QED

Quantenelektrodynamik

U. Mosel

6. Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einheiten

In der Elementarteilchenphysik werden üblicherweise die natürlichen Einheiten

$$\hbar = c = 1$$

benutzt.

- $c = 1$
  In üblichen Einheiten ist

  $$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

  Durch die Festlegung der Einheiten so, daß

  $$c = 1$$

  folgt, impliziert man, daß Länge und Zeit zahlenmäßig gleiche Einheiten haben, da

  $$[c] = [L][T]^{-1}.$$

  Aus $c = 1$ folgt: $[L] = [T]$. Zeit und Länge sind äquivalente Einheiten.

  Außerdem sieht man an

  $$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

  daß mit $c = 1$ die Energie, der Impuls und die Masse äquivalente Dimensionen haben:

  $$E^2 = p^2 + m_0^2.$$

- $\hbar = 1$
  In üblichen Einheiten ist der Wert von $\hbar$

  $$\hbar \approx 6.6\ 10^{-22}\mathrm{MeVs}$$

  und die Dimension von $\hbar$ ist:

  $$[\hbar] = [M][L]^2[T]^{-1}.$$

  Durch die Setzung $\hbar = 1$ werden also die Dimensionen von M, L und T miteinander verknüpft. $[L]$ und $[T]$ sind äquivalent wegen $c = 1$, so daß folgt:

  $$[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1}.$$

Für die relativistischen Ausdrücke werden Vierervektoren für *Ort und Zeit* grundsätzlich geschrieben als:

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x}) = (t, x^1, x^2, x^3)$$

und analog für andere Vektoren:

$$A^\mu = \left(A_0, \vec{A}\right) = \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)\ .$$

Vierervektoren mit oberen Indizes bezeichnet man als *kontravariante Vektoren.* Demgegenüber sind *kovariante Vektoren* mit unteren Indizes definiert durch

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu = \left(A_0, -\vec{A}\right) = \left(A^0, -A^1, -A^2, -A^3\right)\ .$$

Dabei wird der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ benutzt und über doppelt auftretende Indizes summiert. In kartesischen Koordinaten ist $g_{\mu\nu}$ im Minkowski-Raum gegeben durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Der metrische Tensor mit oberen Indizes ist das Inverse von $g_{\mu\nu}$ und damit gegeben durch

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\ .$$

Damit gilt:

$$A^2 = A_\mu A^\mu = A_0^2 - \vec{A}^2\,.$$

Griechische Indizes bezeichen Vierervektoren, lateinische Indizes die drei räumlichen Vektorkomponenten. Ableitungen werden häufig abgekürzt als:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) .$$

Der d'Alembert Operator $\Box$ wird damit definiert als

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 .$$

Kapitel 2

Klassische Felder

2.1 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik können aus dem Hamiltonschen Prinzip gewonnen werden. Analog können die Feldgleichungen abgeleitet werden.

Die Funktionen, die ein Feld beschreiben, seien bezeichnet mit $\Psi_\alpha(x)$, wobei $x = (x_0, \vec{x}) = (t, \vec{x})$. Dann wird die LAGRANGE-Funktion mittels der LAGRANGE-Dichte ausgedrückt:

$$L = \int \mathcal{L}(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}) d^3x.$$

Die Wirkung S wird dann wie üblich definiert:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\ dt = \int_\Omega \mathcal{L}\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) d^4x; \qquad d^4x = d^3x\ dt$$

wobei Ω ein Raum-Zeit-Volumen darstellt. Jetzt wird Ψ variiert:

$$\Psi_\alpha(x) \mapsto \Psi'_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x) + \delta\Psi_\alpha(x).$$

Die zugehörige Variation von S ist:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_\Omega \mathcal{L}\left(\Psi', \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right) d^4x - \int_\Omega \mathcal{L}\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) d^4x \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha}\delta\Psi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)\right) d^4x \\
&= \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha}\delta\Psi_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Psi_\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right)\delta\Psi_\alpha\right] d^4x
\end{aligned}$$

Die Feldgleichungen werden nun aus dem Variationsprinzip

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0$$

unter der Nebenbedingung, daß $\delta\Psi_\alpha$ auf der Oberfläche von Ω verschwindet, erhalten.

Der zweite Summand im obigen Integral läßt sich nach dem GAUSSschen Satz in ein 4-dimensionales Oberflächenintegral umwandeln, das auf dem Rand von Ω verschwindet. Da $\delta\Psi_\alpha$ beliebig ist, folgt (nach den EULER-LAGRANGE-Gleichungen) aus $\delta S = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} = 0.$$

Diese Gleichung gibt die Bewegungsgleichung für die Felder. Daß in ihr im Gegensatz zur klassischen Mechanik nicht nur die zeitliche Ableitung, sondern auch räumliche Ableitungen auftreten, liegt an der relativistischen Verknüpfung von Raum- und Zeitableitungen.

Aus dem relativistischen Äquivalenzpostulat folgt, daß diese Bewegungsgleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Gestalt haben müssen. Man kann zeigen, daß dies nur erfüllbar ist, wenn $\mathcal{L}$ die gleiche Funktion der Felder in den verschiedenen Bezugssystemen, d. h. ein LORENTZ-Skalar, ist.

In Analogie zur klassischen Mechanik werden nun noch definiert:

1. der kanonisch konjugierte Impuls:

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\alpha}$$

2. die Hamiltonfunktion (Energie):

$$H = \int \mathcal{H}\; d^3x = \int (\Pi_\alpha \dot{\Psi}_\alpha - \mathcal{L}) d^3x$$

2.1.1 Beispiel: Elektromagnetisches Feld

Feldtensor $F^{\mu\nu}$ definiert durch:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

mit

$$A = A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\varphi, \vec{A}).$$

Die elektrischen und magnetischen Feldstärken lassen sich mittels dieses Feldtensors ausdrücken. Man erhält:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad E^k = \partial^k A^0 - \partial^0 A^k$$

und damit

$$E^k = F^{k0}.$$

Analog erhält man aus

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

die Relation

$$B^k = \epsilon^{lmk} \partial_l A^m \quad \Longrightarrow \quad \epsilon^{ijk} B^k = \underbrace{\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmk}}_{=\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}} \partial_l A^m = \partial_i A^j - \partial_j A^i = -F^{ij}.$$

Die zwei Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$$

(mit $c = 1, \epsilon_0 = \mu_0 = 1$, “Heaviside units”) lauten dann:

$$\frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = j^\mu \tag{2.1}$$

mit $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (j^0, \vec{j})$. Dies ist nichts weiter als die übliche Wellengleichung: Unter Benutzung der Lorentzeichung

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

folgt nämlich:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - \underbrace{\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu \partial x_\nu}}_{=0 \text{ wegen Eichbedingung}} = \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x_\mu^2} \quad = \quad j^\nu$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x_\nu^2} = \Box A^\mu \quad = \quad j^\mu \ . \tag{2.2}$$

Die Gleichung (2.1) ist die Bewegungsgleichung des Feldes; sie soll nun aus der Lagrangeschen Bewegungsgleichung hergeleitet werden.

Die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

leistet das Gewünschte:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu,$$

ferner

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)} &= -\frac{1}{4}2F_{\kappa\lambda}\frac{\partial F^{\kappa\lambda}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4}2F_{\kappa\lambda}(g^{\kappa\nu}g^{\lambda\mu} - g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}) = \frac{1}{2}(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\ &= F^{\mu\nu} \qquad \text{wegen } F \text{ antisymm.}\end{aligned}$$

und daraus folgt als LAGRANGEsche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}F^{\nu\mu} - j^\mu = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

$\mathcal{L}$ ist außerdem offensichtlich invariant unter Lorentztransformationen.

Im folgenden sollen nun Impuls und Energie des freien elektromagnetischen Feldes berechnet werden. Dabei ist bei der Bildung der Impulse

$$\Pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu}$$

zu beachten, daß gilt:

$$\Pi_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^0} = F_{00} \overset{F\ \text{antisymm.}}{=} 0$$

d. h. $\mathcal{L}$ hängt nicht explizit von $\dot{A}^0$ ab, und Π_0 ist zeitlich konstant gleich Null. Die anderen Impulse ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}\Pi_j &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^j} = \frac{\partial}{\partial(\partial^0 A^j)}(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -F_{0j} = E_j \\ &\quad (j = 1, 2, 3)\ .\end{aligned}$$

Damit erhält man für $\mathcal{H}$ die Hamiltondichte des freien Feldes unter Benutzung der Identität

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

($\vec{E}$, $\vec{B}\hat{=}$ elektrisches, magnetisches Feld):

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Pi^\mu\dot{A}_\mu - \mathcal{L} \\ &\overset{(\Pi_0=0)}{=} \sum_{j=1}^{3}\Pi^j\dot{A}_j - \mathcal{L} \\ &= \sum_{j=1}^{3}E^j\dot{A}_j + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \sum_{j=1}^{3}E^j\left(-E_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right) - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ &= \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varphi}_{=0\ \text{im Integral, für freies Feld}} + \frac{1}{2}\vec{B}^2,\end{aligned}$$

da $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ in Heaviside-Einheiten ($\mu_0 = \epsilon_0 = c = \hbar = 1$).

In der Volumenintegration liefert der zweite Term für das freie Feld ohne Ladungen nichts, da nach partieller Integration $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ benutzt werden kann. Für das freie Feld hat man dann den klassischen Ausdruck:

$$H = \int \mathcal{H}\ d^3x = \frac{1}{2} \int \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) d^3x.$$

2.2 Erhaltungsgrößen

Die Invarianz von $\mathcal{L}$ gegenüber Translationen und Lorentztransformation führt zur Erhaltung des Viererimpulses bzw. des Drehimpulses. Der Impuls ist dabei gegeben durch:

$$P^\mu = \int T^{0\mu} d^3x \qquad \textit{Viererimpuls}$$

mit dem Spannungstensor (*stress tensor*) des Feldes:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x^\nu}\right)} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Psi_\alpha)} \partial^\mu \Psi_\alpha - \mathcal{L} g^{\mu\nu}.$$

T ist der Energie-Impuls Tensor des Feldes Ψ. Dies ist aus der Betrachtung von P^0 zu erkennen

$$P^0 = \int T^{00} d^3x = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \Psi\right)} \partial^0 \Psi - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \left(\Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L}\right) = \int d^3x \mathcal{H}\ .$$

Hier sollen speziell nur die Eichtransformationen betrachtet werden. Dazu wird angenommen, daß die Felder komplex sind, so daß die LAGRANGE-Dichte sowohl von Ψ_α als auch von Ψ_α^* abhängt und deren ersten Ableitungen. Betrachtet wird jetzt die Transformation:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x) \quad &\mapsto \quad \Psi'_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x) e^{-i\epsilon q} \\ \Psi^*_\alpha(x) \quad &\mapsto \quad \Psi'^*_\alpha(x) = \Psi^*_\alpha(x) e^{i\epsilon q}. \end{aligned}$$

Hierbei ist ϵ ein beliebiger, für alle Felder gleicher, reeller Parameter, während q eine feste, für das Feld typische Größe besitzt.

Dann gilt für infinitesimal kleine ϵ:

$$\begin{aligned} \Psi'_\alpha(x) &= \Psi_\alpha(x) + \delta\Psi_\alpha(x) \quad ; \qquad \delta\Psi_\alpha(x) = -iq\ \epsilon\ \Psi_\alpha(x) \\ \Psi'^*_\alpha(x) &= \Psi^*_\alpha(x) + \delta\Psi^*_\alpha(x) \quad ; \qquad \delta\Psi^*_\alpha(x) = iq\ \epsilon\ \Psi^*_\alpha(x) \end{aligned}$$

Für die Variation von $\mathcal{L}$ unter diesen Transformationen gilt:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} \delta\Psi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*_\alpha} \delta\Psi^*_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)} \delta \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi^*_\alpha}{\partial x_\mu}\right)} \delta \left(\frac{\partial \Psi^*_\alpha}{\partial x_\mu}\right).$$

Die Felder $\Psi_\alpha, \Psi_\alpha^*$ erfüllen die LAGRANGE-Gleichungen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_\alpha^*} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right)}\right)$$

und daher:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\right)\delta\Psi_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right)}\right)\delta\Psi_\alpha^* \\
&\quad + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right)}\delta\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Psi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right)}\delta\Psi_\alpha^*\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}(-iq\epsilon)\Psi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right)}iq\epsilon\Psi_\alpha^*\right)
\end{aligned}$$

(im letzten Schritt wurden $\delta\Psi_\alpha$ und $\delta\Psi_\alpha^*$ eingesetzt).

Wird daher nun ein Viererstrom definiert durch

$$j_\mu = -iq\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)}\Psi_\alpha - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha^*}{\partial x_\mu}\right)}\Psi_\alpha^*\right), \tag{2.3}$$

so läßt sich die Variation von $\mathcal{L}$ schreiben als:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\,\partial^\mu j_\mu$$

Falls die Lagrange-Dichte unter dieser Variation invariant ist, gilt also

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

d. h. j_μ erfüllt eine Kontinuitätsgleichung und ist damit ein erhaltener Strom.

Durch räumliche Integration folgt dann sofort, daß

$$Q = \int j_0 d^3x$$

eine Erhaltungsgröße darstellt, die *Ladung*. Um welchen Strom oder welche Ladung es sich handelt, kann nur durch Ankopplung an äußere Felder gesehen werden.

Kapitel 3

Darstellungstheorie

3.1 Schrödinger-Darstellung

In der üblicherweise in der "klassischen" Quantentheorie benutzten Schrödinger-Darstellung sind die Operatoren zeitunabhängig und die Zustandsvektoren zeitabhängig. Sei $\hat{O}_S(t)$ der Operator $\hat{O}(t)$ in Schrödinger-Darstellung und $|t\rangle_S$ ein bestimmter Zustandsvektor in ihr, dann gilt:

$$\dot{O}_S(t) = 0$$

und

$$H_S|t\rangle_S = i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S,$$

wobei H_S der (zeitunabhängige) Hamiltonoperator in der Schrödinger-Darstellung ist. Damit gilt für die Zeitentwicklung des Zustandes im Schrödinger-Bild:

$$|t\rangle_S = e^{-iH_S t}|0\rangle_S.$$

3.2 Heisenberg-Darstellung

In der Heisenberg-Darstellung werden alle Zustandsvektoren als zeitunabhängig angenommen und die Operatoren als zeitabhängig. In der Schrödinger-Darstellung gilt für die Zeitentwicklung des Zustandes:

$$|t\rangle_S = e^{-iH_S t}|0\rangle_S$$

(weil H_S zeitunabhängig ist) und damit für die rückläufige Zeitentwicklung

$$|0\rangle_S = e^{+iH_S t}|t\rangle_S$$

Der entsprechende Zustandsvektor im Heisenberg-Bild ist:

$$|t\rangle_H = |0\rangle_H = |0\rangle_S \qquad \text{für alle } t.$$

Daher gilt also für den Zusammenhang beider Darstellungen:

$$|t\rangle_H = e^{iH_S t}|t\rangle_S.$$

Dies ist eine *unitäre Transformation* zwischen zwei Darstellungen. Für die Operatoren gilt folglich:

$$\hat{O}_H(t) = e^{iH_S t}\hat{O}_S e^{-iH_S t}.$$

Als Konsequenz stimmen die Matrixelemente der Operatoren in beiden Darstellungen überein:

$$\langle a|\hat{O}_H(t)|b\rangle_H = \langle a(t)|\hat{O}_S|b(t)\rangle_S.$$

Die Operatoren folgen der HEISENBERGschen Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial \hat{O}_H}{\partial t} &= i\frac{\partial}{\partial t}(e^{iH_S t}\hat{O}_S e^{-iH_S t}) \\
&= e^{iH_S t}(-H_S\hat{O}_S)e^{-iH_S t} + e^{iH_S t}(\hat{O}_S H_S)e^{-iH_S t} \\
&= e^{iH_S t}[\hat{O}_S, H_S]e^{-iH_S t} \\
&= [\hat{O}_H, H_H].
\end{aligned}$$

3.3 Wechselwirkungsdarstellung

In dieser für die *Quantenfeldtheorie* sehr wichtigen Darstellung wird angenommen, daß der Hamiltonoperator H aufgespalten werden kann in

$$H = H_0 + H_{int}$$

und daß die Zeitabhängigkeit der Zustände nur durch H_{int} verursacht wird. Gesucht wird jetzt also ein unitärer Operator für die Transformation vom SCHRÖDINGER-Bild ins sog. *Wechselwirkungsbild* derart, daß die Zustandsvektoren sich nur dann mit der Zeit ändern, wenn H_{int} wirkt (d. h. daß das Zeitverhalten der Zustandsvektoren alleine durch H_{int} bestimmt wird).

Für die unitäre Transformation von der Schrödinger- in die Wechselwirkungs-Darstellung gilt mit dem vorerst noch unbekannten unitären Operator $V(t)$ ($V^\dagger(t) = V^{-1}(t)$) jedenfalls:

$$|t\rangle_I = V(t)|t\rangle_S$$

und

$$\hat{O}_I(t) = V(t)\hat{O}_S V^\dagger(t)$$

Diese Gleichungen werden in die SCHRÖDINGER-Gleichung eingesetzt:

$$H_S|t\rangle_S = i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_S$$

Man erhält

$$\begin{aligned}(H_0 + H_{int})_S V^\dagger(t)|t\rangle_I &= i\frac{\partial}{\partial t}(V^\dagger(t)|t\rangle_I) \\ &= i(\frac{\partial V^\dagger}{\partial t}|t\rangle_I + V^\dagger(t)\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I)\end{aligned}$$

Sei nun V so gewählt, daß gilt:

$$(H_0)_S V^\dagger(t) = i\frac{\partial V^\dagger}{\partial t}, \tag{3.1}$$

d. h.

$$V^\dagger(t) = e^{-i(H_0)_S t} \tag{3.2}$$

(und damit unitär, da $(H_0)_S$ hermitesch). Dann folgt:

$$(H_{int})_S V^\dagger(t)|t\rangle_I = iV^\dagger(t)\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I.$$

Multiplikation von links mit $V(t)$ liefert, weil V unitär ist:

$$V(H_{int})_S V^\dagger|t\rangle_I = i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I \qquad \Longrightarrow \qquad (H_{int})_I|t\rangle_I = i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_I \tag{3.3}$$

Damit ist der Wechselwirkungsoperator in der Wechselwirkungsdarstellung offensichtlich gegeben durch

$$(H_{int})_I = V(t)\,(H_{int})_S\,V^\dagger(t) \tag{3.4}$$

Damit ist das Gewünschte erreicht: Die Zeitabhängigkeit der Zustände in der Wechselwirkungs-Darstellung wird allein durch H_{int} bestimmt.

Da die Übergänge zwischen den Darstellungen durch unitäre Transformationen bewirkt werden, sind diese physikalisch völlig äquivalent. In der Wechselwirkungsdarstellung ändern sich die Zustände mit der Zeit nur dann, wenn eine Wechselwirkung tatsächlich vorhanden ist. Die Operatoren hängen in ihr aber *immer* von der Zeit ab:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial \hat{O}_I}{\partial t} &= i\frac{\partial}{\partial t}(V\hat{O}_S V^\dagger) \\ &= i(\frac{\partial V}{\partial t}\hat{O}_S V^\dagger + V\hat{O}_S\frac{\partial V^\dagger}{\partial t}) \\ &\overset{\text{n.Gl. (3.1) auf S.13}}{=} -V(H_0)_S^\dagger \hat{O}_S V^\dagger + V\hat{O}_S(H_0)_S V^\dagger \\ &= V[\hat{O}_S, (H_0)_S]V^\dagger \\ &= [\hat{O}_I(t), (H_0)_I]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Damit ist die Zeitabhängigkeit von Operatoren in der Wechselwirkungsdarstellung nur durch H_0 bestimmt. H_0 selbst bleibt zeitunabhängig, weil

$$(H_0)_I = e^{i(H_0)_S t}(H_0)_S e^{-i(H_0)_S t} = (H_0)_S$$

Die Gleichung (3.5) ist die übliche HEISENBERGsche Bewegungsgleichung.

Insbesondere ist auch die Zeitabhängigkeit von H_{int} allein durch den "freien" Operator H_0 bestimmt. Wenn man annimmt, daß bei sehr früher Zeit $t \to -\infty$ der Zustand des physikalischen Systems alleine durch den freien Operator bestimmt wird, so folgt also, daß $H_{int}(t)$ jederzeit durch die freien Feldoperatoren ausgedrückt werden kann.

Kapitel 4

Quantisierung des Spin-0-Feldes

Allgemein transformieren sich die Felder unter einer Lorentz-Transformation

$$x_\mu \mapsto x'_\mu = a_{\mu\nu} x^\nu$$

wie folgt:

Feld	Tranformationsverhalten	Spin
skalares	$\varphi'(x') = \varphi(x)$	0
pseudoskalares	$\varphi'(x') = det(a) \cdot \varphi(x)$	0
(Vierer-)vektor	$A'_\mu(x') = a_{\mu\nu} A^\nu(x)$	1

Die Transformation von x nach x' ist dabei auf jeden Fall linear und homogen. Aus der Invarianz des Skalarproduktes

$$x'_\mu y'^\mu = a_{\mu\nu} x^\nu a^{\mu\lambda} y_\lambda = x^\nu a^{\mathrm{T}}_{\nu\mu} a^{\mu\lambda} y_\lambda \stackrel{!}{=} x^\nu y_\nu$$

folgt

$$a^{\mathrm{T}}_{\nu\mu} a^{\mu\lambda} = g_\nu{}^\lambda, \quad \text{beziehungsweise} \quad a^{\mathrm{T}} a = 1,$$

also die *Orthogonalität* von a. An der letzten Gleichung sieht man auch

$$\det(a) = \pm 1.$$

Man unterscheidet die möglichen Transformationsmatrizen a durch die Determinante:

$\det(a) = +1$: eigentliche Lorentztransformation

$\det(a) = -1$: uneigentliche Lorentztransformation (z. B. diskrete Raum- oder Zeitspiegelung)

4.1 Freies skalares Feld

Sei $\varphi(x)$ ein lokales Feld, das unter einer Lorentztransformation invariant ist; in diesem letzteren Fall ist es ein Spin-Null-Feld. Zusätzlich wird $\varphi(x)$ ein skalares Feld genannt, wenn es unter Raumspiegelungen invariant ist; sonst ist es ein pseudoskalares Feld, das unter Spiegelungen sein Vorzeichen ändert.

Betrachtet wird jetzt ein hermitesches Feld:

$$\varphi(x) = \varphi(\vec{x}, it) = \varphi^\dagger(x)$$

Die einfachste lorentzinvariante LAGRANGE-Dichte, die nur das Feld und die erste Ableitung enthält, ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} - m^2\varphi^2\right].$$

Die Summanden in der Klammer sind Skalare und daher lorentzinvariant. Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu},$$

also die LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x^\mu} + m^2\varphi \overset{!}{=} 0.$$

$$\Longrightarrow \qquad \Box\varphi + m^2\varphi = 0 \qquad \text{KLEIN-GORDON-}\textit{Gleichung}\ . \tag{4.1}$$

Die Klein-Gordon Gleichung ist die Bewegungsgleichung des freien skalaren Feldes.

Sei nun allgemeiner behandelt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2 - V(\varphi).$$

Hier ist der kanonisch konjugierte Impuls

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$$

und daher die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \Pi^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + V(\varphi) = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi)$$

Die klassische Hamilton*funktion* lautet dann

$$H = \int \mathcal{H}\ d^3x.$$

4.1.1 Fourier-Entwicklung

Die Felder φ und Π werden nun in Fourier-Reihen entwickelt:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} q_{\vec{k}}(t)\\ \Pi(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} p_{-\vec{k}}(t)\end{aligned}$$

(das Minus ist eine reine Zweckmäßigkeitsfrage)

Hier ist Ω ein räumliches Volumen. Es werden periodische Randwertbedingungen benutzt; der Übergang zur kontinuierlichen Schreibweise ist stets durch die Ersetzung

$$\sum_{\vec{k}} \ldots \mapsto \frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int \ldots d^3k$$

möglich. In dieser Kastennormierung gilt

$$\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}\,')\cdot\vec{r}} d^3x = \Omega\ \delta_{\vec{k},\vec{k}\,'}$$

als Folge der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen. (Im wesentlichen ist das der “Satz von Fourier”.)

Durch Projektion unter Ausnutzung der Orthogonalitäten bekommt man:

$$\int \varphi(\vec{r},t) e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}} d^3x = \sqrt{\Omega} q_{\vec{k}\,'}(t)$$

und analog:

$$\int \Pi(\vec{r},t) e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}} d^3x = \sqrt{\Omega} p_{-\vec{k}\,'}(t)$$

Da φ und Π hermitesch sind, muß gelten:

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi^\dagger &\implies \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\vec{k}} q^\dagger_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ &\implies q_{\vec{k}}(t) = q^\dagger_{-\vec{k}}(t)\\ \Pi = \Pi^\dagger &\stackrel{\text{analog}}{\implies} p_{\vec{k}}(t) = p^\dagger_{-\vec{k}}(t).\end{aligned}$$

Wie beim harmonischen Oszillator werden nun neue Größen definiert:

$$\begin{aligned}a_{\vec{k}}(t) &= \sqrt{\tfrac{\omega_k}{2}}\left(q_{\vec{k}} + \tfrac{i}{\omega_k} p_{-\vec{k}}\right)\\ a^\dagger_{\vec{k}}(t) &= \sqrt{\tfrac{\omega_k}{2}}\left(q_{-\vec{k}} - \tfrac{i}{\omega_k} p_{\vec{k}}\right)\end{aligned}$$

dabei ist $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, m ist hierbei irgendein freier Parameter.

Diese Gleichungen lassen sich umkehren:

$$\begin{aligned}q_{\vec{k}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\vec{k}}(t) + a^\dagger_{-\vec{k}}(t)\right)\\ p_{-\vec{k}}(t) &= \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{\vec{k}}(t) - a^\dagger_{-\vec{k}}(t)\right)\end{aligned}$$

Diese wiederum in die Felder eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \sum \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a^\dagger_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \\ \Pi(\vec{r},t) &= \sum \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k \Omega}} \left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right)\end{aligned}$$

In der 2. Teilsumme rechts ist dabei jeweils $\vec{k}$ durch $-\vec{k}$ ersetzt worden. Dies ist möglich, weil ohnehin über alle $\vec{k}$ summiert wird.

Alle diese Entwicklungen sind völlig unabhängig von der speziellen Form von $V(\varphi)$. Auch der Parameter m in ω_k ist bis jetzt völlig unbestimmt; verschiedene m-Werte liefern verschiedene a's und $a^\dagger$'s.

Sei nun:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2,$$

dann wird das *freie* Feld beschrieben. H wird nun

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \frac{1}{2} \int \left\{ \Pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right\} d^3x.$$

Einsetzen der FOURIER-Entwicklungen und Integrieren liefert unter Ausnutzung der Orthogonalitäten

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k (a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}}) = \sum_{\vec{k}} \omega_k a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$$

wenn der Parameter m in ω_k gleich dem m in H gesetzt wird. Im letzten Schritt ist benutzt worden, daß die beiden klassischen Größen $a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}$ miteinander vertauschen.

4.2 Quantisierung

Jetzt wird *quantisiert*, d. h. in Analogie zur üblichen Quantisierungsbedingung

$$\begin{aligned}[p_i(t), q_j(t)] &\stackrel{!}{=} -i\delta_{ij} \\ [p_i(t), p_j(t)] &\stackrel{!}{=} 0 \\ [q_i(t), q_j(t)] &\stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

werden die folgenden Kommutatoren *postuliert*:

$$\begin{aligned}[\Pi(\vec{r},t), \varphi(\vec{r}\,',t)] &\stackrel{!}{=} -i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') \\ [\Pi(\vec{r},t), \Pi(r',t)] &\stackrel{!}{=} 0 \\ [\varphi(\vec{r},t), \varphi(\vec{r}\,',t)] &\stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

(beachte hierbei, daß die Operatoren in den Kommutatoren stets zu gleicher Zeit t zu nehmen sind).

Als nächstes soll jetzt die Konsistenz der quantenmechanischen mit den klassischen Bewegungsgleichungen gezeigt werden. Die Bewegungsgleichung für einen beliebigen Operator $\hat{O}(t)$ ist durch die HEISENBERGsche Gleichung gegeben:

$$i\frac{\partial \hat{O}}{\partial t} = [\hat{O}, H].$$

Damit gilt speziell auch für den *Operator* $\varphi(x)$:

$$i\dot{\varphi} = [\varphi, H].$$

Der Kommutator läßt sich leicht auswerten:

$$\begin{aligned}
[\varphi, H] &= \left[\varphi(\vec{r}, t), \int \mathcal{H}(\vec{r}\,', t) d^3x'\right] \\
&= \int [\varphi(\vec{r}), \mathcal{H}(\vec{r}\,')]\, d^3x' \\
&= \int \left[\varphi(\vec{r}), \frac{1}{2}\Pi(\vec{r}\,')^2\right] d^3x' \\
&= \frac{1}{2}\int \left([\varphi(\vec{r}), \Pi(\vec{r}\,')]\Pi(\vec{r}\,') + \Pi(\vec{r}\,')[\varphi(\vec{r}), \Pi(\vec{r}\,')]\right) d^3x' \\
&= \frac{1}{2} i \cdot 2 \cdot \Pi(\vec{r}, t) \\
&= i\Pi(\vec{r}, t) \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} i\dot{\varphi} \\
\Longrightarrow \qquad \dot{\varphi} &= \Pi
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Ausdruck. Die HEISENBERGsche Bewegungsgleichung ist also äquivalent zur LAGRANGE-Theorie, wie erwartet. Die Theorie ist damit quantenmechanisch konsistent, denn für $\dot{\varphi}$ wird der gleiche Ausdruck erhalten, unabhängig davon, ob φ als klassisches oder als quantisiertes Feld betrachtet wird.

Werden nun die Felder quantisiert, so werden auch die $q_{\vec{k}}, p_{\vec{k}}$ zu Operatoren und es folgt für ihren Kommutator:

$$\begin{aligned}
[p_{\vec{k}\,'}(t), q_{\vec{k}}(t)] &= \frac{1}{\Omega}\int e^{i(\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,' - \vec{k}\cdot\vec{r})}[\Pi(\vec{r}\,', t), \varphi(\vec{r}, t)] d^3x\ d^3x' \\
&= -\frac{i}{\Omega}\int e^{i(\vec{k}\,' - \vec{k})\cdot\vec{r}} d^3x \\
&= -i\delta_{\vec{k},\vec{k}\,'}.
\end{aligned}$$

Die p's und q's kommutieren also genauso wie Impuls und Ort. Aus diesen Kommutatoren der p, q lassen sich die Kommutatoren für a und $a^\dagger$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
[a_{\vec{k}}(t), a^\dagger_{\vec{k}\,'}(t)] &= \delta_{\vec{k},\vec{k}\,'} \\
[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}\,'}(t)] &= [a^\dagger_{\vec{k}}(t), a^\dagger_{\vec{k}\,'}(t)] = 0.
\end{aligned}$$

Operatoren mit dieser Algebra haben die Eigenschaft, daß $a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$ alle ganzen nichtnegativen Zahlen als Eigenwerte besitzt und daß $a^\dagger_{\vec{k}}$ und $a_{\vec{k}}$ Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind, die diese Eigenwerte um 1 erhöhen bzw. erniedrigen.

Der Hamilton-Operator kann verschiedene Gestalten annehmen, je nachdem ob vor oder nach dem letzten Schritt im klassischen Ausdruck oben quantisiert wird. Quantisiert man vorher, so erhält man:

$$P^0 = H = \sum_{\vec{k}} \omega_k (a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2})$$

Im letzten Schritt ist dabei die Kommutatorrelation für die $a_{\vec{k}}$ und $a^\dagger_{\vec{k}}$ verwendet worden. Das Endergebnis hängt also offensichtlich von der Reihenfolge von Umformung und Quantisierung ab. Hätte man erst die letzte Umformung vorgenommen und dann quantisiert, so wäre der letzte Summand nicht aufgetreten. Ebenso erhält man

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \vec{k}\, a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$$

Da H, wie oben diskutiert, nicht eindeutig bestimmt ist, und da die Addition einer Konstanten zu H die Dynamik des Systems nicht ändert, kann der Hamiltonoperator nun als

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \qquad (= {:}H{:})$$

neudefiniert werden. Formal entspricht dies der Einführung des *Normalproduktes* in die Definition des Hamiltonoperators

$$H \mapsto {:}H{:} = {:}\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k (a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}}){:}$$

mit

$${:}a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}}{:} = 2 a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$$

d.h. die Vernichtungsoperatoren werden grundsätzlich nach rechts geordnet. Der normalgeordnete Hamilton-Operator ist also eindeutig.

Er zeigt, daß die Energie des Feldes durch ganzzahlige Vielfache der Normalmoden-Energien ω_k gegeben ist. Ebenso ist der Dreier-Impuls des Feldes durch die Impulse der Normalmoden gegeben. Interpretiert man nun m als die Masse eines Teilchens so ist $\omega(\vec{k})$ gerade die relativistische Dispersionsrelation eines freien relativistischen Teilchens. Damit ist die Energie des Feldes gegeben als Summe über die Energien seiner *Feldquanten.* Die Eigenwerte von $a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$ geben die Zahl dieser Feldquanten.

Die HEISENBERGsche Bewegungsgleichung liefert die Zeitabhängigkeit der Operatoren:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O} = [O, H]$$

Also:

$$i\dot{a}_{\vec{k}} = [a_{\vec{k}}, H] = \sum_{\vec{k}\,'} \omega_{k'}[a_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}\,'}a_{\vec{k}\,'}] = \sum_{\vec{k}\,'} \omega_{k'}(\underbrace{[a_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}\,'}]}_{=\delta_{\vec{k},\vec{k}\,'}} a_{\vec{k}\,'} + a^{\dagger}_{\vec{k}\,'}[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}\,'}]) = \omega_k a_{\vec{k}}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}(t) &= a_{\vec{k}}(0)e^{-i\omega_k t} \\ a^{\dagger}_{\vec{k}}(t) &= a^{\dagger}_{\vec{k}}(0)e^{+i\omega_k t} \end{aligned}$$

4.2.1 Geladene Felder

Falls das physikalische System durch eine Reihe von Feldern $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ beschrieben wird, ist die totale LAGRANGE-Dichte einfach die Summe aller Einzelterme. Die Felder werden als unterscheidbar angesehen, so daß die Feldoperatoren verschiedener Felder miteinander stets kommutieren.

Falls z.B. $n = 2$, kann man eine Transformation durchführen:

$$\begin{aligned} & \varphi &=& \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \\ & \varphi^{\dagger} &=& \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \\ \Longrightarrow \quad & \mathcal{L} &=& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^\mu} - V(\varphi_i) \\ & &=& \frac{\partial\varphi^{\dagger}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} - V(\varphi, \varphi^{\dagger}) \end{aligned}$$

Hier werden nun die üblichen FOURIER-Entwicklungen für φ_1 und φ_2 angesetzt:

$$\varphi_{1,2} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k\Omega}}\left(a_{\vec{k}_{1,2}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a^{\dagger}_{\vec{k}_{1,2}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \tag{4.2}$$

Da die Felder φ_1 und φ_2 unterscheidbar sind, kommutieren auch die Operatoren a_1 und $a^{\dagger}_2$.

Für das freie Feld erhält man

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k\Omega}} \left(a_{\vec{k}} e^{-ikx} + b^\dagger_{\vec{k}} e^{+ikx}\right) \\ &\text{mit} \\ a_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}_1} + i\ a_{\vec{k}_2}) \\ b_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\vec{k}_1} - i\ a_{\vec{k}_2}) \\ kx &= \omega_k t - \vec{k}\vec{x}\end{aligned}$$

Die Operatoren a und b sind hier die zeitunabhängigen Operatoren; sie genügen dabei unter sich jeweils den üblichen Kommutatorbeziehungen, während alle a-Operatoren mit allen b-Operatoren kommutieren.

Damit kann wie oben der Hamiltonoperator aufgestellt werden. Man erhält:

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k (a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}})$$

Beide Arten von Operatoren erzeugen also Quanten der gleichen Masse m und der Energie

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

Ein Unterschied tritt beim Ladungsoperator auf, wie im folgenden gezeigt wird. Die LAGRANGE-Dichte für die freien Felder φ und $\varphi^\dagger$ wird

$$\mathcal{L} = \frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} - m^2\varphi^\dagger\varphi\,.$$

Sie ist invariant unter

$$\begin{aligned}\varphi &\mapsto e^{-i\epsilon q}\varphi, \\ \varphi^\dagger &\mapsto e^{+i\epsilon q}\varphi^\dagger\end{aligned}$$

Damit folgt für den Ladungsoperator (s.Abschn. 2.2):

$$Q = -iq\int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)}\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi^\dagger)}\varphi^\dagger \right\} d^3x,$$

mit $\Psi_\alpha = \varphi, \Psi^*_\alpha = \varphi^\dagger$. Dann folgt im Fall des freien Feldes (obiges $\mathcal{L}$):

$$\begin{aligned}Q &= \int j_0\, d^3x = -iq\int \left(\frac{\partial\varphi^\dagger}{\partial t}\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\varphi^\dagger\right) d^3x \\ &= -iq\int \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k\Omega}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}\Omega}} \\ &\quad \times \Big\{ i\omega_k \left(a^\dagger_{\vec{k}} e^{+ikx} - b_{\vec{k}} e^{-ikx}\right)\left(a_{\vec{k}'} e^{-ik'x} + b^\dagger_{\vec{k}'} e^{+ik'x}\right) \\ &\quad + i\omega_k \left(a_{\vec{k}} e^{-ikx} - b^\dagger_{\vec{k}} e^{+ikx}\right)\left(a^\dagger_{\vec{k}'} e^{+ik'x} + b_{\vec{k}'} e^{-ik'x}\right)\Big\}\, d^3x\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt:

$$a_{\vec{k}}(t) \sim e^{-i\omega_k t}.$$

Dies ist die Zeitabhängigkeit nicht nur für das freie Feld, sondern in der Wechselwirkungsdarstellung auch für das wechselwirkende Feld, da in dieser Darstellung die zeitliche Entwicklung der Operatoren durch H_0 bestimmt wird (s. Kap. 7).

Für den Ladungsoperator erhält man dann

$$\begin{aligned}
Q \quad &= \quad q \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \Big\{ a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}} b^\dagger_{\vec{k}} \\
&\quad \underbrace{+ a^\dagger_{\vec{k}} b^\dagger_{-\vec{k}} e^{-2i\omega_k t} - b_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} e^{2i\omega_k t} - b^\dagger_{\vec{k}} a^\dagger_{-\vec{k}} e^{-2i\omega_k t} + a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} e^{2i\omega_k t}}_{=0 \text{ bei Summation}} \\
&\quad + a_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}} - b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}} \Big\} \\
&\overset{\text{Normalprodukt}}{=} \quad q \sum_{\vec{k}} (a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} - b^\dagger_{\vec{k}} b_{\vec{k}})
\end{aligned}$$

Um die Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, die sich aus der Reihenfolge der Faktoren in der klassischen Ladung ergeben, muß auch der Ladungsoperator als normal geordnetes Produkt definiert werden. Damit wird zugleich sichergestellt, daß auch das Vakuum ungeladen ist.

Die Operatoren $a^\dagger_{\vec{k}}$ *erzeugen* also Teilchen positiver Ladung, die Operatoren $b^\dagger_{\vec{k}}$ solche mit negativer Ladung (aber gleicher Masse), also *Antiteilchen.* Gleichzeitig zeigt die Definition des Ladungsoperators, daß die Feldquanten eines hermiteschen Feldes ungeladen sind.

Kapitel 5

Das Spin-1-Feld

In diesem Kapitel wird nur das freie elektromagnetische Feld behandelt, d.h. ein Vektorfeld mit verschwindender Masse.

5.1 Freies elektromagnetisches Feld

In diesem Kapitel soll nun spezifisch das *elektromagnetische* Feld ($m = 0$) behandelt werden. Die LAGRANGE-Dichte für das freie Feld wurde schon früher gegeben:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

mit

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \qquad \text{und} \quad A = (\varphi, \vec{A}) \ .$$

Es ist schon gezeigt worden, daß

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

für das freie elektromagnetische Feld gilt, wobei

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

$\vec{E}$ wird zerlegt in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil:

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_{tr}$$

mit (in Coulomb-Eichung)

$$\vec{E}_l = -\vec{\nabla}\varphi; \qquad \vec{E}_{tr} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dies ist identisch mit den Relationen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_l = 0; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{tr} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \overset{\text{in Coulomb-Eichung}}{=} 0$$

als generelle Definition von longitudinalen und transversalen Feldern. Die spezielle Eichung kann verwendet werden, weil die Theorie eichinvariant ist:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \qquad (A^\mu = (\varphi, \vec{A}))$$

mit einer beliebigen Funktion F der Koordinaten x^μ ändert die Felder nicht. Dies gestattet es auch, für das *freie* Feld zusätzlich $A_0 = \varphi = 0$ zu setzen und damit die Zahl der Freiheitsgrade auf 2 zu reduzieren.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad H &= \int \mathcal{H} d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ (\vec{E}_{tr} + \vec{E}_l)^2 + \vec{B}^2 \right\} d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \vec{E}_{tr}^2 + \vec{B}^2 + \vec{E}_l^2 + 2\vec{E}_{tr} \cdot \vec{E}_l \right\} d^3x \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \int \vec{E}_l^2 d^3x &= \int (\vec{\nabla}\varphi)^2 d^3x = -\int \varphi \underbrace{\nabla^2 \varphi}_{=0 \text{ für freies Feld}} d^3x = 0 \\ \int \vec{E}_{tr} \cdot \vec{E}_l &= \int \dot{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla}\varphi d^3x = -\int \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0 \text{ wegen Eichbedingung}} \varphi d^3x = 0 \end{aligned}$$

Der longitudinale Feldanteil trägt also nicht zur Energie bei, so daß H gegeben ist durch:

$$H = \frac{1}{2} \int (E_{tr}^2 + B^2) d^3x.$$

Für die Lagrange-Dichte gilt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{tr}^2 + \vec{E}_l^2 + 2\vec{E}_{tr} \cdot \vec{E}_l - \vec{B}^2\right).$$

Der zugehörige Feldimpuls ist gegeben durch

$$\Pi^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = F^{j0} = E^j.$$

Ohne daß sich $L = \int \mathcal{L} d^3x$ ändert, kann $\mathcal{L}$ ersetzt werden durch:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{tr}^2 - \vec{B}^2)$$

weil das Integral über die beiden anderen Terme verschwindet. Dabei müssen auch die Bewegungsgleichungen invariant bleiben, weil aus $\delta \int L dt$ folgend. Der Impuls wird dann

$$\Pi^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = (E_{tr})^j \qquad \text{weil} \qquad \vec{E}_{tr} = -\dot{\vec{A}}.$$

Durch die Änderung der LAGRANGE-Dichte wird also erreicht, daß der Impuls nur durch den transversalen Anteil des Feldes gegeben ist. Damit ist der longitudinale Anteil völlig eliminiert, denn er tritt auch in H nicht mehr auf.

Das freie elektromagnetische Feld besitzt also nur 2 Freiheitsgrade.

5.1.1 FOURIER-Entwicklung

Analog zum Fall des freien skalaren Teilchens wird für jede Komponente einzeln eine FOURIER-Entwicklung angesetzt:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \vec{a}^\dagger_{\vec{k}} e^{+ikx} \right) \\
\vec{\Pi}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(-i\vec{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + i\vec{a}^\dagger_{\vec{k}} e^{+ikx} \right) \\
&\left(= \quad \vec{F}_0 = \vec{E}_{tr} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

mit $\omega = |\vec{k}|$ (harmonische Zeitabhängigkeit benutzt). Wegen COULOMB-Eichung muß gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{k} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}(t) = 0. \tag{5.1}$$

Die Vektoren $\vec{a}$ werden nun nach Basisvektoren entwickelt; dabei genügen aufgrund des gerade Gesagten zwei Basisvektoren. Es werden deshalb Polarisationsvektoren $\epsilon^{(1)}$ und $\epsilon^{(2)}$ eingeführt, deren Richtung von der Richtung von $\vec{k}$ abhängt; dies ist nötig, damit die Gleichung (5.1) erfüllt werden kann. $\vec{\epsilon}^{\,(1)}$ und $\vec{\epsilon}^{\,(2)}$ werden so gewählt, daß sie zusammen mit $\vec{k}/|\vec{k}|$ einen *rechtshändigen Satz von wechselseitig orthogonalen Einheitsvektoren ("Dreibein")* bilden. Damit ist die Bedingung der Transversalität automatisch erfüllt.

Man entwickelt also:

$$\vec{a}_k = a_{k1}\vec{\epsilon}^{\,(1)} + a_{k2}\vec{\epsilon}^{\,(2)}.$$

Eingesetzt in $A(\vec{x},t)$ liefert dies

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_{k\alpha}\vec{\epsilon}^{\,(\alpha)} e^{-ikx} + a^\dagger_{k\alpha}\vec{\epsilon}^{\,(\alpha)} e^{+ikx} \right).$$

und analog für

$$\vec{\Pi}(x,t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Die klassische Energie des freien Strahlungsfeldes ist nach den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts gegeben durch

$$H = \frac{1}{2}\int \left(\vec{E}_{tr}^2 + \vec{B}^2\right) d^3x \ .$$

Das Einsetzen der Normalmoden-Entwicklung liefert

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \sum_\alpha \omega_k \left(a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} + a_{k\alpha} a_{k\alpha}^\dagger\right)$$

5.2 Quantisierung

Die Quantisierung wird hier über den folgenden Kommutator erreicht:

$$[A^i(\vec{x},t), \Pi^j(\vec{x}\,',t)] = -i(\delta^{ij} - \nabla^{-2}\nabla^i\nabla^j)\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,'),$$

∇^{-2} stellt dabei den zum LAPLACE-Operator ∇^2 inversen Integraloperator[1] dar.

Die sogenannte "transversale" δ-Funktion rechts stellt sicher, daß die Kommutatorbedingung mit den Eichbedingungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} \stackrel{!}{=} 0$$

verträglich ist, denn

$$\begin{aligned} [\nabla^i A^i, \Pi^j] &= -i\nabla^i\left[(\delta^{ij} - \nabla^{-2}\nabla^i\nabla^j)\delta^3(x-x')\right] \\ &= -i(\nabla^j - \nabla^j)\delta^3(x-x') = 0 \end{aligned}$$

und analog für $\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}$. Das Auftreten der transversalen δ-Funktion ist also eine Folge der Tatsache, daß nicht alle drei Komponenten des elektromagnetischen Feldes A^i unabhängig sind. Dies deckt sich mit dem im vorigen Abschnitt gefundenen Ergebnis, daß das freie elektromagnetische Feld nur zwei Freiheitsgrade besitzt.

Eine Quantisierung von φ braucht hier nicht durchgeführt zu werden, weil für das freie Feld in COULOMB-Eichung $\varphi \equiv 0$ gesetzt werden kann. Zudem ist auch $\Pi_0 = F_{00} \stackrel{F \text{ antisymm.}}{=} 0$ (siehe Abschnitt 2.1).

[1] Da die LAPLACE-Gleichung $\nabla^2 f = 0$ nichttriviale Lösungen besitzt, ist ∇^{-2} nicht eindeutig. Wegen $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ folgt aber $\nabla^2\left(-\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r'\right) = \int f(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')d^3r' = f(\vec{r})$ und damit $\nabla^{-2}f(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r'$ als *eine* mögliche Definition von ∇^{-2}, zu der eine beliebige Lösung der LAPLACE-Gleichung hinzuaddiert werden darf.

Aus den obigen Kommutatoren folgen nun wie üblich die Kommutatoren für die Operatoren $a_{k\alpha}$ und deren Adjungierte. Man erhält:

$$\begin{aligned}
[a_{k\alpha}, a^\dagger_{k'\alpha'}] &= \delta_{kk'}\delta_{aa'} \\
[a_{k\alpha}, a_{k'\alpha'}] &= [a^\dagger_{k\alpha}, a^\dagger_{k'\alpha'}] = 0
\end{aligned}$$

Die Operatoren a, $a^\dagger$ genügen damit den üblichen Vertauschungsregeln für Bosonen; dies spiegelt die Reduzierung der ursprünglich drei Freiheitsgrade des Vektorfeldes A^i auf die zwei durch $\vec{\epsilon}^{(1)}$ und $\vec{\epsilon}^{(2)}$ verkörperten Freiheitsgrade wider. Man kann daher $a^\dagger$ und a als *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen* interpretieren.

Die Energie ist gegeben durch

$$H = \sum_k \sum_\alpha \hbar\omega_k \left(a^\dagger_{k\alpha} a_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$

Der unendliche Beitrag kann hier wieder durch Übergang zum normalgeordneten Produkt in der Definition von H umgangen werden.

Kapitel 6

Quantisierung des Spin-$\frac{1}{2}$-Feldes

Spin-$\frac{1}{2}$-Felder, die Fermionen beschreiben, werden durch vierkomponentige Spinoren $\Psi(x)$ beschrieben. Deren Transformationsverhalten unter Lorentztransformationen ist gegeben durch

$$\Psi'(x) = S\ \Psi(x)$$

mit

$$S^{-1}\gamma_\mu S = a_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

wobei die γ^μ die üblichen DIRAC-Matrizen sind.

6.1 Freies Dirac-Feld

In diesem Kapitel sollen Felder betrachtet werden, die durch einen komplexen Spinor Ψ beschrieben werden, der der DIRAC-Gleichung für ein freies Teilchen

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{6.1}$$

mit den üblichen 4×4-Matrizen

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

(dabei sind $\vec{\sigma}$ die bekannten 2×2-PAULI-Matrizen) genügt.

Unter Einführung von

$$\gamma_i = \beta\alpha_i \qquad ; \gamma_0 = \beta \qquad \gamma_\mu\text{: Vierervektor}$$

läßt sich die DIRAC-Gleichung auch schreiben als:

$$i\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - m\Psi = 0 \qquad \text{(manifest kovariante Form)}$$

mit

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \;; \qquad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 \,.$$

Da Ψ ein komplexer Spinor ist, wird auch die Gleichung für $\Psi^\dagger$ benötigt:

$$-i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x_\mu}\gamma_\mu^\dagger - m\Psi^\dagger = 0 \tag{6.2}$$

Es ist üblich, hier anstelle von $\Psi^\dagger$ eine andere Funktion einzuführen:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0 \,.$$

Da

$$\gamma_0\gamma_0 = 1$$

gilt, folgt

$$\gamma_\mu = \gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 \,.$$

Damit erhält man für die Gleichung (6.2):

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x_\mu}\gamma_\mu^\dagger - m\Psi^\dagger = -i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x_\mu}\gamma_0\gamma_0\gamma_\mu^\dagger - m\Psi^\dagger &= 0 \qquad |\cdot\ \gamma_0 \\ \Longrightarrow \qquad -i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 - m\bar{\Psi} &= 0. \end{aligned}$$

Dies läßt sich noch vereinfachen (wegen $\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 = \gamma_\mu$):

$$i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu + m\bar{\Psi} = 0$$

Die Felder Ψ und $\bar{\Psi}$ werden hier als unabhängige Felder angesehen.

Die Dirac Gleichung besitzt einen erhaltenen Strom

$$j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\Psi \;, \tag{6.3}$$

wie sich unmittelbar aus (2.3) ergibt.

Es muß nun eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ gefunden werden, die die Dirac-Gleichungen für Ψ und $\bar{\Psi}$ als Lagrange-Gleichungen liefert. Dies ist der Fall für:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\Psi$$

Alternativ kann gesetzt werden

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\Psi - \frac{1}{2}(i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu + m\bar{\Psi})\Psi.$$

Beide LAGRANGE-Dichten unterscheiden sich nur um die Viererdivergenz des erhaltenen Stromes, die verschwindet. Im folgenden wird deshalb mit der ersten Form für $\mathcal{L}$ gearbeitet.

Variation nach $\bar{\Psi}$ liefert

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \Psi \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \right)} = 0,$$

also:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \Psi = 0. \tag{6.4}$$

Bei Variation nach Ψ erhält man:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -\bar{\Psi} m; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \right)} = i\bar{\Psi}\gamma_\mu,$$

also

$$i\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu + m\bar{\Psi} = 0$$

Konjugierte Impulse:

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\alpha} = i\left(\bar{\Psi}\gamma_0\right)_\alpha = i\Psi^\dagger_\alpha.$$

Dabei ist Ψ_α eine Komponente des Spinors Ψ. Interessanterweise ist $\bar{\Pi}$, der zu $\bar{\Psi}$ gehörige Impuls, gleich Null, weil $\mathcal{L}$ nicht von $\dot{\bar{\Psi}}$ abhängt.

Daher gilt für die Hamiltondichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi_\alpha \dot{\Psi}_\alpha + \underbrace{\bar{\Pi}_\alpha \dot{\bar{\Psi}}_\alpha}_{=0} - \mathcal{L} \\
&= \Pi_\alpha \dot{\Psi}_\alpha - \mathcal{L} \\
&= i\Psi^\dagger_\alpha \dot{\Psi}_\alpha - \mathcal{L} \\
&= i\Psi^\dagger_\alpha \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_0} - \bar{\Psi}\left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} - m \right)\Psi \\
&= \bar{\Psi}\left(-i\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + m \right)\Psi \qquad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Da ein freies Feld der DIRAC-Gleichung genügt, gilt natürlich:

$$\left(-i\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + m \right)\Psi = i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = i\gamma_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Also auch:

$$\mathcal{H} = i\bar{\Psi}\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0}\Psi = \Psi^\dagger i \frac{\partial}{\partial t}\Psi.$$

Die bisherigen Betrachtungen basieren auf der freien Dirac-Gleichung. Allerdings läßt sich viel auch übernehmen, wenn noch ein Wechselwirkungsterm existiert, der nicht von $\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}$ abhängt. Also:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{int}$$

mit $\mathcal{L}_{int}(\Psi, \Psi^\dagger, \varphi, \partial_\mu \varphi)$, wobei φ irgendwelche anderen Felder sind. Bei dieser Gestalt von $\mathcal{L}$ bleibt Π unverändert.

6.2 Lösung der freien Dirac-Gleichung

Die freie Dirac-Gleichung in der Form (6.1) kann durch den Ansatz

$$\Psi(x) = we^{-ipx}$$

gelöst werden. Dabei ist w ein Spinor, der nicht mehr von Ort und Zeit abhängt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (6.1) erhält man das Eigenwertproblem

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\begin{cases} u_{p,s} \\ v_{-p,s} \end{cases} = E_p \begin{cases} u_{p,s} \\ -v_{-p,s} \end{cases}$$

mit $E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$. $\vec{p}$ ist hier ein gewöhnlicher Vektor mit *c-Zahlen* als Komponenten.

Der Operator (im Raum der inneren Dirac-Freiheitsgrade

$$\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$$

mit

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad (\vec{\sigma}\text{: Pauli-Matrizen})$$

kommutiert mit $(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)$:

$$\begin{aligned}
(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m) &= \underbrace{(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})}_{\text{kommutieren}} + \underbrace{(\vec{\Sigma}\beta)}_{\text{kommutieren}}\cdot(\vec{p}m) \\
&= (\vec{\alpha}\cdot\vec{p})(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}) + \beta m\vec{\Sigma}\cdot\vec{p} \\
&= (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p})
\end{aligned}$$

Daher kann man die obigen Basiszustände u und v gleichzeitig auch als Eigenzustände zu $\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ wählen (wegen $\left(\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right)^2 = 1$ muß der Eigenwert $2s = \pm 1$ sein):

$$\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\begin{cases} u_{p,s} \\ v_{-p,s} \end{cases} = 2s\begin{cases} u_{p,s} \\ v_{-p,s} \end{cases} \qquad \text{mit } s = \pm\tfrac{1}{2}.$$

s heißt die "Helizität" des Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens.

Die vier Vektoren u_{ps}, v_{-ps} mit $s = \pm\frac{1}{2}$ sind Eigenvektoren von zwei hermiteschen Matrizen ($\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$ und $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}/p$) mit verschiedenen Eigenwerten. Folglich bilden sie eine vollständige, orthonormale Basis im vierdimensionalen Spinorraum:

Orthogonalitätseigenschaften der Spinoren u und v

$$u_{pr}^\dagger u_{ps} = v_{pr}^\dagger v_{ps} = 0 \qquad \text{für} r \neq s \qquad \text{und} \qquad u_{pr}^\dagger v_{-ps} = 0$$

Die explizite Gestalt der Spinoren erhält man durch Lösung der Gleichung

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)w(p) = E\ w(p).$$

Diese Gleichung ist nichttrivial lösbar nur für

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_p \qquad (E_p > 0).$$

Sei $w = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, dann folgt mit $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi &= (E-m)\varphi \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\varphi &= (E+m)\chi \end{aligned}$$

Bestimmung der Eigenvektoren zu den beiden möglichen Eigenwerten:

1. $E = +E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$
   Aus der zweiten Gleichung wird χ berechnet und in die erste eingesetzt. Dies liefert:

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p + m}\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E_p^2 - m^2}\varphi. \tag{6.5}$$

   Wegen $E_p^2 - m^2 = \vec{p}^2$ ist die letzte Gleichung für φ identisch erfüllt ($(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^2$ für jedes φ).

   Also gilt

$$w(p) = N\begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\varphi \end{pmatrix} \equiv u_{ps}.$$

   Der Impuls $\vec{p}$ im Spinor ist hier eine Zahl und kein Operator mehr.

2. $E = -E_p = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$
   Die Gleichungen lauten nun:

$$\begin{array}{rcl} \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi & = & -(E_p+m)\varphi \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi & = & -(E_p-m)\chi \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi$$

   eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$-\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E_p+m}\chi = -\frac{\vec{p}^2}{E_p+m}\chi = -(E_p-m)\chi, \qquad \text{erfüllt für jedes } \chi.$$

$$\Longrightarrow \qquad w(p) = N\begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} \equiv v_{-ps}$$

Die Forderung, daß u und v Eigenzustände zur Helizität sind, läßt sich erfüllen durch geeignete Wahl der Zweierspinoren φ und χ. Am einfachsten ist dies zu sehen, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, daß die z-Achse parallel zu $\vec{p}$ ist. Dann sind die geeigneten Spinoren φ bis auf eine mögliche Phase gerade die einfachen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(analog für } \chi\text{).}$$

Die Phasenwahl wird im Anhang A diskutiert.

Die Spinoren werden nun so normiert, daß gilt:

$$u_{ps}^\dagger u_{ps} = v_{-ps}^\dagger v_{-ps} \stackrel{!}{=} 1.$$

Dies liefert:

$$u^\dagger u = N^2|\varphi|^2\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{(E_p+m)^2}\right) = |\varphi|^2\frac{2E_p}{E_p+m}N^2.$$

Der Normierungsfaktor N ist dann (für $|\varphi|^2 = 1$)

$$N = \left(\frac{2E_p}{E_p+m}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}}$$

und ebenso für v. Es sollte beachtet werden, daß diese Normierung nicht lorentzinvariant ist. Die linke Seite dieser Gleichung ist nämlich die nullte Komponente eines Vierervektors (die Dichte). Aus diesem Grund wird in der Literatur oft auf $u^\dagger u \stackrel{!}{=} E$ normiert. Diese Gleichung ist kovariant, da sich beide Seiten auf die gleiche Weise transformieren: die linke Seite als nullte Komponente des Viererstromes j_μ, die rechte Seite als nullte Komponente des Viererimpulses p_μ.

6.2.1 FOURIER-Entwicklung

Wie für das Spin-Null-Feld wird auch hier eine FOURIER-*Entwicklung* angesetzt:

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\vec{p}} S_{\vec{p}}(t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}.$$

Hier ist $S_{\vec{p}}(t)$ eine 4×1-Matrix, die nicht von $\vec{r}$ abhängt[1]. Die Matrizen $S_{\vec{p}}(t)$ stellen Operatoren im Hilbertraum der DIRAC-Spinoren (vierkomponentige Wellenfunktionen) dar, ebenso wie Ψ. Sie können nun nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Basis entwickelt werden:

$$S_p(t) = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} (a_{ps}(t)u_{ps} + b^\dagger_{-ps}(t)v_{-ps}).$$

Dabei sind die a_{ps} und $b^\dagger_{-ps}$ die Entwicklungskoeffizienten. Damit bekommt man für $\Psi(\vec{r},t)$:

$$\begin{aligned}
\Psi(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\vec{p}} S_{\vec{p}}(t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps}(a_{ps}(t)u_{ps} + b^\dagger_{-ps}(t)v_{-ps})e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps}(a_{ps}(t)u_{ps}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} + b^\dagger_{ps}(t)v_{ps}e^{-i\vec{p}\vec{r}})
\end{aligned}$$

Dabei wurde im 2. Summanden rechts wieder die Ersetzung $\vec{p} \mapsto -\vec{p}$ vorgenommen; dies ist möglich, weil über *alle* $\vec{p}$, d. h. positive und negative, summiert wird.

Entsprechend lautet die Entwicklung für $\Pi_\lambda = i\Psi^\dagger_\lambda$. Diese Feldentwicklungen sind sowohl für freie als auch für wechselwirkende Felder gültig, da jedes $S_{\vec{p}}(t)$ nach der vollständigen Basis entwickelt werden kann.

6.3 Quantisierung

6.3.1 Hamiltondichte des Spin-1/2 Feldes

Die Hamiltondichte für das freie Feld ist gegeben durch:

$$\mathcal{H} = \bar{\Psi}\left(-i\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i} + m\right)\Psi \qquad i = 1,2,3$$

[1] Wie schon für die Spinoren u und v wird auch für S der Vektorpfeil über dem Impuls p im folgenden der Einfachheit halber weggelassen.

Durch Einsetzen der Entwicklungen für Ψ folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Psi^\dagger \gamma_0 \left(-i\gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + m\right)\Psi \\
&= \Psi^\dagger \beta \left(-i\beta\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + m\right)\Psi \\
&= \Psi^\dagger \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m\right)\Psi. \\
\Longrightarrow \qquad H &= \int \mathcal{H} d^3x \\
&= \int \frac{1}{\Omega} \sum_{\substack{\vec{p},s \\ \vec{p}\,',s'}} \left(a^\dagger_{ps} u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + b_{ps} v^\dagger_{ps} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{r}}\right)\left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m\right) \\
&\quad \times \left(a_{p's'} u_{p's'} e^{+i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}} + b^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}}\right) d^3x \\
&= \frac{1}{\Omega} \sum_{\substack{\vec{p},s \\ \vec{p}\,',s'}} \int \left(a^\dagger_{ps} u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + b_{ps} v^\dagger_{ps} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{r}}\right) \\
&\quad \times \Big[\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,' \left(a_{p's'} u_{p's'} e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}} - b^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}\,'}\right) \\
&\quad + \beta m \left(a_{p's'} u_{p's'} e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}} + b^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}\,'}\right)\Big] d^3x \\
&= \frac{1}{\Omega} \sum_{\substack{\vec{p},s \\ \vec{p}\,',s'}} \int \left(a^\dagger_{ps} u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + b_{ps} v^\dagger_{ps} e^{+i\vec{p}\cdot\vec{r}}\right) \\
&\quad \times \Big[\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,' + \beta m\right) a_{p's'} u_{p's'} e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}} \\
&\quad + \left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,' + \beta m\right) b^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}\,'}\Big]
\end{aligned}
$$

Nun gilt nach Definition der u's und v's:

$$
\begin{aligned}
(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m) u_{ps} &= E_p u_{ps} \\
(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m) v_{-ps} &= -E_p v_{-ps} \longrightarrow (-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m) v_{ps} = -E_p v_{ps}
\end{aligned}
$$

Dies eingesetzt liefert

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p},s,\vec{p}\,',s'} \int d^3x E_{p'} \\
&\quad \times \Big\{a^\dagger_{ps} a_{p's'} u^\dagger_{ps} u_{p's'} e^{i(\vec{p}\,'-\vec{p})\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{ps} b^\dagger_{p's'} u^\dagger_{ps} v_{p's'} e^{-i(\vec{p}\,'+\vec{p})\cdot\vec{r}} \\
&\quad + b_{ps} a_{p's'} v^\dagger_{ps} u_{p's'} e^{i(\vec{p}\,'+\vec{p})\cdot\vec{r}} - b_{ps} b^\dagger_{p's'} v^\dagger_{ps} v_{p's'} e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,')\vec{r}}\Big\} \\
&= \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{p},s,s'} E_p \\
&\quad \times \Big\{a^\dagger_{ps} a_{ps'} u^\dagger_{ps} u_{ps'} - a^\dagger_{ps} b^\dagger_{-ps'} u^\dagger_{ps} v_{-ps'} + b_{ps} a_{-ps'} v^\dagger_{ps} u_{-ps'} - b_{ps} b^\dagger_{ps} v^\dagger_{ps} v_{ps'}\Big\}\, \Omega.
\end{aligned}
$$

Da die u's und v's eine orthonormale Basis bilden, gilt:

$$\begin{aligned} u_{ps}^{\dagger} v_{-ps'} &= v_{ps}^{\dagger} u_{-ps'} &= 0 \\ u_{ps}^{\dagger} u_{ps'} &= v_{ps}^{\dagger} v_{ps'} &= \delta_{ss'}. \end{aligned}$$

Also folgt für H:

$$H = \sum_{ps} E_p (a_{ps}^{\dagger} a_{ps} - b_{ps} b_{ps}^{\dagger}).$$

6.3.2 Quantisierung

Die Quantisierung von Fermionenfeldern wird erreicht durch *Anti*kommutatoren, da nur dadurch das PAULI-Prinzip berücksichtigt werden kann, wie weiter unten gezeigt werden wird:

$$\begin{aligned} \{\Psi_\alpha(\vec{r},t), \Pi_\beta(\vec{r}\,',t)\} &= i\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta_{\alpha\beta} \\ \{\Psi_\alpha(\vec{r},t), \Psi_\beta(\vec{r}\,',t)\} &= \{\Pi_\alpha(\vec{r},t), \Pi_\beta(\vec{r}\,',t)\} = 0. \end{aligned}$$

Wegen

$$\Pi_\beta = i\ \Psi_\beta^{\dagger}$$

kann man diese Antikommutatoren auch schreiben als:

$$\begin{aligned} \left\{\Psi_\alpha(\vec{r},t), \Psi_\beta^{\dagger}(\vec{r}\,',t)\right\} &= \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta_{\alpha\beta} \\ \{\Psi_\alpha(\vec{r},t), \Psi_\beta(\vec{r}\,',t)\} &= \left\{\Psi_\alpha^{\dagger}(\vec{r},t), \Psi_\beta^{\dagger}(\vec{r}\,',t)\right\} = 0. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für diese nun quantisierten Felder können auch aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gewonnen werden. Sie ergeben sich als die DIRAC-Gleichungen für Ψ und $\bar{\Psi}$; die Theorie ist also quantenmechanisch konsistent, d. h. Zeitentwicklung und Quantisierung können miteinander vertauscht werden.

Aus den Antikommutatoren für Feld und Impuls erhält man dann entsprechende Antikommutatoren für a und b, die damit auch zu Operatoren werden:

$$\begin{aligned} \{a_{ps}(t), a_{p's'}^{\dagger}(t)\} &= \{b_{ps}(t), b_{p's'}^{\dagger}(t)\} &= \delta_{\vec{p}\vec{p}\,'}\delta_{ss'} \\ \{a_{ps}(t), a_{p's'}(t)\} &= \{b_{ps}(t), b_{p's'}(t)\} &= 0 \\ \{a_{ps}(t), b_{p's'}(t)\} &= \{a_{ps}(t), b_{p's'}^{\dagger}(t)\} &= 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Antikommutatoren ergbibt sich für den Hamiltonoperator des Spin-1/2 Feldes:

$$H = \sum_{ps} E_p (a_{ps}^{\dagger} a_{ps} + b_{ps}^{\dagger} b_{ps} - 1)$$

An dieser Stelle wird die Wichtigkeit der *Anti*kommutatoren deutlich: Hätten wir Kommutatoren für die Fermionenoperatoren gefordert, so hätten wir für H die Operatorkombination

$$a^\dagger a - b^\dagger b - 1$$

erhalten. Ein solcher Operator besäße aber keinen stabilen Vakuumzustand, da die Energie beliebig negativ werden kann, wenn nur die Eigenwerte von $b^\dagger b$ genügend groß werden.

Da eine Konstante die HEISENBERGsche Bewegungsgleichung nicht beeinflußt, kann die 1 in H wieder weggelassen werden:

$$H = \sum_{ps} E_p (a^\dagger_{ps} a_{ps} + b^\dagger_{ps} b_{ps}),$$

ohne die zeitliche Entwicklung der Operatoren zu ändern. Dies entspricht wieder der Definition von H als normalgeordnetes Produkt.

Die Operatoren $a(t)$ und $b(t)$ genügen der HEISENBERGschen Bewegungsgleichung:

$$-i\frac{\partial}{\partial t} a(t) = [H, a] = -E_p a(t)$$

$$\Longrightarrow \qquad a(t) = e^{-iE_p t} a(0)$$

Analog

$$b(t) = e^{-iE_p t} b(0).$$

Wenn H ein wechselwirkendes Feld beschreibt, so gilt diese Zeitabhängigkeit nur in der Wechselwirkungsdarstellung (s. Kap. 7). Aus den Operatoren a, $a^\dagger$, b und $b^\dagger$ lassen sich wie üblich nun Fermionen-Vielteilchenzustände aufbauen. Dabei wird sofort offensichtlich, daß die Verwendung von *Anti*kommutatoren das Pauli-Prinzip berücksichtigt, denn:

$$a^\dagger_{ps} a^\dagger_{ps} |0> = -a^\dagger_{ps} a^\dagger_{ps} |0> = 0$$

6.3.3 Impuls und Ladung des Spin-1/2-Feldes

Im Abschnitt 2.2 ist der aus der Invarianz der Langrangefunktion folgende Impuls angegeben worden:

$$P_\mu = \int T_{0\mu} d^3x = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_0}\right)} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x^\mu} - \mathcal{L} g_{0\mu} \right\} d^3x$$

Für den Integranden gilt:

$$\begin{aligned}
T_{0\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Psi_\alpha)}\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x^\mu} - \mathcal{L}g_{0\mu} \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Psi)}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\Psi})}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^\mu} - \mathcal{L}g_{0\mu} \\
&= i\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - \mathcal{L}g_{0\mu} \\
&= i\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} + \bar{\Psi}\left(-i\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + m\right)\Psi g_{0\mu}
\end{aligned}$$

Betrachte $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
T_{0i} &= i\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \\
\Longrightarrow \qquad P_i &= \int i\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}d^3x \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{P} = -i\int\Psi^\dagger\vec{\nabla}\Psi d^3x\,.
\end{aligned}$$

Man erhält also für den gesamten Impuls des Feldes einen dem Erwartungswert analogen Ausdruck. Nur ist jetzt P_i ein *Operator*.

Der Impuls $\vec{P}(t)$ kann auch auf die Erzeugungsoperatoren umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\vec{P}(t) &= -i\int\Psi^\dagger\vec{\nabla}\Psi d^3x \\
&= \sum_{\substack{\vec{p},s \\ \vec{p}\,',s'}}\frac{1}{\Omega}\int\left(a^\dagger_{ps}u^\dagger_{ps}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} + b_{ps}v^\dagger_{ps}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\right) \\
&\quad\times\left(\vec{p}\,'a_{p's'}u_{p's'}e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}} - \vec{p}\,'b^\dagger_{p's'}v_{p's'}e^{-i\vec{p}\,'\cdot\vec{r}}\right)d^3x \\
&= \sum_{ps}\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} - b_{ps}b^\dagger_{ps}\right)\vec{p} \\
&= \sum_{ps}(a^\dagger_{ps}a_{ps} + b^\dagger_{ps}b_{ps}\underbrace{-1)\vec{p}}_{\Sigma\cdots=0\text{ wegen Symmetrie}} \\
&= \sum_{ps}\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} + b^\dagger_{ps}b_{ps}\right)\vec{p}
\end{aligned}$$

Die hier verwendete Symmetriebeziehung berücksichtigt die Forderung, daß der Impuls des Vakuums verschwindet.

Aus der letzten Gleichung ist offensichtlich , daß die Feldquanten den Impuls $\vec{p}$ tragen, und zwar sowohl die durch die Operatoren $a^\dagger$ als auch die durch die Operatoren $b^\dagger$ beschriebenen.

Der Ladungsoperator ergibt sich in der Dirac-Theorie zu:

$$Q = q\int\Psi^\dagger\Psi d^3x$$

$$
\begin{aligned}
&= q \sum_{ps} \left(a^\dagger_{ps} a_{ps} + b_{ps} b^\dagger_{ps} \right) \\
&= q \sum_{ps} \left(a^\dagger_{ps} a_{ps} - b^\dagger_{ps} b_{ps} \right) + e \sum_{ps} 1
\end{aligned}
$$

Die Operatoren $b^\dagger$ erzeugen also Teilchen negativer Ladung (die Antiteilchen). Die unendliche Konstante $\sum_{ps} 1$ gibt die Ladung des Vakuums. Diese kann wieder, wie üblich, durch Normalordnung in der Definition des Ladungsoperators zu Null gesetzt werden. Daraus folgt:

$a^\dagger_{ps}|0\rangle$: erzeugt Teilchen mit positiver Ladung, Viererimpuls p und Helizität s

$b^\dagger_{ps}|0\rangle$: erzeugt Teilchen mit negativer Ladung, Viererimpuls p und Helizität s.

Kapitel 7

Die S-Matrix

7.1 S-Matrix

Jetzt soll die Gleichung (3.3) von Seite 13 in der Wechselwirkungsdarstellung gelöst werden:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H_{int}|t\rangle.$$

Formal läßt sich schreiben:

$$|t\rangle = U(t,t_0)|t_0\rangle$$

Der „Propagator“ U muß unitär sein, wie im folgenden gezeigt wird. Aus

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H_{int}|t\rangle$$

und der Definition von U folgt nämlich:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_{int}U(t,t_0) \qquad | \quad U^\dagger(t,t_0)\ldots$$

und (adjungiert):

$$-i\frac{\partial}{\partial t}U^\dagger(t,t_0) = U^\dagger(t,t_0)H_{int}. \qquad | \quad \ldots U(t,t_0)$$

Durch geeignete Multiplikation und Subtraktion folgt:

$$i\frac{\partial}{\partial t}(U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)) = 0.$$

Da offensichtlich $U(t_0,t_0) = 1$ gilt, also auch $U^\dagger(t_0,t_0)U(t_0,t_0) = 1$, folgt hieraus bereits

$$U^\dagger U = 1 \qquad \text{für } \textit{alle } t,$$

d. h. die Unitarität von U.

Die S-*Matrix* wird definiert als der Grenzwert

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to +\infty}} U(t, t_0).$$

Sie verbindet einen Zustandsvektor bei $t = -\infty$ mit seinem Wert bei $t = +\infty$. Da jedes Streuproblem auf eine solche Verbindung zurückgeführt werden kann, enthält S alle Informationen über Wirkungsquerschnitte etc.

7.2 Entwicklung der S-Matrix

Die S-Matrix war in Abschnitt 7.1 definiert worden als:

$$S = \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to +\infty}} U(t, t_0)$$

wobei der Zeitentwicklungsoperator U der Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_{int}(t) U(t, t_0)$$

genügt (Wechselwirkungsdarstellung!).

Nach Ersetzung $H_{int} \mapsto \lambda H_{int}$ kann diese Gleichung störungstheoretisch *iteriert* werden: Sei

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t, t_0)$$

Eingesetzt:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \sum_n \lambda^n U_n = \lambda H_{int} \sum_n \lambda^n U_n$$

Koeffizientenvergleich für Potenzen von λ:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} U_0 &= 0 \\ &\vdots \\ i\frac{\partial}{\partial t} U_n &= H_{int} U_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.1}$$

Es gilt die Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} && U(t_0, t_0) &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Longrightarrow && U_0(t_0, t_0) &= 1, \\ && U_n(t_0, t_0) &= 0 \qquad (n > 0). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun aber für U_0:

$$U_0(t,t_0) = 1 \qquad \text{für } \textit{alle } t, \text{ weil } U_0 = \text{const nach (7.1)},$$

und sukzessive für $U_1, U_2 \ldots$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_1(t,t_0) = H_{int}U_0 = H_{int}(t) \implies U_1(t,t_0) = -i\int_{t_0}^{t} H_{int}(t_1)dt_1$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_2(t,t_0) = H_{int}U_1 \implies U_2(t,t_0) = -i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{int}(t_1)U_1(t_1,t_0)$$

$$= (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)$$

Nach Setzung $\lambda = 1$ hat man damit eine Reihenentwicklung von U nach der "Stärke" von H_{int} (d. h. nach Potenzen von H_{int}). Allgemein lautet die Reihe:

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\ldots H_{int}(t_n)$$

Da hier in jedem Integral über die Grenze des nächstinneren Integrals integriert wird, ist der Grenzübergang $t \to \infty$ nur schwer ausführbar.

Dieses Zeitintegral läßt sich aber umordnen. Dies sei hier illustriert für $n = 2$. Integrationsbereich in U_2 siehe Abbildung 7.1.

$$I = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_1 H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)$$

durch Vertauschung der Reihenfolge der Integration

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 H_{int}(t_2)H_{int}(t_1)$$

durch Umbenennung der Integrationsvariablen.

Also gilt:

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \left(\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1)H_{int}(t_2) + \int_{t_1}^{t} dt_2 H_{int}(t_2)H_{int}(t_1) \right).$$

Im ersten Integral ist $t_2 \le t_1$, im zweiten $t_2 \ge t_1$. Zu beachten ist, daß die Operatoren zu verschiedenen Zeiten nicht kommutieren.

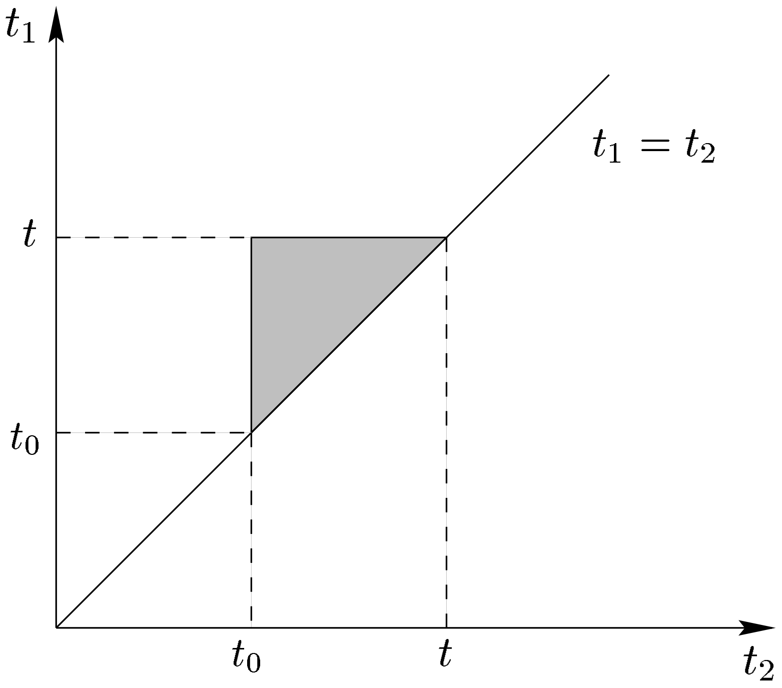

Abbildung 7.1: Integrationsbereich in U_2

Es sei nun der *Zeitordnungsoperator* P definiert durch

$$\mathrm{P}(H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} H_{int}(t_1)H_{int}(t_2) & \text{falls } (t_1 \geq t_2) \\ H_{int}(t_2)H_{int}(t_1) & \text{falls } (t_1 < t_2) \end{cases}$$

Dann läßt sich I schreiben als

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1)H_{int}(t_2) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t} dt_2 \mathrm{P}(H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)) \end{aligned}$$

Diese Umwandlung in zeitgeordnete Produkte ist allgemein möglich (!):

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int\limits_{t_0}^{t} dt_n \mathrm{P}(H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_n))$$

(beachte die nun unproblematischen Integralgrenzen $\Longrightarrow$ Grenzübergang möglich)

Damit läßt sich S darstellen:

$$\begin{aligned} S &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to +\infty}} U(t,t_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_n \mathrm{P}(H_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_n)) \end{aligned}$$

Weil U unitär ist, ist auch S unitär! Die auftretende Reihe konvergiert im allgemeinen sehr gut. In der QED ist in der Regel $n \leq 2$ (*schwache* Wechselwirkung, $\lambda \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$)!

Zusammengefaßt:

$$S = \mathrm{P}\left\{\exp\left(-i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{int}(t)dt\right)\right\}.$$

Der Operator H_{int} wird hier allein durch freie Feldoperatoren ausgedrückt, da die Zeitentwicklung der Operatoren in der Wechselwirkungs-Darstellung allein durch den freien Hamilton-Operator bestimmt ist und angenommen wird, daß bei $t \to \pm\infty$ die Zustände des Systems wieder frei sind.

Kapitel 8

Feynman-Propagatoren

In diesem Kapitel werden nun die praktischen Verfahren zur Berechnung der S-Matrix bereit gestellt. Dabei wird stets in der Wechselwirkungsdarstellung gearbeitet. Die in ihr auftretenden ungestörten (freien) Operatoren und Zustände werden im folgenden Abschnitt diskutiert. Daran schließt sich dann eine Diskussion wichtiger Hilfsmittel zur praktischen Berechnung an.

8.1 Freie Felder

8.1.1 Wahl von H_0

Die S-Matrix war in Kapitel 7 als Grenzwert des Zeitentwicklungsoperator definiert worden, der der Bewegungsgleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_{int}U(t,t_0)$$

genügt. Dabei soll von jetzt an H immer derart in $H_0 + H_{int}$ aufgespalten werden, daß H_0 das gleiche *Spektrum* wie H besitzt. Dies ist immer dann möglich, wenn die Theorie keine stabilen gebundenen Zustände besitzt (in der QED ist das der Fall). Für H_0 kann man dann den Hamiltonoperator der freien Felder wählen, wobei die Massen dieser Felder den physikalischen, beobachteten Massen der wechselwirkenden Felder gleichgesetzt werden.

Beispiel: Spin-Null-Feld

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m_0^2\varphi^2) + g_0^2\varphi^4 - E_{vac}$$

mit $g_0^2 > 0$ reell und m_0 der mechanischen Masse.

Mit $H = \int \mathcal{H} d^3x$ soll $H|0\rangle \stackrel{!}{=} 0$ sein $\quad\Longrightarrow\quad E_{vac}$.

Da $+g_0^2\varphi^4$ als Wechselwirkungsterm *repulsiv* ist, wird das Spektrum von $\mathcal{H}$ nur ungebundene Zustände besitzen, also rein kontinuierlich sein. Es muß die Gestalt haben:

$$E = \sum_k n_k \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

wobei m die physikalische, tatsächlich beobachtete Masse ist. Dies ist aber auch das Spektrum von:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(\Pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2) - E_0$$

mit $H_0|0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_0$.

Also Aufspaltung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}$$

mit

$$\mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2}(m_0^2 - m^2)\varphi^2 - (E_{vac} - E_0) + g_0^2\varphi^4.$$

Beim Vorhandensein *gebundener* Zustände treten Komplikationen auf, die vorerst ignoriert werden (die QED bspw. hat aber keinen gebundenen Zustand).

Im folgenden wird für H_0 immer der Hamiltonoperator der freien Felder gewählt, aber mit der physikalischen Masse m.

8.1.2 Zeitunabhängige Feldoperatoren

In der Wechselwirkungsdarstellung wird die Zeitabhängigkeit aller Operatoren durch H_0 bestimmt. Wegen der speziellen Wahl von H_0 (freie Felder!) ist ihre Zeitabhängigkeit damit als harmonisch bekannt.

1. *Spin-Null-Feld, Spin-1-Feld*

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}(a_p e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)}) \\ &= \alpha(x) + \alpha^\dagger(x)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a_p e^{i(\vec{p}\vec{x}-\omega_p t)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a_p e^{-ipx} \\ \omega_p &= \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\end{aligned}$$

($x \stackrel{\text{def}}{=} (t,\vec{x})$, $m \mathrel{\hat{=}}$ physikalische Masse).

Der Operator a_k ist jetzt zeitunabhängig.

Die Ausdrücke für das elektromagnetische Feld (Spin 1) sehen völlig gleichartig aus. Es treten lediglich zusätzlich Summen über die zwei möglichen Polarisationen $\epsilon^{(1)}$ und $\epsilon^{(2)}$ auf.

2. *Spin-$\frac{1}{2}$-Feld*

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps}\left(a_{ps}u_{ps}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} + b^\dagger_{ps}v_{ps}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)}\right)\\ &= u(x) + \bar{v}(x)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} a_{ps}u_{ps}e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)}\\ \bar{v}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} b^\dagger_{ps}v_{ps}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)}\end{aligned}$$

$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$
$m\hat{=}$ physikalische Masse des Spin-$\frac{1}{2}$-Feldes.

Die Operatoren a_{ps} und $b^\dagger_{ps}$ sind wieder zeit*un*abhängig.

Führe ein:

$$\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x)\gamma_0 = \bar{u}(x) + v(x)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} a^\dagger_{ps}u^\dagger_{ps}\gamma_0 e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} a^\dagger_{ps}u^\dagger_{ps}\gamma_0 e^{ipx}\\ v(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} b_{ps}v^\dagger_{ps}\gamma_0 e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} b_{ps}v^\dagger_{ps}\gamma_0 e^{-ipx}\end{aligned}$$

8.2 Zeitordnung, Normalordnung, Kontraktionen

Zur Auswertung der Integrale in S ist es zweckmäßig, diese in normalgeordnete Produkte zu verwanden, d.h. in Produkte, in denen *alle Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren* stehen.

Sei $X_i(x_i)$ einer der Feldoperatoren $\alpha(x)$, $u(x)$ und $v(x)$, die nur Vernichtungsoperatoren enthalten, oder einer der Operatoren $\alpha^\dagger(x)$,$\bar{u}(x)$ und $\bar{v}(x)$, die nur Erzeugungsoperatoren enthalten.

- Das *zeitgeordnete Produkt* dieser Operatoren wird **definiert** durch

$$\mathrm{T}[X_1(x_1), X_2(x_2) \cdots X_n(x_n)] \stackrel{\text{def}}{=} \delta_p X_{p_1}(x_{p_1}) \cdots X_{p_n}(x_{p_n})$$

mit $x = (t, \vec{x})$. Auf der rechten Seite gilt

$$t_{p_1} \geq \cdots \geq t_{p_n}.$$

Wenn $t_i = t_j$, soll die Reihenfolge der Operatoren auf beiden Seiten der Gleichung gleich sein. Das legt die Permutation p der Indizes $1, \ldots, n$ fest. Dabei ist $\delta_p = \operatorname{sign} p = \pm 1$, je nachdem ob eine gerade $(+1)$ oder eine ungerade (-1) Zahl von Vertauschungen von Fermionenoperatoren nötig war, um von links nach rechts zu gelangen. Im Fall von Bosonenoperatoren ist δ_p immer $= +1$.

Beispiele:

$$\mathrm{T}\left[\Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(2)\right] = \begin{cases} \Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(2) & \text{falls } (t_1 \geq t_2) \\ -\Psi_\beta(2)\Psi_\alpha(1) & \text{falls } (t_1 < t_2) \end{cases}$$

Das Minuszeichen erscheint, da es sich bei $\Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(2)$ um ein Fermionenfeld (antisymmetrische Wellenfunktion) handelt.

$$\mathrm{T}[\varphi(1)\varphi(2)] = \begin{cases} \varphi(1)\varphi(2) & \text{falls } (t_1 \geq t_2) \\ \varphi(2)\varphi(1) & \text{falls } (t_1 < t_2) \end{cases}$$

- Das *normalgeordnete Produkt* wird **definiert** durch

$$:X_1(x_1)X_2(x_2) \cdots X_n(x_n): \stackrel{\text{def}}{=} \delta_p X_{p_1}(x_{p_1}) \cdots X_{p_n}(x_{p_n}).$$

Dabei ist auf der rechten Seite die Anordnung so, daß Vernichtungsoperatoren stets rechts von den Erzeugungsoperatoren stehen. Auch hier ist p eine (geeignete) Permutation der Indizes $1, \ldots, n$. Das normalgeordnete Produkt hat die wichtige Eigenschaft, daß sein Vakuum-Erwartungswert verschwindet:

$$\langle 0 | X_1 \ldots X_n | 0 \rangle = 0.$$

Beispiele (α, β sind hierbei die Spinorindizes $1, \ldots, 4$):

$$\begin{aligned}
{:}\Psi_\alpha(1)\bar{\Psi}_\beta(2){:} &= {:}(u_\alpha(1) + \bar{v}_\alpha(1))(\bar{u}_\beta(2) + v_\beta(2)){:} \\
&= {:}u_\alpha(1)\bar{u}_\beta(2) + u_\alpha(1)v_\beta(2) + \bar{v}_\alpha(1)\bar{u}_\beta(2) + \bar{v}_\alpha(1)v_\beta(2){:} \\
&= -\bar{u}_\beta(2)u_\alpha(1) + u_\alpha(1)v_\beta(2) + \bar{v}_\alpha(1)\bar{u}_\beta(2) + \bar{v}_\alpha(1)v_\beta(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{:}\varphi(1)\varphi(2){:} &= {:}(\alpha(1) + \alpha^\dagger(1))(\alpha(2) + \alpha^\dagger(2)){:} \\
&= {:}\alpha(1)\alpha(2) + \alpha(1)\alpha^\dagger(2) + \alpha^\dagger(1)\alpha(2) + \alpha^\dagger(1)\alpha^\dagger(2){:} \\
&= \alpha(1)\alpha(2) + \alpha^\dagger(2)\alpha(1) + \alpha^\dagger(1)\alpha(2) + \alpha^\dagger(1)\alpha^\dagger(2)
\end{aligned}$$

- **Definiert** (!) werden weiter die entsprechenden Ausdrücke für Summen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(A + B) &= \mathrm{T}(A) + \mathrm{T}(B) \\
{:}A + B{:} &= {:}A{:} + {:}B{:}
\end{aligned}$$

- Nun folgt eine weitere **Definition:** *Kontraktion* zweier Operatoren:

$$X_1(1)X_2(2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{T}[X_1(1)X_2(2)] - {:}X_1(1)X_2(2){:}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\varphi(x)\varphi(0) &= \mathrm{T}[\varphi(x)\varphi(0)] - {:}\varphi(x)\varphi(0){:} \\
&= \begin{cases} \varphi(x)\varphi(0) - (\alpha(x)\alpha(0) + \alpha^\dagger(0)\alpha(x) + \alpha^\dagger(x)\alpha(0) + \alpha^\dagger(x)\alpha^\dagger(0) & (t \geq 0) \\ \varphi(0)\varphi(x) - (\alpha(x)\alpha(0) + \alpha^\dagger(0)\alpha(x) + \alpha^\dagger(x)\alpha(0) + \alpha^\dagger(x)\alpha^\dagger(0) & (t < 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha(x)\alpha^\dagger(0) - \alpha^\dagger(0)\alpha(x) & (t \geq 0) \\ \alpha(0)\alpha^\dagger(x) - \alpha^\dagger(x)\alpha(0) & (t < 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} [\alpha(x), \alpha^\dagger(0)] & (t \geq 0) \\ [\alpha(0), \alpha^\dagger(x)] & (t < 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der expliziten Darstellung von $\alpha(x)$ läßt sich dieser Kommutator ausrechnen. Man erhält in beiden Fällen eine reine Zahl (keinen Operator!), die natürlich von x abhängt (s. Abschn. 8.4.1).

Analog für Fermionen:

$$\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0) = \mathrm{T}(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0)) \; - {:}\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0){:}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}[\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0)] &= \begin{cases} (u_\alpha(x)+\bar{v}_\alpha(x))(\bar{u}_\beta(0)+v_\beta(0)) & (t \geq 0) \\ -(\bar{u}_\beta(0)+v_\beta(0))(u_\alpha(x)+\bar{v}_\alpha(x)) & (t < 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} u_\alpha(x)\bar{u}_\beta(0)+u_\alpha(x)v_\beta(0)+\bar{v}_\alpha(x)\bar{u}_\beta(0)+\bar{v}_\alpha(x)v_\beta(0) \\ -\bar{u}_\beta(0)u_\alpha(x)-\bar{u}_\beta(0)\bar{v}_\alpha(x)-v_\beta(0)u_\alpha(x)-v_\beta(0)\bar{v}_\alpha(x) \end{cases} \\
{:}\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0){:} &= -\bar{u}_\beta(0)u_\alpha(x)+u_\alpha(x)v_\beta(0)+\bar{v}_\alpha(x)\bar{u}_\beta(0)+\bar{v}_\alpha(x)v_\beta(0)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \underbracket{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta}(0) = \begin{cases} \{u_\alpha(x),\bar{u}_\beta(0)\} & (t \geq 0) \\ -\{v_\beta(0),\bar{v}_\alpha(x)\} & (t < 0) \end{cases} ,
$$

weil alle Operatoren a mit allen b kommutieren. Auch hier sind die Antikommutatoren rechts Zahlen, die berechnet werden können (s. Abschn. 8.4.2).

Da der Vakuumerwartungswert des normalgeordneten Produkts von Operatoren immer verschwindet, gilt für die Kontraktion

$$
\underbracket{X_1(1)X}_2(2) = \langle 0|\, \mathrm{T}[X_1(1)X_2(2)|0\rangle \ ,
$$

die Kontraktion ist also gleich dem Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts der Operatoren.

Da nach Definition des Normalproduktes gilt:

$$
\langle 0|{:}\varphi(x)\varphi(0){:}|0\rangle = 0,
$$

folgt auch

$$
\langle 0|\ \underbracket{\varphi(x)\varphi}(0)|0\rangle = \langle 0|\, \mathrm{T}[\varphi(x)\varphi(0)]|0\rangle.
$$

Damit kann der Vakuumerwartungswert der Kontraktion auch geschrieben werden als:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\ \underbracket{\varphi(x)\varphi}(0)|0\rangle &= \langle 0|\, \mathrm{T}[\varphi(x)\varphi(0)]|0\rangle \\
&= \langle 0| \left\{ \begin{matrix} [\alpha(x),\alpha^\dagger(0)] \\ [\alpha(0),\alpha^\dagger(x)] \end{matrix} \right\} |0\rangle \quad \begin{matrix} (t \geq 0) \\ (t < 0) \end{matrix} \\
&= \langle 0|\alpha(x)\alpha^\dagger(0)\theta(t)+\alpha(0)\alpha^\dagger(x)\theta(-t)|0\rangle.
\end{aligned}
$$

Durch Einschieben einer **1** zwischen den Operatoren erlaubt dieses Matrixelement eine physikalisch anschauliche Deutung als Übergangsamplitude:

1. $t \geq 0$: Hier wird zur Zeit $t = 0$ im Punkt $\vec{0}$ ein Teilchen erzeugt, das dann zur Zeit t im Punkt x wieder verschwindet.
2. $t < 0$: Hier wird zur Zeit t im Punkt $\vec{x}$ ein Teilchen erzeugt, das später, zur Zeit 0, in $\vec{0}$ verschwindet.

Die gleichen Betrachtungen lassen sich auch für die Fermionen durchführen:

$$\begin{aligned}
\Psi(x)\bar{\Psi}(0) &= \langle 0|\,\mathrm{T}[\Psi(x)\bar{\Psi}(0)]|0\rangle \\
&= \begin{cases} \langle 0|\{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(0)|0\rangle\} & (t \geq 0) \\ \langle 0|\{v_\beta(0), \bar{v}_\alpha(x)\}|0\rangle & (t < 0) \end{cases} \\
&= \langle 0|u_\alpha(x)\bar{u}_\beta(0)\theta(t) - v_\beta(0)\bar{v}_\alpha(x)\theta(-t)|0\rangle
\end{aligned}$$

Damit kann man sagen, daß die Kontraktion

$$\Psi(x)\bar{\Psi}(0)$$

zwei Prozesse darstellt:

1. Bei dem Prozeß der ersten Zeile wird zur Zeit 0 im Punkte $\vec{0}$ ein Elektron erzeugt, das dann im Punkt $\vec{x}$ zur späteren Zeit t wieder vernichtet wird.
2. Bei dem Prozeß der zweiten Zeile wird bei $\vec{x}$ ein Positron zur Zeit t erzeugt und später bei $t = 0$ und am Ort $\vec{x} = \vec{0}$ wieder vernichtet.

Beide Prozesse vergrößern die Ladung bei x um eine Einheit und verringern sie um eine bei 0.

8.3 Wicksches Theorem

Die bisher erhaltenen Ergebnisse gestatten es, ein zeitgeordnetes Produkt von zwei Feldoperatoren durch ihr normalgeordnetes Produkt auszudrücken. Das Wicksche Theorem erweitert diesen Schritt auf Produkte beliebig vieler Operatoren.

Definiere (c = komplexe Zahl):

$$:cX_1X_2\cdots X_n: = c:X_1X_2\cdots X_n:$$

Also gilt (da die Kontraktion eine c-Zahl ist):

$$\begin{aligned}
:X_1X_2X_3\ldots X_n: &= X_1X_2:X_3\ldots X_n: \\
:X_1X_2X_3\ldots X_n: &= X_1X_3\delta_p:X_2X_4\ldots X_n:
\end{aligned}$$

Hierbei $\delta_p = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$, wenn $X_2, X_3 \begin{cases} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{cases}$.

$$:X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots X_k \ldots X_n: = \delta_p \; \underbracket{X_2 X_4} \; \underbracket{X_3 X_k} :X_1 X_5 \ldots X_{k-1} X_{k+1} \ldots X_n:$$

$\delta_p = \pm 1$ je nachdem, ob die Anzahl benötigter paarweiser Vertauschungen von Fermionenoperatoren, um zur Reihenfolge $X_2 X_4 X_3 X_k X_1 \cdots X_n$ zu gelangen, gerade oder ungerade ist.

Im folgenden betrachten wir die Operatoren X_i und $Y \in \{X_i\}$.

Lemma: Falls das Zeitargument t_y des Operators Y kleiner ist als das aller anderen Operatoren X_i, $t_y \leq t_i$, so gilt:

$$\begin{aligned} :X_1 X_2 \ldots X_n:Y \;=\; & :X_1 X_2 \ldots X_n Y: \\ & + :X_1 X_2 \ldots \underbracket{X_n Y}: \\ & + :X_1 X_2 \ldots \underbracket{X_{n-1} X_n Y}: \\ & \;\vdots \\ & + :\underbracket{X_1 X_2 \ldots X_n Y}: \end{aligned} \tag{8.1}$$

Beweis:

1. *Sei Y ein Vernichtungsoperator.*
   Dann gilt: $:X_i Y: = X_i Y$ für alle i. Außerdem gilt nach Voraussetzung $\mathrm{T}(X_i Y) = X_i Y$, weil $t_y \leq t_i$ für alle i. Also folgt

   $$\underbracket{X_i Y} = \mathrm{T}(X_i Y) - :X_i Y_i: = 0 \qquad \text{für alle } i$$

   Daraus folgt, daß in Gleichung (8.1) alle Terme rechts außer dem ersten Null sind. Damit reduziert sich die Aussage des Lemmas auf

   $$:X_1 X_2 \ldots X_n:Y = :X_1 X_2 \ldots X_n Y:$$

   Dies ist aber trivial richtig, da Y ein Vernichtungsoperator ist.

2. *Sei Y ein Erzeugungsoperator.*
   Der Beweis wird hier in drei Schritten geführt:

   (a) alle X_i Vernichter

   (b) einige X_i Erzeuger, eine bestimmte Zahl anderer Vernichter

   (c) X_i beliebig

(a) *Alle X_i sind Vernichtungsoperatoren.* Dann gilt:

$$:X_1X_2\dots X_n:Y = X_1X_2\dots X_nY \tag{8.2}$$

und

$$:X_iY: = \delta_i YX_i \qquad \left(\delta_i = \pm 1 \quad \begin{matrix}\text{Boson}\\ \text{Fermion}\end{matrix}\right)$$

Außerdem gilt wegen der Voraussetzung $t_y \leq t_i$ für alle i:

$$\mathrm{T}(X_iY) = X_iY$$

und deshalb:

$$\begin{aligned} \underbracket{X_iY} &= \mathrm{T}(X_iY) - :X_iY: = X_iY - \delta_i YX_i \\ \Longrightarrow \quad X_iY &= \delta_i YX_i + \underbracket{X_iY} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Daraus folgt für (8.2):

$$X_1X_2\dots X_nY = \delta_n X_1X_2\dots X_{n-1}YX_n + X_1X_2\dots \underbracket{X_nY}$$

Die Relation (8.3) ist hier auf das letzte Paar in der Operatorkette links angewandt worden.
Im ersten Term rechts kann nun sukzessive Gleichung (8.3) weiter angewendet werden; damit wird der "freie" Operator Y nach links verschoben. Gleichzeitig kann der in der Kontraktion "gebundene" Operator Y ganz nach rechts verschoben werden.

$$\begin{aligned} X_1\dots X_nY &= \delta_n\delta_{n-1}X_1X_2\dots X_{n-2}YX_{n-1}X_n \\ &\quad + \delta_n X_1X_2\dots \underbracket{X_{n-1}Y}X_n \\ &\quad + X_1X_2\dots \underbracket{X_nY} \\ &= \delta_n\delta_{n-1}X_1X_2\dots X_{n-2}Y\ X_{n-1}X_n \\ &\quad + :X_1X_2\dots \underbracket{X_{n-1}X_nY}: \\ &\quad + :X_1X_2\dots \underbracket{X_nY}: \end{aligned}$$

Im ersten Term rechts läßt sich jetzt wieder (8.3) anwenden usw.

$$\begin{aligned} X_1X_2\dots X_nY &= \delta_p YX_1X_2\dots X_n + :X_1\dots X_{n-1}\underbracket{X_nY}: \\ &\quad + :X_1X_2\dots X_{n-2}\underbracket{X_{n-1}X_nY}: + \dots \\ &\quad + :\underbracket{X_1X_2\dots X_nY}: \end{aligned} \tag{8.4}$$

Da die X_i alle Vernichter sind, gilt

$$:X_1\dots X_n:Y = X_1X_2\dots X_n\,Y\ .$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} :X_1X_2\dots X_nY: &= \delta_p :Y\ X_1X_2\dots X_n: \\ &= \delta_p Y\ X_1X_2\dots X_n\ , \end{aligned}$$

weil Y nach Voraussetzung ein Erzeugungsoperator ist. Damit ist mit der Gleichung (8.4) das Lemma für den Fall (a) bewiesen.

(b) *Die $X_1,\dots,X_j$ sind Erzeuger, die $X_{j+1},\dots,X_n$ sind Vernichter.* Weil $t_y \le t_i$ und Y Erzeuger, gilt:

$$\underbracket{X_iY} = 0 \qquad \text{für } i = 1\dots j$$

und

$$\begin{aligned} :X_1X_2\dots X_n: Y &= X_1X_2\dots X_jX_{j+1}\dots X_n\, Y \\ &= X_1X_2\dots X_j\ :X_{j+1}\dots X_n: Y. \end{aligned}$$

Für das normalgeordnete Produkt rechts ist das Ergebnis von (2a) anwendbar. Dies liefert:

$$\begin{aligned} :X_1X_2\dots X_n:Y &= X_1\dots X_j\Big(:X_{j+1}\dots X_nY: + :X_{j+1}\dots \underbracket{X_nY}: \\ &\quad + \dots + :\underbracket{X_{j+1}\dots X_nY}: \Big) \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma auch für diesen Fall bewiesen, denn die $X_i(i = 1,\dots,j)$ sind alle Erzeugungsoperatoren und können daher mit in die normalgeordneten Produkte hineingeschrieben werden.

(c) *Jetzt wird der allgemeine Fall betrachtet.* Jeder der X_i kann beliebig ein Erzeuger oder ein Vernichter sein: Nach Definition des Normalproduktes können auf der rechten Seite des Lemmas (8.1) die Operatoren X_i so geordnet werden, daß zuerst die Erzeuger stehen und dann die Vernichter. Dabei entsteht in jedem der Normalprodukte das gleiche Vorzeichen. Auf diese Ordnung ist dann das Resultat (2b) anwendbar. Damit ist das Lemma bewiesen.

Aufbauend auf diesem Lemma kann nun das Wicksche Theorem bewiesen werden:

Wicksches Theorem

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(X_1\dots X_n) &= :X_1\dots X_n: \\ &\quad +: \underbracket{X_1X_2}\dots X_n: + :\underbracket{X_1X_2X_3}\dots X_n: \\ &\quad +: \underbracket{X_1X_2\dots X_n}: \\ &\quad +: \underbracket{X_1X_2}\,\underbracket{X_3X_4}\dots X_n: + :\underbracket{X_1X_2}\,\underbracket{X_3\dots X_n}: \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\!:\, X_1 X_2 X_3 X_4 \dots X_n \!: + \dots \qquad (8.5)\\
=& \sum_{\mathcal{K}\ \text{Kontraktion}} :\!\mathcal{K}(X_1 \dots X_n)\!:
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile ist die Summe von Normalprodukten mit allen möglichen (auch mehrfachen) Kontraktionen.

Beweis *(durch vollständige Induktion in n):*

Sei $n = 2$; dann gilt das Wicksche Theorem trivialerweise wegen der Definition des Normalproduktes.

Sei das Theorem nun korrekt für alle $n \leq N$. Wir betrachten es nun für $n = N + 1$:

Unter den Operatoren $X_1 \dots X_{N+1}$ muß einer sein, dessen Zeitargument am kleinsten ist. Dieser eine sei X_{N+1} (durch Umbenennung stets erreichbar) mit $t_{N+1} \leq t_i$ $(i = 1 \dots N)$. Also gilt:

$$\mathrm{T}\left(X_1 X_2 \dots X_N X_{N+1}\right) = \mathrm{T}\left(X_1 X_2 \dots X_N\right) X_{N+1}.$$

Da nach Annahme das Wicksche Theorem gültig ist für $n = N$, kann das zeitgeordnete Produkt rechts nach (8.5) umgeschrieben werden. Also kann $\mathrm{T}(X_1 X_2 \dots X_N) X_{N+1}$ umgeschrieben werden in eine Summe von Termen, die alle die Struktur der linken Seite des Lemmas (8.1) auf S. 56 haben (X_{N+1} entspricht Y im Lemma). Unter Benutzung dieses Lemmas kann dann Gl. (8.5) für $n = N + 1$ bewiesen werden.

In den späteren Rechnungen werden häufiger Ausdrücke der Gestalt

$$\mathrm{T}\left(:\!X_1 X_2 \ \dots\ X_i\!: \dots :\!X_j \dots X_l\!:\right)$$

auftreten, wobei alle Operatoren in einem Normalprodukt das gleiche Zeitargument haben („*gemischtes Produkt*"). Um auf solche Ausdrücke das Wicksche Theorem anwenden zu können, wird zu den Zeitargumenten der *Erzeugungs*operatoren die kleine Zahl $\epsilon > 0$ hinzu addiert. Dann kann der Normalordnungsoperator $:\cdot:$ weggelassen werden, weil in jedem Normalprodukt ja schon T die Erzeuger nach links schafft. Auf die so entstehende Operatorfolge kann das Wicksche Theorem angewandt werden. Danach wird $\epsilon = 0$ gesetzt. Damit ist klar, daß Kontraktionen von Operatoren, die im gleichen Normalprodukt stehen, in jedem Fall verschwinden, weil die Erzeuger die größere Zeit haben:

$$a^\dagger(t+\epsilon)a(t) = \mathrm{T}[a^\dagger(t+\epsilon)a(t)] - :\!a^\dagger a\!: = 0$$

ebenso:

$$a^\dagger(t)a^\dagger(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad a(t)a(t) = 0$$

8.4 FEYNMAN-Propagatoren

In den vorigen Abschnitten ist gezeigt worden, daß die zeitgeordneten Produkte von Feldoperatoren immer durch Kombinationen von normalgeordneten Operatorprodukten und von Kontraktionen ausgedrückt werden können. Früher wurde bereits erwähnt, daß letztere Zahlen darstellen; damit verringert sich effektiv die Zahl der Operatoren in den einzelnen auszuwertenden Produkten. In diesem Abschnitt sollen nun die Kommutatoren durch Integrale dargestellt, d.h. ausgerechnet werden.

8.4.1 Bosonen

Wir beginnen mit einer expliziten Darstellung der Bosonen-Kontraktion:

$$\begin{aligned}\left[\alpha(x), \alpha^\dagger(0)\right] &= \alpha(x)\alpha^\dagger(0) - \alpha^\dagger(0)\alpha(x) \\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{k,k'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\left\{a_k a^\dagger_{k'} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} - a^\dagger_{k'} a_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)}\right\}.\end{aligned}$$

Dabei tritt jeweils nur eine Exponentialfunktion auf, weil der andere Feldoperator am Punkt $(\vec{0}, 0)$ zu nehmen ist. Damit lautet der Kommutator:

$$\left[\alpha(x), \alpha^\dagger(0)\right] = \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)}.$$

und analog:

$$\left[\alpha(0), \alpha^\dagger(x)\right] = \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)}.$$

Beide Formen lassen sich zusammenziehen in

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi}_{}(0) = \begin{cases}\left[\alpha(x), \alpha^\dagger(0)\right] \\ \left[\alpha(0), \alpha^\dagger(x)\right]\end{cases} = \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\mp\omega_k t)}.$$

(Dabei verwendet:

$$\sum_k \ldots e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega_k t} = \sum_k \ldots e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega_k t},$$

weil über alle $\vec{k}$ summiert wird.)

Definiere: FEYNMAN-Propagator D_F

$$D_F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\varphi(x)\varphi}_{}(0) = \frac{1}{\Omega}\sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\pm\omega_k t)},$$

Hierbei steht das Pluszeichen, falls $t < 0$, das Minuszeichen, falls $t \geq 0$.

Um die Integraldarstellung für D_F zu finden, wird von Summen zu Integralen übergegangen:

$$\sum_k \ldots \mapsto \frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int \ldots d^3k$$

$$\Longrightarrow \qquad D_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}\pm\omega_k t)} \qquad \begin{array}{l}(+\ :\ t<0)\\(-\ :\ t\geq 0)\end{array}$$

mit $\omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$.

Sei:

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \qquad \text{positive Frequenz}\\ D_-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega_k t)} \qquad \text{negative Frequenz} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dann ist offensichtlich:

$$D_F = D_+(x)\theta(t) + D_-(x)\theta(-t)\ . \tag{8.7}$$

Diese Darstellung von D_F als Summe zweier θ-Funktionen läßt sich mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden umschreiben in ein einziges Integral:

$$D_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-(m-i\epsilon)^2} d^4k$$

mit

$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2\,, \qquad kx = k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x}\,, \qquad d^4k = d^3k\ dk_0\,,$$

$\epsilon > 0$ und reell zur Spezifizierung des Pols bei $\vec{k}^2 + m^2 = 0$.

Beweis: Integriere zuerst über k_0:

$$I_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik_0 t}}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + 2im\epsilon} dk_0$$

Faktorisierung des Nenners:

$$\begin{aligned} k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + 2im\epsilon &= \left(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2+m^2} - i\eta\right)\left(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2+m^2} + i\eta\right)\\ &= (k_0+\omega_k - i\eta)(k_0 - \omega_k + i\eta)\\ &= k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + 2i\omega_k\eta\\ \Longrightarrow \qquad I_0 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 t}}{(k_0+\omega_k-i\eta)(k_0-(\omega_k-i\eta))} \end{aligned}$$

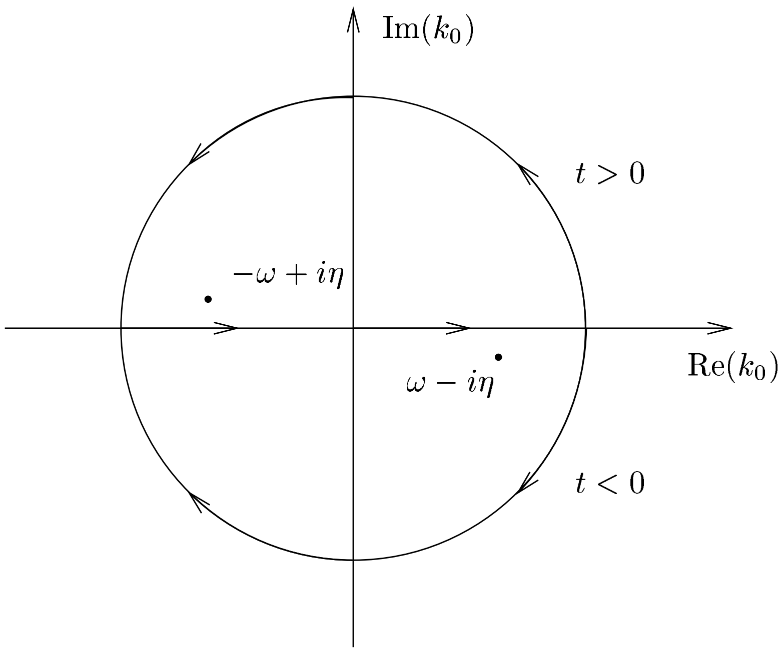

Abbildung 8.1: Integrationsweg für I_0

Der Integrand besitzt Pole bei $k_0 = \pm(\omega_k - i\eta)$. Das Integral I_0 wird daher über Halbkreise ausgedehnt; für $t > 0$ muß über die untere, für $t < 0$ über die obere Halbebene integriert werden, damit der Beitrag von den jeweiligen Kreisbögen verschwindet. Man erhält nach dem Residuensatz:

$$I_0 = 2\pi i \ \mathrm{Res}_{k_0 = \mp(\omega_k - i\eta)} \left(\frac{e^{-ik_0 t}}{(\ldots)(\ldots)} \right) \qquad \begin{matrix} (- \ : \ t < 0) \\ (+ \ : \ t \geq 0) \end{matrix}$$

Das liefert schließlich:

$$D_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega_k t)} \qquad \begin{matrix} (+ \ : \ t < 0) \\ (- \ : \ t \geq 0) \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\vec{x} \pm \omega_k t)} \qquad \text{q.e.d.}$$

Der FEYNMAN-Propagator ist hier als Kontraktion zweier Feldoperatoren definiert worden; er ist eine reine Zahl.

Die Kontraktion stellt die Bewegung virtueller Teilchen von einem Ort zum anderen dar, wie bereits früher diskutiert wurde. Für diese Teilchen ist der relativistische Energie-Impuls- Zusammenhang nicht erfüllt, was man daran sieht, daß in der Integraldarstellung der Kontraktion über alle Impulse integriert wird. Diese Interpretation deckt sich auch mit der Tatsache, daß $D_F(x)$ die Greensche

Funktion für die Klein-Gordon-Gleichung darstellt. Es gilt nämlich mit der Integraldarstellung für D_F

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) D_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{-k^2 + m^2}{k^2 - (m - i\epsilon)^2} e^{-ikx} d^4x = -i\delta^4(x).$$

Damit wird auch die Bezeichnung „Propagator“ deutlich. Die Gleichung zeigt auch die explizite relativistische Invarianz des Feynman-Propagators. In der Impulsdarstellung ist er gegeben durch

$$D_F(k) = \frac{i}{k^2} \ . \tag{8.8}$$

Photonen

Wegen der Eichinvarianz der QED müssen die Photonen masselos sein. Ihre Bewegungsgleichung (2.2) ist die gleiche wie die masseloser skalarer Teilchen (4.1). Daher ist die Impulsabhängigkeit des Photonenpropagators die gleiche wie die des skalaren Propagators mit $m = 0$. Außerdem ist klar, daß die Kontraktion zweier verschiedener Komponenten des A-Feldes verschwinden muß, weil der Propagator als Kontraktion der Feldoperatoren auch durch den Vakuum-Erwarungswert des zeitgeordneten Produktes der Operatoren gegeben ist. Dieser Erwartungswert verschwindet aber offensichtlich, wenn die zwei Felder nicht identisch sind. Schließlich ist noch zu beachten, daß durch die Eichbedingungen des elektromagnetischen Feldes die Komponente A_0 durch die übrigen Komponenten bestimmt ist, während im Gegensatz dazu die drei räumlichen Komponenten unabhängig voneinander sind. Damit lautet die Impuls-Darstellung des Propagators nun

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \ . \tag{8.9}$$

Das minus Zeichen berücksichtigt die angesprochene Sonderrolle der drei räumlichen Komponenten und sorgt für eine positive Normierung der räumlichen Ein-Photon Zustände.

8.4.2 Fermionen

Es soll jetzt der Propagator für Fermionen hergeleitet werden. Dazu werden vorerst die möglichen *Kontraktionen von* Dirac-*Operatoren* betrachtet:

1. $$\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(0) = \langle 0|\,\mathrm{T}[\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(0)]|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(0)|0\rangle & (t \geq 0) \\ -\langle 0|\Psi_\beta(0)\Psi_\alpha(x)|0\rangle & (t < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0|\Psi_\alpha(x)\Psi_\beta(0)|0\rangle &= \langle 0|(u_\alpha(x) + \bar{v}_\alpha(x))(u_\beta(0) + \bar{v}_\beta(0)|0\rangle \\
&= \langle 0|u_\alpha(x)u_\beta(0) + u_\alpha(x)\bar{v}_\beta(0) + \bar{v}_\alpha(x)u_\beta(0) + \bar{v}_\alpha(x)\bar{v}_\beta(0)|0\rangle \\
&= \langle 0|u_\alpha(x)u_\beta(0) + \bar{v}_\alpha(x)\bar{v}_\beta(0)|0\rangle = 0
\end{aligned}$$

wie durch explizites Betrachten der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in den u's und v's sofort folgt. Ebenso verschwindet diese Kontraktion auch für $t < 0$.

2. Völlig analog folgt $\bar{\Psi}_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0) = 0$

3. $\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0) = \begin{cases} \{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(0)\} & (t \geq 0) \\ -\{v_\beta(0), \bar{v}_\alpha(x)\} & (t < 0) \end{cases}$. Diese Kontraktion verschwindet nicht. Sie wird im folgenden berechnet.

$$\begin{aligned} \{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(0)\} &= \frac{1}{\Omega} \sum_{psp's'} \left(a_{ps} u^\alpha_{ps} e^{i(\vec{p}\vec{x}-\omega t)} a^\dagger_{p's'} \bar{u}^\beta_{p's} + a^\dagger_{p's'} \bar{u}^\beta_{p's'} a_{ps} u^\alpha_{ps} e^{i(\vec{p}\vec{x}-\omega t)} \right) \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{psp's'} \left(a_{ps} a^\dagger_{p's'} u^\alpha_{ps} \bar{u}^\beta_{p's'} + a^\dagger_{p's'} a_{ps} \bar{u}^\beta_{p's'} u^\alpha_{ps} \right) e^{i(\vec{p}\vec{x}-\omega t)} \end{aligned}$$

Die Produkte $u\bar{u}$ lassen sich dadurch vereinfachen, daß beachtet wird, daß die Fermionenoperatoren für unterschiedliche Quantenzahlen p, s antikommutieren. Damit bricht die Summe über p', s' zusammen. Man erhält:

$$\{\ldots\} = \frac{1}{\Omega} \sum_{ps} u^\alpha_{ps} \bar{u}^\beta_{ps} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega t)}.$$

Nun gilt, wie man explizit leicht nachrechnen kann:

$$\sum_s u^\alpha_{ps} \bar{u}^\beta_{ps} = \left(\frac{\not{p} + m}{2p_0} \right)_{\alpha\beta} \qquad \text{und} \qquad \sum_s v^\alpha_{ps} \bar{v}^\beta_{ps} = \left(\frac{\not{p} - m}{2p_0} \right)_{\alpha\beta}. \tag{8.10}$$

Dabei ist $\not{p}$ eine Abkürzung:

$$\not{p} = \gamma_\mu p^\mu \quad \text{(analog für andere Vektoren).}$$

Damit folgt nun für den obigen Antikommutator:

$$\begin{aligned} \{\ldots\} &= \frac{1}{\Omega} \sum_p \left(\frac{\not{p} + m}{2p_0} \right)_{\alpha\beta} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_p \left(\frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{2p_0} \right)_{\alpha\beta} e^{-ipx} \\ &\quad \text{(mit } p^\mu = (\omega, \vec{p})\text{)} \\ &= \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right)_{\alpha\beta} \frac{1}{\Omega} \sum_p \frac{1}{2p_0} e^{-ipx} \end{aligned}$$

mit $p^\mu = (p_0, \vec{p})$, $x^\mu = (t, \vec{x})$; ganz entsprechend gilt für den anderen Antikommutator

$$\begin{aligned}
-\{v_\beta(0), \bar{v}_\alpha(x)\} &= -\frac{1}{\Omega}\sum_{psp's'}(b_{ps}\bar{v}^\beta_{ps}b^\dagger_{p's'}v^\alpha_{p's'}e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\omega_{p'}t)} \\
&\quad +b^\dagger_{p's'}v^\alpha_{p's'}b_{ps}\bar{v}^\beta_{ps}e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\omega_{p'}t)} \\
&= -\frac{1}{\Omega}\sum_{psp's'}\left(b_{ps}b^\dagger_{p's'}\bar{v}^\beta_{ps}v^\alpha_{p's'} + b^\dagger_{p's'}b_{ps}v^\alpha_{p's'}\bar{v}^\beta_{ps}\right)e^{-i(\vec{p}\,'\cdot\vec{x}-\omega_{p'}t)}
\end{aligned}$$

Antikommutatoren ausgenutzt:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\Omega}\sum_{ps}v^\alpha_{ps}\bar{v}^\beta_{ps}e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega_p t)} \\
&= -\frac{1}{\Omega}\sum_p\left(\frac{\not{p}-m}{2p_0}\right)_{\alpha\beta}e^{ipx} \\
&= -\frac{1}{\Omega}\sum_p\left(\frac{\gamma_\mu p^\mu - m}{2p_0}\right)_{\alpha\beta}e^{ipx} \\
&= -\left(-i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta}\frac{1}{\Omega}\sum_p\frac{1}{2p_0}e^{ipx}
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
\{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(0)\} &= \left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_{\alpha\beta}D_+(x) \\
-\{v_\beta(0), \bar{v}_\alpha(x)\} &= \left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_{\alpha\beta}D_-(x)
\end{aligned}$$

mit den Propagatoren (8.6). Zusammengefaßt erhält man für die Kontraktion:

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(0) &= \begin{cases}\{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(0)\} & (t \geq 0) \\ -\{v_\beta(0), \bar{v}_\alpha(x)\} & (t < 0)\end{cases} \\
&= \left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_{\alpha\beta}D_F(x)
\end{aligned}$$

nach Gleichung (8.7).

Also gilt

$$\begin{aligned}
\Psi(x)\bar{\Psi}(0) &= \left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)D_F(x) \\
&= \left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{-ikx}}{k^2-(m-i\epsilon)^2}d^4k\right) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{\gamma_\mu k^\mu + m}{k^2-(m-i\epsilon)^2}e^{-ikx}d^4k
\end{aligned}$$

Hier sind jetzt die Spinor-Indizes α und β an der Kontraktion weggelassen. Die Gleichung stellt also eine *Matrixgleichung* dar.

Definiert man wie oben:

$$\not{k} = \gamma_\mu k^\mu$$

und benutzt:

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = \not{k}^2 - m^2 = k^2 - m^2; \qquad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$$

und daraus folgend

$$\frac{1}{\not{k} - m} = \frac{\not{k} + m}{(\not{k} - m)(\not{k} + m)} = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2},$$

so läßt sich die Fermionenkontraktion schreiben als:

$$\begin{aligned} \Psi(x)\bar{\Psi}(0) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{k} + m}{k^2 - (m - i\epsilon)^2} e^{-ikx} d^4k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{i}{\not{k} - (m - i\epsilon)} e^{-ikx} d^4k \equiv S_F(x). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Auch für die Fermionen ist $S_F(x)$ die Greensche Funktion der freien Dirac-Gleichung, denn

$$\begin{aligned} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\, S_F(x) &= (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\, \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\not{k} - (m - i\epsilon)} e^{-ikx} d^4k \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{k} - m}{\not{k} - m} e^{-ikx} d^4k \\ &= i\delta^4(x) \end{aligned}$$

S_F ist damit der kovariante Propagator der Dirac-Theorie.

Kapitel 9

Quantenelektrodynamik

Die Betrachtungen in Kapitel 7 zeigen, daß die störungstheoretische Entwicklung stets von ungestörten, freien Zuständen ausgeht. Da aber die elektromagnetische Wechselwirkung immer wirkt und sich nicht abschalten läßt, sind diese Zustände physikalisch nicht realisierbar. Zudem enthalten die freien Lagrangedichten Parameter, wie Masse und Ladung, die durch die Wechselwirkungen erst ihre physikalisch beobachteten Werte annehmen. Wir nehmen daher an, daß diese Parameter in der folgenden Lagrangedichte ihre physikalischen, meßbaren Werte annehmen. Damit sind dann automatisch auch die auftretenden Felder physikalische Felder. Die Tatsache, daß hier eigentlich freie ("nackte") Werte stehen müßten, werden wir durch Hinzufügen von Korrekturtermen zur Lagrangedichte berücksichtigen.

9.1 Lagrange-Dichte

Sei Ψ das Elektronenfeld. Dann wird das freie Elektronenfeld beschrieben durch

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\left(i\gamma_\mu \partial^\mu - m\right)\Psi \ .$$

Die Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik erhält man durch die minimale Substitution in der Dirac-Lagrange-Dichte:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mapsto \frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA^\mu$$

Die Größe e ist die elektrische Ladung ($e = -|e|$). Dies eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}\left(i\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA^\mu\right) - m_0\right)\Psi \\
&= \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}_\gamma} \underbrace{+\bar{\Psi}\left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_0\right)\Psi}_{\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}_e} \underbrace{-e\bar{\Psi}\gamma_\mu A^\mu\Psi.}_{\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}_{int}}
\end{aligned}$$

Dabei ist A^μ das elektromagnetische Viererpotential und $F^{\mu\nu}$ der Feldtensor

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu .$$

Die Größe

$$j_\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$$

ist der erhaltene Viererstrom (folgt aus Invarianz von $\mathcal{L}$ unter einer globalen Phasentransformation der Felder Ψ und $\bar{\Psi}$).

Dann kann geschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_{int}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_l &= \bar{\Psi} \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \Psi; \qquad m\text{: physikalische Masse} \\
\mathcal{L}_{int} &= -e j_\mu A^\mu \ .
\end{aligned}$$

Mit dem Variationsprinzip folgen hieraus die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\mu\nu} &= e j_\nu \\
\gamma_\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - e A^\mu \right) \Psi - m\Psi &= 0. \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

9.2 Coulomb-Eichung

$\mathcal{L}$ ist invariant unter der gemeinsamen Ersetzung

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &\mapsto A_\mu(x) - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu} \qquad \textit{Eichinvarianz} \\
\Psi(x) &\mapsto e^{ie\Lambda(x)} \Psi(x)
\end{aligned}$$

Durch Wahl einer geeigneten Funktion Λ kann man die *transversale* Eichung erreichen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{Coulomb-}\textit{Eichung}.$$

Im freien Fall, und nur in diesem, kann man durch geeignete Eichung auch simultan $A_0 \stackrel{!}{=} 0$ erreichen. Im Fall wechselwirkender Felder ist dies nicht mehr möglich, jedoch ist A_0 eine abhängige Variable, weil die LAGRANGE-Dichte $\mathcal{L}$ nicht von $\dot{A}_0$ abhängt. Sie kann daher über die Feldgleichungen eliminiert werden.

Gleichung (9.1) lautet für $\nu = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = e\rho \qquad \text{mit} \qquad j_0 = \rho = \Psi^\dagger \Psi \ .$$

Wegen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

folgt:

$$\nabla^2 A_0 = -e\rho \ . \tag{9.2}$$

Die Lösung von (9.2) ist:

$$A_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e\rho(\vec{x}\,', t)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x' = \frac{e}{4\pi} \int \frac{\Psi^\dagger \Psi}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x',$$

d.h. A_0 wird ein *Funktional* von $\rho = \Psi^\dagger \Psi$.

Es wird nun definiert:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tr} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E}_l &\stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla} A_0 \ , \end{aligned}$$

so daß

$$\vec{E} = \vec{E}_{tr} + \vec{E}_l.$$

Wie schon früher gezeigt worden ist (in Abschnitt 5.1), kann $\mathcal{L}_\gamma$ durch

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2}(\vec{E}_{tr}^2 + \vec{E}_l^2 - \vec{B}^2)$$

ersetzt werden, ohne $L = \int \mathcal{L} \ d^3x$ zu ändern (da jetzt $\vec{E}$ kein freies Feld mehr ist, kann, anders als in Abschnitt 5.1, $\vec{E}_l$ nicht vollständig eliminiert werden).

Dann ist der kanonisch konjugierte Impuls zu $\vec{A}$

$$\vec{\Pi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \vec{E}_{tr}$$

und zum Elektronenfeld Ψ

$$\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\Psi^\dagger;$$

der zu $\bar{\Psi}$ kanonisch konjugierte Impuls verschwindet. Damit kann die Hamiltondichte aufgeschrieben werden:

$$\mathcal{H} = -\vec{\Pi}\dot{\vec{A}} + \mathcal{P}\dot{\Psi} - \mathcal{L} = \vec{E}_{tr}^2 + i\Psi^\dagger\dot{\Psi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{int}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\gamma &= \frac{1}{2}\vec{E}_{tr}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 \\
\mathcal{H}_l &= \Psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\Psi \\
\mathcal{H}_{int} &= ej_\mu A^\mu - \Psi^\dagger\beta\Psi\delta m - \frac{1}{2}\vec{E}_l^2.
\end{aligned}$$

Beachtenswert ist, daß in $\mathcal{H}_{int}$ ein Term auftritt, der in $\mathcal{L}$ noch zum freien Feld gehörte $\left(-\frac{1}{2}\vec{E}_l^2\right)$; das longitudinale elektrische Feld kann in Gegenwart von Ladungen oder Strömen nicht vollständig eliminiert werden, es muß deshalb zur Wechselwirkung gerechnet werden. Außerdem ist wesentlich, daß in $\mathcal{H}_l$ die physikalische Masse auftritt.

Die Wechselwirkungs-Hamiltonfunktion ist damit gegeben durch:

$$H_{int} = \int \mathcal{H}_{int} d^3x = -\int \Psi^\dagger\beta\Psi\delta m d^3x + e\int j_\mu A^\mu d^3x - \frac{1}{2}\int \vec{E}_l^2 d^3x.$$

Die letzten zwei Terme lassen sich umschreiben:

$$e\int j_\mu A^\mu d^3x = -e\int \vec{j}\cdot\vec{A}d^3x + e\int \rho A_0 d^3x$$

Der zweite Term rechts kann hier zum longitudinalen Feldanteil geschlagen werden:

$$\begin{aligned}
H_{coul} &= \int \mathcal{H}_{coul} d^3x = \int \left\{-\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}A_0\right)^2 + e\rho A_0\right\} d^3x \\
&= \int \left(\frac{1}{2}A_0 \underbrace{\nabla^2 A_0}_{=-e\rho} + e\rho A_0\right) d^3x \\
&= \frac{1}{2}\int e\rho A_0 d^3x \qquad (9.3)\\
&= \frac{1}{8\pi}\int \frac{e^2\rho(\vec{x},t)\rho(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} d^3x\ d^3x'\ .
\end{aligned}$$

E_l zusammen mit A_0, d. h. letztlich A_0 alleine, bestimmt damit die *instantane* COULOMB-Wechselwirkung zweier Ladungen.

Damit ist:

$$H_{int} = -\int \Psi^\dagger\beta\Psi\delta m\ d^3x + H_{coul} - e\int \vec{j}\cdot\vec{A}d^3x.$$

Da $\vec{A}$ wegen der Coulombeichung transversal ist, ist in dieser Form das longitudinale Feld vollständig eliminiert zugunsten der instantanen COULOMB-Wechselwirkung.

Dies bedeutet, daß man A_0 oder $\vec{E}_l$ völlig vergessen kann bei der Quantisierung. Quantisiert wird durch Übergang zu den Feldoperatoren und durch Weglassen aller Vakuumerwartungswerte. Letzteres kann durch Übergang zum Normalprodukt in H erreicht werden:

$$H = \int :\mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_{int}: d^3x.$$

9.3 Streuung am äußeren Potential

Behandelt werden soll hier als einfachstes Beispiel die Streuung eines Elektrons an einem äußeren elektrostatischen Potential ($A_0^e, \vec{A} = 0$), das durch das Elektron selbst nicht beeinflußt wird.

Nach den Überlegungen in Abschnitt 9.2 ist die Hamiltondichte der Wechselwirkung gegeben durch

$$H_{int} = -\delta m \int \Psi^\dagger \beta \Psi d^3x + \int e\rho A_0^e d^3x \ , \tag{9.4}$$

wobei der obere Index e das *externe* Potential kennzeichnet, Ψ beschreibt das gestreute Teilchen und $\rho(x) = :\Psi^\dagger(x)\Psi(x):$ ist die Dichte des gestreuten Teilchens. Im Gegensatz zu Gleichung (9.3) tritt hier vor dem 2. Term kein Faktor 1/2 auf, weil es sich um ein *äußeres* Potential handelt, die elementaren Wechselwirkungen also bei der Integration nicht doppelt gezählt werden.

Das S-Matrixelement für den Übergang von Anfangszustand $|i\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle \neq |i\rangle$ ist dann gegeben durch:

$$S_{fi} = \langle f|(-i) \int \mathcal{H}_{int}(x) d^4x |i\rangle.$$

Dabei ist

$$|i\rangle = a^\dagger_{ps}|0\rangle \qquad \text{und} \qquad |f\rangle = a^\dagger_{p's'}|0\rangle,$$

wobei $a^\dagger_{ps}$ ein Elektron mit Impuls $\vec{p}$ und Helizität s erzeugt. Das in S auftretende Matrixelement ist damit

$$\langle 0|a_{p's'} \int \mathcal{H}_{int}(x) d^4x \, a^\dagger_{ps}|0\rangle \qquad (p \neq p'; s \neq s').$$

Hierzu kann der erste Term in H_{int} (Gleichung (9.4)) nichts beitragen, weil für ihn $p = p'$ gelten müßte, was aus der räumlichen Integration folgt. Wenn die Streuung an einer stationären äußeren Ladung stattfindet, gilt zudem:

$$\vec{A}^e \stackrel{!}{=} 0,$$

so daß bleibt:

$$H_{int} = e: \int \rho(x) A_0^e(x) d^3x: \ .$$

Damit hat man

$$S_{fi} = (-i)e\int \langle 0|a_{p's'}{:}\Psi^\dagger(x)\Psi(x){:}a^\dagger_{ps}|0\rangle A_0^e(x)d^4x.$$

Das hier auftretende Matrixelement ist

$$\begin{aligned}\langle 0|a_{p's'}\Psi^\dagger\Psi a^\dagger_{ps}|0\rangle &= \frac{1}{\Omega}\sum_{p'',s'',p''',s'''}\langle 0|a_{p's'}\ :\ \left(a^\dagger_{p''s''}u^\dagger_{p''s''}e^{ip''x}+b_{p''s''}v^\dagger_{p''s''}e^{-ip''x}\right)\\ &\quad\times\left(a_{p'''s'''}u_{p'''s'''}e^{-ip'''x}+b_{p'''s'''}v_{p'''s'''}e^{ip'''x}\right)\ :\ a^\dagger_{ps}|0\rangle\\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{p'',s'',p''',s'''}\langle 0|a_{p's'}a^\dagger_{p''s''}a_{p'''s'''}u^\dagger_{p''s''}u_{p'''s'''}e^{-i(p'''-p'')x}a^\dagger_{ps}|0\rangle.\end{aligned}$$

Alle anderen Terme verschwinden offenbar. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}S_{fi} &= (-i)\frac{e}{\Omega}\sum_{p'',s''}\int d^4x A_0^e(x)e^{-i(p'''-p'')x}u^\dagger_{p''s''}u_{p'''s'''}\times\langle 0|\underbrace{a_{p's'}a^\dagger_{p''s''}a_{p'''s'''}a^\dagger_{ps}}_{=\delta_{p'p''}\delta_{p'''p}\delta_{s's''}\delta_{ss'''}}|0\rangle\\ &= (-i)\frac{e}{\Omega}\int d^4x\ A_0^e(x)e^{-i(p-p')x}u^\dagger_{p's'}u_{ps}.\end{aligned}$$

Die S-Matrix wird also durch die Fouriertransformierte des Potentials bestimmt. Mit

$$A_0^e(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{Ze}{|\vec{x}|}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\int d^4x A_0^e(x)e^{-i(p-p')x} &= 2\pi\delta(E'-E)\int d^3x\ A_0^e(\vec{x})e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{x}}\\ &= 2\pi\delta(E'-E)\left(-\frac{1}{4\pi}\right)Ze\int\frac{e^{i(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|}d^3x\\ &= -2\pi\delta(E'-E)\frac{Ze}{|\vec{p}-\vec{p}\,'|^2}\end{aligned}$$

wegen

$$\int\frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|}d^3x = \frac{4\pi}{\vec{q}^2}.$$

Die Übergangs*rate* ist gegeben durch $|S_{fi}|^2$, dividiert durch die Dauer der Wechselwirkung. Diese kann man über die folgende formale Umformung einführen:

$$\delta(E'-E) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{+T/2}e^{i(E-E')t}dt \stackrel{E\to E'}{\longrightarrow}\frac{T}{2\pi}.$$

Also wird gesetzt:

$$|2\pi\delta(E'-E)|^2 = 2\pi T\delta(E'-E).$$

Damit erhält man:

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{Z^2 e^4}{T} \frac{2\pi T}{T} \frac{1}{\Omega^2} \frac{|u^\dagger_{p's'} u_{ps}|^2}{|\vec{p}-\vec{p}\,'|^4} \delta(E'-E).$$

Den Wirkungsquerschnitt für die Streuung erhält man daraus durch Multiplikation mit dem Phasenraumelement der Endzustände und Division durch den einfallenden Fluß $j_i = \rho v_i$:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{\Omega d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{j_i} \ ,$$

mit

$$j_i = \frac{1}{\Omega} v_i = \frac{|\vec{p}|}{E} \frac{1}{\Omega} \ .$$

Damit erhält man

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2} \frac{|u^\dagger_{p's'}\, u_{ps}|^2}{|\vec{p}-\vec{p}|^4} \frac{E}{|\vec{p}|} \delta(E'-E) d^3 p'.$$

Dies gibt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2} \frac{|u^\dagger_{p's'} u_{ps}|^2}{|\vec{p}-\vec{p}\,'|^4} \frac{E}{|\vec{p}|} \delta(E'-E) p'^2 \ dp' \ .$$

Mit

$$\delta(E'-E) = \frac{1}{|\frac{dE'}{dp'}|} \delta(|\vec{p}\,'| - |\vec{p}|)$$

und

$$E' \frac{dE'}{d|\vec{p}\,'|} = |\vec{p}\,'| \qquad (E^2 = \vec{p}^2 + m^2)$$

folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2} E^2 \frac{1}{q^4} |u^\dagger_{p's'} u_{ps}|^2 \ ,$$

wobei $\vec{q} \overset{\text{def}}{=} \vec{p} - \vec{p}\,'$ der “Impulsübertrag” ist.

Dies ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons mit Impuls $\vec{p}$ und Helizität s in einem Zustand mit $\vec{p}\,'$ und s'. Falls — wie üblich — die Spins der streuenden und gestreuten Elektronen nicht gemessen werden, erhält man den Wirkungsquerschnitt durch Summation über die Anfangszustände und Mittelung über die Endzustände des Spins. Damit hat man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2} E^2 \frac{1}{q^4} \frac{1}{2} \sum_{ss'} |u^\dagger_{p's'} u_{ps}|^2.$$

Die Spinsumme wird nun weiter behandelt:

$$\begin{aligned}
\sum_{ss'} |u^\dagger_{p's'} u_{ps}|^2 &= \sum_{ss'} (u^\dagger_{p's'})_\alpha (u_{ps})_\alpha ((u^\dagger_{p's'})_\beta (u_{ps})_\beta)^* \\
&= \sum_{ss'} (u^\dagger_{p's'})_\alpha (u_{ps})_\alpha (u_{p's'})_\beta (u^\dagger_{ps})_\beta \\
&= \sum_{s'} (u^\dagger_{p's'})_\alpha (u_{p's'})_\beta \sum_s (u_{ps})_\alpha (u^\dagger_{ps})_\beta \\
&= \sum_{s'} (u_{p's'})_\beta (\bar{u}_{p's'})_\delta (\gamma_0)_{\delta\alpha} \sum_s (u_{ps})_\alpha (\bar{u}_{ps})_\epsilon (\gamma_0)_{\epsilon\beta}
\end{aligned}$$

Nach Gleichung (8.10) auf S. 64 läßt sich dies umformen in

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\not{p}' + m}{2p_0}\right)_{\beta\delta} (\gamma_0)_{\delta\alpha} \left(\frac{\not{p} + m}{2p_0}\right)_{\alpha\epsilon} (\gamma_0)_{\epsilon\beta} \\
&= \operatorname{tr}\left[\frac{\not{p}' + m}{2p_0}\gamma_0 \frac{\not{p} + m}{2p_0}\gamma_0\right] \\
&= \frac{1}{4E^2} \operatorname{tr}[(\not{p}' + m)\gamma_0(\not{p} + m)\gamma_0] \\
&= \frac{1}{4E^2} \operatorname{tr}\left[(\gamma^\mu p'_\mu + m)\gamma_0(\gamma^\mu p_\mu + m)\gamma_0\right]
\end{aligned}$$

Jetzt wird das mittlere γ_0 nach rechts durchkommutiert. Mit der Definition $p''_k = -p_k$, $(k = 1, 2, 3)$, und $p''_0 = p_0$ erhält man:

$$\ldots = \frac{1}{4E^2} \operatorname{tr}\left[(\not{p}' + m)(\not{p}'' + m)\right].$$

Um diese Spur auszuwerten, benutzt man die allgemeine Relation:

$$\operatorname{tr} \not{a}\not{b} = 4ab$$

für beliebige Vierervektoren a und b. Diese folgt direkt aus:

$$\gamma_\mu a^\mu \gamma_\nu b^\nu + \gamma_\nu b^\nu \gamma_\mu a^\mu = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} a^\mu b^\nu = 2g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = 2a \cdot b$$

und

$$\operatorname{tr}(\gamma_\mu a^\mu \gamma_\nu b^\nu + \gamma_\nu b^\nu \gamma_\mu a^\mu) = 2 \operatorname{tr}(\gamma_\mu a^\mu \gamma_\nu b^\nu) = 2 \operatorname{tr}(\not{a}\not{b})$$

und $\operatorname{tr} 1 = 4$. (beachte: Spurbildung heißt hier Summe über die *vier* Diagonalelemente einer 4×4-Matrix im Spinorraum, *nicht* etwa Summation über unendlich viele Diagonalelemente einer Ortsraummatrix o.ä.!)

Damit gilt

$$\sum_{ss'} |u^\dagger u|^2 = \frac{1}{4E^2}\left[\operatorname{tr}(\not{p}'\not{p}'') + \operatorname{tr}(\not{p}' m) + \operatorname{tr}(m\not{p}'') + \operatorname{tr}(m^2)\right].$$

Wegen $\operatorname{tr}\gamma_\mu \overset{!}{=} 0$, $\operatorname{tr} 1 = 4$ folgt

$$\ldots = \frac{1}{4E^2}\left(4p'p'' + 4m^2\right)$$

$$\ldots = \frac{1}{4E^2}\left(4\vec{p}\cdot\vec{p}\,' + 4E^2 + 4m^2\right)$$

Mit

$$\vec{p}\cdot\vec{p}\,' = |\vec{p}|^2\cos\theta = |\vec{p}|^2\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ergibt sich:

$$\sum_{ss'}|u^\dagger u|^2 = \frac{1}{4E^2}\left(8E^2 - 8|\vec{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Damit erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2e^4}{4\pi^2}E^2\frac{1}{q^4}\frac{1}{E^2}\left(E^2 - |p|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Mit $|\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{p}\,'| = 2|\vec{p}|\sin\frac{\theta}{2}$ für elastische Streuung liefert dies:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2e^4}{4\pi^2}\frac{E^2}{16|\vec{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

(mit $\beta \overset{\text{def}}{=} |\vec{p}|/E$)

$$\ldots = \frac{1}{4}(Z\alpha)^2\frac{E^2}{|\vec{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

mit $\alpha = e^2/4\pi$. Dies ist der MOTTsche Streuquerschnitt für die Streuung unpolarisierter Elektronen. Im Grenzfall $\beta \to 0$ reduziert er sich auf den RUTHERFORD-Querschnitt. Wie die obige Ableitung zeigt, ist der Zusatzterm eine Folge des Spinfreiheitsgrades der Elektronen.

9.4 e^+e^--Annihilation

Während die im letzten Abschnitt behandelte Streuung eines Elektrons an einem äußeren Potential auch ohne Verwendung der Quantenfeldtheorie berechnet werden kann, soll nun ein typisch feldtheoretisches Beispiel, die Elektron-Positron-Zerstrahlung, betrachtet werden:

$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma.$$

Die Zerstrahlung in nur ein γ-Quant ist dabei nicht möglich, weil dabei Energie und Impuls nicht gleichzeitig erhalten bleiben können.

9.4.1 S-Matrix

Berechnet wird daher jetzt das Matrixelement der S-Matrix zwischen dem Anfangszustand

$$|i\rangle = |e^- e^+\rangle = a^\dagger_{ps} b^\dagger_{p's'} |0\rangle$$

und dem Endzustand

$$|f\rangle = |2\gamma\rangle = a^\dagger_{k_1\alpha_1} a^\dagger_{k_2\alpha_2} |0\rangle \qquad (\alpha_{1,2} = 1, 2)$$

bis zur Ordnung e^2. In

$$H_{int} = -\int \Psi^\dagger \beta \Psi \delta m d^3x - e \int \vec{j} \cdot \vec{A} d^3x + H_{coul}$$

können der erste und der letzte Term nichts beitragen, da sie keine Photonenoperatoren enthalten, also auch die Photonenzahl nicht verändern können. Also trägt nur

$$-e \int \vec{j} \cdot \vec{A} d^3x$$

bei zum Übergangsmatrixelement. Es ist unmittelbar zu sehen, daß in erster Ordnung in H_{int} kein Beitrag zu S auftreten kann (da *zwei* γ-Quanten erzeugt werden müssen). Das erste nichtverschwindende Matrixelement ist damit:

$$S_{fi} = \frac{(-i)^2}{2!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \mathrm{P}\left(H_{int}(t_1) H_{int}(t_2)\right)$$

mit $H_{int} = -e \int d^3x j_\mu A^\mu$. Zur Vereinfachung der Notation wird hier $A_\mu = (0, \vec{A})$ und

$$j_\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi$$

gesetzt. Da in H_{int} alle Fermionenoperatoren zweifach auftreten, ist $\mathrm{P} = \mathrm{T}$. Also gilt:

$$S_{fi} = \frac{(-i)^2}{2!} e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 2\gamma| \mathrm{T}\left[:j_\mu(1) A^\mu(1): :j_\nu(2) A^\nu(2):\right] |e^+ e^-\rangle$$

Für das zeitgeordnete Produkt der Feldoperatoren gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\left[:j_\mu(1) A^\mu(1): :j_\nu(2) A^\nu(2):\right] &= \mathrm{T}\left[:\bar{\Psi}(1)\gamma_\mu \Psi(1) A^\mu(1): :\bar{\Psi}(2)\gamma_\nu \Psi(2) A^\nu(2):\right] \\ &= \mathrm{T}\left[:\bar{\Psi}(1)\gamma_\mu \Psi(1): :\bar{\Psi}(2)\gamma_\nu \Psi(2):\right] \mathrm{T}\left[A^\mu(1) A^\nu(2)\right] \end{aligned}$$

weil A_μ und Ψ zwei völlig verschiedene, kommutierende Felder sind.

Photonen-Amplitude. Als erstes wird jetzt das Matrixelement über die A-Feldoperatoren berechnet:

$$\mathrm{T}\left[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\right] = {:}A_\mu(x_1)A_\nu(x_2){:} + \underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}$$

Die Kontraktion, eine reine Zahl, liefert keinen Beitrag zum nichtdiagonalen Matrixelement. Das $\vec{A}$-Feld wird entwickelt:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\vec{a}_k e^{-ikx} + \vec{a}_k^\dagger e^{ikx}\right)\\ \vec{a}_k &= a_{k_1}\vec{\epsilon}^{\,1} + a_{k_2}\vec{\epsilon}^{\,2}\end{aligned}$$

$\vec{\epsilon}^{\,1}$ und $\vec{\epsilon}^{\,2}$ bilden mit $\vec{k}$ ein rechtshändiges Koordinatensystem, sie hängen also von $\vec{k}$ ab. Man kann also schreiben (s. Abschnitt 5.1.1):

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{k,\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_{k\lambda}\vec{\epsilon}^{\,\lambda}e^{-ikx} + a_{k\lambda}^\dagger\vec{\epsilon}^{\,\lambda}e^{ikx}\right),$$

(dabei $kx = k_\mu x^\mu$).

Der Endzustand ist bestimmt durch die Angabe der Impulse und Polarisationen der beiden Photonen:

$$|2\gamma\rangle = \left|\vec{k}_1\alpha_1\vec{k}_2\alpha_2\right\rangle$$

Dann bekommt man für das Matrixelement

$$\begin{aligned}M_\gamma &= \langle 2\gamma|\,\mathrm{T}\left[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\right]|0\rangle = \langle k_1\alpha_1k_2\alpha_2|{:}A_\mu(x_1)A_\nu(x_2){:}|0\rangle\\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\substack{kk'\\ \lambda\lambda'}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\\ &\quad\times\langle k_1\alpha_1k_2\alpha_2|{:}\left(a_{k\lambda}\epsilon_\mu^\lambda e^{-ikx_1} + a_{k\lambda}^\dagger\epsilon_\mu^\lambda e^{ikx_1}\right)\left(a_{k'\lambda'}\epsilon_\nu^{\lambda'}e^{-ik'x_2} + a_{k'\lambda'}^\dagger\epsilon_\nu^{\lambda'}e^{ik'x_2}\right){:}|0\rangle\\ &= \frac{1}{\Omega}\sum_{\substack{kk'\\ \lambda\lambda'}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} < 2\gamma|a_{k\lambda}^\dagger a_{k'\lambda'}^\dagger|0\rangle e^{i(kx_1+k'x_2)}\epsilon_\mu^\lambda\epsilon_\nu^{\lambda'} \qquad (9.5)\end{aligned}$$

mit $\epsilon_\mu = (0,\vec{\epsilon})$. Alle anderen Terme tragen wegen der Normalordnung nichts bei.

Für das übrig bleibende Matrixelement gilt:

$$< 2\gamma|a_{k\lambda}^\dagger a_{k'\lambda'}^\dagger|0\rangle = \langle k_1\alpha_1k_2\alpha_2|a_{k\lambda}^\dagger a_{k'\lambda'}^\dagger|0\rangle = \delta_{kk_1}\delta_{\lambda\alpha_1}\delta_{k'k_2}\delta_{\lambda'\alpha_2} + \delta_{kk_2}\delta_{\lambda\alpha_2}\delta_{k'k_1}\delta_{\lambda'\alpha_1}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}M_\gamma &= \langle k_1\alpha_1k_2\alpha_2|{:}A_\mu(x_1)A_\nu(x_2){:}|0\rangle \qquad (9.6)\\ &= \frac{1}{\Omega}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}\epsilon_\mu^{\alpha_1}e^{ik_1x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\epsilon_\nu^{\alpha_2}e^{ik_2x_2}\right)\right.\\ &\quad\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\epsilon_\mu^{\alpha_2}e^{ik_2x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}\epsilon_\nu^{\alpha_1}e^{ik_1x_2}\right)\right].\end{aligned}$$

Leptonen-Amplitude. Nun wird das WICKsche Theorem auf die Fermionenoperatoren angewandt:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}\left[:\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1):\ :\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):\right]\\
&= \underbrace{:\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):}_{(9.7)} + \underbrace{:\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):}_{(9.8)}\\
&+ \underbrace{:\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):}_{(9.9)} + \underbrace{:\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):}_{(9.10)}
\end{aligned}
$$

Alle anderen Terme verschwinden, denn:

1. $\left.\begin{aligned}\bar\Psi(1)\Psi(1)&=0\\ \bar\Psi(2)\Psi(2)&=0\end{aligned}\right\}$ für gemischte Produkte (Abschnitt 8.3)

2. $\left.\begin{aligned}\bar\Psi(1)\bar\Psi(2)&=0\\ \Psi(1)\Psi(2)&=0\end{aligned}\right\}$ nach Abschnitt 8.2

Als nächstes wird nun das Matrixelement der Elektronenfeldoperatoren berechnet. Dazu werden zunächst noch einmal die Elektronenfelder aufgeschrieben (s. Abschnitt 8.1.2):

$$
\begin{array}{ll}
\Psi(x) = u(x) + \bar v(x) & \bar\Psi(x) = \bar u(x) + v(x)\\
u(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} a_{ps}u_{ps}e^{-ipx} & \bar u(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} a^\dagger_{ps}\bar u_{ps}e^{ipx}\\
\bar v(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} b^\dagger_{ps}v_{ps}e^{ipx} & v(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps} b_{ps}\bar v_{ps}e^{-ipx}
\end{array}
$$

Da jeder der Feldoperatoren jeweils einen Erzeugungsoperator und einen Vernichtungsoperator enthält, treten beim Ausmultiplizieren des Terms (9.7) 16 Einzelterme auf. Da aber gilt:

$$|f\rangle = |0\rangle \qquad \text{und} \qquad |i\rangle = a^\dagger_{ps}b^\dagger_{p's'}|0\rangle\ ,$$

so folgt, daß nur solche Terme etwas beitragen könnten, die mindestens ein a *und* ein b enthalten. Die beiden anderen Operatoren müssten dann $aa^\dagger$ oder $bb^\dagger$ sein. Da diese Operatoren normalgeordnet sind, stehen links Erzeuger, die – auf das Vakuum nach links wirkend – Null liefern. Damit verschwindet das Matrixelement über den Term (9.7). Im Term (9.10) mit seiner Doppelkontraktion steht nur eine Zahl; das nichtdiagonale Matrixelement über (9.10) verschwindet also auch.

Die Terme (9.9) und (9.8) liefern *identische Beiträge* zur S-Matrix. Dies sieht man wie folgt. In

$$\int\int :\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):\ \mathrm{T}[A^\mu(1)A^\nu(2)]d^4x_1\ d^4x_2$$

können unter dem Normalprodukt-Symbol $:\cdot:$ die Operatoren an den Stellen 1 und 2 umgeordnet werden:

$$\int\int :\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2)\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1): \mathrm{T}[A^\mu(1)A^\nu(2)]d^4x_1\ d^4x_2$$

Vertauschung der Integrationsvariablen und Lorentz-Indizes liefert:

$$\int\int :\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2): \mathrm{T}[A^\nu(2)A^\mu(1)]d^4x_1\ d^4x_2$$

Das Matrixelement dieses Terms ist in der Tat gleich dem des Termes (9.9), weil das Matrixelement über die Photonoperatoren (Gleichung (9.5) auf Seite 77) symmetrisch in x_1 und x_2 ist.

Es bleibt also nur der Beitrag des mittleren Termes ((9.9) = (9.8)) zu berechnen:

$$\begin{aligned}
M_e &= \langle 0|:\bar\Psi(1)\gamma_\mu\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\nu\Psi(2):|e^+e^-\rangle \\
&= \langle 0|:\bar\Psi_\alpha(1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(1)\bar\Psi_\gamma(2)(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\Psi_\delta(2):|e^+e^-\rangle \\
&= \Psi_\beta(1)\bar\Psi_\gamma(2)\langle 0|:\bar\Psi_\alpha(1)\Psi_\delta(2):|e^+e^-\rangle(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \\
&= S_F(x_1-x_2)_{\beta\gamma}\langle 0|v_\alpha(1)u_\delta(2)|e^+e^-\rangle(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}
\end{aligned}$$

mit dem Feynman-Propagator S_F (siehe Gleichung (8.11) auf Seite 66). Das hier auftretende Matrixelement ist:

$$\langle 0|v_\alpha(1)u_\delta(2)|e^+e^-\rangle = \frac{1}{\Omega}\bar v^\alpha_{p's'}u^\delta_{ps}e^{-ip'x_1}e^{-ipx_2}$$

(p':Positron, p:Elektron). Damit erhält man

$$\begin{aligned}
M_e &= \frac{1}{\Omega}\bar v^\alpha_{p's'}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(S_F(x_1-x_2))_{\beta\gamma}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}u^\delta_{ps}e^{-ip'x_1}e^{-ipx_2} \\
&= \frac{1}{\Omega}\bar v_{p's'}\gamma_\mu S_F(x_1-x_2)\gamma_\nu u_{ps}e^{-ip'x_1}e^{-ipx_2} \qquad (9.11)
\end{aligned}$$

S-Matrix Element. Damit ist das Matrixelement der S-Matrix gegeben durch Kombination der Gleichungen (9.6) von S. 77 und (9.11) von S. 79:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle 2\gamma|S|e^+e^-\rangle \\
&= -\frac{e^2}{2}\int d^4x_1\,d^4x_2\,2M_e(x_1,x_2)M_\gamma(x_1,x_2) \\
&= (-e^2)\frac{1}{\Omega}\int d^4x_1\int d^4x_2\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}\epsilon^{\alpha_1}_\mu e^{ik_1x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}\epsilon^{\alpha_2}_\nu e^{ik_2x_2}\right) \\
&\quad\times\frac{1}{\Omega}\bar v_{p's'}\gamma^\mu S_F(x_1-x_2)\gamma^\nu u_{ps}e^{-ip'x_1}e^{-ipx_2} + \begin{Bmatrix} k_1\leftrightarrow k_2 \\ \epsilon_1\leftrightarrow\epsilon_2\end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Obwohl wir mit der nicht kovarianten Coulomb-Eichung gearbeitet haben, ist dieser Ausdruck kovariant, denn er besteht nur aus Skalarprodukten von Vierervektoren und dem kovarianten Propagator S_F für die Fermionen. Daß ein zweiter Term auftritt, in dem die Wellenzahlen und Polarisationen der Photonen vertauscht sind, ist auf die Ununterscheidbarkeit der Photonen zurückzuführen.

Als nächstes wird im obigen Matrixelement nun über d^4x_1 und d^4x_2 integriert. Da gilt:

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{i}{\not{k} - (m - i\epsilon)} e^{-ikx} d^4k$$

lautet das vollständige Integral über x_1 und x_2:

$$\int d^4x_1 e^{-i(p'-k_1+k)x_1} \int d^4x_2 e^{-i(p-k_2-k)x_2} = \delta^4(k-(k_1-p'))\delta^4(k-(p-k_2))(2\pi)^8 \ .$$

Nun wird die Integration im Propagator über k ausgeführt. Dann entfällt eine der δ-Funktionen, z. B. die zweite, und überall wird ersetzt:

$$k \mapsto p - k_2.$$

Das Matrixelement ist dann:

$$S_{fi} = \langle 2\gamma|S|e^+e^-\rangle = -i(2\pi)^4 \frac{1}{\Omega^2} \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \delta^4\left(p + p' - (k_1 + k_2)\right) \mathcal{M}_{fi} \tag{9.12}$$

mit dem kovarianten Matrixelement

$$\begin{aligned} & -i\mathcal{M}_{fi} \\ = \ & (-e^2)\bar{v}_{p's'} \left[\gamma^\mu \epsilon_\mu^{\alpha_1} \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_2) - m} \gamma^\nu \epsilon_\nu^{\alpha_2} + \gamma^\mu \epsilon_\mu^{\alpha_2} \frac{i}{(\not{p} - \not{k}_1) - m} \gamma^\nu \epsilon_\nu^{\alpha_1} \right] u_{ps}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Der Ausdruck in (9.12) ist bemerkenswert einfach. Die δ-Funktion enthält die Energie- und Impulserhaltung für den Prozeß automatisch.

Der zweite Term in $\mathcal{M}$ (Austauschterm) ist auf die Ununterscheidbarkeit der Photonen zurückzuführen; er tritt mit dem positiven Vorzeichen auf, weil die Photonen Bosonen sind.

Feynman-Graphen

Der mathematische Ausdruck für das kovariante Matrixelement kann mittels der sogenannten Feynman-Graphen dargestellt werden. In diesen Graphen, die unter Benutzung bestimmter Regeln (s.u.) in den zugehörigen Ausdruck umgesetzt werden können, bezeichnen generell Punkte die Wechselwirkungsvertizes und Linien (gerade, gewellte oder auch gestrichelte) ein- oder auslaufende Teilchen. Eine Zeitachse denkt man sich dabei generell als von unten nach oben gerichtet; Linien, die von unten in einen Vertex einlaufen, bezeichnen dort absorbierte Teilchen und solche, die von einem Vertex nach oben gerichtet sind, emittierte Teilchen.

Abbildung 9.1: FEYNMAN-Graphen zur $\boldsymbol{e^+e^-}$-Annihilation

Teilchen und Antiteilchen (bei geladenen Feldern) werden durch Pfeile nach oben bzw. nach unten unterschieden.

Ein Beispiel für einen FEYNMAN-Graphen zeigt Fig. 9.1 für den behandelten Fall der e^+e^- Annihilation. Der linke Graph kann wie folgt gedeutet werden: Ein Elektron läuft ein zum Punkt 2, emittiert dort ein Photon mit $(k_2\alpha_2)$ unter Impuls und Energieerhaltung, läuft als virtuelles Teilchen weiter zum Punkt 1 und annihiliert dort mit dem einlaufenden Positron. Analog kann natürlich auch erst das Positron emittieren und dann mit dem Elektron annihilieren. Das Teilchen nach dem ersten Vertex ist ein *virtuelles* Teilchen, weil E und p nicht im korrekten Zusammenhang für freie Teilchen stehen. An jedem Vertex gilt Energie- und Impulserhaltung.

Zur Konstruktion des invarianten Matrixelementes $-i\mathcal{M}_{fi}$ werden die einzelnen Elemente des Graphen entsprechend den folgenden Regeln aufgeschrieben:

1. Man schreibe für jedes $\left\{\begin{array}{ll} \text{absorbierte Elektron} & u_{ps} \\ \text{absorbierte Positron} & \bar{v}_{ps} \\ \text{absorbierte Photon} & \epsilon_\mu^\alpha \\ \text{emittierte Elektron} & \bar{u}_{ps} \\ \text{emittierte Positron} & v_{ps} \\ \text{emittierte Photon} & \epsilon_\mu^\alpha \end{array}\right\}$

   in *äußeren* Linien.

2. An jedem Vertex schreibe man $ie\gamma_\mu$ und erfülle Viererimpuls-Erhaltung.

3. Für ein virtuelles Elektron oder Positron schreibe man

$$\frac{i}{\not{q} - m}\,,$$

wobei q der Viererimpuls des virtuellen Teilchens ist. Falls q nicht schon durch Energie-Impulserhaltung festgelegt ist, muß eine Integration über alle möglichen Impulse

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4q$$

erfolgen.

Dabei werden die einzelnen Faktoren von rechts nach links aufgeschrieben, d.h. *gegen* die Pfeilrichtung im Diagramm. Dies liefert in der Tat das Ergebnis (9.13) auf S. 80.

9.4.2 Wirkungsquerschnitt

Um den *differentiellen* Wirkungsquerschnitt zu erhalten, muß $|S_{fi}|^2/T$, d.h. die *Übergangsrate pro Zeiteinheit*, mit den Phasenfaktoren des Endzustandes multipliziert und durch den Fluß der einlaufenden Teilchen, j_i, dividiert werden. Dies liefert:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \Omega \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \Omega \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{j_i}$$

Das beim Quadrieren der S-Matrix auftretende Quadrat der δ-Funktion kann durch das Raum-Zeit-Volumen des betrachteten Prozesses ausgedrückt werden. Da gilt

$$\int d^4x \, e^{ipx} = (2\pi)^4 \delta^4(p),$$

folgt:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p) \int d^4x e^{ipx} = ((2\pi)^4 \delta^4(p))^2.$$

Links kann wegen der δ-Funktion im Integral $p = 0$ gesetzt werden. Dann folgt:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p) \Omega T = \left((2\pi)^4 \delta^4(p)\right)^2.$$

wobei ΩT das Raum-Zeit-Volumen ist. Also hat man:

$$|\langle 2\gamma|S|e^+e^-\rangle|^2 = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{(2\pi)^4}{\Omega^4} \frac{1}{2\omega_1 2\omega_2} \delta^4\left(p + p' - (k_1 + k_2)\right) \Omega T.$$

Der einlaufende Strom ist durch die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen bestimmt: $j_i = v_{rel}/\Omega$. Die Relativgeschwindigkeit zweier Teilchen mit Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ ist gegeben durch

$$v_{rel} = |\vec{v} - \vec{v}'| = \sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv' cos\theta}$$

Für die übliche kollineare Streuung gilt $\theta = \pi$. Also folgt

$$v_{rel} = v + v' = \frac{|\vec{p}|}{E} + \frac{|\vec{p}\,'|}{E'} = \frac{|\vec{p}|E' + |\vec{p}\,'|E}{EE'}$$

Im CM-System (*center of mass*) ist $|\vec{p}| = |\vec{p}\,'| = p$. Also ist die Relativgeschwindigkeit

$$v_{rel} = \frac{pE_{tot}}{EE'} \qquad (E_{tot} = E + E') \ .$$

Damit ist jetzt der Wirkungsquerschnitt im CM-System

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T}\Omega^3 \frac{EE'}{pE_{tot}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}$$

Einsetzen von S gibt:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega_1 2\omega_2} \delta^4\left(p + p' - (k_1 + k_2)\right) \cdot \frac{E\ E'}{pE_{tot}} d^3k_1 d^3k_2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \ .$$

Berechnet wird jetzt der Wirkungsquerschnitt dafür, im Raumwinkelelement $d\Omega$ ein Photon mit beliebigem Impuls zu sehen. Dazu wird zuerst über $\vec{k}_2$ integriert. Wegen der vierdimensionalen δ-Funktion liefert dies den restlichen Ausdruck an der Stelle $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$. Dies gibt die Impulserhaltung im CM-System, denn dort gilt wegen $\vec{p} + \vec{p}\,' = 0$, d.h. $|\vec{p}| = |\vec{p}\,'|$, auch $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ und daher

$$k = |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|.$$

Außerdem bleibt die δ-Funktion über die nullte Komponente übrig ($\delta^4(x) = \delta^3(\vec{x})\delta^0(x_0)$) :

$$\delta^0\left(E + E' - (k_1 + k_2)\right)\frac{1}{k_2} = \delta^0\left(E_{tot} - 2k\right)\frac{1}{k} \qquad \text{(wegen CM-System!)}$$

Jetzt erfolgt eine Integration über k_1 ($= k$):

$$\begin{aligned} &\int \frac{k^2 dk}{k} \delta^0(E_{tot} - 2k) \frac{1}{k} |\mathcal{M}(k)|^2 d\Omega \\ &= \int \delta^0(E_{tot} - 2k)|\mathcal{M}(k)|^2 dk d\Omega = \frac{1}{2}|\mathcal{M}(k = \frac{E_{tot}}{2})|^2 d\Omega \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \frac{EE'}{2pE_{tot}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{9.14}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4} \frac{|k|}{|p|} \frac{1}{E_{tot}^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{EE'}{m^2} (2m)^2 \ , \tag{9.15}$$

wobei $\mathcal{M}$ an der Stelle $k = E_{tot}/2$ zu nehmen ist. Wenn das einlaufende Elektron und Positron polarisiert ist, muß noch über deren Polarisationen gemittelt werden.

Wirkungsquerschnitt für niedrige Energien

Bei sehr kleinen Positronen- und Elektronengeschwindigkeiten (und damit auch sehr kleinen $|\vec{k}|$) kann $\mathcal{M}$ leichter ausgewertet werden. Zudem sind hier jedenfalls beide Teilchen in einem relativen $L = 0$ Zustand, so daß der Gesamt-Drehimpuls durch Spin-Kopplung nur 0 oder 1 sein kann. Dies wird später noch ausgenutzt.

Der Propagatoranteil gibt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\not p - \not k - m} &= \frac{\not p - \not k + m}{(p-k)^2 - m^2} = \frac{\not p - \not k + m}{p^2 + k^2 - 2pk - m^2} = \frac{\not p - \not k + m}{E^2 - \vec{p}^2 - 2pk - m^2} \\ &= \frac{\not p - \not k + m}{-2pk} = \frac{\gamma_\mu p^\mu - \gamma_\mu k^\mu + m}{-2pk},\end{aligned}$$

weil $k^2 = 0$ für Photonen ($\not p \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_\mu p^\mu$). Für $|\vec{p}| \ll m$ folgt

$$\frac{1}{\not p - \not k - m} \longrightarrow \frac{-\gamma_0 m + \gamma_\mu k^\mu - m}{2m\omega}\,. \tag{9.16}$$

mit $\omega = k$. Im folgenden wird nun gezeigt, daß die Beiträge des 1. und 3. Terms im Zähler dieses Propagators zum Matrixelement verschwinden; außerdem liefert der Anteil mit γ_0 im 2. Term keinen Beitrag.

Im Fall $\vec{p} = -\vec{p}\,' \to 0$ haben die Spinoren die folgende Gestalt (s. Tabelle 9.1 auf S. 85 und Anhang A):

$$u_{p=+0s} = N\begin{pmatrix}\varphi_s \\ 0\end{pmatrix} \qquad v_{p=-0s} = N\begin{pmatrix}0 \\ \chi_s\end{pmatrix} \tag{9.17}$$

mit

$$\varphi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \qquad \varphi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \tag{9.18}$$

und

$$\chi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} = -\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \tag{9.19}$$

und der Normierung:

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \qquad (E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0) \\ &\approx 1 \qquad \text{für } \vec{p} \to 0 \text{ (weil dann } E_p \to m);\end{aligned}$$

die Helizitätsindizes sind hier für sehr kleine nichtverschwindende Impulse noch definiert.

Da die Polarisationsvektoren keine Zeitkomponente besitzen ($\epsilon_0^\alpha = 0$), laufen die Indizes μ und ν nur von 1 bis 3. Daher gilt

$$\bar{v}_{-0s'}\gamma_i\gamma_0\gamma_j u_{+0s} = N^2(0\ \chi_{s'}^\dagger)\gamma_0\gamma_i\gamma_0\gamma_j\begin{pmatrix}\varphi_s \\ 0\end{pmatrix} = -N^2(0\ \chi_{s'}^\dagger)\gamma_i\gamma_j\begin{pmatrix}\varphi_s \\ 0\end{pmatrix},$$

Tabelle 9.1: **Phasen der Dirac-Spinoren**

Aus den Definitionsgleichungen der Spinoren u und v folgen die Relationen (s. Anhang A)

$$\begin{array}{rclrcl} v_{ps} &=& \gamma_2 u^*_{ps} & u_{ps} &=& \gamma_2 v^*_{ps} \\ \gamma_0 u_{ps} &=& u_{-p-s} & \gamma_0 v_{ps} &=& -v_{-p,-s} \\ \Sigma^2 u^*_{ps} &=& \eta^*(p,s) u_{-ps} & \Sigma^2 v^*_{ps} &=& \eta(-p,s) v_{-ps} \end{array}$$

mit den Phasen

$$\eta(p,s) = -\eta(-p,s).$$

Mit der Phasenwahl $\eta(p,s) = -i,\ \eta(-p,s) = +i$ und $P \equiv \frac{p}{m+E_p}$, $\vec{p} = (0,0,p)$ erhält man:

$$\begin{array}{rclrcl} u_{+p+\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} & u_{+p-\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} \\ u_{-p+\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} & u_{-p-\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclrcl} v_{+p+\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & v_{+p-\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_{-p+\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & v_{-p-\frac{1}{2}} &=& N\begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

weil für sehr langsame Fermionen jeweils die unteren bzw. die oberen Komponenten der DIRAC-Spinoren verschwinden. Es ist:

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\gamma_i\gamma_j \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_j\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\bar{v}_{-0s'}\gamma_i\gamma_0\gamma_j u_{0s} = -N^2(0\ \chi^\dagger)\begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0\ . \tag{9.20}$$

Ebenso folgt:

$$\bar{v}_{-0s'}\gamma_i\gamma_j u_{+0s} = 0$$

Beides gilt für alle möglichen Quantenzahlen s und s'. Damit verschwinden die Beiträge des 1. und des 3. Terms im Zähler des Propagators (9.16) auf Seite 84. Außerdem verschwindet vom 2. Term der Anteil mit γ_0 wegen der Eigenschaft (9.20) auf Seite 86.

Dies liefert eingesetzt in $\mathcal{M}$ (9.13) auf S. 9.13):

$$-i\mathcal{M}_{fi} = (-e^2)\frac{i}{2m\omega}\bar{v}_{p=-0s'}\left(\gamma^i\epsilon_i^{\alpha_1}\gamma^j k_{2j}\gamma^k\epsilon_k^{\alpha_2} + \gamma^i\epsilon_i^{\alpha_2}\gamma^j k_{1j}\gamma^k\epsilon_k^{\alpha_1}\right)u_{+p=0s}\ . \tag{9.21}$$

Jetzt wird der Inhalt der Klammer in Gleichung (9.21) weiter bearbeitet:

$$\begin{aligned} (\ldots) &= -\left[\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\,\vec{\gamma}\cdot\vec{k}_2\right)\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2}\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{k}_1\,\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\right)\right] \\ &\equiv A \end{aligned}$$

Im CM-System gilt allgemein $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $\vec{k} = \vec{k}_1 = -\vec{k}_2$. Unter Benutzung von

$$(\vec{\gamma}\cdot\vec{a})(\vec{\gamma}\cdot\vec{b}) = -\vec{a}\cdot\vec{b} - i\vec{\Sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \tag{9.22}$$

läßt sich dann schreiben:

$$\begin{aligned} A &= \left[\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\cdot(-\vec{k}) - i\vec{\Sigma}\cdot(\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\times\vec{k})\right]\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2}\left[\left(\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\right) + i\,\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\right)\right] \\ &= -i\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\times\vec{k}\right)\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2}\,i\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\right)\ . \end{aligned} \tag{9.23}$$

Auf diesen Ausdruck wird die Relation (9.22) noch einmal angewandt. Dazu wird zuerst die Identität

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{a} = \gamma_0\gamma_5\vec{\Sigma}\cdot\vec{a} \tag{9.24}$$

benutzt. Dabei ist γ_5 definiert durch:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad \text{mit der Eigenschaft} \qquad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$$

d.h. γ_5 antikommutiert mit allen anderen γ-Matrizen. γ_5 besitzt die explizite Gestalt:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_5^2 = 1 \ .$$

γ_5 ist ein *Pseudoskalar*, denn unter Raumspiegelungen transformieren sich mit γ_5 gebildete Bilinearformen wie das Produkt der drei Komponenten eines Vektors und gehen daher in ihr Negatives über. Aus Beziehung (9.24) folgt

$$-\gamma_0\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{a} = \vec{\Sigma}\cdot\vec{a}.$$

Also gilt auch speziell

$$\vec{\Sigma}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right) = -\gamma_0\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right) \ .$$

Dies wird benutzt, um Gleichung (9.23) auf Seite 86 umzuschreiben:

$$\begin{aligned} A &= i\gamma_0\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right)\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2} - i\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\gamma_0\gamma_5\,\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{k}\times\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\right) \\ &= i\gamma_0\gamma_5\left[\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\alpha_1}\times\vec{k}\right)\vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\,\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right)\right] \end{aligned}$$

Jetzt wird (9.22) auf S. 86 benutzt. Dies liefert

$$\begin{aligned} A &= -i\gamma_0\gamma_5\Big\{\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2} + i\vec{\Sigma}\cdot\left[\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right)\times\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\right] \\ &\qquad + \vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right) + i\vec{\Sigma}\cdot\left[\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\times\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right)\right]\Big\} \\ &= -2i\gamma_0\gamma_5\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{k}\right) \\ &= 2i\gamma_0\gamma_5\,\vec{k}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\right) \ . \end{aligned}$$

Die Terme mit $\vec{\Sigma}$ heben sich weg.

Damit ist $\mathcal{M}$ für den Niederenergie-Limit berechnet:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi} &= (-e^2)\frac{i}{2m\omega}\bar{v}_{p=-0s'}2i\gamma_0\gamma_5\vec{k}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\right)u_{p=+0s} && (9.25) \\ &= \frac{e^2}{m\omega}\left(\bar{v}_{-0s'}\gamma_0\gamma_5u_{+0s}\right)\vec{k}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\right). && (9.26) \end{aligned}$$

Jetzt wird noch der Ausdruck in der ersten Klammer von (9.13) ausgerechnet. Dazu werden die Spinoren (9.17) von S. 84 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{-0s'}\gamma_0\gamma_5u_{+0s} &= v^\dagger_{-0s'}\gamma_5u_{+0s} \\ &= (0\ \chi^\dagger_{s'})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0\ \chi^\dagger_{s'})\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_s \end{pmatrix} \\ &= \chi^\dagger_{s'}\varphi_s \ . && (9.27) \end{aligned}$$

Damit ist insgesamt

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \frac{e^2}{m\omega}\chi^\dagger_{s'}\varphi_s \vec{k}\cdot\left(\vec{\epsilon}^{\,\alpha_1}\times\vec{\epsilon}^{\,\alpha_2}\right)\ . \tag{9.28}$$

Eine Annihilation findet also nur in einen Zustand mit senkrechten Polarisationen der beiden Photonen statt. Dieses einfache Result muß eine einfache Erklärung haben, die im folgenden diskutiert werden soll.

Drehimpuls-Analyse. In den bisherigen Rechnungen ist der Anfangszustand als einfacher Produktzustand angesetzt worden. Für zwei Spin-1/2 Teilchen kann dieser Produktzustand entweder zum Gesamtdrehimpuls $J = S = 1$ oder $J = S = 0$ gehören, denn bei kollinearer Annihilation in Ruhe ist jedenfalls der Bahndrehimpuls $L = 0$.

Da die Bewegung kollinear ist, muß der Gesamtspin entweder senkrecht ($S_z = 0$) oder parallel zu $\vec{p}$ stehen ($S_z = \pm 1$). Im Fall $S_z = +1$, der hier beispielhaft diskutiert werden soll, ist $s = +\frac{1}{2}$, $s' = -\frac{1}{2}$ wie die folgende kleine Tabelle illustriert.

Teilchen	e^-	e^+
Impuls	$\xrightarrow{\vec{p}}$	$\xleftarrow{-\vec{p}}$
Spin	$\xrightarrow{\sigma}$	$\xrightarrow{\sigma}$
Helizität	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Da die in Gleichung (9.27) auftretenden Zweier-Spinoren die Gestalt

$$\chi_{-\frac{1}{2}} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ ; \qquad \varphi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

besitzen (s. Gleichungen (9.18),(9.19) auf S. 84), erhält man für den Ausdruck (9.27)

$$\chi^\dagger_{-\frac{1}{2}}\varphi_{\frac{1}{2}} = -(0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\ ,$$

also auch:

$$(\bar{v}_{0s'}\gamma_0\gamma_5 u_{0s})_{S=1,M_s=1} = 0\ ;$$

analog gilt dies auch für $M_s = -1$.

Der Zustand für $M_s = 0$ läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
|e^+e^-\rangle &= b^\dagger_{-0,\frac{1}{2}}a^\dagger_{+0,\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b^\dagger_{-0,\frac{1}{2}}a^\dagger_{+0,\frac{1}{2}} + b^\dagger_{-0,-\frac{1}{2}}a^\dagger_{+0,-\frac{1}{2}}\right)|0\rangle \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b^\dagger_{-0,\frac{1}{2}}a^\dagger_{+0,\frac{1}{2}} - b^\dagger_{-0,-\frac{1}{2}}a^\dagger_{+0,-\frac{1}{2}}\right)|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|S=1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S=0\rangle\ .
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Hier haben wir den Elektron-Positron Zustand als Überlagerung von Zuständen zu gutem Gesamt-Spin aufgeschrieben.

Damit können wir auch das invariante Matrixelement nach Gesamt-Spins aufspalten. Es gilt

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{M}_{fi}^{S=0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{M}_{fi}^{S=1} \tag{9.30}$$

mit

$$\mathcal{M}_{fi}^{S=0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left([\mathcal{M}_{fi}]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \pm [\mathcal{M}_{fi}]_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right) \ , \tag{9.31}$$

wobei das obere $(+)$ Vorzeichen zum $S = 1$ und das untere $(-)$ Vorzeichen zum $S = 0$ Zustand gehört. Für die hier auftretenden Matrixelemente gilt

- $[\mathcal{M}_{fi}]_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$: $\quad \bar{v}_{-0\frac{1}{2}}\gamma_0\gamma_5 u_{+0\frac{1}{2}} = \chi^\dagger_{\frac{1}{2}}\varphi_{\frac{1}{2}} = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +1$
- $[\mathcal{M}_{fi}]_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$: $\quad \bar{v}_{-0-\frac{1}{2}}\gamma_0\gamma_5 u_{+0-\frac{1}{2}} = \chi^\dagger_{-\frac{1}{2}}\varphi_{-\frac{1}{2}} = -(0\ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \ .$

Damit ist nach (9.31) und dem obigen Ergebnis für $M_s = \pm 1$

$$\mathcal{M}_{fi}^{S=1} = 0 \ ,$$

und zwar für alle Helizitäten. Eine Zerstrahlung aus dem $S = 1$ Zustand findet damit nicht statt.

Für $S = 0$ dagegen folgt für das kovariante Matrixelement:

$$[\mathcal{M}_{fi}]_{S=0} = \sqrt{2}\left(\frac{e^2}{m\omega}\right)\vec{k}\cdot(\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1} \times \vec{\epsilon}^{\ \alpha_2}) \ .$$

Also

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_{fi}|^2_{S=0} &= \frac{2e^4}{m^2\omega^2}\left|\vec{k}\cdot(\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1} \times \vec{\epsilon}^{\ \alpha_2})\right|^2 \\
&= \frac{2e^4}{m^2}\left|\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1} \times \vec{\epsilon}^{\ \alpha_2}\right|^2 \\
&= \frac{2e^4}{m^2}\sin^2\theta \\
&= \frac{2e^4}{m^2}\left(1 - (\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2})^2\right).
\end{aligned}$$

Als Ergebnis ist also festzuhalten, daß bei $\vec{p} \to 0$ nur im *Singulettzustand* eine Annihilation stattfinden kann und daß selbst in diesem für $\vec{\epsilon}^{\ \alpha_1}\cdot\vec{\epsilon}^{\ \alpha_2} = \pm 1$ keine Zerstrahlung stattfindet. Der gesamte differentielle Wirkungsquerschnitt ist darüber hinaus isotrop; dies spiegelt wider, daß die Annihilation nur aus dem S-Zustand heraus stattfindet (kleine $\vec{p} \approx 0$).

Diese Eigenschaften der Strahlung sind unabhängig von der Störungstheorie, die hier benutzt wurde; sie folgen aus Symmetrieeigenschaften der QED. Dies wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

Kapitel 10

Symmetrien der Quantenelektrodynamik

Allgemein wird zuerst gezeigt, daß der QED-Hamiltonoperator kommutiert mit drei grundlegenden Symmetrien, die damit alle mit Erhaltungsgrößen verbunden sind. Dies sind die

1. *Ladungskonjugation* C,
2. *Paritätstransformation* P,
3. *globale Eichtransformation.*

Die letzte dieser Transformationen führt zur Leptonenzahlerhaltung. Es wird dann gezeigt, daß die beiden ersten Symmetrien die bei der Elektron-Positron Paarvernichtung im letzten Kapitel beobachteten Auswahlregeln erklären.

10.1 Symmetrieoperationen

10.1.1 *Ladungskonjugation* C

Theorem: Der QED-Hamiltonoperator H_{QED} ist invariant unter C, d. h.

$$\mathrm{C} H_{QED} \mathrm{C}^\dagger = H_{QED}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathrm{C}\vec{A}(x)\mathrm{C}^\dagger &= -\vec{A}(x); & \mathrm{C}\vec{\Pi}(x)\mathrm{C}^\dagger &= -\vec{\Pi}(x) \\ \mathrm{C}\Psi(x)\mathrm{C}^\dagger &= \eta_c \Psi^c(x); & |\eta_c| &= 1, \quad \text{konstant} \\ \text{mit } \Psi^c_\alpha(x) &= -i(\gamma^2)_{\alpha\lambda} \left(\Psi^\dagger_\lambda\right)^T(x) \end{aligned}$$

C ist offensichtlich *unitär*.

Beweis: Um den Beweis zu führen, werden zuerst die Transformationseigenschaften der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bestimmt. Es gilt für die FOURIER-Entwicklung des DIRAC-Feldes:

$$\mathrm{C}\Psi(x)\mathrm{C}^\dagger = \sum_{\vec{p},s} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left(\mathrm{C}\ a_{ps}\mathrm{C}^\dagger u_{ps} e^{-ipx} + \mathrm{C}\ b^\dagger_{ps}\mathrm{C}^\dagger v_{ps} e^{ipx} \right) \tag{10.1}$$

C ist ein Operator im Raum der Feldzustände und wirkt deshalb nicht auf die Spinoren u und v und die Funktion e^{ipx}.

Es gilt ferner nach Voraussetzung für den ladungskonjugierten Feldoperator

$$\begin{aligned} \Psi^c_\alpha(x) &= -i(\gamma^2)_{\alpha\lambda} \left(\Psi^\dagger_\lambda \right)^T (x) \\ &= -i \sum_{ps} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left(a^\dagger_{ps} (\gamma^2)_{\alpha\lambda} (u^*_{ps})_\lambda e^{ipx} + b_{ps} (\gamma^2)_{\alpha\lambda} (v^*_{ps})_\lambda e^{-ipx} \right) \end{aligned}$$

Mit

$$-i\gamma^2 u^*_{ps} = v_{ps} \qquad \text{und} \qquad -i\gamma^2 v^*_{ps} = u_{ps}$$

(siehe Anhang A) folgt:

$$\Psi^c_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{ps} \left(a^\dagger_{ps} (v_{ps})_\alpha e^{ipx} + b_{ps} (u_{ps})_\alpha e^{-ipx} \right)$$

und daher allgemein

$$\Psi^c(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{ps} \left(b_{ps} u_{ps} e^{-ipx} + a^\dagger_{ps} v_{ps} e^{ipx} \right) \ . \tag{10.2}$$

Vergleich von (10.1) mit (10.2) liefert:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}a_{ps}\mathrm{C}^\dagger &=& \eta_c b_{ps} \\ \mathrm{C}b^\dagger_{ps}\mathrm{C}^\dagger &=& \eta_c a^\dagger_{ps} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{C}a^\dagger_{ps}\mathrm{C}^\dagger &=& \eta^*_c b^\dagger_{ps} \\ \mathrm{C}b_{ps}\mathrm{C}^\dagger &=& \eta^*_c a_{ps} \end{array} \tag{10.3}$$

Völlig analog folgt für den Photonenoperator:

$$\mathrm{C}\vec{\alpha}^\dagger_{\vec{k}}\mathrm{C}^\dagger = -\vec{\alpha}^\dagger_{\vec{k}}. \tag{10.4}$$

Die gesamte Phase der Zustände wird festgelegt durch die Forderung, daß das Vakuum ladungsneutral ist:

$$\mathrm{C}|0\rangle = |0\rangle.$$

Zur Invarianz von H: Als nächstes wird die Invarianz von H unter einer solchen Transformation gezeigt. Für H_0 ist das trivial:

$$H_0 = \sum_{ps} E_p \left(a^\dagger_{ps} a_{ps} + b^\dagger_{ps} b_{ps} \right) + \sum_k \omega_k \alpha^\dagger_k \alpha_k .$$

Jetzt wird der Wechselwirkungsterm $j_\mu A^\mu$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}\ j_\mu \mathrm{C}^\dagger &= \mathrm{C}{:}\bar\Psi \gamma_\mu \Psi{:}\mathrm{C}^\dagger \\
&= \mathrm{C}{:}\Psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \Psi{:}\mathrm{C}^\dagger \\
&= {:}\mathrm{C}\Psi^\dagger_\alpha \mathrm{C}^\dagger (\gamma_0\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \mathrm{C}\Psi_\beta \mathrm{C}^\dagger{:} \\
&= {:}\eta_c^* (\Psi^\dagger_c)_\alpha (\gamma_0\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \eta_c \Psi^c_\beta{:} \\
&= {:}\Psi_\lambda (\gamma^2)^\dagger_{\lambda\alpha} (\gamma_0\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^2)_{\beta\lambda'} \Psi^\dagger_{\lambda'}{:}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$${:}\Psi_\lambda \Psi^\dagger_{\lambda'}{:} = -{:}\Psi^\dagger_{\lambda'} \Psi_\lambda{:}.$$

folgt in obiger Rechnung:

$$\ldots = -{:}\Psi^\dagger_{\lambda'} (\gamma_2^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_2)_{\lambda\lambda'} \Psi_\lambda{:}.$$

Weiter wird die Klammer über die γ's transponiert:

$$\left(\gamma_2^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_2\right)_{\lambda\lambda'} = \left(\gamma_2^{\mathrm{T}} \gamma_\mu^{\mathrm{T}} \gamma_0 \gamma_2^*\right)_{\lambda'\lambda} = (\gamma_0\gamma_\mu)_{\lambda'\lambda} \ .$$

Die letzte Gleichung läßt sich durch explizites Durchspielen aller μ zeigen.

Also folgt nun zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}\ j_\mu \mathrm{C}^\dagger &= -{:}\Psi^\dagger_{\lambda'} (\gamma_0\gamma_\mu)_{\lambda'\lambda} \Psi_\lambda{:} \\
&= -j_\mu .
\end{aligned}$$

Da $j_0 = \rho$, gilt demnach:

$$\mathrm{C}\ \rho\ \mathrm{C}^\dagger = -\rho. \qquad \textit{Ladungskonjugation}$$

Daraus und aus

$$A_0(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e\rho(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} d^3x'$$

folgt dann

$$\mathrm{C}\ A_0(x)\mathrm{C}^\dagger = -A_0(x).$$

Dies wird kombiniert mit der ursprünglichen Aussage für die ersten drei Komponenten des Viererpotentials (Gleichung (10.4)):

$$\mathrm{C}\ \vec{A}\mathrm{C}^\dagger = -\vec{A}.$$

$$\mathrm{C}\ A_\mu \mathrm{C}^\dagger = -A_\mu \ . \tag{10.5}$$

Dies liefert schließlich:

$$\mathrm{C}\ j_\mu A^\mu \mathrm{C}^\dagger = \mathrm{C}\ j_\mu\ \mathrm{C}^\dagger \mathrm{C}\ A^\mu \mathrm{C}^\dagger = j_\mu A^\mu$$

(da C unitär). Damit ist die Invarianz der QED gegenüber Ladungskonjugation, d. h. Teilchen-Antiteilchen-Konjugation gezeigt.

FURRYsches Theorem

Als eine Anwendung dieser Invarianz wird nun das FURRY*sche Theorem* hergeleitet. Man betrachte den n-Photonenzustand:

$$|n\gamma\rangle = \prod_{i=1}^{n} \alpha^\dagger_{p_i s_i}|0\rangle$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{C}|n\gamma\rangle = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{C}\alpha^\dagger_{p_i s_i}\mathrm{C}^\dagger\mathrm{C}|0\rangle = (-)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha^\dagger_{p_i s_i}|0\rangle = (-)^n|n\gamma\rangle.$$

Da H_{QED} unter Ladungskonjugation C invariant ist, ist auch der Zeitentwicklungsoperator U und damit die S-Matrix invariant:

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{C}\ S\ \mathrm{C}^\dagger \\ \Longrightarrow \qquad \langle n'\gamma|S|n\gamma\rangle &= \langle n'\gamma|\mathrm{C}\ S\ \mathrm{C}^\dagger|n\gamma\rangle = (-)^{n+n'}\langle n'\gamma|S|n\gamma\rangle\ . \end{aligned} \tag{10.6}$$

Das Übergangselement ist also offensichtlich Null, wenn $n+n'$ ungerade ist. Für das Beispiel der e^+e^--Annihilation ($n=0$) bedeutet dies, daß eine Zerstrahlung in eine ungerade Anzahl von Photonen nur dann stattfinden kann, wenn der e^+e^--Zustand ungerade unter C ist.

Diese Aussage ist *exakt* für die QED, sie beruht nicht auf Störungsrechnung, sondern ist in allen Ordnungen richtig. Dabei wird hier vorausgesetzt, daß auf beiden Seiten im Matrixelement nur Photonen stehen. Diese Aussage beruht auf der C-Invarianz von H_{QED}.

Analog kann man auf die C-Invarianz der *starken Wechselwirkung* schließen. Betrachtet wird z.B.

$$\begin{aligned} \pi^0 &\to 2\gamma \qquad (98.85\%) \\ \pi^0 &\to 3\gamma \qquad (< 1.5\cdot 10^{-6}\cdot \sigma_{2\gamma}), \end{aligned}$$

wobei in Klammern die relativen Gewichte der beiden Zerfälle angegeben sind. Zu den Zerfällen tragen sowohl die elektromagnetische als auch die starke Wechselwirkung bei; letztere überwiegt. Da die QED C-invariant ist, läßt sich das Verzweigungsverhältnis erklären, wenn

$$H_{st} = \mathrm{C}\ H_{st}\mathrm{C}^\dagger$$

angenommen wird. Dann bekommt man mit $\mathrm{C}|\pi^0\rangle = c_{\pi^0}|\pi^0\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n\gamma|S|\pi^0\rangle &= \langle n\gamma|\mathrm{C}\ S\ \mathrm{C}^\dagger|\pi^0\rangle \\ &= (-)^n c_{\pi^0}\langle n\gamma|S|\pi^0\rangle \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade mit } c_{\pi^0} = 1. \end{aligned}$$

10.1.2 *Paritätstransformation* P

Theorem:

$$H_{QED} = \mathrm{P}\ H_{QED}\mathrm{P}^\dagger$$

mit den folgenden Eigenschaften von P:

$$\mathrm{P}\vec{A}(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger = -\vec{A}(-\vec{x},t) \qquad \mathrm{P}\vec{\Pi}(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger = -\vec{\Pi}(-\vec{x},t)$$

$$\mathrm{P}\Psi(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger = \eta_P\gamma_0\Psi(-\vec{x},t)$$

mit $|\eta_P| = 1$ konstant.

Beweis:
Um die Transformationseigenschaften der Fock-Raum Operatoren zu erhalten, wird die letzte Relation als erste betrachtet. Einsetzen der FOURIER-Entwicklung:

$$\mathrm{P}\Psi(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger = \sum_{ps}\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\left(\mathrm{P}\ a_{ps}\mathrm{P}^\dagger u_{ps}e^{-ipx} + \mathrm{P}\ b^\dagger_{ps}\mathrm{P}^\dagger v_{ps}e^{ipx}\right) \tag{10.7}$$

Dies muß gleich sein zu:

$$\eta_P\gamma_0\Psi(-\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps}\eta_P\left(a_{ps}\gamma_0 u_{ps}e^{-ip_0x_0-i\vec{p}\vec{x}} + b^\dagger_{ps}\gamma_0 v_{ps}e^{ip_0x_0+i\vec{p}\vec{x}}\right).$$

Nun gilt (s. Tabelle 9.1 auf S. 85)

$$\gamma_0 u_{ps} = u_{-p-s} \qquad \text{und} \qquad \gamma_0 v_{ps} = -v_{-p-s}\ ,$$

was durch explizites Betrachten der Helizitätsgleichungen für u und v gewonnen werden kann. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\eta_P\gamma_0\Psi(-\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps}\eta_P\left(a_{ps}u_{-p-s}e^{-ip_0x_0-i\vec{p}\vec{x}} - b^\dagger_{ps}v_{-p-s}e^{ip_0x_0+i\vec{p}\vec{x}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{ps}\eta_P\left(a_{-p-s}u_{ps}e^{-ipx} - b^\dagger_{-p-s}v_{ps}e^{ipx}\right)\ .
\end{aligned} \tag{10.8}$$

Vergleich von (10.8) mit (10.7) liefert

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\ a_{ps}\mathrm{P}^\dagger &= \eta_P a_{-p-s} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{P}\ a^\dagger_{ps}\mathrm{P}^\dagger = \eta^*_P a^\dagger_{-p-s} \\
\mathrm{P}\ b^\dagger_{ps}\mathrm{P}^\dagger &= -\eta_P b^\dagger_{-p-s}.
\end{aligned}$$

Die Paritätstransformation ändert also, wie zu erwarten, das Vorzeichen des Impulses. Die Helizität s ändert sich, da der Spin unter P nicht geändert wird, und s sich auf die (geänderte) Richtung des Impulses bezieht.

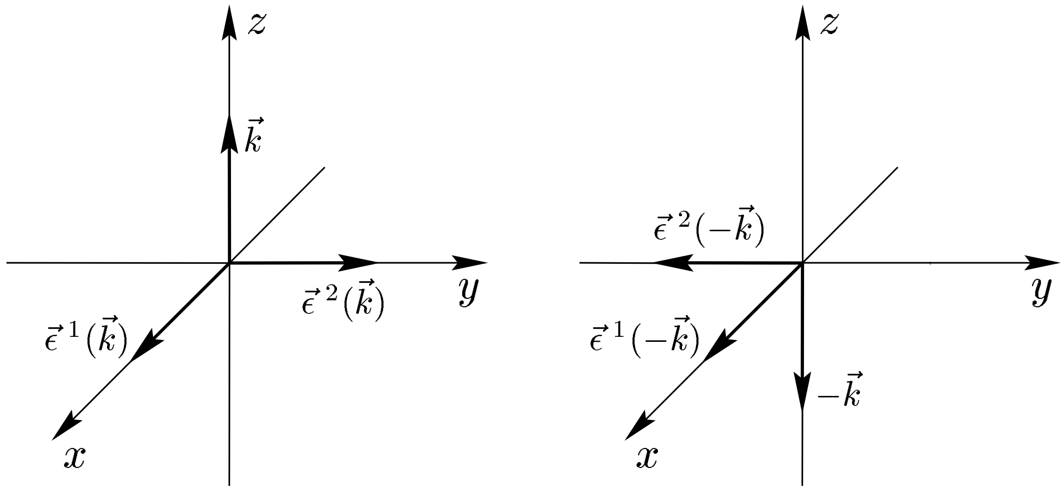

Abbildung 10.1: Polarisationsvektoren für positve (links) und negative (rechts) Impulse k.

Analog gilt für die Photonenoperatoren:

$$\mathrm{P}\vec{\alpha}^{\dagger}_{\vec{k}}\mathrm{P}^{\dagger} = -\vec{\alpha}^{\dagger}_{-\vec{k}}$$

mit $\vec{k}\cdot\vec{\alpha}^{\dagger}_{-\vec{k}} = 0$.

Aus der Relation für den Photonenoperator folgt bei Einführung von Polarisationsvektoren:

$$\vec{\alpha}^{\dagger}_{\vec{k}} = \alpha^{\dagger}_{\vec{k}1}\vec{\epsilon}^{1} + \alpha^{\dagger}_{\vec{k}2}\vec{\epsilon}^{2}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\vec{\alpha}^{\dagger}_{\vec{k}}\mathrm{P}^{\dagger} &= \mathrm{P}\alpha^{\dagger}_{\vec{k}1}\mathrm{P}^{\dagger}\vec{\epsilon}^{1}(\vec{k}) + \mathrm{P}\alpha^{\dagger}_{\vec{k}2}\mathrm{P}^{\dagger}\vec{\epsilon}^{2}(\vec{k}) \\
&= -\vec{\alpha}^{\dagger}_{-\vec{k}} \\
&= -\left(\alpha^{\dagger}_{-\vec{k}1}\vec{\epsilon}^{1}(-\vec{k}) + \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}2}\vec{\epsilon}^{2}(-\vec{k})\right) \ . \qquad (10.9)
\end{aligned}$$

Um dies weiter auszuwerten, werden zuerst die Polarisationsvektoren festgelegt:

- Sei $\vec{k} \parallel z$-Achse. Dann können $\vec{\epsilon}^{1}$ und $\vec{\epsilon}^{2}$ in die x- bzw. y-Richtung gelegt werden.
- Für ein Photon mit dem negativen Impuls $-\vec{k}$ kann $\vec{\epsilon}^{1}$ auch in der x-Richtung liegen, dann muß aber $\vec{\epsilon}_2$ in die negative y-Richtung deuten, damit $\vec{k}, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$ wieder eine rechtshändige orthogonale Basis (Dreibein) bilden.

Da also gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}^{1}(\vec{k}) &= \vec{\epsilon}^{1}(-\vec{k}) \\
\vec{\epsilon}^{2}(\vec{k}) &= -\vec{\epsilon}^{2}(-\vec{k}) \ ,
\end{aligned}$$

folgt durch Einsetzen:

$$\ldots = -\left(\alpha^\dagger_{-\vec{k}1}\vec{\epsilon}^{\,1}(\vec{k}) - \alpha^\dagger_{-\vec{k}2}\vec{\epsilon}^{\,2}(\vec{k})\right)$$

und durch Vergleich mit (10.9):

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\ \alpha^\dagger_{\vec{k}1}\mathrm{P}^\dagger &= -\alpha^\dagger_{-\vec{k}1} \\
\mathrm{P}\ \alpha^\dagger_{\vec{k}2}\mathrm{P}^\dagger &= +\alpha^\dagger_{-\vec{k}2}\ .
\end{aligned}$$

Die gesamte Phase wird nun wieder festgelegt durch die Forderung nach Spiegelinvarianz des Vakuums:

$$\mathrm{P}|0\rangle = |0\rangle\ .$$

Zur Invarianz von H: Es ist sofort zu sehen, daß H_0 invariant ist unter P, wenn die obige Gestalt von H_0 betrachtet wird. Um die Invarianz auch des Wechselwirkungsterms zu zeigen, wird die Transformation des Stromes betrachtet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\ j_\mu(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger &= :\mathrm{P}\ \Psi^\dagger(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\mathrm{P}\ \Psi(\vec{x},t)\mathrm{P}^\dagger: \\
&= :\eta_P^*\Psi^\dagger(-\vec{x},t)\gamma_\mu\eta_P\gamma_0\Psi(-\vec{x},t): \\
&= \begin{cases} -:\bar{\Psi}(-\vec{x},t)\gamma_\mu\Psi(-\vec{x},t): \\ +:\bar{\Psi}(-\vec{x},t)\gamma_\mu\Psi(-\vec{x},t): \end{cases} \\
&= \begin{cases} = -j_\mu(-\vec{x},t) & \mu = 1,2,3 \\ = +j_\mu(-\vec{x},t) & \mu = 0 \end{cases} \quad .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,\vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{P}^\dagger &= \vec{j}(-\vec{x},t)\vec{A}(-\vec{x},t) \\
\mathrm{P}\,\rho A_0\,\mathrm{P}^\dagger &= \rho(-\vec{x},t)A_0(-\vec{x},t)\ .
\end{aligned}$$

A_0 ändert sein Vorzeichen nicht, weil es durch die Differentialgleichung

$$\nabla^2 A_0 = -e\ \rho$$

bestimmt ist.

10.1.3 Globale Eichtransformation

Die am Anfang dieses Abschnitts erwähnte Leptonenzahlerhaltung ist in der QED gegeben, weil in ihr nur Bilinearforman der Gestalt $\bar{\Psi}\Gamma_\lambda\Psi$ auftreten, die unter einer Transformation $\Psi \mapsto e^{i\epsilon q}\Psi$, wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, invariant sind. Dies führt nach dem Noether'schen Theorem zu einer erhaltenen "Ladung", hier der Leptonenzahl.

10.2 Zerfall des Positroniums

Es war oben gezeigt worden, daß im Falle $\vec{p} = 0$, d. h. $L = 0$, Zerstrahlung nur aus dem $S = 0$ Zustand stattfindet und daß es keine Emission von γ-Quanten mit parallelen Polarisationen gibt. Dies soll nun erklärt werden als unmittelbare Konsequenz der gerade diskutierten Symmetrien.

Dabei geht man aus von der Annahme, daß der Wechselwirkungsoperator H_{int}, und damit auch der S Operator invariant unter einer Symmetrieoperation V ist. Daher gilt:

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|VSV^\dagger|i\rangle \ . \tag{10.10}$$

Wenn nun die Anfangs- und Endzustände Eigenzustände zu $V^\dagger$ sind mit Eigenwerten $v_{i,f}$, dann gilt

$$\langle f|VSV^\dagger|i\rangle = v_i v_f \langle f|S|i\rangle \ . \tag{10.11}$$

Vergleich von (10.10) und (10.11) liefert unmittelbar, daß der Übergang nur stattfinden kann, wenn

$$v_i = v_f \ .$$

Dies stellt eine Auswahlregel dar.

- *Anfangszustand*
  Falls $\vec{p} = (0, 0, p)$, können die Zustände auch durch ihren σ_z-Wert anstelle der Helizität gekennzeichnet werden. Der $S = 0$-Zustand ist dann im e^+e^--System

  $$|S=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{+p+1} b^\dagger_{-p-1} - a^\dagger_{+p-1} b^\dagger_{-p+1}\right)|0\rangle \qquad (M=0),$$

  wobei die zweiten Indizes jetzt σ_z (und nicht mehr die Helizität) angeben. Ferner ist

  $$\begin{aligned} |S=1, M=\pm 1\rangle &= a^\dagger_{+pm} b^\dagger_{-pm'}|0\rangle \qquad (M = m+m') \\ |S=1, M=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{+pm} b^\dagger_{-p-m} + a^\dagger_{+p-m} b^\dagger_{-pm}\right)|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{10.12}$$

  Dies läßt sich zusammenfassen als:

  $$|SM\rangle = \sum_{m,m'} \chi^S_M(m,m') a^\dagger_{+p,m} b^\dagger_{-p,m'}|0\rangle$$

mit den *Clebsch-Gordan* Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
\chi_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{m,1}\delta_{m',-1} - \delta_{m,-1}\delta_{m',+1}\right) \\
\chi_{\pm 1}^1 &= \delta_{m,\pm 1}\delta_{m',\pm 1} \\
\chi_0^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{m,1}\delta_{m',-1} + \delta_{m,-1}\delta_{m',+1}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

mit der Eigenschaft

$$\chi_M^S(m,m') = (-)^{S+1}\chi_M^S(m',m) \ .$$

– Die *Parität* dieses Zustands ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}|SM\rangle &= \sum_{m,m'} \chi_M^S(m,m')\mathrm{P}a^\dagger_{+p,m}\mathrm{P}^\dagger\mathrm{P}b^\dagger_{-p,m'}\mathrm{P}^\dagger|0\rangle \\
&= \sum_{m,m'} \chi_M^S(m,m')a^\dagger_{-p,m}(-b^\dagger_{+p,m'})|0\rangle \\
&\text{weil } \sigma_z \text{ nicht durch P beeinflußt wird:} \\
&= -\sum_{m,m'} \chi_M^S(m,m')a^\dagger_{-p,m}b^\dagger_{+p,m'}|0\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Für $\vec{p} \to 0$ folgt

$$\mathrm{P}|SM\rangle_{p=0} = -|SM\rangle_{p=0} \ ,$$

d. h. der e^+e^--Zustand hat *negative* Parität, unabhängig von S. Dieses Ergebnis spiegelt die Tatsache wider, daß für Fermionen das Antiteilchen stets umgekehrte innere Parität zum Teilchen besitzt und daß hier kollinear, d. h. mit Bahndrehimpuls $l = 0$, zerstrahlt wird.

– Nun werden als nächstes die Eigenschaften des Anfangszustandes unter *Ladungskonjugation* betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}|SM\rangle &= \sum_{m,m'} \chi_M^S(m,m')\mathrm{C}\ a^\dagger_{+pm}\mathrm{C}^\dagger\mathrm{C}\ b^\dagger_{-pm'}\mathrm{C}^\dagger|0\rangle \\
&= \sum_{m,m'} \chi_M^S(m,m')b^\dagger_{+pm}a^\dagger_{-pm'}|0\rangle \ .
\end{aligned}
$$

$a^\dagger$ und $b^\dagger$ antikommutieren:

$$\ldots \stackrel{\vec{p}\to 0}{\longrightarrow} -\sum_{m,m'} \chi_M^S(m,m')a^\dagger_{-0m'}b^\dagger_{+0m}|0\rangle \ .$$

Durch Umbenennung der Summationsindizes folgt weiter

$$
\begin{aligned}
\ldots &= -\sum_{m,m'} \chi_M^S(m',m)a^\dagger_{-0m}b^\dagger_{+0m'}|0\rangle \\
&= -\sum_{m,m'} (-)^{S+1}\chi_M^S(m,m')a^\dagger_{-0m}b^\dagger_{+0m'}|0\rangle \\
&= (-)^S|SM\rangle_0 \ .
\end{aligned}
$$

Da für $\vec{p} = 0$ die Ortsraumfunktion durch einen s-Zustand beschrieben wird, ist der Ortsraumanteil gerade unter C, so daß die Phase $(-)^S$ bereits die vollständige Wirkung von C wiedergibt.

- *Endzustand*

  - Die *Parität* des Zweiphotonenzustandes wird zuerst betrachtet. Dazu werden die möglichen Polarisationszustände separat betrachtet.

    1. *Zweiphotonenzustände mit parallelen Polarisationen.*
       Die beiden Zustände
       $$\alpha^\dagger_{\vec{k}1}\alpha^\dagger_{-\vec{k}1}|0\rangle \qquad \alpha^\dagger_{\vec{k}2}\alpha^\dagger_{-\vec{k}2}|0\rangle$$
       verhalten sich unter P wie folgt:
       $$\begin{aligned} \mathrm{P}\ \alpha^\dagger_{\vec{k}1}\alpha^\dagger_{-\vec{k}1}|0\rangle &= +\alpha^\dagger_{-\vec{k}1}\alpha^\dagger_{\vec{k}1}|0\rangle \\ \mathrm{P}\ \alpha^\dagger_{\vec{k}2}\alpha^\dagger_{-\vec{k}2}|0\rangle &= +\alpha^\dagger_{-\vec{k}2}\alpha^\dagger_{\vec{k}2}|0\rangle\ . \end{aligned}$$
       Beide Zustände sind also gerade unter der Paritätsoperation. Eine Zerstrahlung in sie kann deshalb nicht stattfinden.
    2. *Zweiphotonenzustände mit orthogonalen Polarisationen.*
       Da die Produkte
       $$\alpha^\dagger_{\vec{k}1}\alpha^\dagger_{-\vec{k}2}|0\rangle \qquad \alpha^\dagger_{\vec{k}2}\alpha^\dagger_{-\vec{k}1}|0\rangle$$
       keine Eigenzustände des Paritätsoperators sind, werden die Linearkombinationen
       $$|2\gamma\rangle_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^\dagger_{\vec{k}1}\alpha^\dagger_{-\vec{k}2} \pm \alpha^\dagger_{\vec{k}2}\alpha^\dagger_{-\vec{k}1}\right)|0\rangle$$
       betrachtet:
       $$\begin{aligned} \mathrm{P}|2\gamma\rangle_+ &= -|2\gamma\rangle_+ \\ \mathrm{P}|2\gamma\rangle_- &= +|2\gamma\rangle_-\ . \end{aligned}$$

    Also ist von allen Möglichkeiten nur der Zustand $|2\gamma\rangle_+$ ungerade unter der Spiegelung. Da $P|SM\rangle = -|SM\rangle$ für $p = 0$ kann nur in den Zustand $|2\gamma >_+$ hinein zerstrahlt werden.
  - Unter *Ladungskonjugation* ist der Zwei-Photonen-Zustand nach dem FURRYschen Theorem (10.6) jedenfalls gerade, und zwar für alle möglichen Polarisationen. Damit kann nur $S = 0$ annihilieren.

Da die Wechselwirkung Paritäts- und Ladungskonjugations-erhaltend ist und der Elektron-Positron-Zustand für sehr kleine Impulse jedenfalls ungerade Parität besitzt, ist eine Zerstrahlung nur in $|2\gamma\rangle_+$, d. h. in einen Zustand mit orthogonalen Polarisationen, möglich. Wegen der Ladungssymmetrie von H_{QED} kann zudem nur der Singulett-S-Zustand annihilieren. Damit sind beide Auswahlregeln als Konsequenz von Symmetrien der Wechselwirkung verstanden.

Kapitel 11

Renormierung

In den folgenden Abschnitten soll die Renormierung der QED an dem spezifischen Fall der Paarzerstrahlung

$$e^+e^- \to 2\gamma$$

diskutiert werden. Dazu werden systematisch alle in Frage kommenden Graphen bis zu 4. Ordnung in der Kopplungskonstanten berechnet.

11.1 Paarvernichtung in 3. Ordnung

Terme in 3. Ordnung in der Wechselwirkung gibt es nicht; dies kann man leicht sehen, wenn man bedenkt, daß zwei Photonen auslaufen, also auch nur 2 freie Photonenfeldoperatoren benötigt werden, während ja ein Term 3. Ordnung in der Wechselwirkung drei solcher Operatoren enthielte.

Zur Vorbereitung der kommenden Betrachtungen untersuchen wir hier die Auswirkung eines zusätzlichen Massen-Korrekturterms $-\bar{\Psi}\Psi\delta m$ in der Lagrangedichte. Damit lautet der für den betrachteten Prozeß der Paarvernichtung relevante Teil von $\mathcal{H}_{int}$:

$$\mathcal{H}_{int} = -\bar{\Psi}\Psi\delta m + ej_\mu A^\mu. \tag{11.1}$$

In diesem Fall kann die Störungstheorie 3. Ordnung einen Beitrag über einen gemischten Term liefern. Das *S-Matrixelement* ist dann:

$$\langle 2\gamma| \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3\, \mathrm{T}[\mathcal{H}_{int}(1)\mathcal{H}_{int}(2)\mathcal{H}_{int}(3)]|e^+e^-\rangle$$

Beim Ausmultiplizieren des Produkts der Wechselwirkungsoperatoren treten auch gemischte Terme der beiden Anteile in $\mathcal{H}_{int}$ auf. Dabei können nur solche Terme zum betrachteten Prozeß mit 2 Photonen im Ausgangskanal beitragen, in denen genau 2 A_μ-Operatoren auftreten.

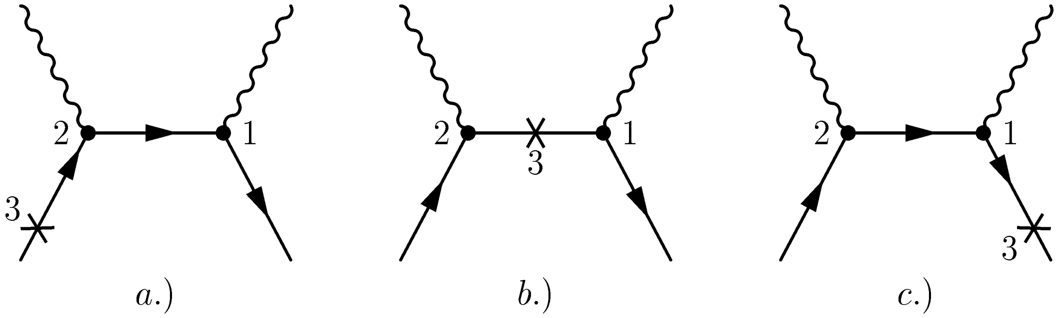

Abbildung 11.1: Beitragende Terme zur Paarvernichtung in 3. Ordnung. Das Kreuz am Vertex 3 beschreibt den Massenterm.

Die schematische Gestalt solcher Terme ist

$$M_1 = \mathrm{T}\left[j(1) \cdot A(1)\, j(2) \cdot A(2) \bar{\Psi}(3) \Psi(3)\right] \delta m.$$

Bei der Auswertung dieses Terms mittels des WICKschen Theorems können nur Graphen des in Abbildung 11.1 gezeigten Typs etwas beitragen. Da der erste und dritte Vertex ähnlich sind – beide enthalten Massenkorrekturen auf äußeren Fermionenlinien – soll hier nur (a) berechnet werden.

(a) Nach den Regeln für FEYNMAN-Graphen erhält man für das kovariante Matrixelement (a), das die Massenkorrektur in der äußeren Linie enthält:

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(3)} = \bar{v}_{p's'} ie\ \gamma^\mu(1) \frac{i}{\not p - \not k_2 - m} ie\ \gamma^\nu(2) \frac{i}{\not p - m}\, i\ \delta m(3) u_{ps} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^2.$$

Dabei ist die Vorschrift, an allen Vertices, an denen ein Massenterm auftritt, den Faktor $(i\ \delta m)$ hineinzumultiplizieren. Die den äußeren Linien entsprechenden Spinoren werden also durch den Masseneinschub geändert. Im folgenden Abschnitt werden wir diesen Punkt weiter diskutieren.

(b) In diesem Fall tritt die Massenkorrektur auf der inneren Linie auf. Das Matrixelement lautet daher:

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(3)} = \bar{v}_{p's'} ie\ \gamma^\mu(1) \frac{i}{\not p - \not k_2 - m} i\ \delta m(3) \frac{i}{\not p - \not k_2 - m} ie\ \gamma^\nu(2) u_{ps} \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^2.$$

Die *vollständige* Übergangsamplitude ist gegeben durch die kohärente Addition der Amplituden 2. und 3. Ordnung

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(2)} + \mathcal{M}_{fi}^{(3)}.$$

Dies entspricht effektiv einer Ersetzung des Propagators der 2. Ordnung

$$S_F(p - \not{k}_2) = \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m}$$

durch

$$\bar{S}_F(p - k_2) = S_F(p - k_2) + S_F(p - k_2)\ i\delta m\ S_F(p - k_2)$$

in der 2. und 3. Ordnung und der Einführung des Massenkorrekturterms nach a) auf den äußeren Linien.

Es ist klar zu sehen, daß beim Mitnehmen noch höherer Ordnungen in den δm-Termen hier eine Reihe der Gestalt:

$$\bar{S}_F(p) = S_F(p) + S_F(p)\ i\delta m\ S_F(p) + S_F(p)\ i\delta m\ S_F(p)\ i\delta m\ S_F(p) + \ldots$$

entsteht. Dies kann formal summiert werden zu

$$\bar{S}_F(p) = S_F(p) + S_F(p)\ i\delta m \bar{S}_F(p).$$

Diese Relation ist formal lösbar unter Benutzung von:

$$\frac{1}{x+Y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} Y \frac{1}{x+Y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} Y \frac{1}{x} + \ldots \quad \text{(geom. Reihe)}\ .$$

Dabei stellen wir alle Bedenken bzgl. der Größe von δm zurück (in der Tat werden wir später sehen, daß δm sehr groß werden kann. Man erhält mit $x = \not{p} - m$ und $Y = \delta m$

$$\begin{aligned} \bar{S}_F(p) &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i\ \delta m \frac{i}{\not{p} - m} + \ldots \\ &= \frac{i}{\not{p} - (m - \delta m)} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \qquad (\delta m = m - m_0) \end{aligned} \tag{11.2}$$

wobei m_0 die (fiktive) nackte Masse ist: Damit läßt sich von dem Massenkorrekturterm eine Massenverschiebung im Propagator so erzeugen, daß in diesem die *nackte Masse* auftritt. Dieses Ergebnis werden wir im folgenden Abschnitt ausnutzen.

11.2 Paarvernichtung in 4. Ordnung

Der nächste nicht verschwindende Term ist derjenige 4. Ordnung, so daß nun gilt:

$$S_{fi} = S_{fi}^{(2)} + S_{fi}^{(3)} + S_{fi}^{(4)}$$

mit

$$S_{fi}^{(4)} = \frac{(-i)^4}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \, \mathrm{T}\left[\mathcal{H}_{int}(x_1)\mathcal{H}_{int}(x_2)\mathcal{H}_{int}(x_3)\mathcal{H}_{int}(x_4)\right].$$

Beim Ausmultiplizieren treten wieder aus den Anteilen von $\mathcal{H}_{int}$ gemischte Terme auf. Wird wieder nur der Prozeß mit 2 auslaufenden Photonenlinien betrachtet, so können nur Anteile des zeitgeordneten Produktes beitragen, die entweder 2 oder 4 Feldoperatoren und damit den Massenkorrekturterm entweder in 2. oder in 0. Ordnung enthalten.

Da der Term proportional zu $(\delta m)^2$ bereits im vorigen Kapitel implizit summiert wurde, wird nun nur der Term $\sim (\delta m)^0$, d.h. $\sim A^4$, betrachtet. Das zeitgeordnete Operatorprodukt dafür lautet:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\left[\mathcal{H}_{int}(1)\mathcal{H}_{int}(2)\mathcal{H}_{int}(3)\mathcal{H}_{int}(4)\right] &= e^4\, \mathrm{T}\left[j_\kappa(1) j_\lambda(2) j_\mu(3) j_\nu(4)\right] && (11.3) \\ &\quad \times \mathrm{T}\left[A^\kappa(1)A^\lambda(2)A^\mu(3)A^\nu(4)\right], && (11.4) \end{aligned}$$

wenn jetzt vorerst nur die Terme $\sim j_\mu A^\mu$ in H_{int} betrachtet werden.

Für das zeitgeordnete Produkt der Strahlungsfelder gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\left(A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4)\right) = {} & \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(1)} + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(2)} \\ & + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(3)} + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(4)} + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(5)} \\ & + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(6)} + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(7)} + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(8)} \\ & + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(9)} + \underbrace{:A_\kappa(1)A_\lambda(2)A_\mu(3)A_\nu(4):}_{(10)} \end{aligned}$$

Hier beschreiben die Terme mit 2 Kontraktionen (8-10) Streuprozesse ohne Aussendung von Photonen und (1) einen Prozeß unter Emission von 4 Photonen. Also tragen nur die Terme (2-7) zu 2-Photonenprozessen bei. Exemplarisch soll im folgenden nur der Term (7) behandelt werden.

Ganz analog lassen sich nun auch die Fermionenoperatoren betrachten. Hier erhält man:

$$\mathrm{T}[j_\kappa(1)j_\lambda(2)j_\mu(3)j_\nu(4)] = \underbrace{:\bar\Psi(1)\gamma_\kappa\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\lambda\Psi(2)\bar\Psi(3)\gamma_\mu\Psi(3)\bar\Psi(4)\gamma_\nu\Psi(4):}_{(1)} + \ldots$$

$$+ \quad \underbrace{:\bar{\Psi}(1)\gamma_\kappa\Psi(1)\bar{\Psi}(2)\gamma_\lambda\Psi(2)\bar{\Psi}(3)\gamma_\mu\Psi(3)\bar{\Psi}(4)\gamma_\nu\Psi(4):}_{\text{(2) internal photon}} + \ldots$$

$$+ \quad \underbrace{:\bar{\Psi}(1)\gamma_\kappa\Psi(1)\bar{\Psi}(2)\gamma_\lambda\Psi(2)\bar{\Psi}(3)\gamma_\mu\Psi(3)\bar{\Psi}(4)\gamma_\nu\Psi(4):}_{\text{(3) vertex}} + \ldots$$

$$+ \quad \underbrace{:\bar{\Psi}(1)\gamma_\kappa\Psi(1)\bar{\Psi}(2)\gamma_\lambda\Psi(2)\bar{\Psi}(3)\gamma_\mu\Psi(3)\bar{\Psi}(4)\gamma_\nu\Psi(4):}_{\text{(4) external line}} + \ldots$$

$$+ \quad \underbrace{:\bar{\Psi}(1)\gamma_\kappa\Psi(1)\bar{\Psi}(2)\gamma_\lambda\Psi(2)\bar{\Psi}(3)\gamma_\mu\Psi(3)\bar{\Psi}(4)\gamma_\nu\Psi(4):}_{\text{(5) fermion loop}}$$

wobei nur die Terme mit 3 Kontraktionen, d.h. mit 2 freien Feldoperatoren, die ja zur Vernichtung von Elektron und Positron benßötigt werden, aufgeschrieben wurden.

Der Term (1) kann nichts beitragen für den betrachteten Prozeß, da ja das Matrixelement links einen Null-Fermionenzustand besitzt, so daß das Normalprodukt immer Erzeuger nach links auf das Vakuum wirken ließe. Das gleiche Argument gilt, wenn in einem Term mehr als zwei unkontrahierte Fermionenoperatoren auftreten, denn der Anfangszustand enthält nur zwei Fermionen. Es bleiben daher z. B. die Beiträge (2)-(5), die hier exemplarisch behandelt werden sollen.

Aus den beitragenden Termen von $\mathrm{T}[A_\kappa(1)\ldots A_\nu(4)]$ und $\mathrm{T}[j_\kappa(1)\ldots j_\nu(4)]$ sind nun alle möglichen Kombinationen zu bilden. Diese werden im folgenden durch Ausdrücke der Gestalt $(A)_m \times (F)_n$ bezeichnet, wobei A für die Operatoren des elektromagnetischen Feldes steht und F für die Fermionenoperatoren; m und n numerieren die Terme in den vorangegangenen Ausdrücken.

11.2.1 Unverbundene Graphen

$(A)_7 \times (F)_5$

Als erstes wird nun der Beitrag $(A)_7 \times (F)_5$ betrachtet. In graphischer Darstellung wird er durch die FEYNMAN-Graphen in Abbildung 11.2 beschrieben. Es handelt sich hierbei um einen sogenannten unverbundenen Graphen, der einen typischen *Fluktuationseffekt* beschreibt, bei dem ein Elektron unter Emission eines Photons aus dem DIRAC-See springt und nach Absorption des Photons wieder in den See zurückfällt. Da solche Fluktuationsphänomene immer stattfinden und *physikalisch beobachtbare Prozesse nur diejenigen relativ zu Vakuumsvorgängen* sind, muß der Beitrag aller unverbundenen Graphen herausdividiert werden. Diese liefern ja ersichtlich lediglich einen multiplikativen Faktor zu dem linken Prozeß.

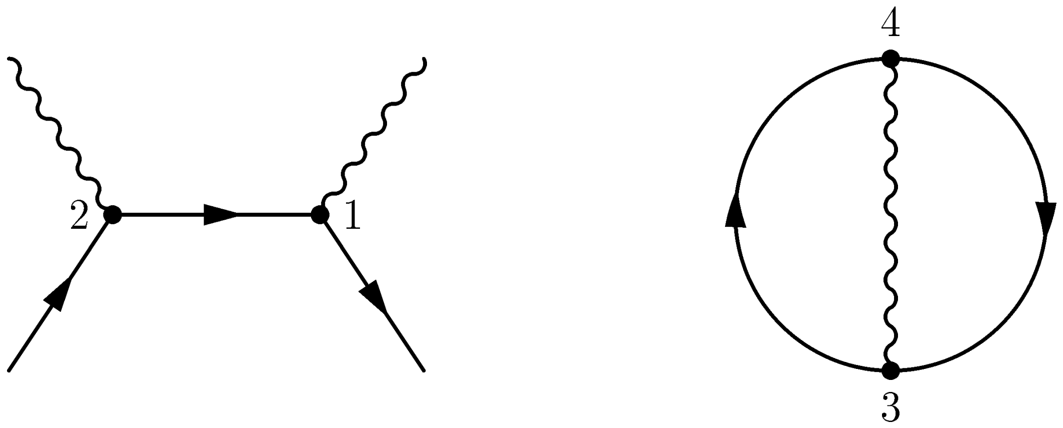

Abbildung 11.2: Unverbundene Graphen

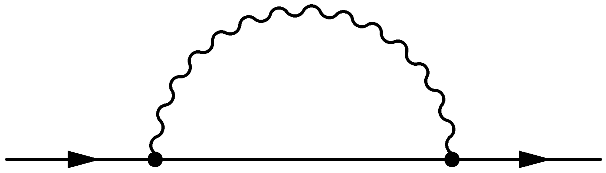

Abbildung 11.3: Selbstenergie-Term

11.2.2 Selbstenergie

$(A)_7 \times (F)_2$

Dieses spezielle Produkt beschreibt den in Figur 11.3 dargestellten Graphen (nur direkter Term). Nach den Feynman-Regeln erhält man hierfür:

$$\begin{aligned}
-i\,\mathcal{M}_{fi}^{(4)} &= \bar{v}_{p's'} ie\,\gamma^{\kappa} \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \\
&\quad \times ie\,\gamma^{\nu} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - \not{q} - m} \frac{-ig_{\nu\mu}}{q^2} ie\,\gamma^{\mu} \\
&\quad \times \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} ie\,\gamma^{\lambda} u_{ps}\, \epsilon^1_{\kappa} \epsilon^2_{\lambda}.
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$-i\Sigma(p) = \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{-i}{q^2} \gamma_{\mu} \frac{i}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma^{\mu} = \mathcal{O}(\alpha) \tag{11.5}$$

wird dies:

$$-i\,\mathcal{M}_{fi}^{(4)} = \bar{v}_{p's'} ie\,\gamma^{\kappa} \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} (-i\,\Sigma(p - k_2)) \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} ie\,\gamma^{\lambda} u_{ps}\, \epsilon^1_{\kappa} \epsilon^2_{\lambda}$$

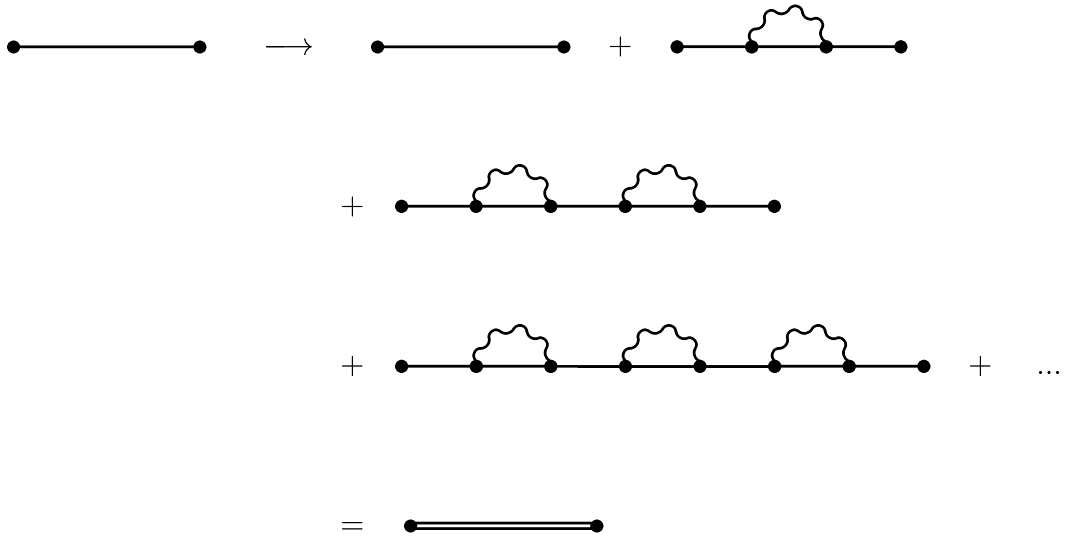

Abbildung 11.4: Summation der Selbstenergie-Graphen

Es ist evident, daß ein ganz ähnlicher Graph auch in allen höheren Ordnungen auftritt; er entspricht jeweils dem Term, der sich bei Kontraktion aller A-Felder bis auf zwei ergibt. Damit würde die innere Fermionenlinie im oberen Graphen lauten: Die letzten beiden Graphen in Fig. 11.4 sind sogenannte "uneigentliche" FEYNMAN-Graphen; sie können durch Zerschneiden einer Fermionenlinie zurückgeführt werden auf eine Abfolge von Graphen des 2. Typs.

Die Folge dieser Graphen kann summiert werden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_F(p) &= S_F(p) + S_F(p)(-i\Sigma(p))S_F(p) \\
&\quad + S_F(p)(-i\ \Sigma(p))S_F(p)(-i\Sigma(p))S_F(p) + \ldots \\
&= S_F(p) + S_F(p)(-i\ \Sigma(p))\tilde{S}_F(p) \\
&= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not{p} - m} \\
&\quad + \frac{i}{\not{p} - m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not{p} - m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\not{p} - m} + \ldots \\
&= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)}
\end{aligned}$$

Auch hier stellt sich die Frage nach der Konvergenz dieser Entwicklung, denn $\Sigma(p)$ ist normalerweise sehr groß, wie wir noch sehen werden. Fügen wir jedoch jetzt noch den Massenkorrekturterm aus (11.1) zur Wechselwirkungs-Lagrangedichte hinzu, so sehen wir, daß in gleicher Ordnung in α auch Terme der in Figure 11.5 dargestellten Graphen zu $\bar{S}_F$ beitragen, so daß man schließlich für den effektiven Fermionen-Propagator in der Paarerzeugung (s. fette innere Fermionenlinie in Fig. 11.6) erhält:

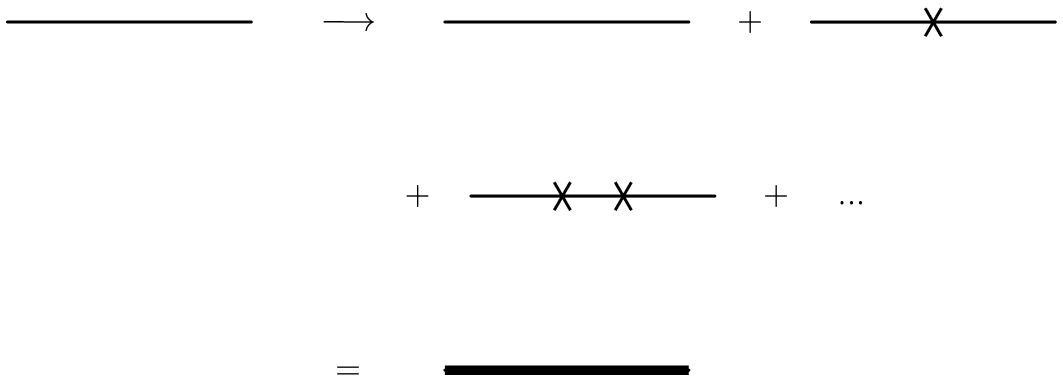

Abbildung 11.5: Iteration der Masseneinschübe

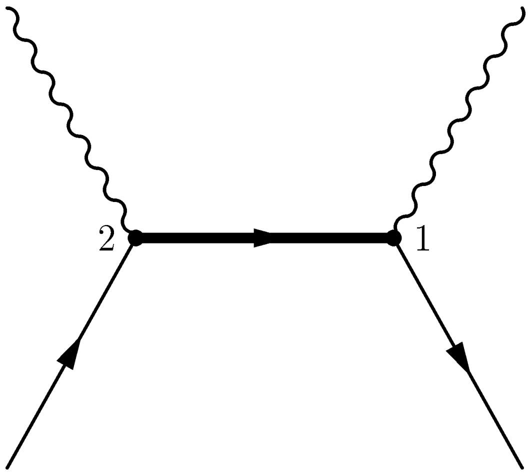

Abbildung 11.6: Direkter Graph für die Paar-Zerstrahlung mit effektiver innerer Fermionenlinie.

$$\begin{aligned}\bar{S}_F(p) &= \frac{i}{\not p - m - \Sigma(p)} + \frac{i}{\not p - m}(i\delta m)\frac{i}{\not p - m} + \dots \\ &= \frac{i}{\not p - m - \Sigma(p) + \delta m}\,,\end{aligned}$$

wie man durch "Rückentwickeln" leicht sieht. Wie wir unten sehen werden, wird δm, und damit m_0, so festgelegt, daß $-\Sigma + \delta m$ klein wird, so daß die Entwicklung a posteriori gerechtfertig ist.

Eigenschaften der Selbstenergie. Für die weitere Diskussion wird nun die Struktur von $\Sigma(p)$ betrachtet. Dazu wird $\Sigma(p)$ taylorentwickelt um den Punkt, der durch $\not p = \gamma_\mu p^\mu = m$ gegeben ist, d. h. um den *"on-shell"*-Punkt:

$$\Sigma(p) = A + (-\not p + m)B + (-\not p + m)^2\Sigma_f(\not p).$$

Hier sind A und B Konstanten:

$$A = \Sigma(\not p = m); \qquad B = -\left.\frac{\partial\Sigma}{\partial\not p}\right|_{\not p = m}. \tag{11.6}$$

$\Sigma_f(\not p)$ beschreibt die restliche $\not p$-Abhängigkeit von Σ; dieser letzte Term enthält alle höheren Terme der Taylorentwicklung nach dem linearen. Mit der Setzung:

$$\Sigma_R(\not p) = (-\not p + m)^2\Sigma_f(p)$$

folgt

$$\Sigma_R(\not p = m) = 0 \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\partial\Sigma_R}{\partial\not p}\right|_{\not p = m} = 0.$$

$\Sigma_f(\not p)$ enthält dann alle höheren Ableitungen von $\Sigma_R(\not p)$.

Durch einfaches Abzählen der Potenzen von q in

$$-i\,\Sigma(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{i}{q^2}\gamma_\mu\frac{i}{\not p - \not q - m}\gamma^\mu$$

kann man direkt erkennen, daß

$$A = \Sigma(\not p = m)$$

divergiert.

Das Gleiche gilt auch für den 2. Term in der Taylorentwicklung B:

$$B = -\left.\frac{\partial\Sigma}{\partial\not p}\right|_{\not p = m}.$$

Durch die Differentiation kommt zwar eine weitere Potenz in den Nenner, dies reicht zur Konvergenz aber noch nicht aus; der Term divergiert logarithmisch. Die höheren Terme, mit noch höheren Ableitungen, sind dann allerdings konvergent; d. h. auch $\Sigma_f(p)$ ist konvergent.

Renormierung

Regularisierung. Die divergenten Integrale werden nun *ad hoc* regularisiert, z. B. durch Einführen eines sogenannten "cut-offs" Λ, der durch eine Abänderung des freien Photonenpropagators eingeführt wird:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \mapsto \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\frac{\Lambda^2}{q^2+\Lambda^2} \longrightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \qquad \text{für} \quad \Lambda \to \infty\ . \tag{11.7}$$

Damit werden alle Ergebnisse von Λ abhängig; man erhält z.B. $\Sigma(p) \mapsto \Sigma(p,\Lambda)$. Alle diese Größen lassen sich analytisch berechnen. Man erhält

$$A = \alpha\frac{3m}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \qquad \text{und} \qquad B = \alpha\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)$$

mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$.

Damit hat der Propagator die Gestalt

$$\begin{aligned}\bar{S}_F(p,\Lambda) &= \frac{i}{\not p - m - \Sigma(p,\Lambda) + \delta m} \\ &= \frac{i}{\not p - m - A(\Lambda) + B(\Lambda)(\not p - m) - \Sigma_R(p,\Lambda) + \delta m}\end{aligned} \tag{11.8}$$

Renormierung. Man erkennt leicht, daß der Pol[1] dieses Propagators nicht mehr am physikalischen "on-shell"-Punkt $\not p = m$ liegt. Um diese für ein physikalisches Teilchen essentielle Eigenschaft zu restaurieren, wird nun der in Abschnitt 11.1 eingeführte *Massen-Counterterm* verwendet: durch die Wahl

$$\delta m(\Lambda) = A(\Lambda)$$

kann der divergente konstante Anteil der Selbstenergie genau ausgeglichen werden.

Mit dieser Wahl von δm wird auch erreicht, daß die in Abschnitt 11.1 gefundenen Masseneinschübe auf den äußeren Beinen des Feynman Graphen genau durch die entsprechenden Selbstenergieterme aufgehoben werden. Für die äußeren Beine sind ja alle Teilchen on-shell, so daß dort exakt gilt $\Sigma(p,\Lambda) = A(\Lambda)$. Damit beseitigt die Wahl $A = \delta m$ alle Effekte der Selbstenergie auf den äußeren Beinen.

Durch diese Setzung wird zwar erreicht, daß der Pol bei $\not p = m$ liegt, aber das Residuum hat noch nicht den richtigen Wert für ein freies Teilchen, nämlich i, da das Residuum durch den zu B proportionalen Term geändert wird. Der Term in $\Sigma(p)$, der proportional zu B ist, kann nun ebenfalls ausgeglichen werden durch Addition eines weiteren Gegenterms der Gestalt:

$$-B(\Lambda)\bar{\Psi}(\not p - m)\Psi$$

[1] Es sei daran erinnert, daß die Pole (Singularitäten) des Propagators direkt dem Spektrum des Hamiltonoperators entsprechen.

zur Wechselwirkungs-LAGRANGE-Dichte. Nach Addition dieses Gegenterms lautet der Propagator der Theorie nun

$$\tilde{S}_F(p,\Lambda) = \frac{i}{\not p - m - \Sigma(p,\Lambda) + \delta m(\Lambda) - B(\Lambda)(\not p - m)} = \frac{i}{\not p - m - \Sigma_R(\not p)} . \quad (11.9)$$

Dieser Propagator enthält nur endliche Terme, so daß man jetzt den Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ durchführen kann.

Jedoch ist der Pol *nicht* bei $\not p = m$ – wie es für ein freies Teilchen der Fall sein sollte –, sondern bei

$$\not p = m + \Sigma_R(\not p) ,$$

wobei Σ_R als konvergente Größe von Λ unabhängig ist. Dies entspricht einer Abänderung des Elektronenpropagators für Impulse sehr weit entfernt vom "on-shell" Punkt $\not p = m$, denn $\Sigma_R = (-\not p + m)^2\ \Sigma_f(\not p)$.

Die renormierte Fermionen-LAGRANGE-Dichte *einschließlich Massen Counter-Term* lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar\Psi(\not p - m)\Psi + \delta m(\Lambda)\bar\Psi\Psi - B(\Lambda)\bar\Psi(\not p - m)\Psi \\ &= Z_2(\Lambda)\bar\Psi(\not p - m)\Psi + \delta m(\Lambda)\bar\Psi\Psi \end{aligned}$$

mit der üblichen Abkürzung:

$$Z_2 \equiv 1 - B.$$

Da auf den äußeren Beinen des Graphen die Teilchen "on-shell" sind, werden durch die Einführung des 'counter terms' die Masseneinschübe auf den äußeren Linien genau ausgeglichen.

Die nackte Masse m_0 ist gegeben durch

$$m_0 = m - \delta m(\Lambda) + \mathcal{O}(\alpha^2).$$

Da $\delta m = \mathcal{O}(\alpha)$ und $Z_2 = 1 - \mathcal{O}(\alpha)$, gilt auch $\delta m = Z_2 \delta m + \mathcal{O}(\alpha^2)$. Damit, und nach Einführung des 'nackten' Feldoperators

$$\Psi_0(\Lambda) = \sqrt{Z_2(\Lambda)}\Psi,$$

folgt für die nackte Lagrangedichte $\mathcal{L}_F$ bis zu Termen $\mathcal{O}(\alpha)$

$$\mathcal{L}_F = \bar\Psi_0(\Lambda)(\not p - m_0(\Lambda))\Psi_0(\Lambda).$$

Diese Darstellung von $\mathcal{L}_F$ ist konsistent mit dem gefundenen Propagator (11.9). Dieser kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not p - m - \Sigma_R} &= \frac{i}{\not p - m - (\Sigma - A - (-\not p + m)B)} \\ &= \frac{i}{(\not p - m)(1 - B) - \Sigma + A} \\ &= \frac{i}{(\not p - (m - \delta m))(1 - B) - \Sigma + B\ \delta m}. \end{aligned}$$

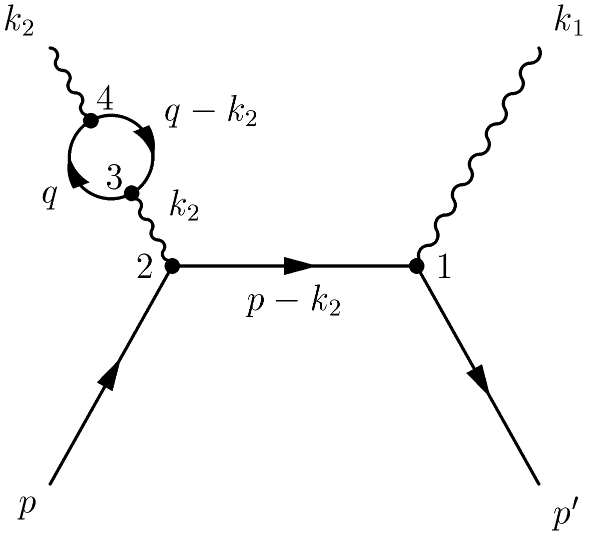

Abbildung 11.7: Vakuum-Polarisationsgraph

Weil δm, Σ und B alles Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ sind, kann weiter geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \ldots &\approx \frac{1}{1-B} \frac{i}{\not p - m_0 - \Sigma} \\ &= \frac{1}{Z_2(\Lambda)} \frac{i}{\not p - m_0 - \Sigma(p,\Lambda)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt, daß der *renormierte Propagator* gleich ist dem nackten, d.h. demjenigen mit der nackten Masse und der (unendlichen) Selbstenergie dividiert durch Z_2.

Dieses Ergebnis war nach der obigen Gestalt der Fermionen-LAGRANGE-Dichte zu erwarten, denn der Propagator ist ja nichts anderes als die FOURIER-Transformierte des zeitgeordneten Produktes zweier Fermionenfelder, und es gilt:

$$\mathrm{T}[\Psi\bar{\Psi}] = \frac{1}{Z_2} \mathrm{T}[\Psi_0 \bar{\Psi}_0].$$

11.2.3 Vakuumpolarisation

In diesem Kapitel soll der Term

$$:\bar{\Psi}(1)\gamma_\kappa \Psi(1)\bar{\Psi}(2)\gamma_\lambda \Psi(2)\bar{\Psi}(3)\gamma_\mu \Psi(3)\bar{\Psi}(4)\gamma_\nu \Psi(4): \;\cdot\; :A^\kappa(1)A^\lambda(2)A^\mu(3)A^\nu(4):,$$

d. h. der Term $(A)_5 \times (F)_5$, behandelt werden. Dieser entspricht dem in Figure 11.7 dargestellten Graphen: Das $\mathcal{M}$-Matrixelement hierzu lautet nach den üblichen

Regeln:

$$-i\,\mathcal{M}_{fi}^{4L} = \bar{v}_{p's'} ie\,\gamma^\kappa \frac{i}{\not p - \not k_2 - m} ie\,\gamma^\lambda \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k_2^2} \times \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\mathrm{tr}\left(ie\gamma^\mu \frac{i}{\not q - m} ie\gamma^\nu \frac{i}{\not q - \not k_2 - m}\right) u_{ps}\,\epsilon_\kappa^1\epsilon_\nu^2. \tag{11.10}$$

Die Spurbildung erfolgt hier über die Dirac Indizes. Das Minuszeichen vor dem Integral kommt von einer Feynman-Regel, die sich durch explizites Ausintegrieren der Übergangsamplitude verifizieren läßt. Die Regel lautet

- Bei geschlossenen Fermionen-Schleifen ist über den Impuls in der Schleife zu integrieren, dann die Spur über die Dirac Indizes zu bilden und schließlich mit dem Faktor (-1) zu multiplizieren.

Abgekürzt wird nun:

$$i\,\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu \frac{i}{\not q - m}\gamma^\nu \frac{i}{\not q - \not k - m}\right) , \tag{11.11}$$

so daß

$$-i\,\mathcal{M}_{fi}^{4L} = \bar{v}_{p's'} ie\,\gamma^\kappa \frac{i}{\not p - \not k_2 - m} ie\,\gamma^\lambda \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k_2^2}(i\,\Pi^{\mu\nu}(k_2))u_{ps}\,\epsilon_\kappa^1\epsilon_\nu^2 . \tag{11.12}$$

Die Größe $\Pi_{\mu\nu}$ wird als *Polarisationstensor* bezeichnet. Der Name kommt daher, daß das Photon k_2 nicht direkt den wahren Elektronenstrom am Vertex 2 “sieht”, sondern stattdessen einen durch den Elektron-Positron-Ring korrigierten. Zu beachten ist hier, daß $\Pi^{\mu\nu}$ wegen der Spurbildung keine auf die Dirac-Spinor-Freiheitsgrade wirkende (4×4)-Matrix mehr ist, sondern ein *Tensor bezüglich Lorentztransformationen*.

Wenn der Term 2. Ordnung mit hinzugenommen wird ist also der elektromagnetische Vertex effektiv ersetzt durch

$$\gamma^\nu \mapsto \gamma^\nu + \gamma^\lambda \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k_2^2}(i\Pi^{\mu\nu}(k_2)) = \gamma^\lambda\left(g_\lambda{}^\nu + \frac{\Pi_\lambda{}^\nu(k_2)}{k_2^2}\right) . \tag{11.13}$$

Der 2. Term in (11.13) kann in die Wechselwirkung integriert werden. Eine Rechnung in niedrigster Ordnung mit

$$\mathcal{H}_{int} = j_\lambda(x)(g^{\lambda\nu} + \bar{\Pi}^{\lambda\nu}(x))A_\nu(x)$$

würde formal zu dem gleichen kovarianten Matrixelement wie oben führen; dabei ist $\bar{\Pi}^{\lambda\nu}$ die Fourier-Transformierte von $\Pi^{\lambda\nu}(k)/k^2$. An dieser Form ist klar zu sehen, daß $j_\lambda\bar{\Pi}^{\lambda\nu}$ einen durch Vakuumpolarisation induzierten Strom darstellt.

Struktur des Polarisationstensors. Die allgemeine Struktur von $\Pi_{\mu\nu}$ kann aus Symmetrieüberlegungen (Lorentzkovarianz) erschlossen werden. Als Bausteine für den Tensor stehen im Vakuum nur der metrische Tensor und der Vierervektor k_μ zur Verfügung. Daher muß $\Pi_{\mu\nu}$ die folgende Gestalt haben:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu}k^2\Pi^{(1)}(k^2) + k_\mu k_\nu \Pi(k^2) - D\ g_{\mu\nu}.$$

Die Größe D hier ist eine Konstante; wäre D selbst von k^2 abhängig, so könnte es nach Potenzen von k^2 entwickelt werden, was lediglich $\Pi^{(1)}$ ändern würde.

Der gleiche Polarisationseinschub wie oben betrachtet würde auch in einer inneren Photonenlinie auftreten. Dort würde er den Propagator des Photons effektiv ändern, und zwar so, daß der metrische Tensor ersetzt wird durch

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \frac{-ig_\mu{}^\lambda}{q^2}\left(i\ \Pi_{\lambda\nu}(q)\right)\ . \tag{11.14}$$

Der Propagator ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(q) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2}\left(-ig_\mu{}^\lambda \Pi_{\lambda\nu}(q)\right)\frac{-i}{q^2} \\ &\xrightarrow{q\to 0} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - D} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned} \tag{11.15}$$

Diese Form des Propagators zeigt, daß das Photon für $D \neq 0$ massiv ($m = \sqrt{D}$) wird. Dies stellt ein großes Problem dar, denn damit würde die Eichinvarianz der Theorie verletzt.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß die Forderung nach Stromerhaltung automatisch zu $D = 0$ führt. Es ist anfangs gezeigt worden, daß Eichinvarianz der QED und Stromerhaltung eng miteinander zusammenhängen. Stromerhaltung bedeutet:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \partial_\mu \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\ j^\mu(k)e^{-ikx} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\ (-i)k_\mu j^\mu(k)e^{-ikx} \stackrel{!}{=} 0.$$

Da dies an jedem Raumzeitpunkt gelten muß, gilt auch:

$$k_\mu j^\mu(k) = 0.$$

Dies muß auch für den induzierten Vakuumpolarisationsstrom gelten. Also hat man als Forderung

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) \stackrel{!}{=} 0. \tag{11.16}$$

Durch Einsetzen der allgemeinen Gestalt von $\Pi_{\mu\nu}$ wird diese Forderung für alle k:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = k_\nu\left[-D + k^2\Pi^{(1)}(k^2) + k^2\Pi(k^2)\right] \stackrel{!}{=} 0$$

und daher

$$\Pi = \frac{D}{k^2} - \Pi^{(1)}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}\left(-D + k^2\Pi^{(1)}\right) + k_\mu k_\nu \Pi \\
&= g_{\mu\nu}k^2\left(-\frac{D}{k^2} + \Pi^{(1)}\right) + k_\mu k_\nu \Pi \\
&= -\, g_{\mu\nu}k^2\Pi^{(2)} + k_\mu k_\nu \Pi \\
&= \left(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2\right)\Pi
\end{aligned}$$

Dieses $\Pi_{\mu\nu}$ erfüllt in der Tat die Forderung (11.16). Stromerhaltung führt also dazu, daß der konstante Term $\sim D$ im Polarisationstensor verschwindet.

Gleichung (11.15) zeigt, daß die Berücksichtigung der Vakuumpolarisation formal durch eine Abänderung des metrischen Tensors im Photonen-Propagator aufgefangen werden kann. Mit dieser Änderung kann nun der in (11.14) auftretende effektive Propagator umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{\lambda\nu}(k) &= \frac{-i}{k^2}\left\{g_{\lambda\nu} + \frac{-ig_\lambda{}^\mu}{k^2}\left[i\ \Pi_{\mu\nu}(k)\right]\right\} \\
&= \frac{-ig_{\lambda\nu}}{k^2} + \frac{-i}{k^2}\left(i\ \Pi_{\lambda\nu}(k)\right)\frac{-i}{k^2} + \ldots
\end{aligned}$$

wenn iteriert wird:

$$\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim \longrightarrow \sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim\!\sim + \sim\!\sim\!\sim \bigcirc \sim\!\sim\!\sim + \sim\!\sim\!\sim \bigcirc \sim\!\sim \bigcirc \sim\!\sim\!\sim + \ldots .$$

Damit erhält man summiert[2]

$$\bar{D}_{\lambda\nu}(k) = \frac{-ig_{\lambda\nu}}{k^2} + \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k^2}\left(i\ \Pi^{\mu\rho}\right)\bar{D}_{\rho\nu}.$$

Nun wird die oben gefundene Gestalt des Polarisationstensors eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{-ig_{\lambda\nu}}{k^2} + \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k^2}\left[i(k^\mu k^\rho - g^{\mu\rho}k^2)\Pi(k^2)\right]\bar{D}_{\rho\nu} \\
&= \frac{-ig_{\lambda\nu}}{k^2} - \Pi(k^2)\bar{D}_{\lambda\nu} + \frac{k_\lambda k^\rho}{k^2}\Pi(k^2)\bar{D}_{\rho\nu}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit ik^2

$$ik^2\left(1 + \Pi(k^2)\right)\bar{D}_{\lambda\nu} = g_{\lambda\nu} + i\ k_\lambda k^\rho \Pi(k^2)\ \bar{D}_{\rho\nu}.$$

Diese Gleichung wird gelöst durch Iteration (mit $\Pi = \mathcal{O}(\alpha)$):

$$D_{\lambda\nu} = \frac{-i}{k^2}\frac{1}{1+\Pi(k^2)}\left(g_{\lambda\nu} + i\frac{k_\lambda k_\nu}{k^2}\Pi\right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \tag{11.17}$$

[2]Hier wird wieder stillschweigend angenommen, daß $\Pi \sim \alpha$ klein ist, obwohl Π eigentlich divergent ist. Dies wird später, nach der Renormierung, gerechtfertigt.

Renormierung

Regularisierung. Da $\Pi_{\mu\nu}$ divergiert, ist wieder eine Regularisierung durch Einführung eines *cut-offs* Λ nötig. Dabei muß sichergestellt werden, daß die Eigenschaft $D = 0$, die ja die Stromerhaltung und damit die Eichinvarianz der Theorie widerspiegelt, erhalten bleibt, mit anderen Worten: daß die Regularisierungsvorschrift selbst eichinvariant ist. Das wird hier erreicht, indem statt $\Pi_{\mu\nu}$ die Größe

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(k, \Lambda) = \Pi_{\mu\nu}(k) - \Pi_{\mu\nu}(k, \Lambda)$$

betrachtet wird, wobei $\Pi_{\mu\nu}(k, \Lambda)$ den gleichen Ausdruck wie oben beschreibt, lediglich die Fermionenmasse ist durch die sehr große Masse Λ ersetzt worden. Gleichung (11.12) zeigt, daß für $\Lambda \to \infty$ der Polarisationstensor den physikalischen Wert (1. Term in der letzten Gleichung) annimmt. Man beachte, daß diese Art der Regularisierung ("Pauli-Villars") die Struktur der Theorie, und damit insbesondere auch die Eichinvarianz erhält.

Das entsprechende Integral kann analytisch berechnet werden. Man erhält für $k^2 < 4m^2$ (s. detaillierte Rechnung in Itzykson-Zuber)

$$\tilde{\Pi}(k^2, \Lambda) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \tilde{\Pi}^R(k^2)$$

wobei $\tilde{\Pi}^R(k^2)$ nicht von Λ abhängt und endlich ist. Man hat

- für kleine k

$$\tilde{\Pi}^R(k^2) = -\frac{\alpha}{15\pi}\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{k}{m}\right)^4\right) \quad \text{für } k^2 \to 0\ .$$

- für große k

$$\tilde{\Pi}^R(k^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-k^2}{m^2}\right) \quad \text{für } -k^2 \to \infty \tag{11.18}$$

$\tilde{\Pi}(k^2)$ ist also beide Male für $\Lambda \to \infty$ *logarithmisch divergent*. Der divergente Anteil wird allgemein abgekürzt als

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \equiv 1 - Z_3(\Lambda),$$

Eine Renormierung durch Einführung eines Gegenterms wie bei der Selbstenergie muß also darauf abzielen, die divergente Größe $1 - Z_3(\Lambda)$ zu entfernen, d.h. $\tilde{\Pi}$ durch $\tilde{\Pi} - 1 + Z_3$ zu ersetzen. Das Problem, einen geeigneten Counterterm zu finden, verschieben wir an das Ende dieses Abschnitts.

Renormierung. Jetzt wird der divergierende Anteil von $\tilde{\Pi}$ entfernt. Dies entspricht der Ersetzung:

$$\tilde{\Pi} \mapsto \tilde{\Pi} + Z_3 - 1.$$

Damit hat man für den renormierten Propagator (11.17) bis zu Termen der $\mathcal{O}(\alpha)$:

$$\tilde{D}_{\lambda\nu} = \frac{-i}{k^2} \frac{1}{\tilde{\Pi}(k^2,\Lambda) + Z_3(\Lambda)} \left\{ g_{\lambda\nu} + i\frac{k_\lambda k_\nu}{k^2} \left[\tilde{\Pi}(k^2,\Lambda) + Z_3(\Lambda) - 1 \right] \right\}.$$

Setzt man dies nun in Gleichung (11.11) am Anfang dieses Abschnitts (Seite 113) ein, so sieht man, daß wegen $\vec{\epsilon}\cdot\vec{k} = 0$ der Term $\sim k_\lambda k_\nu$ nichts beiträgt. Also bleibt:

$$\tilde{D}_{\lambda\nu} = \frac{-ig_{\lambda\nu}}{k^2} \frac{1}{\tilde{\Pi}(k^2,\Lambda) + Z_3(\Lambda)} = \frac{-ig_{\lambda\nu}}{k^2} \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}^R(k^2)} \ . \tag{11.19}$$

Die k-Abhängigkeit des Propagators ist damit abgeändert. Da nach Konstruktion $\tilde{\Pi}^R$ der endliche und konvergente Teil von $\tilde{\Pi}$ ist, ist dieser Propagator in jedem Falle endlich und der Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ kann nun durchgeführt werden.

Das kovariante Matrixelement (11.12) lautet nun:

$$-i\ \mathcal{M}^r_{fi} = \bar{v}' ie\ \gamma^\kappa \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{ie\ g^{\lambda\nu}}{1 + \tilde{\Pi}^R(k_2^2)} u_{ps} \epsilon^1_\kappa \epsilon^2_\nu \ . \tag{11.20}$$

Wegen $\tilde{\Pi}^R(0) = 0$ erfahren äußere Photonenlinien keine Renormierung, da sie nur reelle Photonen enthalten. Damit trägt das Diagramm am Anfang dieses Abschnitts für den hier betrachteten Prozeß der Elektron-Positron Zerstrahlung in 2 Photonen nach Renormierung nichts bei.

Für Prozesse mit virtuellen, inneren Photonenlinien jedoch wird die geänderte k-Abhängigkeit des Propagators beobachtbar. Im Beispiel der Coulomb-Streuung an einem äußeren Potential führt die zusätzliche k-Abhängigkeit des Propagators in $\tilde{\Pi}^R(k^2)$ zu einer Modifikation des COULOMBschen Gesetzes.

Kleine k^2. Wir betrachten jetzt den Propagator für kleine k^2, d.h. für nahezu reelle Photonen. Da $\tilde{\Pi}^R(k^2) \to 0$ for $k^2 \to 0$ besteht die Änderung des Übergangselementes gegenüber dem in 2. Ordnung nur im Auftreten eines multiplikativen Faktors

$$f = \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}^R(k^2)} \approx 1 - \tilde{\Pi}^R(k^2) = 1 + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2} + \mathcal{O}(k^4) \ .$$

Der Term $\sim k^2$ hebt die k-Abhängigkeit des Faktors $1/k^2$ im Propagators auf, so daß ein k-unabhängiger Term im effektiven Propagator des Photons, unter Einschluß der Vakuumpolarisation, übrigbleibt.

Dies bedeutet z.B., daß das Coulomb'sche Gesetz durch diesen Term um eine Konstante im Impulsraum, d.h. eine δ Funktion im Ortsraum, geändert wird. Da diese δ Funktion nur in s-Zuständen wirken kann, verschiebt sie die Energien aller s-Zustände. Diese Verschiebung trägt zur sogenannten *Lamb-Shift* im Spektrum des Wasserstoff-Atoms bei.

Große k^2. Nun wird der renormierte Propagator für große raumartige k^2 betrachtet. Es gilt

$$1+\tilde{\Pi}^R(k^2) \approx 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{-k^2}{m^2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \ . \tag{11.21}$$

Damit ist die effektive, k-abhängige Ladung für große raumartige k

$$e_r(k) = e\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\Pi}^R(k^2)}} = \frac{e}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{-k^2}{m^2}}} \tag{11.22}$$

Da $\tilde{\Pi}^R$ endlich ist, und nicht von Λ abhängt, ist $e_r(k)$ ebenfalls endlich und wohldefiniert. Dieser Ausdruck zeigt eine sogenannte "laufende Kopplungskonstante": Die effektiv wirkende Ladung e_r nimmt zu mit wachsendem Impuls des Photons. Im Ortsraum betrachtet, bedeutet dies, daß e zu kleineren Abständen hin immer größer wird. Dies kennzeichnet die Abschirmwirkung der Vakuumpolarisation, ganz analog zur Abschwächung eines elektrischen Feldes in einem Dielektrikum.

Counterterm. Die Struktur des benötigen Counterterms in der Lagrange-Dichte kann man finden, indem man den (vor der Renormierung) divergenten Anteil zum Matrixelement (11.12) explizit aufschreibt. Man erhält dafür:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{4L} & \qquad \ldots \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k_2^2}\left(i\Pi^{\mu\nu}(k_2,\Lambda)\right) u_{ps}\, \epsilon_\kappa^1\epsilon_\nu^2 \\
\stackrel{\Lambda\to+\infty}{\longrightarrow} & \qquad \ldots \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k_2^2}\Big(i(k_2^\mu k_2^\nu - g^{\mu\nu}k_2^2)\left[1-Z_3(\Lambda)\right]\Big) u_{ps}\, \epsilon_\kappa^1\epsilon_\nu^2 \\
= & \qquad \ldots \frac{-ig_{\lambda\mu}}{k_2^2}(-i)g^{\mu\nu}k_2^2\left(1-Z_3(\Lambda)\right) u_{ps}\, \epsilon_\kappa^1\epsilon_\nu^2 \\
& \text{weil } k_\nu\epsilon^\nu = 0 \text{ (Transversalität)} \\
= & \qquad -\left(1-Z_3(\Lambda)\right)(-i)\mathcal{M}_{if}^{2L} \ .
\end{aligned}$$

Damit hat der divergente Anteil genau die Gestalt der Übergangsamplitude in 2. Ordnung Störungsrechnung (s. (9.13)), multipliziert mit $-(1-Z_3)$. Da beide Terme proportional zu e^2 sind, können sie durch die Setzung

$$e^2 = Z_3 e_0^2$$

zusammengefaßt werden. Dabei ist e_0 die nackte, unrenormierte, nackte Ladung, die in der nackten Fermionen-Lagrangedichte auftritt und e die physikalische, meßbare Ladung.

Um den zugehörigen Gegenterm in der LAGRANGE-Dichte zu finden, genügt es zu beachten, daß der obige divergente Term einer effektiven Ladung Z_3e^2 entspricht und daß der freie Photonenpropagator gerade durch den Term $-1/4\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ in der Lagrangedichte erzeugt wird. Damit ist klar, daß ein Gegenterm der Form

$$\mathcal{L}_c = +\left(1-Z_3\right)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (F_{\mu\nu} \sim e)$$

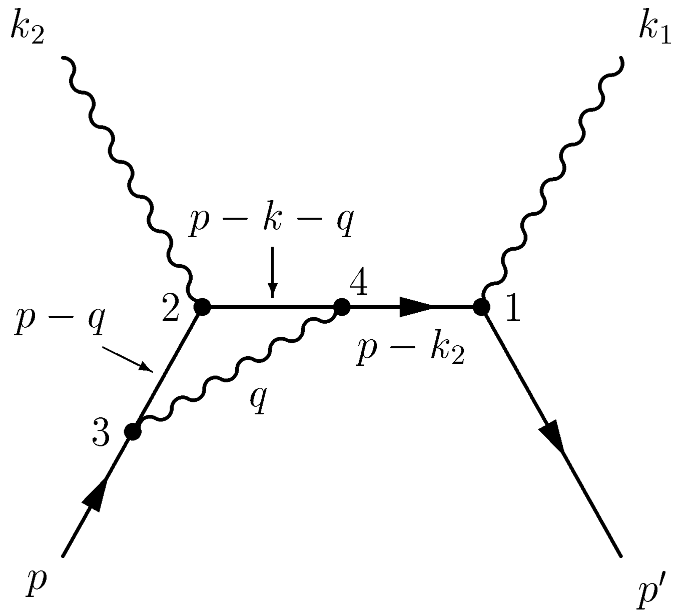

Abbildung 11.8: Vertexkorrektur

das Gewünschte leistet. Damit lautet die renormierte LAGRANGE-Dichte des freien elektromagnetischen Feldes nun

$$\mathcal{L}_{em} = \mathcal{L}^0_{em} + \mathcal{L}_c = -\frac{1}{4}(1-(1-Z_3))F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}Z_3(\Lambda)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Mit der Definition eines nackten Feldes A^0 durch

$$\sqrt{Z_3(\Lambda)}\,A_\mu = A^0_\mu$$

folgt:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F^0_{\mu\nu}(\Lambda)F_0^{\mu\nu}(\Lambda)$$

für die nackte, freie Lagrangedichte des Photonenfeldes.

11.2.4 Vertexkorrektur

Es bleibt nun noch, den Term $(A)_7 \times (F)_3$ zu berechnen. Er hat die Gestalt:

$$:\bar\Psi(1)\gamma_\kappa\Psi(1)\bar\Psi(2)\gamma_\lambda\Psi(2)\bar\Psi(3)\gamma_\mu\Psi(3)\bar\Psi(4)\gamma_\nu\Psi(4): \times :A^\kappa(1)A^\lambda(2)A^\mu(3)A^\nu(4):$$

Graphisch sieht dieser Term wie in Fig. 11.8 dargestellt aus.

Der entsprechende Beitrag zum kovarianten Matrixelement lautet:

$$
\begin{aligned}
-i\,\mathcal{M}_{fi}^{4\nu} &= \bar{v}_{p's'} ie\,\gamma^\kappa \frac{i}{\not p - \not k_2 - m} \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, ie\,\gamma^\nu \frac{i}{\not p - \not k_2 - \not q - m}\, ie\,\gamma^\lambda \frac{i}{\not p - \not q - m}\, ie\,\gamma^\mu \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\
&\times u_{ps}\,\epsilon_\kappa^1 \epsilon_\lambda^2.
\end{aligned}
$$

Mit der Abkürzung

$$\Gamma^\lambda(p,p') = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{-i}{q^2}\gamma_\mu \frac{i}{\not p' - \not q - m}\gamma^\lambda \frac{i}{\not p - \not q - m}\gamma^\mu$$

lautet das Matrixelement:

$$-i\,\mathcal{M}_{fi}^{4\nu} = -e^2 \bar{v}_{p's'}\gamma^\kappa \frac{i}{\not p - \not k_2 - m}\Gamma^\lambda(p-k_2,p) u_{ps}\,\epsilon_\kappa^1\epsilon_\lambda^2.$$

Dieser Term ist zu dem Term 2. Ordnung zu addieren. Effektiv wird dadurch der Vertex geändert

$$\gamma^\lambda \mapsto \Lambda^\lambda = \gamma^\lambda + \Gamma^\lambda(p-k_2,p).$$

Wieder zeigt einfaches 'Power-Counting', daß Γ^λ logarithmisch divergiert.

Üblicherweise wird der Vertexkorrekturfaktor Z_1 definiert durch:

$$\Gamma_\lambda(p',p) = \gamma_\lambda\left(\frac{1}{Z_1} - 1\right) + \frac{1}{Z_1}\Gamma_\lambda^R(p',p)\ , \tag{11.23}$$

so daß der vollständige Vertex lautet

$$\Lambda_\lambda(p',p) = \frac{1}{Z_1}\left(\gamma_\lambda + \Gamma_\lambda^R(p,p')\right)\ .$$

Diese Aufteilung wird eindeutig, wenn man fordert:

$$\bar{u}_{ps}\Gamma_\lambda^R(p,p)u_{ps} = 0 \qquad \text{für} \quad \not p = m, \qquad \text{d. h. } \textit{on-shell}.$$

Durch diese Normierung ist Γ_λ^R endlich, während alle Divergenzen in $1/Z_1$ stecken ($Z_1 = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$).

Counter-Term. Ein Gegenterm der Form:

$$\delta\mathcal{L} = -e(Z_1(\Lambda) - 1)\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu = -e(Z_1(\Lambda)-1)j_\mu A^\mu$$

wird diesen divergenten Term (nach Regularisierung durch Einführung eines *cut-offs*) offensichtlich aufheben. Zusammengenommen mit der ursprünglichen Kopplung lautet der Kopplungsterm dann effektiv:

$$\mathcal{L}_{int} = -e\ Z_1(\Lambda)\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu.$$

Dieses wird in die nackten Zustandsfunktionen Ψ_0 und Felder $A^0_\mu(\Lambda)$ umgeschrieben mittels des Zusammenhangs:

$$A^0_\mu(\Lambda) = \sqrt{Z_3(\Lambda)} A_\mu; \quad \Psi_0(\Lambda) = \sqrt{Z_2(\Lambda)}\Psi.$$

Damit erhält man für den Kopplungsterm

$$\mathcal{L}_{int} = -e\ Z_1(\Lambda)\frac{1}{Z_2(\Lambda)\sqrt{Z_3(\Lambda)}}\bar{\Psi}_0\gamma^\mu\Psi_0 A^0_\mu.$$

Diese Gleichung kann so interpretiert werden, daß die nackte Ladung gegeben ist durch:

$$e_0 = e\frac{Z_1(\Lambda)}{Z_2(\Lambda)\sqrt{Z_3(\Lambda)}}.$$

Die Koeffizienten Z_1 und Z_2 hängen von der Masse des beteiligten Teilchens ab. Damit würden sich unterschiedliche physikalische Ladungen ergeben, selbst wenn die nackten Ladungen gleich sind.

Zusammengefaßt lautet damit nun die vollständige renormierte nackte Lagrange-Dichte der QED

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= Z_2\bar{\Psi}(\not{p} - m + \delta m)\Psi - \frac{1}{4}Z_3\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\ Z_1\ \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu \\ &= \bar{\Psi}_0(\not{p} - m_0)\Psi_0 - \frac{1}{4}F^0_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_0 + e_0\ j^0_\mu A^\mu_0. \end{aligned}$$

Diese Lagrangedichte ist nichts weiter als die ursprüngliche Lagrangedichte plus alle Gegenterme. Sie führt zu endlichen Amplituden für alle Prozesse.

Oben sind die benötigten Gegenterme jeweils nur bis zur 1. Ordnung in α berechnet worden; wir haben dabei gesehen, daß in der Tat 4 Konstanten Z_1, Z_2, Z_3 und δm gefunden werden können, die dieses leisten. Die gleichen 4 Konstanten können nun für die QED in jeder störungstheoretischen Ordnung gefunden werden. Die Gegenterme haben dabei stets die Gestalt von schon vorhandenen Termen in $\mathcal{L}$ und erlauben deshalb eine einfache physikalische Interpretation. Alle Unendlichkeiten der Theorie können also durch die Einführung von endlich vielen Gegentermen (hier 3) beseitigt werden: *die QED ist renormierbar.*

Ward Identität

Man kann nun interessanterweise die Renormierungskonstanten Z_1 und Z_2 miteinander in Verbindung setzen. Dazu differenzieren wir die Selbstenergie (11.5) nach dem Impuls

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\lambda} &= \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{-i}{q^2}\gamma_\mu\frac{i}{\not{p} - \not{q} - m}\gamma^\mu\right) \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q\left(\frac{-i}{q^2}\gamma_\mu\frac{i}{\not{p} - \not{q} - m}\gamma^\lambda\frac{i}{\not{p} - \not{q} - m}\gamma^\mu\right)\ . \end{aligned} \tag{11.24}$$

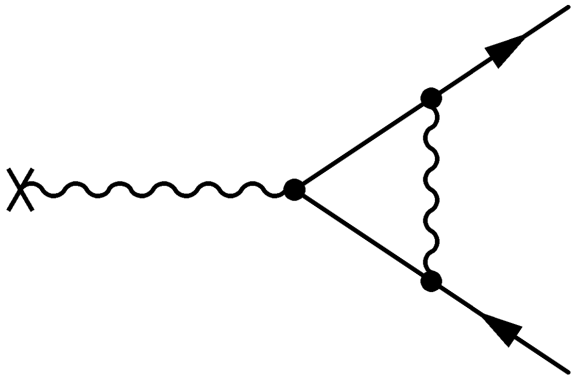

Abbildung 11.9: Vertexkorrektur für elastische Streuung am äußeren Potential

Der im Integranden in der 2. Zeile rechts auftretende Ausdruck läßt sich nun umschreiben. Durch Differentiation der Relation

$$S_F(p)S_F(p)^{-1} = 1.$$

erhält man

$$\frac{\partial S_F}{\partial p_\lambda}S_F^{-1} + S_F\frac{\partial S_F^{-1}}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial S_F}{\partial p_\lambda}(\not{p} - m) + S_F\frac{\partial}{\partial p_\lambda}(\not{p} - m) = 0$$

und daraus durch Multiplikation mit S_F^{-1} von rechts

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{1}{\not{p} - m}\right) &= \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m}\right) \\ &= -\frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m}\gamma^\lambda\frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m} \\ &= -\frac{1}{\not{p} - m}\gamma^\lambda\frac{1}{\not{p} - m}\ . \end{aligned}$$

Damit wird die Ableitung der Selbstenergie (11.24)

$$\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\lambda} = -\Gamma^\lambda(p,p) \qquad \text{WARD-}\textit{Identität}\ .$$

Damit ist die Vertexkorrektur Γ für den Fall, daß der Impuls vor und hinter dem elektromagnetischen Vertex gleich ist, d.h. für elastische Streuung an einem äußeren Potential, beschrieben durch einen Graphen der in Fig. 11.9 dargestellten Gestalt auf die Selbstenergiekorrektur, genauer auf den Term B dort (s. (11.6) auf S. 109), zurückgeführt.

Man kann nun die allgemeine Vertexkorrekturfunktion bei der ein- und auslaufender Impuls verschieden sind, zurückführen auf den gerade behandelten Fall der elastischen Streuung, indem man schreibt:

$$\Gamma_\lambda(p',p) = -\frac{\partial\Sigma}{\partial p_\lambda}(p) + \Gamma_\lambda(p',p) - \Gamma_\lambda(p,p).$$

Die hier auftretende Differenz $\Gamma_\lambda(p',p) - \Gamma_\lambda(p,p)$ ist endlich, wie man an der Definition von Γ sofort sieht. Wie früher diskutiert, gilt:

$$\Sigma(p) = A + (-\not{p} + m)B + \Sigma^R(p)$$

mit

$$B = -\left.\frac{\partial\Sigma}{\partial\not{p}}\right|_{\not{p}=m} \qquad (= 1 - Z_2).$$

Also folgt:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial p^\lambda} = -\frac{\partial\not{p}}{\partial p^\lambda}B + \frac{\partial\Sigma^R}{\partial p^\lambda}.$$

Daher läßt sich $\Gamma_\lambda(p',p)$ schreiben als:

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda(p',p) &= \frac{\partial\not{p}}{\partial p^\lambda}B + \Gamma_\lambda(p',p) - \Gamma_\lambda(p,p) - \frac{\partial\Sigma^R}{\partial p^\lambda} \\ &= \gamma_\lambda B + \Gamma_\lambda(p',p) - \Gamma_\lambda(p,p) - \frac{\partial\Sigma^R}{\partial p^\lambda}.\end{aligned}$$

Wegen

$$B = 1 - Z_2 = \frac{1}{Z_2} - 1 + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

folgt:

$$\Gamma_\lambda(p',p) = \left(\frac{1}{Z_2} - 1\right)\gamma_\lambda + \Gamma_\lambda(p',p) - \Gamma_\lambda(p,p) - \frac{\partial\Sigma^R}{\partial p^\lambda}.$$

Vergleich mit dem obigen Ausdruck (11.23) für Γ_λ zeigt unmittelbar:

$$Z_2(\Lambda) = Z_1(\Lambda)$$

und

$$\frac{1}{Z_1}\Gamma^R_\lambda(p',p) = \Gamma^R_\lambda(p',p) + \mathcal{O}(\alpha^2) = \Gamma_\lambda(p',p) - \Gamma_\lambda(p,p) - \frac{\partial\Sigma^R}{\partial p^\lambda}.$$

Wegen $Z_2 = Z_1$ hängen also Selbstenergie und Vertexkorrektur zusammen. Intuitiv läßt sich dieser Zusammenhang verstehen, wenn man bedenkt, daß bei einer Ankopplung des Photonenfeldes der Impuls über die minimale Substitution ersetzt wird. Dadurch tritt zusammen mit dem Impuls das Photonenfeld auf und dieser Term erzeugt ja gerade den Wechselwirkungsterm. Andererseits erscheint das Feld dann auch im Propagator, der ja den inversen Operator der Fermionen-Bewegungsgleichung darstellt.

Damit ist nun die nackte Ladung gegeben durch:

$$e_0 = \frac{e}{\sqrt{Z_3}},$$

so daß nur der Anteil des Vakuumpolarisationsgraphen übrigbleibt, und man erhält schließlich

$$e_0 \; A^0 = e \; A.$$

Der Kopplungsterm eines Teilchens an das elektromagnetische Feld ist also völlig unabhängig von der Art des Teilchens, solange es nur die gleiche Ladung hat. Sehr verschiedene Teilchen – wie z. B. das Proton und das Elektron – erfahren die gleiche Renormierung der Kopplungskonstanten unabhängig von ihrer unterschiedlichen Masse. Gleiche nackte Ladungen bleiben also auch nach der Renormierung gleich.

Schließlich soll hier noch erwähnt werden, daß es noch einen Term 4. Ordnung in der Paarzerstrahlung gibt, der bisher nicht behandelt worden ist. In diesem Term streuen einlaufendes Elektron und Positron, bevor sie die Photonen emittieren. Da dann in dem Graph 3 Fermionenpropagatoren und 1 Photonenpropagator auftreten, ist dieser Graph konvergent. Er enthält also keinerlei Unendlichkeiten, trägt aber natürlich zur Paarvernichtung in dieser Ordnung bei.

Anhang A

Phasen der Dirac-Spinoren

Der Antiteilchen-Spinor

$$v_{-ps} = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad N = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}}$$

löst die Bewegungsgleichung

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m) v_{-ps} = -E_p v_{-ps} \tag{A.1}$$

und die Helizitätsgleichung

$$\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} v_{-ps} = 2s\ v_{-ps}\ . \tag{A.2}$$

Nach Multiplikation der komplex konjugierten Gleichung (A.1) von links mit Σ_2

$$\Sigma^2(\vec{\alpha}^*\cdot\vec{p} + \beta m) v^*_{-ps} = -E_p \Sigma^2 v^*_{-ps},$$

und Verwendung von

$$\Sigma^2\vec{\alpha}^*\Sigma^2 = -\vec{\alpha} \qquad \text{und} \qquad \Sigma^2\Sigma^2 = 1$$

(folgt durch direktes Nachrechnen unter Benutzung der Kommutatoren für $\alpha^i\alpha^j$) folgt

$$(-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\Sigma^2 v^*_{-ps} = -E_p\Sigma^2 v^*_{-ps}\ . \tag{A.3}$$

Gleichung (A.2) wird ähnlich behandelt:

$$\Sigma^2\vec{\Sigma}^*\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} v^*_{-ps} = 2s\ \Sigma^2 v^*_{-ps}.$$

Mit

$$\Sigma^2\vec{\Sigma}^*\Sigma^2 = -\vec{\Sigma} \qquad \text{und} \qquad \Sigma^2\Sigma^2 = 1$$

folgt

$$-\vec{\Sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\Sigma^2 v^*_{-ps} = 2s\ \Sigma^2 v^*_{-ps}\ . \tag{A.4}$$

Durch Vergleich von (A.4) mit (A.2) und (A.3) mit (A.1) folgt, daß

$$\Sigma^2 v^*_{-ps} \sim v_{ps}.$$

Beide Zustände müssen also bis auf eine Phase gleich sein. Wegen $\Sigma^2\Sigma^2 = 1$ gilt auch

$$\Sigma^2 v_{ps} \sim v^*_{-ps},$$

und, da Σ^2 rein imaginär ist,

$$\Sigma^2 v^*_{ps} \sim v_{-ps}.$$

Die Phase wird mit $\eta(-p,s)$ abgekürzt, so daß gilt

$$\Sigma^2 v^*_{ps} = \eta(-p,s)v_{-ps}; \qquad |\eta| = 1. \tag{A.5}$$

Ganz analog lassen sich die übrigen Phasenrelationen herleiten:

$$v_{ps} = -i\gamma^2 u^*_{ps}; \qquad u_{ps} = -i\gamma^2 v^*_{ps} \tag{A.6}$$

$$\gamma_0 u_{ps} = u_{-p-s}; \qquad \gamma_0 v_{ps} = -v_{-p-s} \tag{A.7}$$

$$\Sigma^2 u^*_{ps} = \eta^*(p,s)u_{-ps}; \qquad \Sigma^2 v^*_{ps} = \eta(-p,s)v_{-ps} \tag{A.8}$$

mit der Phasenrelation

$$\eta(p,s) = -\eta(-p,s)\ , \tag{A.9}$$

die z.B. aus zweifacher Anwendung der Relation (A.5) folgt. In (A.6) ist eine Phase willkürlich gleich 1 gesetzt worden.

Hieraus lassen sich die Spinoren explizit konstruieren. Man erhält z. B. für $\vec{p} \parallel z-$Achse ($\vec{p} = (0,0,p)$)

$$u_{p+\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} \varphi_{+\frac{1}{2}} \\ P\sigma^3\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

mit

$$P \equiv \frac{p}{E_p + m}\ .$$

Wählt man nun

$$\varphi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

so folgt

$$u_{p+\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Den Spinor zu negativem Impuls erhält man aus (A.7):

$$u_{-p-\frac{1}{2}} = \gamma_0 u_{p+\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} \varphi_{+\frac{1}{2}} \\ -P\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die übrigen Spinoren können mittels (A.8) gewonnen werden:

$$\Sigma^2 u^*_{p+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{+\frac{1}{2}} \\ P\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2\varphi_{+\frac{1}{2}} \\ P\sigma^2\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Spinmatrix mit dem Zweierspinor liefert

$$\sigma^2\varphi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Also gilt:

$$\Sigma^2 u^*_{p+\frac{1}{2}} = \Sigma^2 u_{p+\frac{1}{2}} = iN \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \eta^*(p, +\frac{1}{2}) u_{-p+\frac{1}{2}}$$

und daraus folgend

$$u_{-p+\frac{1}{2}} = i\eta(p, +\frac{1}{2}) N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} ,$$

weil $|\eta| = 1$ und daher $(\eta^*)^{-1} = \eta$. Nach (A.7) ist dann

$$u_{p-\frac{1}{2}} = \gamma_0 u_{-p+\frac{1}{2}} = i\eta(p, +\frac{1}{2}) N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} .$$

Zusammengefaßt erhält man für die u Spinoren

$$u_{p+\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad u_{p-\frac{1}{2}} = i\eta(p,+\tfrac{1}{2})N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

$$u_{-p+\frac{1}{2}} = i\eta(p,+\tfrac{1}{2})N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}; \qquad u_{-p-\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man wendet nun (A.6) an, um konsistente v-Spinoren zu erzeugen. Mit

$$\gamma^2 = \gamma_0\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} v_{p+\frac{1}{2}} &= -i\gamma^2 u^*_{p+\frac{1}{2}} = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \varphi_{+\frac{1}{2}} \\ P\sigma^3\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ &= -iN\begin{pmatrix} P\sigma^2\sigma^3\varphi_{+\frac{1}{2}} \\ -\sigma^2\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -iN\begin{pmatrix} Pi\sigma^1\varphi_{+\frac{1}{2}} \\ -\sigma^2\varphi_{+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\sigma^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Relation für $s = -\frac{1}{2}$ erhält man mittels (A.7):

$$v_{-p-\frac{1}{2}} = -\gamma_0 v_{p+\frac{1}{2}} = -N\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(A.8) angewandt liefert die noch fehlenden zwei v-Spinoren:

$$\Sigma^2 v^*_{p+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= iN\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = iN\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \eta(-p,+\frac{1}{2})v_{-p+\frac{1}{2}} \;.
\end{aligned}
$$

(A.7) angewandt liefert den Spinor zu $s=-\frac{1}{2}$:

$$
v_{p-\frac{1}{2}} = -\gamma_0 v_{-p+\frac{1}{2}} = i\eta^*(-p,+\frac{1}{2})N\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;.
$$

Zusammengefaßt lauten also die v-Spinoren:

$$
\begin{aligned}
v_{p+\frac{1}{2}} &= N\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; & v_{p-\frac{1}{2}} &= i\eta^*(-p,+\tfrac{1}{2})N\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_{-p+\frac{1}{2}} &= i\eta^*(-p,+\tfrac{1}{2})N\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & v_{-p-\frac{1}{2}} &= -N\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;.
\end{aligned}
$$

Da die Definitionsgleichungen für die Spinoren u und v homogen sind, bleibt die Phase grundsätzlich unbestimmt und kann daher frei gewählt werden. Wir wählen sie hier zu

$$
\eta(p,s) = -i \qquad \eta(-p,s) = +i \tag{A.10}
$$

Damit sind die Spinoren, die alle Phasenregeln erfüllen, gegeben durch

$$
\begin{aligned}
u_{+p+\frac{1}{2}} &= N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} & u_{+p-\frac{1}{2}} &= N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} \\
u_{-p+\frac{1}{2}} &= N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} & u_{-p-\frac{1}{2}} &= N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$v_{+p+\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_{+p-\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{-p+\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{-p-\frac{1}{2}} = N\begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$P = \frac{p}{E_p + m} \qquad \text{und} \qquad N = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}}$$

für ein Teilchen, das sich mit Impuls p in z-Richtung bewegt.