cos u,$$

откуда, используя соотношение для ds^2 , получаем:

$$\overrightarrow{mm'} = \int_m^{m'} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_m^{m'} \frac{du}{1 + \cos u} = \operatorname{tg} \frac{u_{m'}}{2} - \operatorname{tg} \frac{u_m}{2}.$$

Точно также на орицикле 1 имеем:

$$\overrightarrow{nn'} = \operatorname{tg} \frac{u_{n'}}{2} - \operatorname{tg} \frac{u_n}{2}.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$t = \overrightarrow{nm} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{u_n}{2} \right| - \log \left| \operatorname{tg} \frac{u_m}{2} \right|,$$

$$t' = \overrightarrow{n'm'} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{u_{n'}}{2} \right| - \log \left| \operatorname{tg} \frac{u_{m'}}{2} \right|.$$

Следовательно,

$$e^t = \frac{\operatorname{tg} \frac{u_n}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u_m}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{u_{n'}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u_{m'}}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{u_{n'}}{2} - \operatorname{tg} \frac{u_n}{2}}{\operatorname{tg} \frac{u_{m'}}{2} - \operatorname{tg} \frac{u_m}{2}} = \frac{\overrightarrow{nn'}}{\overrightarrow{mm'}},$$

$$\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{nn'} \cdot e^{-t}.$$

Но риманово расстояние $d(m, m')$ меньше или равно длине дуги $\overrightarrow{mm'}$, поэтому

$$d(m, m') \leq \overrightarrow{nn'} \cdot e^{-t}.$$

■

Обобщение П20.20

Очевидное обобщение мы получим, снабдив полупространство $x_n > 0$ пространства \mathbb{R}^n метрикой

$$ds^2 = \frac{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}{(x_n)^2}.$$

Это — пространство Лобачевского постоянной кривизны, равной -1 . Орициклы представляют собой $(n-1)$ -мерные многообразия, а именно: евклидовы плоскости $x_n = C$ и евклидовы сферы, касательные к плоскости $x_n = 0$ и расположенные под плоскостью $x_n = 0$.

Приложение 21
Доказательство теоремы
Лобачевского–Адамара

(См. 14.3, гл. 3)

А. Многообразия отрицательной кривизны

Напомним сначала некоторые классические свойства римановых многообразий отрицательной кривизны.

Теорема П21.1. Пусть V — полное односвязное риманово многообразие отрицательной кривизны. Тогда:

- 1) Существует одна и только одна геодезическая, проходящая через две данные различные точки;
- 2) V диффеоморфно евклидовому пространству;
- 3) пусть ABC — геодезический треугольник, углы которого A, B, C , а стороны a, b, c . Тогда:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C \leq c^2.$$

Доказательство может быть найдено в работе С. Хелгасона [1].

Прямым результатом является следующее следствие:

Следствие П21.2. Учитывая вышеупомянутые предположения, римановы сферы V являются выпуклыми, то есть геодезическая имеет не более двух общих со сферой точек.

В. Асимптоты к данной геодезической

Как обычно, $\gamma(x, \mathbf{u}, t) = \gamma(t) = \gamma$ обозначает геодезическую, исходящую из x с вектором начальной скорости \mathbf{u} и длиной дуги t . Точка на γ , соответствующая t , также записывается через $\gamma(t)$. Риманово расстояние между двумя точками a и b обозначается через $|a, b|$. Через V обозначим полное, односвязное риманово многообразие отрицательной кривизны.

Теорема П21.3. Пусть v' — точка из V . Геодезическая, соединяющая v' с точкой $\gamma(t) \in \gamma$, стремится к пределу, когда $t \rightarrow +\infty$ (соответственно, $t \rightarrow -\infty$). Этот предел является геодезической.

Доказательство.

См. рис. П21.4

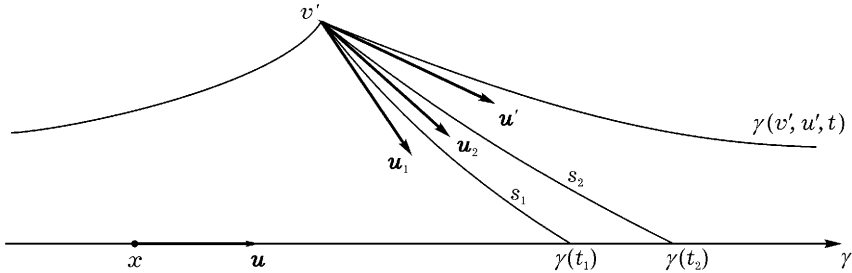


Рис. П21.4

Точки v' и $\gamma(t_1)$ определяют одну и только одну геодезическую $\gamma(v', \mathbf{u}_1, t)$. Положим $s_1 = |v, \gamma(t_1)|$. Возьмем $t_2 > t_1$ и применим неравенство (3) теоремы (П21.1) к геодезическому треугольнику $v', \gamma(t_1), \gamma(t_2)$. В очевидных обозначениях имеем

$$(s_2)^2 + (s_1)^2 - (t_2 - t_1)^2 \leq 2s_1 s_2 \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

С другой стороны, неравенство треугольника, примененное к $v, v', \gamma(t_1)$, дает

$$t_1 - |v, v'| \leq s_1 \leq t_1 + |v, v'|,$$

откуда

$$s_1 = t_1 + O(1), \quad t_1 \rightarrow +\infty.$$

Аналогично,

$$s_2 = t_2 + O(1), \quad t_2 \rightarrow +\infty.$$

В результате получаем

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow +\infty} \cos(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 1,$$

то есть

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow +\infty} (\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}) = 0.$$

Таким образом, согласно Коши, \mathbf{u}_1 стремится к пределу \mathbf{u}' , когда $t_1 \rightarrow +\infty$.

Геодезическая $\gamma(v', \mathbf{u}', t)$ является предельным положением $\gamma(v', \mathbf{u}_1, t)$, поскольку экспоненциальное отображение $\exp_{v'}$ непрерывно. Геодезическая $\gamma(v', \mathbf{u}', t)$ называется *положительной асимптотой* к γ . Отрицательные асимптоты определяются подобным образом при $t \rightarrow -\infty$. ■

Замечание П21.5. Легко доказать, что положительная асимптота к γ , исходящая из данной точки положительной асимптоты $\gamma(v', \mathbf{u}', t)$ является ничем иным, как γ (геометрически). Таким образом, можно говорить о положительной асимптоте к γ , не упоминая определенную точку v' . Более того, множество положительных асимптот к γ является $(\dim V - 1)$ -параметрическим семейством геодезических.

С. Орисферы¹ V

Пусть снова V — полное, односвязное риманово многообразие отрицательной кривизны. Пусть $\gamma(v, \mathbf{u}, t) = \gamma(t)$ — геодезическая и v' — произвольная точка из V .

Лемма П21.6. *Разность*

$$|v', \gamma(t)| - |v, \gamma(t)| \equiv \phi(t)$$

стремится к конечному пределу $L(v'; \gamma, v)$ при $t \rightarrow +\infty$. Этот предел является C^1 -дифференцируемой функцией v' и v .

Доказательство.

Примем $t_2 > t_1$. Неравенство треугольника, примененное к $v', \gamma(t_1), \gamma(t_2)$, дает

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) &= |v', \gamma(t_2)| - |v, \gamma(t_2)| \leq |v', \gamma(t_1)| + |\gamma(t_1), \gamma(t_2)| - |v, \gamma(t_2)| = \\ &= |v', \gamma(t_1)| - |v, \gamma(t_1)| = \varphi(t_1). \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(t)$ монотонно убывает. С другой стороны, $\varphi(t)$ ограничена, поскольку неравенство треугольника, примененное к $v, v', \gamma(t)$, дает

$$|\varphi(t)| = \left| |v', \gamma(t)| - |v, \gamma(t)| \right| \leq |v, v'|,$$

¹См. А. Грант [1].

что доказывает существование предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = L(v'; \gamma, v).$$

Второе утверждение следует из неравенства

$$| [|v'_1, \gamma(t_1)| - |v_1, \gamma(t_1)|] - [|v', \gamma(t_1)| - |v, \gamma(t_1)|] | \leq |v', v'_1| + |v, v_1|,$$

то есть

$$|L(v'_1; \gamma, v) - L(v'; \gamma, v)| \leq |v', v'_1| + |v, v_1|.$$

Очевидно, что

$$L(v'; \gamma, v) - L(v'; \gamma, v_1) = \overline{vv_1}, \quad (\text{П21.7})$$

где $\overline{vv_1}$ — алгебраическая мера vv_1 на ориентированной геодезической γ .

Определение П21.8. Геометрическое место точек x , для которых $L(x; \gamma, O) = 0$, называется *положительной орисферой*, проходящей через точку O на γ , и будет обозначаться через $H^+(\gamma, O)$.

Согласно лемме (П21.7), $H^+(\gamma, O)$ является C^1 -дифференцируемым подмногообразием размерности $(\dim V - 1)$. Пусть v_1 — произвольная точка на γ . Отношение (П21.7) показывает, что $H^+(\gamma, O)$ имеет уравнение

$$L(x; \gamma, v_1) = \overline{Ov_1}.$$

Получаем орисферы, являющиеся сферами бесконечного радиуса с центром в бесконечности. Риманова сфера с центром в точке a , проходящая через b , будет обозначаться $\sum(a, b)$.

Лемма П21.9. $\sum(\gamma(t), O)$ стремится к $H^+(\gamma, O)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство.

Пусть x — точка положительной орисферы $H^+(\gamma, O)$. Имеем

$$\varphi(t) \equiv |x, \gamma(t)| - |O, \gamma(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

С другой стороны, $\varphi(t) \geq 0$. Таким образом, $\sum(\gamma(t), O)$ пересекает отрезок геодезической $x\gamma(t)$ в точке $b(t)$ (см. рис. П21.10).

Имеем

$$|x, b(t)| = |x, \gamma(t)| - |\gamma(t), b(t)| = |x, \gamma(t)| - |O, \gamma(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

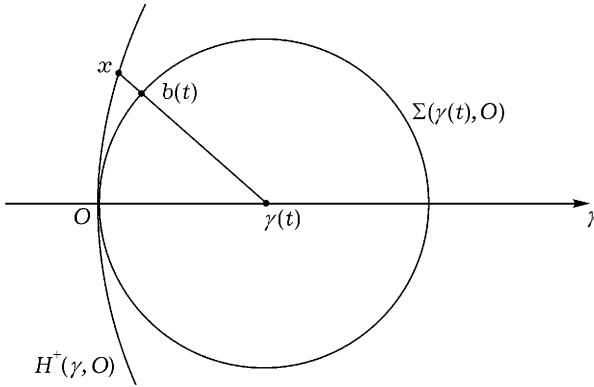


Рис. П21.10

Это означает, что каждая точка положительной орисферы $H^+(\gamma, O)$ является предельной точкой сфер $\Sigma(\gamma(t), O)$ при $t \rightarrow +\infty$. Обратно, докажем, что такая предельная точка принадлежит $H^+(\gamma, O)$. Пусть $b(t)$ — точка сфер $\Sigma(\gamma(t), O)$ и $x = \lim_{t \rightarrow +\infty} b(t)$. Неравенство треугольника дает

$$\begin{aligned} \|x, \gamma(t)\| - \|O, \gamma(t)\| &\leq \|x, \gamma(t)\| - \|b(t), \gamma(t)\| + \|b(t), \gamma(t)\| - \|O, \gamma(t)\| = \\ &= \|x, b(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $L(x; \gamma, O) = 0$, то есть

$$x \in H^+(\gamma, O). \quad \blacksquare$$

Следствие П21.11. *Орисферы являются выпуклыми и, если кривизна многообразия V ограничена сверху отрицательной постоянной, строго выпуклыми.*

Доказательство.

Орисфера $H^+(\gamma, O)$ является пределом шаров, проходящих через O и центр которых стремится к бесконечности вдоль γ , и эти шары выпуклые (см. П21.2). \blacksquare

Лемма П21.12. *Пусть $H^+(\gamma, O)$ и $H^+(\gamma, O')$ — две орисферы на γ . Если $a \in H^+(\gamma, O)$ и $a' \in H^+(\gamma, O')$, тогда $|a, a'| \geq |O, O'|$.*

Доказательство.

Предположим, что $|a, a'| < |O, O'|$. Из (П21.9) заключаем, что каждому t соответствует точка $a(t) \in \sum(\gamma(t), O)$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a,$$

и точка $a'(t) \in \sum(\gamma(t), O')$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a'(t) = a'.$$

Таким образом, для достаточно больших t , имеем

$$|a(t), a'(t)| < |O, O'|.$$

Не меняя общности, предположим, что точка O' лежит между точками O и $\gamma(t)$. Получаем следующее противоречие

$$\begin{aligned} |a(t), \gamma(t)| &\leq |a(t), a'(t)| + |a'(t), \gamma(t)| < |O, O'| + |a'(t), \gamma(t)| = \\ &= |O, \gamma(t)| = |a(t), \gamma(t)|. \end{aligned}$$

■

Лемма П21.13. *Две положительные орисферы $H^+(\gamma, O)$ и $H^+(\gamma, O')$ отрезают дугу длины $|O, O'|$ на каждой положительной асимптоте к геодезической γ .*

Доказательство.

Пусть $\gamma(a', u, t)$ — положительная асимптота к γ , которая пересекает $H^+(\gamma, O')$ в точке a' . Точки $\gamma(t)$ и a' определяют геодезическую, на которой выберем точку $a(t)$ так, что $|a(t), a'| = -L(a'; \gamma, O) = |O, O'|$, и точка a' лежит между $a(t)$ и $\gamma(t)$ (см. рис. П21.14). Поскольку экспоненциальное отображение $\text{exp}_{a'}$ непрерывно, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a \in \gamma(a', u, t) \quad \text{и} \quad |a, a'| = -L(a'; \gamma, O).$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \left| |a, \gamma(t)| - |O, \gamma(t)| \right| &\leq \left| |a, a(t)| + |a(t), \gamma(t)| - |O, \gamma(t)| \right| = \\ &= \left| |a, a(t)| + |a'(t), \gamma(t)| - |O', \gamma(t)| \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $a \in H^+(\gamma, O)$.

■

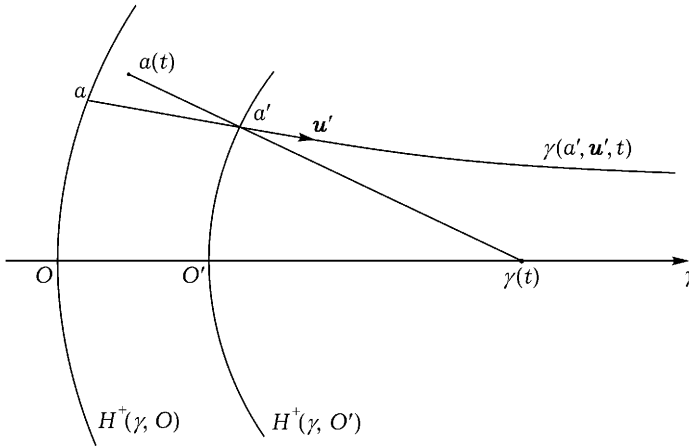


Рис. П21.14

Теорема П21.15. *Положительные асимптоты к γ являются ортогональными траекториями положительных орисфер на γ .*

Доказательство.

Доказательство теоремы П21.15 является прямым следствием лемм П21.12 и П21.13.

Наконец, заметим, что отрицательные орисферы $H^-(\gamma, O)$ определяются аналогично из отрицательных асимптот ($t \rightarrow -\infty$). ■

Д. Орисферы на T_1V

Унитарное касательное расслоение многообразия V обозначается через T_1V и $p: T_1V \rightarrow T$ является канонической проекцией.

Пусть u — точка на T_1V ; u определяет геодезическую $\gamma(pu, u, t) = \gamma(u, t) = \gamma(t)$, подъем которой в T_1V снова обозначается через $\gamma(t)$. Из раздела B нам известно, что существуют две орисферы $H^+(\gamma, pu) = H^+(u)$ и $H^-(\gamma, pu) = H^-(u)$, проходящие через pu . Множество унитарных векторов, ортогональных $H^+(u)$ (соотв. $H^-(u)$) вдоль $H^+(u)$ (соотв. $H^-(u)$) и ориентированных подобно u является $(\dim V - 1)$ -размерным подмногообразием $\mathcal{H}^+(u)$ (соотв. $\mathcal{H}^-(u)$) на T_1V . Подмногообразия \mathcal{H} называются орисферами из T_1V .

Теорема П21.16.

1) Все $\gamma(\mathbf{u}, t)$ и подмногообразия $\mathcal{H}^+(\mathbf{u})$, $\mathcal{H}^-(\mathbf{u})$ являются слоениями T_1V ;

2) В каждой точке $\mathbf{u} \in T_1V$ эти слоения трансверсальны, то есть

$$T(T_1V)_{\mathbf{u}} = X_{\mathbf{u}}^+ \oplus X_{\mathbf{u}}^- Z_{\mathbf{u}},$$

где $X_{\mathbf{u}}^+$ (соответственно, $X_{\mathbf{u}}^-$, $Z_{\mathbf{u}}$) является касательным пространством к $\mathcal{H}^+(\mathbf{u})$ (соответственно, $\mathcal{H}^-(\mathbf{u})$, $\gamma(\mathbf{u}, t)$) к точке \mathbf{u} ;

3) Эти расслоения инвариантны относительно геодезического потока φ_t

$$\begin{aligned}\varphi_t \mathcal{H}^{\pm}(\mathbf{u}) &= \mathcal{H}^{\pm}(\varphi_t \mathbf{u}), \\ \varphi_t \gamma(\mathbf{u}, t') &= \gamma(\varphi_t \mathbf{u}, t').\end{aligned}$$

Доказательство.

(1) Следует из самого построения слоев;

(2) Следует из строгой выпуклости H^+ (соотв. H^-) (см. П21.11);

(3) Следует из теоремы П21.15. ■

Инвариантность расслоений сводит исследование дифференциала φ_t^* к исследованию его ограничений на $\mathcal{H}^+(\mathbf{u})$ (соотв. $\mathcal{H}^-(\mathbf{u})$) и $\gamma(\mathbf{u})$. Теперь, в завершение предположим, что V является универсальным накрытием \widetilde{W} компактного риманова многообразия W отрицательной кривизны. В частности, кривизна V ограничена сверху отрицательной постоянной $-k^2$.

Лемма П21.17. Пусть $r_s(t)$ — однопараметрическое семейство ($s > 0$) числовых, C^2 -дифференцируемых функций. Предположим, что

$$\ddot{r}_s \geq k^2 r_s \quad (k = \text{const} > 0)$$

для каждой s , $t \geq 0$ и $r_s(0) > 0$, $r_s(s) = 0$. Тогда

$$r_s(t) < r_s(0) \frac{\text{ch}[k(s-t)]}{\text{ch}[ks]}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq s.$$

Предположим также, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \dot{r}_s \Big|_{t=s} = 0.$$

Тогда, для достаточно больших значений s ,

$$|\dot{r}_s(t)| < k r_s(0) \frac{\text{sh}[k(s-t)]}{\text{ch}(ks)}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq s.$$

Доказательство.

Функция

$$l_s(t) = r_s(t) - \frac{r_s(0)}{\operatorname{ch}(ks)} \operatorname{ch}[k(s-t)]$$

удовлетворяет

$$\ddot{l}_s(t) \geq k^2 l_s(t), \quad l_s(0) = l_s(s) = 0.$$

Таким образом, l_s вогнут между 0 и s и принимает нулевое значение при $t = 0, s$, следовательно $l_s(t) \leq 0$ при $0 \leq t \leq s$, что доказывает первую часть леммы. Это также доказывает, что \dot{l}_s увеличивается между 0 и s . Таким образом, $\dot{l}_s(t) \leq \dot{l}_s(s)$ при $0 \leq t \leq s$. С другой стороны

$$\dot{l}_s(t) = \dot{r}_s(t) + kr_s(0) \frac{\operatorname{sh}[k(s-t)]}{\operatorname{ch}[ks]},$$

в частности,

$$\dot{l}_s(t) \leq \dot{l}_s(s) = \dot{r}_s(s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow +\infty,$$

откуда вторая часть легко выводится. ■

Теорема П21.18. Пусть ϕ_t — геодезический поток подмногообразия T_1V . Тогда, для любого положительного числа t

$$\begin{aligned} \|\phi_t^* \xi\| &\leq be^{-kt} \|\xi\|, & \|\phi_{-t}^* \xi\| &\geq ae^{kt} \|\xi\|, & \text{если } \xi \in X_u^+, \\ \|\phi_t^* \xi\| &\geq ae^{kt} \|\xi\|, & \|\phi_{-t}^* \xi\| &\leq be^{-kt} \|\xi\|, & \text{если } \xi \in X_u^-. \end{aligned}$$

Положительные постоянные a и b независимы от t и ξ ; $\|\cdot\|$ обозначает длину вектора из T_1V с обычной римановой метрикой.

Доказательство.

Докажем только первое неравенство, справедливость остальных может быть доказана тем же способом.

Пусть $\gamma(O, \mathbf{u}, t) = \gamma(t) = \gamma$ геодезическая из V и пусть x точка из $H^+(\gamma, O)$, достаточно близкая к O . Существует определенная геодезическая $\gamma_s(x, \mathbf{u}_s, t) = \gamma_s(t)$, проходящая через x и $\gamma(t) \in \gamma$. Наше первое намерение заключается в вычислении риманова расстояния между точками $\dot{\gamma}(t)$ и $\dot{\gamma}_s(t)$, рассматриваемыми как элементы T_1V . Пусть $r_s(t)$ — риманово расстояние между их проекциями $\gamma(t)$

и $\gamma_s(t)$ на V . Для того, чтобы вычислить $r_s(t)$, рассмотрим поле Якоби² $\psi(t)$ вдоль γ , которое ортогонально к γ и которое обращается в нуль при $t = s$. По определению,

$$\langle R(\dot{\gamma}, \psi)\dot{\gamma}, \psi \rangle = -\langle \nabla^2 \psi, \psi \rangle,$$

где $R(\cdot, \cdot)$ является тензором кривизны и ∇ — ковариантная производная вдоль γ . По определению, секционная кривизна в двумерном пространстве (γ, ψ) имеет вид

$$\rho(\dot{\gamma}, \psi) = \frac{\langle R(\dot{\gamma}, \psi)\dot{\gamma}, \psi \rangle}{\|\psi\|^2}.$$

Известно, что $\rho(\dot{\gamma}, \psi) \geq -k^2$, следовательно,

$$\langle \nabla^2 \psi, \psi \rangle \geq k^2 \|\psi\|^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 \psi, \psi \rangle &= \nabla \langle \nabla \psi, \psi \rangle - \|\nabla \psi\|^2, \\ \nabla \langle \nabla \psi, \psi \rangle &= \frac{1}{2} \nabla^2 \|\psi\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|\psi\|^2, \\ \|\nabla \psi\|^2 &\geq \left(\frac{d}{dt} \|\psi\| \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, длина $l_s(t)$ из $\psi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2} (l_s^2)'' - (l_s')^2 \geq k^2 l_s^2,$$

то есть

$$\ddot{l}_s \geq k^2 l_s, \quad \text{и} \quad l_s(0) > 0, \quad l_s(s) = 0.$$

Лемма (П21.17) и классическая возможность выбрать поле Якоби ψ так, что

$$r_s(t) = l_s(t) + o(1),$$

при x , достаточно близком к γ , дает

$$r_s(t) < r_s(0) \frac{\text{ch}[k(s-t)]}{\text{ch}[ks]}, \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq s. \quad (\text{П21.19})$$

²См. Дж. Милнор [1].

Теперь легко видеть, что угол из γ и γ_s в $\gamma(s)$ стремится к нулю при $s \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\dot{r}_s(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$ и из леммы П21.17 снова вытекает

$$|\dot{r}_s(t)| < kr_s(0) \frac{\text{sh}[k(s-t)]}{\text{sh}[ks]}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq s. \quad (\text{П21.20})$$

При $s \rightarrow +\infty$, $\gamma_s(t)$ стремится к точке $\gamma'(t)$ положительной асимптоты $\gamma'(x, \mathbf{u}', t)$ к γ , и $\gamma_s(t)$ стремится к $\dot{\gamma}'(t)$. Если $r(t)$ обозначает расстояние от $\gamma(t)$ до $\gamma'(t)$, то из неравенств (П21.19) и (П21.20) получаем (при $s \rightarrow +\infty$)

$$r(t) < r(0)e^{-kt}, \\ |\dot{r}(t)| < kr(0)e^{-kt}, \quad \text{при } t \geq 0.$$

Таким образом, риманово расстояние $\dot{\gamma}(t)$, $\dot{\gamma}'(t) \in T_1V$ удовлетворяет неравенству

$$d(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}'(t)) \leq r(0)\sqrt{1+k^2}e^{-kt} \quad \text{для } t \geq 0.$$

Из чего легко выводится первое неравенство теоремы П21.18.

В связи с этой теоремой, слои $\mathcal{H}^+(\mathbf{u})$ (соотв. $\mathcal{H}^-(\mathbf{u})$) называются «сжимающимися» (соотв. «растягивающимися») слоями T_1V .

Е. Доказательство теоремы Лобачевского – Адамара³

Теорема П21.21. Пусть W — компактное, связанное риманово многообразие отрицательной кривизны. Тогда геодезический поток на T_1W является U -потокom.

Доказательство.

Пусть $V = \widetilde{W}$ — универсальное накрытие W с прообразом римановой метрики W под действием канонической проекции $\pi: \widetilde{W} \rightarrow W$. Пространство V удовлетворяет предположению предыдущего раздела. Следовательно, геодезический поток на T_1V удовлетворяет условиям U -потока: условие (0) является тривиально выполненным; условие (1) следует из теоремы П21.16; условие (2) следует из теоремы П21.18. Завершаем доказательство проверкой того, что π является совместимым с тремя слоениями $V = \widetilde{W}$ и $T_1\widetilde{W}$. Первая гомотопическая группа $\pi_1(W)$ изоморфна группе автоморфизмов \widetilde{W} , поскольку W связ-

³См. Дж. Адамар [1]. Доказательства в разделах В и С были приведены из работы Н. Busemann: «Metric Methods in Finsler Spaces and Geometry», Ann. Math. Study, № 8, Princeton University Press.

ное. Группа $\pi_1(\widetilde{W})$ действует как группа автоморфизмов из $T_1\widetilde{W}$: если \mathbf{u}' , $\mathbf{u}'' \in T_1\widetilde{W}$ сравнимы по $\text{mod } \pi_1(W)$, тогда $\mathcal{H}^\pm(\mathbf{u}')$ и $\mathcal{H}^\pm(\mathbf{u}'')$ сами являются сравнимыми по $\text{mod } \pi_1(W)$. ■

Замечание П21.22. Ориферы компактного, n -мерного многообразия W диффеоморфны \mathbb{R}^{n-1} . Действительно, рассмотрим ориферу \mathcal{H}^+ . Она является паракомпактным многообразием. Пусть S — компактное подмножество \mathcal{H}^+ . Тогда $\varphi_t S$ покрывается диском D из $\varphi_t \mathcal{H}^+$ (при достаточно большом значении t). Прообраз $\varphi_t^{-1} D$ является диском, который покрывает S в \mathcal{H}^+ . Таким образом, \mathcal{H}^+ диффеоморфно \mathbb{R}^{n-1} , согласно следующей лемме Брауна (Brown, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1961, 12, pp. 812–814) и Сталингса (Stallings, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, 58, pp. 481–488): *пусть M — паракомпактное многообразие такое, что любое компактное подмножество содержится в открытом множестве, диффеоморфном евклидовому пространству. Тогда само M будет диффеоморфно евклидовому пространству.*

Этот результат не выполняется для некомпактных многообразий. Рассмотрим пространство $\{(x, y) \mid y > 0, x \pmod{1}\}$, снабженное метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dz^2}{y^2}.$$

Гауссова кривизна равняется -1 и универсальное накрывающее пространство является плоскостью Лобачевского (см. приложение 20). Кривая $y = 1$ является орициклом, гомеоморфным S^1 .

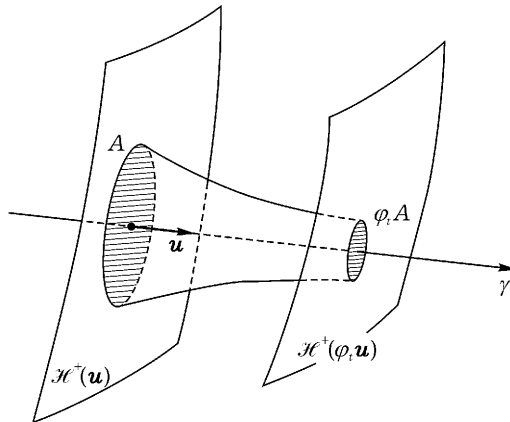


Рис. П21.23

Приложение 22

Доказательство теоремы Синая

(См. § 15, гл. 3)

Пусть (M, φ) — U -система, X_m — поле растягивающихся k -плоскостей, Y_m — поле сжимающихся k -плоскостей.

Метрика на пространстве полей k -плоскостей

Определим прежде всего метрику на пространстве k -плоскостей, касательных в точке $m \in M$.

TM_m есть прямая сумма $X_m \oplus Y_m$, следовательно, k -плоскость U_m в TM_m имеет уравнение

$$y = P(p)x,$$

где $x \in X_m$, $y \in Y_m$, и $P(U_m): X_m \rightarrow Y_m$ — линейное отображение.

Определим метрику с помощью нормы линейных отображений $P(U_m)$: если U_m , и U'_m — две k -плоскости из TM_m , то положим

$$|U_m - U'_m| = \|P(U_m) - P(U'_m)\| = \sup_{\substack{x \in X_m \\ |x| < 1}} |P(U_m)x - P(U'_m)x|.$$

Метрика в пространстве полей k -плоскостей U определяется соотношением

$$|U - U'| = \sup_{m \in M} |U_m - U'_m|.$$

Именно в этом смысле следует понимать расстояние в неравенстве (15.3) из § 15.

Пусть теперь R_1 и R_2 — два пространства, изоморфных \mathbb{R}^n (n — размерность многообразия M). Предположим, что R_i ($i = 1, 2$) — прямая сумма двух подпространств X_i и Y_i размерностей, соответственно, k и l :

$$R_1 = X_1 \oplus Y_1, \quad R_2 = X_2 \oplus Y_2.$$

Пусть $A: R_1 \rightarrow R_2$ — линейное отображение такое, что

$$AX_1 = X_2, \quad AY_1 = Y_2,$$

и

$$\begin{cases} |Ax| \geq \mu|x| & \text{при } x \in X_1, \\ |Ay| \leq \frac{1}{\mu}|y| & \text{при } y \in Y_1, \end{cases} \quad (\text{П22.1})$$

где μ — некоторая постоянная.

Лемма П22.2. Пусть \mathfrak{A} — оператор, индуцированный отображением A , который k -плоскостям из R_1 ставит в соответствие k -плоскости из R_2 . Тогда в окрестности плоскости X_1

$$|\mathfrak{A}U - \mathfrak{A}U'| \leq \mu^{-2}|U - U'|.$$

Доказательство.

По определению имеем:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{A}U - \mathfrak{A}U'| &= \sup_{\substack{|x| < 1, \\ x \in X_2}} |P(\mathfrak{A}U)x - P(\mathfrak{A}U')x| = \\ &= \sup_{\substack{|x| < 1 \\ x \in X_2}} |\mathfrak{A}P(U)\mathfrak{A}^{-1}x - \mathfrak{A}P(U')\mathfrak{A}^{-1}x|. \end{aligned}$$

Но, если $|x| < 1$ и $x \in X_2$, то $A^{-1}x \in X_1$ и $|A^{-1}x| \leq \frac{1}{\mu}$; следовательно,

$$\sup_{\substack{|x| < 1 \\ x \in X_2}} \leq \sup_{\substack{|x| < \mu^{-1} \\ x \in X_1}}$$

и

$$\sup_{\substack{|x| < 1 \\ x \in X_2}} |[\mathfrak{A}P(U) - \mathfrak{A}P(U')]\mathfrak{A}^{-1}x| \leq \sup_{\substack{|x| < 1 \\ x \in X_1}} \mu^{-1} |\mathfrak{A}[P(U) - P(U')]x|.$$

Но

$$|(P(U) - P(U'))x| = \sup_{\substack{|x| < 1 \\ x \in X_1}} |(P(U) - P(U'))x| = |U - U'|,$$

кроме того,

$$(P(U) - P(U'))x \in Y_1,$$

следовательно,

$$\mu^{-1} |\mathfrak{A}[P(U) - P(U')]x| \leq \mu^{-2} |[P(U) - P(U')]z| \leq \mu^{-2} |U - U'|. \quad \blacksquare$$

Доказательство неравенства (15.3) из § 15 легко сводится к лемме, если принять за $R_2 = X_2 \oplus Y_2$ и $R_1 = X_1 \oplus Y_1$ касательные пространства $TM_m = X_m \oplus Y_m$ и $TM_{\varphi^{-n}(m)} = X_{\varphi^{-n}(m)} \oplus Y_{\varphi^{-n}(m)}$ соответственно. В качестве линейного отображения \mathfrak{A} можно принять дифференциал $(\varphi^*)^n$ отображения φ^n . При достаточно большом n неравенства (П22.1) из леммы являются следствиями аксиом Y -систем.

Приложение 23

Признак структурной устойчивости Андропова–Понтрягина

(См. § 16, гл. 3)

Прежде чем формулировать результат Андропова–Понтрягина, напомним некоторые определения.

Пусть M — компактная дифференцируемая поверхность, X — дифференцируемое векторное поле на M .

Простые особые точки

Особой точкой векторного поля X называется точка x_0 поверхности M такая, что $X(x_0) = 0$. Если x_0 — особая точка векторного поля, то можно предположить, что x_0 совпадает с началом $(0, 0)$ локальной системы координат (x_1, x_2) . Если X_1, X_2 — компоненты векторного поля X в такой системе координат, то

$$X_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + o(|x_1| + |x_2|), \quad x_1, x_2 \rightarrow 0,$$

$$X_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + o(|x_1| + |x_2|), \quad x_1, x_2 \rightarrow 0,$$

где

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right|_{x_0}.$$

Если матрица (a_{ij}) обладает только собственными значениями с отличными от нуля действительными частями, то особая точка x_0 называется *простой*.

Ясно, что это определение не зависит от системы координат.

Седлом называется простая особая точка, в окрестности которой орбиты выглядят так, как показано на рис. П23.1. Такой особой точкой служит начало координат системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 = \mu x_2, \quad \lambda\mu < 0. \end{cases}$$

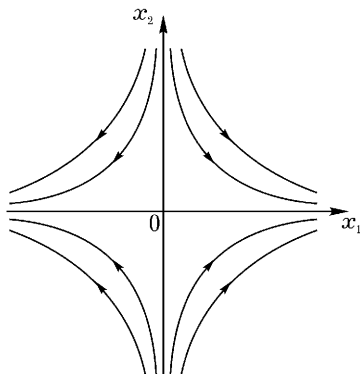


Рис. П23.1

Простые циклы

Замкнутая орбита векторного поля X называется *циклом*. Цикл индекса нуль называется *простым*.

Сепаратрисы

Если γ — траектория векторного поля X , x_0 — точка траектории γ , то обозначим через $\gamma_+(x_0)$ (соответственно, $\gamma_-(x_0)$) множество $\{x(t) | t \geq 0\}$ (соответственно, $\{x(t) | t \leq 0\}$), где $x(t)$ — решение системы $\dot{x} = X(x)$, удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$ и соответствующее траектории γ .

Предельными множествами траектории γ называются множества

$$\bigcap_{x \in \gamma} \overline{\gamma_-(x)}, \quad \bigcap_{x \in \gamma} \overline{\gamma_+(x)}, \quad (\overline{\quad} \text{ — замыкание}).$$

Траектория γ называется *обыкновенной*, если всякая траектория, выходящая из точки, принадлежащей некоторой окрестности траектории, допускает те же предельные множества, что и траектория γ . *Траектория, отличная от особой точки и от обыкновенной траектории, называется сепаратрисой* (см. рис. П5.1 приложение 5).

Теорема Андронова – Понтрягина. П23.2. Пусть S^2 — двумерная сфера, X — дифференцируемое векторное поле на S^2 .

Поле X структурно устойчиво в том и только том случае, если

- 1) особые точки и циклы простые и число их конечно;

2) не существует сепаратрис, соединяющих два седла.

Наконец, всякое векторное поле на S^2 может быть аппроксимировано (в смысле C^2 -топологии) структурно устойчивым полем.

Доказательство см. в работе: De Baggis [1].

Приложение 24

Пример Смейла

(См. § 16, гл. 3)

Смейл [2] доказал следующую теорему, которая показывает, что в размерностях больше двух структурно устойчивые системы не являются системами «общего положения».

Теорема П24.1. *Существует диффеоморфизм ψ тора \mathbb{T}^3 такой, что ни один C^1 -близкий диффеоморфизм ψ' не является структурно устойчивым.*

Опишем конструкцию, лежащую в основе этой теоремы.

А. Вспомогательный диффеоморфизм φ

Пусть \mathbb{T}^2 — тор $\{(x, y) \pmod{1}\}$. Определим диффеоморфизм φ_1 прямого произведения $\mathbb{T}^2 \times \{z \mid -1 \leq z \leq 1\}$ на себя следующим образом:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}, \\ z \rightarrow \frac{1}{2}z. \end{cases}$$

Пусть $B_{1/2}$ — шар радиуса $1/2$ с центром $(0, 0, 2)$ в $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ (см. рис. П24.2):

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Определим диффеоморфизм шара $B_{1/2}$ в $\mathbb{T}^2 \times \{z \mid 0 \leq z \leq 3\}$ как

$$\varphi'_1 = \begin{cases} x \rightarrow \frac{1}{2}x, \\ y \rightarrow \frac{1}{2}y, \\ z \rightarrow 2z - 2. \end{cases}$$

Установив это, получим тор \mathbb{T}^3 , отождествив $\mathbb{T}^2 \times \{-3\}$ и $\mathbb{T}^2 \times \{3\}$.
Нетрудно доказать следующую лемму.

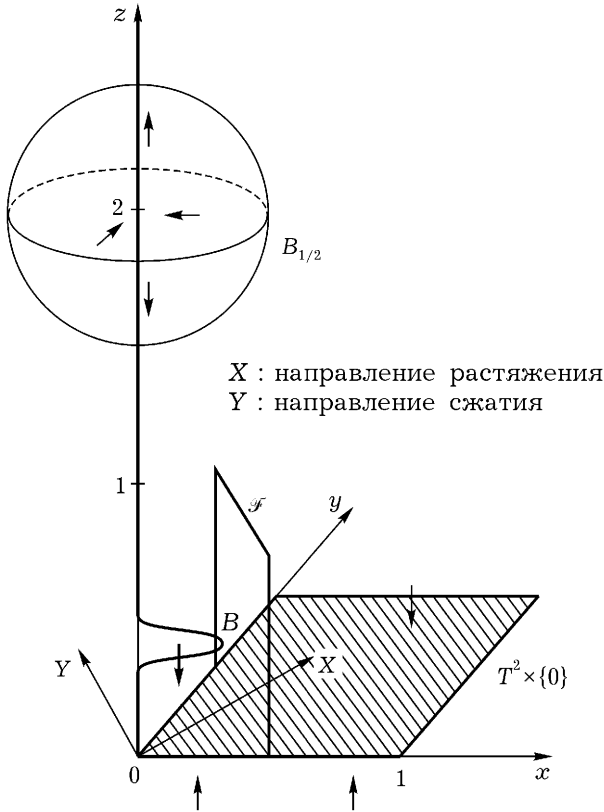


Рис. П24.2

Лемма П24.3. Существует диффеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ такой, что

- 1) его ограничение на $\mathbb{T}^2 \times \{z \mid -1 \leq z \leq 1\}$ есть φ_1 ;
- 2) его ограничение на $B_{1/2}$ есть φ'_1 ;
- 3) φ оставляет инвариантной точки $x = y = 0$ тора \mathbb{T}^3 :

$$\varphi(0, 0, z) = (0, 0, z'),$$

и если $0 \leq z \leq 2$, то $0 < z' < z$; если $z = 1$, то $0 \leq z' \leq \frac{1}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ П24.4. Ясно, что $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ — тор в \mathbb{T}^3 , инвариантный относительно φ . Ограничение диффеоморфизма φ (или φ_1) на $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ есть не что иное, как диффеоморфизм из примера 13.1 (гл. 3):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pmod{1}. \quad (\text{П24.5})$$

Напомним некоторые свойства этого диффеоморфизма.

На $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ существуют два расслоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} , касательные, соответственно, к растягивающему полю X_m и сжимающему полю Y_m (см. лемму 17.6, гл. 3). Каждый слой из \mathcal{X} (или \mathcal{Y}) всюду плотен в $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Периодические точки¹ этого диффеоморфизма плотны на $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно заметить, что все рациональные точки

$\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q}\right) \in \mathbb{T}^2$ периодичны, так как φ сохраняет знаменатель.

Если теперь перейти к диффеоморфизму φ тора \mathbb{T}^3 , то без труда получаются следующие свойства. Периодические точки диффеоморфизма φ на $\mathbb{T}^2 \times \{z \mid -1 \leq z \leq 1\}$ совпадают с периодическими точками диффеоморфизма (П24.5), так же как и расслоения \mathcal{X} и \mathcal{Y} в $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Расслоение \mathcal{Y} образует инвариантное сжимающее расслоение $\mathbb{T}^2 \times \{z \mid -1 \leq z \leq 1\}$, слою которого есть «плоскости» вида $Y_m \times \{z \mid -1 \leq z \leq 1\}$, где Y_m — некоторый слой из \mathcal{Y} .

ЗАМЕЧАНИЕ П24.6. Окружность $x = y = 0$ тора \mathbb{T}^3 есть «сепаратриса», соединяющая два «седла» $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 2)$.

В. Диффеоморфизм ψ

Построим диффеоморфизм ψ , возмущая диффеоморфизм φ .

Пусть G_0 — сфера с центром в $(0, 0, 3/4)$ и радиусом d в \mathbb{T}^3 :

$$G_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - 3/4)^2 \leq d^2\}.$$

Положим $G = \varphi^{-1}G_0$, $\varphi(x, y, z) = (x', y', z')$ и заметим, что d можно выбрать достаточно малым для того, чтобы $\varphi G \cap G = \emptyset$. Определим ψ следующим образом:

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi(x, y, z) = (x', y', z') & \text{вне } G, \\ (x' + \eta\Phi(x, y, z), y', z') & \text{на } G, \end{cases}$$

¹Т.е. точки $\xi \in \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ такие, что существует отличное от нуля целое число N , при котором

$$\varphi^N \xi = \xi.$$

где Φ — неотрицательная C^∞ -функция с носителем в G , достигающая максимума $+1$ в точке $\varphi^{-1}(0, 0, 3/4)$, а $\eta > 0$ — число, достаточно малое для того, чтобы отображение ψ было диффеоморфным.

Замечание П24.7. Образ сепаратрисы $x = y = 0$, $0 \leq z \leq 2$ под действием диффеоморфизма ψ обладает «кловом» B (см. рис. П24.2). Этот клов находится в области $\mathbb{T}^2 \times \{z \mid -1 \leq z \leq 1\}$, где ψ совпадает с $\varphi = \varphi_1$. В силу замечания (П24.4) эта область расслоена на сжимающиеся слои размерности 2 — плоскости, параллельные Oz и опирающиеся на сжимающиеся слои X . Пусть

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

— уравнение сжимающегося слоя в системе координат (x, y, z) . Из слоев, опирающихся на «клов» B , рассмотрим слой \mathcal{F} , для которого a — максимум (см. рис. П24.2). Этот слой либо содержит периодическую точку ξ диффеоморфизма ψ , т. е. точку, для которой существует целое число $N \neq 0$ такое, что

$$\psi^N \xi = \varphi^N \xi = \xi, \quad \xi \in \mathbb{T}^3,$$

либо не содержит периодической точки. В первом случае мы говорим, что «клов» периодичен, во втором называем «клов» непериодическим.

Лемма П24.8. *Диффеоморфизм ψ не является структурно устойчивым.*

Доказательство.

Это следует из двух следующих результатов:

1) Произвольно малым изменением величины η в определении диффеоморфизма ψ мы получаем диффеоморфизм ψ'' сколь угодно C^1 -близкий к ψ и аналогичный ψ . Учитывая плотность периодических точек (см. П24.4) можно предположить, что «клов» диффеоморфизма ψ периодичен, а «клов» диффеоморфизма ψ'' непериодичен или наоборот.

2) Если «кловы» диффеоморфизмов ψ и ψ'' одновременно периодичны или одновременно непериодичны, то не существует гомеоморфизма h , близкого к тождественному и такому, что

$$\psi'' \circ h = h \circ \psi.$$

Действительно, h устанавливает соответствие между «кловыми», сжимающимися слоями и периодическими точками. ■

Лемма П24.9. *Конструкция диффеоморфизма ψ структурно устойчива. В частности, если ψ' — диффеоморфизм, C^1 -близкий к ψ , то он*

также обладает инвариантным тором, аналогичным $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$, «ключом», сжимающим слоем, аналогичным \mathcal{F} и т. д.

Доказательство.

Из утверждения леммы следует структурная устойчивость «седла» $(0, 0, 2)$ диффеоморфизма ψ и диффеоморфизма

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

(см. теорему Аносова, § 16, гл. 3). ■

Теорема П24.1 следует из двух предыдущим лемм: также, как ψ , диффеоморфизм ψ' не является структурно устойчивым.

ПРИЛОЖЕНИЕ 25

Доказательство лемм к теореме Аносова

(См. § 16, гл. 3)

Лемма А

Пусть (M, φ) — $У$ -система. Так как многообразие M компактно, существует число $d > 0$, такое, что каким бы ни был шар из TM_p с центром $p \in M$ и радиусом d из TM_p , ограничение на этот шар экспоненциального отображения exp_p в точке p есть диффеоморфизм. Установив это, заметим, что если $\{\varphi^n m \mid n \in \mathbf{Z}\}$ — траектория отображения φ , то карта окрестности этой траектории есть $\{B, \psi^{-1}\}$, где B — сумма шаров B_n с центрами $\varphi^n m$ и радиусом \bar{d} из $TM_{\varphi^n m}$, причем ограничение отображения ψ на каждый из шаров B_n есть $\text{exp}_{\varphi^n m}$. Обозначим через X_m растягивающуюся k -плоскость $X(\varphi^n m)$ из $TM_{\varphi^n m}$ и через Y_m сжимающуюся l -плоскость $Y(\varphi^n m)$. Инвариантные растягивающиеся расслоения \mathcal{X} и инвариантные сжимающиеся расслоения \mathcal{Y} индуцируют на B расслоения:

$$\mathcal{X}_1 = \psi^{-1} \mathcal{X}, \quad \mathcal{Y}_1 = \psi^{-1} \mathcal{Y}.$$

Наконец, преобразование $\varphi: M \rightarrow M$ индуцирует преобразование

$$\varphi_1: B \rightarrow B, \quad \varphi_1 = \psi^{-1} \varphi \psi,$$

ограничение которого $\varphi_1|_{B_n}$ отображает B_n в B_{n+1} при очевидных ограничениях областей определения преобразования φ_1 . Положив число d достаточно малым, слои расслоений \mathcal{X}_1 и \mathcal{Y}_1 могут быть представлены как слои евклидова пространства $X_n \oplus Y_n$ с началом $0 = \varphi^n m$, в котором их уравнения имеют, соответственно, вид

$$y = y(0) + f_n(x, y(0)) \quad \text{и} \quad x = x(0) + g_n(x, y(0)),$$

где $x \in X_n$, $y \in Y_n$, а f_n , g_n и их первые производные можно считать столь малыми, сколь этого можно добиться с помощью подходящего выбора числа d .

Рассмотрим слой α_n расслоения \mathcal{Y}_n , содержащий центр O шара B_n :

$$x = g_n(y, 0).$$

Отображение $\mathcal{C}: \{Y_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ограничение которого $\mathcal{C}|_{Y_n}: Y_n \rightarrow \alpha$ определено при $y \in Y_n \cap B_n$ соотношением

$$\mathcal{C}y = (g_n(y, 0), y),$$

есть диффеоморфизм. Следовательно, $y \in Y_n$ можно рассматривать как координату на α_n .

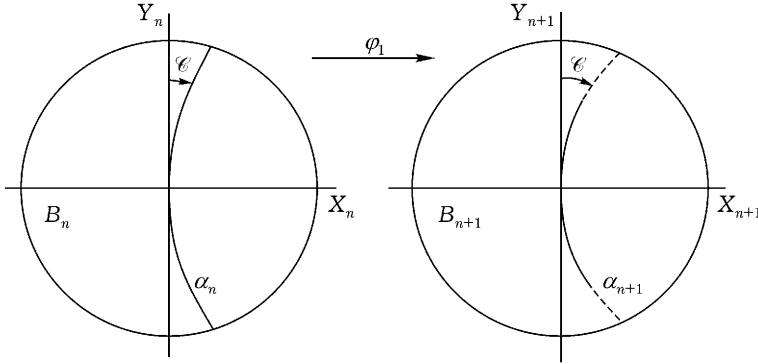


Рис. П25.1

Диффеоморфизм φ_1 преобразует α_n в α_{n+1} (см. рис. П25.1). В координатах y это определяет отображение

$$\varphi_2 = \mathcal{C}^{-1}\varphi_1\mathcal{C}$$

и

$$\varphi_2: \{Y_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \{Y_n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \varphi_2|_{Y_n}: Y_n \rightarrow Y_{n+1}.$$

Утверждение П25.2. Из определения Y -систем следует, что ограничение

$$\varphi_2|_{Y_n}: Y_n \rightarrow Y_{n+1}$$

— сжимающееся:

$$\|\varphi_2 y\| < \theta \|y\|, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{при любых } y \in Y_n \cap B_n. \quad (\text{П25.3})$$

Замечание П25.4. Более точно, неравенство (П25.3) выполняется при некоторой итерации φ^ν диффеоморфизма φ (в определении \mathcal{U} -систем необходимо «убить» константы). Для упрощения записи мы будем предполагать, что неравенство (П25.3) уже выполняется при $\nu = 1$. Пусть φ' — диффеоморфизм, C^2 -близкий к φ . Расслоения $\mathcal{X}'_1 = \psi^{-1}\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'_1 = \psi^{-1}\mathcal{Y}'$ и преобразование, индуцированное диффеоморфизмом φ' :

$$\varphi'_1: B \rightarrow B, \quad \varphi'_1 = \psi^{-1}\varphi'\psi, \quad \varphi'_1|_{B_n}: B_n \rightarrow B_{n+1},$$

определим, как это было сделано выше. Если диффеоморфизм φ' достаточно C^2 -близок к диффеоморфизму φ , слои расслоения \mathcal{X}'_1 близки к слоям расслоения \mathcal{X}_1 и трансверсальны слою α_n . Следовательно, существует проекция шара B_n на α_n вдоль слоев расслоения \mathcal{X}'_1 :

$$\Pi: B \rightarrow \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \Pi|_{B_n}: B_n \rightarrow \alpha_n,$$

которая непрерывна и преобразует каждый слой расслоения \mathcal{X}'_1 в некоторую точку слоя α_n , а именно — в $\mathcal{X}'_1 \cap \alpha_n$.

Рассмотрим теперь отображение (см. рис. П25.5)

$$\begin{aligned} \varphi'_2: \mathcal{C}^{-1}\Pi\varphi'_1\mathcal{C}, \\ \varphi'_2: \{Y_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \{Y_n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \varphi'_2|_{Y_n}: Y_n \rightarrow Y_{n+1}. \end{aligned}$$

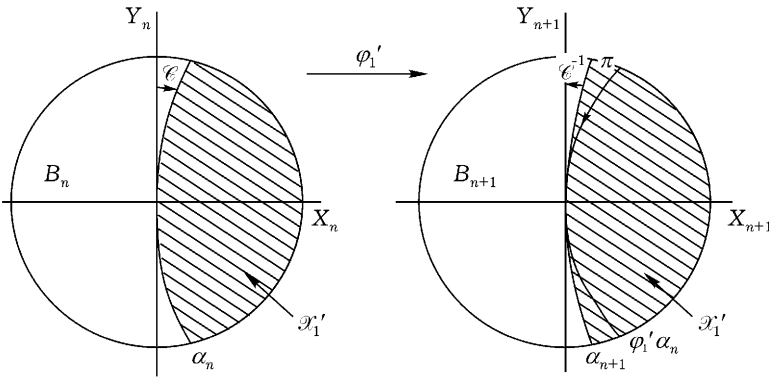


Рис. П25.5

Утверждение П25.6. Если диффеоморфизм φ' достаточно C^2 -близок к φ , то отображение φ'_2 C -близко к φ_2 : каждому $\varkappa > 0$ соответствует число $\delta > 0$ такое, что из $\|\varphi' - \varphi\|_{C^2} < \delta$ следует неравенство:

$$\|\varphi'_2 y - \varphi_2 y\| < \varkappa \quad \text{при всех } y \in Y_n \cap B_n, \quad (\text{П25.7})$$

где $\| \cdot \|_{C^2}$ — C^2 -норма.

Из этого результата непосредственно следует, что отображение φ'_1 близко к φ_1 и проекция $\Pi: \varphi'_1 \alpha_n \rightarrow \alpha_{n+1}$ мала, так как $\varphi'_1 \alpha_n \approx \varphi_1 \alpha_n = \alpha_{n+1}$ и слои расслоения \mathcal{X}'_1 трансверсальны слою α_{n+1} . Пусть теперь β — слой расслоения \mathcal{X}'_1 , содержащий центр $0 = m$ шара B_0 .

Лемма А. П25.8. Если диффеоморфизм φ' достаточно C^2 -близок к диффеоморфизму φ , то слой $\varphi'^n \beta$ близок к $\varphi' m$ при всех $n \geq 0$. Более точно:

$$\|\varphi'^n m\| < \frac{\varkappa}{1 - \theta}, \quad (\text{П25.9})$$

где θ — то число, которое входит в неравенство (П25.3).

Доказательство.

По утверждению (П25.6), при любом данном $\varkappa > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|\varphi' - \varphi\|_{C^2} < \delta$ имеет место неравенство

$$\|\varphi'_2 y - \varphi_2 y\| < \varkappa.$$

Таким образом, из (П25.3) и (П25.7) получаем:

$$\|\varphi'_2 y\| < \theta \|y\| + \varkappa.$$

Положим $\varepsilon = \frac{\varkappa}{1 - \theta}$. Тогда, если $\|y\| < \varepsilon$, то $\|\varphi'_2 y\| < \varepsilon$, следовательно, $\|\varphi'_2 y\| < \varepsilon$, ... и т. д.

Но $\|m\| < \varepsilon$, поэтому утверждение (П25.9) доказано. \blacksquare

Замечание П25.10. Из (П25.3) и (П25.7) также следует, что при всех y таких, что $\|y\| < C$ имеет место неравенство

$$\|\varphi'^n y\| \leq c, \quad \text{если } c \geq \frac{\varkappa}{1 - \theta}.$$

Действительно, если $\|y\| \geq c$ и $c \geq \frac{\varkappa}{1 - \theta}$, то

$$\|\varphi'_2 y\| < \theta \|y\| + \varkappa < \theta c + \varkappa < c.$$

Лемма В

Рассмотрим теперь слой γ_n расслоения \mathcal{X} , который проходит через $\varphi^n m$. Пусть $\gamma_n^1 \subset B_n$ — соответствующий слой расслоения \mathcal{X}_1 :

$$\gamma_n^1 = \psi^{-1} \gamma_n.$$

Уравнение слоя γ_n^1 имеет вид $y = f_n(x, 0)$. Отображение

$$\mathcal{D}: \{X_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \{\gamma_n^1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{D}|_{X_n}: X_n \rightarrow \gamma_n^1,$$

определяемое при $x \in X_n \cap B_n$ соотношением $\mathcal{D}x = (x, f_n(x, 0))$, есть диффеоморфизм. Следовательно, $x \in X_n$ можно рассматривать как координаты на γ_n^1 . Диффеоморфизм φ_1 преобразует γ_n^1 в γ_{n+1}^1 . В координатах x это определяет отображение

$$\varphi_3 = \mathcal{D}^{-1}\varphi_1\mathcal{D}: \{X_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \{X_n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \varphi_3|_{X_n}: X_n \rightarrow X_{n+1}.$$

Ясно, что $\varphi_3(0) = 0$.

Утверждение П25.11. Из определения \mathcal{Y} -систем следует, что $\varphi_3|_{X_n}: X_n \rightarrow X_{n+1}$ — растягивающее отображение

$$\|\varphi_3x_1 - \varphi_3x_2\| > \Theta\|x_1 - x_2\|, \quad \text{где } \Theta > 1, \quad (\text{П25.12})$$

при всех $x_1, x_2 \in B_n \cap X_n$.

Замечание П25.13. Более точно, утверждение (П25.12) выполняется при некоторой степени отображения φ_3 ; для упрощения записи будем предполагать, что эта степень равна 1.

Пусть теперь φ' — диффеоморфизм, C^2 -близкий к φ . Рассмотрим $\beta_n = \varphi_1^n\beta$ — слой расслоения \mathcal{X}'_1 в B_n , определяемый условием $\mathcal{C}\varphi_2^n(0) \in \beta_n$ ($n \geq 0$) (см. рис. П25.14).

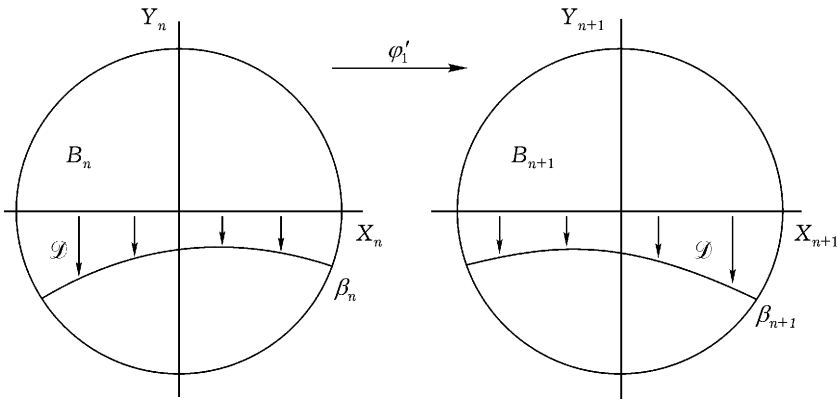


Рис. П25.14

По лемме А, этот слой есть некоторая окрестность центра O шара B_n . Пусть $y = h_n(x)$ ($x \in X_n$) имеет уравнение слоя β_n . Если отображение φ' достаточно близко к φ , то $x \in X_n \cap B_n$ можно выбрать в качестве локальных координат на β_n : отображение

$$E: \{X_n \mid n \geq 0\} \rightarrow \{\beta_n \mid n \geq 0\}, \quad E|_{X_n}: X_n \rightarrow \beta_n,$$

определяемое соотношением $x \rightarrow (x, h_n(x))$ при $x \in X_n \cap B_n$, есть диффеоморфизм.

Заметим теперь, что по построению β_n преобразование φ'_1 отображает β_n на β_{n+1} . Следовательно, этим определяется диффеоморфизм

$$\varphi'_3 = E^{-1}\varphi'_1 E: \{X_n \mid n \geq 0\} \rightarrow \{X_n \mid n \geq 0\}, \quad \varphi'_3|_{X_n}: X_n \rightarrow X_{n+1}.$$

Утверждение П25.15. *Если диффеоморфизмы φ и φ' достаточно C^2 -близки, то диффеоморфизмы φ_3 и φ'_3 C^1 -близки:*

для каждого $\varkappa > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $\|\varphi - \varphi'\|_{C^2} < \delta$ следует:

$$\begin{aligned} & -\varphi_3(x) - \varphi'_3(x) \|\ < \varkappa \\ & -(\varphi_3 - \varphi'_3)(x_1) - (\varphi_3 - \varphi'_3)(x_2) \|\ < \varkappa \|x_1 - x_2\| \end{aligned} \quad (\text{П25.16})$$

при всех $x, x_1, x_2 \in X_n \cap B_n, n \geq 0$.

Доказательство.

Это непосредственно следует из того, что слои $\beta_n, n \geq 0$ близки к слоям γ_n в C^1 -топологии, а это, в свою очередь, следует из построения γ_n, β_n , осуществленного в теореме Синая (см. § 15). ■

Лемма В. П25.17. *Если диффеоморфизм φ' достаточно C^2 -близок к φ , то существует слой δ , причем только один, расслоения \mathcal{U}' такой, что $\varphi'^n \delta$ близок к φ^n при всех $n \geq 0$. Более точно, существует точка $x_0 \in X_0$, причем только одна, такая, что $\|\varphi_3^n x_0\| < \varepsilon$ при $n \geq 0$.*

Для доказательства нам необходима следующая лемма.

Лемма П25.18. *Пусть R — сумма евклидовых пространств $R_n, n \geq 0$, одной и той же размерности. Пусть*

$$T = K + L: R \rightarrow R, \quad T|_{R_n}: R_n \rightarrow R_{n+1}$$

— диффеоморфизмы такие, что

$$1) K(0) = 0, \quad \|K(x) - K(y)\| > \Theta \|x - y\|, \quad \Theta > 1,$$

$$2) \|L\| \leq \varepsilon, \quad \|L(x) - L(y)\| < \varepsilon\|x - y\|, \quad \Theta - \varepsilon > 1,$$

при любых $x, y \in R$.

Тогда существует точка $x \in R_0$, причем только одна, такая, что последовательность $T^n x$ ограничена и для этой точки x

$$\|T^n x\| \leq \frac{\varepsilon}{\Theta - 1} \quad (\text{П25.19})$$

при всех $n \geq 0$.

Доказательство.

Ясно, что $T^{-1}|_{R_n} : R_n \rightarrow R_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) — диффеоморфизм и

$$\|T^{-1}y - T^{-1}x\| \leq \frac{1}{\theta - \varepsilon}\|y - x\|. \quad (\text{П25.20})$$

Пусть $b_n(c)$ — шар $\|x\| < c$ в R_n . Тогда в силу 1 и 2:

$$Tb_n(c) \supset b_{n+1}(\Theta c - \varepsilon). \quad (\text{П25.21})$$

Предположим, что c достаточно велико:

$$\Theta c - \varepsilon \geq c. \quad (\text{П25.22})$$

Тогда из (П25.21) следует, что $Tb_n(c) \supseteq b_{n+1}(c)$ и поэтому

$$T^{-1}b_{n+1}(c) \subset b_n(c),$$

и, таким образом,

$$T^{-1}b_1(c) \supset T^{-2}b_2(c) \supset \dots \supset T^{-n}b_n(c) \supset \dots$$

Но по (П25.20) диаметр множества $T^{-n}b_n(c)$ не больше, чем $2c(\Theta - \varepsilon)^{-n}$, а последняя величина стремится к 0, если n стремится к $+\infty$. Следовательно, пересечение $\bigcap_{n>0} T^{-n}b_n(c)$ состоит только из точки $x \in b_0(c)$, но именно это и требовалось доказать: величина

$$c = \frac{\varepsilon}{\Theta - 1}$$

удовлетворяет неравенству (П25.22). ■

Доказательство леммы В. П25.23.

Из утверждений (П25.11) и (П25.19) следует, что отображение φ'_3 удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Достаточно положить $K = \varphi_3$, $L = \varphi'_3 - \varphi_3$, заменив ε на \varkappa в неравенстве относительно L .

Достаточно положить $\varkappa = \varepsilon(\Theta - 1)$, чтобы, исходя из (П25.19), получить неравенство $\|\varphi'_3{}^n x_0\| < \varepsilon$. Это доказывает лемму В. ■

Таким образом, мы получаем сжимающий слой δ расслоения Y' , который остается близким к орбите $\varphi^n t$ при $n > 0$ в смысле леммы В. Если диффеоморфизм φ' достаточно близок к φ , то тот же самый слой остается близким к орбите $\varphi^n t$ при $n > 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить к φ^{-1} лемму А. Для φ'^{-1} расслоение Y' растягивающее, и слой δ близок к t . Следовательно, в силу замечания (П25.10) слои $\varphi'^n \delta$ ($n < 0$) остаются в окрестности орбиты $\varphi^n t$ в смысле леммы А:

$$\|\varphi'^{-n} y\| \leq C.$$

Таким образом, из леммы А и В вытекает следующее утверждение.

Утверждение П25.24. *Если φ' достаточно C^2 -близок к φ , то существует слой $\tilde{\delta}$ расслоения Y'_1 в B_0 такой, что слои $\varphi_1'^n \tilde{\delta}$ ($-\infty < n < +\infty$) из B_n остаются в ε -окрестности центра шара B_n .*

Так как сказанное выше верно для φ'^{-1} , найдется слой $\tilde{\beta}$ расслоения X'_1 в шаре B_0 , который обладает тем же свойством. Так как слои $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\beta}$ трансверсальны в B_0 , существует точка пересечения $z = \tilde{\delta} \cap \tilde{\beta}$, единственная в ε -окрестности центра шара B_0 . Гомеоморфизм k из теоремы Аносова мы определим, положив $k(t) = \psi z$. Нетрудно доказать, что все конструкции непрерывно зависят от точки t ; следовательно, k — гомеоморфизм. Отношение $\varphi' k = k \varphi$ очевидно, как и то, что k ε -близок к тождественному отображению.

Приложение 26

Интегрируемые системы

(См. гл. 4, § 19)

Ж. Лиувиль доказал, что если в системе с n степенями свободы

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n) \quad (\text{П26.1})$$

известно n первых интегралов в инволюции¹:

$$H = F_1, F_2, \dots, F_n; \quad (F_i, F_j) = 0, \quad (\text{П26.2})$$

то система интегрируема в квадратурах.

В классической механике известно много примеров интегрируемых задач; во всех этих примерах интегралы (П26.2) были найдены.

Уравнения $F_i = f_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, определяют инвариантные многообразия системы (П26.1). Можно заметить, что во всех примерах инвариантными многообразиями служат торы и что движение на этих торах квазипериодично (см. пример 1.2, гл. 1). Докажем теперь, что такая ситуация неизбежна для всех систем, допускающих однозначные интегралы (П26.2). Доказательство основано на очень простых топологических соображениях.

Теорема П26.3. *Предположим, что уравнения $F_i = f_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, определяют компактное связное многообразие $M = M_f$, и что*

- 1) *всюду на M grad F_i ($i = 1, \dots, n$) линейно независимы,*
- 2) *определитель $\det \left| \frac{\partial I}{\partial f} \right|$, определяемый ниже (П26.7) не равен тождественно нулю.*

¹ Две функции $F(p, q)$, $G(p, q)$ находятся в инволюции, если их скобка Пуассона

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p}$$

тождественно равна нулю.

Тогда

- 1) M является n -мерным тором, и окрестность многообразия M есть прямое произведение тора и евклидова пространства $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$;
- 2) эта окрестность допускает координаты действие-угол (I, φ) , $(I \in B^n \subset \mathbb{R}^n, \varphi \pmod{2\pi} \in \mathbb{T}^n)$ такие, что отображение $I, \varphi \rightarrow p, q$ — каноническое² и $F_i = F_i(I)$.

В результате уравнения (П26.1) представимы в виде

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I), \quad \text{где} \quad \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I},$$

и траектория на торе M квазипериодическая, так как $H = F_1 = H(I_1, \dots, I_n)$, и уравнения (П26.1) в координатах I, φ — это уравнения Гамильтона² с функцией Гамильтона $H(I)$.

Доказательство.

Обозначения П26.4

Воспользуемся следующими обозначениями. Пусть $x = (p, q)$ — точка фазового пространства \mathbb{R}^{2n} ; градиент функции $F(x)$ обозначим $\text{grad } F = F_{x_1}, \dots, F_{x_{2n}}$. Тогда уравнения (П 26.1) запишутся в виде

$$\dot{x} = I \text{ grad } H, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П26.5})$$

где E — единичная матрица $n \times n$.

Для любых двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ определим кососкалярное произведение

$$[x, y] = (Ix, y) = -[y, x],$$

где (\cdot, \cdot) — обычное скалярное произведение. Можно показать, что $[x, y]$ представляет собой сумму площадей проекций параллелограмма со сторонами x, y на плоскости $p_i q_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Линейные преобразования, которые сохраняют кососкалярное произведение

$$[Sx, Sy] = [x, y] \quad \text{при любых} \quad x, y,$$

называются симплектическими преобразованиями. Например, матрица I задает симплектическое преобразование.

²См. приложение 32.

Произведение $[\text{grad } F, \text{grad } G] = (F, G)$ называется скобкой Пуассона функций F и G . Ясно, что функция F есть первый интеграл системы (П26.5) в том и только том случае, если ее скобка Пуассона с функцией Гамильтона тождественно равна нулю. Если две функции имеют скобку Пуассона, равную нулю, то говорят, что они находятся в *инволюции*.

Конструкция. П26.6

Рассмотрим n векторных полей на M :

$$\xi_i = I \text{ grad } F_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Эти поля *линейно независимы* в каждой точке многообразия M , так как преобразование I невырождено и $\text{grad } F_i$ независимы.

Эти поля *касательны* к M , так как их орбиты служат решениями гамильтоновых уравнений с функцией Гамильтона F_i (эти уравнения допускают F_j в качестве первых интегралов, так как $(F_i, F_j) = 0$ и каждая траектория лежит в M).

Наконец, поля ξ_i, ξ_j *коммутируют*, поскольку их скобка Ли есть не что иное³, как поле скоростей гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $(F_i, F_j) = 0$.

Следовательно, M — компактная связная орбита группы \mathbb{R}^n , действующей транзитивно и дифференцируемым образом; таким образом, доказано, что $M = \mathbb{T}^n$. Кроме того, M задано уравнениями $F_i = f_i = \text{const}$, и поля $\text{grad } F_i$ определяют в окрестности орбиты M структуру прямого произведения.

Пусть теперь $\gamma_i(f)$, $i = 1, \dots, n$ — некоторый базис 1-циклов на каждом торе $M_f: F = f$, расположенном в окрестности орбиты M . Рассмотрим интегралы действия

$$I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i(f)} p dq. \quad (\text{П26.7})$$

Так как $\det \left| \frac{\partial I_i}{\partial f_j} \right| \neq 0$, уравнение $I(f) = I$ можно разрешить

³**Лемма:** скобка Ли двух гамильтоновых векторных полей $\xi = I \text{ grad } F$, $\eta = I \text{ grad } G$ есть гамильтоново поле с функцией Гамильтона $-(F, G)$. Доказательство см. в приложении 32.

(в окрестности орбиты M) и определить тор $M(I) = M_{f(I)}$, соответствующий заданным значениям I .

Положим теперь

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q p dq, \quad (\text{П26.8})$$

где путь интегрирования — некоторая кривая на торе $M(I)$ (следовательно, $p = p(I, q)$).

Мнозначная функция S является производящей функцией (см. приложение 32) канонического преобразования $I, \varphi \rightarrow p, q$, определяющего координаты действие-угол:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}. \quad (\text{П26.9})$$

Лемма П26.10. *Форма $p dq$ на $M(I)$ замкнута.*

Доказательство.

В действительности достаточно доказать, что интеграл от $p dq$ вдоль бесконечно малого параллелограмма, касательного к $M(I)$, равен нулю.

Ясно, что этот интеграл есть сумма площадей проекций параллелограмма на плоскости $p_i q_i$. Следовательно, достаточно доказать, что $[\xi, \eta] = 0$ для любых векторов ξ, η , касательных к $M(I)$. Но, как было показано в П26.6, любой вектор, касательный к $M(I)$, есть линейная комбинация векторов $I \text{ grad } F_i$. По формуле (П26.2) эти векторы удовлетворяют соотношению $[\text{grad } F_i, \text{grad } F_j] = 0$; но I — симплектическое преобразование, поэтому $[I \text{ grad } F_i, I \text{ grad } F_j] = 0$. Таким образом, $[\xi, \eta] = 0$ и лемма доказана. ■

Таким образом, формула (П26.8) в действительности определяет многозначную функцию S , а уравнения (П26.9) определяют, по крайней мере локально, каноническое преобразование $I, \varphi \rightarrow p, q$.

Переменные действие-угол. П26.11

В действительности формулы (П 26.9) определяют глобальное каноническое преобразование, для которого переменные p, q 2π -периодичны по φ .

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при любом I дифференциал от $S(I, \varphi)$ есть глобальная 1-форма на $M(I)$. Следовательно, то же справедливо и относительно $d\varphi$, определяемого формулой (П26.9).

Вычислим периоды 1-формы $d\varphi_i$ на M_f вдоль циклов γ_j . По формуле (П 26.7) имеем:

$$\oint_{\gamma_j} d\varphi_i = \oint_{\gamma_j} d\left(\frac{\partial S}{\partial I_i}\right) = \frac{d}{dI_i} \oint_{\gamma_j} dS = \frac{d}{dI_i}(2\pi I_j) = 2\pi\delta_{ij}.$$

Таким образом, φ_i — угловые координаты на торе $M(I)$ и теорема доказана. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 27

Линейные симплектические отображения плоскости

(См. § 20, гл. 4)

Пусть A — линейное симплектическое отображение плоскости (p, q) . Отображение A сохраняет площадь $dp \wedge dq$, следовательно, $\det A = 1$. Поэтому произведение собственных значений λ_1, λ_2 отображения A равно 1. Но λ_1 и λ_2 — два корня характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ с действительными коэффициентами. Следовательно, λ_1 и λ_2 либо оба действительные, либо комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$. В первом случае один из корней по абсолютной величине больше 1, а другой меньше 1:

$$|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|. \quad (\text{П27.1})$$

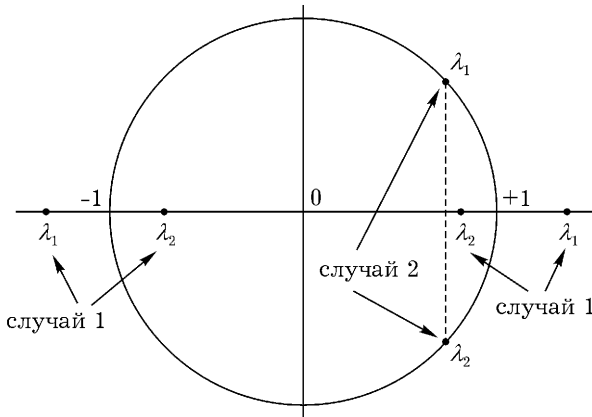


Рис. П27.3

Во втором случае

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (\text{П27.2})$$

следовательно, корни располагаются на единичной окружности (см. рис. П27.3). Остается еще *третий случай*:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1.$$

ПРИМЕР П27.4. Гиперболический поворот:

$$p, q \rightarrow 2p, \frac{1}{2}q$$

или гиперболический поворот с отражением:

$$p, q \rightarrow -2p, -\frac{1}{2}q \quad (\text{см. рис. П27.5}).$$

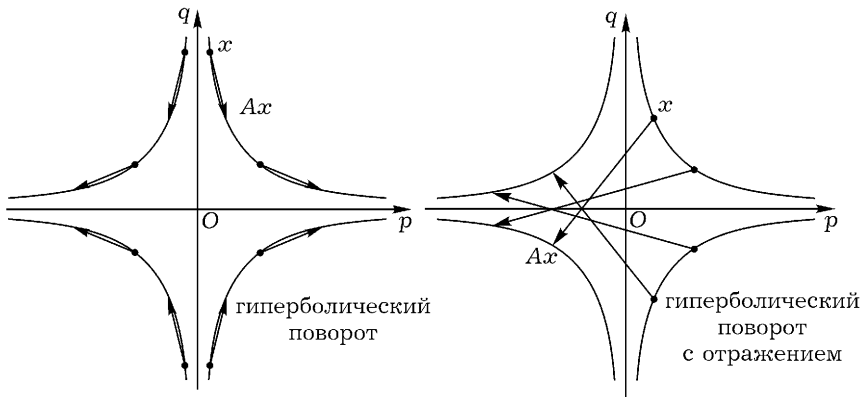


Рис. П27.5

В обоих случаях орбита $T^n x$ точки $x = (p, q)$ лежит на гиперболе $pq = \text{const}$. Ясно, что неподвижная точка O неустойчива. Из классических теорем линейной алгебры следует, что любое отображение A первого типа ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1 и λ_2 действительны) есть гиперболический поворот, возможно с отражением. Иначе говоря, после замены переменных его можно записать в виде $P, Q \rightarrow \lambda P, \frac{1}{\lambda}Q$.

ПРИМЕР П27.6. Поворот на угол α принадлежит ко второму классу ($\lambda_1 = e^{-i\alpha}$, $\lambda_2 = e^{i\alpha}$):

$$p, q \rightarrow p \cos \alpha - q \sin \alpha, \quad p \sin \alpha + q \cos \alpha.$$

Линейная замена переменных преобразует этот поворот в «эллиптический поворот» (см. рис. П27.7). В этом случае орбита $T^n x$ точки $x = (p, q)$ лежит на эллипсе с центром O . Ясно, что неподвижная точка O устойчива.

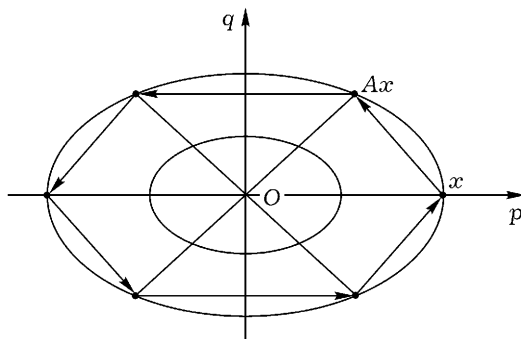


Рис. П27.7

Из классических теорем линейной алгебры следует, что любое отображение A второго типа ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 \neq \lambda_2$) есть эллиптический поворот.

В первом случае (П27.1) говорят, что неподвижная точка O *гиперболическая* или что отображение A *гиперболично* в точке O .

Во втором случае (П27.2) говорят, что неподвижная точка O *эллиптическая* или что отображение A *эллиплично* в точке O .

Наконец, третий случай ($\lambda^2 = 1$) называется *параболическим*.

Замечание П27.8. Пусть A — эллиптическое отображение. Тогда любое каноническое отображение A' , близкое к A , также эллиплично. Действительно, корни λ_1 и λ_2 непрерывно зависят от A и должны оставаться на фигуре, образованной действительной осью и единичной окружностью (см. рис. П27.3). Следовательно, они могут покинуть единичную окружность только в точках $\lambda = \pm 1$, что соответствует параболическому случаю.

Напомним еще понятие *топологического индекса* векторного поля. Рассмотрим векторное поле $\xi(x)$ на плоскости p, q , которое обращается в нуль в изолированной точке: $\xi(0) = 0$. Оно определяет отображение окружности $x^2 = p^2 + q^2 = 1$ на себя $B(\varepsilon): S^1 \rightarrow S^1$, по формуле

$$B(\varepsilon): x \rightarrow \frac{\xi(\varepsilon \cdot x)}{\|\xi(\varepsilon \cdot x)\|}.$$

При достаточно малом ε топологическая степень этого отображения не зависит от ε и называется индексом поля в точке O , или *индексом точки O* .

Рассмотрим теперь векторное поле $\xi(x) = Ax - x$. Если отображение A не параболическое, то точка O — изолированный нуль поля.

Теорема П27.9. *Индекс эллиптической точки равен $+1$, индекс гиперболической точки равен -1 , а индекс гиперболической точки с отражением равен $+1$.*

Теорема непосредственно следует из рис. (П27.5) и (П27.7).

Приложение 28

Устойчивость неподвижных точек

(См. § 20, гл. 4)

Пусть A — аналитическое каноническое отображение плоскости p, q , оставляющее неподвижной точку $O = (0, 0)$. Предположим, что O — эллиптическая точка, т. е. что дифференциал отображения A имеет в O собственные значения $\lambda_1 = e^{-i\alpha}$, $\lambda_2 = e^{i\alpha}$.

Дж. Д. Биркгоф¹ доказал, что если α несоизмеримо с 2π , то при любом $s > 0$ существует каноническое отображение $B = B(s)$ окрестности точки O :

$$B: p, q \rightarrow P, Q, \quad B(O) = O,$$

такое, что в координатах P, Q отображение A представимо в следующей «нормальной форме»:

$$A' = BAB^{-1}: P, Q \rightarrow P', Q'.$$

Пусть I, φ — канонические полярные координаты:

$$\begin{aligned} 2I &= P^2 + Q^2, & \varphi &= \arctg\left(\frac{P}{Q}\right), \\ 2I' &= P'^2 + Q'^2, & \varphi' &= \arctg\left(\frac{P'}{Q'}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I' - I &= O(I^{n+1}), \\ \varphi' - \varphi &= \alpha + \alpha_1 I + \alpha_2 I^2 + \dots + \alpha_n I^n + O(I^{n+1}). \end{aligned} \tag{П28.1}$$

Коэффициенты $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ — инварианты канонических преобразований, т. е. не зависят от B . Если $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$ и среди $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ найдется отличный от нуля коэффициент, то Биркгоф называет преобразование A «общим эллиптическим отображением».

¹Динамические системы, гл. 3.

Теорема П28.2². *Неподвижная точка общего эллиптического отображения устойчива.*

Доказательство.

Доказательство состоит в применении конструкции доказательства теоремы 21.11 из гл. 4 (см. приложение 34) к преобразованию (П28.1), где $O(I^{n+1})$ при $I \ll 1$ рассматривается как возмущение отображения

$$I' = I, \quad \varphi' = \varphi + \alpha + \alpha_1 I + \dots + \alpha_n I^n.$$

■

Аналогичные теоремы можно доказать и относительно устойчивости положений равновесия и эллиптических периодических решений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (см. В. И. Арнольд [7]).

Наиболее сильный результат был получен Ю. Мозером [1].

Теорема П28.3 (Мозер). *Неподвижная точка канонического эллиптического отображения A плоскости устойчива, если:*

- 1) $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{3}, 2\pi \frac{m}{4}$;
- 2) $\alpha_1 \neq 0$;
- 3) A дифференцируемо 333 раза. (Как показано в работе Мозера [3], это число производных может быть значительно уменьшено.)

Полное доказательство см. в упоминавшейся работе Ю. Мозера.

Замечание П28.4. Если $\alpha = 2\pi \frac{m}{3}$, то, как доказал Леви-Чивита [1], неподвижная точка может быть неустойчивой.

²В. И. Арнольд [7].

Приложение 29

Параметрические резонансы

(См. § 20, гл. 4)

Анализ устойчивости неподвижной точки $(0, 0)$, проведенный в § 20 (гл. 4), основан на идеях Пуанкаре и Ляпунова. Обобщение их результатов на системы с многими степенями свободы было осуществлено только в 1950 году М. Г. Крейном [1], [2]. Исследования Крейна были продолжены Якубовичем [1], Гельфандом и Лидским [4] и т. д. Изложение теоремы Крейна было опубликовано Мозером [3].

Пусть A — линейное симплектическое отображение¹ канонического пространства \mathbb{R}^{2n} . Отображение A называется *устойчивым*, если последовательность A^n ограничена. Отображение A называется *параметрически устойчивым*, если все симплектические отображения, близкие к A , устойчивы.

В приложении 27 доказано (и использовано в § 20, гл. 4), что эллиптические отображения плоскости \mathbb{R}^2 параметрически устойчивы.

М. Г. Крейн нашел все параметрически устойчивые отображения пространства \mathbb{R}^{2n} .

Лемма П29.1 (Пуанкаре—Ляпунов). *Множество собственных значений λ симплектического отображения A симметрично относительно действительной оси и окружности $|\lambda| = 1$.*

Доказательство.

Утверждение леммы следует из того, что характеристический по-

¹Т. е. A сохраняет кососкалярное произведение $[\xi, \eta] = (I\xi, \eta)$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение, $I = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица $n \times n$.

Следовательно,

$$[A\xi, A\eta] = [\xi, \eta] \quad \text{и} \quad A'IA = I.$$

лином имеет действительные коэффициенты и взаимнообратные корни:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \det(-IA'^{-1}I + \lambda I^2) = \\ &= \det(-A'^{-1} + \lambda E) = \det(-A^{-1} + \lambda E) = \\ &= \det(-E + \lambda A) = \lambda^{2n} \det(A - \lambda^{-1}E) = \lambda^{2n} p(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

■

Из леммы (A29.1) выводим следствие.

Следствие П29.2. *Собственные значения отображения A разбиваются на пары и четверки. Пары состоят из λ и λ^{-1} , причем λ лежат на действительной оси или на окружности $|\lambda| = 1$. Четверки состоят из $\lambda, \bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$, симметричных относительно действительной оси и взаимно обратных относительно окружности $|\lambda| = 1$ (см. рис. П29.3).*

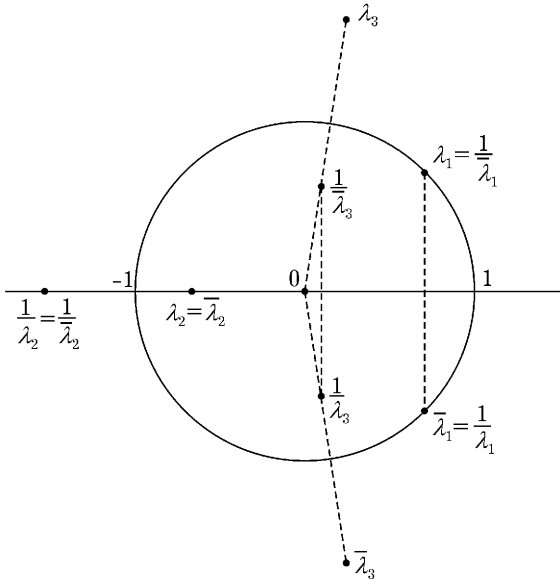


Рис. П29.3

Следствие П29.4. *Отображение A параметрически устойчиво, если все его собственные значения расположены на окружности $|\lambda| = 1$ и простые.*

Действительно, если собственные значения просты и расположены на $|\lambda| = 1$, то:

- 1) A устойчиво (по причинам, которые ясны из рассмотрения нормальной формы),
- 2) собственные значения всех симплектических отображений A' , близких к A , расположены на $|\lambda| = 1$.

Действительно, в противном случае собственные значения λ и $\overline{\lambda^{-1}}$ отображений A' были бы расположены в окрестности единственного изолированного собственного значения отображения A (см. рис. П29.3).

Предположим, начиная с этого места, что ± 1 не являются собственными значениями отображения A . М. Г. Крейн разделил собственные значения λ , расположенные на $|\lambda| = 1$, на два класса: положительные и отрицательные. Предположим сначала, что все собственные значения отображения A простые, и докажем следующую лемму.

Лемма П29.5. Пусть ξ_1, ξ_2 — два собственных вектора с собственными значениями, равными, соответственно, λ_1 и λ_2 . Тогда либо $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, либо $[\xi_1, \xi_2] = 0$.

Доказательство.

Из того, что $A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1$ и $A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2$ следует

$$[A\xi_1, A\xi_2] = \lambda_1 \lambda_2 [\xi_1, \xi_2] = [\xi_1, \xi_2],$$

откуда

$$(\lambda_1 \lambda_2 - 1)[\xi_1, \xi_2] = 0. \quad \blacksquare$$

Следствие П29.6. Пусть σ — плоскость, инвариантная относительно A , соответствующая двум комплексно сопряженным собственным значениям λ_1, λ_2 , $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Тогда:

- 1) плоскость σ ортогональна (в смысле $[\cdot, \cdot]$) любому собственному вектору ξ_3 , соответствующему другому собственному значению λ_3 ,
- 2) для любой пары не коллинеарных векторов ξ и η из σ произведение $[\xi, \eta]$ отлично от нуля.

Утверждение 1 следует непосредственно из того, что $\lambda_1 \lambda_3 \neq 1$ и $\lambda_2 \lambda_3 \neq 1$, следовательно, по лемме (П29.5) $[\xi_1, \xi_3] = [\xi_2, \xi_3] = 0$.

Утверждение 2 следует из того, что если $[\xi_1, \xi_2] = 0$, то $[\xi_1, \eta] = 0$ при любом η (так как по утверждению 1 $[\xi_1, \xi_1] = 0$ и $[\xi_1, \xi_3] = 0$ при любом ξ_3). Следовательно, $[\xi_1, \xi_2] \neq 0$.

Определение II 29.7. Собственное значение λ , $|\lambda| = 1$, $\lambda^2 \neq 1$, называется *положительным* (соответственно, *отрицательным*) собственным значением симплектического отображения A , если

$$[A\xi, \xi] > 0 \text{ (соответственно, } [A\xi, \xi] < 0), \quad \xi \in \sigma,$$

на действительной инвариантной плоскости σ , соответствующей собственным значениям $\lambda, \bar{\lambda}$.

Это определение корректно. Действительно, векторы $A\xi$ и ξ , лежащие в плоскости ξ , не коллинеарны, так как $\lambda^2 \neq 1$. Таким образом, в силу следствия II29.6 $[A\xi, \xi] \neq 0$ на σ . Это означает, что $[A\xi, \xi]$ сохраняет постоянный знак при всех $\xi \in \sigma$.

Замечание II29.8. Знак собственного значения имеет простую геометрическую интерпретацию. Поскольку $[\xi, \eta] \neq 0$, если вектор ξ не параллелен вектору η , плоскость σ допускает каноническую ориентацию. Следовательно, можно говорить о положительных и отрицательных поворотах.

Ограничение отображения A на σ есть эллиптический поворот на угол α , $0 < |\alpha| < \pi$. *Собственное значение λ положительно (соответственно, отрицательно), если отображение A на σ есть поворот на положительный (соответственно, отрицательный) угол.*

Основной результат Крейна утверждает, что *столкновение двух собственных значений одного знака на окружности $|\lambda| = 1$ не приводит к неустойчивости, тогда как два собственных значения различных знаков могут покинуть окружность $|\lambda| = 1$ после столкновения, образовав таким образом четверку вместе с двумя комплексно сопряженными им собственными значениями* (см. рис. II29.3).

Более точно, пусть $A(t)$ — симплектическое отображение, непрерывно зависящее от t , и пусть числа ± 1 не являются собственными значениями при $|t| < \tau$. Предположим, что при $t < 0$ все собственные значения λ_k отображения A простые и расположены на окружности $|\lambda| = 1$, тогда как при $t = 0$ некоторые собственные значения λ_k сливаются.

Теорема II29.9. *Если все собственные значения, которые сливаются, одного знака, то после столкновения они остаются на окружности $|\lambda| = 1$, а отображение A остается устойчивым при $t < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.*

Мы докажем эту теорему в простейшем случае, когда сливаются все собственные значения λ , $\text{Im } \lambda > 0$. Общий случай сводится к простейшему, если выбрать каноническое подпространство $R^{2l}(t)$, соответствующее l сталкивающимся собственным значениям и комплексно сопряженным с ними.

Предположим для конкретности, что собственные значения λ_k положительны:

$$[A\xi, \xi] > 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \sigma_k$$

(σ_k — плоскость, порожденная собственными векторами $\xi_k, \overline{\xi_k}$, где $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$).

Доказательство теоремы П29.10.

Рассмотрим квадратичную форму $[A\xi, \xi]$. Ее билинейная полярная форма невырождена. Действительно,

$$[A\xi, \eta] + [A\eta, \xi] = [A\xi, \eta] - [A^{-1}\xi, \eta] = [(A - A^{-1})\xi, \eta],$$

если $[(A - A^{-1})\xi, \eta] = 0$ при любом векторе η , то $(A - A^{-1})\xi = 0$, следовательно, $(A^2 - E)A\xi = 0$. Таким образом, отображение A^2 имеет собственное значение, равное 1, а именно это исключено по условиям теоремы ($\lambda \neq \pm 1$).

Следовательно, квадратичная форма $[A\xi, \xi]$ невырождена при $|t| < \tau$, включая $t = 0$. С другой стороны, при $t < 0$ эта форма положительно определена. Действительно, каждый вектор η есть сумма своих проекций η_k на инвариантные плоскости σ_k , соответствующие парам собственных значений $\lambda_k, \overline{\lambda_k}$, $|\lambda_k| = 1$. Из следствия П29.6 мы заключаем, что плоскости σ_k попарно ортогональны (в смысле $[\cdot, \cdot]$).

Таким образом,

$$[A\eta, \eta] = \sum_{k,l} [A\eta_k, \eta_l] = \sum_k [A\eta_k, \eta_k],$$

так как

$$[A\eta_k, \eta_l] = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l \quad (A\eta_k \in \sigma_k, \eta_l \in \sigma_l).$$

Но $[A\eta_k, \eta_k] > 0$, поскольку λ_k — положительное собственное значение, и поэтому $[A\eta, \eta] > 0$.

Итак, форма $[A(t)\xi, \xi]$ положительно определена при $t < 0$ и невырождена при $t = 0$. Следовательно, она положительно определена при $t = 0$, а, значит, и при $t < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Но $[AA^n\xi, A^n\xi] = [A\xi, \xi]$, так как отображение A^n симплектическое. Следовательно, орбита $A^n\xi$ принадлежит эллипсоиду $[A\xi, \xi] = \text{const}$, т. е. при $t < \varepsilon$ отображение $A(t)$ устойчиво. ■

Замечание П29.11. То же рассуждение доказывает признак параметрической устойчивости: симплектическое отображение A параметрически устойчиво в том и только том случае, если все собственные значения λ_k лежат на окружности $|\lambda_k| = 1$, $\lambda_k^2 \neq 1$, и на каждом инвариантном подпространстве, соответствующем кратным собственным значениям $\lambda, \bar{\lambda}$, квадратичная форма $[A\xi, \xi]$ положительно (или отрицательно) определена.

Приложение 30
Метод усреднения для периодических систем

(См. § 22, гл. 4)

Пусть $\Omega = B^l \times \mathbb{S}^1$ — фазовое пространство, $B^l = \{I = (I_1, \dots, I_l)\}$ — ограниченная часть евклидова пространства \mathbb{R}^l , $\mathbb{S}^1 = \{\varphi \pmod{2\pi}\}$ — окружность, $\omega(I)$, $F(I, \varphi)$, $f(I, \varphi)$ — дифференцируемые функции, периодические по φ :

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \omega: B^l \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

наконец, $\varepsilon \leq 1$ — малый параметр.

Теорема П30.1. *Рассмотрим в Ω следующие системы:*

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi) \\ \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi) \end{cases} \quad (\text{П30.2})$$

и

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{F}(J), \quad \text{где} \quad \bar{F}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(J, \varphi) d\varphi. \quad (\text{П30.3})$$

Тогда, если $\omega(I) \neq 0$ в Ω , решения систем (П30.2) и (П30.3) с одинаковыми начальными условиями $I(0) = J(0)$ удовлетворяют неравенству

$$|I(t) - J(t)| < C\varepsilon \text{ при любом } t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

где C — постоянная, не зависящая от ε .

Доказательство.

Попытаемся улучшить систему (П30.2) при помощи новой переменной

$$P = P(I, \varphi) = I + \varepsilon g(I, \varphi), \quad g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1. \quad (\text{П30.4})$$

Из (П30.2) и (П30.4) следует, что

$$\dot{P} = \varepsilon F(P, \varphi) + \varepsilon \frac{\partial g(P, \varphi)}{\partial \varphi} \omega(P) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П30.5})$$

Чтобы уничтожить члены порядка ε , положим

$$g(I, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{\bar{F}(P) - F(P, \varphi)}{\omega(P)} d\varphi;$$

функция $g(I, \varphi)$ вполне определена, так как

$$\omega(P) \neq 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} (\bar{F} - F) d\varphi = 0,$$

следовательно, $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$.

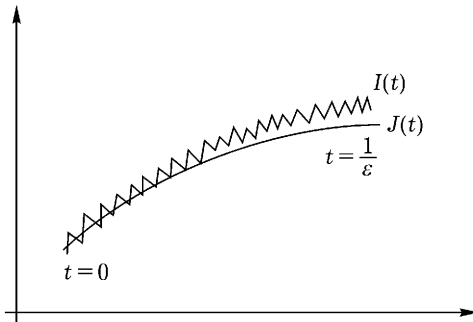


Рис. П30.11

Система (П30.5) принимает вид

$$\dot{P} = \varepsilon \bar{F}(P) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П30.7})$$

Пусть $P(t)$ — решение системы (П30.7) с начальными условиями

$$\begin{aligned} P(0) &= J(0) = I(0), \\ P(t) &= P(I(t), \varphi(t)). \end{aligned} \quad (\text{П30.8})$$

Из (П30.7) очевидным образом следует, что

$$|P(t) - J(t)| < C_1\varepsilon \quad \text{при любом } t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{П30.9})$$

Из (П30.4), (П30.6) и (П30.8) мы заключаем, что

$$|P(t) - I(t)| < C_2\varepsilon \quad \text{при любом } t. \quad (\text{П30.10})$$

Неравенства (П30.9) и (П30.10) доказывают теорему. Они доказывают также, что истинное движение состоит из усредненного движения и малых быстрых колебаний (см. рис. П30.11). ■

Приложение 31

Поверхности сечения

(См. 21.9, § 21, гл. 4)

Пусть $H(p, q)$ — функция Гамильтона системы с n степенями свободы (следовательно, размерность фазового пространства p, q равна $2n$). Пусть $H = h$ — $(2n - 1)$ -мерная поверхность уровня энергии, а $\Sigma: H = h, q_1 = 0$ — сечение поверхности постоянной энергии размерности $2n - 2$. Пусть $\dot{q}_1 \neq 0$ в некоторой области Σ_0 поверхности Σ , и $P = (p_2, \dots, p_n), Q = (q_2, \dots, q_n)$ образуют систему локальных координат (см. рис. П31.1).

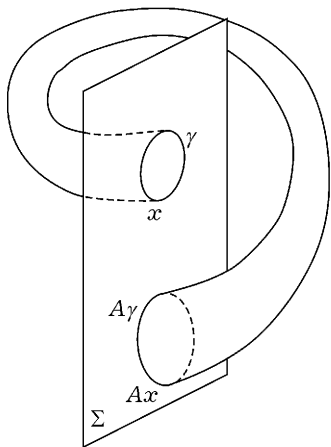


Рис. П31.1

Доказательство.

Рассмотрим пучок траекторий, выходящих из γ в $(2n + 1)$ -мерном пространстве $\{(p, q, t)\}$. Кривые γ и $A\gamma$ — проекции в пространстве $\{(p, q)\}$ двух замкнутых кривых γ' и $A\gamma'$, образованных началь-

Предположим, что траектория гамильтоновой системы, выходящая из точки x_0 области Σ_0 , пересекает Σ_0 . Тогда, принимая во внимание, что $\dot{q}_1 \neq 0$, мы заключаем, что все близкие траектории также пересекают Σ_0 , и тем самым получаем отображение $A: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$, где $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Теорема П31.2¹. *Отображение A — каноническое, т. е. для любой замкнутой кривой γ на Σ_1*

$$\oint_{\gamma} P dQ = \oint_{A\gamma} P dQ, \quad (\text{П31.3})$$

$$P dQ = p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n.$$

¹Эта теорема давно известна, но, насколько можно судить, ее доказательство никогда не было опубликовано.

ными точками ($t = 0$) и конечными точками интегральных кривых $p = p(t)$, $q = q(t)$ в пространстве $\{(p, q, t)\}$ (см. рис. ПЗ1.4).

Следовательно, согласно теореме Пуанкаре – Картана

$$\oint_{\gamma'} p dq - H dt = \oint_{A\gamma'} p dq - H dt, \quad (\text{ПЗ1.5})$$

где

$$p dq = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n.$$

Но $H = \text{const}$ вдоль γ' и $A\gamma'$, поэтому

$$\oint_{\gamma'} H dt = \oint_{A\gamma'} H dt = 0.$$

Далее получаем:

$$\oint_{\gamma'} p dq = \oint_{\gamma} p dq \quad \text{и} \quad \oint_{A\gamma'} p dq = \oint_{A\gamma} p dq.$$

Кроме того, $q_1 = \text{const}$ на Σ , поэтому

$$\oint_{\gamma'} p_1 dq_1 = \oint_{A\gamma'} p_1 dq_1 = 0.$$

Таким образом,

$$\oint_{\gamma'} p dq - H dt = \oint_{\gamma} P dQ, \quad \oint_{A\gamma'} p dq - H dt = \oint_{A\gamma} P dQ$$

и (ПЗ1.3) следует из (ПЗ1.5).

Теорема доказана. ■

ПРИМЕР ПЗ1.6. Рассмотрим задачу Биркгофа о выпуклом «бильярде».

Пусть Γ — замкнутая выпуклая кривая на плоскости E^2 . Предполагается, что материальная точка M движется в области, ограниченной кривой Γ , и что соударения точки M с кривой Γ происходят по закону упругого отражения — угол падения равен углу отражения (см. рис. ПЗ1.7).

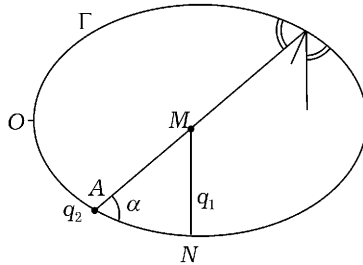


Рис. П31.7

Состояние точки M в момент отражения определяется двумя параметрами: углом падения α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, и точкой соударения с границей Γ . Положение точки соударения A определяется алгебраической длиной q_2 дуги \overline{OA} кривой Γ (O — произвольно выбранное начало). Иначе говоря, множество состояний точки M (в момент отражения) образует тор \mathbb{T}^2 в фазовом пространстве $\{\alpha \pmod{2\pi}, q_2 \pmod{L}\}$, где L — длина кривой Γ .

Мы получаем естественное отображение A подмножества этого тора на себя: состояние непосредственно после отражения от Γ переходит в состояние непосредственно перед следующим соударением о Γ .

Теорема П31.8 (Дж. Д. Биркгоф). *Отображение A сохраняет интегральный инвариант $I = \sin \alpha dq_2 \wedge d\alpha$.*

Доказательство.

Ясно, что между двумя отображениями движение точки M подчиняется уравнениям Гамильтона в соответствующем четырехмерном фазовом пространстве. Выберем в окрестности тора \mathbb{T}^2 , о котором говорилось выше, особую систему координат. Каждой точке M поставим в соответствие координаты (q_1, q_2) , где q_1 — расстояние от точки M до ее ортогональной проекции на Γ , q_2 — длина дуги \overline{ON} . Ясно, что в окрестности Γ координаты $q_1, q_2 \pmod{L}$ образуют систему лагранжевых координат. Пусть p_1 и p_2 — соответствующие импульсы, масса M считается равной единице. Ясно, что на Γ импульсы p_1 и p_2 совпадают с соответствующими скоростями v :

$$p_1 = |v| \sin \alpha, \quad p_2 = |v| \cos \alpha.$$

Функция Гамильтона есть кинетическая энергия:

$$H = \frac{v^2}{2}.$$

Рассмотрим в четырехмерном пространстве p_1, p_2, q_1, q_2 поверхность Σ , задаваемую уравнениями

$$H = \frac{1}{2}, \quad q_1 = 0 \quad (\text{т. е. } |v| = 1, \quad M \in \Gamma).$$

Движение от одного отражения до другого определяет отображение $A: \Sigma \rightarrow \Sigma$. Координаты p_2, q_2 являются локальными координатами на Σ ($\alpha \neq 0$). По теореме (ПЗ1.2), A — каноническое отображение, следовательно, оно сохраняет 2-форму

$$dp_2 \wedge dq_2 = \sin \alpha \, dq_2 \wedge d\alpha, \quad \blacksquare$$

Элементарное доказательство этой теоремы приводится у Дж. Д. Биркгофа [1]; оно сопряжено с длинными вычислениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ 32

Производящие функции канонических отображений

(См. § 21, гл. 4)

Результаты, изложенные в этом приложении, принадлежат Гамильтону и Якоби.

А. Конечные канонические отображения

Пусть

$$x = (p, q), \quad (p = (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q_1, \dots, q_n)),$$

— точка канонического пространства \mathbb{R}^{2n} . Дифференцируемое отображение

$$A: x \rightarrow X = (P(p, q), Q(p, q)), \quad (P = (P_1, \dots, P_n), Q = (Q_1, \dots, Q_n))$$

называется *каноническим*, если оно сохраняет интегральный инвариант Пуанкаре:

$$\oint_{\gamma} p \, dq = \oint_{A\gamma} P \, dQ \tag{П32.1}$$

для любой замкнутой кривой γ .

Из (П32.1) для любой 2-цепи следует сохранение суммы площадей проекций на плоскости p_i, q_i :

$$I(\sigma) = \iint_{\sigma} dp \wedge dq = \iint_{A\sigma} dp \wedge dq = I(A\sigma). \tag{П32.2}$$

Иначе говоря, 2-формы $dp \wedge dq$ и $dP \wedge dQ$ совпадают:

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ, \quad \text{где } P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q).$$

Если область определения отображения A односвязна, то условия (П32.1) и (П32.2) эквивалентны. Из (П32.3) следует, что дифференциальная форма в \mathbb{R}^{2n} :

$$p dq + Q dP, \quad \text{где } P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q),$$

замкнута (так как $dp \wedge dq + dQ \wedge dP = 0$). Таким образом, локально мы получаем функцию точки пространства \mathbb{R}^{2n} :

$$A(x) = \int_{x_0}^x p dq + Q dP, \quad \text{где } P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q).$$

Предположим, что в окрестности точки x величины q_1, \dots, q_n и P_1, \dots, P_n образуют систему локальных координат, т. е.

$$\det \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right) \neq 0.$$

Тогда $A(x)$ можно считать функцией $2n$ переменных P, q , определенных в окрестности точки p, q :

$$A(P, q) = \int^{(P, q)} p dq + Q dP, \quad \text{где } P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q).$$

Определение П32.5. Функция $A(P, q)$ называется *производящей функцией канонического преобразования* A .

Ясно, что A определено только локально и с точностью до постоянной. Из (П32.4) следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial P} = Q, \quad \frac{\partial A}{\partial q} = p. \quad (\text{П32.6})$$

Лемма П 32.7. Пусть $A(P, q)$ — функция от $2n$ переменных такая, что

$$\det \left(\frac{\partial^2 A}{\partial P \partial q} \right) \neq 0$$

в окрестности точки (P, q) . Тогда уравнения (П32.6) можно локально разрешить относительно P, q :

$$P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q),$$

и функции P, Q определяют каноническое отображение A .

Действительно, дифференциальная форма $p dq + Q dP = dA$ на \mathbb{R}^{2n} замкнута, следовательно,

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ. \quad \blacksquare$$

К сожалению, производящая функция A обладает тем неприятным свойством, что не является геометрическим объектом: действительно, она зависит не только от отображения A , но и от координат p, q в пространстве \mathbb{R}^{2n} .

Из уравнений (П32.6) мы заключаем, что производящая функция тождественного отображения¹ равна Pq . Следовательно, каждое каноническое отображение, близкое к тождественному, обладает производящей функцией, близкой к Pq .

В. Инфинитезимальные канонические отображения

Рассмотрим канонические отображения S_ε , производящие функции которых $Pq + \varepsilon S(p, q; \varepsilon)$ зависят дифференцируемым образом от параметра $\varepsilon \ll 1$.

Если параметр ε мал, то отображение S_ε близко к тождественному.

Из уравнений (П32.6) следует, что разложения в ряд Тейлора по ε функций $P(p, q)$ и $Q(p, q)$ имеют следующий вид:

$$P = p - \varepsilon \frac{\partial S}{\partial q} + O(\varepsilon^2), \quad Q = q + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial p} + O(\varepsilon^2), \quad (\text{П32.8})$$

где $S = S(p, q; \varepsilon)$.

Инфинитезимальное каноническое отображение S_ε , по определению, есть класс эквивалентности семейств S_ε ; два семейства $S_\varepsilon, S'_\varepsilon$ принадлежат одному и тому же классу, если $|S_\varepsilon - S'_\varepsilon| = O(\varepsilon^2)$.

Определение П32.9. Функция точки фазового пространства $S(p, q)$ называется *производящей функцией инфинитезимального отображения S_ε (или функции Гамильтона)*.

Ясно, что функция S определена с точностью до постоянной. Убедимся теперь, что функция S имеет геометрический смысл: она не зависит ни от выбора канонических координат p, q , ни от выбора представителя S_ε в классе эквивалентности; это — отображение $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^1$.

¹Это — мнемонический прием, позволяющий легко восстановить уравнения (П32.6).

Действительно, пусть γ — кривая, соединяющая две точки x, y пространства \mathbb{R}^{2n} : $\partial\gamma = y - x$. Положим $\gamma_\varepsilon = S_\varepsilon\gamma$, и пусть $\sigma(\varepsilon)$ — полоса, образованная кривыми $\gamma_{\varepsilon'}, 0 < \varepsilon' < \varepsilon$, и ориентированная так, что $\partial\sigma_\varepsilon = \gamma - \gamma_\varepsilon + \dots$ (см. рис. П32.10).

Положим

$$I[\sigma(\varepsilon)] = \iint_{\sigma(\varepsilon)} dp \wedge dq. \quad (\text{П32.11})$$

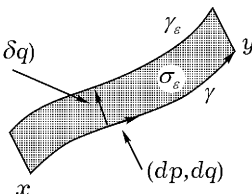


Рис. П32.10

В силу соотношения (П 32.2) интеграл не зависит от выбора канонических координат, а в силу соотношения (П32.1) не зависит и от выбора кривой γ , а зависит только от x и y .

Лемма П32.12. Производящая функция S инфинитезимального канонического преобразования S_ε определяется соотношением

$$S(y) - S(x) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} I[\sigma(\varepsilon)] \right|_{\varepsilon=0} \quad (\text{П32.13})$$

и, следовательно, не зависит от выбора канонических координат p, q .

Доказательство.

В силу соотношений (П32.8), полагая $S_\varepsilon x - x = \delta x = (\delta p, \delta q)$, получаем:

$$\varepsilon(S(y) - S(x)) = \varepsilon \int_\gamma \frac{\partial S}{\partial p} dp + \frac{\partial S}{\partial q} dq = \int_\gamma (\delta q dp - \delta p dq) + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П32.14})$$

С другой стороны, по формуле (П 32.11) интеграл от $dp \wedge dq$ по $\sigma(\varepsilon)$ равен

$$I[\sigma(\varepsilon)] = \int_{\sigma(\varepsilon)} dp \wedge dq = \int_\gamma \left| \begin{matrix} dp & dq \\ \delta p & \delta q \end{matrix} \right| + O(\varepsilon^2). \quad (\text{П32.15})$$

Из формул (П32.14) и (П32.15) следует соотношение (П32.13). ■

Инвариантность производящей функции S можно выразить в иной форме. Пусть A — конечное каноническое отображение, S_ε — инфинитезимальное каноническое отображение. Ясно, что каноническое отображение $T_\varepsilon = AS_\varepsilon A^{-1}$ также инфинитезимально.

Лемма П32.16. *Производящие функции S и T инфинитезимальных канонических отображений S_ε и T_ε связаны соотношением*

$$T(Ax) = S(x) + \text{const.} \quad (\text{П32.17})$$

Доказательство.

Пусть γ_ε и $\sigma(\varepsilon)$ — кривая и поверхность из леммы (П32.12). Кривая $\gamma' = A\gamma$ соединяет точки Ax и Ay . Кроме того, кривые $T_\varepsilon\gamma'$, $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$, образуют полосу $\tau(\varepsilon)$, которая есть не что иное, как

$$\tau(\varepsilon) = A\sigma(\varepsilon). \quad (\text{П32.18})$$

Из соотношения (П32.13) мы получаем, что

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \frac{d}{d\varepsilon} I[\sigma(\varepsilon)], \\ T(Ay) - T(Ax) &= \frac{d}{d\varepsilon} I[\tau(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{П32.19})$$

Но A — каноническое отображение, следовательно, по формулам (П32.2) и (П32.18) $I[\sigma(\varepsilon)] = I[\tau(\varepsilon)]$. Сравнивая с (П32.19), получаем (П32.17). ■

Следствие П 32.20. *Пусть B_ε и C_ε — инфинитезимальные канонические отображения с производящими функциями, соответственно B и C , A — конечное каноническое отображение. Тогда инфинитезимальное каноническое отображение*

$$B'_\varepsilon = C_\varepsilon B_\varepsilon A C_\varepsilon^{-1} A^{-1} \quad (\text{П32.21})$$

имеет в качестве производящей функции

$$B'(x) = C(x) + B(x) - C(A^{-1}x) + \text{const.} \quad (\text{П32.22})$$

Действительно, из (П32.8) следует, что производящая функция произведения двух инфинитезимальных отображений есть сумма их производящих функций и что производящая функция обратного отображения C^{-1} есть функция $-C$. Используя эти замечания и лемму (П32.16), получаем (П32.22).

С. Коммутаторы Ли и скобки Пуассона.

Пусть A_ε и B_ε — два инфинитезимальных канонических отображения. Тогда существует инфинитезимальное каноническое отображение, причем только одно, C_ε такое, что

$$A_a B_b A_{-a} B_{-b} = C_{ab} + O(a^2) + O(b^2), \quad a, b \rightarrow 0. \quad (\text{П32.23})$$

Это отображение C_ε называется коммутатором Ли отображений A_ε и B_ε .

Лемма П32.24. *Производящая функция C отображения C_ε равна взятой с обратным знаком скобке Пуассона производящих функций A и C отображений A_ε и B_ε :*

$$\nabla C = -[\nabla A, \nabla B], \quad \nabla — \text{градиент}. \quad (\text{П32.25})$$

Доказательство.

Пусть γ — снова кривая, соединяющая точки x и y : $\partial\gamma = y - x$. Рассмотрим пятиугольную призму (см. рис. П32.26), образованную четырьмя полосами:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= B_\varepsilon \gamma, & -b < \varepsilon < 0, & & \partial\sigma_1 &= \gamma - \gamma_1 + \dots, \\ \sigma_2 &= A_\varepsilon \gamma_1, & -a < \varepsilon < 0, & & \partial\sigma_2 &= \gamma_1 - \gamma_2 + \dots, \\ \sigma_3 &= B_\varepsilon \gamma_2, & 0 < \varepsilon < b, & & \partial\sigma_3 &= \gamma_2 - \gamma_3 + \dots, \\ \sigma_4 &= A_\varepsilon \gamma_3, & 0 < \varepsilon < a, & & \partial\sigma_4 &= \gamma_3 - \gamma_4 + \dots, \end{aligned}$$

и замыкаемую пятой полосой δ_5 , образованную отрезками, соединяющими соответственные точки кривых γ и γ_4 , $\partial\sigma_5 = \gamma_4 - \gamma + \dots$

Наконец, обозначим через τ_x и τ_y основания призмы. Таким образом, 2-цепь $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \tau_y + \tau_x = \Sigma$ образует 2-цикл, гомологичный нулю. Так как форма $dp \wedge dq$ замкнута, то в обозначениях (П32.2) получаем:

$$I(\sigma_1) + I(\sigma_2) + I(\sigma_3) + I(\sigma_4) + I(\sigma_5) + I(\tau_y) - I(\tau_x) = I(\Sigma) = 0. \quad (\text{П32.27})$$

Но по лемме (П32.12),

$$\begin{cases} I(\sigma_1) = -b[B(y) - B(x)] + O(b^2), \\ I(\sigma_2) = -a[A(y_1) - A(x_1)] + O(a^2), \\ I(\sigma_3) = b[B(y_2) - B(x_2)] + O(b^2), \\ I(\sigma_4) = a[A(y_3) - A(x_3)] + O(a^2), \\ I(\sigma_5) = -ab[C(y) - C(x)] + O(a^2) + O(b^2). \end{cases} \quad (\text{П32.28})$$

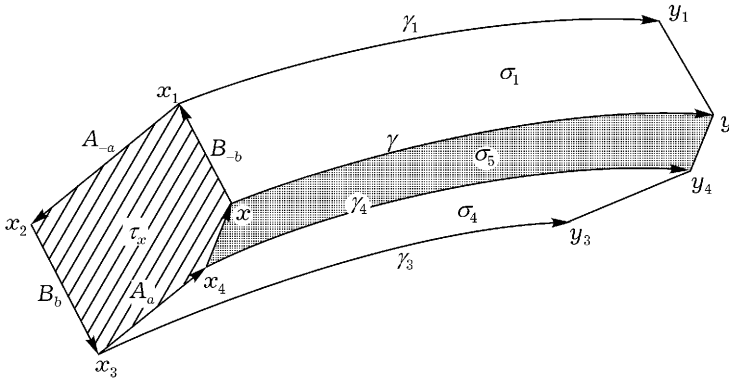


Рис. П32.26

С другой стороны, $|y - y_4| = O(ab)$, следовательно, интегралы от $\sum dp \wedge dq$ по поверхности τ определяется выражениями

$$\begin{cases} I(\tau_y) = ab[\nabla B(y), \nabla A(y)] + O(a^2) + O(b^2), \\ I(\tau_x) = -ab[\nabla B(x), \nabla A(x)] + O(a^2) + O(b^2), \end{cases} \quad (\text{П32.29})$$

Наконец, из (П32.8) мы заключаем, что $I\nabla A, I\nabla B$ — векторные поля, соответствующие A_ε и B_ε . Следовательно, с точностью до $O(a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned} A(y_3) - A(y_1) &= (\nabla A, y_3 - y_1) = (\nabla A, y_3 - y_2) + (\nabla A, y_2 - y_1) = \\ &= (\nabla A, I\nabla B)b - (\nabla A, I\nabla A)a = \\ &= [\nabla B, \nabla A]b - [\nabla A, \nabla A]a = [\nabla B, \nabla A]b. \end{aligned}$$

Точно также:

$$B(y_2) - B(y) = -[\nabla A, \nabla B]a.$$

Таким образом, из (П32.28) следует, что

$$I(\sigma_1) + I(\sigma_2) + I(\sigma_3) + I(\sigma_4) = O(a^2) + O(b^2).$$

Сравнивая (П32.27), (П32.29) и (П32.30), получаем (П32.25). ■

Приложение 33

Глобальные канонические отображения

(См. § 21, гл. 4)

В этом приложении мы излагаем топологические причины существования периодических траекторий в гамильтоновых системах с n степенями свободы.

А. Производящие функции

Пусть $\Omega = \mathbb{B}^n \times \mathbb{T}^n$ — каноническое пространство, $p: \Omega \rightarrow \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n = \{(p_1, \dots, p_n)\}$ и $q: \Omega \rightarrow \mathbb{T}^n = \{(q_1, \dots, q_n) \pmod{2\pi}\}$ — координаты точки $x \in \Omega$. Отображение $\mathbf{A}: \Omega \rightarrow \Omega$ называется *глобально каноническим*, если оно гомотопно тождественному и удовлетворяет равенству

$$\oint_{\gamma} p \overline{dq} = \oint_{\mathbf{A}\gamma} p \, dq \quad (\text{П33.1})$$

для любого 1-цикла γ , не гомологичного нулю.

Как показано в приложении 32, отображение \mathbf{A} локально задано производящей функцией $Pq + A(P, q)$, так как

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right) &\neq 0, \\ p &= P + \frac{\partial A}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial A}{\partial P}, \\ (\mathbf{A}x &= (P(x), Q(x)), \quad P \in \mathbb{B}^n, Q \in \mathbb{T}^n). \end{aligned} \quad (\text{П33.2})$$

Следовательно, локально функция $A(P, q)$ удовлетворяет соотношению

$$A(P, q) = \int^{(P, q)} (Q - q) \, dP + (p - P) \, dq. \quad (\text{П33.3})$$

Положим $A(x) = A(P(x), q(x))$, где $x = (p(x), q(x)) \in \Omega$.

Лемма П33.4. *Отображение (П33.2) — глобальное каноническое в том и только том случае, если функция $A(x)$, определенная соотношением (П33.3), однозначна на Ω .*

Доказательство.

Пусть γ — замкнутая кривая в Ω . Докажем, что

$$\oint_{\gamma} (Q - q) dP + (p - P) dq = 0. \quad (\text{П33.5})$$

Действительно, (П33.1) эквивалентно соотношению

$$\oint_{\gamma} p dq = \oint_{\gamma} P dQ. \quad (\text{П33.6})$$

В результате мы получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (Q - q) dP + (p - P) dq &= \\ &= \oint_{\gamma} Q dP + P dQ - (q dP + P dq) = \oint_{\gamma} d[P(Q - q)]. \end{aligned}$$

Приращение величины $P(Q - q)$ вдоль γ равно нулю:

$$\oint_{\gamma} d[P(Q - q)] = 0, \quad (\text{П33.7})$$

поскольку отображение \mathbf{A} гомотопно тождественному отображению.

Наоборот, из (П33.5) и (П33.7) следует (П33.6). ■

В. Топологическая лемма

Пусть теперь \mathbf{A} — глобально канонический диффеоморфизм, \mathbb{T} — тор $p = 0$, $A\mathbb{T}$ — образ тора \mathbb{T} относительно диффеоморфизма \mathbf{A} .

Лемма П33.8. *Торы \mathbb{T} и $A\mathbb{T}$ имеют по крайней мере 2^n точек пересечения (каждая точка берется при подсчете столько раз, какова ее кратность) при условии, что $A\mathbb{T}$ определяется уравнением*

$$p = p(q), \quad \left| \frac{dp}{dq} \right| < \infty. \quad (\text{П33.9})$$

Кроме того, число геометрически различных точек пересечения по крайней мере равно $n + 1$.

Доказательство.

Рассмотрим на $A\mathbb{T}$ функцию

$$f(x) = \int_{x_0}^x p(x) dq(x), \quad \text{где } x = (p(x), q(x)) \in A\mathbb{T}, \quad (\text{ПЗ3.10})$$

где путь интегрирования есть некоторая кривая в $A\mathbb{T}$. Функция $f(x)$ определена корректно, так как интеграл (ПЗ3.10) не зависит от пути интегрирования. Действительно, пусть γ — замкнутая кривая на $A\mathbb{T}$. Тогда

$$\oint_{\gamma} p dq = \oint_{\mathbf{A}^{-1}\gamma} p dq = 0,$$

так как \mathbf{A}^{-1} — глобально каноническое отображение, $\mathbf{A}^{-1}\gamma \subset \mathbb{T}$, а на $\mathbb{T} p = 0$. Функция $f(x)$ — дифференцируемая функция на n -мерном торе \mathbb{T}^n . В качестве таковой она в силу неравенств Морса¹ имеет по крайней мере 2^n критических точек.

Из (ПЗ3.10) следует, что $df = p(x) dq(x)$ на $A\mathbb{T}$. В точках пересечения $A\mathbb{T}$ с \mathbb{T} $p(x) = 0$. Это означает, что точки пересечения \mathbb{T} с $A\mathbb{T}$ являются критическими точками функции f на $A\mathbb{T}$. Наоборот, в силу условия (ПЗ3.9) в каждой точке функции f на $A\mathbb{T}$ выполняется равенство $p dq = 0$ при любом dq ; следовательно, $p(x) = 0$, и поэтому критическая точка x есть точка пересечения $A\mathbb{T}$ с \mathbb{T} . Лемма доказана. ■

Следствие ПЗ3.11. *Торы \mathbb{T} и $A\mathbb{T}$ имеют 2^n точек пересечения, так как их уравнения имеют вид*

$$p = p'(q), \quad p = p''(q) \quad \left(\left| \frac{dp'}{dq} \right| < \infty, \left| \frac{dp''}{dq} \right| < \infty \right),$$

и на \mathbb{T} 2-форма $dp \wedge dq$ равна нулю.

Действительно, если $dp \wedge dq \equiv 0$ на \mathbb{T} , то преобразование

$$p, q \rightarrow p - p'(q), q$$

является каноническим диффеоморфизмом. Этот диффеоморфизм сводит (ПЗ3.12) к (ПЗ3.9) с $p(q) = p''(q) - p'(q)$.

¹См. Milnor [1] $2^n = \sum_{i=0}^n b_i$, где b_i — i -е число Бетти. Критические точки не выродены, так как $d^2 f = dp \wedge dq$ имеет максимальный ранг.

ЗАМЕЧАНИЕ П33.13. В случае $n = 1$ (отображения кольца) лемма (П33.8) остается в силе без условия (П33.9). Доказательство, использующее теорему Жордана, не распространяется на случай $n > 1$. Неизвестно, пересекаются ли торы \mathbb{T} и $A\mathbb{T}$ при $n > 1$, когда условие (П33.9) не выполняется.

Если в лемме (П33.8) ослабить условия (П33.9), то получается большое число «теорем о возвращении» следующего типа.

Предположим, что начальные значения a_i, b_i осей кеплеровских эллипсов в плоской задаче n тел таковы, что эти эллипсы не пересекаются. Тогда при любом τ существуют начальные фазы² l_i, g_i такие, что по прошествии времени τ оси эллипсов в точности вернуться к своим начальным значениям.

ЗАМЕЧАНИЕ П33.14. Для леммы (П33.8) (без условия (П33.9)) существенно, чтобы отображение \mathbf{A} было диффеоморфизмом, так как даже в случае $n = 1$ можно построить глобально каноническое отображение так, что \mathbb{T} и $A\mathbb{T}$ не будут пересекаться.

С. Неподвижные точки

Пусть теперь \mathbf{A} — глобальное каноническое отображение частного типа:

$$\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega(p) \quad (\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)). \quad (\text{П33.15})$$

Предположим, что на торе $p = p_0$ все частоты соизмеримы:

$$\omega_i(p_0) = \frac{m_i}{N} 2\pi, \quad m_i \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}, \quad (\text{П33.16})$$

и что «обмотка» невырождена:

$$\det \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{p_0} \neq 0. \quad (\text{П33.17})$$

Теорема П33.18. *Каждое глобально каноническое отображение B , достаточно близкое к A (вместе с производными), допускает в окрестности тора $p = p_0$ по крайней мере 2^n точек³ периода N :*

$$B^N x = x.$$

²Фазы l_i, g_i — это углы (mod 2π); g_i определяют положение эллипсов, l_i определяют положение планет на эллипсах.

³Каждая точка берется при подсчете столько раз, какова ее кратность.

Доказательство.

В силу (П33.15), (П33.16) и (П33.17) отображение \mathbf{A}^N в окрестности тора $p = p_0$ представимо в виде

$$\mathbf{A}^N : p, q \rightarrow p, q + \alpha(p), \quad \text{где } \alpha(p_0) = 0, \quad \det \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} \right) \neq 0. \quad (\text{П33.19})$$

Можно положить $\alpha(p) = N(\omega(p) - \omega(p_0))$.

Близкое отображение \mathbf{B}^N можно записать в виде

$$\mathbf{B}^N : (p, q) \rightarrow (p + \beta_1(p, q), q + \alpha(p) + \beta_2(p, q)) = (P, Q). \quad (\text{П33.20})$$

Рассмотрим точки, которые движутся вдоль радиусов $Q = q$ так, что

$$\alpha(p) + \beta_2(p, q) = 0. \quad (\text{П33.21})$$

Из теоремы о неявной функции следует, что

- 1) уравнение (П33.21) определяет тор, который близок к тору $p = p_0$ и движется вдоль радиусов;
- 2) два тора \mathbb{T} и $B^N \mathbb{T}$ имеют уравнения вида

$$p = p'(q), \quad p = p''(q), \quad \text{где } \left| \frac{dp'}{dq} \right| < \infty \left| \frac{dp''}{dq} \right| < \infty. \quad (\text{П33.22})$$

Так как отображение \mathbf{B}^N глобально каноническое, оно задается производящей функцией вида $Pq + B(P, q)$. По лемме П33.4 функция $B(x) = B(P(x), q(x))$ однозначна в Ω .

Рассмотрим теперь ограничение функции $B(x)$ на тор \mathbb{T} . Как дифференцируемая функция на n -мерном торе, она имеет по крайней мере 2^n критических точек (см. лемму П33.8). Докажем, что эти критические точки принадлежат пересечению торов \mathbb{T} и $B^N \mathbb{T}$.

Из формулы (П33.3) следует, что

$$dB = (Q - q) dP + (p - P) dp, \quad \text{где } B : x = (p, q) \rightarrow (P(x), Q(x)).$$

Но по (П33.20) и (П33.21) $Q - q = 0$ на нашем торе \mathbb{T} . Следовательно, в критических точках функции B на \mathbb{T} выполняется соотношение $(p - P) dq = 0$, из чего в силу (П33.22) следует, что $P = p$. \blacksquare

ЗАМЕЧАНИЕ П33.23. Доказанная теорема не является следствием леммы П33.8: для многообразия $Q - q = 0$ может не выполняться соотношение $dp \wedge dq = 0$, как можно видеть на примере канонического отображения

$$\begin{aligned} P_1 &= 3p_1 + 4p_2 + q_1 + q_2, & P_2 &= p_1 + 3p_2 + q_2, \\ Q_1 &= p_1 + p_2 + q_1, & Q_2 &= p_1 - q_1 + q_2. \end{aligned}$$

Приложение 34

Доказательство теоремы о сохранении инвариантных торов при слабом возмущении канонического отображения

(Теорема 21.11 из § 21, гл. 4.)

Построение инвариантных торов осуществлено в разделах Е–Н этого приложения. При этом использованы леммы разделов В–D. Доказательство основано на методе последовательных приближений ньютоновского типа, разработанном специально для этой цели А. Н. Колмогоровым [6].

А. Метод Ньютона

Метод Ньютона нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью состоит в замене кривой $y = f(x)$ касательной к ней в точке с абсциссой x_0 , которая считается аппроксимацией корня x подлежащего определению. Если $|x - x_0| < \varepsilon$, то отклонение кривой от касательной есть величина порядка ε^2 , приближенное значение корня x_1 определяется линеаризованным уравнением

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

и, следовательно, близко к x с точностью до ε^2 (см. рис. П34.1).

Итерируя описанную операцию, получаем последовательность очень быстро сходящихся приближений:

$$|x_{n+1} - x_n| < C|x_n - x_{n-1}|^2; \quad (\text{П34.2})$$

следовательно, в n -м приближении

$$|x - x_n| \sim \varepsilon^{2^{n-1}}.$$

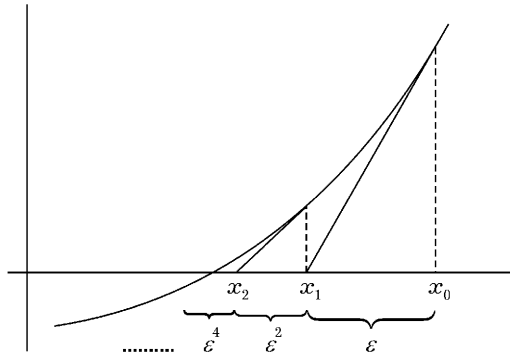


Рис. П34.1

Этот метод легко обобщается на уравнения в банаховых пространствах¹; но в анализе чаще всего приходится иметь дело с полибанаховыми пространствами, и оператор $f'(x_0)^{-1}$ отображает одно пространство в другое. Ситуацию иллюстрирует следующая лемма, которую можно рассматривать как характерный пример. Роль неравенства (П34.2) играет неравенство (П34.4).

Лемма П34.3². Пусть L — оператор, преобразующий функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой комплексной области G , в функцию $Lf(z)$, аналитическую в меньшей³ области $G - \delta$, так, что при любом $0 < \delta < \delta_0$

$$|Lf|_{G-\delta} < |f|_G^2 \cdot \delta^{-\nu}, \quad (\text{П34.4})$$

где $\nu > 0, \delta_0 > 0$ — абсолютные постоянные. Тогда при любом δ' ряд $\sum_s |L^s f|$ сходится в $G - \delta'$, если $|f|_G < M = M(\delta')$ достаточно мала.

Доказательство.

Пусть $M_1 = \delta_1^{2\nu+1}$ и $\delta_2 = \delta_1^{3/2}, \dots, \delta_{s+1} = \delta_s^{3/2}, \dots, M_2 = M_1^{3/2}, \dots, M_{s+1} = M_s^{3/2}$, следовательно, $M_s = \delta_s^{2\nu+1}$.

¹См. Канторович [1].

²Эту лемму использовал еще А. Картан [1], статья [1] которого принадлежит к числу первых работ, основанных на применении ньютоновских приближений в теоретическом анализе.

³Здесь и далее $G - \delta$ означает множество точек q , принадлежащих G , но не принадлежащих δ -окрестности. Пример оператора L , удовлетворяющего неравенству (П34.4) $Lf = f \frac{df}{dx}$.

Тогда, если $\delta_1 < \frac{1}{8}$, $\frac{\delta'}{2}$, то $\sum \delta_s < \delta'$, $\sum M_s < 2M_1$.

Пусть теперь $G_1 = G$, $G_2 = G_1 - \delta_1, \dots, G_{s+1} = G_s - \delta_s$.

Тогда из неравенства $|f|_G < M_1$ мы заключаем, что $|L^s f|_{G_s} < M_s$, так как из неравенства (П34.4) и $|f|_{G_s} < M_s$ можно заключить, что

$$|Lf|_{G_{s+1}} = |Lf|_{G_s - \delta_s} < M_s^2 \delta_s^{-\nu} < \delta_s^{3\nu+2} < \delta_{s+1}^{2\nu+1} = M_{s+1}.$$

Но, так как $\sum \delta_s < \delta'$, имеем $G_s \supset G - \delta'$ при всех s . Следовательно, в $G - \delta'$ выполняются неравенства

$$|L^s f| < M_s, \sum |L^s f| < \sum M_s < 2M_1. \quad \blacksquare$$

В. Малые знаменатели

Пусть $f(q)$ — функция на торе \mathbb{T}^n , $q = (q_1, \dots, q_n) \pmod{2\pi}$:

$$f(q) = \sum_{k \neq 0} f_k e^{i(k,q)},$$

где $(k, q) = k_1 q_1 + \dots + k_n q_n$, и пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — вектор с иррациональными компонентами такой, что $(k, \omega) \neq k_0$ для неравных нулю целых k, k_0 . Рассмотрим уравнение с неизвестной 2π -периодической функцией $g(q)$:

$$g(q + \omega) - g(q) = f(q). \quad (\text{П34.5})$$

Это уравнение допускает «формальное» решение

$$g(q) = \sum_{k \neq 0} g_k e^{i(k,q)}, \quad g_k = \frac{f_k}{e^{i(k,\omega)} - 1}. \quad (\text{П34.6})$$

Сходимость ряда (П34.6) утверждает следующая лемма.

Лемма П34.7. *Предположим, что при $|\operatorname{Im} q| < \rho$, $f(q)$ является аналитической функцией и что $|f(q)| < M$. Тогда при почти любом (в смысле Лебега) векторе ω функция $g(q)$, определяемая рядом (П34.6), — аналитическая, и при $|\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$ выполнено неравенство $|g(q)| < M\delta^{-\nu}$, $\nu = 2n + 4$, если $0 < \delta < \delta_0$. Здесь $\delta_0 > 0$ — абсолютная (не зависящая от n) постоянная.*

Доказательство этой леммы⁴ основано на использовании элементарных результатов теории диофантовых аппроксимаций. Действительно, результат леммы ПЗ4.7 с $\delta_0 = \delta_0(n, k)$ верен для всех ω , принадлежащих введенному выше множеству $\Omega_0(K)$, для которого $K > 0$. Обозначим через $\Omega(K)$ множество точек ω_0 таких, что

$$|e^{i(k, \omega)} - 1| > KN^{-\nu} \quad (\text{ПЗ4.8})$$

при всех

$$\omega, |\omega - \omega_0| < KN^{-\nu}$$

$\nu = n + 2$ и всех k , для которых $|k| \leq N$, каким бы ни было число N . Обозначим через $\Omega_0(K)$ множество точек ω , удовлетворяющих неравенству

$$|e^{i(k, \omega)} - 1| > K|k|^{-\nu}, \quad \nu = n + 2. \quad (\text{ПЗ4.9})$$

Ясно, что $\Omega(K) \subset \Omega_0(K)$.

Лемма ПЗ4.10. *Почти каждая (в смысле Лебега) точка ω_0 принадлежит множеству $\Omega(K)$ с соответствующим $K > 0$ (и, следовательно, принадлежит $\Omega_0(K)$).*

Доказательство.

Пусть Ω — конечная область в пространстве $\{\omega_0\}$ и

$$\Gamma_{k,d} = \{\omega_0 : |e^{i(k, \omega)} - 1| < \delta \text{ при некотором } \omega, |\omega - \omega_0| < \delta\}.$$

Ясно, что тогда мера $\text{mes}(\Gamma_{k,d} \cap \Omega) \leq Cd$, где постоянная C зависит только от Ω . Вне области $\bigcup_k \Gamma_{k,K|k|^{-\nu}}$ неравенство (ПЗ4.8) выполняется. Но

$$\text{mes}\left(\bigcup_k \Gamma_{k,K|k|^{-\nu}}\right) \cap \Omega \leq \sum_k CK|k|^{-\nu} \leq C'K,$$

так как

$$\sum_k |k|^{-\nu} < \infty \quad \text{для } \nu = n + 2.$$

Следовательно,

$$\text{mes}_{k \rightarrow 0} \bigcap \overline{\Omega(K)} = 0. \quad \blacksquare$$

Пусть теперь $f(q) = \sum_k f_k e^{i(k, q)}$ — аналитическая функция.

⁴Метод оценки малых знаменателей для аналогичных задач основательно разработан К. Л. Зигелем [2], [3].

Лемма ПЗ4.11.

- А) Если при $|\operatorname{Im} q| < \rho$ имеем $|f(q)| < M$, то $|f_k| < Me^{-\rho|k|}$.
- В) Если $|f_k(q)| < Me^{-\rho|k|}$, то при $|\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$, $0 < \delta < \delta_0$ выполняется $|f| < M\delta^{-\nu}$.
- С) Если при $|\operatorname{Im} q| < \rho$ имеем $|f(q)| < M$, то при $|\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$, $0 < \delta < \delta_0$ выполняется $|R_N f| < Me^{-\delta N} \cdot \delta^{-\nu}$. Здесь δ_0 и ν — абсолютные (зависящие только от n) константы, а R_N — остаток ряда Фурье

$$R_N f = \sum_{|k| > N} f_k r^{i(k,q)}.$$

Чтобы доказать п. А, достаточно сместить на $\pm i\rho$ контур интегрирования в формуле

$$f_k = \int f e^{-i(k,q)} dq.$$

Доказательства пунктов В и С следуют из суммирования геометрических прогрессий.

Лемма ПЗ4.7 следует непосредственно из лемм (ПЗ4.10) и (ПЗ4.11): необходимо выбрать $\omega_0 \in \Omega_0(K)$, воспользоваться соотношениями (ПЗ4.6), (ПЗ4.9), пунктами А и В из леммы ПЗ4.11 и элементарным неравенством

$$e^{-|k|\delta} \cdot |k|^{-\nu} < C(\nu)\delta^{-\nu}.$$

Затем достаточно выбрать $\delta_0 < \frac{K}{C(\nu)}$, что бы получить лемму ПЗ4.7.

Более подробно доказательство изложено в работе [1] В. И. Арнольда.

Замечание ПЗ4.12. Предположим, что $\omega_0 \in \Omega(K)$ и что $f_k = 0$ при $|k| > N$. Тогда ряд (ПЗ4.6) становится конечной суммой зависящей от ω . Кроме того, утверждение леммы ПЗ4.7 с тем же $\delta_0 = \delta(K, n)$ остается в силе при всех ω' таких, что $|\omega - \omega'| < KN^{-\nu}$. Если $\omega \in \Omega(K)$, то, по определению (ПЗ4.8), все ω' , $|\omega - \omega'| < KN^{-\nu}$, удовлетворяют неравенству (ПЗ4.9) при $|k| \leq N$; но доказательство леммы ПЗ4.7 использует неравенство (ПЗ4.9) лишь при $|k| \leq N$, если $f_k = 0$ при $|k| > N$.

С. набросок доказательства

Напомним обозначения теоремы (21.11) (§ 21, гл. 4). Пусть $\Omega = B^n \times \mathbb{T}^n$ есть область канонического пространства, точку x из Ω обозначим через $x = (p, q)$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ — точка евклидова

шара B^n , $q = (q_1, \dots, q_n) \pmod{2\pi}$ — точка на торе \mathbb{T}^n . Отображение $\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega(p)$ — «невозмущенное». Отображение \mathbf{B} с производящей функцией (см. приложение 32) $Pq + B(P, q)$ представляет собой глобально каноническое, аналитическое, слабо возмущенное отображение. Требуется найти инвариантные торы отображения \mathbf{BA} .

Следующая идея заимствована из теории возмущений (приложение 30) и заключается в том, чтобы попытаться «уничтожить» возмущение \mathbf{B} путем замены переменных (с помощью подходящего канонического отображения \mathbf{C}) с производящей функцией $Pq + C(p, q)$. Отображение \mathbf{BA} в координатах $\mathbf{C}x$ записывается в виде

$$\mathbf{C}(\mathbf{BA})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}'\mathbf{A},$$

где $\mathbf{B}' = \mathbf{CBA}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Таким образом, из следствия (П33.20) приложения 32 мы заключаем, что производящая функция отображения \mathbf{B}' имеет вид

$$Pq + B'(p, q) \quad \text{где} \quad B'(x) = C(x) + B(x) - C(\mathbf{A}^{-1}x) + O(B^2 + C^2)$$

что позволяет «уничтожить» отображение \mathbf{B} при условии C

$$C(x) + B(x) - C(\mathbf{A}^{-1}x) = 0.$$

Заметим теперь, что это уравнение при любом фиксированном p по форме в точности совпадает с уравнением (П34.5) (с $\omega = \omega(p)$, $f = -B$, $g = C$). Достаточно получить теперь в области $\Omega' \subset \Omega$ (но «слишком малой») неравенства

$$|B'|_{\Omega'} < |B|_{\Omega}^2 \delta^{-\nu}, \quad |C|_{\Omega'} < |B|_{\Omega} \delta^{-\nu}, \quad (\text{П34.13})$$

чтобы построить последовательные приближения инвариантных торов во все более малых областях. Сходимость при этом доказывается как в лемме П34.3. Неравенства (П34.13) доказываются с использованием леммы П34.7; они имеют место «далеко от резонансов», т.е. при $\omega(p) \in \Omega(K)$.

Чтобы реализовать намеченную в п. Е–Н в общих чертах программу, нам придется прибегнуть к еще нескольким небольшим «трюкам». Прежде всего, оказывается, что при «уничтожении» отображения \mathbf{B} удобно ограничиться уничтожением конечного числа членов ряда Фурье: остаток ряда $R_N B$ может рассматриваться как часть «членов высшего порядка» $O(B^2)$, $O(C^2)$. Таким образом, в каждом приближении

мы имеем в (ПЗ4.6) лишь конечное число резонансов и малых знаменателей⁵. С другой стороны, чтобы воспользоваться леммой ПЗ4.7, необходимо прежде всего исключить постоянный член B_0 (среднее значение от B по q), а затем добавить «невозмущенное» отображение A (вариацию частот см. ниже раздел E).

Наконец, заметим, что как показал Мозер [4], метод Колмогорова, модифицированный подходящим выбором числа членов, оставляемых в каждом приближении, остается сходящимся и при неаналитических отображениях. Действительно, Мозер [1] доказал теорему 21.11 для случая $n = 1$ (отображения плоскости) в предположении, что отображение B дифференцируемо 333 раза. Недавно Мозер [6] дал доказательство, которое требует ограниченное число производных.

Д. Канонические отображения, близкие к тождественному

В этом разделе мы воспользуемся следующими обозначениями.

Пусть $F(\delta, M)$ — любая функция, α — некоторое утверждение, в которое входят δ , M и F . Будем говорить, что « α истинно и $|F| \lesssim M$ », если существуют абсолютные константы⁶ $\nu_1, \nu_2 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\alpha \text{ истинно, и } |F| \leq M\delta^{-\nu_2} \quad (\text{ПЗ4.14})$$

лишь при условии, что $0 < \delta < \delta_0$, $M < \delta^{\nu_1}$.

Лемма ПЗ4.15. Пусть G — некоторая комплексная область и $f(z)$ — функция, аналитическая в G , которая удовлетворяет неравенству $|f(z)| < M$. Тогда при $z \in G - \delta$ производная k -го порядка аналитична и

$$\left| \frac{d^k f}{dz^k} \right| \lesssim M.$$

Доказательство.

Из формулы Коши

$$\left| \frac{d^k f}{dz^k} \right| = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}, \quad \gamma: |\xi - z| = \delta,$$

⁵Этот метод изложен еще в книге Боголюбова и Митропольского [1]. Частоты $\omega(p)$ в малых знаменателях можно было бы заменить на постоянные $\omega \in \Omega_K$.

⁶Т. е. они зависят от размерности областей, упоминаемых в утверждении α , числа производных и т. д., но не зависят ни от функций, ни от областей.

следует, что

$$\left| \frac{d^k f}{dz^k} \right| \leq k! M \delta^{-k},$$

и мы получаем (П34.14) с

$$\nu_2 = k + 1, \quad \delta_0 = \frac{1}{k!}, \quad \nu_1 = 0. \quad \blacksquare$$

Здесь

$$F(\delta, M) = \sup_{f, G, x \in G - \delta} \left| \frac{d^k f}{dz^k} \right|,$$

где \sup берется по всем ограниченным областям G , всем аналитическим функциям f в G ($|f| < M$) и всем $z \in G - \delta$.

Заметим, что в наших обозначениях $CM\delta^{-\nu} \lesssim M$ и что из неравенств $F \lesssim M$ и $G \lesssim M$ следуют неравенства $F + G \lesssim M$, $FG \lesssim M^2$.

Таким образом, если $F(\delta, M) \lesssim M$, то $F(C\delta, M) \lesssim M$ (здесь C и ν — абсолютные положительные постоянные).

Уточним теперь соотношения между глобальными каноническими отображениями \mathbf{S} , близкими к тождественному отображению, и их производящими функциями $Pq + S(P, q)$. Пусть

$$\Omega = B^n \times \mathbb{T}^n, \quad B^n = \{p: |p| < \gamma, p \in \mathbb{R}^n\}, \\ \mathbb{T}^n = \{q \pmod{2\pi}, q = (q_1, \dots, q_n)\},$$

и $[\Omega]$ — комплексная область в Ω , задаваемая неравенствами $|p| < \gamma$, $|\operatorname{Im} q| < \rho$, где $0 < \gamma < 1$, $0 < \rho < 1$.

Лемма П34.16. Пусть $S(P, q)$ — функция, аналитическая в $[\Omega]$, удовлетворяющая неравенству $|S(P, q)| < M$. Тогда формулы

$$p = P + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial S}{\partial P}, \quad S = S(P, q) \quad (\text{П34.17})$$

определяют глобальный канонический диффеоморфизм \mathbf{S} :

$$P = P(p, q), \quad Q = Q(p, q); \quad \mathbf{S}: [\Omega] - 2\delta \rightarrow [\Omega] - \delta$$

и в $[\Omega] - 2\delta$ справедливы неравенства

$$\left| (P - p) - \frac{\partial S(p, q)}{\partial p} \right| \lesssim M^2,$$

$$\left| (Q - q) + \frac{\partial S(p, q)}{\partial q} \right| \lesssim M^2.$$

Лемма П34.18. Пусть $P = P(p, q)$, $Q = Q(p, q)$ — глобальное каноническое отображение, аналитическое в $[\Omega]$, где оно удовлетворяет неравенствам $|P - p| < M$, $|Q - q| < M$. Тогда в $\Omega - \delta$ это отображение определяется формулами (П34.17), где S — аналитическая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$|S| \lesssim M, \quad |S(p, q) - \int^{(p, q)} (Q - q) dp - (P - p) dq| \lesssim M^2.$$

Лемма П34.19. Если $S(p, q)$ и $T(p, q)$ — две функции, аналитические в $[\Omega]$, где они удовлетворяют неравенствам $|S| < M$, $|T| < M$, то произведение соответствующих канонических отображений $\mathbf{R} = \mathbf{S}\mathbf{T}$ есть глобальный канонический диффеоморфизм области $[\Omega] - 3\delta$ в область $[\Omega] - 2\delta$, определяемый производящей функцией R , аналитической в $[\Omega] - \delta$, где она удовлетворяет неравенству $|R - (S + T)| \lesssim M^2$.

Пусть теперь $\mathbf{A}: [\Omega] \rightarrow [\Omega']$ — аналитический глобально канонический диффеоморфизм (область $[\Omega']$ задается неравенствами $|p| < \gamma'$, $|\operatorname{Im} q| < \rho'$, $0 < \gamma'$, $\rho' < 1$). Пусть $a^{-1}|y - x| < |A(y) - A(x)| < a|y - x|$, S — функция, аналитическая в $[\Omega]$, \mathbf{S} — диффеоморфизм, который соответствует ей по лемме (П34.16).

Лемма П34.20. Формула $\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}$ задает глобальный канонический диффеоморфизм области $[\Omega'] - 3\delta$ в область $[\Omega'] - 2\delta$, задаваемый производящей функцией T , аналитической в $[\Omega'] - \delta$, где она удовлетворяет неравенству⁷

$$|T(\mathbf{A}x) - S(x)| \lesssim M^2.$$

Доказательства предшествующих лемм воспроизводят доказательства из приложения 32, используя лемму (П34.15) для вычисления членов порядка $O(\varepsilon^2)$. Подробности см. в работах Арнольда [4], [5].

⁷В этой лемме постоянная δ_0 , которая входит в определение неравенства \lesssim , зависит также от a .

Е. Вариация частоты

Приступим теперь к построению инвариантных торов отображения **ВА** (см. теорему 21.11, гл. 4).

Чтобы понять выкладки, приводимые в разделах Е–Н, полезно иметь в виду, что положительные числа β, γ, δ, M и ρ, K, θ связаны неравенствами

$$0 < M \ll \delta \ll \gamma \ll \beta \ll \rho, K, \theta^{-1} < 1,$$

и что ν_i, c_i — абсолютные постоянные, $\nu > 1 > c$.

Построение вариации частоты П34.21

Пусть **A** и **B** — два глобальных канонических отображения

$$\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega(q),$$

и **B** с производящей функцией $Pq + B(P, q)$. Положим

$$\begin{aligned} \bar{B}(p) &= (2\pi)^{-n} \int \dots \int B(p, q) dq_1 \dots dq_n, \\ \omega_1(p) &= \omega(p) + \frac{\partial \bar{B}}{\partial p} \end{aligned}$$

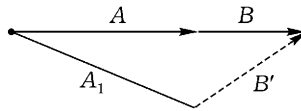


Рис. П34.22

и рассмотрим канонические отображения (см. рис. П34.22):

$$\mathbf{A}_1: p, q \rightarrow p, q + \omega_1(p), \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{A}_1.$$

Лемма о вариации частот П34.23. *Предположим, что в области $|p - p^*| < \gamma$, $|\operatorname{Im} q| < \rho$ выполняются неравенства $\theta^{-1}|dp| < |d\omega| < \theta|dp|$ и $|B(p, q)| < M$.*

Тогда для глобального канонического отображения \mathbf{B}' с производящей функцией $Pq + B'(P, q)$ такой, что при $|p - p^*| < \gamma - \delta$, $|\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$ справедливы неравенства⁸

$$|\omega_1(p) - \omega(p)| \lesssim M, \quad |B'| \lesssim M, \quad |\overline{B}'| \lesssim M^2,$$

где

$$\overline{B}' = (2\pi)^{-n} \int \dots \int B'(p, q) dq_1 \dots dq_n.$$

Доказательство.

Достаточно применить лемму (П34.19) к отображениям \mathbf{B} и $\mathbf{A}\mathbf{A}_1^{-1}$: $p, q \rightarrow p, q - \frac{\partial \overline{B}}{\partial p}$, чтобы получить неравенство $|B' - (B - \overline{B})| \lesssim M^2$. ■

Г. Главная лемма

Воспользуемся теперь оценками для малых знаменателей (раздел В), чтобы получить неравенства типа $|B_1| \lesssim M^2$ после подходящей замены переменных \mathbf{C} .

Главная конструкция П34.24

Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — глобальные канонические отображения:

$$\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega_1(p),$$

отображение \mathbf{B} определяется производящей функцией $Pq + B(P, q)$, где

$$B(P, q) = \overline{B}(P) + \sum_{k \neq 0} B_k(P) e^{i(k, q)},$$

Пусть N — положительное целое число. Положим

$$C(P, q) = \sum_{0 < |k| \leq N} C_k(P) e^{i(k, q)}, \tag{П34.25}$$

$$C_k(P) = \frac{B_k(P)}{e^{-i(k, \omega_1(P))} - 1}.$$

⁸Постоянная δ_0 в \lesssim зависит в конечном счете от θ .

Обозначим через \mathbf{C} глобальное каноническое отображение, определяемое производящей функцией $Pq + C(P, q)$, и рассмотрим глобальное каноническое отображение $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Ясно, что

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{C}^{-1}$$

(см. рис. ПЗ4.26). Заметим, что $\mathbf{A} \gg \sim \mathbf{B}\mathbf{C} \gg \mathbf{B}_1$.

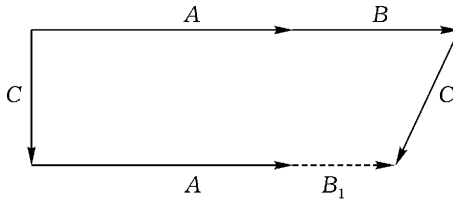


Рис. ПЗ4.26

Главная лемма ПЗ4.27

Лемма 1. *Предположим, что в области $|p - p^*| < \gamma$, $|\operatorname{Im} q| < \rho$ функции $\omega_1(p)$, $B(p, q)$ — аналитические и удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} \theta^{-1}|dp| < |d\omega_1(p)| < \theta|dp|, \\ |B(p, q)| < M, \quad |\overline{B}(p)| < \overline{M}. \end{aligned}$$

Предположим также, что $\omega^* = \omega_1(p^*)$ принадлежит множеству $\Omega(K)$ из леммы (ПЗ4.10). Тогда

1) функция $C(P, q)$ аналитична при $|P - p^*| < \gamma$, $|\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$ и удовлетворяет в этой области неравенству

$$|C(P, q)| < M\delta^{-\nu_1};$$

2) производящая функция $Pq + B_1(P, q)$ аналитического отображения \mathbf{B}_1 удовлетворяет в области $|P - p^*| < \gamma - \delta$, $|\operatorname{Im} q| < \rho - \beta$ неравенству

$$|B_1(P, q)| < M^2\delta^{-\nu_1} + \overline{M} + Me^{-\beta N}\beta^{-\nu_1} \quad (\text{ПЗ4.28})$$

при условии, что (в случае 1 и 2)

$$\overline{M} < M < \delta^{\nu_2}; \quad \delta < C_1\gamma, \quad \gamma < C_2\beta, \quad \beta < C_3, \quad \gamma < C_4N^{-(n+2)},$$

где $\nu_1, \nu_2 > 1 > C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ — абсолютные постоянные⁹.

Доказательство.

Из неравенств $|d\omega| < \theta|dp|$ и $\gamma < C_4 N^{-(n+2)}$, где $C_4 < \frac{K}{\theta}$, следует, что все $\omega_1(p)$ из области $|p - p^*| < \gamma$ удовлетворяют неравенству $|\omega - \omega^*| < KN^{-(n+2)}$. Следовательно, в силу заключительного примечания из раздела *B* утверждение леммы ПЗ4.7 имеет место для тригонометрической суммы *C*. Пусть $\delta_0 = \delta_0(n, K)$ — постоянная, упомянутая в лемме ПЗ4.7. Тогда, если $C_3 < \delta_0$, то $\delta < \delta_0$; таким образом, лемма ПЗ4.7 утверждает, что $|C| < M\delta^{-\nu_1}$ при $|\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$. Более точно, это составляет п. 1 нашей леммы.

Заметим далее, что $|\operatorname{Im} \omega(p)| < \theta\gamma < \beta$, если постоянная C_2 (в неравенстве $\gamma < C_2\beta$) достаточно мала. При этих условиях отображения **A** и **A**⁻¹ являются диффеоморфизмами:

$$\{p, q \mid |p - p^*| < \gamma', |\operatorname{Im} q| < \rho'\} \rightarrow \{p, q \mid |p - p^*| < \gamma'', |\operatorname{Im} q| < \rho''\}$$

при $\rho'' < \rho' + \theta\gamma < \rho$. Это позволяет применить лемму ПЗ4.20 к **AC**⁻¹**A**⁻¹. Кроме того, если ν_1 и ν_2 (в неравенстве $M < \delta^{\nu_2}$) достаточно велики, а постоянная C_3 (в неравенстве $\delta < \beta < C_3$) достаточно мала, то соотношения \lesssim из лемм ПЗ4.16, 18, 19, 20 принимают вид неравенства $< M\delta^{-\nu_1}$.

Из лемм ПЗ4.16, 18, 19, 20 следует, что в условиях главной леммы с подходящим образом выбранными постоянными C, ν отображение **B**₁ = **CBAC**⁻¹**A**⁻¹ задается производящей функцией $Pq + B_1(p, q)$, где $B_1(p, q)$ — аналитическая функция при $|P - p^*| < \gamma - \delta, |\operatorname{Im} q| < \rho - \beta$ и что в этой области

$$|B_1(x) - (B(x) + C(x) - C(\mathbf{A}^{-1}x))| < M^2\delta^{-\nu_1}. \quad (\text{ПЗ4.30})$$

Но по формуле (ПЗ4.25) справедливо соотношение

$$B(x) + C(x) - C(\mathbf{A}^{-1}x) = \overline{B} + R_N B, \quad (\text{ПЗ4.31})$$

а по утверждению *C* леммы ПЗ4.11 при

$$|\operatorname{Im} q| < \rho - \beta < \rho - \delta$$

⁹Т. е. постоянные, зависящие только от размерности n и постоянных K, Θ . Лемма утверждает, что существуют (достаточно большие) постоянные ν_1, ν_2 и (достаточно малые) постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что утверждения 1 и 2 леммы реализуются.

справедливо неравенство

$$|R_N B| < M e^{-\beta N} \beta^{-\nu_1}. \quad (\text{ПЗ4.32})$$

Так как $|\overline{B}| < \overline{M}$, из формул (ПЗ4.30, 31, 32) следует (ПЗ4.28). ■

Г. Индуктивная лемма

Построение инвариантных торov опирается на итерационную процедуру, каждый шаг которой основан на следующей конструкции.

Индуктивное построение ПЗ4.33

Пусть \mathbf{A} и \mathbf{B} — два канонических преобразования

$$\mathbf{A}: p, q \rightarrow p, q + \omega(p).$$

Преобразование \mathbf{B} задается производящей функцией $Pq + B(p, q)$, N — положительное целое число. Выполнив вариацию частоты (раздел E), получаем:

$$\mathbf{A}_1: p, q \rightarrow p, q + \omega_1(p).$$

и отображение \mathbf{B}' , задаваемое производящей функцией $Pq + B'(p, q)$ такое, что $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{A}_1$.

Применим теперь основное построение раздела F к отображениям \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}' . Мы получим канонические отображения \mathbf{C} и $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B}'\mathbf{A}_1\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$; таким образом (см. рис. ПЗ4.34),

$$\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{C}^{-1}$$

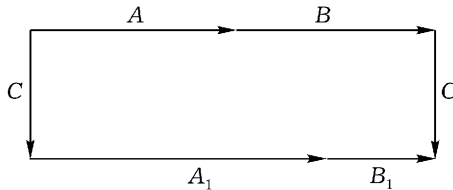


Рис. ПЗ4.34

Индуктивная лемма ПЗ4.35

Предположим, что в области $|p - p^*| < \gamma, |\operatorname{Im} q| < \rho$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \theta^{-1}|dp| < |d\omega| < \theta|dp|, \quad \theta < \theta_0, \\ |B(p, q)| < M, \quad \omega(p^*) = \omega^* \in \Omega(K). \end{aligned}$$

Определим p_1^* из соотношения $\omega_1(p_1^*) = \omega^*$. Пусть $Pq + B_1(p, q)$, $Pq + C(p, q)$ — производящие функции отображений \mathbf{B}_1 и \mathbf{C} . Тогда:

1) в области $|P - p^*| < \gamma, |\operatorname{Im} q| < \rho - \delta$ функция $C(p, q)$ аналитическая и $|C| < M\delta^{-\nu_1}$;

2) область $|P - p_1^*| < \gamma_1, |\operatorname{Im} q| < \rho_1 = \rho - \beta$ составляет часть области $|P - p^*| < \gamma, |\operatorname{Im} q| < \rho$. В самой малой из таких областей функция B_1 является аналитической и $|B_1| < M^2\delta^{-\nu_1} + Me^{-\beta N}\beta^{-\nu_1}$;

3) $\theta_1^{-1}|dp| < |d\omega_1| < \theta_1|dp|$, $|\theta_1 - \theta| < \delta$, $|\omega_1 - \omega| < \delta$ при условии, что $M < \delta^{\nu_1}$; $\delta < C_1\gamma$, $\gamma < C_2\beta$, $\beta < C_3$; $\gamma < C_4N^{-(n+2)}$, $\gamma_1 < C_5\gamma$, где постоянные $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 > 1 > C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 > 0$ — абсолютные постоянные, то есть зависят лишь от размерности n , постоянных θ_0 и K , но не зависят от B, ω, θ, M и т. д.

Доказательство.

Доказательство индуктивной леммы непосредственно следует из двух предыдущих лемм. Двумя новыми моментами являются следующие.

1) *Существование p_1^* .*

Существование p_1^* вместе с неравенством $|p_1^*| < C_5\gamma$ следует из неравенств

$$|d\omega_s| < \theta_0^{-1}|dp|, \quad |\omega_1 - \omega| < M\delta^{-\nu}, \quad \left| \frac{\omega_1}{p} - \frac{\omega}{p} \right| < M\delta^{-\nu}$$

(см. раздел E) и неравенства $M\delta^{-\nu} < C_6\gamma$ (которое получается из неравенства $M\delta^{-\nu} < \delta^{\nu_2-\nu} < C_6\gamma$ при достаточно большом ν_2).

Принимая во внимание, что $\gamma_1 < C_4\gamma$, заключаем, что область $|p - p_1^*| < \gamma_1$ содержится в области $|p - p^*| < \gamma - \delta$ (так как $\delta < C_1\gamma$).

2) *Оценка для функции B_1 .*

Из раздела E следует, что среднее функции B' удовлетворяет неравенству $|\overline{B'}| < M^2\delta^{-\nu} = \overline{M}$.

Подставляя \overline{M} в соотношение (ПЗ4.28) основной леммы, получаем:

$$M^2\delta^{-\nu_1} + \overline{M} < M^2\delta^{-\nu_4}. \quad \blacksquare$$

Н. Доказательство теоремы 21.11 (см. гл. 4)

Построение П34.36

Инвариантный тор $T(\omega^*)$ отображения $\mathbf{B}\mathbf{A}$, соответствующего частоте ω^* , мы строим с помощью метода, изложенного в предыдущем разделе, и зависящего от последовательности $0 < N_1 < N_2 < \dots < N_S < \dots$, $N_S \rightarrow \infty$. Эту последовательность мы уточним в дальнейшем.

После того, как последовательность N_S выбрана, построение производится следующим образом. Мы полагаем $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}$, $N_1 = N$ и используем индуктивное построение из предыдущего раздела Г. Эта конструкция определяет канонические отображения, которые мы обозначим $\mathbf{C}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$; имеем:

$$\mathbf{B}_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{C}_1(\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1)\mathbf{C}_1^{-1}.$$

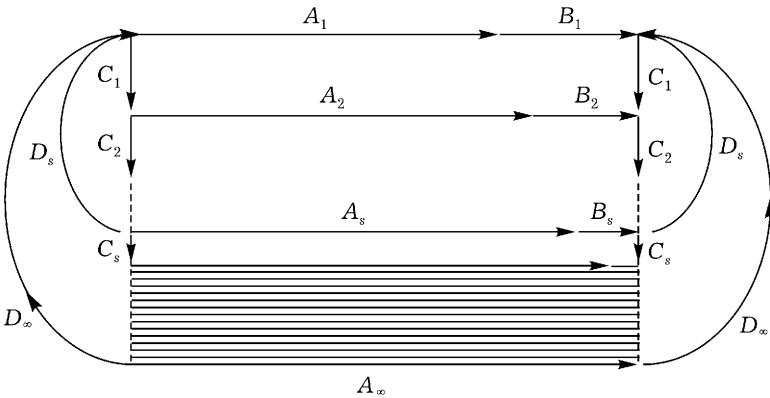


Рис. П34.37

Используя ту же конструкцию с $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$, $N_2 = N$, мы получаем $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\mathbf{C}_2$ и т.д. Если $\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s$ построены, конструкция, изложенная в разделе Г, с $\mathbf{A} = \mathbf{A}_s, \mathbf{B} = \mathbf{B}_s, N = N_s$ позволяет найти $\mathbf{C}_s, \mathbf{A}_{s+1}, \mathbf{B}_{s+1}$ (см. рис. П34.37):

$$\mathbf{B}_{s+1}\mathbf{A}_{s+1} = \mathbf{C}_s(\mathbf{B}_s\mathbf{A}_s)\mathbf{C}_s^{-1}.$$

Эта конструкция определяет также точки p_s^* , $\omega_s(p_s^*) = \omega^*$. Обозначим теперь через $T_s(\omega^*)$ тор $p = p_s^*$. На таком торе отображение \mathbf{A}_s

представляет собой трансляцию, определяемую частотой ω^* . Обозначим $p_\infty^* = \lim_{s \rightarrow \infty} p_s$, и пусть T_∞^* — тор $p = p_s^*$, а \mathbf{A}_∞ — отображение

$$\mathbf{A}_\infty : T_\infty^* \rightarrow T_\infty^*, \quad \mathbf{A}_\infty q = q + \omega^*.$$

Наконец, обозначим

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2^{-1} \dots \mathbf{C}_{s-1}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{D}_s.$$

Тор, инвариантный относительно \mathbf{BA} , задается соотношением

$$T(\omega^*) = \mathbf{D}T_\infty^*.$$

Докажем теперь, что рассматриваемые пределы существуют и что на $T(\omega^*)$ выполняется соотношение $\mathbf{DA}_\infty = \mathbf{BAD}$. ■

Сходимость П34.38

С учетом неравенства $\frac{d\omega}{dp} \neq 0$ можно предположить, что в $[\Omega]$ справедливы неравенства

$$\theta^{-1}|dp| < |d\omega(p)| < \theta|dp|.$$

Предположим, что ω^* принадлежит $\Omega(K)$. По лемме (П34.10) почти любая частота ω^* принадлежит $\Omega(K)$ при некотором $K > 0$. Положим $\theta_0 = 2\theta$ и определим последовательность постоянных с помощью соотношений

$$\delta_1 = \delta > 0, \quad \delta_2 = \delta_1^{3/2}, \quad \delta_3 = \delta_2^{3/2}, \dots, \delta_{s+1} = \delta_s^{3/2}, \dots$$

Положим

$$\gamma_s = \delta_s^{1/2}, \quad \beta_s = \gamma_s^{1/4(n+2)}, \quad N_s = \beta_s^{-2} = \gamma_s^{-1/2(n+2)}.$$

Тогда

$$\gamma_{s+1} = \gamma_s^{3/2}, \quad \beta_{s+1} = \beta_s^{3/2}, \quad N_{s+1} = N_s^{3/2}.$$

Чтобы определить все эти числа, достаточно выбрать δ . Обозначим через α положительную постоянную, достаточно большую для того, чтобы было выполнено

$$\alpha > \nu_2, \quad \alpha > 2\nu_4 + 1, \quad \alpha > \nu_1 + 2.$$

Если $\delta < C$ (где $0 < C < \frac{1}{10}$ — абсолютная постоянная, т. е. зависит только от n , K , θ_0 , α и постоянных ν_k , C_k , которые входят в индуктивную лемму), то, как нетрудно видеть,

1)

$$\sum \beta_s < \frac{1}{10}\rho; \quad (\text{ПЗ4.39})$$

2)

$$\sum \delta_s < \theta; \quad (\text{ПЗ4.40})$$

3) при всех $s = 1, 2, \dots$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \delta_s < C_1\gamma_s, \quad \gamma_s < C_2\beta_s, \quad \beta_s < C_3, \\ \gamma_s < C_4N_s^{-(n+2)}, \quad \gamma_{s+1} < C_5\gamma_1, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ4.41})$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — постоянные из индуктивной леммы, зависящие от K и θ , выбранных выше;

4)

$$e^{-\beta_s N_s} = e^{-\frac{1}{\beta_s}} < \delta_s^{\left(\frac{\alpha}{2} + \nu_1\right) + 1}. \quad (\text{ПЗ4.42})$$

Постоянная δ удовлетворяет неравенству $\theta < \delta < C$. Теперь числа N_s , от которых зависит наше построение, полностью определены.

Предположим теперь, что наше отображение $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}$ имеет производящую функцию $Pq + B_1(P, q)$, которая удовлетворяет в $|p - p_1^*| < \gamma_1$, $|\operatorname{Im} q| < \rho_1 = \frac{1}{2}\rho$ неравенству $|B_1| < M_1 = \delta_1^\alpha$. По лемме ПЗ4.18 это неравенство выполняется, если ε в условиях теоремы 21.11 (гл. 4) достаточно мало. Принимая во внимание неравенства (ПЗ4.41), нетрудно понять, что условия индуктивной леммы выполняются при $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ (так как $\alpha > \nu_2$). Следовательно, индуктивная лемма позволяет нам найти $\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, p_2^*$ и т. д.

Докажем теперь, что в области $|p - p_2^*| < \gamma_2$, $|\operatorname{Im} q| < \rho_2 = \rho_1 - \beta_1$ отображения $\mathbf{B}_2, \mathbf{A}_2$ снова удовлетворяют всем условиям индуктивной леммы.

Действительно, из (ПЗ4.39) следует, что $\rho_2 > 0$; из (ПЗ4.40) и третьей части индуктивной леммы мы заключаем, что \mathbf{A}_2 удовлетворяет неравенствам

$$\theta_2^{-1}|dp| < |d\omega_2(p)| < \theta_2|dp| \quad \text{с} \quad \theta_2 < \theta_0.$$

Наконец, в силу второй части индуктивной леммы, из неравенств (ПЗ4.42) и $\alpha > 2\nu_4 + 1$, $\alpha > \nu_1 + 2$ получаем

$$|B_2| < M_1^2 \delta_1^{-\gamma_4} + M_1 e^{-\beta_1 N_1} \cdot \delta^{-\nu_1} < \delta_1^{2\alpha - \nu_4} + \delta_1^{3/2(\alpha+1)} < \delta_1^{3/2\alpha};$$

иначе говоря,

$$|B_2| < M_2 = \delta_2^\alpha.$$

Таким образом, все условия индуктивной теоремы выполнены и для \mathbf{B}_2 и \mathbf{A}_2 .

Повторяя те же рассуждения, получаем $|B_s| < M_s = \delta_s^\alpha$ в области $|p - p_s^*| < \gamma_s$, $|\operatorname{Im} q| < \rho_s$.

Пусть G_s — область $|p - p_s^*| < \gamma_s$, $|\operatorname{Im} q| < \rho_s$. Тогда диффеоморфизмы \mathbf{C}_s^{-1} отображают G_{s+1} в G_s , и в смысле C^1 -нормы в G_{s+1} справедливо неравенство

$$\|\mathbf{C}_s^{-1} - \mathbf{E}\|_{C^1} < \delta_s, \quad (\text{ПЗ4.43})$$

где \mathbf{E} — тождественное отображение.

Точка p_∞^* есть пересечение шаров $|p - p_s^*| < \gamma_s$, $s \rightarrow \infty$. Из оценки (ПЗ4.43) немедленно следует сходимость отображений \mathbf{D}_s , $s \rightarrow \infty$, на торе

$$T_\infty^* = \bigcap_{s \geq 1} G_s.$$

Из неравенств $|B_s| < \delta_s^\alpha$ следует, что на торе T_∞^* выполняется

$$|\mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{D}_s - \mathbf{A}_s| = |\mathbf{B}_s \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_s| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

Наконец, из $|\omega s + 1 - \omega_s| < \delta_s$ следует сходимость на T_∞^* отображений \mathbf{A}_s :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_\infty: q \rightarrow q + \omega^*.$$

Следовательно, на T_∞^* выполняется

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{B} \mathbf{A}) \mathbf{D} = \mathbf{A}_\infty. \quad \blacksquare$$

Приложение 35

Конструкция Смейла У-диффеоморфизмов

(См. § 12.3 гл. 3)

Смейл [3] доказал, что не существует неторических У-диффеоморфизмов. Приведем один пример, иллюстрирующий его конструкцию.

Пространство M .

Пусть G — нильпотентная группа Ли матриц размерности 6×6 :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x & y & & & \\ & 1 & z & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & X & Y \\ & 0 & & & 1 & Z \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $x, y, z, X, Y, Z \in \mathbb{R}$. Группа G диффеоморфна \mathbb{R}^6 .

Обозначим через $Q(\sqrt{3}) = \{p + q\sqrt{3} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ поле чисел, приближающее $\sqrt{3}$ рациональными числами, и через $x = p + q\sqrt{3} \rightarrow \bar{x} = p = q\sqrt{3}$ нетривиальный автоморфизм Гауа. Рассмотрим подгруппу Γ группы G , элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x, y, z &\in Q(\sqrt{3}), \\ X = \bar{x}, \quad Y = \bar{y}, \quad Z = \bar{z}. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что группа Γ дискретна и правый смежный класс $M = \{g\Gamma\} = G/\Gamma$ компактен.

Очевидно, что первая гомотопическая группа M изоморфна Γ и, следовательно, является неабелевой нильпотентной группой. Следовательно, пространство M неторическое.

Диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$.

Отождествим элементы $g \in G$ с (x, y, z, Z, Y, Z) . Определим отображение $\tilde{\varphi}: G \rightarrow G$

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, X, Y, Z) = (\lambda x, \mu y, \nu z, \bar{\lambda} X, \bar{\mu} Y, \bar{\nu} Z),$$

где

$$\lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \nu = (2 - \sqrt{3})^2, \quad \mu = \lambda\nu = 2 - \sqrt{3}.$$

$\tilde{\varphi}$ является автоморфизмом G , поскольку $\mu = \lambda\nu$. Следовательно, $\tilde{\varphi}\Gamma = \Gamma$ и $\tilde{\varphi}$ определяет диффеоморфизм φ пространства M :

$$\varphi: g\Gamma \rightarrow \tilde{\varphi}(g)\Gamma.$$

(M, φ) является У-диффеоморфизмом.

Элемент алгебры Ли TG_e группы G имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & & & \\ & 0 & c & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & A & B \\ & 0 & & & 0 & C \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Метрика

$$ds^2 = da^2 + db^2 + dc^2 + dA^2 + dB^2 + dC^2$$

на TG_e определяет правоинвариантную метрику на G и, следовательно, риманову метрику на $M = G/\Gamma$. Алгебра Ли TG_e разбивается в сумму $X + Y$, где элементы X (соответственно, Y) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & & & \\ & 0 & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & B \\ & 0 & & & 0 & C \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{соответственно}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & & & \\ & 0 & c & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & A & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

При правых трансляциях происходит расщепление касательного пространства TG_g в каждой точке $g \in G$:

$$TG_g = \tilde{X}_g + \tilde{Y}_g.$$

Следовательно, касательное пространство TM_m в точке $m \in M$ также расщепляется:

$$TM_m = X_m + Y_m.$$

Нетрудно заметить, что линейное касательное отображение $d\varphi$ является растягивающим на X_m и сжимающим на Y_m .

Список литературы

Л. М. Абрамов

- [1] *Относительно замечаний Гениса*, РЖ мат., 1963, **8**, с. 439.
- [2] *Метрические автоморфизмы с квазидискретным спектром*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 1962, **26**, № 4, с. 513–531.

R. L. Adler, T. V. Rivlin

- [1] *Ergodic and Mixing Properties of Chebyshev Polynomials*, Proc. Amer. Soc., 1964, **15**, № 5, pp. 794–796.

А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин

- [1] *Грубые системы*, Докл. АН СССР, 1937, **14**, с. 247–250.

Д. В. Аносов

- [1] *Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Докл. АН СССР, 1962, **145**, с. 707–709.
- [2] *Эргодические свойства геодезических потоков на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Докл. АН СССР, 1963, **151**, с. 1250–1253.
- [3] *Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими решениями*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 1960, **24**, с. 721–742.

Н. Anzai

- [1] *Ergodic Skew Product Transformations on the Torus*, Osaka Math. J., 1951, pp. 83–99.

В. И. Арнольд

- [1] *Sur la géométrie des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications en hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1966, **16**, № 1, pp. 319–361.

- [2] *Замечания о числах вращения*, Сиб. мат. журнал, 1961, **2**, № 6, с. 807–813.
- [3] *Несколько замечаний о потоках линейных элементов и реперов*, Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 2, с. 255–257.
- [4] *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, Успехи мат. наук, 1963, **18**, № 6, с. 91–196.
- [5] *Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона*, Успехи мат. наук, 1963, **18**, № 5, с. 13–40.

В. И. Арнольд, Я. Г. Синай

- [6] *О малых возмущениях автоморфизмов тора*, Докл. АН СССР, 1962, **144**, № 4, с. 695–698.

В. И. Арнольд

- [7] *Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае*, Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 2, с. 255–257.
- [8] *О рождении условно периодического движения из семейства периодических движений*, Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 1, с. 13–15.
- [9] *О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона*, Докл. АН СССР, 1962, **142**, № 3, с. 758–761.
- [10] *О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем*, Докл. АН СССР, 1962, **145**, № 3, с. 487–490.
- [11] *Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя*, Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, **25**, № 1, с. 21–86.
- [12] *Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы*, Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 1, с. 9–12.
- [13] *О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы*, Докл. АН СССР, 1964, **156**, № 1, с. 9–12.
- [14] *Устойчивость и неустойчивость в классической механике*. В кн.: Вторая летняя мат. школа, ч. 2. — Киев: Наукова думка, 1965, с. 85–119.

M. Artin, B. Mazur

- [1] *On Periodic Points*, Ann. Math., 1965, **81**, № 1, pp. 82–99.

L. Auslander, L. Green, F. Hahn

- [1] *Flows on Homogeneous Spaces*, Ann. Math. Studies, 1963, **53**.

A. Avez

- [1] *Quelques inégalités de géométrie différentielle globale déduites de la théorie ergodique*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, **261**, pp. 2274–2277.
- [2] *Spectre discret des systèmes ergodiques classiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1967, **264**, pp. 49–52.

Д. Д. Биркгоф

- [1] *Динамические системы*, М.-Л.: ОГИЗ, 1941.

J. R. Blum, D. L. Hanson

- [1] *On the Isomorphism Problem for Bernoulli Schemes*, Bull. Am. Math. Soc., 1963, **69**, № 2, pp. 221–223.

N. N. Bogolubov, Y. A. Mitropolski

- [1] *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

Н. Н. Боголюбов

- [2] Труды летней матем. школы в Каневе (1963). Киев: Наукова думка, 1964.

P. Bohl

- [1] *Über ein der Theorie der Säkularen Störungen vorkommendes Problem*, J. Reine u. Angew. Math, 1909, **135**, pp. 189–283.

S. S. Cairns

- [1] *On the Triangulation of Regular Loci*, Ann. Math., 1934, **35**, № 2, pp. 579–587.

F. P. Callahan

- [1] *Density and Uniform Density*, Proc. Am. Math. Soc., 1964, **15**, № 5, pp. 841–843.

H. Cartan

- [1] *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes*. J. Math. pures appl., 1940, **19**, pp. 1–26.

R. V. Chacon

- [1] *Change of Velocity in Flows*, J. Math. Mech., 1966, **16**, № 5.

K. Coddington, N. Levinson

- [1] *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

H. F. De Baggis

- [1] *Dynamical Systems with Stable Structure. Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations*. Vol. 2. Ann. Math. Studies, 1952, **29**, pp. 37–59.

A. Denjoy

- [1] *Sur des courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore*, J. de Math., 1932, **9**, pp. 333–375.

L. Euler

- [1] *Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum*, 1765.

И. М. Гельфанд, И. И. Шапиро-Пятецкий

- [1] *Теорема Пуанкаре*, Докл. АН СССР, 1952, **127**, № 3, с. 490–493.

И. М. Гельфанд, С. В. Фомин

- [2] *Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны*, Успехи мат. наук, 1952, **47**, № 1, с. 118–137.

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Х. М. Зуева, М. С. Михайлова, А. И. Морозов

- [3] *Один пример тороидального магнитного поля, не имеющего магнитной поверхности*, Докл. АН СССР, 1962, **143**, № 1, с. 81–83.

И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский

- [4] *О структуре областей неустойчивости линейной канонической системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*, Успехи мат. наук, 1955, **10**, № 1(63), с. 3–40.

А. Л. Генис

- [1] *Метрические свойства эндоморфизмов n -мерного тора*, Докл. АН СССР, 1961, **138**, с. 991–993.

Б. М. Гуревич

- [1] *Энтропия орициклических потоков*, Докл. АН СССР, 1961, **136**, № 4, с. 768–770.

A. Grant

- [1] *Surfaces of Negative Curvature and Permanent Regional Transitivity*. Duke Math. J., 1939, № 5, pp. 207–229.

И. В. Гюрсанов

- [1] *О спектре динамических систем, который возникает из стационарного гауссового процесса*, Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, с. 851–853.

W. Gysin

- [1] *Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv., 1941, **14**, pp. 61–122.

J. Hadamard

- [1] *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. pures appl., 1898, pp. 27–73.

A. B. Hajian

- [1] *On Ergodic Measure Preserving Transformations Defined on an Infinite Measure Space*, Proc. Am. Math. Soc., 1965, **16**, pp. 45–48.

P. R. Halmos

- [1] *On Ergodic Theory*, Chelsea, New York, 1958.
[2] *Measure Theory*, Chelsea, New York, 1951.
[3] *Introduction to Hilbert Spaces*, Chelsea, New York, 1957.

G. Hedlund

- [1] *The Dynamics of Geodesic Flow*, Bull. Am. Math. Soc., 1939, **45**, pp. 241–246.

S. Helgason

- [1] *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

M. Hénon, C. Heiles

- [1] *The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments*, *Astron. J.*, 1964, **69**, № 1, pp. 73–79.

E. Hopf

- [1] *Ergodentheorie*, Springer, Berlin, 1937.

С. А. Юсинский

- [1] *О метрических автоморфизмах с простым спектром*, Докл. АН СССР, 1967, **172**, № 5.

В. И. Якубович

- [1] *Вопросы устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений в канонической форме с периодическими коэффициентами*, Мат. сборн., 1955, **37**, **79**, с. 21–68.

В. Ф. Каган

- [1] *Основы теории поверхностей*, **1**, Москва, 1947.

Л. Б. Канторович

- [1] *Функциональный анализ и прикладная математика*, Успехи мат. наук, 1948, **3**, № 6, с. 89–185.

T. Kasuga

- [1] *On the Adiabatic Theorem for the Hamiltonian System of Differential Equations in the Classical Mechanics*, I. II. III., Proc. Japan. Acad., 1961, **37**, № 7, pp. 366–382.

А. Б. Кatok

- [1] *Энтропия и аппроксимация динамической системы с периодическим отображением*, Функ. анализ и его прилож., 1967, **1**, № 1, с. 75–85.
- [2] *О динамических системах с интегральными инвариантами на торе*, Функ. анализ и его прилож., 1967, **1**, № 3.

А. Б. Каток, А. М. Степин

- [1] *Об аппроксимациях эргодических динамических систем с периодическим отображением*, Докл. АН СССР, 1966, **171**, № 6, с. 1268–1271.

А. Н. Колмогоров

- [1] *О динамических системах с интегральным инвариантом на торе*, Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, с. 763–766.
- [2] *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и эндоморфизмов пространств Лебега*, Докл. АН СССР, 1958, **115**, с. 861–864.
- [3] *Основы теории вероятностей*, М.-Л.: ОНТИ, 1936.
- [4] *Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов*, Докл. АН СССР, 1959, **124**, с. 754–755.
- [5] *La theorie generale des systemes dynamiques et la mecanique classique*, Amsterdam Congress 1, 1954, pp. 315–333.
- [6] *О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона*, Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 4, с. 527–530.
- [7] Парижские лекции, 1956.

В. О. Коорман

- [1] *Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 1931, **17**, pp. 315–318.

А. Г. Кушниренко

- [1] *Оценка сверху для энтропии классической системы*, Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 1, с. 37–38.
- [2] *Всюду аналитическое действие полупростой группы Ли в окрестности неподвижной точки эквивалентно линейному действию*, Функц. анализ и его прил., 1967, **1**, № 1, с. 103–104.
- [3] *О инвариантной мере энтропийного типа*, Межд. Конгресс, Москва, VIII, 1966.

Г. А. Красинский

- [1] *Нормализация системы канонических дифференциальных уравнений вблизи квазипериодического движения*, Бюлл. института теор. астр., Ленинград, 1967.

М. Г. Крейн

- [1] *Об обобщении нескольких исследований А. М. Ляпунова*, Докл. АН СССР, 1950, **73**, с. 445–448.
- [2] *Основы теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*, Памяти А. А. Андропова, Изв. АН СССР, 1955, с. 413–498.

И. Курка

- [1] *Stabilite des varietes invariantes d'un champ de vecteurs pour les petites perturbations*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, **258**, pp. 4197–4200.

Ж. Lagrange

- [1] *Oeuvres*, **5**, pp. 123–344.

А. М. Леонтович

- [1] *Об устойчивости периодического решения Лагранжа для ограниченной задачи трех тел*, Докл. АН СССР, 1962, **143**, №3, с. 525–528.

Т. Levi-Civita

- [1] *Sopra alcuni criteri di instabilita*, Ann. Mat. pura appl., 1901, **3**, **5**, pp. 221–307.

Г. А. Маргулис

- [1] *О некоторых вопросах, касающихся теории U -систем Аносова*, Межд. Конгресс, Москва, VIII, 1966.

В. К. Мельников

- [1] *Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях*, Тр. Моск. мат. общ., 1963, **12**, №3, с. 3–53.

- [2] *О некоторых случаях сохранения условно периодического движения при малом изменении функции Гамильтона*, Докл. АН СССР, 1965, **165**, с. 1245–1248.

Л. Д. Мешалкин

- [1] *Один случай изоморфизма схем Бернулли*, Докл. АН СССР, 1959, **128**, с. 41–44.

J. Milnor

- [1] *Morse Theory*, Ann. Math. Studies, Princeton, 1961.

J. Moser

- [1] *On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus*, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, 1962, № 1.
- [2] *On Invariant Surfaces and Almost Periodic Solutions for Ordinary Differential Equations*, Am. Math. Soc. Notices, **12**, № 1, p. 124.
- [3] *New Aspect in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems*, Commun. Pure Appl. Math., 1958, **11**, pp. 81–114.
- [4] *A New Technique for the Construction of Solutions of Non-Linear Differential Equations*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 1961, **47**, pp. 1824–1831.
- [5] *On Theory of Quasi-Periodic Motion*, Siam Review, 1966.
- [6] *A Rapidly Convergent Iteration Method and Non-Linear Partial Differential Equations I, II*, Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie III 20 Fasc. II, III, 1966, pp. 265–315; pp. 499–535.
- [7] *Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions*, Math. Annalen, 1967, **169**, pp. 136–176.
- [8] *On a Theorem of V. Anosov*, Journal of Diff. Eq., 1969, **5**, № 3, pp. 411–440.

J. Moser and W. H. Jeffreys

- [9] *Quasi-Periodic Solutions for the Three-Body Problem*, Astron. J., 1966, **71**, № 7, pp. 568–578.

V. Nemytskii and V. V. Stepanov

- [1] *Qualitative theory of Differential Equations*, Princeton, 1960.

**Д. Е. Охочимский, В. А. Сарычев, В. А. Златоустов,
А. П. Торжевский**

- [1] *Изучение колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты*, Косм. иссл., 1964, **2**, № 5, с. 657–666.

М. Н. Peixoto

- [1] *On Structural Stability*, Ann. Math. Series, 1959, **2**, t. 69, pp. 199–222.

Н. Poincaré

- [1] *Oeuvres complètes*, **1**, pp. 3–221,
[2] *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, **3**, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
[3] *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti Circolo Mathematica di Palermo, 1912, t. 33, pp. 375–407.

G. Polya and G. Szegő

- [1] *Aufgaben und Lehrsaetze aus der Analysis*, 1, 2-nd ed. Springer, Berlin, 1954.

В. А. Рохлин

- [1] *Обобщение сохраняющего меру преобразования, не являющегося перемешиванием*, Докл. АН СССР, 1949, **13**, с. 329–340.
[2] *Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп*, Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, **13**, с. 329–340.
[3] *Об основных понятиях теории меры*, Мат. сб., 1949, **67**, с. 107–150.
[4] *Точные эндоморфизмы пространства Лебега*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 1961, **25**, с. 499–530.

В. А. Рохлин, Я. Синай

- [5] *Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений*, Докл. АН СССР, 1961, **141**, № 5, с. 1038–1041.

S. Schwartzman

- [1] *Asymptotic Cycles*, Ann. Math., 1957, **66**, № 2, pp. 270–284.

C. L. Siegel

- [1] *Iterations of Analytical Function*, Ann. Math., 1942, **43**, pp. 607–612.
- [2] *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer, Berlin, 1956.
- [3] *Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonische Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Math. Annal., 1954, **128**, pp. 144–170.

Я. Синай

- [1] *Центральная предельная теорема для геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны*, Докл. АН СССР, 1960, **133**, с. 1303–1306.
- [2] *Свойства спектра эргодических динамических систем*, Докл. АН СССР, 1963, **150**, с. 1235–1237.
- [3] *Некоторые замечания о спектральных свойствах эргодических динамических систем*, Успехи мат. наук, 1963, **18**, № 5, с. 41–54.
- [4] *Об основаниях эргодической гипотезы для динамических систем статистической механики*, Докл. АН СССР, 1963, **153**, № 6.
- [5] *Вестник Московского Государственного университета. Сер. мат.*, 1962, № 5.
- [6] *Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 1961, **25**, с. 899–924.
- [7] *О понятии энтропии динамических систем*, Докл. АН СССР, 1959, **124**, с. 768–771.
- [8] *Письмо в редакцию*, Успехи мат. наук, 1965, **20**, № 4(124), с. 232.
- [9] *О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой*, Докл. АН СССР, 1962, **147**, с. 797–800.
- [10] *Геодезические потоки на компактных поверхностях отрицательной кривизны*, Докл. АН СССР, 1961, **136**, с. 549.
- [11] *Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром II*. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, **30**, № 1, с. 15–68.

К. Ситников

- [1] *Существование осциллирующих движений в задаче трех тел*, Докл. АН СССР, 1960, **133**, № 2, с. 303–306.

N. B. Slater

- [1] *Distribution Problems and Physical Applications*, Compositio Mathematica. 1963, **16**, Fasc. 1.2, pp. 176–183.

S. Smale

- [1] *Dynamical Systems and the Topological Conjugacy Problem for Diffeomorphisms*, Proc. Int. Congress Math., 1962 pp. 490–496.
- [2] *Structurally Stable Systems Are Not Dense*, Am. J. Math., 1966, **88**, pp. 491–496.
- [3] *Differentiable Dynamical Systems*, Bull. Am. Math. Soc., 1967, **73**, pp. 747–817.

A. М. Степин

- [1] *О приближении динамических систем периодическими отображениями и их спектр*, Функ. анализ и его прилож., 1967, **1**, № 2.

H. Weyl

- [1] *Sur une application de la theorie des nombres á la mecanique statistique*, Enseignement Math., 1914, **16**, pp. 455–467.
- [2] *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1*, Math. Annal., 1916, **77**, pp. 313–352.
- [3] *Selecta Hermann Weyl*, Bassel-Stuttgart, 1956, pp. 11–147.
- [4] *Mean Motion I*, Am. J. Math., 1938, **60**, pp. 889–896.
- [5] *Mean Motion II*, Am. J. Math., 1939, **61**, pp. 143–148.

A. Wintner

- [1] *Upon a Statistical Method in the Theory of Diophantine Approximations*, Am. J. Math., 1933, **55**, pp. 309–331.

A. М. Yaglom and I. М. Yaglom

- [1] *Probabilites et informations*, Dunod (Paris).

Предметный указатель

- Абстрактная динамическая система 15
- Автоморфизм 123
- тора 14, 20, 28, 34, 37, 40, 48, 57, 66, 73, 126
- Адиабатическая инвариантность действия 97
- Алгебра, включение 151
- измеримых множеств 151
- пересечение 151
- порожденная разбиением 158
- сумма 152
- Асимптота 172, 177
- отрицательная 65, 179
- положительная 65, 179
- Асимптотическая теория k -го приближения 85
- Вариация частоты 254
- Вращение твердого тела 96, *см.* Движение Эйлера–Пуансо
- Временное среднее 22, 128, 133
- Входящий ус 109
- Выпуклый бильярд 229
- Гамильтоновы поток 13, 21, 25, 103, 105
- глобальный 14, 121
- Геодезический поток 12, 25, 149
- на группах Ли 12, 119
- на компактных пространствах отрицательной кривизны 40, 64, 78, 135
- на торе 12, 21, 25, 93, 116
- на эллипсоиде 12, 93, 96
- Гиперболический поворот 214
- с отражением 214
- Гомоморфизм 123
- Группа чисел вращения 147
- Движение Эйлера–Пуансо 118
- Динамическая система 11
- Дискретный спектр 31, 53, 95, 145
- Задача трех тел 21, 96, 97, 107
- Зоны неустойчивости 91, 108
- Измеримое пространство 122
- Изометрия 28
- Изоморфизм 20, 34, 123
- Инвариант Пуанкаре 232
- Инвариантные тора 92, 97
- Индукцированный оператор 29, 145
- Интегралы в инволюции 208, 210
- Интегрируемые системы 93, 107, 208
- Исходящий ус 109
- K -система 38, 49, 73, 92
- Каноническое отображение 228, 232
- глобальное 99, 240
- инфинитизимальное 234
- Качели 82
- Квазипериодическое движение 11, 92, 97, 118, 208

- Классические системы 11
Коммутатор Ли 237
Компактное многообразие отрицательной кривизны 63, 168, 177
Координаты действие-угол 94, 209, 211
Кососкалярное произведение 209, 219
Косые произведения 30, 143

Лебеговский спектр 34, 40, 152
— кратный 36
— простой 36
Лемма Пуанкаре–Ляпунова 219
Линейное симплектическое отображение 219
— параметрически устойчивое 219
— устойчивое 219
Линейные колебания 14

Малые знаменатели 247
Маятник 82, 120
Мера 122
Метод Адамара 112
— Ньютона 245
— усреднения 100, 103, 225
Модель Больцмана–Гиббса 40, 78

Неторические $У$ -системы Смейла 264
Неустойчивые системы 57

Образующее разбиение 47, 163
Общее эллиптическое преобразование 217
Общие свойства 20
Орисфера отрицательная 65
— положительная 65

Орицикл 172
Орициклический поток 51, 54
Отрицательное собственное значение линейного симплектического отображения 222

Параметрический резонанс 87, 219
Перемешивание 20, 26, 31, 32, 36
— n -го порядка 28
— подгруппы 142
Переходная цепочка 110
Переходный тор 109
Периодические точки 197
Плоскость Лобачевского–Пуанкаре 169
Поверхность сечения 97, 228
Подалгебра алгебры измеримых множеств 151
Поле Якоби 186
Положительное собственное значение линейного симплектического отображения 222
Преобразование пекаря 17, 20, 40, 124
— тора 11, 14, 20, 23, 25, 28, 114, 129, 131, 133
Пример Смейла 60
Проблема Биркгофа 87
— Лагранжа 18, 134, 136
— Смейла 195
Производящая функция 98, 232, 239
Пространственное среднее 22, 128
Пространство Лебега 16
— расслоенное 60
— растягивающееся 59
— сжимающееся 59

- Равномерное распределение 128, 134
 Разбиение 157
 — измеримое 157
 — сумма 157
 Разложимая система 24
 Резонанс 101, 103
 Симплектическое многообразие 14
 — отображение 209, 213, *см.* Линейное симплектическое отображение
 Сингулярный спектр 92
 Система эволюции 101, 107
 Скобка Пуассона 208, 210
 Скорости периодических аппроксимаций 54
 Слабое перемешивание 28, 31
 Слоение 62
 — абсолютно непрерывное 77
 — эргодичное 75
 Слои 62, 184
 — растягивающиеся 187
 — сжимающиеся 75, 187
 Собственная функция 33, 145
 Собственно непрерывный спектр 31
 Собственное значение 31, 33
 Сохранение энергии 13
 Спектральная кратность 30
 Спектральная мера 30
 Спектральный инвариант 29
 Среднее время пребывания геодезической в области 18
 Структурная устойчивость 68
 — U -систем 68
 Схема Бернулли 16, 20, 28, 37, 39, 46, 47
 Теорема Аносова 70, 200
 — Биркгофа 23
 — Вейля *см.* Равномерное распределение
 — Колмогорова 47, 163
 — Крейна 219
 — Кушниренко 51
 — Леви-Чивита 218
 — Лиувилля 12, 13, 118
 — Лобачевского–Адамара 64, 177
 — Мозера 97, 218, 251
 — Синая 66, 189, 205
 — Смейла 195
 — Якоби 12, 114
 — о дискретном спектре 34
 Теория возмущений 85, 100
 — устойчивости 85
 Топологическая неустойчивость 108
 Топологический индекс 215
 C^r -топология 69
 Точка гиперболическая 215
 — накопления 25
 — параболическая 215
 — эллиптическая 215
 U -поток 59, 72
 U -системы 57, 189
 Усатый тор 108
 Усредненная система *см.* Система эволюции
 Устойчивость неподвижной точки 217
 Устойчивые системы 82
 Функция Гамильтона *см.* Производящая функция
 Числа вращения 146

-
- Чисто точечный спектр 32
- Эндоморфизм 123, 141
- Энтропия 30, 42
- автоморфизма 46, 163
 - классических систем 51
 - потока 51
 - разбиения 42
- разбиения относительно автоморфизма 44
 - разбиения α относительно разбиения β 43, 159
- A -энтропия 54
- Эргодическая система 21, 32, 133
- классическая 145
- Эргодичность 23, 27, 31

Владимир Игоревич Арнольд
Андре Авец

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Дизайнер М. В. Ботя
Компьютерная подготовка А. В. Ширококов
Компьютерная графика В. Г. Бахтиев
Корректор С. В. Высоцкий

Лицензия ЛУ № 056 от 06.01.98. Подписано к печати 28.09.99.
Формат $60 \times 84^{1/16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,51. Уч. изд. л. 17,34.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Заказ № . Тираж 1000 экз.
Республиканская типография
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.