Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Г.Н. Яковенко

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ, ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Электронная версия от 28.03.2003

Москва 2003

Рецензенты:
кафедра теоретической механики
Казанского государственного univeristета

д.ф.-м.н. В.В. Сидоренко

Включены следующие разделы теоретической механики: равновесие, устойчивость положения равновесия консервативной системы, малые колебания консервативной системы, асимптотическая устойчивость, гамильтонова механика, каконические преобразования, уравнение Гамильтона-Якоби.

Предназначено для студентов второго курса Московского физико-технического института и соответствует программе второго семестра двухсеместрового курса лекций по теоретической механике.

Последнюю редакцию книги можно найти на www.study.com.ru.

О всех замеченных опечатках и неточностях, пожалуйста, сообщайте по адресу feedback@study.com.ru.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теоретическая механика изучается студентами МФТИ год — в течение второго курса. Книга соответствует программе весеннего семестра и представляет собой перевод с «устного» на «письменный» читаемых автором лекций.

Объект обсуждения — конечномерная голономная механическая система с идеальными связями. Допустимые положения системы (конфигурации) взаимно однозначно связаны с наборами обобщенных координат $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Поведение $q(t)$ системы определяется уравнениями Лагранжа (лагранжевой системой)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{0.1}$$

Если обобщенные силы Q_i задаются потенциальной энергией Π, то уравнения (0.1) можно записать с использованием функции Лагранжа (лагранжиана) $L = T - \Pi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{0.2}$$

Уравнения (0.2) могут определять движение не только таких систем, для которых выполняется $L = T - \Pi$. Например, движения одномерного линейного осциллятора с диссипацией удовлетворяют системе (0.2), заданной лагранжианом $L = (T - \Pi)e^{\alpha t}$. Далее изучаются произвольные системы (0.2) с единственным условием на функцию Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0. \tag{0.3}$$

Условие (0.3) обеспечивает возможность приведения системы (0.2) к нормальному виду: в левой части уравнений — производные первого порядка, в правой — функции от переменных.

Используются следующие названия для пространств:

1. координатное (конфигурационное) — n-мерное пространство с координатами $q_1, \ldots, q_n$;

2. расширенное координатное — с координатами $t, q_1, \ldots, q_n$;

3. фазовое (пространство состояний) — $2n$-мерное с координатами $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ (или с координатами $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, p_k — обобщенные импульсы);

4. расширенное фазовое — с координатами $t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ (или $t, q_1, \ \ldots, q_n, p_1, \ \ldots, p_n$).

Функции, участвующие в построениях, предполагаются достаточно гладкими.

Рассуждения, определения, утверждения — локальны: справедливы в некоторой области одного из указанных выше пространств.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02–01–00697) и Совета Программ поддержки ведущих научных школ (грант 00–15–96137).

Глава I. **РАВНОВЕСИЕ**

§ 1. Определение положения равновесия

Предполагаем, что механическая система содержит N материальных точек и ее состояние в некоторой системе отсчета определяется положением $\mathbf{r}_i$ и скоростью $\mathbf{V}_i$ каждой точки $(i = \overline{1,N})$. Предполагается, что система имеет n степеней свободы и динамика системы при некотором выборе обобщенных координат определяется уравнениями Лагранжа (0.1).

Определение 1.1. *Пусть в начальный момент времени t_0 материальные точки, принадлежащие механической системе, находятся в положении $\mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1,N}$, а скорости точек равны нулю: $\mathbf{V}_i^0 = 0$, $i = \overline{1,N}$. Занимаемое положение называется* **положением равновесия**, *если точки системы при $t > t_0$ продолжают оставаться в этом положении: $\mathbf{r}_i(t) \equiv \mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1,N}$, т. е. скорости точек при $t > t_0$ попрежнему равны нулю.*

Понятие равновесия существенно зависит от выбора системы отсчета. Пусть, например, одна инерциальная система отсчета перемещается относительно другой инерциальной поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{V} \neq 0$. Тогда положению равновесия в одной из систем отсчета в другой системе соответствует не положение равновесия, а поступательное движение механической системы с скоростью $\mathbf{V}$ или $-\mathbf{V}$. Вопрос о нахождении положений равновесия корректен, если из постановки задачи ясно, в какой системе отсчета для точек системы должно выполняться $\mathbf{V}_i \equiv 0$.

Пусть для механической системы сделан конкретный выбор обобщенных координат, т. е. в каждый момент времени t разрешенным положениям точек системы взаимно однозначно ставится в соответствие набор значений обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$: $\mathbf{r}_i(t,q)$, $i = \overline{1,N}$. Практически важен вопрос: каким условиям должны удовлетворять обобщенные координаты q и скорости $\dot{q}$, соответствующие положению равновесия? Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть механическая система стационарно задана, т. е. положения точек определяется только обобщенными координатами: $\mathbf{r}_i(q)$, $i = \overline{1,N}$, или выполняется*

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i(t,q)}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{1.1}$$

Тогда имеет место эквивалентность

$$\{\mathbf{V}_i \equiv 0,\ \ i = \overline{1,N}\} \Leftrightarrow \{\dot{q}_k \equiv 0,\, k = \overline{1,n}\}. \tag{1.2}$$

□ Вследствие того, что система стационарно задана, справедлива формула

$$\mathbf{V}_i(q,\dot{q}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k, \quad i = \overline{1,N}. \tag{1.3}$$

Доказательство $\Leftarrow$ исчерпывается подстановкой в (1.3) $\dot{q}_k = 0$. Для доказательства $\Rightarrow$ подставим в (1.3) $\mathbf{V}_i = 0$, получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_i(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k = 0,\, i = \overline{1,N},$$

или уравнение $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{H}_k \dot{q}_k = 0$, которое вследствие линейной независимости векторов

$$\mathbf{H}_k = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1(t,q)}{\partial q_k} \cdots \frac{\partial \mathbf{r}_N(t,q)}{\partial q_k} \right\|$$

(см. определение обобщенных координат) приводит к нужному равенству $\dot{q}_k = 0,\ k = \overline{1,n}$. ■

Теорему 1.1 иллюстрирует следующий

Пример 1.1. Одномерное движение груза под действием пружины определяется «разумным» выбором обобщенной координаты x — расстоянием между грузом и неподвижной опорой (см. рис. 1.1).

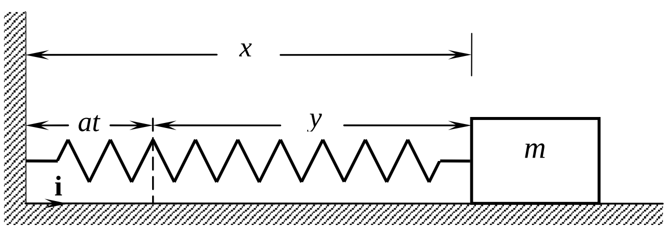

Рис. 1.1

Такой выбор влечет выражения:

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{i}x,\ \ \mathbf{V}(x,\dot{x}) = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\dot{x}$$

($\mathbf{i}$ — орт). Физически очевидному положению равновесия ($\mathbf{V} = \mathbf{i}\dot{x} = 0$) соответствуют значения: $x = l_0$, где l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии, $\dot{x} \equiv 0$. Не противоречит определению обобщенных координат «неразумный» выбор координаты y: $x = at + y$ ($a = \mathrm{const}$, см. рис 1.1). Такой выбор влечет выражения:

$$\mathbf{r}(t,y) = \mathbf{i}(at + y), \;\; \mathbf{V}(t,y,\dot{y}) = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}(a + \dot{y}),$$

а положению равновесия ($\mathbf{V} = \mathbf{i}(a + \dot{y}) \equiv 0$) соответствует путь в фазовом пространстве $R^2(y,\dot{y}): \; y = l_0 - at, \, \dot{y} = -a.$

Далее в этой главе рассматриваются исключительно стационарно заданные системы: разрешенное положение любой точки такой механической системы определяется значениями обобщенных координат

$$\mathbf{r}_i(q_1, \, \ldots, q_n), \, i = \overline{1, N},$$

и не зависит от момента времени t (см. (1.1)). Утверждение (1.2) теоремы 1.1 дает возможность сформулировать определение, эквивалентное для стационарно заданных систем определению 1.1.

Определение 1.2. *Пусть некоторому положению* $\mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1, N}$, *стационарно заданной системы соответствует набор обобщенных координат* q_k^0, $k = \overline{1, n}$: $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(q^0)$, $i = \overline{1, N}$. *Положение* $\mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1, N}$, *называется* **положением равновесия**, *если соответствующие системе уравнения Лагранжа имеют решение:*

$$q_k(t) \equiv q_k^0, \;\; k = \overline{1, n}.$$

Определение 1.2 дает возможность для стационарно заданной системы отождествить три представления положения равновесия: расположение механической системы $\mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1, N}$ в системе отсчета; точку $q = q^0$ в координатном пространстве; точку $q = q^0$, $\dot{q} = 0$ в фазовом пространстве.

§ 2. Критерий равновесия стационарно заданной системы

Динамика стационарно заданной системы определяется обобщенными силами $Q_i(t,q,\dot{q})$ и кинетической энергией

$$T(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad (2.1)$$

— в данном случае положительно определенной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ с коэффициентами $a_{ik}(q)$, независяшими явно от времени t. Подстановка функций $Q_i(t,q,\dot{q})$ и (2.1) в формулу (0.1) для уравнений Лагранжа приводит к системе следующего вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{lk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_i(t,q,\dot{q}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 *(критерий равновесия стационарно заданной системы). Положение q^0 ($\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(q^0)$) является положением равновесия стационарно заданной системы тогда и только тогда, когда для обобщенных сил $Q_i(t,q,\dot{q})$, $i = \overline{1,n}$, тождественно по времени t выполняются равенства*

$$Q_i(t,q^0,0) = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

□ Отметим две особенности уравнений (2.2). Во–первых, при подстановке в (2.2) постоянных q_k^0, $i = \overline{1,n}$, левая часть обращается в нуль. Во–вторых, уравнения (2.2) разрешимы относительно вторых производных $\ddot{q}_k$, приводимы к нормальному виду и имеют при заданных начальных условиях q^0, $\dot{q}^0$ единственное решение (см. оптимистическое предположение — все функции достаточно гладкие, — сделанное во введении). Вследствие этих двух особенностей у системы (2.2) есть решение $q(t) \equiv q^0$ (что по определению 1.2 соответствует положению равновесия) в том и только в том случае, если справедливо равенство (2.3). ■

Пример 2.1. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы m и длины l каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках O и A — цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке B стержня AB приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила $\mathbf{F}$ (см. рис. 2.1). Определить положения равновесия. Выбор обобщенных координат α, β — углов между стержнями и вертикалью — приводит к обобщенным силам и к уравнениям, определяющим по теореме 2.1 все положения равновесия:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -\frac{3}{2}mgl\sin\alpha + Fl\cos(\alpha-\beta) = 0, \\ Q_\beta &= -\frac{1}{2}mgl\sin\beta + Fl = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

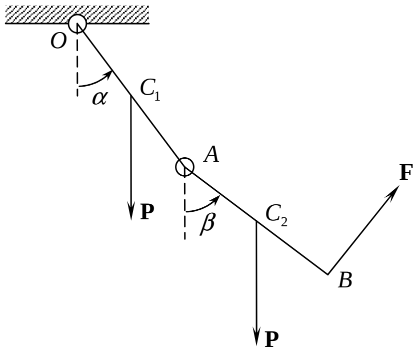

Рис. 2.1

Уравнения (2.4) преобразуются к эквивалентной форме

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tg}\alpha &= \frac{2F\cos\beta}{3mg-2F\sin\beta}=f(\beta), \\
\sin\beta &= \frac{2F}{mg},
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

из которой находятся в зависимости от параметров задачи все положения равновесия.

- $2F > mg$, положений равновесия нет.
- $2F = mg$, $\sin\beta = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = 0$, два положения равновесия (α_0,β_0):

$$(0,\frac{\pi}{2}),\quad (\pi,\frac{\pi}{2}).$$

- $2F < mg$, система (2.5) имеет решения:

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{2F}{mg}\right),\quad \beta_2=\pi-\beta_1,\quad \mathrm{tg}\,\alpha_{1,2}=f(\beta_{1,2}),$$

определяющие с учетом $f(\beta_1) = -f(\beta_2)$ четыре положения равновесия (α_0, β_0):

$(\alpha_1 = \mathrm{arctg} f(\beta_1), \beta_1)$; $(-\alpha_1, \pi-\beta_1)$; $(\pi+\alpha_1, \beta_1)$; $(\pi-\alpha_1,\pi-\beta_1)$.

На рис. 2.2 изображены четыре положения равновесия, соответствующие параметрам: $4F = mg$, $\alpha_1 \cong 9^\circ$, $\beta_1 = 30^\circ$. Отметим два обстоятельства. Во-первых, сила $\mathbf{F}$ непотенциальна:

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \beta} \neq \frac{\partial Q_\beta}{\partial \alpha},$$

поэтому условие (3.1) приведенной в § 3 теоремы 3.1 к рассматриваемой системе не применимо. Во-вторых, если использовать традиционные условия статики (3.3), (3.4) (см. приведенную в § 3 теорему 3.3), то к неизвестным α и β добавятся еще четыре скалярных неизвестных, задающих реакции $\mathbf{R}_O$ и $\mathbf{R}_A$ в шарнирах, поэтому уравнений для определения положений равновесия потребуется шесть, а не два, как в случае применения теоремы 2.1.

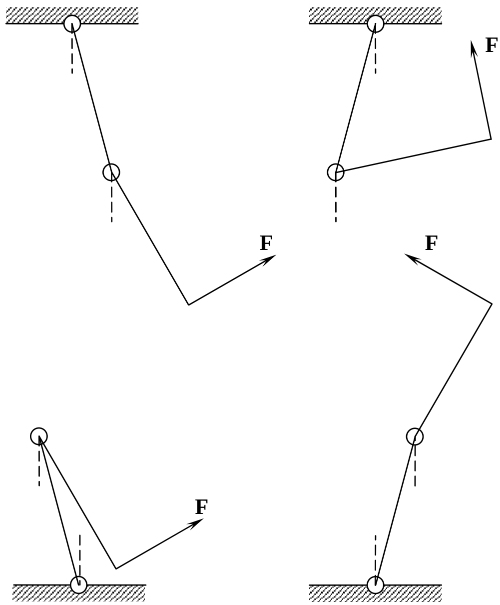

Рис. 2.2

§ 3. Потенциальный случай. Принцип возможных перемещений. Условия равновесия твердого тела

В этом параграфе формулируется несколько теорем — следствий из теоремы 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть все силы, действующие на механическую систему, потенциальны и определяются потенциальной энергией $\Pi(t,q)$. Тогда положение q^0 стационарно заданной системы является положением равновесия в том и только в том случае, если в этом положении выполняется*

$$\left.\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q_k}\right|_{q=q^0} = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{3.1}$$

т. е. в положении q^0 потенциальная энергия принимает стационарное значение.

□ Доказательство исчерпывается утверждением теоремы 2.1 и формулой

$$Q_k(t,q) = -\frac{\partial \Pi(t,q,)}{\partial q_k}, \quad k = \overline{1,n}. \blacksquare$$

Пример 3.1. В отличие от двойного маятника, рассмотренного в примере 2.1, в этом примере постоянная по величине сила $\mathbf{F}$, приложенная в точке B стержня AB, — горизонтальна (рис. 3.1).

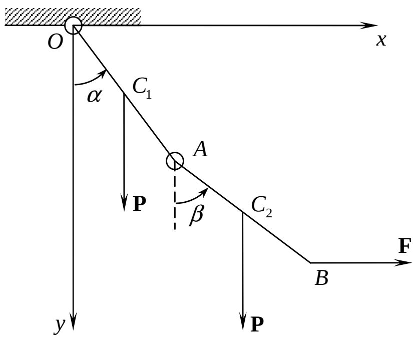

Рис. 3.1

Силам соответствуют потенциальная энергия

$$\Pi(\alpha,\beta) = -mg(y_{C_1} + y_{C_2}) - Fx_B =$$

$$= -mg\frac{l}{2}(3\cos\alpha + \cos\beta) - Fl(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Условие равновесия (3.1) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} &= mg\frac{l}{2}3\sin\alpha - Fl\cos\alpha = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} &= mg\frac{l}{2}\sin\beta - Fl\cos\beta = 0 \end{aligned}$$

или — к эквивалентной системе

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2F}{3mg}, \quad \mathrm{tg}\beta = \frac{2F}{mg},$$

решение которой определяет четыре положения равновесия

$$(\alpha_1 = \mathrm{arctg}\frac{2F}{3mg}, \beta_1 = \mathrm{arctg}\frac{2F}{mg}), \quad (\alpha_1, \pi + \beta_1),$$

$$(\pi + \alpha_1, \beta_1), \quad (\pi + \alpha_1, \pi + \beta_1).$$

На рис. 3.2 изображены четыре положения равновесия, соответствующие таким же, как в примере 2.1 параметрам $4F = mg$, для которых выполняется:

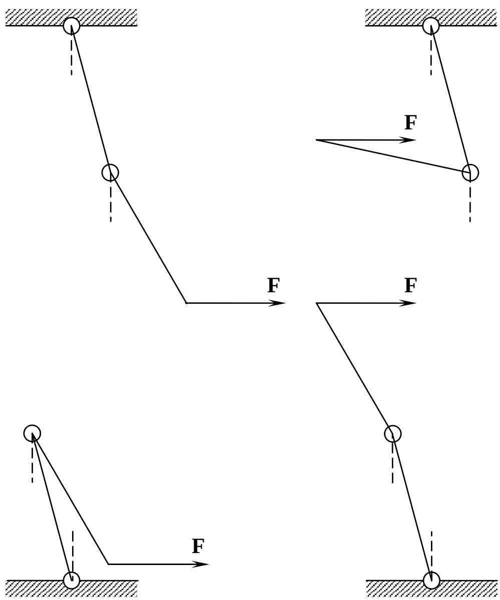

Рис. 3.2

В отличие от примера 2.1 в данном случае при любых значениях F, l, m, и g двойной маятник имеет четыре положения равновесия, качественно совпадающих с изображенными на рис. 3.2, в частности, всегда выполняется $\alpha_1 < \beta_1$.

Пример 3.2 Концы гибкой нерастяжимой, однородной нити длины l закреплены в вертикальной плоскости (рис. 3.3). Найти форму равновесия нити.

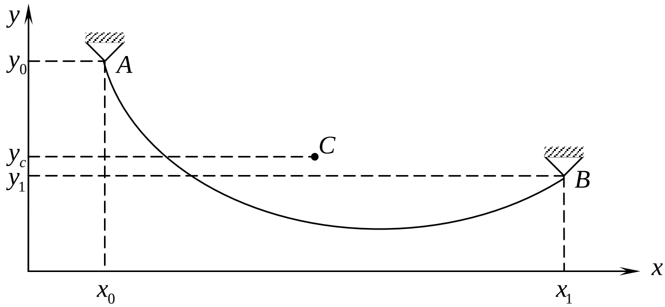

Рис. 3.3

Потенциальная энергия сил тяжести, действующих на нить, определяется высотой центра инерции нити

$$\varPi = mgy_C = g\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)dm = \rho g\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)ds.$$

Учет соотношения для дифференциала дуги ds

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx^2 = \left\{1 + (y')^2\right\}dx^2$$

приводит к функционалу

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

который каждой форме $y(x)$ нити ставит в соответствие значение потенциальной энергии $\varPi = \rho g I$. Допустимы только такие формы нити, которым соответствует заданная длина l, т. е. должно выполняться условие

$$I_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}dx = l.$$

Из вариационного исчисления известно, что, если кривая $y(x)$ при соблюдении условия $I_0 = l$ доставляет функционалу I стационарное значение, т. е. выполняется условие равновесия (3.1), то кривая $y(x)$ есть решение уравнения Эйлера (ср. с уравнениями Лагранжа (0.2))

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

где $f(y,y') = (y+\lambda)\sqrt{1+(y')^2}$ — подынтегральное выражение в функционале $I + \lambda I_0$, λ — множитель Лагранжа. Доказывается в общем виде (см. теорему 20.4), что следствием условия $\partial f/\partial x = 0$ является первый интеграл

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = C^2$$

уравнения Эйлера. Подстановка $f(y,y') = (y+\lambda)\sqrt{1+(y')^2}$ в первый интеграл и очевидные преобразования приводят к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y-\lambda)^2 - C^2}$$

с разделяющимися переменными и к его решению

$$y = C\operatorname{ch}\left(\frac{x}{C} + b\right) - \lambda.$$

Три постоянные λ, C, b вычисляются по заданным граничным условиям и длине l нити

$$y_0 = C\operatorname{ch}\left(\frac{x_0}{C} + b\right) - \lambda,$$

$$y_1 = C\operatorname{ch}\left(\frac{x_1}{C} + b\right) - \lambda,$$

$$I_0 = C\left\{\operatorname{sh}\left(\frac{x_1}{C} + b\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{x_o}{C} + b\right)\right\} = l.$$

Показывается, что при естественном предположении

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \le l^2,$$

постоянные λ, C, b находятся единственным образом.

Теорема 3.2 (принцип возможных перемещений). *Положение $\mathbf{r}_i^0$, $i = \overline{1,N}$ (q_k^0, $k = \overline{1,n}$) стационарно заданной системы является положением равновесия тогда и только тогда, когда на любом возможном перемещении $d\mathbf{r}_i$, $i = \overline{1,N}$ ($\forall dq_k$, $k = \overline{1,n}$) из положения $\mathbf{r}_i^0$ для элементарной работы δA действующих на систему сил $\mathbf{F}_i$ выполняется*

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i,d\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(t,q_0,0)dq_k = 0. \tag{3.2}$$

□ В силу независимости обобщенных координат у системы есть следующие перемещения из положения q^0:

$$dq_l \neq 0,\, dq_k = 0,\, k \neq l.$$

Следствием этого факта является эквивалентность соотношений (2.3) и (3.2). ■

Теорема 3.2 позволяет обосновать традиционные уравнения статики для равновесия твердого тела.

Теорема 3.3. *Твердое тело находится в положении равновесия тогда и только тогда, когда для главного вектора $\mathbf{R}$ и главного момента $\mathbf{M}_0$ действующих на тело сил $\mathbf{F}_i$ выполняется*

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i = 0, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\, \mathbf{F}_i] = 0, \tag{3.4}$$

где O — произвольная точка, а $\mathbf{r}_i$ — вектор, проведенный из точки O к точке приложения силы $\mathbf{F}_i$.

□ Входящее в условие равновесия (3.2) возможное перемещение $d\mathbf{r}_i$ для твердого тела представляется следующим образом

$$d\mathbf{r}_i = \mathbf{V}_i dt = (\mathbf{V}_0 + [\mathbf{\Omega},\, \mathbf{r}_i])dt,$$

где $\mathbf{V}_0$ — скорость точки O, $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость тела. С учетом этого представления условие равновесия (3.2) принимает вид (использована возможность в смешанном произведении циклически перемещать сомножители)

$$
\begin{aligned}
\delta A = \sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i,d\mathbf{r}_i) = \left\{\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i,\mathbf{V}_0) + \sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i,[\mathbf{\Omega},\mathbf{r}_i])\right\} dt = \\
= \left\{(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i,\mathbf{V}_0) + (\mathbf{\Omega},\sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\mathbf{F}_i])\right\} dt = \\
= \{(\mathbf{R},\mathbf{V}_0) + (\mathbf{\Omega},\mathbf{M}_0)\}dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Так как для твердого тела произвольность возможных перемещений $d\mathbf{r}_i$ принадлежащих телу точек эквивалентна произвольности векторов $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{\Omega}$, из условия равновесия (3.5) следуют требуемые равенства (3.3) и (3.4). ■

Г л а в а II. УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

§ 4. Устойчивость по Ляпунову. Функции Ляпунова

Система уравнений Лагранжа вследствие (0.3) разрешима относительно старших производных, вследствие чего представима в нормальном виде. В этой главе рассматриваются только автономные (стационарные) системы ($\partial\varphi(x)/\partial t = 0$):

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^m, \tag{4.1}$$

где переменные $x_1, \ldots, x_m$ — результат объединения обобщенных координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$. Далее многие определения и утверждения формулируются для системы (4.1) с ориентацией на очевидное с учетом $x = (q,\, \dot{q})$ переформулирование для уравнений Лагранжа. Введем обозначение для общего решения системы (4.1)

$$x(t) = f(t,x_0). \tag{4.2}$$

Для начального момента времени полагаем $t_0 = 0$, поэтому для (4.2) справедливо равенство

$$x(0) = f(0,x_0) = x_0. \tag{4.3}$$

Используемое далее групповое свойство общего решения (4.2) вводит

Теорема 4.1. *Общее решение $x(t) = f(t,x_0)$ автономной системы (4.1) при любых числах t, t_2, x_0 удовлетворяет равенству*

$$f(t,f(t_2,x_0)) = f(t + t_2,x_0). \tag{4.4}$$

□ Пусть в (4.4) t — независимая переменная, а t_2 — фиксированный параметр. Так как $f(t,x_0)$ — решение системы (4.1) при любых числах x_0, то левая часть равенства (4.4) также решение. Замена независимой переменной $\tilde{t} = t + t_2$ в системе (4.1) и в правой части равенства (4.4) приводит к системе с такой же правой частью, как и у (4.1) (система (4.1) — автономна!), и к выводу, что правая часть равенства (4.4) — решение системы (4.1). Вследствие (4.3) при

$t = 0$ функции в левой и правой частях равенства (4.4) совпадают, а два решения системы (4.1) с одинаковыми начальными данными должны совпадать при любом значении t. ■

Равенство (4.4) показывает, что семейство преобразований $f(t,x_0)$ пространства R^m является группой. Во–первых, суперпозиция двух преобразований с параметрами t и t_2 не выводит из семейства (см. (4.4)), во–вторых, семейство при $t = 0$ содержит тождественное преобразование (см. (4.3)), в третьих, для каждого преобразования с параметром t_2 найдется обратное с параметром $t = -t_2$ (см. (4.3) и (4.4)).

Предполагается, что для правой части системы (4.1) выполняется

$$\varphi(0) = 0, \tag{4.5}$$

т. е. $x(t) \equiv 0$ — решение системы (4.1).

Определение 4.1. *Нулевое решение $x(t) = 0$ системы (4.1) устойчиво по Ляпунову, если*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mid x_0 \mid = \mid x(0) \mid < \delta)(\forall t > 0) \mid x(t) \mid = \mid f(t,x_0) \mid < \varepsilon.$$

Другими словами, для устойчивого нулевого решения требованию, чтобы любое решение $x(t)$ не покинуло сколь угодно малую ε–окрестность положения $x = 0$, можно удовлетворить, ограничив ($\mid x(0) \mid < \delta$) начальные данные.

Определение 4.1 есть определение непрерывности вектор–функции $x(t) = f(t,x_0)$ в точке $x_0 = 0$ по переменным x_0 равномерно по переменной $t \geq 0$. При известном общем решении $f(t,x_0)$ исследование на непрерывность, а значит и на устойчивость, можно проводить, используя всю мощь аппарата математического анализа. Основной задачей теории устойчивости является следующая: вынести суждение о характере устойчивости нулевого решения, располагая информацией (иногда и неполной) только о правых частях системы (4.1).

Следствием определения 4.1 является

Определение 4.2. *Нулевое решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво по Ляпунову, если*

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists \mid x_0 \mid < \delta)(\exists t_1 > 0) \mid x(t_1) \mid = \mid f(t_1,x_0) \mid \geq \varepsilon.$$

В формулировках и доказательствах приведенных ниже теорем используются **функции Ляпунова** $V(x)$. Они определены в некоторой Δ–окрестности нулевого решения: $\mid x \mid < \Delta$; для $V(x)$ предполагается

$$V(0) = 0; \tag{4.6}$$

производная $\dot{V}(x)$ в силу системы (4.1) есть функция, вычисленная следующим образом

$$W(x) = \dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x).$$

Функция $V(x)$ называется **положительно определенной** (обозначается $V(x) > 0$), если выполняется

$$\{0 <\mid x \mid < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) > 0\}, \tag{4.7}$$

если же

$$\{0 <\mid x \mid < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) < 0\} \tag{4.8}$$

— **отрицательно определенной** (обозначается $V(x) < 0$). При выполнении одного из условий (4.7) или (4.8) функция $V(x)$ называется **знакоопределенной**. В ослабленном варианте —

$$\{0 <\mid x \mid < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) \geq 0\}$$

(**положительно постоянная функция**, обозначается $V(x) \geq 0$) или

$$\{0 <\mid x \mid < \Delta\} \Rightarrow \{V(x) \leq 0\}$$

(**отрицательно постоянная функция**, обозначается $V(x) \leq 0$) — функция $V(x)$ называется **знакопостоянной**. Если же функция $V(x)$ принимает в Δ–окрестности как положительные, так и отрицательные значения, она называется **знакопеременной**.

Например, в пространстве $R^2(x,y)$ в любой Δ–окрестности функция $V = x^2 + y^4$ — положительно определена; функция $V = x^2$ — положительно постоянна ($V = 0$ при $x = 0$, $y \neq 0$), функция $V = x^2 - y^4$ — знакопеременна.

§ 5. Теоремы Ляпунова и Четаева о характере устойчивости нулевого решения

Теорема 5.1 (А.М. Ляпунов). *Пусть в Δ–окрестности нулевого решения системы (4.1) существует положительно определенная функция Ляпунова*

$$V(x) \begin{cases} = 0, \, x = 0, \\ > 0, \, x \neq 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу системы (4.1) отрицательно постоянна

$$W(x) = \dot{V}(x) \leq 0. \tag{5.2}$$

Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

□ Рассмотрим в Δ–окрестности произвольную ε–окрестность (рис. 5.1). На границе Γ ε–окрестности ($\mid x \mid = \varepsilon \neq 0$), во–первых, вследствие (5.1) выполняется $V(x) > 0$, во–вторых, так как граница является замкнутым ограниченным множеством, то по теореме Вейерштрасса существует точка $x^* \in \Gamma$, на которой ограниченная снизу функция $V(x) \geq 0$ достигает минимума, т. е. справедливо

$$\{x \in \Gamma\} \Rightarrow \{V(x) \geq V(x^*) = V^* > 0\}. \tag{5.3}$$

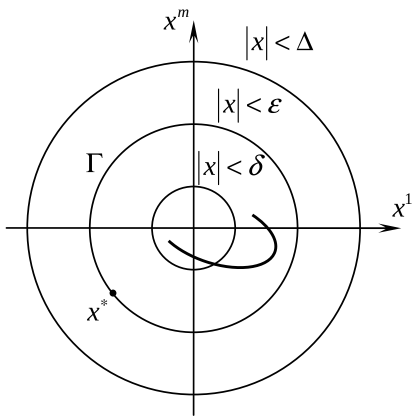

Рис. 5.1

Вследствие (4.6) и непрерывности функции $V(x)$ существует такая δ–окрестность, что выполняется

$$\{\mid x_0 \mid < \delta\} \Rightarrow \{V(x_0) < V^*\}. \tag{5.4}$$

Изучим поведение функции $V(f(t,x_0))$ на решении, соответствующем произвольной начальной точке x_0, принадлежащей δ–окрестности. Из неравенства (5.2) следует $\dot V(f(t,x_0)) = W(f(t,x_0)) \le 0$, т. е. при $t > 0$ с учетом (14.3) и (5.4) выполняется

$$V(f(t,x_0)) \le V(f(0,x_0)) = V(x_0) < V^*. \tag{5.5}$$

Предположение о том, что траектория $f(t,x_0)$ покинет ε–окрестность, т. е. в некоторый момент времени $t_1 > 0$ выполнится $x_1 = f(t_1,x_0) \in \Gamma$, приводит к противоречию. Действительно, с одной стороны, из (5.3) следует $V(x_1) \ge V(x^*)$, с другой стороны, из (5.5) следует $V(x_1) < V^*$. Таким образом, удовлетворены все требования определения 4.1 устойчивости по Ляпунову: для сколь угодно малой ε–окрестности строится такая δ–окрестность, что любое решение с начальными данными из δ–окрестности не покидает ε–окрестность. ■

Теорема 5.2 (Н.Г. Четаев). *Пусть в ε–окрестности фазового пространства существует область* M *(∂M — граница* M*), в которой при некотором числе k для функции $V(x)$ выполняется:*

1. $0 < V(x) \le k$;

2. $W(x) = \dot V(x) > 0$;

3. $\{V(x) \ge V_0\} \Rightarrow \{\exists l > 0, W(x) \ge l > 0\}$;

4. $\{x = 0\} \in \partial M$;

5. $\{x \in \partial M,\ \mid x \mid < \varepsilon\} \Rightarrow \{V(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

□ В силу 4

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in M) V(x_0) > 0. \tag{5.6}$$

Предположим, что решение с начальными данными $x(0) = x_0$ не покидает множества M: $x(t) = f(t,x_0) \in M$. Вследствие 2 выполняется

$$V(x(t)) \ge V(x_0) = V_0 > 0, \tag{5.7}$$

а в силу 3

$$W(x(t)) = \dot V(x(t)) \ge l > 0.$$

С учетом 1 приходим к выводу, что пока решение $x(t)$ остается в области M должно выполняться

$$k \ge V(x(t)) = V_0 + \int_0^t \dot V(x(t))dt \ge V_0 + lt,$$

т. е. в некоторый момент $t_1 \leq (k - V_0)/l$ решение $x(t)$ покидает область M. Но так как вследствии 5 с учетом (5.7) уход не может состояться через часть границы $\{\partial M, \ \mid x \mid < \varepsilon\}$, то решение покидает ε–окрестность. ■

Следующие две теоремы следуют из теоремы 5.2, но доказаны были значительно ранее.

Теорема 5.3 (А.М. Ляпунов). *Пусть в ε–окрестности для производной в силу системы (4.1) от некоторой функции $V(x)$ справедливо*

$$2'.\ W(x) = \dot{V}(x) \begin{cases} = 0, x = 0, \\ > 0, x \neq 0, \end{cases}$$

и в ε–окрестности существует область M, в которой выполняется (сохранена нумерация условий теоремы 5.2):

1. $0 < V(x) \leq k$;

4. $\{x = 0\} \in \partial M$;

5. $\{x \in \partial M, \ \mid x \mid < \varepsilon\} \Rightarrow \{V(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

□ Требуется обосновать недостающие условия 2 и 3 теоремы 5.2. Условие $2'$ выполняется всюду в ε–окрестности, т. е. условие 2 теоремы 5.2 выполнено. Вследствие 4 справедливо (5.6), а для решения с начальными данными $x(0) = 0$ в силу $2'$ выполняется (5.7). Для непрерывной функции $V(x)$ вследствии $V(0) = 0$ существует такая δ_1–окрестность, что выполняется $\{\mid x \mid < \delta_1\} \Rightarrow \{V(x) \leq V_0\}$, что в сравнении с (5.7) приводит к выводу: пока решение $x(t)$ не покинуло ε–окрестность для него выполняется условие

$$\delta_1 \leq \mid x \mid < \varepsilon,$$

из которого с учетом $2'$ следует условие 3 теоремы 5.2. Все условия теоремы 5.2 выполнены. ■

Теорема 5.4 (А.М. Ляпунов). *Если в теореме 5.3 сохранить условия 1, 4 и 5., а условие $2'$ заменить условием*

$2''.\ W(x) = \dot{V}(x) = cV(x) + U(x),$

где $c > 0$, $U(x) \geq 0$, то решение $x(t) = 0$ системы (4.1) неустойчиво.

$\square$ Из $2''$ следует неравенство $W(x) = \dot{V}(x) \geq cV(x)$, которое влечет выполнение в области M $(V(x) > 0)$ условий 2 и 3 теоремы 5.2. $\blacksquare$

§ 6. Устойчивость перманентных вращений свободного твердого тела

Как было сказано в начале главы II, уравнения Лагранжа есть частный случай систем дифференциальных уравнений, представимых в виде (4.1). Применим теорему 5.1 к системе, к которой явно уравнения Лагранжа не сводятся (хотя бы из–за нечетности порядка).

Пример 6.1. Динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

определяющие движение твердого тела с неподвижной точкой при отсутствии моментов внешних сил — замкнутая система для определения проекций p, q, r угловой скорости на главные оси инерции, A, B, C — моменты инерции тела относительно главных осей инерции. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, система (6.1) имеет два первых интеграла (энергии и момента импульса)

$$\begin{aligned} 2T &= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \\ K_0^2 &= A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

У системы (6.1) есть решение

$$p = \omega, \ \ q = 0, \ \ r = 0,$$

соответствующее вращению тела вокруг первой главной оси с постоянной угловой скоростью ω (перманентное вращение). Сдвиг переменных $p = x + \omega$, $q = y$, $r = z$ приводит к тому, что в новых переменных перманентному вращению соответствует нулевое решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Первые интегралы (6.2) в переменных x, y, z принимают вид

$$\begin{aligned} U_1 &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A\omega x, \\ U_2 &= A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + 2A^2\omega x \end{aligned} \tag{6.3}$$

— отброшены постоянные $A\omega^2$ и $A^2\omega^2$. Стандартный прием в теории функций Ляпунова — сформировать из первых интегралов положительно определенную в некоторой Δ–окрестности функцию $V = f(U_1,U_2)$, для которой второе условие (5.2) теоремы 5.1 выполняется автоматически: $\dot{V} \equiv 0$. Естественной попыткой является следующая:

$$V(x,y,z) = U_1^2 + U_2^2. \tag{6.4}$$

Знакопостоянство ($V \geq 0$) — очевидно, остается обосновать требование

$$\{V = 0\} \Rightarrow \{x = 0,\, y = 0,\, z = 0\},$$

приводящее с учетом $W = \dot{V} \equiv 0$ к выполнению обоих условий (5.1), (5.2) теоремы 5.1. Из $V = 0$ следует (см. (6.4)) $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, что влечет равенство (см. (6.3))

$$AU_1 - U_2 = B(A-B)y^2 + C(A-C)z^2 = 0,$$

которое при выполнении одного из условий

$$A > B \geq C, \quad A < B \leq C \tag{6.5}$$

(вращение происходит вокруг минимальной или максимальной оси эллипсоида инерции) эквивалентно равенствам $y = 0$, $z = 0$, а с учетом $U_1 = 0$ — дополнительному равенству (см. (6.3))

$$U_1 = Ax(x + 2\omega) = 0,$$

приводящему при $\mid x \mid < 2\omega$ к равенству $x = 0$.

Окончательно: при выполнении одного из условий (6.5) функция (6.4) является положительно определенной в 2ω–окрестности ($x^2 + y^2 + z^2 < 4\omega^2$), оба условия (5.1) и (5.2) теоремы 5.1 выполнены, т. е. перманентное вращение вокруг одной из экстремальных осей эллипсоида инерции устойчиво.

Следует заметить, что уравнения Эйлера (6.1) и вывод об устойчивости справедливы для абсолютно твердого и абсолютно свободного тела. Уже на заре космической эры было замечено, что стабилизация при помощи перманентных вращений требует осторожного подхода. Так, запущенный в 1958 году спутник «Эксплорер–1» , стабилизированный вращением вокруг оси с наименьшим моментом инерции, «кувыркнулся» . Виновником этого явления считаются изгибные колебания поперечных антен (спутник — не твердое тело), сопровождавшиеся диссипацией энергии. Теоретические исследования «эффекта кувыркания» привели к правилу «большой оси» , согласно которому при стабилизации вращением спутник должен вращаться относительно оси, соответствущей максимальному моменту инерции[1].

Покажем, что перманентное вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции неустойчиво. Для определенности предположим, что вращение происходит с угловой скоростью $\omega > 0$. В ε–окрестности ($\varepsilon = \omega$) в качестве используемой в теоремах 5.2 — 5.4 области M рассмотрим

$$M = \{x^2 + y^2 + z^2 < \omega^2, \, y > 0, \, z > 0\}.$$

Для функции $V = yz$ выполнены условия 1, 4, 5 теоремы 5.2. Вычисления на основе (6.1) приводят к результату

$$W = \dot{V} = (x + \omega)\left(\frac{C - A}{B} z^2 + \frac{A - B}{C} y^2\right),$$

из которого следует, что при выполнении одного из условий

$$C > A \geq B, \qquad C \geq A > B$$

выполняются оставшиеся условия 2 и 3 теоремы 5.2, следовательно вращение неустойчиво, т. е. существуют такие сколь угодно малые начальные данные, что соответствующее решение покинет за конечное время ω–окрестность.

§ 7. Условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Динамику консервативной системы полностью характеризуют кинетическая

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k \begin{cases} = 0, \, |\dot{q}| = 0, \\ > 0, \, |\dot{q}| \neq 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

[1]см. с.158-159: Докучаев Л.В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата. М.: ВИНИТИ, 1982 (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика:Т.5)

и потенциальная $\Pi(q)$ энергии. Изучается устойчивость конкретного положения равновесия q^0, для которого предполагается

$$q^0 = 0. \tag{7.2}$$

Разложение потенциальной энергии в окрестности $q^0 = 0$

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right|_{q^0=0} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right|_{q^0=0} q_i q_k + \cdots$$

начинается с слагаемых не менее, чем второго порядка

$$\Pi(q) = \Pi_2(q) + \Pi_3(q) + \cdots \tag{7.3}$$

($\Pi_k(q)$ — форма порядка k). Действительно, во–первых, предположение

$$\Pi(0) = 0 \tag{7.4}$$

не искажает информацию о системе, во-вторых, по теореме 3.1 в положении равновесия выполняется $\partial \Pi(0)/\partial q_i = 0$, что приводит к результату $\Pi_1(q) = 0$.

Как отмечалось в § 4, все определения и утверждения, сделанные для системы (4.1) в нормальной форме в координатах x, отождествлением $x = (q,\dot q)$ переносятся на лагранжевы системы. Например, определение 4.1 устойчивости переформулируется в лагранжевых переменных следующим образом.

Определение 7.1. *Положение равновесия $q^0 = 0$ называется устойчивым по Ляпунову, если выполняется*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mid q^0 \mid < \delta)(\forall \mid \dot q^0 \mid < \delta)(\forall t > 0) \mid q(t) \mid < \varepsilon, \mid \dot q(t) \mid < \varepsilon.$$

Аналогично переформулируется определение 4.2 неустойчивости.

Отметим, что положению равновесия для механической системы соответствует с учетом (7.2) начало координат в фазовом пространстве $R^{2n}(q,\dot q)$ под ε–окрестностью подразумевается в зависимости от контекста окрестность начала координат в фазовом или координатном пространстве.

Для консервативной системы ставится

Задача Лагранжа. Исходя из свойств потенциальной энергии $\varPi(q)$, сделать вывод о характере устойчивости положения равновесия консервативной системы.

Любой результат в рамках задачи Лагранжа носит следующий характер: если функция $\varPi(q)$ обладает определенными свойствами, то положение равновесия устойчиво (неустойчиво) при любой кинетической энергии, удовлетворяющей свойству (7.1).

Теорема 7.1 (Ж. Лагранж, Л. Дирихле). *Пусть в некоторой Δ–окрестности координатного пространства $R^n(q)$ потенциальная энергия $\varPi(q)$ имеет в положении (7.2) строгий минимум, т. е. с учетом (7.4) при $|q| < \Delta$ выполняется*

$$\varPi(q) \begin{cases} = 0, \ |q| = 0, \\ > 0, \ |q| \neq 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

Тогда $q^0 = 0$ — устойчивое по Ляпунову положение равновесия.

□ Из (7.5) следует $\partial \varPi(0)/\partial q_i = 0$, т. е. по теореме 3.1 $q^0 = 0$ — положение равновесия. Доказательство его устойчивости следует из теоремы 5.1, если в качестве функции Ляпунова V принять полную энергию $V = E = T + \varPi$. Требование (5.1) теоремы 5.1 выполнено вследствии условий (7.1) и (7.5):

$$V = E = T + \varPi = \begin{cases} = 0, \ |q| + |\dot{q}| = 0, \\ > 0, \ |q| + |\dot{q}| \neq 0; \end{cases}$$

а требование (5.2) — вследствие закона сохранения $W = \dot{V} = \dot{E} = 0$. ■

Условие (7.5) — достаточное условие устойчивости. Как показывает следующий (несколько экзотичный) пример, из факта устойчивости не следует (7.5) — строгий минимум потенциальной энергии.

Пример 7.1. Точка массы m находится в гладком «многоямном ущелье», определенном $(2n-1)$ раз непрерывно дифференцируемой функцией $y = x^{2n} \sin^2(1/x^2)$, y — вертикаль, x — горизонталь (рис 7.1).

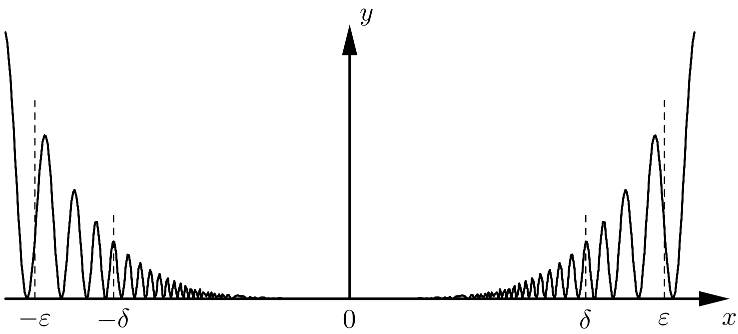

Рис. 7.1

Из постановки задачи видно, что для любой ε–окрестности, найдется такая «ямка» вблизи начала координат, что при соответствующем ограничении на скорость эту «ямку» точке не преодолеть, т. е. нулевое положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Потенциальная же энергия $\Pi(x) = mgx^{2n}\sin^2(1/x^2)$ в любой Δ–окрестности дополнительно к $x_0 = 0$ обращается в нуль при $x_1 = 1/\sqrt{\pi n}$, где n — такое натуральное число, чтобы выполнялось $x_1 < \Delta$. Таким образом устойчивость есть, а требование (7.5) теоремы 7.1 нарушено.

Приведем без доказательства несколько достаточных условий неустойчивости положения равновесия. Как и ранее, предполагается, что в положении равновесия выполняются равенства (7.2) и (7.4). В формулировках используется вид (7.3) разложения $\Pi(q)$ в окрестности $q^0 = 0$.

Теорема 7.2 (А.М. Ляпунов). *Пусть в некотором положении q^1 системы выполняется*

$$\Pi_2(q^1) < 0, \tag{7.6}$$

где Π_2 — совокупность слагаемых в (7.3) второго порядка. Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво.

Условие (7.6) теоремы 7.2 допускает следующую эквивалентную формулировку: в положении равновесия у потенциальной энергии отсутствует минимум (в том числе и нестрогий), и этот факт обнаруживается по слагаемым второго порядка в разложении (7.3). Отсутствие минимума следует из (7.6): для квадратичной формы Π_2 справедливо $\Pi_2(aq^1) = a^2\Pi_2(q^1)$, поэтому в любой окрестности найдется положение aq^1, для которого выполняется $\Pi(aq^1) < 0$.

Теорема 7.3 (А.М. Ляпунов). *Пусть Π_m — совокупность слагаемых в разложении (7.3) наименьшей степени $m \geq 2$ и в Δ–окрестности выполняется*

$$\Pi_m(q) \begin{cases} = 0, \ |q| = 0, \\ < 0, \ |q| \neq 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво.

Эквивалентная формулировка условия (7.7): положение равновесия

$$q^0 = 0$$

— строгий максимум функции $\Pi(q)$, и этот факт обнаруживается по слагаемым наименьшей степени m в разложении (7.3).

Теорема 7.4 (Н.Г. Четаев). *Пусть потенциальная энергия $\Pi(q)$ является однородной функцией, и в положении q^1 системы выполняется*

$$\Pi(q^1) < 0,$$

(отсутствие минимума, включая нестрогий). Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво.

Как и в условиях теоремы 7.2, отсутствие минимума следует из однородности функции $\Pi(q)$: $\Pi(aq^1) = a^k \Pi(q^1)$.

Пример 7.2. Приведем несколько примеров потенциальных энергий $\Pi(q)$ и суждения об устойчивости положения равновесия $q^0 = 0$.

а) $\Pi(q) = q_1^2$, в одномерном случае устойчивость по теореме 7.1; в многомерном — теоремы 7.1 – 7.4 не работают.

б) $\Pi(q) = -q_1^2$, при любой размерности неустойчивость по теоремам 7.2, 7.4 и по теореме 7.3 — в одномерном.

в) $\Pi(q) = -q_1^4$, в одномерном случае неустойчивость по теоремам 7.3, 7.4; в многомерном — по теореме 7.4.

г) $\Pi(q) = -q_1^4 - q_2^6$, теоремы 7.1 – 7.4 не работают.

д) $\Pi(q) = q_1 q_2 q_3$, неустойчивость по теореме 7.4.

е) $\Pi(q) \equiv 0$, теоремы 7.1 – 7.4 не работают.

Тем, у кого пример 7.2 е) вызвал удивление, напоминаем правило игры в задаче Лагранжа. Любое утверждение подразумевает: «... при любой удовлетворяющей (7.1) кинетической энергии T» .

Пример 7.3. Кольцо массы m может двигаться по гладкой окружности радиуса R, окружность вращается вокруг вертикальной оси y с постоянной угловой скоростью ω. Найти положения относительного равновесия кольца и исследовать их на устойчивость (рис. 7.2).

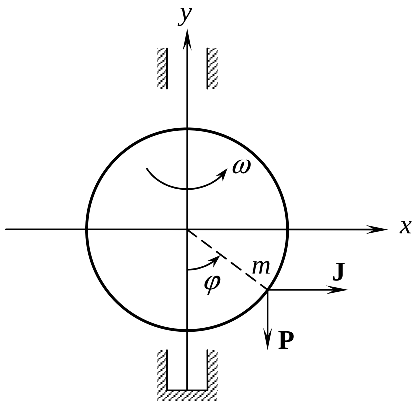

Рис. 7.2

Силе тяжести $\mathbf{P}(0,-mg)$ и силе инерции $\mathbf{J}(m\omega^2 x,0)$ соответствует потенциальная энергия

$$\Pi = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = mgR(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\varphi$$

(φ — обобщенная координата). По теореме 3.1 в положении равновесия должно выполняться

$$\Pi'(\varphi) = mR(g - \omega^2 R\cos\varphi)\sin\varphi = 0,$$

что приводит к условиям для положения равновесия

$$\sin\varphi = 0, \qquad \cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Характер экстремума определяется второй производной

$$\Pi''(\varphi) = mR(g\cos\varphi - 2\omega^2 R\cos^2\varphi + \omega^2 R).$$

Ответ зависит от параметров задачи.

- $\underline{g > \omega^2 R.}$ Положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = \pi.$$

Вследствие

$$\begin{aligned} \Pi''(0) &= \quad mR(g - \omega^2 R) > 0, \\ \Pi''(\pi) &= -mR(g - \omega^2 R) < 0 \end{aligned}$$

$\varphi_1 = 0$ — устойчивое по теореме 7.1 положение равновесия, $\varphi_2 = \pi$ — неустойчивое по теоремам 7.2, 7.3 положение равновесия.

- $\underline{g < \omega^2 R.}$ Положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = \pi, \qquad \varphi_{3,4} = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Вследствие

$$\begin{aligned} \Pi''(0) &= \quad mR(g - \omega^2 R) < 0, \\ \Pi''(\pi) &= -mR(g + \omega^2 R) < 0, \\ \Pi''(\varphi_{3,4}) &= \quad m\frac{(\omega^2 R - g)(\omega^2 R + g)}{\omega^2} > 0 \end{aligned}$$

$\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ — неустойчивые по теоремам 7.2, 7.3 положения равновесия, $\varphi_{3,4}$ — устойчивые по теореме 7.1 положения равновесия.

- $\underline{g = \omega^2 R.}$ Положения равновесия:

$$\varphi_{1,3,4} = 0, \qquad \varphi_2 = \pi.$$

Вследствие (учтено $\omega^2 R = g$)

$$\Pi(\varphi) = mgR\frac{[(1 - \cos\varphi)^2 - 2]}{2}, \quad \Pi''(\pi) = -2mgR < 0$$

$\varphi_{1,3,4}$ — устойчивое по теореме 7.1 положение равновесия (при $\varphi \neq 2k\pi$ выполняется $\Pi(\varphi) > \Pi(0)$), $\varphi_2 = \pi$ — неустойчивое по теоремам 7.2, 7.3 положение равновесия.

Глава III. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

§ 8. Постановка задачи о малых колебаниях

Теория малых колебаний изучает движение консервативной системы в окрестности устойчивого положения равновесия, причем это движение должно определяться линейными уравнениями Лагранжа. Линейность уравнений обеспечивается отсутствием в разложениях по q, $\dot{q}$ кинетической T и потенциальной Π энергий членов более высокого, чем второй, порядка. Как и в § 7, предполагаем, что устойчивому положению равновесия q^0 соответствует начало координат фазового пространства: $q_i^0 = 0$, $\dot{q}_i^0 = 0$, считаем также $\Pi(0) = 0$. Разложения T и Π в окрестности $q_i^0 = 0$, $\dot{q}_i^0 = 0$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}(0)\dot{q}_i\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l=1}^{n} \left.\frac{\partial \tilde{a}_{ik}}{\partial q_l}\right|_{q=0} q_l\dot{q}_i\dot{q}_k + \cdots = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k + \cdots ,
\end{aligned}
$$

где обозначено $a_{ik} = \tilde{a}_{ik}(0)$;

$$
\begin{aligned}
\Pi(q) &= \Pi(0) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right|_{q=0} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right|_{q=0} q_i q_k + \cdots = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k + \cdots ,
\end{aligned}
$$

где обозначено

$$
c_{ik} = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right|_{q=0} = \mathrm{const},
$$

$\Pi(0) = 0$ по предположению, $\partial\Pi(0)/\partial q_i = 0$ по теореме 3.1. Для применения линейной теории малых колебаний в разложениях T и Π

требуется оставить только члены второго порядка — квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{8.1}$$

$$\varPi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \tag{8.2}$$

с числовыми матрицами

$$A = \|a_{ik}\|, \tag{8.3}$$

$$C = \|c_{ik}\|. \tag{8.4}$$

В результате отбрасывания членов высокого порядка механическая система может утратить свои существенные свойства. Во избежание этого накладывается дополнительное

Условие 8.1. Квадратичные формы (8.1) и (8.2) положительно определены, т. е.

$$T > 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 \neq 0, \tag{8.5}$$

$$\varPi > 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i^2 \neq 0. \tag{8.6}$$

Первое условие ($T > 0$) есть следствие свойств квадратичной формы относительно обобщенных скоростей в кинетической энергии. Второе условие ($\varPi > 0$) необходимо во избежание нарушения исходного предположения об устойчивости положения равновесия.

Пример 8.1. Для консервативной системы с энергиями

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \\ \varPi &= \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^4), \end{aligned}$$

по теореме 7.1 положение равновесия $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ устойчиво. Если оставить в $\varPi(q)$ только члены второго порядка, факт устойчивости теряется: общее решение уравнений Лагранжа в этом случае приобретет вид

$$
\begin{aligned}
q_1 &= C\sin(t+\alpha),\\
q_2 &= At+B.
\end{aligned}
$$

§ 9. Решение задачи о малых колебаниях

Для формирования алгоритма нахождения общего решения задачи малых колебаний составим, исходя из функций (8.1), (8.2), уравнения Лагранжа

$$
\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{9.1}
$$

С использованием обозначений (8.3), (8.4) и

$$
q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} \tag{9.2}
$$

систему (9.1) можно записать в виде

$$
A\ddot{q} + Cq = 0.
$$

Поставим следующий вопрос: при каких числах $u_1, u_2, \dots, u_n$, ω, α система (9.1) имеет нетривиальное $q(t) \not\equiv 0$ решение

$$
q_k = u_k \sin(\omega t+\alpha) \tag{9.3}
$$

или в другом виде

$$
\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\sin(\omega t+\alpha).
$$

Используя обозначения (9.2) и

$$
u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},
$$

(9.3) можно также записать:

$$q = u\sin(\omega t + \alpha).$$

Подстановка (9.3) в систему (9.1) приводит к уравнениям

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(c_{ik} - \omega^2 a_{ik})u_k\right]\sin(\omega t + \alpha) = 0, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Сократим на $\sin(\omega t + \alpha)$, что возможно вследствие предположения о нетривиальности решения (9.3), и обозначим

$$\rho = \omega^2. \tag{9.5}$$

Получим относительно u_k линейную однородную алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{ik} - \rho a_{ik})u_k = 0, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{9.6}$$

или с учетом обозначений (8.3), (8.4), (9.4) —

$$(C - \rho A)u = 0.$$

Из предположения о нетривиальности решения (9.3) следует $u \neq 0$, а это возможно только при условии

$$\det\|c_{ik} - \rho a_{ik}\| = \det(C - \rho A) = 0. \tag{9.7}$$

Раскрытие определителя приводит к алгебраическому уравнению степени n

$$a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + \dots + a_{n-1}\rho + a_n = 0. \tag{9.8}$$

Уравнение (9.7) и оно же (9.8) в раскрытом виде называется **уравнением частот** или **вековым уравнением.** Не следует путать уравнение частот (9.8) с характеристическим уравнением: уравнение (9.8) появляется как следствие поиска решения в виде (9.3), а характеристическое — при поиске решения в виде $q_k = v_k e^{\lambda t}$. Уравнение (9.8) переходит в характеристическое при $\rho = -\lambda^2$.

В настоящем параграфе потребуются три утверждения а), б) и в), которые будут доказаны в § 10.

а) Все корни ρ_l уравнения частот (9.8) удовлетворяют условию

$$\rho_l > 0.$$

Утверждение а) позволяет дать ответ на поставленный вопрос: каждому корню ρ_l уравнения частот (9.8) соответствует решение (9.3) уравнений Лагранжа (9.2):

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} \sin(\omega_l t + \alpha_l), \tag{9.9}$$

где частота ω_l связана с корнем ρ_l формулой (9.5), числа $u_{1l}, \ldots, u_{nl}$ находятся как некоторое нетривиальное решение системы (9.6), в которую подставлен корень ρ_l, число α_l — произвольно.

Определение 9.1. Движение системы, соответствующее решению (9.9), называется **главным колебанием**, числа ω_l — **собственными частотами**, векторы $(u_{1l}, \ldots, u_{nl})$ в (9.9) — **собственными амплитудными векторами** , α_l — **фазой**.

Понятие главного колебания имеет ясный физический смысл: все координаты $q_k(t)$ изменяются во времени t по гармоническому закону с одинаковыми частотой ω_l и фазой α_l. Физический смысл часто позволяет найти главные колебания без вычислений.

Пример 9.1. У системы

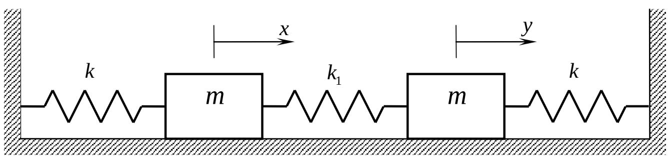

Рис. 9.1

очевидны два главных колебания: с «отключенной» средней пружиной

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha_1\right)$$

и с неподвижным центром у средней пружины

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}t + \alpha_2\right).$$

Главные колебания (9.9) дают возможность построить общее решение — совокупность всех движений системы. Линейная однородная система дифференциальных уравнений (9.1) обладает следующим свойством: линейная комбинация решений с постоянными коэффициентами является также решением, т. е. по главным колебаниям (9.9) можно построить решение

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} C_l \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} \sin(\omega_l t + \alpha_l), \tag{9.10}$$

содержащее $2n$ произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Так построенное решение является общим. Чтобы убедиться в этом, докажем, что при некотором выборе постоянных C_l, α_l могут быть удовлетворены любые начальные условия q_k^0, $\dot{q}_k^0$. Для доказательства, во-первых, сформулируем утверждения б) и в) (обоснование в § 10).

б) Двум разным корням $\rho_l \neq \rho_k$ уравнения частот (9.8) соответствуют линейно независимые амплитудные векторы — решения системы (9.6).

в) Пусть корень ρ_l уравнения частот m–кратен. Тогда из системы (9.6), в которую подставлен корень ρ_l, можно найти m линейно независимых амплитудных векторов и составить m независимых главных колебаний.

В частности, при $k_1 = 0$ система в примере 9.1 имеет 2–кратный корень $\rho = k/m$ и два приведенные в примере главных колебания с независимыми амплитудами.

Во-вторых, перепишем (9.10) в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} (F_l \cos\omega_l t + G_l \frac{1}{\omega_l} \sin\omega_l t). \tag{9.11}$$

Произвольные постоянные в (9.10) и (9.11) связаны соотношениями

$$F_l = C_l \sin\alpha_l, \qquad G_l = \omega_l C_l \cos\alpha_l.$$

Утверждения б), в) дают возможность считать, что выполняется

$$\det U \neq 0, \tag{9.12}$$

где обозначено

$$U = \left\| \begin{array}{ccc} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{array} \right\| \tag{9.13}$$

— матрица, составленная из амплитудных векторов. Подстановка в (9.11) начальных условий $t_0 = 0$, $q = q^0$, $\dot{q} = \dot{q}^0$ приводит к уравнениям для постоянных F_l, G_l

$$\begin{pmatrix} q_1^0 \\ \vdots \\ q_n^0 \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} F_l, \qquad \begin{pmatrix} \dot{q}_1^0 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^0 \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \begin{pmatrix} u_{1l} \\ \vdots \\ u_{nl} \end{pmatrix} G_l.$$

Вследствие (9.12), с учетом обозначений (9.2), (9.13) и

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$$

получим

$$F = U^{-1} q^0, \quad G = U^{-1} \dot{q}^0,$$

т. е. в совокупности решений (9.11) содержится движение при любых начальных данных: (9.10) и (9.11) есть общие решения уравнений Лагранжа.

В заключение параграфа сформулируем алгоритм решения задачи нахождения малых колебаний консервативной системы.

1. Убедиться, что q_0 — устойчивое положение равновесия.

2. Заменой переменных добиться, чтобы выполнялось $q_0 = 0$.

3. Разложить кинетическую T и потенциальную $\varPi$ энергии в окрестности значений $q = 0$, $\dot{q} = 0$, оставить только квадратичные члены. Извлечь матрицы квадратичных форм: A (для T) , C (для $\varPi$).

4. Убедиться, что A и C — матрицы положительно определенных квадратичных форм.

5. Составить уравнение частот
$$\det(C - \rho A) = 0,$$
найти его корни $\rho_1, \dots, \rho_n$.

6. Для каждого корня ρ_l из уравнения
$$(C - \rho_l A)u_l = 0$$
вычислить амплитудный вектор u_l. Для m–кратного корня найти m линейно независимых амплитудных векторов.

7. Каждая пара ρ_l, u_l порождает главное колебание ($\omega_l = \sqrt{\rho_l}$, см. (9.5))
$$q = u_l \sin(\omega_l t + \alpha_l).$$

8. Общее решение есть линейная комбинация главных колебаний
$$q = \sum_{l=1}^{n} C_l u_l \sin(\omega_l t + \alpha_l) = \sum_{l=1}^{n} u_l (F_l \cos \omega_l t + G_l \frac{1}{\omega_l} \sin \omega_l t)$$
в двух эквивалентных формах.

9. Если требуется найти решение при конкретных начальных условиях q_0, $\dot{q}_0$, то по общему решению вычисляются произвольные постоянные F_l, G_l или C_l, α_l.

§ 10. Нормальные координаты

В предыдущем параграфе приведено решение задачи малых колебаний в произвольных обобщенных координатах. Решение теоретических вопросов часто бывает целесообразно проводить по следующей схеме: переход от исходных координат к наиболее удобным, решение задачи в новых координатах и возврат результата к исходным переменным. В случае задачи малых колебаний решение максимально упрощается в нормальных координатах.

Определение 10.1. Координаты $\theta_1, \dots, \theta_n$ называются **нормальными или главными**, если в них кинетическая T и потенциальная Π энергии имеют вид
$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dot{\theta}_k^2, \tag{10.1}$$

$$\varPi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k \theta_k^2. \tag{10.2}$$

Для перехода к нормальным координатам по матрицам A и C квадратичных форм T и $\varPi$ (см. (8.1) — (8.4)) составим квадратичные формы

$$F_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \tag{10.3}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k. \tag{10.4}$$

По условию обе формы положительно определены. Вследствие положительной определенности формы F_1 найдется такое неособенное линейное преобразование

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} y_k, \tag{10.5}$$

что в новых переменных y формы F_1, F_2 примут вид

$$F_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k y_k^2. \tag{10.6}$$

Вследствие положительной определенности формы F_2 выполняется

$$r_k > 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{10.7}$$

Действительно, в противном случае (есть коэффициент $r_l \leq 0$) при некотором выборе значений координат ($y_l \neq 0$, $y_k = 0$, $k \neq l$) для формы F_2 выполнялось бы $F_2 \leq 0$, что противоречит положительной определенности.

Положим в (10.3) и (10.5) $x_i = \dot{q}_i$, $y_k = \dot{\theta}_k$, тогда замена переменных (10.5) придаст кинетической энергии (8.1) вид (10.1). Аналогично — в результате переобозначений в (10.4) и (10.5) $x_i = q_i$, $y_k = \theta_k$, потенциальная энергия (8.2) примет вид (10.2). Таким образом, одновременный перевод двух квадратичных форм F_1, F_2 к виду (10.6) — это и есть неособенный переход от исходных переменных q к нормальным координатам θ :

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \theta_k, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10.8}$$

$$\det\|u_{ik}\| \neq 0. \tag{10.9}$$

Решим задачу малых колебаний в нормальных координатах. Составим в силу (10.1), (10.2) уравнения Лагранжа

$$\ddot{\theta}_k + r_k\theta_k = 0. \tag{10.10}$$

Решение с учетом (10.7) имеет вид

$$\theta_k = C_k \sin(\sqrt{r_k}t + \alpha_k).$$

Возврат при помощи (10.8) к исходным переменным q приводит в этих переменных к общему решению

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} C_k u_{ik} \sin(\sqrt{r_k}t + \alpha_k).$$

Сравним этот результат с общим решением

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} C_k u_{ik} \sin(\sqrt{\rho_k}t + \alpha_k),$$

полученным в § 9 другим способом (см. (9.10)). Сравнение позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, корни ρ_k уравнения частот и коэффициенты r_k в выражении (10.2) для потенциальной энергии в нормальных координатах суть одно и то же. Это влечет за собой обоснование приведенного в § 9 без доказательства свойства а): вследствие (10.7) корни уравнения частот удовлетворяют условию: $\rho_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Во-вторых, в качестве матрицы амплитудных векторов $\|u_{ik}\|$ может быть принята матрица перехода к нормальным координатам. А это обосновывает свойства б), в) из § 9: вследствие (10.9) вне зависимости от кратности корней уравнения частот найдется n линейно независимых амплитудных векторов — решений системы (9.6). Обратное, вообще говоря, не верно: не каждую совокупность из n линейно независимых амплитудных векторов можно взять в качестве матрицы перехода к нормальным координатам. Это связано с тем, что система (9.6) решается неоднозначно. Если подставить замену (10.5) в квадратичную форму (10.3) и сравнить с (10.6), получим условие

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{il} u_{kj} = \delta_{lj} = \begin{cases} 1, \, l = j, \\ 0, \, l \neq j, \end{cases}$$

которому должны удовлетворять два амплитудных вектора с номерами l и j для того, чтобы матрица, составленная из амплитудных векторов, приводила к нормальным координатам.

Подчеркнем еще раз мысль, высказанную в начале параграфа: переход к нормальным координатам — не способ решения задачи малых колебаний, а удобный путь исследования теоретических вопросов. В § 11 и § 12 изучены два таких вопроса.

§ 11. Реакция консервативной системы на периодическое воздействие

Предполагается, что в дополнение к потенциальным силам консервативная система испытывает гармоническое воздействие, которому соответствуют обобщенные силы

$$Q_i^* = a_i \sin \Omega t. \tag{11.1}$$

Для того, чтобы понять, каков будет отклик на воздействие, сделаем переход (10.8) к нормальным координатам. Обобщенные силы преобразуются так, чтобы сохранялась элементарная работа

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \delta q_i = \sum_{i,k=1}^{n} Q_i^* u_{ik} \delta\theta_k = \sum_{k=1}^{n} \Theta_k^* \delta\theta_k,$$

откуда следует, что закон преобразования обобщенных сил

$$\Theta_k^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* u_{ik} \tag{11.2}$$

контрвариантен по отношению к преобразованию (10.8) координат. В нормальных координатах уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = b_k \sin \Omega t, \tag{11.3}$$

где вследствие (11.1) и (11.2) выполняется

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{ik}.$$

Общее решение каждого уравнения (11.3) складывается из частного решения и общего решения однородного уравнения ($b_k = 0$). Частное решение отыскиваем в виде

$$\theta_k^* = E_k \sin \Omega t. \tag{11.4}$$

Подстановка (11.4) в (11.3) после сокращения на $\sin\Omega t$ приводит к выражению

$$E_k(\omega_k^2 - \Omega^2) = b_k. \tag{11.5}$$

Рассмотрим два случая.

1. $\Omega \neq \omega_k$. Из (11.5) находится E_k и строится общее решение

$$\theta_k = F_k \cos\omega_k t + G_k \frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t + \frac{b_k}{\omega_k^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \tag{11.6}$$

(общее решение однородного уравнения удобно взять в форме (9.11)). Выразим произвольные постоянные F_k, G_k через начальные условия: при $t = 0$, $\theta_k = \theta_k^0$, $\dot\theta_k = \dot\theta_k^0$ справедливо

$$F_k = \theta_k^0, \qquad G_k = \dot\theta_k^0 - \frac{b_k\Omega}{\omega_k^2 - \Omega^2}.$$

Общее решение (11.6) принимает вид

$$\theta_k = \theta_k^0\cos\omega_k t + \dot\theta_k^0\frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t + \frac{b_k}{\omega_k^2 - \Omega^2}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right),$$

в котором последнее выражение можно вместо (11.4) считать другим частным решением системы (11.3):

$$\theta_k^{**} = \frac{b_k}{\omega_k^2 - \Omega^2}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_k}\sin\omega_k t\right). \tag{11.7}$$

2. $\Omega = \omega_k$. В этом случае из (11.5) нельзя найти частное решение вида (11.4). Для нахождения частного решения вычислим по правилу Лопиталя результат предельного перехода $\Omega \to \omega_k$ в (11.7):

$$\lim_{\Omega\to\omega_k}\theta_k^{**} = -\frac{b_k}{2\omega_k}\left(t\cos\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t\right). \tag{11.8}$$

Подстановкой нетрудно убедиться, что полученное выражение действительно удовлетворяет (11.3). Таким образом, при $\Omega = \omega_k$ общее решение имеет вид

$$\theta_k = \theta_k^0\cos\omega_k t + \dot\theta_k^0\frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t - \frac{b_k}{2\omega_k}\left(t\cos\omega_k t - \frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t\right).$$

Последнее выражение неограниченно возрастает со временем и реализует явление резонанса. Заметим, что для возникновения резонанса недостаточно совпадения частоты Ω воздействия (11.1) с одной из собственных частот ω_k системы. Дополнительно требуется, чтобы в нормальных координатах в соответствующем уравнении Лагранжа (11.3) выполнялось $b_k \neq 0$.

Изучен случай гармонического воздействия (11.1) на консервативную систему. К этому случаю сводится произвольное периодическое воздействие $Q_i^*(t)$. Для этого требуется преобразовать силы к нормальным координатам (см. (11.2)), разложить Θ_k^* в ряды Фурье

$$\Theta_k^* = \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} \sin l\Omega t \tag{11.9}$$

и каждому слагаемому в сумме поставить в соответствие частное решение (11.7) или (11.8). Сумма частных решений определит реакцию системы $\theta_k^*(t)$ на периодическое воздействие в нормальных координатах, а после перехода (10.8) — в исходных. Ряд Фурье (11.9) соответствует нечетному периодическому воздействию ($Q_i^*(-t) = Q_i^*(t)$), общий случай рассматривается аналогично.

§ 12. Случай нулевого корня в уравнении частот

Процедура решения задачи малых колебаний, приведенная в конце § 9, за небольшими исключениями полностью проходит при ослаблении требований, предъявляемых к системе. А именно, квадратичную форму в кинетической энергии по-прежнему считаем положительно определенной, а потенциальную энергию предполагаем положительно постоянной: $\Pi(q) \geq 0$. Свойство кинетической энергии оставляет возможность перехода (10.8) к нормальным координатам, но вследствие ослабления свойства потенциальной энергии в выражении (10.2) вместо (10.7) выполняется

$$r_k > 0,\ \ k = \overline{1, m}, m < n, \qquad r_l = 0,\ \ l = \overline{m+1, n}.$$

Уравнения Лагранжа (10.10) примут вид

$$\ddot{\theta}_k + r_k \theta_k = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

$$\ddot{\theta}_k = 0, \quad l = \overline{m+1, n},$$

а общее решение — вид

$$\theta_k = C_k \sin(\sqrt{r_k}t + \alpha_k), \quad k = \overline{1, m},$$

$$\theta_l = F_l + tG_l, \quad l = \overline{m+1,n}.$$

Возврат (10.8) к исходным переменным даст общее решение

$$q_i = \sum_{k=1}^{m} C_k u_{ik} \sin(\sqrt{r_k}t + \alpha_k) + \sum_{l=m+1}^{n} u_{il}(F_l + tG_l).$$

Процедура, приведенная в конце § 9, справедлива в данном случае с единственным отличием: корню $r_l = \rho_l = \omega_l^2 = 0$ уравнения частот в общем решении соответствует «главное колебание»

$$q_i = u_{il}(F_l + tG_l), \quad i = \overline{1,n}.$$

Этот же результат можно было бы получить переходом в (9.11) к пределу $\omega_l \to 0$.

Глава IV. **АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ**

§ 13. Теоремы Барбашина–Красовского и Ляпунова

Как и в § 4, рассматривается автономная система

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^m, \quad \varphi(0) = 0 \tag{13.1}$$

с общим решением $x = f(t,x_0)$, $(x_0 = f(0,x_0))$, обладающая нулевым решением $x(t) \equiv 0$ (см. (4.1) — (4.5)).

Определение 13.1. Решение $x = 0$ системы 13.1 **асимптотически устойчиво по Ляпунову,** если выполнены два условия:

1. $x = 0$ — устойчивое по Ляпунову решение (см. определение 4.1);

2. существует такая Δ–окрестность, что для решений $f(t,x_0)$ справедливо

$$\{|x_0| < \Delta\} \Rightarrow \{\lim_{t\to\infty} f(t,x_0) = 0\}. \tag{13.2}$$

Δ–окрестность называется **областью притяжения**.

Теорема 13.1 (Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский). *Пусть существует такая функция $V(x)$, что для нее и системы (13.1) выполняется:*

1. *$V(x)$ — положительно определенная функция;*

2.
$$W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\varphi_i(x) \begin{cases} = 0, & x \in M, \\ < 0, & x \notin M, \end{cases} \tag{13.3}$$

где M — некоторое множество. Единственным решением, принадлежащим M при $t \in [0,\infty)$, является $x \equiv 0$:

$$\{\forall t \geq 0, W(x(t)) = W(f(t,x_0)) = 0\} \Rightarrow \{x(t) \equiv 0\}. \tag{13.4}$$

Тогда $x \equiv 0$ — асимптотически устойчивое по Ляпунову решение.
Если условие 1 заменить условием 1^*:
1^*. *$V(0) = 0$; $\forall\delta > 0$, $\exists|x_0| < \delta$, $V(x_0) < 0$, то решение x_0 — неустойчиво по Ляпунову.*

□ Докажем сначала, что условия 1, 2 теоремы влекут асимптотическую устойчивость. Решение $x \equiv 0$ устойчиво в силу теоремы 5.1. Фиксируем такое число $\varepsilon > 0$, что в ε–окрестности выполнено:

$$V(x) > 0, W(x) \leq 0.$$

Вследствие устойчивости справедливо:

$$\begin{gathered} \exists \Delta > 0, \forall |x_0| < \Delta, \forall t \geq 0, \forall t_1 \geq 0, \\ |x(t)| = |f(t,x_0)| = |f(t-t_1,x_1)| < \varepsilon, \end{gathered} \tag{13.5}$$

где обозначено: $x_1 = f(t_1,x_0)$; использовано групповое свойство (4.4):

$$f(t,x_0) = f(t-t_1+t_1,x_0) = f(t-t_1,f(t_1,x_0)) = f(t-t_1,x_1).$$

Покажем, что Δ-окрестность — область притяжения, т. е. требуется доказать (13.2) или подробнее

$$\forall |x_0| < \Delta, \forall \varepsilon_1 > 0, \exists t_1 > 0, \forall t \geq t_1, |f(t,x_0)| < \varepsilon_1. \tag{13.6}$$

В силу устойчивости выполняется

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta > 0, \forall |x_1| < \delta, \forall t \geq t_1, |f(t-t_1,x_1)| < \varepsilon_1 \tag{13.7}$$

(t_1, x_1 — начальные данные), поэтому доказательство (13.6) сводится к обоснованию утверждения

$$\forall |x_0| < \Delta, \forall \delta > 0, \exists t_1 \geq 0, |x_1| = |f(t_1,x_0)| < \delta. \tag{13.8}$$

Предположим противное

$$\exists |x_0| < \Delta, \exists \delta > 0, \forall t \geq 0, 0 < \delta < |f(t,x_0)| < \varepsilon \tag{13.9}$$

— учтено (13.5). Из ограниченной вследствие (13.9) последовательности $f(k\tau,x_0)$ ($\tau > 0$ — некоторое число, $k = 1,2,\ldots$) выделим сходящуюся подпоследовательность $f(k_i\tau,x_0)$, $k_1 < k_2 < \ldots :$

$$\lim_{i\to\infty} f(k_i\tau,x_0) = x^*, \quad 0 < \delta \leq |x^*| \leq \varepsilon. \tag{13.10}$$

Функция $V(f(t,x_0))$ при изменении t вследствие (13.3) невозрастает и ограничена снизу значением $V = 0$, поэтому при $t \to \infty$ существует предел

$$\begin{gathered} \lim_{t\to\infty} V(f(t,x_0)) = \lim_{i\to\infty} V(f(k_i\tau,x_0)) = \\ = V(\lim_{i\to\infty} f(k_i\tau,x_0)) = V(x^*). \end{gathered} \tag{13.11}$$

Рассмотрим решение $f(t,x^*)$. Вследствие условия 2 теоремы найдется такой момент времени $T > 0$, что в этот момент, а по непрерывности и на некотором интервале $[T - t^*,T]$, $0 < t^* < T$, выполняется

$$\dot{V}(f(t,x^*)) < 0,$$

т. е. справедливо

$$V(f(T,x^*)) < V(x^*).$$

Используем это неравенство, (13.10), групповое свойство (4.4), еще один вариант перехода к пределу в (13.11), — приходим к противоречию:

$$V(x^*) = \lim_{t\to\infty} V(f(t,x_0)) = \lim_{i\to\infty} V(f(T + k_i\tau,x_0)) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} V(f(T,f(k_i\tau,x_0)) = V(f(T,x^*)) < V(x^*),$$

доказывающему (13.8) и утверждение теоремы:

$\{$условия 1, 2 $\} \Rightarrow \{x_0$ — асимптотически устойчивое решение$\}$.

Неустойчивость решения $x \equiv 0$ как следствие условий 1^*, 2 теоремы доказывается от противного. Предположим устойчивость:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_1(\varepsilon) > 0,\ \forall|x_0| < \delta_1,\ \forall t \geq 0,\ |f(t,x_0)| < \varepsilon. \qquad (13.12)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такую начальную точку x_0, чтобы выполнялось (13.12) и вследствие условия 1^* теоремы: $V(x_0) = V_0 < 0$. В силу (13.3) для соответствующего решения имеем

$$V(f(t,x_0)) \leq V_0 < 0$$

или

$$\forall t \geq 0,\ |V(f(t,x_0))| \geq |V_0| > 0. \qquad (13.13)$$

Вследствие $V(0) = 0$ и непрерывности $V(x)$ можно выбрать такую δ – окрестность $(0 < \delta < |x_0|)$, чтобы выполнялось

$$\{|x| < \delta\} \Rightarrow \{|V(x)| < |V_0|\}. \qquad (13.14)$$

Сравнение (13.13) и (13.14) приводит к выводу, что для рассматриваемого решения справедливо

$$|f(t,x_0)| \geq \delta > 0,$$

т. е. в совокупности с (13.12) приходим к выражению

$$\exists x_0,\, \exists\delta > 0,\, \forall t \geq 0,\, 0 < \delta < |f(t,x_0)| < \varepsilon,$$

аналогичному (13.9), противоречие получается дословным повторением рассуждений, следующих за утверждением (13.9). ■

В следующем параграфе теорема 13.1 используется при изучении диссипативных систем. Частным случаем теоремы 13.1 (в (13.3) $\mathrm{M} = \{0\}$) является доказанная на полвека раньше

Теорема 13.2 (А.М. Ляпунов). *Пусть в Δ–окрестности нулевого решения системы (13.1) существует положительно определенная функция Ляпунова*

$$V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ > 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу системы (13.1) отрицательно определена

$$W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ < 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Тогда нулевое решение системы (13.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

§ 14. Устойчивость диссипативных систем

Полная энергия $E = T + \Pi$ у определенно–диссипативных систем удовлетворяет условию

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i \begin{cases} = 0, & \dot{q} = 0, \\ < 0, & \dot{q} \neq 0, \end{cases} \tag{14.1}$$

где Q_i^* — обобщенные силы, соответствующие непотенциальным. Как и ранее, при использовании для механических систем определений и результатов, относящихся к системе (13.1), предполагается отождествление переменных $x = (q,\dot{q})$.

Теорема 14.1. *Пусть $q^0 = 0$ есть изолированное положение равновесия стационарной определенно–диссипативной системы. Пусть потенциальная энергия имеет при $q_0 = 0$ строгий минимум. Тогда $q_0 = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.*

□ Как и в доказательстве теоремы 7.1 обосновывается, что функция $V = E = T + \varPi$ положительно определена, т. е. выполнено условие 1 теоремы 13.1. Выберем в фазовом пространстве $R^{2n}(q,\dot{q})$ такую ε–окрестность, что в ней выполнены условия теоремы: при $q \neq 0$ справедливо $\varPi(q) > 0$, и $q_0 = 0$ — единственное положение равновесия. Полная энергия $E = T + \varPi$ — положительно определенная функция переменных q, $\dot{q}$. Ее производная $\dot{E}$ по t равна нулю на множестве $M = \{|\dot{q}| = 0\}$ (см. (14.1)). Решения, принадлежащие M при $t \in [0,\infty)$, являются положениями равновесия, но единственным положением равновесия в ε–окрестности является $q_0 = 0$. Условия 1 и 2 теоремы 13.1 выполнены. ■

Пример 14.1. Электрической цепи, изображенной на рис. 14.1,

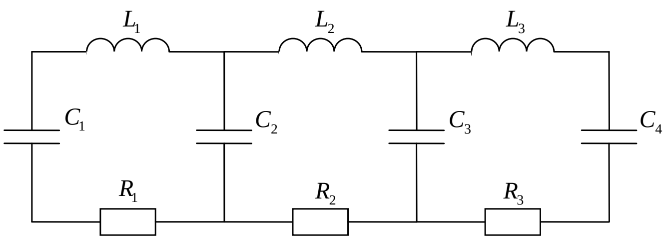

Рис. 14.1

соответствуют кинетическая энергия ($\dot{q}_i$ — сила тока по одному из трех контуров, составляющих цепь, $q_i = \int \dot{q}_i dt$ — количество электричества)

$$T = \frac{1}{2}(L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2 + L_3\dot{q}_3^2), \tag{14.2}$$

потенциальная —

$$\varPi = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{C_1}q_1^2 + \frac{1}{C_2}(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{C_3}(q_2 - q_3)^2 + \frac{1}{C_4}q_3^2\right\} \tag{14.3}$$

и функция Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}(R_1\dot{q}_1^2 + R_2\dot{q}_2^2 + R_3\dot{q}_3^2). \tag{14.4}$$

Изучим устойчивость состояния покоя цепи ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$) в двух случаях.

1. $\underline{R_1 \neq 0,\ R_2 \neq 0,\ R_3 \neq 0}$. Все три функции (14.2) — (14.4) положительно определены, вследствие чего: ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$) — единственное положение равновесия, и потенциальная энергия Π в этом положении имеет строгий минимум; для системы справедливо условие (14.1) определенной диссипативности ($\dot{E} = -2\Phi$). Выполнены все условия теоремы 14.1, поэтому положение покоя цепи — асимптотически устойчиво.

2. $\underline{R_1 = 0,\ R_2 \neq 0,\ R_3 = 0}$. В этом случае не выполнено условие (14.1) теоремы 14.1 ($\dot{E} = -2\Phi = -R_2\dot{q}_2^2 = 0$ при $\dot{q}_1 \neq 0$, $\dot{q}_2 = 0$, $\dot{q}_3 \neq 0$). Воспользуемся теоремами 7.1 и 13.1. Функция Ляпунова

$$V = E = T + \Pi > 0$$

положительно определена (см. (14.2), (14.3)), а ее производная в силу уравнений

$$W = \dot{V} = \dot{E} = -2\Phi = -R_2\dot{q}_2^2 \begin{cases} = 0, & (q,\dot{q}) \in M = \{\dot{q}_2 = 0\}, \\ < 0, & (q,\dot{q}) \notin M \end{cases} \tag{14.5}$$

— отрицательно постоянна, поэтому по теореме 7.1 положение покоя устойчиво по Ляпунову. Уравнения Лагранжа, соответствующие функциям (14.2) — (14.4), имеют вид

$$\begin{aligned} &L_1\ddot{q}_1 + \left(\tfrac{1}{C_1} + \tfrac{1}{C_2}\right) q_1 - \tfrac{1}{C_2} q_2 = 0, \\ &L_2\ddot{q}_2 + \left(\tfrac{1}{C_2} + \tfrac{1}{C_3}\right) q_2 - \tfrac{1}{C_2} q_1 - \tfrac{1}{C_3} q_3 + R_2\dot{q}_2 = 0, \\ &L_3\ddot{q}_3 + \left(\tfrac{1}{C_1} + \tfrac{1}{C_2}\right) q_3 - \tfrac{1}{C_3} q_2 = 0. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Обозначим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right), \quad \omega_3^2 = \frac{1}{L_3}\left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right). \tag{14.7}$$

Возможны два варианта.

а) $\omega_1 = \omega_3$. Подстановкой нетрудно убедиться в том, что при произвольной постоянной A система (14.6) имеет решение

$$q_1 = C_2 A\cos\omega_1 t, \quad q_2 = 0, \quad q_2 = -C_3 A\cos\omega_1 t \tag{14.8}$$

(при $R_2 = 0$ это одно из главных колебаний в цепи), т. е. в сколь угодно малой окрестности начала координат фазового пространства $R^6(q,\dot{q})$ найдется начальная точка

$$q_1^0 = C_2 A, \quad q_2^0 = 0, \quad q_3^0 = -C_3 A, \quad \dot{q}_1^0 = 0, \quad \dot{q}_2^0 = 0, \quad \dot{q}_3^0 = 0,$$

соответствующая незатухающему решению системы (14.6). Из определения 13.1 следует, что при $\omega_1 = \omega_3$ положение покоя не является асимптотически устойчивым.

б) $\omega_1 \neq \omega_3$. Первое условие и (13.3) во втором условии теоремы 13.1 с очевидностью выполнены (см. (14.2), (14.3) и (14.5)). Для обоснования асимптотической устойчивости покажем, что справедливо и условие (13.4). Из утверждения

$$\forall t \geq 0,\, x(t) = f(t,x_0) \in M = \{\dot{q}_2 = 0\}$$

(см. (13.4), (14.5)) следует $q_2(t) = q_2^0 = \mathrm{const}$ и после интегрирования первого и третьего уравнений системы (14.6) с учетом обозначений (14.7) следует требуемый вид решения

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \tfrac{C_1}{C_1+C_2} q_2^0, \\ q_2 &= q_2^0, \\ q_3 &= A_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3) + \tfrac{C_3}{C_3+C_4} q_2^0, \end{aligned} \tag{14.8}$$

подстановка которого во второе уравнение приводит к условию на постоянные q_2^0, A_1, α_1, A_2, α_2

$$\begin{gathered} \left(\tfrac{1}{C_1+C_2} + \tfrac{1}{C_3+C_4}\right) q_2^0 - \\ -\tfrac{1}{C_2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \tfrac{1}{C_3} A_3 \sin(\omega_3 t + \alpha_3) = 0. \end{gathered} \tag{14.9}$$

Условие (14.9) с учетом $\omega_1 \neq \omega_3$ справедливо при любом значении $t \geq 0$ только, если выполняется $q_2^0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_3 = 0$, что соответствует решению (14.8): $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$. Таким образом, все условия теоремы 13.1 выполнены — положение покоя электрической цепи асимптотически устойчиво.

§ 15. Устойчивость линейных автономных систем

Рассмотрим вопросы устойчивости, связанные с линейными стационарными (автономными) системами

$$\dot{x} = Dx, \qquad x \in R^n. \tag{15.1}$$

Решение (15.1) отыскивается в виде

$$x = ue^{\lambda t}, \quad u \in R^n, \quad u = \text{const}, \quad |u| \neq 0. \tag{15.2}$$

Подстановка (15.2) в (15.1) и сокращение на $e^{\lambda t}$ приводит к системе уравнений для u и λ

$$(D - \lambda E)u = 0. \tag{15.3}$$

Условие

$$\det(D - \lambda E) = 0$$

существования решения $u \neq 0$ линейной однородной системы уравнений (15.3) приводит к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{15.4}$$

Уравнение имеет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (кратные корни перечисляются столько раз, какова кратность корня) — собственных чисел матрицы D. В общем случае корни являются комплексными

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k. \tag{15.5}$$

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений показывается, что общее решение системы (15.1) (совокупность решений при начальных условиях: $t_0 = 0$, x_0) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\{e^{\mu_k t}[h_k(t)\cos\nu_k t + H_k(t)\sin\nu_k t]\}, \tag{15.6}$$

где $\mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k$, $\nu_k = \mathrm{Im}\lambda_k$ (см. (15.5)); C_k — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям; $h_k(t)$, $H_k(t) \in R^n$ — вектор–функции с элементами — многочленами, причем выполняется

$$\det \| h_1(0), \ldots, h_n(0) \| \neq 0. \tag{15.7}$$

Из вида решения (15.6) следует, что с точки зрения устойчивости в зависимости от распределения корней на комплексной плоскости у линейной системы (15.1) возможны три случая.

Теорема 15.1.

1. *$\{\forall \mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k < 0\} \Leftrightarrow \{x \equiv 0$ — асимптотически устойчивое решение системы (15.1)$\}$;*

2. *$\{\exists \mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k > 0\} \Rightarrow \{x \equiv 0$ — неустойчивое решение системы (15.1)$\}$;*

3. *$\{\mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k < 0,\ k = \overline{1,r} < n,\ \mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k = 0,\ k = \overline{r+1,n}\} \Rightarrow$ $\{x \equiv 0$ — устойчивое по Ляпунову или неустойчивое решение системы (15.1)$\}$.*

$\square$ Утверждение 1 следует из того,что в каждом слагаемом в (15.6) функция от $t \in [0,\infty)$, стоящая в фигурных скобках, в силу $\mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k < 0$ ограничена и при $t \to \infty$ стремится к нулю, т. е. оба условия в определении 13.1 выполнены (условие устойчивости достигается ограничением $|C_k| < \varepsilon_k$ на постоянные C_k). Обратное утверждение $\Leftarrow$ обосновывается далее доказательством случаев 2 и 3: если не выполняется $\forall \mu_k = \mathrm{Re}\lambda_k < 0$, то возможны или устойчивость (не являющеяся асиптотической) или неустойчивость.

Для обоснования 2, предполагая $\mu_n = \mathrm{Re}\lambda_n > 0$, положим в (15.6): $C_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$. Выбором $C_n \neq 0$ можно сделать начальные данные $x_0 = C_n h_n(0)$ сколь угодно малыми: $0 < |x_0| < \delta$. Так как в оставшемся слагаемом функция, стоящая в фигурных скобках, неограничено растет, решение $x(t) = f(t,x_0)$ покинет любую фиксированную ε–окрестность, что и доказывает неустойчивость.

В случае 3 полагаем $C_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$. Выбором $C_n \neq 0$ можно сделать начальные данные $x_0 = C_n h_n(0)$ сколь угодно малыми:

$$0 < |x_0| < \delta.$$

Соответствующие этим начальным данным решения

$$x(t) = C_n\{[h_k(t)\cos\nu_k t + H_k(t)\sin\nu_k t]\},$$

во-первых, вследствие (15.7) удовлетворяют условию $x(t) \not\equiv 0$, во-вторых, не стремятся к нулю, что и обосновывает утверждение 3 теоремы. $\blacksquare$

Случаи 1, 2 в теореме 15.1 называются **некритическими**. В этих случаях характер устойчивости полностью определяется распределением корней характеристического многочлена (15.4) на комплексной плоскости: 1 — все корни слева от мнимой оси; 2 — есть корень справа от мнимой оси. В **критическом** случае 3 — нет корней справа от мнимой оси, но есть корни на мнимой оси — для выяснения характера устойчивости требуется более глубоко изучить матрицу D: понять структуру её жордановой формы.

Рассмотрим линейную, автономную систему уравнений Лагранжа

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{15.8}$$

обладающую решением $q(t) \equiv 0$. Один из вариантов исследования устойчивости нулевого решения: привести систему (15.8) к нормальному виду (15.1), вычислить характеристическое уравнение (15.4) и применить теорему 15.1. Второй вариант — вычисление характеристического уравнения непосредственно из системы (15.8). Вводя обозначения для постоянных матриц

$$A = \|a_{ik}\|, B = \|b_{ik}\|, C = \|c_{ik}\|,$$

запишем (15.8) в матрично–векторных обозначениях

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0. \tag{15.9}$$

Решение отыскивается в виде

$$q = ue^{\lambda t}, \quad u \in R^n, \quad u = \text{const}, \quad |u| \neq 0.$$

Подстановка в (15.9) и сокращение на $e^{\lambda t}$ определит уравнение для u и λ

$$(A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda)u = 0.$$

Условие

$$\det\|A\lambda^2 + B\lambda + C\lambda\| = 0$$

существования решения $|u| \neq 0$ приводит к характеристическому многочлену (15.4) и возможности применить теорему 15.1.

§ 16. Устойчивые многочлены. Критерии Рауса–Гурвица и Михайлова

Как показано в § 15, вопрос о характере устойчивости нулевого решения линейной системы (15.1) или лагранжевой системы (15.8) во многом определяется ответом на другой вопрос: все ли корни характеристического уравнения (15.4)

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0 \qquad (16.1)$$

имеют отрицательную действительную часть. Далее предполагаем

$$a_0 > 0. \qquad (16.2)$$

Определение 16.1. Многочлен (16.1) называется **устойчивым,** если все его корни $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ располагаются в комплексной плоскости слева от мнимой оси:

$$Re\lambda_k = \mu_k < 0, \quad k = \overline{1,m}. \qquad (16.3)$$

Существенную помощь в отсеевании неустойчивых многочленов оказывает следующая

Теорема 16.1. *Для коэффициентов a_k устойчивого многочлена с учетом (16.2) выполняется $a_k > 0$, $k = \overline{0,m}$.*

□ Отсутствие отрицательных коэффициентов a_k следует из разложения многочлена (16.1)

$$f(\lambda) = a_0\prod_{k=1}^{m}(\lambda - \lambda_k) = a_0\prod_{l}(\lambda + |\lambda_l|)\prod_{j}(\lambda^2 + 2|\mu_j|\lambda + \mu_j^2 + \nu_j^2),$$

где биномы соответствуют действительным корням λ_l, квадратные трехчлены — парам комплексно–сопряженных корней $\mu_j \pm \nu_j$. Для обоснования отсутствия коэффициентов $a_i = 0$ проведем рассуждения по индукции. Бином $(\lambda + |\lambda_l|)$ или квадратный трехчлен $(\lambda^2 + 2|\mu_j|\lambda + \mu_j^2 + \nu_j^2)$, взятые на первом шаге, удовлетворяют условию $a_k > 0$. Умножение на общем шаге многочлена с положительными коэффициентами на $(\lambda + |\lambda_l|)$ или на $(\lambda^2 + 2|\mu_j|\lambda + \mu_j^2 + \nu_j^2)$ с очевидностью сохраняет свойство $\forall a_k > 0$. ■

Условие (16.3) носит только необходимый характер. Например, многочлен

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = -1$ и не является устойчивым.

Далее приводятся два критерия устойчивости многочлена, причем суждение об устойчивости выносится, минуя вычисление корней.

Первый — алгебраический критерий — без доказательства[1].

Теорема 16.2 (Е. Раус, А. Гурвиц). *Многочлен (16.1) устойчив тогда и только тогда, когда выполняется* $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, *где* Δ_i *— главные центральные миноры определителя Гурвица*

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & . \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & . \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & . \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & . \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m \end{vmatrix}.$$

Размер определителя Гурвица Δ_m *совпадает со степенью многочлена (16.1).*

Прежде, чем сформулировать геометрический критерий Михайлова, рассмотрим для многочлена (16.1) годограф Михайлова и его свойства. Заменим в (16.1) переменную λ на $i\omega$ и отделим действительную и мнимую части

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega) \tag{16.4}$$

Заметим, что в $u(\omega)$ входят только четные степени ω, в $v(\omega)$ — только нечетные:

$$u(-\omega) = u(\omega), \quad v(-\omega) = -v(\omega). \tag{16.5}$$

Меняем ω в пределах $\omega \in [0,\infty)$, строим годограф Михайлова — годограф комплексного числа (16.4) (рис. 16.1).

[1] *Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — 3-е изд. — М.: Наука, 1967, гл.XV.*

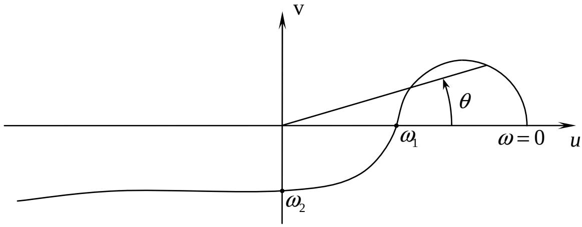

Рис. 16.1

В дальнейшем используется число $\overset{\infty}{\underset{\omega=0}{\Delta}}\theta = \theta(\infty) - \theta(0)$ — изменение аргумента комплексного числа. Сформулируем несколько свойств $\overset{\infty}{\underset{\omega=0}{\Delta}}\theta$.

а) Рассматриваются только такие многочлены, у которых нет мнимых корней $\lambda = i\omega_0$. Иначе при $\omega = \omega_0$ годограф Михайлова проходил бы через начало координат, где не определен аргумент θ.

б) Число $\overset{\infty}{\underset{\omega=0}{\Delta}}\theta$ кратно $\pi/2$, причем в зависимости от степени многочлена выполняется

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=0}{\Delta}}\theta = \begin{cases} k\pi, & m = 2l, \\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, & m = 2l+1. \end{cases} \tag{16.6}$$

Результат есть следствие (16.5) и равенства

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{v(\omega)}{u(\omega)}.$$

Результат (16.6) дает возможность ограничиться построением годографа в пределах $\omega \in [0,\tilde{\omega}]$, где $\tilde{\omega}$ — наибольший из объединенной совокупности корней уравнений $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$. При $\omega > \tilde{\omega}$ годограф остается в определенном квадранте, а предельное значение θ находится при помощи (16.6). Например, если годограф, изображенный на рис. 16.1, в дальнейшем не покинет третьего квадранта, то

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=0}{\Delta}}\theta = \begin{cases} -\pi, & m = 2l, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & m = 2l+1. \end{cases}$$

в) При изменении ω в пределах $\omega \in (-\infty,\infty)$ справедлива связь

$$\mathop{\Delta}_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta = 2 \mathop{\Delta}_{\omega=0}^{\infty} \theta.$$

Этот результат опять же следствие (16.5): годограф при $\omega \in (-\infty,0]$, и годограф при $\omega \in [0,\infty)$ симметричны относительно действительной оси.

На основе свойств а) — в) доказывается

Теорема 16.3. *Количество l корней слева от мнимой оси (у которых $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$) и количество r — справа от мнимой оси ($\mathrm{Re}\lambda_k > 0$) связаны с годографом Михайлова следующим образом*

$$\mathop{\Delta}_{\omega=0}^{\infty} \theta = (l-r)\frac{\pi}{2}. \tag{16.7}$$

□ Представим многочлен (16.1) в виде

$$f(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k). \tag{16.8}$$

С учетом $\lambda = i\omega$, $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ для одного бинома выполняется

$$\lambda - \lambda_k = -\mu_k + i(\omega - \nu_k) = \mathrm{R}_k(\omega) e^{i\theta_k(\omega)}. \tag{16.9}$$

Рассмотрим для (16.9) изменение θ_k при $\omega \in (-\infty,\infty)$. С учетом свойства а) возможны два случая

1) $\mu_k < 0$. Тогда $\mathop{\Delta}\limits_{\omega=-\infty}^{\infty} \theta = \pi$ (рис. 16.2 и 16.3).

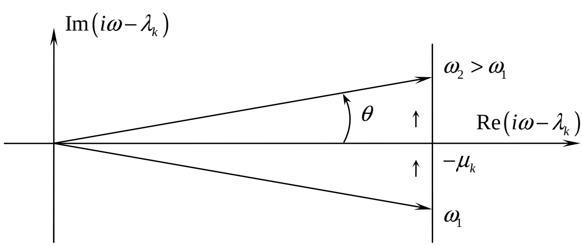

Рис. 16.2

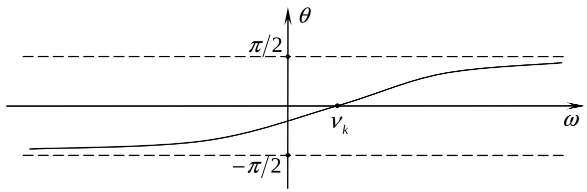

Рис. 16.3

2) $\mu_k > 0$. Тогда $\underset{\omega=-\infty}{\overset{\infty}{\Delta}} \theta = -\pi$ (рис. 16.4 и 16.5).

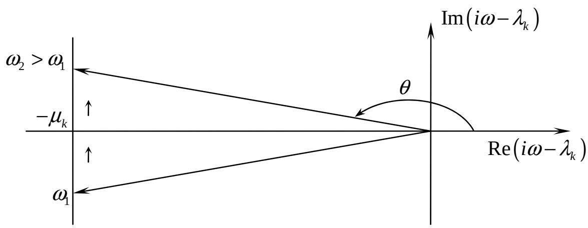

Рис. 16.4

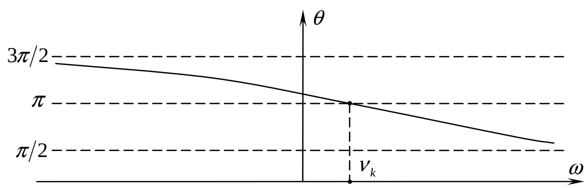

Рис. 16.5

Подставляем (16.9) в разложение (16.8), получаем

$$f(i\omega) = a_0 \left\{ \prod_{k=1}^{m} \mathrm{R_k}(\omega) \right\} e^{\,i \sum\limits_{k=1}^{m} \theta_k(\omega)},$$

откуда следует

$$\theta(\omega) = \arg f(i\omega) = \sum_{k=1}^{m} \theta_k(\omega)$$

и

$$\underset{\omega=-\infty}{\overset{\infty}{\Delta}} \theta = \sum_{k=1}^{m} \underset{\omega=-\infty}{\overset{\infty}{\Delta}} \theta_k = (l-r)\pi$$

а свойство в) приводит к утверждению (16.7) теоремы. ■

Следствие 1. *Степень многочлена (16.1) ($m = l + r$) и поведение годографа Михайлова ($l - r$) с учетом свойств а), б) однозначно определяют распределение корней (l и r) на комплексной плоскости.*

Следствие 2 (А.В. Михайлов). *Многочлен (16.1) устойчив —*

$$l = m, \;\; r = 0$$

— в том и только в том случае, если для годографа Михайлова справедливо

$$\mathop{\Delta}_{\omega=0}^{\infty} \theta = m\frac{\pi}{2},$$

где m — степень многочлена.

§ 17. Устойчивость по линейному приближению

В результате разложения правых частей нелинейной автономной системы

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad \varphi(0) = 0$$

в окрестности нулевого решения система примет вид

$$\dot{x} = Dx + R(x), \tag{17.1}$$

где

$$D = \left\| \left. \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_k} \right|_{x=0} \right\|$$

— числовая матрица, а $R(x)$ — функции, разложения которых содержит слагаемые не менее, чем второго порядка. Как будет показано далее, характер устойчивости нулевого решения системы линейного приближения

$$\dot{x} = Dx \tag{17.2}$$

во многих случаях (1 и 2 в теореме 15.1) переносится на нелинейную систему (17.1). Доказательство будет проводиться по следующей схеме. Для линейной системы (17.2) строятся функции Ляпунова, определяющие по теоремам 15.4 и 13.2 характер устойчивости. Затем показывается, что с построенными функциями и нелинейная система (17.1) удовлетворяет условиям теорем 15.4 и 13.2. Функция Ляпунова для системы (17.2) строится как квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2}x^T X x \tag{17.3}$$

с числовой матрицей X. Производная $\dot{V}$ в силу системы (17.2) — также квадратичная форма

$$W = \dot{V} = \frac{1}{2}x^T C x. \tag{17.4}$$

Вычисления с учетом (17.2) и $\dot{x}^T = x^T D^T$

$$W = \dot{V} = \frac{1}{2}\{x^T D^T X x + x^T X D x\} = \frac{1}{2}x^T C x \tag{17.5}$$

связывают матрицы X и C в квадратичных формах (17.3) и (17.4):

$$D^T X + X D = C. \tag{17.6}$$

Матричное уравнение (17.6) относительно X называется **уравнением Ляпунова**. Приведем несколько результатов, касающихся решения уравнения Ляпунова.

Теорема 17.1. *Пусть для собственных чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *и* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *матриц* A *и* B *размерности* $(n \times n)$ *выполняется*

$$\lambda_i + \rho_k \neq 0, \quad i,k = \overline{1,n}. \tag{17.7}$$

Тогда матричное уравнение

$$AX + XB = C \tag{17.8}$$

имеет единственное решение X *при любой матрице* C.

□ Уравнение (17.8) можно рассматривать как сокращенную запись линейной системы уравнений $Gx = c$ порядка n^2 для элементов матрицы $X = \|x_{ik}\|$. Собственным числам λ_i, ρ_k соответствуют собственные векторы u_i, v_k (у матриц B и B^T собственые числа ρ_k совпадают)

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad B^T v_k = \rho_k v_k.$$

Подстановкой в правую часть (17.8) убеждаемся в том, что матрицы

$$X_{ik} = u_i v_k^T$$

— собственные матрицы линейного оператора G:

$$AX_{ik} + X_{ik}B = Au_i v_k^T + u_i v_k^T B = \lambda_i u_i v_k^T + u_i \rho_k v_k^T = (\lambda_i + \rho_k)X_{ik}.$$

Таким образом найдены все n^2 собтвенных значений $\lambda_i+\rho_k$ матрицы G, вследствие (17.7) матрица G — неособенная, и уравнение (17.8) (или $Gx=c$) имеет единственное решение X. ■

Теорема 17.2. *Пусть для собственных чисел $\lambda_k=\mu_k+i\nu_k$ матрицы D выполняется*

$$Re\lambda_k=\mu_k<0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{17.9}$$

Тогда решение X матричного уравнения (E — единичная матрица)

$$D^TX+XD=-E \tag{17.10}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. решение X — единственно;

2. решение представимо в виде

$$X=\int\limits_0^\infty e^{D^Tt}e^{Dt}dt; \tag{17.11}$$

3. X — симметричная матрица;

4. соответсвующая матрице X квадратичная форма (17.3) — положительно определена.

□ Утверждение 1 следует из теоремы 17.1: собственные числа матриц D и D^T совпадают, вследствие (17.9) для них выполняется (17.7). Подстановка матрицы

$$Z(t)=e^{D^Tt}e^{Dt} \tag{17.12}$$

в уравнение

$$\dot{Z}=D^TZ+ZD, \quad Z(0)=E, \tag{17.13}$$

с учетом перестановочности матриц D и e^{Dt} приводит к тождеству. Интегрирование тождества (17.13) определит равенство

$$Z(t)-Z(0)=D^T\int\limits_0^t e^{D^Tt}e^{Dt}dt+\int\limits_0^t e^{D^Tt}e^{Dt}dt\,D. \tag{17.14}$$

Вследствие (17.9) решения матричных уравнений $\dot{Y}=D^TY$, $\dot{Y}=DY$ и матрица (17.12) стремятся к нулю при $t\to\infty$, и переход к пределу

$t \to \infty$ в (17.14) приводит с учетом $Z(0) = E$ к нужному результату 2: матрица (17.11) — решение уравнения (17.10). Сходимость интеграла (17.11) также определяется условием (17.9). Транспонирование обеих частей уравнения (17.10) приводит к выводу, что X и X^T одновременно являются решениями, что вследствие единственности решения обосновывает симметричность матрицы $X: \ X = X^T$. Положительную определенность соответствующей квадратичной формы (17.3) обосновывают вычисления

$$V = \frac{1}{2} x_0^T X x_0 = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty x_0^T e^{D^T t} e^{Dt} x_0 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty x^T(t) x(t) dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty |x(t)|^2 dt > 0.$$

Учтено, что $x(t) = e^{Dt} x_0$ — решение системы $\dot{x} = Dx$, $x(0) = x_0$. ■

Теорема 17.3. *Пусть для собственных чисел $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ матрицы D выполняется*

$$\lambda_i + \ \lambda_k \neq 0, \quad i,k = \overline{1,n}; \tag{17.15}$$

$$Re\lambda_1 = \mu_1 > 0. \tag{17.16}$$

Тогда существует единственное решение X матричного уравнения

$$D^T X + XD = -E, \tag{17.17}$$

причем при некоторых значениях переменных x_0 выполняется

$$V = \frac{1}{2} x_0^T X x_0 < 0. \tag{17.18}$$

□ Существование единственного решения X уравнения (17.17) с учетом (17.15) следует из теоремы 17.1. Неравенство (17.18) докажем от противного. Предположение $V(x) > 0$ о положительной определенности формы V, вследствие

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0$$

(в (17.4) $C = E$) по теореме 13.2 приводит к выводу об асимптотической устойчивости нулевого решения системы $\dot{x} = Dx$, что вследствие (17.16) противоречит теореме 15.1. Предположение $V(x) \geq 0$, $V(x_0) = 0$ при $x_0 \neq 0$ также приводит к противоречию: для решения $x(t) = f(t,x_0)$ на некотором интервале $[0,t_1]$ выполняется

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 0,$$

следовательно $V(x(t_1)) < 0$. ■

Теорема 17.4. *Пусть для собственного числа $\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1$ матрицы D выполняется*

$$Re\lambda_1 = \mu_1 > 0. \tag{17.19}$$

Тогда при некотором числе $c > 0$ матричное уравнение

$$D^T X + XD = 2cX - E \tag{17.20}$$

имеет единственное решение X, причем при некоторых значениях переменных x_0 выполняется

$$V = \frac{1}{2}x_0^T X x_0 < 0. \tag{17.21}$$

□ Уравнение (17.20) эквивалентно уравнению вида (17.17):

$$(D - cE)^T X + X(D - cE) = -E.$$

Корни $\tilde{\lambda}_k$ характеристического уравнения

$$\det(D - cE - \tilde{\lambda}E) = \det(D - (c + \tilde{\lambda})E) = 0,$$

соответствующего матрице $(D - cE)$, связаны с собственными числами матрицы D очевидным соотношением

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - c = \mu_k - c + i\nu_k.$$

Выбор числа $c > 0$ подчиним двум условиям: во–первых, чтобы сохранилось требование (17.19)

$$Re\tilde{\lambda}_1 = \mu_1 - c > 0,$$

во–вторых, чтобы выполнялось условие

$$\tilde{\lambda}_k + \tilde{\lambda}_i = \lambda_k + \lambda_i - 2c \neq 0, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Так как при таком выборе c выполнены все требования теоремы 17.3, то справедливы и совпадающие утверждения теорем. ■

Теорема 17.5. *Пусть для корней характеристического многочлена системы линейного приближения (17.2) справедливо утверждение 1 теоремы 15.1: решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво вследствие*

$$\mathrm{Re}\lambda_k < 0,\, k = \overline{1, n}.$$

Тогда решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (17.1) также асимптотически устойчиво.

□ Так как выполнено условие (17.9) теоремы 17.2, то существует решение X уравнения (17.10), которому соответствует положительно определенная форма V (см. (17.3)). Дифференцирование $\dot{V}$ в силу нелинейной системы (17.1) вследствие (17.10) (см. (17.4) – (17.6)) приводит к результату

$$W = \dot{V} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x^T X R.$$

Функция $x^T X R$ имеет более высокий порядок малости, чем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, поэтому существует ε–окрестность положения $x = 0$, в которой при $x \neq 0$, выполняется $W < 0$, т. е. выполнены все условия теоремы 13.2. ■

Теорема 17.6 *Пусть для корней характеристического многочлена системы линейного приближения (17.2) справедливо утверждение 2 теоремы 15.1: решение $x \equiv 0$ неустойчиво вследствие $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$ (возможна перенумерация корней). Тогда решение $x \equiv 0$ нелинейной системы (17.1) также неустойчиво.*

□ Выполнены условия теоремы 17.4, поэтому существует решение X уравнения (17.20) и при некоторых значениях x_0 справедливо неравенство (17.21). Из вида уравнения (17.20) следует очевидный факт: уравнение

$$D^T Y + Y D = 2cY + E \tag{17.22}$$

($-E$ вместо E) при некотором числе $c > 0$ имеет решение $Y = -X$, для которого при некоторых значениях x_0 выполняется

$$V(x) = \frac{1}{2} x_0^T Y x_0 > 0. \tag{17.23}$$

Дифференцирование функции $x^T V x$ в силу нелинейной системы (17.1) приводит с учетом (17.22) (см. (17.4) – (17.6)) к выражению

$$W = \dot{V} = 2cV + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x^T Y R.$$

Так как функция $x^T Y R$ третьего или более высокого порядка малости, то для функции

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x^T Y R$$

в некоторой ε–окрестности выполняется $V > 0$, что в сочетании с неравевством (17.23) приводит к выводу: все условия теоремы 5.4 выполнены. ■

§ 18. Вынужденные движения автономной системы. Частотные характеристики

Рассматривается линейная стационарная система с асимптотически устойчивым нулевым положением равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{lk}\ddot{q}_k + b_{lk}\dot{q}_k + c_{lk}q_k) = 0, \quad l = \overline{1, n}, \tag{18.1}$$

или в матричных обозначениях

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0.$$

Вследствие асимптотической устойчивости корни λ_k характеристического уравнения

$$f(\lambda) = \Delta(\lambda) = \det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0 \tag{18.2}$$

удовлетворяют условию (теорема 15.1)

$$\mathrm{Re}\lambda_k < 0.$$

Изучим поведение системы при условии, что на нее действуют дополнительные силы $Q_l(t)$, зависящие только от времени t:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{lk}\ddot{q}_k + b_{lk}\dot{q}_k + c_{lk}q_k) = Q_l(t), \quad l = \overline{1,n}. \tag{18.3}$$

Общее решение системы складывается из общего решения однородной системы (18.1) и частного решения системы (18.3)

$$q(t) = q_{\text{одн}}(t, C_1, \ldots, C_{2n}) + q_{\text{частн}}(t).$$

Так как нулевое решение системы (18.1) асимптотически устойчиво, вклад $q_{\text{одн}}(t, C_1, \ldots, C_{2n})$ в решение(18.3) при любых начальных данных (значениях постоянных C_j) через определенное время становится сколь угодно малым, и в качестве решения системы (18.3) можно принять функцию $q_{\text{частн}}(t)$ (рис. 18.1)

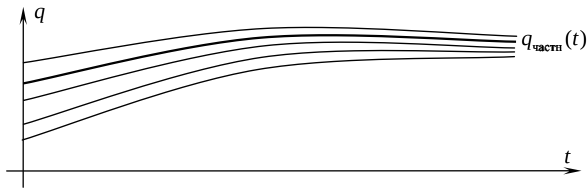

Рис. 18.1

В механике, теории управления, радиоэлектронике употребляется следующая терминология: $Q_l(t)$ — вход в систему, внешнее воздействие, возмущение; $q(t) = q_{\text{частн}}(t)$ — выход, реакция на внешнее воздействие, отклик, вынужденное движение (рис. 18.2).

Рис. 18.2

Ставится следующая задача: по известному возмущению $Q(t)$ вычислить отклик $q(t)$. Решение задачи упрощает то обстоятельство, что для линейных систем (18.3) справедлив непосредственно проверяемый

Принцип суперпозиции. *Если воздействиям* $Q^{\alpha}(t)$, $\alpha = \overline{1,m}$, *соответствуют отклики* $q^{\alpha}(t)$, $\alpha = \overline{1,m}$, *то воздействию* $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} Q^{\alpha}(t)$ *соответствует отклик* $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} q^{\alpha}(t)$.

Принцип суперпозиции дает возможность свести поставленную задачу к следующей — найти отклик $q(t)$, если воздействие имеет место только в одном уравнении системы (18.3):

$$Q_l = Q(t)\delta_{lj} = \begin{cases} Q(t), \, l = j, \\ 0 \quad\;\, , \, l \neq j. \end{cases}$$

Ответ на поставленный вопрос зависит от двух обстоятельств: какова исходная система (18.3), т. е. матрицы A, B, C, и каким является воздействие $Q(t)$. Как будет показано далее, вся нужная информация об «индивидуальности» системы содержится в отклике $q(t)$ на возмущение

$$Q_l = \delta_{lj} D e^{i\Omega t}, \tag{18.4}$$

где i — мнимая единица. Отклик отыскивается в таком же виде

$$q_k = E_k e^{i\Omega t}. \tag{18.5}$$

Подстановка (18.4) и (18.5) в систему (18.3) после сокращения на $e^{i\Omega t}$ приводит к алгебраической системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} [a_{lk}(i\Omega)^2 + b_{lk}(i\Omega) + c_{lk}] E_k = D\delta_{lj}, \quad l = \overline{1,n}, \tag{18.6}$$

решение которой имеет вид

$$E_k = \frac{D\Delta_{jk}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)}. \tag{18.7}$$

Знаменатель есть определитель системы (18.6) — результат подстановки $i\Omega$ вместо λ в характеристическое уравнение (18.2). Вследствие условия асимптотической устойчивости ($\mathrm{Re}\lambda_k < 0$) для знаменателя при всех значениях Ω справедливо $\Delta(i\Omega) \neq 0$. Числитель в

(18.7) строится следующим образом: в определителе $\Delta(i\Omega)$ k-й столбец заменяется столбцом из правой части (18.6):

$$\begin{array}{cc} & k \\ j & \left\| \begin{matrix} \quad & 0 & \quad \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & D & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{matrix} \right\| \end{array}$$

Раскрывая этот определитель по k-му столбцу, получим числитель $D\Delta_{jk}$, где Δ_{jk} — алгебраическое дополнение элемента с номером jk. Множитель при D в выражении (18.7) определяется исключительно матрицами A, B, C и носит название амплитудно-фазовой характеристики:

$$W_{jk}(i\Omega) = \frac{\Delta_{jk}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)}. \tag{18.8}$$

Индекс j указывает, по какой координате производится воздействие, индекс k — по какой координате вычисляется отклик. Смысл названия (амплитудно–фазовая) выяснится ниже. Удобно иметь графическое представление W_{jk}. Для этого требуется выделить: $P_{jk}(\Omega)$ — действительную часть, $S_{jk}(\Omega)$ — мнимую часть, $R_{jk}(\Omega)$ — модуль и $\psi_{jk}(\Omega))$ — аргумент комплексного числа $W_{jk}(i\Omega)$:

$$W_{jk}(i\Omega) = P_{jk}(\Omega) + iS_{jk}(\Omega) = R_{jk}(\Omega)e^{i\psi_{jk}(\Omega)}. \tag{18.9}$$

При $\Omega \in [0,\infty)$ на комплексной плоскости строится годограф (рис. 18.3), который также носит название амплитудно–фазовой характеристики. Полезно дополнительно иметь графики действительной характеристики (рис. 18.4),

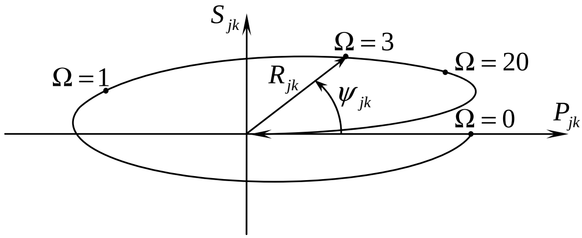

Рис. 18.3

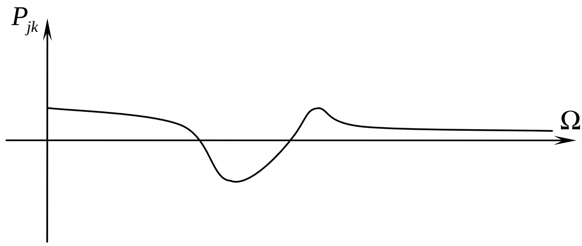

Рис. 18.4

мнимой —

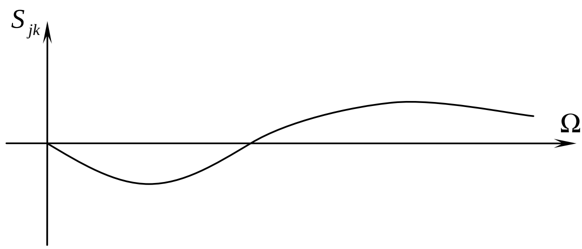

Рис. 18.5

амплитудной —

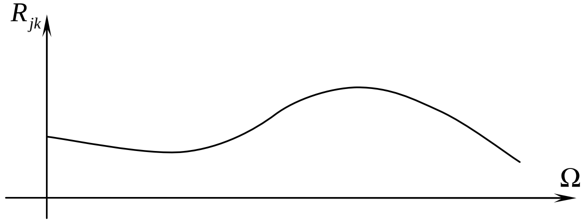

Рис. 18.6

и фазовой —

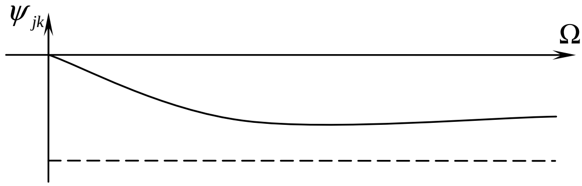

Рис. 18.7

С учетом (18.5), (18.7) — (18.9) получаем результат

$$q_k = DW_{jk}(i\Omega)e^{i\Omega t} = DR_{jk}(\Omega)e^{i(\Omega t + \psi_{jk}(\Omega))} \tag{18.10}$$

— отклик системы (18.3) на воздействие (18.4).

Рассмотрим, как, опираясь на амплитудно-фазовую характеристику, находить отклики на воздействия, отличные от (18.4).

Гармоническое воздействие. Подстановка (18.4) и (18.10) в систему (18.3) превратит ее в тождественное равенство двух комплексных выражений. Равенство мнимых частей с учетом линейности системы (18.3) приводит к выводу, что воздействию

$$Q_l = \delta_{lj} D \sin \Omega t \tag{18.11}$$

соответствует отклик

$$q_k = DR_{jk}(\Omega) \sin\{\Omega t + \psi_{jk}(\Omega)\}, \tag{18.12}$$

т. е. гармонический сигнал (18.11) при прохождении через линейную систему не меняет частоту Ω, а в зависимости от частоты амплитуда домножается на $R_{jk}(\Omega)$ и добавляется фаза $\psi_{jk}(\Omega)$. Числа $R_{jk}(\Omega)$ и $\psi_{jk}(\Omega)$ можно определить графически: на рис. 18.3 для амплитудно-фазовой характеристики показаны $R_{jk}(\Omega)$, $\psi_{jk}(\Omega)$. при $\Omega = 3$. Напомним, что отклик (18.12) установится через некоторое время после того, как будет можно пренебречь собственными движениями системы, зависящими от начальных данных.

Периодическое негармоническое воздействие. Разложим воздействие в ряд Фурье

$$Q_l = \delta_{lj} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \sin m\Omega t + b_m \cos m\Omega t).$$

Для каждого слагаемого отклик находится при помощи амплитудно–фазовой характеристики. С учетом принципа суперпозиции получим суммарный отклик

$$q_k = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m R_{jk}(m\Omega) \sin[m\Omega t + \psi_{jk}(m\Omega)] + \\ + b_m R_{jk}(m\Omega) \cos[m\Omega t + \psi_{jk}(m\Omega)]\}.$$

Непериодическое воздействие $Q(t)\delta_{lj}$. Для нахождения отклика требуется использовать интеграл Фурье. Укажем, не вдаваясь в подробности, последовательность действий. Для функции $Q(t)$ вычисляется ее Фурье–образ $\Phi(i\Omega)$. Отклику $q_k(t)$ соответствует Фурье-образ $W_{jk}(i\Omega)\Phi(i\Omega)$; обратным преобразованием Фурье находится отклик $q_k(t)$.

Рассмотренный подход к изучению свойств системы носит название частотного. До сих пор основным объектом, определяющим поведение системы, были дифференциальные уравнения. При частотном подходе информация о внутренней структуре системы дается амплитудно–фазовой характеристикой в аналитическом или графическом виде. Амплитудно–фазовую характеристику можно построить экспериментально, не привлекая дифференциальных уравнений (18.3). Для этого нужно подавать на вход гармоническое воздействие (18.11) с разными частотами. Отклик (18.12) ставит в соответствие каждой частоте Ω числа $R_{jk}(\Omega)$ и $\psi_{jk}(\Omega)$, которые определяют точку на графике (рис. 18.3). Построенный с нужной точностью график дает возможность вычислять реакцию системы на воздействия, отличные от гармонического, а также решать другие вопросы. Приведем для иллюстрации способ вычисления переходного процесса. Пусть на систему, находящуюся в положении равновесия, при $t = 0$ подается единичное воздействие $Q_l = \delta_{lj}$ (гармонический сигнал с $\Omega = 0$). После затухания собственных движений установится выход $q_k = R_{jk}(0) = W_{jk}(0) = P_{jk}(0)$. Для приложений представляет интерес переходный процесс: поведение системы в процессе затухания собственных движений. Вычисления, которые мы опустим, приводят к формуле[1]

$$q_k(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty P_{jk}(\Omega) \frac{\sin \Omega t}{\Omega} d\Omega,$$

т. е. переходный процесс полностью определен действительной частью $P_{jk}(\Omega)$ амплитудно-фазовой характеристики.

[1] Айзерман М.А. Теория автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 452 с.

Г л а в а V. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

§ 19. Канонические уравнения Гамильтона

Уравнения Гамильтона можно составлять для таких систем, динамика которых полностью задается функцией Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$. Рассматриваются не только натуральные (механические) системы ($L = T - \Pi$), поэтому на L накладывается условие (0.3)

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0, \tag{19.1}$$

при котором уравнения Лагранжа (0.2) имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + G_i(t,q,\dot{q}) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

и разрешимы относительно $\ddot{q}_k$. Для натуральных систем матрица в условии (19.1) есть матрица квадратичной формы в кинетической энергии, и условие (19.1) является следствием определения обобщенных координат. Уравнения Гамильтона выводятся как результат перехода от переменных Лагранжа t, q, $\dot{q}$, описывающих состояние системы, к переменным Гамильтона t, q, p. Обобщенные импульсы связаны с переменными t, q, $\dot{q}$ следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \varphi_i(t,q,\dot{q}). \tag{19.2}$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{19.3}$$

с учетом обозначения (19.2) допускают эквивалентную запись

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{19.4}$$

Решив систему (19.2) относительно $\dot{q}_k$, получим обратный переход

$$\dot{q}_k = \psi_k(t,q,p) \tag{19.5}$$

от гамильтоновых переменных t, q, p к лагранжевым. Возможность перехода от (19.2) к (19.5) гарантируется условием (19.1):

$$\det\left\|\frac{\partial\varphi_i(t,q,\dot q)}{\partial\dot q_k}\right\| = \det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\right\| \neq 0.$$

Введем функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H(t,q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot q_i\big|_{\dot q=\psi(t,q,p)} - L(t,q,\dot q)\big|_{\dot q=\psi(t,q,p)}. \tag{19.6}$$

В частности, для натуральных систем, когда справедливо

$$L = T - \varPi = T_2 + T_1 + T_0 - \varPi,$$

подсчет H приводит к результату

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial\dot q_i}\dot q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial\dot q_i}\dot q_i - L = 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + \varPi = T_2 - T_0 + \varPi$$

(использована теорема Эйлера об однородных функциях). Для стационарно заданной системы ($T = T_2$) функция Гамильтона

$$H = T\big|_{\dot q=\psi(q,p)} + \varPi \tag{19.7}$$

есть полная энергия в гамильтоновых переменных t, q, p.

Вывод уравнений Гамильтона (гамильтоновой системы) основан на подсчете первого полного дифференциала от выражения (19.6)

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i d\dot q_i + \sum_{i=1}^{n}\dot q_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}d\dot q_i.$$

Вследствие (19.2) первая и последняя суммы в правой части взаимно уничтожаются, и выражение принимает вид равенства двух дифференциальных форм, причем обе формы содержат дифференциалы от независимых переменных t, q, p. Приравнивая коэффициенты при дифференциалах, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{19.8}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{19.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{19.10}$$

Уравнения (19.9) есть следствие замены переменных (19.2) и совпадают с (19.5). Уравнениям (19.10) при помощи уравнений Лагранжа в форме (19.4) можно придать вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{19.11}$$

Для натуральных систем полученные уравнения есть следствие основной аксиомы динамики — второго закона Ньютона. Совокупность уравнений (19.9) и (19.11) приводит к системе канонических уравнений Гамильтона (гамильтоновой системе):

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{19.12}$$

Построение, исходя из функции Гамильтона $H(t,q,p)$, функции Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$ возможно, если для $H(t,q,p)$, выполняется

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right\| \neq 0. \tag{19.13}$$

Условие (19.13) гарантирует принципиальную возможность алгебраически решить уравнения $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ (см. (19.12)) относительно p_k, т. е. получить равенство (19.2), с учетом которого формула (19.6) приведет к нужному результату:

$$L(t,q,\dot{q}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(t,q,p) \right\} \Bigg|_{p=\varphi(t,\, q,\, \dot{q})}. \tag{19.14}$$

С точки зрения механики уравнения (19.12) имеют особенность — они в каноническом виде, т. е. разрешены относительно производных $\dot{q}_i$, $\dot{p}_i$. С точки зрения теории дифференциальных уравнений особенностью является то, что правая часть системы (19.12) определяется одной функцией H. Вследствие указанных особенностей уравнения Гамильтона обладают особыми свойствами как с точки зрения механики, так и с точки зрения теории дифференциальных уравнений. С этих позиций рассмотрим вопрос о первых интегралах системы (19.12).

§ 20. Первые интегралы гамильтоновых систем. Теорема Якоби–Пуассона. Уравнения Уиттекера

Определение 20.1. *Первым интегралом уравнений (19.12) называется функция $f(t,q,p)$, которая при подстановке в нее любого решения $q(t)$, $p(t)$ системы (19.12) сохраняет как функция t свое значение*

$$f(t,q(t),p(t)) = f(t_0,q_0,p_0) = \text{const}. \tag{20.1}$$

Дифференцирование (20.1) по t в силу уравнений (19.12) даст эквивалентное условие

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \tag{20.2}$$

которое связывает первый интеграл f с соответствующей функцией Гамильтона H. Условие (20.2) примет компактный вид, если ввести понятие скобки Пуассона (φ,ψ) от двух функций $\varphi(t,q,p)$, $\psi(t,q,p)$ гамильтоновых переменных

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right). \tag{20.3}$$

С учетом (20.3) условие (20.2) запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0.$$

С использованием скобок Пуассона (20.3) уравнения Гамильтона (19.12) можно записать в симметричной форме

$$\dot q_i = (q_i,H), \qquad \dot p_i = (p_i,H).$$

Непосредственно по определению (20.3) проверяются следующие свойства скобок Пуассона:

1. $(\varphi,\psi) = -(\psi,\varphi)$;

2. $(\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\varphi_i,\psi) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(\varphi_i,\psi)$, $\lambda = \mathrm{const}$;

3. $((\varphi,f),\psi) + ((f,\psi),\varphi) + ((\psi,\varphi),f) = 0$ (тождество Пуассона);

4. $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t} = (\dfrac{\partial\varphi}{\partial t},\psi) + (\varphi,\dfrac{\partial\psi}{\partial t})$.

Заметим, что если для элементов векторного пространства определена бинарная операция $(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющая условиям $1 — 3$, то пространство есть **алгебра Ли**. Другим примером алгебры Ли является трехмерное векторное пространство с операцией векторного умножения.

Понятие скобки Пуассона полезно, в частности, тем, что дает возможность по двум первым интегралам простыми вычислениями подсчитать еще один первый интеграл.

Теорема 20.1 (К.Якоби–С.Пуассон). *Скобка Пуассона (φ,ψ) от первых интегралов гамильтоновой системы есть первый интеграл той же системы.*

☐ Условие теоремы утверждает следующее:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\varphi,H) = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\psi,H) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t} + ((\varphi,\psi),H) = 0.$$

С учетом свойств 4, 1 и 3 получим:

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi) + (\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}) + ((\varphi,\psi),H) =$$

$$= -((\varphi,H),\psi) - (\varphi,(\psi,H)) + ((\varphi,\psi),H) =$$

$$= ((H,\varphi),\psi) + ((\psi,H),\varphi) + ((\varphi,\psi),H) = 0,$$

что и доказывает теорему. ■

Другая формулировка теоремы 20.1: множество первых интегралов конкретной гамильтоновой системы — алгебра Ли.

Рассмотрим пример, когда скобка Пуассона двух первых интегралов приводит к первому интегралу, который функционально независим от исходных. В однородном поле силы тяжести (ось z вертикальна) сохраняются функции

$$p_x = m\dot{x}, \quad k_z = yp_x - xp_y = m(y\dot{x} - x\dot{y})$$

— проекция импульса на ось x и проекция момента импульса на ось z. Скобка Пуассона (p_x,k_z) есть независимый первый интеграл $p_y = m\dot{y}$ — проекция импульса на ось y. Отметим, что первый интеграл p_y является следствием не только сохранения величин p_x, k_z, но и того обстоятельства, что динамика системы определяется уравнениями Гамильтона (см. теорему 20.1).

Для нахождения всех функционально независимых первых интегралов — количеством 2n — требуется интегрировать уравнение в частных производных (20.2). Приведем несколько особенностей функции Гамильтона $H(t,q,p)$, благодаря которым первые интегралы обнаруживаются без вычислений.

Определение 20.2. *Координата q_k называется* **циклической**, *если функция Гамильтона от нее не зависит:*

$$H = H(t, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Теорема 20.2. *Циклической координате q_k соответствует первый интеграл p_k.*

□ Утверждение следует из уравнений Гамильтона (19.12):

$$\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \blacksquare$$

Примечательно то, что при помощи циклической координаты можно не на единицу, как обычно, а на две единицы понизить порядок системы (19.12). Для этого рассматривается замкнутая система

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i \neq k, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{20.4}$$

В правой части q_k отстутствует в силу цикличности, а p_k заменяется произвольной постоянной C_k. После интегрирования системы (20.4) зависимость $q_k(t)$ находится квадратурой (см. (19.12)):

$$q_k = \int \frac{\partial H}{\partial p_k}(t, q_1(t), \ldots, q_{k-1}(t), q_{k+1}(t), \ldots, q_n(t),$$
$$p_1(t), \ldots, p_{k-1}(t), C_k, p_{k+1}(t), \ldots, p_n(t))dt.$$

Определение 20.3. *Система называется* **обобщенно–консервативной**, *если функция Гамильтона $H(q,p)$ не зависит от времени t.*

Теорема 20.3. *Функция Гамильтона $H(q,p)$ обобщенно–консервативной системы является первым интегралом соответствующей гамильтоновой системы (19.12):*

$$H(p,q) = h. \tag{20.5}$$

□ Подстановка $H(q,p)$ в условие (20.2) для первого интеграла приводит к тождеству. ■

Для натуральных систем этот результат есть закон сохранения полной энергии для консервативных систем (см. (19.6)).

Если функция Гамильтона $H(q,p)$ удовлетворяет условию (19.13), то $H(q,p)$ по формуле (19.14) ставится в соответствие функция Лагранжа $L(q,\dot{q})$, и теорему 20.3 можно сформулировать в лагранжевых переменных. Так как соответствующий результат обсновывается независимо от условий (19.13) или (19.1), докажим его отдельно.

Теорема 20.4. *Пусть функция Лагранжа $L(q,\dot{q})$ независит явно от времени t. Тогда на решениях уравнений Лагранжа (19.3) сохраняется функция*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{20.6}$$

— функция Гамильтона (19.6) в лагранжевых переменных.

□ К утверждению теоремы приводит непосредственная проверка:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = 0. \ \blacksquare$$

Обобщенно-консервативные системы так же, как в случае циклической координаты, допускают понижение порядка уравнений Гамильтона (19.12) на две единицы.

Теорема 20.5. *Интегрирование системы (19.12) порядка 2n, соответствующей обобщенно–консервативной системе, сводится к интегрированию гамильтоновой системы порядка 2n-2.*

□ Предполагаем, что уравнение (20.5) разрешимо относительно некоторого импульса p_k (в противном случае — $H = H(q_1, \ldots, q_n)$ — решение системы (19.12) очевидно). Считаем, что уравнение (20.5) разрешимо относительно p_1:

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, h). \tag{20.7}$$

Тождество

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, \overbrace{-K(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, h)}^{p_1}, p_2, \ldots, p_n) = h$$

продифференцируем по q_i, p_i, $i = \overline{2,n}$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial K}{\partial q_i} \right) = 0, \ i = \overline{2,n},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial K}{\partial p_i} \right) = 0, \ i = \overline{2,n},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} -\frac{\partial K}{\partial q_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ i = \overline{2,n}, \\ \frac{\partial K}{\partial p_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ i = \overline{2,n}. \end{aligned} \tag{20.8}$$

Уравнения (19.12) с учетом (20.8) определяют замкнутую гамильтонову систему порядка 2n-2

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dq_1} &= \left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \ i = \overline{2,n}, \\ \frac{dp_i}{dq_1} &= \left(\frac{\dot{p}_i}{\dot{q}_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \ i = \overline{2,n}, \end{aligned} \tag{20.9}$$

правые части которой есть функции от независимой переменной q_1 и искомых функций $q_i(q_1)$, $p_i(q_1)$, $i = \overline{2,n}$ (см. (20.7)). Для нахождения $q_i(t)$, $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, следует систему (20.9) проинтегрировать. Подстановка решения $q_i(q_1)$, $p_i(q_1)$, $i = \overline{2,n}$, в уравнение $\dot{q}_1 = \partial H/\partial p_1 = g(q,p)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= g(q_1, q_2(q_1)), \ldots, q_n(q_1), \\ &\overbrace{-K(q_1, q_2(q_1), \ldots, q_n(q_1), p_2(q_1), \ldots, p_n(q_1), h)}^{p_1}, \\ &p_2(q_1), \ldots, p_n(q_1)) = G(q_1, h).\end{aligned}$$

Результат $q_1(t)$ интегрирования с учетом $q_i(q_1)$, $p_i(q_1)$, $i = \overline{2,n}$ и (20.7) определяет общее решение $q_i(t)$, $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ уравнений Гамильтона (19.12). ■

Функция $K(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, h)$ в (20.7) называется **функцией Уиттекера**, уравнения (20.9) — **уравнениями Уиттекера** (в § 24 уравнения (20.9) выводятся иным путем).

Определение 20.4. *Координата q_k называются* **отделимой**, *если от нее и от соответствующего ей импульса функция Гамильтона $H(q,p)$ зависит следующим образом*

$$H = H(t, z, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n),$$
$$z = f(q_k, p_k). \tag{20.10}$$

Циклическая координата q_k — частный случай отделимой координаты: $z = f(q_k, p_k) = p_k$.

Теорема 20.6 *Отделимой координате q_k соответствует первый интеграл $z = f(q_k, p_k)$.*

□ Вычисления с учетом (19.12) и (20.10)

$$\begin{aligned}\frac{df(q_k, p_k)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q_k} = 0\end{aligned}$$

приводят к нужному результату $f(q_k,p_k) = C$. ■

Пример 20.1. Частице в поле всемирного тяготения в сферических координатах соответствует функция Лагранжа

$$L = T - \varPi = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{\beta}{r}$$

и функция Гамильтона (см. (19.2), (19.4), (19.6))

$$H = T + \varPi = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{\beta}{r}. \qquad (20.11)$$

Координата φ — циклическая, что влечет по теореме 20.2 существование первого интеграла

$$p_\varphi = C_1. \qquad (20.12)$$

Система с гамильтанианом (20.11) — обобщенно–консервативна и вследствие теоремы 20.3 функция $H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi) = h_0$ — первый интеграл. С учетом (20.12) функции (20.11) можно придать требуемый теоремой 20.6 вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{z}{r^2}\right) - \frac{\beta}{r}, \quad z = p_\theta^2 + \frac{C_1^2}{\sin^2\theta},$$

т. е. функция

$$z = p_\theta^2 + \frac{C_1^2}{\sin^2\theta} = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = C_2 \qquad (20.13)$$

— первый интеграл. Естественное желание увеличить при помощи теоремы 20.1 количество функционально независимых первых интегралов приводит к неудаче: для каждой из трех скобок Пуассона выполняется $(\cdot,\cdot) \equiv 0$. Именно это — огорчительное на первый взгляд — обстоятельство дает возможность, не интегрируя и даже не составляя уравнений Гамильтона (19.12), решить задачу до конца: построить дополнительные к (20.11) — (20.13) три первых интеграла (§ 31).

Пример 20.2. Система, определенная гамильтонианом (20.11), является представителем достаточно широкого класса систем, заданных функцией Гамильтона (H, F_1, F_2 — произвольные функции)

$$H(F_2(F_1(q_1,p_1),q_2,p_2),p_3,q_4,p_4). \qquad (20.13)$$

Аналогично примеру 20.1, последовательное применение теорем 20.2, 20.3, 20.5 приводит к первым интегралам

$$\begin{aligned}
F_1(q_1,p_1) &= \alpha_1,\\
F_2(\alpha_1,q_2,p_2) &= F_2(F_1(q_1,p_1),q_2,p_2)=\alpha_2,\\
p_3 &= \alpha_3,\\
H(\alpha_2,\alpha_3,q_4,p_4) &= H(F_2(F_1(q_1,p_1),q_2,p_2),p_3,q_4,p_4)=\alpha_4.
\end{aligned} \tag{20.14}$$

Также, как в примере 20.1, для каждой из шести скобок Пуассона функций (20.14) выполняется $(\cdot,\cdot)=0$, что позволит в § 31 удвоить количество первых интегралов.

§ 21. Принцип Гамильтона. Замена переменных в уравнениях Лагранжа

Принцип Гамильтона являет собой пример вариационного подхода к исследованию вопроса: возможно ли движение $\tilde{q}(t)$ у конкретной механической системы или такое движение реализоваться не может. Далее график возможного движения в расширенном координатном пространстве будем для краткости называть **прямым путем,** а невозможного — **окольным** (рис. 21.1).

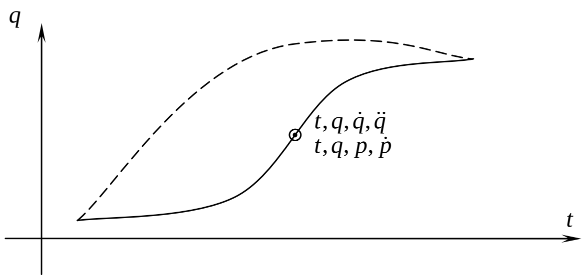

Рис. 21.1

Выделение прямых путей с помощью дифференциальных уравнений носит «микроскопический» характер: достаточно сколь угодно малой окрестности точки графика, чтобы извлечь числа t, q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ (или t, q, p, $\dot{q}$, $\dot{p}$), и, если в каждой точке эти числа удовлетворяют уравнениям Лагранжа (19.3) или уравнениям Гамильтона (19.12), то путь является прямым. Вариационный подход является «макроскопическим» : некоторый функционал ставит в соответствие число конечному участку пути, и в зависимости от поведения функционала при деформации (варьировании) пути — пунктир на рисунке 21.1 — решается вопрос о принадлежности пути к прямым или окольным. Введем точную терминологию.

Определение 21.1. Проварьировать *путь* $\tilde{q}(t)$ *означает включить его в однопараметрическое семейство путей* $q(t,\alpha)$, *причем выполняется* $\tilde{q}(t) = q(t,0)$. *Значение функционала зависит от граничных точек пути, поэтому для каждого члена семейства должны быть указаны: начальная точка* $t_0(\alpha)$, $q^0(\alpha) = q(t_0(\alpha),\alpha)$ *и конечная —* $t_1(\alpha)$, $q^1(\alpha) = q(t_1(\alpha),\alpha)$ *(рис. 21.2).*

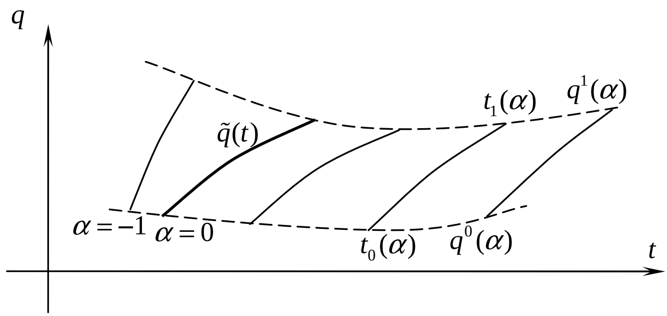

Рис. 21.2

Определение 21.2. Вариация $\delta\Phi$ *функции* $\Phi(t,q,\dot{q},\ddot{q},p,\dot{p})$ *есть дифференциал по* α

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

например,

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

$$\delta\dot{q}_i = \frac{\partial\dot{q}_i(t,\alpha)}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

$$\delta L(t,q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right).$$

Определение 21.3. Действием по Гамильтону *называется функционал*

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,q,\dot{q})dt, \tag{21.1}$$

для подсчета которого конкретный путь $q(t)$ подставляется в функцию Лагранжа, полученная функция времени $L(t,q(t),\dot{q}(t))$ интегрируется в заданных пределах t_0, t_1.

Далее потребуется формула вариации действия по Гамильтону. Имеется ввиду следующее: путь $\tilde{q}(t)$ варьируется (включается в семейство $q(t,\alpha)$), для каждого члена семейства вычисляется действие по Гамильтону

$$W(\alpha) = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(t,q(t,\alpha),\dot{q}(t,\alpha))dt \tag{21.2}$$

и строится его вариация

$$\delta W = \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha.$$

Теорема 21.1. *Вариация действия по Гамильтону определяется формулой*

$$\begin{aligned} \delta W &= \left.\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]\right|_1 - \\ &- \left.\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]\right|_0 - \\ &- \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i dt. \end{aligned} \tag{21.3}$$

В квадратных скобках в качестве p_i и H обозначены величины (см. (19.2), (19.5))

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{21.4}$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \tag{21.5}$$

с подстановкой вместо t, q, $\dot q$ значений в начальной и конечной точках пути, соответствующего параметру α. Вариации δq_i, δt в квадратных скобках вычисляются на кривых начальных и конечных значений.

□ Вариация δq_i под интегралом вычисляется при фиксированном времени:

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha,$$

а вариации δt, δq_i в квадратных скобках — с учетом того, что на кривых граничных данных при изменении α изменяются и t и q_i. Например, при $t = t_1(\alpha)$:

$$\delta t\big|_{t_1(\alpha)} = \frac{\partial t_1(\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha, \tag{21.6}$$

$$\begin{aligned}\delta q_i\ \big|_{t_1(\alpha)} &= \delta q_i(t_1(\alpha),\alpha) = \frac{dq_i(t_1(\alpha),\alpha)}{d\alpha}\delta(\alpha) = \\ &= \frac{\partial q_i(t_1(\alpha),\alpha)}{\partial t}\ \delta t\big|_{t_1(\alpha)} + \frac{\partial q_i(t_1(\alpha),\alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha = \\ &= \dot q_i\big|_{t_1(\alpha)}\ \delta t\big|_{t_1(\alpha)} + \left.\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{t_1(\alpha)}\delta\alpha.\end{aligned} \tag{21.7}$$

В процессе доказательства формулы (21.3) использованы формулы (21.6), (21.7) и обозначения

$$f'(\alpha) = \frac{df(\alpha)}{d\alpha},\ L_0 = L(t_0(\alpha),q^0(\alpha),\dot q^0(\alpha)),\ L_1 = L(t_1(\alpha),q^1(\alpha),\dot q^1(\alpha)).$$

Для обоснования формулы (21.3) продифференцируем действие (21.2) по α:

$$\begin{gathered}W'(\alpha) = L_1t_1' - L_0t_0' + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}q_i' + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i'\right)dt = \\ = L_1t_1' - L_0t_0' + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}q_i' - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}q_i' + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}q_i'\right)\right)dt =\end{gathered}$$

$$
= L_1 t_1' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot q_i} \frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\Bigg|_{t_1(\alpha)} -
$$

$$
- L_0 t_0' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_0}{\partial \dot q_i} \frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\Bigg|_{t_0(\alpha)} -
$$

$$
- \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) q_i' dt =
$$

$$
= L_1 t_1' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot q_i} \left(\frac{dq_i(t_1(\alpha),\alpha)}{d\alpha} - \dot q_i(t,\alpha)\Bigg|_{t_1(\alpha)} t_1' \right) -
$$

$$
- L_0 t_0' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_0}{\partial \dot q_i} \left(\frac{dq_i(t_0(\alpha),\alpha)}{d\alpha} - \dot q_i(t,\alpha)\Bigg|_{t_0(\alpha)} t_0' \right) -
$$

$$
- \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) q_i' dt =
$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot q_i} \frac{dq_i(t_1(\alpha),\alpha)}{d\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot q_i} \dot q_i \Bigg|_{t_1(\alpha)} \right) t_1' -
$$

$$
- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_0}{\partial \dot q_i} \frac{dq_i(t_0(\alpha),\alpha)}{d\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot q_i} \dot q_i \Bigg|_{t_0(\alpha)} \right) t_0' -
$$

$$
- \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) q_i' dt.
$$

Умножение на $\delta\alpha$ и использование обозначений (21.4) — (21.7) приводит к формуле (21.3). ■

При формулировке принципа Гамильтона используется специальное варьирование: все представители семейства $q(t,\alpha)$ имеют одинаковые начальные и конечные точки

$$
q(t_0,\alpha) = q^0, \quad q(t_1,\alpha) = q^1 \tag{21.8}
$$

(рис. 21.3).

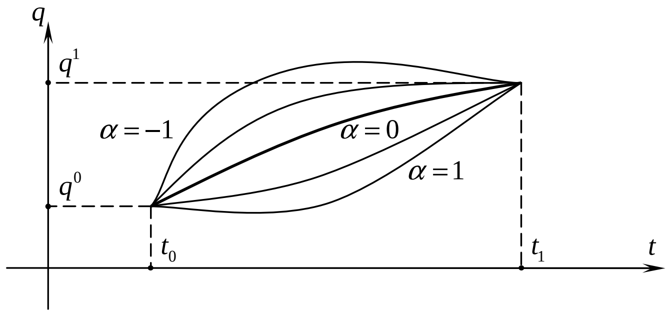

Рис. 21.3

При таком варьировании квадратные скобки в (21.3) обращаются в ноль, и формула принимает вид

$$\delta W = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt. \qquad (21.9)$$

Для обоснования принципа Гамильтона сформулируем без доказательства утверждение из вариационного исчисления.

Теорема 21.2. *Пусть $h(x)$ — непрерывная на интервале $[a,b]$ функция и для любой непрерывной на том же интервале функции $g(x)$ выполняется*

$$\int\limits_a^b g(x)h(x)dx = 0.$$

Тогда справедливо $h(x) \equiv 0$.

Теорема 21.3 (Принцип Гамильтона). *Путь $\tilde{q}(t)$ является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(t,\alpha)$, удовлетворяющем (21.8), для вариации действия по Гамильтону на этом пути выполняется*

$$\delta W|_{\alpha=0} = 0.$$

□ Принцип Гамильтона утверждает следующее:

$$\{\tilde{q}(t) \text{ — прямой путь}\} \iff \left\{ \forall\ \delta q_i = \left.\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha,\ \delta W|_{\alpha=0} = 0 \right\}.$$

Утверждение $\Rightarrow$ непосредственно следует из (21.9): так как прямой путь удовлетворяет уравнениям Лагранжа (19.3), выражения в круглых скобках под интегралом (21.9) обращаются в нуль. Утверждение $\Leftarrow$ есть следствие независимости обобщенных координат (возможно варьирование, при котором $\delta q_k \neq 0$, $\delta q_i = 0$, $i \neq k$) и теоремы 21.2. ■

Принципом (началом) в классической механике называют утверждение, которое можно принять за основную динамическую аксиому. Доказательство принципа Гамильтона есть по существу вывод для натуральных систем эквивалентности с другим принципом — вторым законом Ньютона:

$$\{\text{Второй закон Ньютона}\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\text{Уравнения \quad Лагранжа}\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\text{Принцип \ Гамильтона}\}.$$

В качестве примера применения принципа Гамильтона исследуем преобразование уравнений Лагранжа при заменах переменных. Система (19.3) определена функцией Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$. Всевозможные решения $q(t)$ системы при помощи неособенной замены переменных $\{t,\ q\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\hat{t},\ \hat{q}\}$ преобразуются в функции $\hat{q}(\hat{t})$. Спрашивается: будут ли функции $\hat{q}(\hat{t})$ решениями уравнений Лагранжа (19.3), порожденных некоторой функцией $\hat{L}(\hat{t},\hat{q},\dot{\hat{q}})$? Положительный ответ на этот вопрос дают следующие рассуждения. Возьмем произвольный прямой путь $q(t)$ в исходных переменных и произвольным (с учетом (21.8)) образом его проварьируем. Для действия по Гамильтону

$$W(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t,q(t,\alpha)\frac{dq(t,\alpha)}{dt}\right)dt \tag{21.10}$$

в силу принципа Гамильтона имеем при $\alpha = 0$ стационарную точку. В формуле для прямого пути $q(t)$ и в интеграле (21.10) сделаем переход к новым переменным

$$\begin{aligned} t &= t(\hat{t},\hat{q}), \\ q &= q(\hat{t},\hat{q}). \end{aligned} \tag{21.11}$$

Результат варьирования $q(t,\alpha)$ прямого пути отобразится в пространство новых переменных: $\hat{q}(\hat{t},\alpha)$. Действие по Гамильтону $W(\alpha)$ есть вычисление одного и того же интеграла в разных переменных, поэтому в новых переменных функция $W(\alpha)$ останется прежней. По-прежнему $\alpha = 0$ есть стационарная точка $W(\alpha)$, поэтому в силу принципа Гамильтона образ $\hat{q}(\hat{t})$ прямого пути $q(t)$ есть решение уравнений Лагранжа, а функция Лагранжа $\hat{L}$ совпадает с функцией, стоящей под интегралом в новых переменных. Подсчет этой функции приводит к результату

$$\hat{L}(\hat{t},\hat{q},\dot{\hat{q}}) = L\left(t(\hat{t},\hat{q}),q(\hat{t},\hat{q}),\left.\frac{dq}{dt}\right|_{\hat{t},\hat{q}}\right)\left.\frac{dt}{d\hat{t}}\right|_{\hat{t},\hat{q}}, \tag{21.12}$$

где использовано преобразование (21.11) и обозначено

$$\left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{\hat{t},\hat{q}} = \frac{\dfrac{\partial q_i(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{t}} + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial q_i(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{q}_k}\dot{\hat{q}}_k}{\dfrac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{t}} + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{q}_k}\dot{\hat{q}}_k},$$

$$\left.\frac{dt}{d\hat{t}}\right|_{\hat{t},\hat{q}} = \frac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{t}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial t(\hat{t},\hat{q})}{\partial\hat{q}_k}\dot{\hat{q}}_k.$$

Заметим, что по множеству решений $\hat{q}(\hat{t})$ нельзя однозначно восстановить функцию Лагранжа. Принцип Гамильтона дает результат (21.12) одного из таких восстановлений.

Другие функции Лагранжа $\hat{L}^*$ можно получить, например, добавлением к $\hat{L}$ полной производной по времени от некоторой функции $f(\hat{t},\hat{q})$:

$$\hat{L}^* = \hat{L} + \frac{df(\hat{t},\hat{q})}{d\hat{t}}. \tag{21.13}$$

Действительно, действия W, W^*, соответствующие функциям $\hat{L}$ и $\hat{L}^*$, при любом варьировании различаются на одно и то же число $f(\hat{t}_1,\hat{q}_1) - f(\hat{t}_0,\hat{q}_0)$:

$$W^*(\alpha) = \int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\left(\hat{L} + \frac{df}{d\hat{t}}\right)d\hat{t} = W(\alpha) + f(\hat{t}_1,\hat{q}_1) - f(\hat{t}_0,\hat{q}_0),$$

поэтому при $\alpha = 0$ действия W, W^* одновременно принимают или не принимают стационарное значение.

Таким образом, если путь является решением системы (19.3) с лагранжианом $\hat{L}$, то он же в силу принципа Гамильтона есть решение системы с функцией Лагранжа (21.13).

§ 22. Теорема Эмми Нётер

Теорема Нётер связывает симметрии в уравнениях Лагранжа (0.2) с законами сохранения — первыми интегралами. Применительно к уравнениям Лагранжа введем несколько понятий.

Определение 22.1. Преобразование симметрии *в уравнениях Лагранжа — неособенное преобразование* $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ *расширенного координатного пространства* $R^{n+1}(t,q)$*, поточечно переводящее каждое решение* $q(t)$ *в решение* $\hat{q}(\hat{t})$ *той же системы.*

В частности, преобразование $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ является преобразованием симметрии, если оно связано с лагранжевой системой следующим образом:

$$L\left(\hat{t},\hat{q},\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = L(t,q,\dot{q})\frac{dt}{d\hat{t}} \tag{22.1}$$

— обе части образованы одной и той же функцией $L(\cdot,\cdot,\cdot)$. Действительно, решение $q(t)$ системы, соответствующей функции Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$, под действием преобразования переходит в решение $\hat{q}(\hat{t})$ системы, соответствующей функции $\hat{L}(\hat{t},\hat{q},d\hat{q}/d\hat{t})$, вычисленной по формуле (21.12). «Снятие шляпы» с $\hat{L}$ в (21.12) означает: $\hat{q}(\hat{t})$ — решение той же системы, что и $q(t)$.

Определение 22.2. Преобразование вариационной симметрии *в системе с функцией Лагранжа* $L(t,q,\dot{q})$*, — неособенное преобразование* $t, q \longleftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$ *расширенного координатного пространства* $R^{n+1}(t,q)$*, удовлетворяющее условию (22.1).*

Вариационными симметриями не исчерпываются симметрии по определению 22.1. Например, если вместо формулы (22.1) имеет место соотношение (такие симметрии называются **дивергентными**)

$$L\left(\hat{t},\hat{q},\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) + \frac{df(\hat{t},\hat{q})}{d\hat{t}} = L(t,q,\dot{q})\frac{dt}{d\hat{t}},$$

то также, как в случае (22.1), в силу преобразования выполняется:

$\{q(t)$— решение$\}$ $\Rightarrow$ $\{\hat{q}(\hat{t})$— решение той же лагранжевой системы$\}$

(см. формулу (21.13) и сопутствующие формуле рассуждения).

Аналогично, если лагранжева система (0.2) и преобразование $t,\, q \longleftrightarrow \hat{t},\, \hat{q}$ связаны соотношением (такие симметрии называются **конформными**)

$$L\left(\hat{t},\hat{q},\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = cL(t,q,\dot{q})\frac{dt}{d\hat{t}}, \quad c = \mathrm{const},$$

то в силу однородности системы (0.2) относительно L также справедливо утверждение

$\{q(t)$— решение$\}$ $\Rightarrow$ $\{\hat{q}(\hat{t})$— решение той же лагранжевой системы$\}$.

Определение 22.3. Однопараметрическая группа преобразований *пространства $R^{n+1}(t,q)$ — решение*

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \hat{t}(t,q,\tau), \\ \hat{q}_i &= \hat{q}_i(t,q,\tau), \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{22.2}$$

автономной (стационарной) системы уравнений (независимая переменная — групповой параметр τ)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{d\tau} &= \xi(\hat{t},\hat{q}), \\ \frac{d\hat{q}_i}{d\tau} &= \eta_i(\hat{t},\hat{q}), \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{22.3}$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} \hat{t}(0) &= t, \\ \hat{q}_i(0) &= q_i, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{22.4}$$

Групповая сущность преобразований (22.2) далее не используется, поэтому не обсуждается.

По уравнениям (22.2) группы правые части системы (22.3) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \xi(t,q) &= \left.\frac{\partial \hat{t}(t,q,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}, \\ \eta_i(t,q) &= \left.\frac{\partial \hat{q}_i(t,q,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}, \quad i=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{22.5}$$

Определение 22.3. *Группа (22.2) является* **группой вариационных симметрий** *для системы с функцией Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$, если любое ее преобразование (при фиксированном значении τ) — преобразование вариационной симметрии в смысле определения 22.2.*

Для проверки: удовлетворяет ли пара $\{L(t,q,\dot{q})$ и группа (22.2)$\}$ определению (22.4), — удобнее условие (22.1) записать в эквивалентной форме

$$L\left(\hat{t},\hat{q},\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right)\frac{d\hat{t}}{dt} = L(t,q,\dot{q}). \tag{22.6}$$

Условие (22.1) «обслуживает» переход $t,\ q \longrightarrow \hat{t},\ \hat{q}$, а (22.6) — переход $\hat{t},\ \hat{q} \longrightarrow t,\ q$.

Теорема 22.1 (Эмми Нётер.) *Пусть группа (22.2) — группа вариационных симметрий для лагранжевой системы, определенной функцией $L(t,q,\dot{q})$. Тогда у системы есть первый интеграл*

$$w = \sum_{i=1}^{n} p_i\eta_i - \xi H, \tag{22.7}$$

где ξ, η_i — функции (22.5), а p_i, H — обозначения (19.4) для обобщенного импульса и (19.6) для функции Гамильтона:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(t,q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L(t,q,\dot{q}). \tag{22.8}$$

□ Потребуются формулы (учтены обозначения (22.5), то, что при $\tau=0$ вследствие (22.4) справедливы равенства $\hat{t}=t$, $\hat{q}=q$, и перестановочность дифференцирования по независимым переменным t и τ)

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d}{dt}\left.\frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \frac{d\xi}{dt}, \tag{22.9}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\frac{d\hat{q}_i}{d\hat{t}}=\left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\frac{\dfrac{d\hat{q}_i}{dt}}{\dfrac{d\hat{t}}{dt}}=$$

$$=\frac{\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\dfrac{d\hat{q}_i}{dt}\right)\left.\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right|_{\tau=0}-\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right)\left.\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\dfrac{d\hat{q}_i}{dt}}{\left.\left(\dfrac{d\hat{t}}{dt}\right)^2\right|_{\tau=0}}= \tag{22.10}$$

$$=\frac{d}{dt}\left.\frac{d\hat{q}_i}{d\tau}\right|_{\tau=0}-\left(\frac{d}{dt}\left.\frac{d\hat{t}}{d\tau}\right|_{\tau=0}\right)\frac{dq_i}{dt}=\frac{d\eta_i}{dt}-\dot{q}_i\frac{d\xi}{dt}.$$

Утверждение (22.7) доказывается дифференцированием условия (22.6) по τ при $\tau=0$ с учетом формул (22.4), (22.9), (22.10), уравнений Лагранжа (0.2) и обозначений (22.5), (22.8):

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{d\eta_i}{dt}-\dot{q}_i\frac{d\xi}{dt}\right)+L\frac{d\xi}{dt}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\eta_i-\xi\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)\right\}=\frac{dw}{dt}=0.\ \blacksquare$$

Пример 22.1 (В.Ф.Журавлев). Для свободной частицы с лагражианом

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \tag{22.11}$$

делается замена переменных (α, β — постоянные, τ — групповой параметр)

$$\begin{aligned}\hat{t}&=te^{\alpha\tau},\\ \hat{q}&=qe^{\beta\tau}.\end{aligned} \tag{22.12}$$

Подстановка (22.11) и (22.12) в левую часть условия (22.6) для вариационной симметрии приводит к результату

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right)^2\frac{d\hat{t}}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 e^{(\alpha-2\beta)\tau}$$

и к выводу, что (22.12) — группа вариационных симметрий для системы с функцией Лагранжа (22.11) при $\alpha-2\beta=0$, например, при $\alpha=2$, $\beta=1$. При этих значениях формулы (22.5) и (22.8) приводят к функциям

$$\xi=2t,\quad \eta=q,\quad p=\dot{q},\quad H=L=\frac{1}{2}\dot{q}^2,$$

которые определяют первый интеграл (22.7)

$$w=\dot{q}q-t\dot{q}^2.$$

В следующем примере теорема 22.1 обосновывает сохранение для замкнутой системы полной механической энергии, импульса и момента импульса.

Пример 22.2. Положение материальных точек задается в ортонормированной системе координат:

$$\mathbf{r}_i=x_i\mathbf{i}+y_i\mathbf{j}+z_i\mathbf{k},\quad i=\overline{1,N}.$$

Предполагается, что потенциальная энергия $\varPi(r_{ik})$ зависит только от расстояний r_{ik} между точками:

$$r_{ik}^2=|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|^2=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2.$$

Системе соответствует функция Лагранжа

$$L=T-\varPi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-\varPi(r_{ik}), \tag{22.13}$$

обобщенные импульсы

$$p_i^x=m_i\dot{x}_i,\quad p_i^y=m_i\dot{y}_i,\quad p_i^z=m_i\dot{z}_i$$

и функция Гамильтона (в лагранжевых переменных)

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \Pi(r_{ik}).$$

Запишем также левую часть условия (22.6) для проверки конкретного преобразования на вариационную симметрию:

$$L\frac{d\hat{t}}{dt} = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{y}_i}{d\hat{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{z}_i}{d\hat{t}}\right)^2\right] - \Pi(\hat{r}_{ik})\right\}\frac{d\hat{t}}{dt}, \tag{22.14}$$

где обозначено

$$\hat{r}_{ik}^2 = (\hat{x}_i - \hat{x}_k)^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_k)^2 + (\hat{z}_i - \hat{z}_k)^2. \tag{22.15}$$

Приведем несколько групп вариационных симметрий для системы с функцией Лагранжа (22.13), соответствующие группам функции (22.5) и первые интегралы (22.7):

$$w = \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i\eta_i^x + \dot{y}_i\eta_i^y + \dot{z}_i\eta_i^z) - \xi H. \tag{22.16}$$

1. Сдвиг по времени t

$$\begin{aligned} &\hat{t} = t - \tau, \qquad \hat{x}_i = x_i, \qquad \hat{y}_i = y_i, \qquad \hat{z}_i = z_i;\\ &\xi = -1, \qquad \eta_i^x = 0, \qquad \eta_i^y = 0, \qquad \eta_i^z = 0. \end{aligned} \tag{22.17}$$

Подстановка преобразования (22.17) в выражение (22.14) приводит к выводу, что условие (22.6) выполнено, и у системы есть первый интеграл (22.16):

$$w = H = T + \Pi. \tag{22.18}$$

Преобразование (22.17) определяет по теореме 22.1 первый интеграл (22.18) — полную механическую энергию — для любой консервативной системы.

2. Сдвиг по координате x

$$\begin{aligned} &\hat{t} = t, \qquad \hat{x}_i = x_i + \tau, \qquad \hat{y}_i = y_i, \qquad \hat{z}_i = z_i;\\ &\xi = 0, \qquad \eta_i^x = 1, \qquad \eta_i^y = 0, \qquad \eta_i^z = 0. \end{aligned}$$

Так как общий для всех точек сдвиг по одной из координат не меняет расстояний между точками — в (22.15) $\hat{r}_{ik} = r_{ik}$, — условие (22.6) выполнено, и у системы есть первый интеграл (22.16)

$$w = P_x = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i$$

— проекция импульса системы на ось x. Аналогичные построения приводят к выводу, что проекции импульса на другие оси также сохраняются, т. е. во время движения импульс $\mathbf{P}$ системы остается неизменным.

3. Поворот вокруг оси z

$$\begin{array}{llll} \hat{t} = t, & \hat{x}_i = x_i \cos\tau - y_i \sin\tau, & \hat{y}_i = x_i \sin\tau + y_i \cos\tau, & \hat{z}_i = z_i; \\ \xi = 0, & \eta_i^x = -y_i, & \eta_i^y = x_i, & \eta_i^z = 0. \end{array} \tag{22.19}$$

Ортогональные преобразования группы (22.19) не изменяют суммы квадратов, поэтому кинетическая энергия в (22.14) не зависит от параметра τ. Преобразования поворота (22.19) не изменяют также расстояния между точками системы: в (22.14) и (22.15) $\hat{r}_{ik} = r_{ik}$. Таким образом, условие (22.6) вариационной симметрии выполнено, что приводит к первому интегралу (22.16)

$$w = K_z = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)$$

— проекции момента импульса на ось z. Аналогичные построения приводят к выводу, что сохраняются проекции K_x, K_y и сам вектор $\mathbf{K}_0$ момента импульса относительно начала координат.

§ 23. Характер экстремума действия по Гамильтона

Принцип Гамильтона утверждает, что при любом варьировании с закрепленными конечными точками на прямом пути выполняется

$$\left. \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0,$$

т. е. $\alpha = 0$ есть стационарная точка функции $W(\alpha)$. Тип стационарной точки зависит от наличия или отсутствия на исследуемом пути **кинетических фокусов**.

Для линейных систем уравнений Лагранжа

$$A(t)\ddot{q} + B(t)\dot{q} + C(t)q = f(t), \quad q \in R^n \tag{23.1}$$

фокусы определяют не только характер экстремума действия по Гамильтона, но и влияют на единственность решения краевой задачи: поиск решения $q(t)$, проходящего через две точки $(t_0,\ q^0)$, $(t_1,\ q^1)$ расширенного координатного пространства. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение линейной системы в нормальном виде

$$\dot{x} = D(t)x + f(t), \quad x \in R^m$$

имеет следующий вид

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + F(t,t_0),$$

где $\Phi(t,t_0)$ — переходная матрица однородной системы $\dot{x} = D(t)x$, $F(t,t_0)$ — функция, определяемая $f(t)$ и $\Phi(t,t_0)$, $x_0 = x(t_0)$ — начальные условия. Так как уравнения Лагранжа представимы в нормальном виде, то общее решение системы (23.1) также линейно выражается через начальные данные $q^0 = q(t_0)$, $\dot{q}^0 = \dot{q}(t_0)$:

$$q(t,t_0,q^0,\dot{q}^0) = \Phi_1(t,t_0)q^0 + \Phi_2(t,t_0)\dot{q}^0 + F(t,t_0). \tag{23.2}$$

Рассмотрим конкретный прямой путь в расширенном координатном пространстве, соответствующий начальным данным t_0, q^0, $\dot{q}^0$. Так как при $t = t_0$ выполняется $q(t_0,t_0,q^0,\dot{q}^0) = q^0$, то для матриц Φ_1, Φ_2 справедливо

$$\Phi_1(t_0,t_0) = E, \quad \Phi_2(t_0,t_0) = 0. \tag{23.3}$$

При $t_1 > t_0$ возможны два варианта.

Первый:

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(t_1,t_0,q^0,\dot{q}^0)}{\partial \dot{q}^0_k} \right\| = \det \Phi_2(t_1,t_0) \neq 0.$$

В этом случае краевая задача $(t_0,\ q^0)$, $(t_1,\ q^1 = q(t_1,t_0,q^0,\dot{q}^0))$ имеет единственное решение: из уравнения (23.2), в которое вместо t, q подставлено t_1, q^1, однозначно вычисляется $\dot{q}_0$, т. е. через две точки $(t_0,\ q^0)$, $(t_1,\ q^1)$ пространства R^{n+1} проходит единственное решение $q(t)$.

Второй:

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(t_f,t_0,q^0,\dot q^0)}{\partial \dot q_k^0} \right\| = \det \Phi_2(t_f,t_0) = 0. \qquad (23.4)$$

Равенство (23.4) приводит к определению фокусов, справедливому как для линейных, так и для нелинейных систем.

Определение 23.1. *Две точки $(t_0,\ q^0)$, $(t_f,\ q^f)$ расширенного координатного пространства R^{n+1}, расположенные на решении*

$$q(t) = q(t,t_0,q^0,\dot q^0)$$

называются **сопряженными кинетическими фокусами***, если справедливо равенство*

$$\det \left\| \frac{\partial q_i(t_f,t_0,q^0,\dot q^0)}{\partial \dot q_k^0} \right\| = 0, \qquad (23.5)$$

совпадающее для линейных систем (23.1) с равенством

$$\det \Phi_2(t_f,t_0) = 0 \qquad (23.6)$$

для матрицы Φ_2 в общем решении (23.2) (см. (23.4)).

В ситуации фокусов для линейной системы вследствие (23.6) существует нетривиальное решение $z \neq 0$ системы

$$\Phi_2(t_f,t_0)z = 0. \qquad (23.7)$$

Решение z порождает семейство $q(t,\alpha)$ разных прямых путей

$$q(t,t_0,q^0,\dot q^0 + \alpha z) = \Phi_1(t,t_0)q^0 + \Phi_2(t,t_0)(\dot q^0 + \alpha z) + F(t), \qquad (23.8)$$

при любом числе α решающих краевую задачу $(t_0,\ q^0)$, $(t_f,\ q^f)$: влияние αz на границах исчезает вследствие (23.3) и (23.7). Обратно, если по крайней мере два разных прямых пути ($\dot q^0 \neq \dot{\tilde q}^0$) решают краевую задачу $(t_0,\ q^0)$, $(t_f,\ q^f)$, то разность двух уравнений (23.2) для этих путей, при $t = t_f$ приводит к выводу, что система (23.7) имеет нетривиальное решение $z = \dot q^0 - \dot{\tilde q}^0 \neq 0$, следовательно, для матрицы $\Phi_2(t_f,t_0)$ выполнено условие (23.6), а краевую задачу решает семейство (23.8) разных прямых путей.

Проведенные рассуждения дают возможность считать, что доказана

Теорема 23.1. *Для линейной системы следующие утверждения эквивалентны:*

1. две точки $(t_0,\, q^0)$, $(t_f,\, q^f)$, *в соответствии с определением 23.1 — сопряженные кинетические фокусы;*

2. по крайней мере два разных решения (23.2) уравнений Лагранжа (23.1) проходят через точки $(t_0,\, q^0)$, $(t_f,\, q^f)$*;*

3. через точки $(t_0,\, q^0)$, $(t_f,\, q^f)$, *проходит однопараметрическое семейство* $q(t{,}\alpha)$ *различных решений уравнений Лагранжа.*

Для нелинейных уравнений Лагранжа нет прямой связи между фокусами по определению 23.1 и единственностью решения краевой задачи (см. пример 23.2), но, как указывалось в начале параграфа, и в линейном и в нелинейном случаях наличие или отсутствие фокусов определяет тип стационарной точки действия по Гамильтону. Приведем без доказательств две теоремы[1], утверждения которых будут проиллюстрированы (с элементами доказательств в общем случае) на двух примерах.

Теорема 23.2 (необходимое условие минимума). *Если действие по Гамильтону (21.1) при любом варьировании прямого пути с закрепленными граничными точками* $(t_0,\, q^0)$, $(t_1,\, q^1)$ *достигает минимума на прямом пути, то при* $t_0 < t < t_1$ *отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные точке* $(t_0,\, q^0)$.

Следствие. *Если на прямом пути при* $t = t_f$, $t_0 < t_f < t_1$ *имеется кинетический фокус, то существует такое варьирование* $q(t{,}\alpha)$ *прямого пути с закрепленными граничными точками* $(t_0,\, q^0)$, $(t_1,\, q^1)$, *что действие по Гамильтону принимает на прямом пути стационарное значение, отличное от минимума, включая и нестрогий.*

Теорема 23.3 (достаточное условие строгого минимума). *Если на прямом пути при* $t_0 < t \le t_1$ *отсутствуют кинетические фокусы, сопряженные начальной точке* $(t_0,\, q^0)$, *то при любом нетривиальном варьировании* $q(t{,}\alpha)$ $(\partial q(t{,}0)/\partial\alpha \not\equiv 0)$ *с закрепленными граничными точками* $(t_0,\, q^0)$, $(t_1,\, q^1)$ *действие по Гамильтону (21.1) принимает на прямом пути строгий минимум.*

[1] С доказательствами можно ознакомиться, например, в п.26: Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд–во Ленингр. ун.–та, 1980. 288 с.

Пример 23.1. Для линейного осциллятора действие по Гамильтону, уравнение Лагранжа и решение при начальных условиях $t_0 = 0$, x_0, $\dot{x}_0$ имеют вид

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x^2)dt, \tag{23.9}$$

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{23.10}$$

$$x(t,x_0,\dot{x}_0) = x_0 \cos t + \dot{x}_0 \sin t \tag{23.11}$$

— частота ω учтена в масштабе времени t. Переменная

$$y = \frac{\partial x(t,x_0,\dot{x}_0)}{\partial \dot{x}_0}, \tag{23.12}$$

ответственная за появление кинетического фокуса (см. (23.5)), удовлетворяет уравнению (дифференцируем (23.10) по $\dot{x}_0$):

$$\ddot{y} + y = 0 \tag{23.13}$$

с начальными данными

$$y_0 = y(0) = 0, \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0) = 1, \tag{23.14}$$

которые с учетом (23.12) следуют из решения (23.11). Уравнения (23.10) и (23.13) совпадают с точностью до обозначений вследствие того, что уравнение (23.10) является линейным однородным (ср. уравнения (23.28) и (23.31) в примере 23.2). Из уравнения (23.13) с начальными данными (23.14) или из решения (23.11) с учетом (23.12) находится функция $y(t) = \sin t$, которая по условию (23.5) определяет первый кинетический фокус $(\pi, \ -x_0)$, сопряженный начальной точке $(0, x_0): \ t_f = \pi$ (половина периода) — первый нуль при $t > 0$ функции $y(t)$.

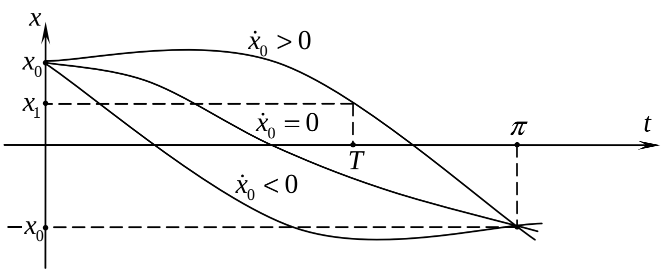

Рис. 23.1

В соответствии с теоремой 23.1 через точки $(\pi, -x_0)$, $(0, x_0)$ проходит однопараметрическое семейство решений ($\dot{x}_0$ в (23.11) играет роль параметра), причем для любого из прямых путей семейства фокусная ситуация возникает при $t_f = \pi$ — через половину периода (рис. 23.1). Для прояснения, как влияет фокус на характер стационарной точки у действия по Гамильтону, рассмотрим на интервале $[0,T]$ конкретный прямой путь $x(t)$ и проварьируем его: включим в семейство $x(t,\alpha)$, для которого справедливо

$$x(0,\alpha) \equiv x_0, \quad x(T,\alpha) \equiv x_1. \tag{23.15}$$

Обозначим

$$u(t) = x'(t,\alpha)|_{\alpha=0} \tag{23.16}$$

(штрих — дифференцирование по α). Вследствие (23.15) справедливы равенства

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0. \tag{23.17}$$

Предполагаем варьирование нетривиальным, т. е. выполняется

$$u(t) \not\equiv 0. \tag{23.18}$$

Для действия (23.9) справедливо соотношение (см.(21.9))

$$W'(\alpha) = -\int\limits_0^T (\ddot{x} + x)x'(t,\alpha)dt. \tag{23.19}$$

Для второй производной с учетом того, что $x(t,0)$ удовлетворяет (23.10), получим

$$W''(0) = -\int\limits_0^T (\ddot{u} + u)u dt. \tag{23.20}$$

С учетом (23.17) сделаем преобразование

$$\int\limits_0^T \ddot{u}u dt = \dot{u}u|_0^T - \int\limits_0^T \dot{u}^2 dt = -\int\limits_0^T \dot{u}^2 dt,$$

получим формулу

$$W''(0) = \int\limits_0^T (\dot{u}^2 - u^2)dt.$$

При $T \le \pi$ добавим к $W''(0)$ нулевое вследствие (23.17) слагаемое

$$-\int\limits_0^T \frac{d}{dt}(u^2 \mathrm{ctg}\, t)dt.$$

Подынтегральное выражение в пределах интегрирования определено:

$$\lim_{t\to 0} u(t)\mathrm{ctg}\, t = \lim_{t\to 0} \frac{u(t)}{\mathrm{tg}\, t} = \lim_{t\to 0} \dot{u}(t)\cos^2 t = \dot{u}(0) < \infty.$$

Использовано (23.17) и правило Лопиталя. Аналогично:

$$\lim_{t\to \pi} u(t)\mathrm{ctg}\, t = \dot{u}(\pi) < \infty.$$

Очевидные преобразования приводят к результату

$$W''(0) = \int\limits_0^T (\dot{u} - u\mathrm{ctg}\, t)^2 dt. \tag{23.21}$$

т. е., если $T \le \pi$ (при $0 < t < T$ нет фокусов, сопряженных начальной точке $(0, x_0)$), то выполняется $W''(0) \ge 0$.

Рассмотрим отдельно два случая, соответсвующие $T \le \pi$.

I. $T < t_f = \pi$ — при $t \in (0,T]$ фокус отсутствует. Предположение $W''(0) = 0$ приводит к уравнению $\dot{u} = u\mathrm{ctg}\, t$ с общим решением

$$u = C\sin t.$$

Вариант $C = 0$ противоречит (23.18), вариант $C \ne 0$ с учетом $0 < T < \pi$ противоречит (23.17). Следовательно, при любом (с учетом (23.15)) нетривиальном варьировании (см. (23.18)) выполняется $W''(0) > 0$: действие по Гамильтону на прямом пути принимает строгий минимум.

II. $T = t_f = \pi$. В этом случае варьирование $x(t,\alpha)$ прямого пути, приводящее к $u = x'(t,\alpha)|_{\alpha=0} = C\sin t$, $C \ne 0$ и к равенству $W''(0) = 0$, возможно. Разложение $x(t,\alpha)$ по α имеет следующий вид:

$$x(t,\alpha) = x_0\cos t + \dot{x}_0 \sin t + \alpha C\sin t + \alpha^k f(t). \tag{23.22}$$

Оставлено ближайшее к $\alpha C \sin t$ слагаемое (если оно есть) $\alpha^k f(t)$, $k \geq 2$, определяющее характер экстремума действия $W(\alpha)$. Так как у представителей семейства (23.22) совпадают граничные условия, для функции $f(t)$ должно выполняться

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0. \tag{23.23}$$

Предполагаем также, что выполняется

$$f(t) \not\equiv a \sin t, \quad a \neq 0, \tag{23.24}$$

иначе преобразованием параметра $\beta = \alpha C + \alpha^k a$ слагаемые $\alpha C \sin t$ и $\alpha^k a \sin t$ можно об‘единить, и место $\alpha^k f(t)$ в формуле (23.22) займет следующее слагаемое в разложении (если оно есть), для которого выполняется (23.24). Подстановка семейства (23.22) в (23.19) приводит к результату

$$W'(\alpha) = -k\alpha^{2k-1} \int\limits_0^T (\ddot{f} + f) f dt$$

с интегралом, совпадающим с интегралом в (23.20), причем граничные условия (23.17) и (23.23) для функций u и f под интегралами также совпадают. Дословное повторение рассуждений, в результате которых осуществлен переход от (23.20) к (23.21), приводит к формуле

$$W'(\alpha) = k\alpha^{2k-1} \int\limits_0^T (\dot{f} - f \operatorname{ctg} t)^2 dt. \tag{23.25}$$

Также как в пункте 1 предположение $W'(\alpha) \equiv 0$ приводит к запрещенному (23.24) равенству $f = a \sin t$ и к выводу

$$W^{(l)} = 0, l = \overline{1,2k-1}, \quad W^{(2k)} > 0, \tag{23.26}$$

т. е., во–первых, ненулевая производная наименьшего порядка имеет четный порядок, во–вторых, эта производная положительна.

Таким образом, если кинетические фокусы $(0, x_0)$, $(\pi, -x_0)$ есть граничные точки варьируемого прямого пути $x(t)$, то при варьировании $x(t,\alpha) = x(t) + \alpha \sin t$ (в (23.22) $f(t) \equiv 0$, все представители семейства $x(t,\alpha)$ — прямые пути) действие (23.9) не зависит от α : из (23.25) следует $W'(\alpha) \equiv 0$. При других нетривиальных варьированих

$x(t,\alpha)$ прямого пути $x(t)$ $(u(t) = x'(t,0) \not\equiv 0$, $x(t,\alpha) \not\equiv x(t) + \alpha C \sin t)$ действие (23.9) достигает на прямом пути строгого минимума: при $u(t) \not\equiv C \sin t$ из (23.21) следует $W''(0) > 0$.

III. В случае

$$T > \pi, \tag{23.27}$$

(на прямом $x(t)$ есть фокус $(\pi, \, -x_0)$, сопряженный начальной точке $(0, \, x_0)$, применим варьирование

$$x(t,\alpha) = x(t) + \alpha \sin \frac{n\pi t}{T},$$

где n - натуральное число. Подстановка в (23.20) выражения

$$u(t) = x'(t,0) = \sin \frac{n\pi t}{T}$$

приводит к результату

$$W''(0) = \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - 1 \right] \frac{T}{2},$$

из которого видно, что при $n = 1$ вследствие (23.27) выполняется

$$W''(0) < 0,$$

т. е. на прямом пути достигается максимум функции $W(\alpha)$. Если же число n выбрать из условия $n\pi > T$, то выполняется $W''(0) > 0$, т. е. на прямом пути функция $W(\alpha)$ принимает минимум.

Подведем итог полученным результатам. Прямой путь, соответствующий начальным данным $t_0 = 0$, x_0, $\dot{x}_0$, содержит в пространстве $R^2(t,x)$ ближайший к начальной точке $(0, \, x_0)$ кинетический фокус $(\pi, \, -x_0)$. Если на интервале $[0,T]$ фокус отсутствует $(T < \pi)$, то при любом нетривиальном варьировании (граничные точки не варьируются) действие по Гамильтону (23.9) принимает на прямом пути строгий минимум, что соответствует утверждению теоремы 23.3. Если фокусы расположены на границах интервала $[0,T = \pi]$, то существует варьирование $x(t,\alpha) = x(t) + \alpha \sin t$ прямого пути $x(t)$, для которого выполняется $W(\alpha) \equiv 0$ (проверяется подстановкой в (23.9)); при прочих варьированиях прямому пути соответствует строгий минимум. Если фокус расположен внутри интервала $[0,T]$ $(T > \pi)$, то в зависимости от варьирования действие (23.9) принимает на прямом пути как минимальное, так и максимальное значения.

Пример 23.2. Изучается уравнение

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \tag{23.28}$$

определяющее поведение маятника под действие силы тяжести — коэффициент перед синусом учтен в масштабе времени. Рассматриваются решения $x(t,\omega)$ уравнения (23.28) при начальных данных

$$t_0 = 0, \ x(0,\omega) = x_0 = 0, \ \dot{x}(0,\omega) = \dot{x}_0 = \omega \tag{23.29}$$

— маятнику в нижнем положении сообщается угловая скорость ω. При $|\omega| < 2$ движения маятника носят колебательный характер — на рис. 23.2 приведены решения, соответствующие а) $\omega = 0.8$, б) $\omega = 1.4$, в) $\omega = 1.8$.

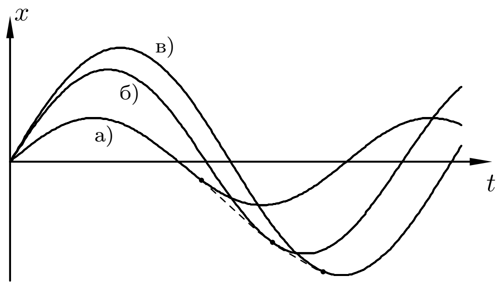

Рис. 23.2

При $|\omega| = 2$ — асимтотический переход из нижнего положения в верхнее. При $|\omega| > 2$ — монотонное возрастание координаты[1]. Условие (23.5) для сопряженного кинетического фокуса в данном случае имеет вид

$$\left.\frac{\partial x(t_f,\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega^*} = 0. \tag{23.30}$$

Для конструктивного нахождения фокуса на конкретном решении $x(t,\omega^*)$ подставим общее решение $x(t,\omega)$ в уравнение (23.28), в результате дифференцирования по ω получим

$$\ddot{y} + y \cos x(t,\omega) = 0, \tag{23.31}$$

[1] С. 152: Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

где обозначено

$$y = \frac{\partial x(t,\omega)}{\partial \omega}.$$

Для y полагаются начальные условия

$$y(0) = y_0 = 0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \neq 0. \qquad (23.32)$$

Первое — $y_0 = 0$ — следствие (23.29): $y_0 = \partial x(0,\omega)/\partial \omega = 0$; второе — $\dot{y}_0 \neq 0$ — принимается во избежание неинформативного тривиального решения $y(t) \equiv 0$. Фокусному условию (23.30) соответствует момент времени $t_f > 0$, для которого выполняется $y_f = y(t_f) = 0$. Таким образом, для нахождения на конкретном решении $x(t)$ кинетического фокуса в смысле определения 23.1 требуется совместно решать уравнения (23.28), (23.31) при начальных условиях (23.29), (23.32). Первому фокусу на решении $x(t)$ соответствует первый момент времени $t_f > 0$, для которого выполняется $y(t_f) = 0$.

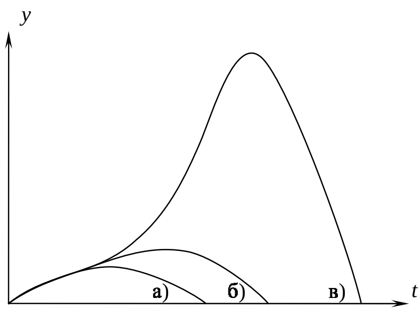

Рис. 23.3

Нетрудно видеть, что вследствие линейности по y уравнения (23.31) и начального условия $y_0 = 0$, неопределенность в начальном условии $\dot{y}_0 \neq 0$ на результат вычисления фокуса не влияет (обычно принимают $\dot{y}_0 = 1$). На рис. 23.3 приведены результаты интегрирования $y(t)$, соответствующие решениям на рис. 23.2 и $\dot{y}_0 = 1$: а) $t_f = 3.54 = 0.54 T_p$, б) $t_f = 4.71 = 0.64 T_p$, в) $t_f = 6.33 = 0.69 T_p$; T_p — период соответствующего решения. Звездочками на рис. 23.2 отмечены положения кинетических фокусов, сопряженных на решениях а), б), в) начальному положению $x_0 = 0$. В отличие от линейного осциллятора у нелинейного — фокус появляется не через половину периода, а в промежутке между половиной и тремя четвертями периода. Еще одно отличие: в фокус в нелинейном случае приходит единственное решение (при сравнении с близкими). Есть «далекие» другие решения, но этот факт не отличает положение фокуса от прочих положений: на рис. 23.4 показано решение б), другие решения соответствуют г) $\omega \cong -1.86$, д) $\omega \cong -1.924$, е) $\omega \cong -1.96$. В соответствии с теорией[1] геометрическое место фокусов для разных решений $x(t)$ есть огибающая пучка решений $x(t,\omega)$ (на рис. 23.2 огибающая показана пунктиром).

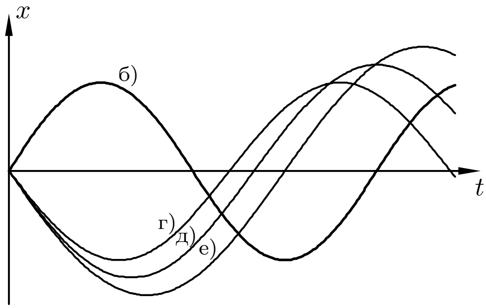

Рис. 23.4

Рассмотрим влияние фокусов на тип экстремума действия по Гамильтону. Уравнение (23.26) есть уравнение Лагранжа для действия по Гамильтону

$$W = \int_0^T (\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \cos x)dt. \tag{23.33}$$

Пусть $x(t)$, $x(0) = 0$, $x(T) = x_1$ — одно из решений уравнения (23.28). Решение варьируется, т. е. включается в нетривиальное семейство $x(t,\alpha)$ ($x(t,\alpha) \not\equiv x(t)$), для которого справедливо

$$x(t,0) = x(t),\ \ x(0,\alpha) = 0,\ \ x(T,\alpha) = x_1. \tag{23.34}$$

Семейство $x(t,\alpha)$ подставляется в функционал (23.33), результат подстановки дифференцируется по α (штрих далее — производная по α), после интегрирования с учетом (23.34) по частям приходим к формуле

$$W'(\alpha) = -\int_0^T (\ddot{x} + \sin x)x' dt, \tag{23.35}$$

[1] Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.

которая, в частности, для уравнения (23.28) доказывает принцип Гамильтона: при любом варьировании прямого пути выполняется $W'(0) = 0$. Введем обозначение

$$u(t) = \left.\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{23.36}$$

Для $u(t)$ вследствие (23.34) справедливы граничные условия

$$u(0) = 0, \qquad u(T) = 0. \tag{23.37}$$

Считаем функцию $u(t)$ достаточно гладкой и для нетривиальности семейства $x(t,\alpha)$ предполагаем

$$u(t) \not\equiv 0. \tag{23.38}$$

С учетом (23.28), (23.35), (23.36) вычисляем значение второй производной $W''(\alpha)$ при $\alpha = 0$:

$$W''(0) = -\int\limits_0^T (\ddot{u} + u\cos x)u dt, \tag{23.39}$$

Интегрируя при условии (23.37) по частям, приходим к эквивалентной формуле

$$W''(0) = \int\limits_0^T (\dot{u}^2 - u\cos x) dt. \tag{23.40}$$

Возможны три случая.

I. При $0 < t \leq T$ кинетический фокус отсутствует.

Рассмотрим решение $y(t)$ уравнения (23.31) с начальными данными (23.32) и функцию $u(t)$ (см. (23.36), (23.37)). По правилу Лопиталя раскроем с учетом (23.32) неопределенность

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(t)}{y(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\dot{u}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{\dot{u}(0)}{\dot{y}(0)} < \infty, \tag{23.41}$$

т. е. функция $u(t)/y(t))$ определена на всем интервале $0 \leq t \leq T$. В следующем преобразовании использованы граничные условия (23.37) и уравнение (23.31)

$$0 = \frac{u^2\dot{y}}{y}\Bigg|_0^T = \int\limits_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{u^2\dot{y}}{y}\right)dt = \int\limits_0^T \left(\frac{2u\dot{u}\dot{y}}{y} - u^2\cos x - \frac{u^2\dot{y}^2}{y^2}\right)dt. \tag{23.42}$$

Разность выражений (23.40) и (23.42), приводит к результату

$$W''(0) = \int\limits_0^T \left(\dot{u} - \frac{u\dot{y}}{y}\right)^2 dt, \tag{23.43}$$

который показывает, что при любом варьировании выполняется

$$W''(0) \geq 0.$$

Случай $W''(0) = 0$ исключает цепь утверждений (учитывается (23.38)):

$$\{W''(0) = 0\} \Rightarrow \left\{\dot{u} - \frac{u\dot{y}}{y} = 0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{y(t) = Cu(t), C = \mathrm{const}\} \Rightarrow \{y(T) = Cu(T) = 0\},$$

что противоречит отсутствию фокуса при $t = T$. Таким образом при любом нетривиальном варьировании $x(t,\alpha)$ действие по Гамильтону (23.33) принимает на решении $x(t)$ уравнения (23.28) строгий минимум.

II. Фокус — конечная точка решения $x(t)$: $t_f = T$, $y(T) = 0$.

В данном случае функция $u(t)/y(t)$ также определена на интервале $0 \leq t \leq T$ (при $t \to T$ результат аналогичен (23.41)), поэтому формула (23.43) справедлива. Отличие заключается в том, что существуют варьирования, при которых выполняется $y(t) = Cu(t)$, $C = \mathrm{const}$, например, $x(t,\alpha) = x(t)+\alpha y(t)$, что приводит к результату $W''(0) = 0$. Дальнейшие вычисления в случае $y(t) = Cu(t)$ определяют третью производную

$$C^3 W'''(0) = \int\limits_0^T y^3 \sin x dt.$$

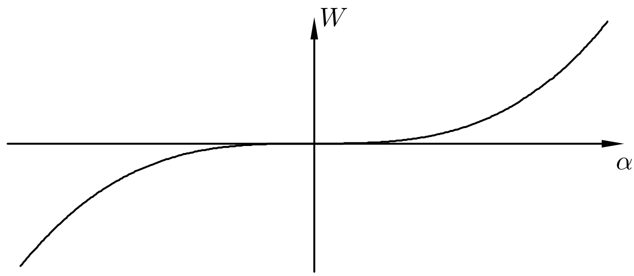

Рис. 23.5

С учетом (23.28), $y(0) = y(T) = 0$ и первого интеграла $\dot{x}\dot{y} + y \sin x = \omega \dot{y}_0$ системы (23.28), (23.31) проведем вычисления

$$C^3 W'''(0) = \int_0^T y^3 \sin x dt = -\int_0^T y^3 \ddot{x} dt = -\left(y^3 \dot{x}\right)\Big|_0^T + 3\int_0^T y^2 \dot{y}\dot{x} dt =$$

$$= 3\int_0^T y^2 (\omega \dot{y}_0 - y \sin x) dt = 3\omega \dot{y}_0 \int_0^T y^2 dt - 3C^3 W'''(0),$$

из которых следует

$$W'''(0) = \frac{3\omega \dot{y}_0}{4C^3} \int_0^T y^2 dt,$$

т. е. при нетривиальном варьировании $u(t) = y(t)/C$ $(0 < C < \infty)$ нетривиального решения $x(t)$ $(\omega \neq 0)$ точка $\alpha = 0$ является для функции $W(\alpha)$ точкой перегиба. На рис. 23.5 приведен график функции $W(\alpha)$, соответствующий постоянным: $\omega = 1.4$, $\dot{y}_0 = 1$, $C = 1$. Для тривиального решения $x(t) \equiv 0$ и для третьей производной при варьировании $y(t) = Cu(t)$ выполняется $W'''(0) = 0$. Подсчет следующей производной приводит к результату

$$W^{(IV)}(0) = \int_0^T u^4 dt = \int_0^T \sin^4 t dt = \frac{3C^4 \pi}{8} > 0$$

(в данном случае $u(t) = \sin t$, $t_f = T = \pi$), т. е. и при варьировании, для которого выполняется $y(t) = Cu(t)$, $C \neq 0$, действие $W(\alpha)$ принимает строгий минимум на прямом пути $x(t) \equiv 0$.

Таким образом, в случае, когда фокусы на границах и только на границах прямого пути, при варьировании $u(t) = y(t)/C$ $(0 < C < \infty)$ нетривиального решения $x(t) \not\equiv 0$ стационарность действия по Гамильтону соответствует точке перегиба. В прочих случаях ($u(t) = y(t)/C$, $0 < C < \infty$ для решения $x(t) \equiv 0$ или $u(t) \neq y(t)/C$ для любого решения) — строгому минимуму (см. (23.43)).

III. Для фокуса выполнено: $0 < t_f < T$.

Приведём два варианта варьирования: в первом случае функционал (23.33) принимает на решении строгий минимум; во втором — строгий максимум. Потребуются минимальные сведения из теории Штурма-Лиувилля[1]. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (23.28) с начальными данными (23.29). Оператор l определим формулой

$$lu = -(\ddot{u} + u\cos x(t)). \tag{23.44}$$

В частности, уравнение (23.41) эквивалентно равенству $ly = 0$. Рассмотрим для оператора l задачу на собственные функции

$$lu = -(\ddot{u} + u\cos x(t)) = \lambda u,\ \ u(0) = 0,\ \ u(T) = 0 \tag{23.45}$$

и на основе ее нетривиального решения λ, $u(t) \not\equiv 0$ организуем варьирование решения $x(t)$ уравнения (23.28): $x(t,\alpha) = x(t) + \alpha u(t)$. Равенство (23.39) с учетом (23.45) примет вид

$$W''(0) = \lambda \int\limits_0^T u^2(t)dt, \tag{23.46}$$

т. е. характер экстремума у функции $W(\alpha)$ определяется знаком собственного числа λ. Для данного оператора (23.44) справедливы следующие два результата.

[1]Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.

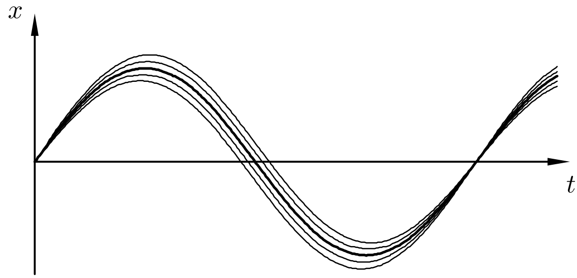

Рис. 23.6

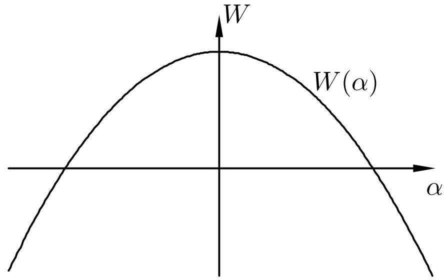

Рис. 23.7

1. Задача (23.45) имеет счетное количество решений

$$\lambda_k,\, u_k(t),\ \ k = 1,\, 2,\, 3, \ldots,$$

причем выполняется[1], $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$ т. е. существует положительное собственное число $\lambda_k > 0$, а варьирование $x(t,\alpha) = x(t) + \alpha u_k(t)$ с использованием соответствующей собственной функции $u_k(t)$ определит вследствие (23.46) строгий минимум функции $W(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

2. Вследствие того, что решение $y(t)$ задачи $ly = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) \neq 0$, совпадающей с (23.31), (23.32), имеет корень $y(t_f)$ при $t_f < T$, выполняется[2], $\lambda_1 < 0$ а варьирование $x(t,\alpha) = x(t) + \alpha u_1(t)$ с использованием собственной функции $u_1(t)$ определит строгий максимум функции $W(\alpha)$ при $\alpha = 0$ (см. (23.46)). Вычисления для

[1]Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с., теорема на стр. 135.

[2]Буслаев В.С. Вариационное вычисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с., теорема на стр. 151.

решений на рис. 23.2 привели к результатам: а) $\lambda_1 = -0.610$; б) $\lambda_1 = -0.342$; в) $\lambda_1 = -0.111$. В каждом случае T — период решения. На рис. 23.6 приведен результат варьирования для решения б): $\alpha = 0$; $\alpha = \pm 0.1$; $\alpha = \pm 0.2$. На рис. 23.7 приведен для решения б) график функции $W(\alpha)$.

§ 24. Интегральные инварианты. Принцип Мопертюи–Лагранжа

Для гамильтоновых систем, кроме законов сохранения — первых интегралов — имеют место законы сохранения особого вида: интегральные инварианты. Потребуется понятие **трубки прямых путей.**

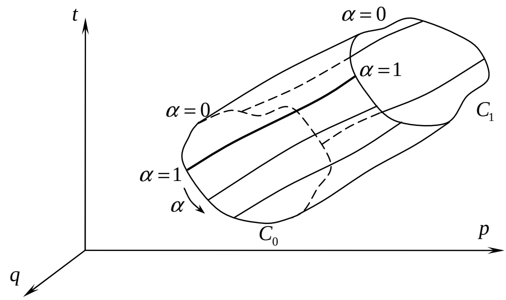

Рис. 24.1

В $(2n+1)$ — мерном расширенном фазовом пространстве переменных $(t,\ q,\ p)$ рассматривается контур C_0 : $t^0(\alpha)$, $q^0(\alpha)$, $p^0(\alpha)$. Предполагается $0 \le \alpha \le 1$ и (рис. 24.1)

$$t^0(0) = t^0(1), \quad q^0(0) = q^0(1), \quad p^0(0) = p^0(1). \tag{24.1}$$

Каждая точка t^0, q^0, p^0 контура C_0 есть полный набор начальных данных для уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1,n} \end{aligned} \tag{24.2}$$

и определяет единственное решение — прямой путь. Совокупность прямых путей $q(t,\alpha)$, $p(t,\alpha)$, проходящих через точки контура C_0, носит название **трубки прямых путей** (рис 24.1). Зададим еще один контур $C_1: \ t^1(\alpha), \, q^1(\alpha), \, p^1(\alpha)$, охватывающий трубку. Параметры α, параметризующие контуры C_0, C_1, считаем **согласованными**: при каждом значении α соответствующие точки контуров C_0, C_1 расположены на одном том же прямом пути. Трубка прямых путей и контуры C_0, C_1 определяют действие по Гамильтону

$$W(\alpha) = \int\limits_{t^0(\alpha)}^{t^1(\alpha)} L(t,q(t,\alpha),\dot{q}(t,\alpha))dt$$

как функцию α. Вследствие (24.1) справедливо равенство

$$W(0) = W(1). \tag{24.3}$$

Для семейства прямых путей формула вариации действия по Гамильтону (21.3)) имеет вид

$$\delta W(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_{C_1} - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_{C_0}$$

— на прямых путях интеграл в (21.3) обращается в нуль. Проинтегрируем полученное выражение по α в пределах от 0 до 1. В результате в левой части получим (см. (24.3))

$$\int\limits_0^l \delta W(\alpha) = W(1) - W(0) = 0,$$

вследствие чего интегрирование правой части приводит к равенству

$$\oint\limits_{C_1} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t = \oint\limits_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t. \tag{24.4}$$

Интегральное выражение

$$J_{\text{ПК}} = \oint\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t \tag{24.5}$$

носит название: основной относительный **интегральный инвариант Пуанкаре-Картана**. Равенство (24.4) раскрывает смысл инвариантности: по любым двум согласованным контурам C_0 и C_1, охватывающим трубку прямых путей, порожденных функцией H, входящей в $J_{\text{ПК}}$, интеграл $J_{\text{ПК}}$, принимает одно и то же значение. Термин «относительный» означает, что инвариантность в описанном смысле имеет место, когда интегрирование в $J_{\text{ПК}}$, проводится по замкнутому контуру.

Если контуры есть сечение трубки плоскостями $t = \text{const}$ (изохронные контуры, рис. 24.2), то инвариант (24.5) примет вид

$$J_{\text{П}} = \oint_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \tag{24.6}$$

универсального **интегрального инварианта Пуанкаре**. Универсальность означает инвариантность для любой гамильтоновой системы.

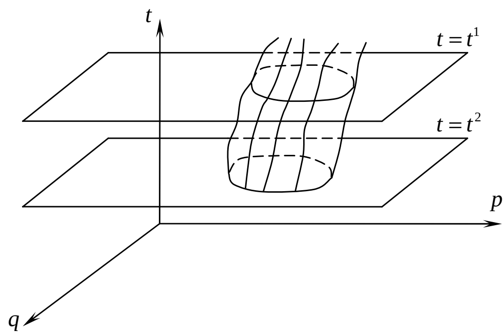

Рис. 24.2

Изохроннные контуры далее будем обозначать $\bar{C}$.

Инвариантность интегралов $J_{\text{П}}$, $J_{\text{ПК}}$ является принципом механики: может быть принята за основную аксиому динамики. Теоремы, обосновывающие эту мысль, носят название **обратных теорем теории интегральных инвариантов**.

Теорема 24.1. *Пусть трубка прямых путей образована решениями некоторой системы дифференциальных уравнений.*

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= Q_i(t,q,p), \\ \dot{p}_i &= P_i(t,q,p), \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{24.7}$$

Пусть на изохронных контурах имеет место инвариантность интеграла Пуанкаре (24.6). Тогда система (24.7) гамильтонова, т. е.

$$\exists H(t,q,p): \; Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

□ Произвольный контур $\bar{C}$ есть результат переноса решениями $q(t,\alpha)$, $p(t,\alpha)$ системы (24.7) точек контура начальных состояний $\bar{C}_0$ (рис. 24.2). Это обстоятельство позволяет свести интегрирование по контуру $\bar{C}$ к интегрированию по контуру $\bar{C}_0$.

$$\begin{aligned} J_{\Pi}(t) &= \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \oint\limits_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} p_i(t,\alpha) \delta q_i(t,\alpha) = \\ &= \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n} p_i(t,\alpha) \frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

По условию теоремы $J_{\Pi}(t)$ =const, что влечет за собой равенство

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{\Pi}}{dt} &= \oint\limits_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \\ &= \oint\limits_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} (P_i \delta q_i + p_i \delta Q_i) = \\ &= \oint\limits_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) + \oint\limits_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \delta (p_i Q_i) = \\ &= \oint\limits_{\bar{C}_0} \sum_{i=1}^{n} (P_i \delta q_i - Q_i \delta p_i) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\bar{C}_0$ — произвольный контур, из полученного результата следует утверждение теоремы.

$$\exists H(t,p,q): \sum_{i=1}^{n}(P_i\delta q_i - Q_i\delta p_i) = -\delta H(t,p,q) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right),$$

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

(δH — изохронный дифференциал: при фиксированном t). ■

Теорема 24.2. *Пусть трубка прямых путей образована решениями системы (24.7) . Пусть по любым двум согласованным контурам* C_0 *и* C_1*, охватывающим трубку прямых путей, интеграл типа Пуанкаре-Картана*

$$J_{\text{ПК}} = \oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \Phi(t,q,p)\delta t \tag{24.8}$$

принимает одно и то же значение. Тогда справедливы соотношения

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}. \tag{24.9}$$

□ Из инвариантности (24.8) следует, что на изохронных контурах $\bar{C}$ инвариантен интеграл Пуанкаре $J_{\text{П}}$, откуда по теореме 24.1 следует, что система (24.7) гамильтонова с некоторой функцией Гамильтона H. Таким образом, для системы (24.7) инвариантны два интеграла типа $J_{\text{ПК}}$: с функциями Φ и H. Так как на изохронных контурах $\bar{C}$ они совпадают, то они равны и на произвольных контурах C.

$$\oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \Phi\delta t = \oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t = \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i,$$

откуда следует равенство

$$\oint\limits_C (H - \Phi)\delta t = 0.$$

Контур C произволен, поэтому с некоторой функцией $G(t, q, p)$ справедливо соотношение

$$(H - \Phi)dt = dG(t,q,p) = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i}dp_i\right),$$

из которого следует

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial p_i} = 0,$$

$$H = \Phi + \frac{dG(t)}{dt},$$

т. е. система (24.7) — гамильтонова, и ее правые части связаны с функцией Φ в соответствии с утверждением (24.9) теоремы. ■

Инвариант (24.5) содержит компактную информацию о гамильтоновой системе (24.2). Например, если на согласованных контурах, охватывающих трубку прямых путей некоторой системы (24.7), интеграл

$$\oint\limits_C x\delta y + xy\delta z$$

принимает одно и то же значение, то сравнение с (24.5) приводит к следующему распределению ролей: $p = x$, $q = y$, $H = -xy$, $t = z$, и система (24.7), при помощи которой создавалась трубка, имеет вид

$$\frac{dy}{dz} = -y, \qquad \frac{dx}{dz} = x.$$

Теоремы 24.1 и 24.2 помогают разобраться в вопросах замены переменных в уравнениях Гамильтона. В частности, если замена переменных $\{t,\ q,\ p\} \longrightarrow \{\tilde{t},\ \tilde{q},\ \tilde{p}\}$ в уравнениях (24.2) и в интеграле (24.5) приводит для интеграла к результату

$$\oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\delta\tilde{q}_i - K(\tilde{t},\tilde{q},\tilde{p})\delta\tilde{t}, \tag{24.10}$$

где K — некоторая функция, то в новых переменных система (24.2) является гамильтоновой и определяется функцией Гамильтона $K(\tilde{t},\tilde{q},\tilde{p})$.

Поставим следующую задачу. Пусть в механической системе, заданной гамильтонианом $H(t,q,p)$, делается неособенный переход к новым координатам и новому «времени»

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= f_i(t,q), \quad i = \overline{1,n}, \\ \tilde{t} &= g(t,q), \end{aligned} \tag{24.11}$$

$$\det M \neq 0, \tag{24.12}$$

где обозначено

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial q_1} & \dfrac{\partial g}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial q_n} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial q_n} & \dfrac{\partial g}{\partial q_n} \\ & & & \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial t} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t} & \dfrac{\partial g}{\partial t} \end{array} \right\|. \tag{24.13}$$

Какому преобразованию

$$\tilde{p}_i = h_i(t,q,p) \tag{24.14}$$

требуется подвергнуть обобщенные импульсы, чтобы в результате замены переменных (24.11), (24.14) гамильтонова система (24.2) перешла бы опять в гамильтонову? Какова функция Гамильтона $K(\tilde{t},\tilde{q},\tilde{p})$ в новых переменных? Выбор p_i и K подчиним требованию, чтобы вследствие преобразования (24.11), (24.14) подынтегральные выражения в (24.5) и (24.10) были бы равны:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - K\delta \tilde{t}. \tag{24.15}$$

Раскроем дифференциалы $\delta\tilde{q}_i$, $\delta\tilde{t}$:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{q}_i &= \frac{\partial f_i}{\partial t}\delta t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\delta q_k, \\ \delta\tilde{t} &= \frac{\partial g}{\partial t}\delta t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial q_k}\delta q_k, \end{aligned}$$

подставим в правую часть (24.15), приравняем коэффициенты при дифференциалах δq_k, δt, получим соотношения

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\tilde{p}_i - \frac{\partial g}{\partial q_k}K &= p_k \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial t}\tilde{p}_i - \frac{\partial g}{\partial t}K &= -H,
\end{aligned} \tag{24.16}$$

или, используя обозначение (24.13),

$$M\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \\ -K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \\ -H \end{pmatrix}.$$

Вследствие условия (24.12) эта система решается однозначно относительно $\tilde{p}(t,q,p)$ (см. (24.14)) и $K(t,q,p)$. Для получения окончательного ответа требуется разрешить преобразование (24.11), (24.14) относительно t, q, p и подставить в K. Вообще говоря, возможность получить из (24.11), (24.14) функции $p_i(\tilde{t},\tilde{q},\tilde{p})$ является дополнительным требованием, не зависящим от (24.12) (ниже рассмотрен пример системы с функцией Гамильтона $H(t,q)$, подвергнутой преобразованию, соответствующему смене ролей времени t и одной из координат q_k).

Применим описанную процедуру для частного случая преобразования (24.11)

$$\tilde{q}_1 = t, \qquad \tilde{t} = q_1, \qquad \tilde{q}_i = q_i, \qquad i \neq 1, \qquad \tilde{t} = q_1 \tag{24.17}$$

— время t и координата q_1 меняются ролями. Подстановка в (24.16) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1 &= -H(t,q,p), \\
\tilde{p}_i &= p_i, i \neq 1, \\
K &= -p_1.
\end{aligned} \tag{24.18}$$

Для нахождения $K(\tilde{t},\tilde{q},\tilde{p}) = -p_1(\tilde{t},\tilde{q},\tilde{p})$ требуется решить относительно p_1 уравнение

$$\tilde{p}_1 = -H(\tilde{q}_1, \tilde{t}, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n, p_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n). \qquad (24.19)$$

Если переменная p_1 в $H(t,q,p)$ отсутствует, следует поменять ролями t и другую обобщенную координату. «Безнадежный» случай $H(t,q)$ из рассмотрения исключается. В этом случае, как было обращено внимание выше, из уравнений (24.17) и (24.18) нельзя найти зависимость $p_i = p_i(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$, $i = \overline{1,n}$ — уравнение (24.19) не решится относительно p_1 или импульса с другим номером.

Функция Гамильтона $K(\tilde{t}, \tilde{q}, \tilde{p})$ определит уравнения Гамильтона (24.7), в которых роль независимой переменной t играет координата q_1.

Для обобщенно–консервативной системы уравнение (24.19) принимает в исходных переменных вид

$$\tilde{p}_1 = -H(q,p) = -h. \qquad (24.20)$$

Учет (24.20) и возврат (24.17), (24.18) к исходным обозначениям для переменных приводит к функции

$$K(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_2,\ldots,p_n,h),$$

которая совпадает с функцией K (см. (20.7)) из § 20 (ср. способы их получения) и названа в § 20 **функцией Уиттекера**. Соответствующая K гамильтонова система

$$\begin{aligned} q_i' &= \frac{\partial q_i}{\partial q_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad i = \overline{2,n}, \\ p_i' &= \frac{\partial p_i}{\partial q_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = \overline{2,n}, \end{aligned}$$

для нахождения функций $q_i(q_1)$, $p_i(q_1)$,$i = \overline{2,n}$ совпадает с уравнениями (20.9), которые названы в § 20 **уравнениями Уиттекера**. Уравнения (20.9) были использованы в § 20 для понижения порядка обобщенно–косервативной системы на две единицы. Уравнения Уиттекера открывают возможность исследования геометрического — траекторного — поведения системы: вне зависимости от t. Помимо уравнений Уиттекера (аналога уравнений Гамильтона), можно определить **уравнения Якоби** (аналог уравнений Лагранжа) с

функцией Якоби (см. (19.14))

$$P = \sum_{k=2}^{n} p_k q_k' - K,$$

действие по Лагранжу (аналог действия по Гамильтону)

$$W^* = \int\limits_{q_1^0}^{q_1^1} P dq_1,$$

обосновать **принцип Мопертюи-Лагранжа:** для прямого пути должно выполняться

$$\delta W^* = 0$$

— при варьировании все пути должны удовлетворять (24.20) с одной и той же постоянной h, иметь одинаковые начальные q^0 и конечные точки q^1.

В заключение параграфа еще раз обратим внимание на аккуратность, с которой нужно подходить к утверждению: «Вычисление интеграла Пуанкаре–Картана по двум контурам, охватывающим трубку прямых путей, приводит к совпадающим результатам.» Утверждение с гарантией справедливо, если контуры согласованы, т. е. возможна такая параметризация контуров общим параметром α, что при каждом значении α соответствующие точки контуров расположены на одном и том же прямом пути. Совместно с студентами 552 группы МФТИ Н.В.Башкирцевым, А.В.Вертячих и А.А.Витушко был организован численный эксперимент, который показывает, что при рассогласовании контуров — каждый прямой путь пересекает один раз первый контур и несколько раз второй — интегрирование приводит к разным числам[2] . Исследование обсуждаемого вопроса «вручную» даже для простых уравнений весьма затруднительно. С применением вычислительной техники для линейного осциллятора с диссипацией проведено построение трубки прямых путей, охватывающих трубку контуров и интегрирование. Уравнению осциллятора

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (24.21)$$

[2] Яковенко Г.Н., Башкирцев Н.В., Вертячих А.В., Витушко А.А. Численное исследование интегральных инвариантов //Моделирование процессов управления и обработки информации: Межвед. сб. науч. тр./МФТИ. М., 1996. С.176–181.

соответствуют уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q} &= e^{-2nt} p, \\ \dot{p} &= -e^{2nt} \omega_0^2 q, \end{aligned} \tag{24.22}$$

вычисленные по функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\left(e^{-2nt}p^2 + \omega_0^2 e^{2nt} q^2\right). \tag{24.23}$$

Для перехода от (24.22) к (24.21) первое уравнение в (24.22) дифференцируется по t с подстановкой $\dot{p}$ из второго уравнения. Дальнейшее исследование проводится в предположении, что в уравнениях в (24.21) – (24.23) выполняются неравенства $\omega_0 > n > 0$. В этом случае решение уравнений (24.21) и (24.22) имеет вид

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{-nt}\left(q_0 \cos \omega t + \frac{p_0 + n q_0}{\omega} \sin \omega t\right), \\ p(t) &= e^{+nt}\left(p_0 \cos \omega t - \frac{n p_0 + \omega_0^2 q_0}{\omega} \sin \omega t\right), \end{aligned} \tag{24.24}$$

где обозначено (см. (24.22))

$$p_0 = p(0) = \dot{q}_0 = \dot{q}(0), \qquad q_0 = q(0), \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - n^2.$$

Обратим внимание на обстоятельство, поясняющее вид трубок прямых путей на рисунках: несмотря на диссипацию, функция $|p(t)|$ имеет тенденцию к возрастанию.

В расширенном координатном пространстве R^3 строится контур начальных состояний C_0 $(\alpha = [0,2\pi))$:

$$t_0 = 0, \qquad q_0 = \sin \alpha, \qquad p_0 = \cos \alpha \tag{24.25}$$

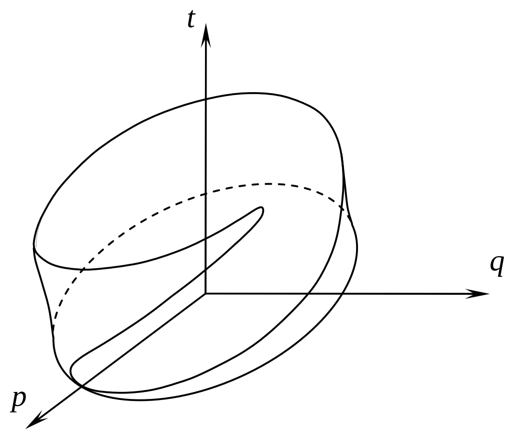

Рис. 24.3. Согласованный контур

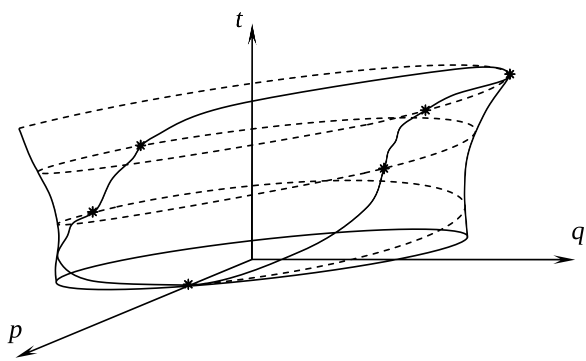

Рис. 24.4. Несогласованный контур

Каждой точке контура (24.25) соответствует единственное решение уравнений Гамильтона (24.23) — прямой путь (один путь изображен на рис. 24.4 пунктиром). Подстановка (24.5) в решение (24.4) определит в пространстве R^3 поверхность $p(t,\alpha)$, $q(t,\alpha)$ — трубку прямых путей (рис. 24.3, рис. 24.4). Построим другой контур C_1, охватывающий трубку прямых путей и согласованный с контуром C_0 : при каждом значении α соответствующие точки контуров C_0 и C_1 расположены на одном и том же прямом пути. На рисунке 24.3 согласованный контур есть результат подстановки в решение (24.24) начальных данных (24.25) $p = p(t,\alpha)$, $q = q(t,\alpha)$ и для разных решений разных сдвигов по t вдоль решения: $t = T \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, где $[0, T]$ —

диапазон изменения времени t на контуре C_1, т. е. контур C_1 параметризуется α следующим образом: $t = T\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $q = q(T\sin^2\frac{\alpha}{2},\alpha)$, $p = p(T\sin^2\frac{\alpha}{2},\alpha)$. Подстановка этих функций в подынтегральное выражение интеграла Пуанкаре-Картана (формула для H приведена в (24.23))

$$J = \oint\limits_C pdq - Hdt \qquad (24.26)$$

и численное интегрирование по α в пределах от 0 до 2π приводят к гарантированному теорией результату: $J(T) \equiv \pi$ (контуру C_0 соответствует $T = 0$, значения $T \neq 0$ определяют другие контуры C_1, согласованные с C_0).

Несогласованный с C_0 контур $C_1 = C(T)$ близок к сечению трубки прямых путей плоскостью, проходящей через точку $t = 0$, $q = 0$, $p = 1$ и параллельной оси q. Контур C_1 задается в цилиндрических координатах r, φ, t ($p = r\cos\varphi$, $q = r\sin\varphi$) и параметризуется углом φ ($\varphi \in [0,2\pi)$) следующим образом. Фиксированному значению φ ставится в соответствие время $t = T\sin^2\frac{\varphi}{2}$ ($[0,T]$ — диапазон изменения времени t на контуре) и сечение $t = \mathrm{const}$ трубки прямых путей (рис. 24.5).

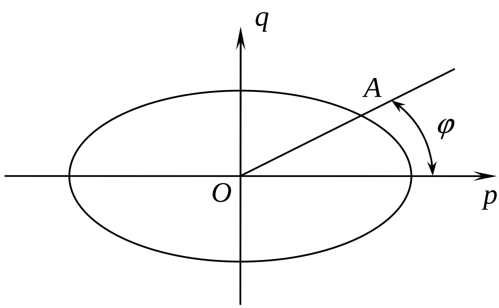

Рис. 24.5. Сечение трубки прямых путей плоскостью $t = \mathrm{const}$.

Уравнения

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{p(\alpha,\varphi)}{\sqrt{p^2(\alpha,\varphi)+q^2(\alpha,\varphi)}},\\ \sin\varphi &= \frac{q(\alpha,\varphi)}{\sqrt{p^2(\alpha,\varphi)+q^2(\alpha,\varphi)}},\end{aligned}$$

где $p(\alpha,\varphi)$, $q(\alpha,\varphi)$ — результат подстановки $t = T\sin^2\frac{\varphi}{2}$ и (24.25) в (24.24), после численного решения определяют параметр $\alpha(\varphi)$, соответствующий прямому пути, приводящему в точку A сечения на рис. 24.5. По параметру $\alpha(\varphi)$ и значению $t = T\sin^2\frac{\varphi}{2}$ из (24.24) определяется точка $t(\varphi)$, $q(\varphi)$, $p(\varphi)$ (или $r(\varphi)$, φ, $t(\varphi)$) на контуре $C_1 = C(T)$. На рис. 24.4 представлен один из результатов построения контура, несогласованного с контуром начальных состояний (24.25). Звездочками на рисунке отмечены пять пересечений прямого пути, соответствующего $\alpha = 0$, с контуром, что подтверждает несогласованность контуров. Результат численного интегрирования — вычисления контурного интеграла (24.26) при разных значениях T — представлен на рис. 24.6.

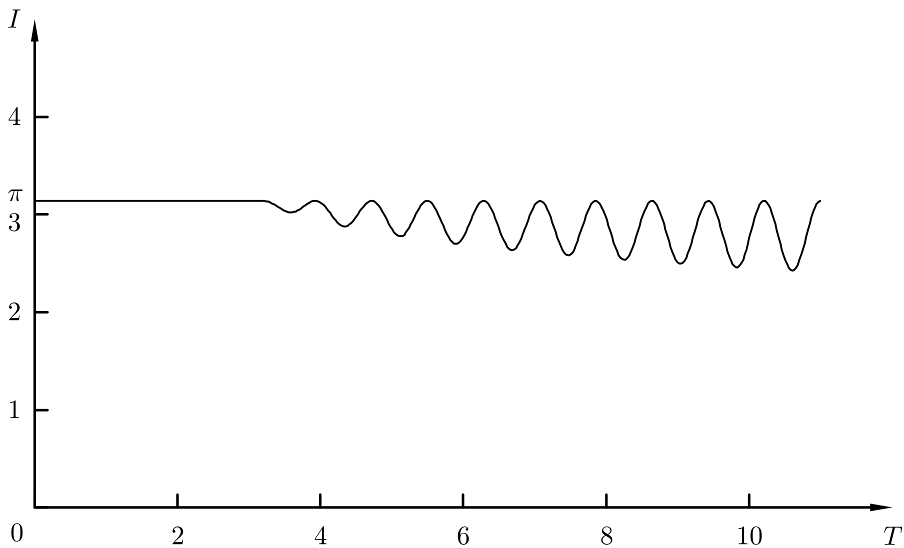

Рис. 24.6. Значения интегрального инварианта на несогласованных контурах

График подтверждает, что вследствие несогласованности контуров интеграл Пуанкаре–Картана на разных контурах, охватывающих трубку прямых путей, принимает разное значение.

§ 25. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема

Кроме универсального интегрального инварианта (24.6) первого порядка существуют и другие универсальные интегральные инварианты. Например, при помощи формулы Стокса находится инвариант второго порядка

$$J_1 = J_\Pi = \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \iint\limits_{S} \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \delta q_i = J_2,$$

интегрирование проводится по двумерной поверхности S, краем которой является контур $\bar{C}$. Поверхность S не замкнута, в таком случае интегральный инвариант называется абсолютным. Аналогично приведенным J_1, J_2 имеются универсальные интегральные инварианты более высоких порядков.

Докажем инвариантность самого «старшего» интеграла

$$J_{2n} = \int\limits_{V(t)} \cdots \int \delta p_1 \delta q_1 \ldots \delta p_n \delta q_n, \qquad (25.1)$$

вычисляющего объем в фазовом пространстве. Инвариантность понимается в следующем смысле: если каждую точку некоторого начального объема V_0 в фазовом пространстве перемещать по траекториям гамильтоновой системы, то величина объема $V(t)$, который займут точки к моменту времени t, не зависит от t (рис. (25.1)). Докажем этот факт для систем более общего по сравнению с уравнениями Гамильтона вида.

Теорема 25.1 (Ж. Лиувилль). *Пусть правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}_i = \varphi_i(t,x), \qquad i = \overline{1,m}, \qquad (25.2)$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \varphi_i(t,x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i(t,x)}{\partial x_i} = 0. \qquad (25.3)$$

Тогда на решениях системы сохраняется величина фазового объема.

□ Считаем известным общее решение системы (25.2):

$$x_i = f_i(t,t_0,x_1^0,\ldots,x_m^0), \qquad i = \overline{1,m}. \qquad (25.4)$$

Пусть начальные положения занимают при $t = t_0$ объем V_0 (рис. 25.1), равный по величине

$$v_0 = \int\limits_{V_0} \cdots \int dx_1^0 \ldots dx_m^0. \qquad (25.5)$$

К моменту времени t величина объема равна

$$v(t) = \int\limits_{V(t)} \cdots \int dx_1 \ldots dx_m. \qquad (25.6)$$

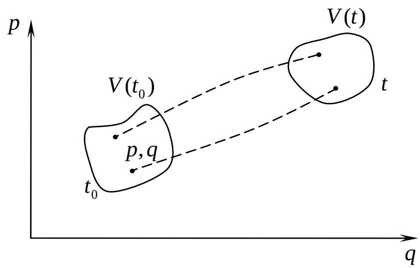

Рис. 25.1

Для того, чтобы области интегрирования в (25.5) и (25.6) совпадали, сделаем при помощи (25.4) переход в (25.6) к переменным x_0:

$$v(t) = \int\limits_{V_0} \cdots \int I(t,x^0) dx_1^0 \ldots dx_m^0.$$

Введено обозначение

$$I(t,x^0) = \det \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_0^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_0^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_0^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_0^m} \end{matrix} \right\|$$

для якобиана преобразования (25.4). При $t = t_0$ преобразование (25.4) имеет вид $x_i = x_i^0$, поэтому выполняется $I(t_0,x^0) = 1$. Покажем, что в силу (25.3) это значение сохранится и в дальнейшем, т. е. справедливо $I(t,x^0) \equiv 1$. Вычислим dI/dt. По правилу дифференцирования определителей имеем

$$\frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^{m} I_i, \tag{25.7}$$

где I_i есть результат замены в I строки с номером i ее производной по t:

$$I_i = \det \begin{Vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_0^1} & \cdots & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_0^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \text{ i-я строка.}$$

Так как $f(t,t_0,x_0)$ — решение системы (25.2), справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial x_0^k} = \frac{\partial}{\partial x_0^k}\dot{f}_i = \frac{\partial}{\partial x_0^k}\varphi_i(t,f) = \sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}\frac{\partial f_l}{\partial x_0^k}.$$

Умножая с учетом этого равенства l-е строки в I_i на $\partial\varphi_i/\partial x_l$ и вычитая из i-й строки, получим:

$$I_i = \det \begin{Vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_0^1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_0^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} = I\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

Подстановка в (25.7) даст

$$\frac{dI}{dt} = I\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i},$$

что по условию (25.3) теоремы приводит к равенству

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

и к доказываемым в теореме тождествам $I(t) \equiv 1$ и $v(t) \equiv v_0$. ■

Так как для гамильтоновых систем (24.2) условие (25.3) выполнено:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0,$$

то справедлива

Теорема 25.2. *Величина фазового объема не меняется при перемещении точек объема по траекториям гамильтоновой системы (24.2).*

В формулировке следующей теоремы использовано понятие плотности статистического ансамбля. Под статистическим ансамблем понимается множество систем, у которых совпадают уравнения Гамильтона, но различаются начальные данные q_0, p_0. В начальный момент времени t_0 ансамбль может неравномерно размещаться в фазовом пространстве. Эту неравномерность удобно характеризовать **плотностью статистического ансамбля**

$$\rho(q,p) = \frac{\mu}{v}, \tag{25.8}$$

где v — величина малого объема V, а μ — количество находящихся в V экземпляров ансамбля. Малость объема V понимается в «физическом» смысле: V достаточно мал, чтобы характеризовать точку q, p фазового пространства, но достаточно велик, чтобы плотность ρ была усредненной характеристикой ансамбля. Далее следим за системой «постоянного состава»: экземплярами, находящимися при $t = t_0$ в объеме V. К моменту времени t они займут другое положение, и новая плотность ρ определится новым объемом $V(t)$. Справедлива

Теорема 25.3. *Плотность $\rho(q,p)$ статистического ансамбля является первым интегралом гамильтоновой системы.*

□ Число μ в числителе дроби (25.8) не меняется со временем по определению плотности, объем $v(t)$ в знаменателе — по теореме 25.2. ■

Иногда в литературе теорему 25.3 также называют теоремой Лиувилля.

§ 26. Теорема Ли Хуачжуна о совокупности универсальных интегральных инвариантов первого порядка

В § 25 обсуждался вопрос об универсальных интегральных инвариантах более высокой кратности, чем у интеграла Пуанкаре (24.6). В частности, изучен $2n$–кратный интегральный инвариант — фазовый объем. В настоящем параграфе приводится результат, который определяет все множество универсальных интегральных инвариантов первого порядка: контурных интегралов

$$J = \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} \{A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i\}, \tag{26.1}$$

принимающих одно и тоже значение на разных сечениях $\bar{C}$ (при $t = t_1$) трубки прямых путей, причем трубка порождается произвольным начальным контуром $\bar{C}_0$ (при $t = t_0$) в расширенном фазовом пространстве и любой гамильтоновой системой. Оказывается, как утверждает следующая теорема, каждый такой инвариант (26.1) очевидным образом связан с интегралом Пуанкаре (24.6).

Теорема 26.1 (Ли Хуачжун[1]**).** *Следующие два утверждения эквивалентны:*

а) интеграл (26.1) аналогично интегралу Пуанкаре (24.6) — универсальный интегральный инвариант;

б) существуют такое число c и функция $F(t,q,p)$, что подынтегральные выражения в (24.6) и (26.1) связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{n} \{A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i\} = c\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - \delta F(t,q,p), \tag{26.2}$$

где $\delta F(t,q,p)$ — изохронный (t — фиксированный параметр) дифференциал.

[1]Hwa–Chang Lee. Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations//Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1947. Ser.A, v.LXII,. P. 237–246.

$\square$ Доказательство а) $\Rightarrow$ б). Основой доказательства является универсальность инварианта (26.1) — инвариантность для любой гамильтоновой системы. Использование этого факта при различных функциях Гамильтона $H(t,q,p)$ постепенно уточняет подынтегральное выражение в (26.1) и в конце концов приводит к доказываемому равенству (26.2). Ограничимся реализацией этой идеи для случая одной степени свободы: в (26.1) и (26.2) n=1. Пусть

$$\begin{aligned} q &= q(t,t_0,q^0,p^0), \\ p &= p(t,t_0,q^0,p^0) \end{aligned} \tag{26.3}$$

— общее решение гамильтоновой системы, соответствующей функции
$H(t,q,p)$, и пусть при $t = t_0$ задан некоторый контур $\bar{C}_0$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$:

$$\begin{aligned} q^0 &= q^0(\alpha), & q^0(1) &= q^0(0), \\ p^0 &= p^0(\alpha), & p^0(1) &= p^0(0). \end{aligned} \tag{26.4}$$

В совокупности (26.3) и (26.4) определяют трубку прямых путей

$$\begin{aligned} q(t,\alpha) &= q(t,t_0,q^0(\alpha),p^o(\alpha)), \\ p(t,\alpha) &= p(t,t_0,q^0(\alpha),p^o(\alpha)), \end{aligned} \tag{26.5}$$

при фиксированном моменте t — другой контур $\bar{C}(t)$ и значение $J(t)$ инварианта (26.1) на этом контуре. Замена переменных $(q,\, p) \longrightarrow (q^0,\, p^0)$, определенная решением (26.3), в интеграле (26.1) приводит к интегралу

$$J = \oint\limits_{\bar{C}_0} \{A(t,q,p)\delta q + B(t,q,p)\delta p\}, \tag{26.6}$$

у которого $\bar{C}_0$ — начальный контур (26.4), а в подынтегральном выражении переменные q, p — функции (26.3) от q^0, p^0, в частности, δq, δp понимаются как

$$\begin{aligned} \delta q &= \frac{\partial q(t,t_0,q^0,p^o)}{\partial q_0}\delta q_0 + \frac{\partial q(t,t_0,q^0,p^o)}{\partial q_0}\delta p_0, \\ \delta p &= \frac{\partial p(t,t_0,q^0,p^o)}{\partial q_0}\delta q_0 + \frac{\partial p(t,t_0,q^0,p^o)}{\partial q_0}\delta p_0. \end{aligned} \tag{26.7}$$

Утверждение а) теоремы эквивалентно утверждению: при любом контуре $\bar{C}_0$ начальных состояний (26.4) и произвольной гамильтоновой системе для интегралов (26.1) и (26.6) выполняется

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 0. \tag{26.8}$$

Рассмотрим три варианта выбора функции $H(t,q,p)$. Полагаем далее $t_0 = 0$.

$\underline{H = 0}$. В (26.3): $q = q^0$, $p = p^0$. Интеграл (26.6) с учетом (26.7) равен

$$J(t) = \oint\limits_{\bar{C}_0} \{A(t,q^0,p^0)\delta q^0 + B(t,q^0,p^0)\delta p^0\}.$$

Факт инвариантности (26.8) приводит к результату

$$\dot{J}(t) = \oint\limits_{\bar{C}_0} \{\frac{\partial A(t,q^0,p^0)}{\partial t}\delta q^0 + \frac{\partial B(t,q^0,p^0)}{\partial t}\delta p^0\} = 0.$$

В силу произвольности контура $\bar{C}_0$ выражение под интегралом должно быть полным дифференциалом (изохронным) некоторой функции (q^0, p^0 заменяем на q, p)

$$\delta f_1(t,q,p) = \frac{\partial A}{\partial t}\delta q + \frac{\partial B}{\partial t}\delta p,$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Подстановка вместо f_1 ее «первообразной по t»

$$f_1(t,q,p) = \frac{\partial F_1(t,q,p)}{\partial t}$$

приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(A - \frac{\partial F_1}{\partial q}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(B - \frac{\partial F_1}{\partial p}) = 0,$$

т. е. существуют такие функции $a(q,p)$ и $b(q,p)$, что справедливо представление

$$\begin{aligned} A(t,q,p) &= a(q,p) + \frac{\partial F_1}{\partial q}, \\ B(t,q,p) &= b(q,p) + \frac{\partial F_1}{\partial p}, \end{aligned}$$

которое определяет вид

$$\begin{aligned} A\delta q + B\delta p &= a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \frac{\partial F_1}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F_1}{\partial p}\delta p = \\ &= a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p + \delta F_1 \end{aligned} \tag{26.9}$$

выражения под интегралом и самого интеграла (26.1) (δF_1 исчезает при интегрировании по контуру)

$$J = \oint\limits_{\bar{C}} \{a(q,p)\delta q + b(q,p)\delta p\}. \tag{26.10}$$

$\underline{H = p}$. В (26.3): $q = q^0 + t$, $p = p^0$. Интеграл (26.6) с учетом (26.7) равен

$$J(t) = \oint\limits_{\bar{C}_0} \{a(q^0 + t,p^0)\delta q^0 + b(q^0 + t,p^0)\delta p^0\}.$$

Факт инвариантности (26.8) приводит к результату

$$\dot{J}(0) = \oint\limits_{\bar{C}_0} \{\frac{\partial a(q^0,p^0)}{\partial q_0}\delta q^0 + \frac{\partial b(q^0,p^0)}{\partial q_0}\delta p^0\} = 0.$$

Дальнейшие вычисления аналогичны случаю $H = 0$. Приведем последовательность формул:

$$\frac{\partial f_2(q,p)}{\partial q} = \frac{\partial a(q,p)}{\partial q}, \qquad \frac{\partial f_2(q,p)}{\partial p} = \frac{\partial b(q,p)}{\partial q};$$

$$f_2(q,p) = \frac{\partial F_2(q,p)}{\partial q};$$

$$\frac{\partial}{\partial q}(a - \frac{\partial F_2}{\partial q}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial q}(b - \frac{\partial F_2}{\partial p}) = 0;$$

$$
\begin{aligned}
a(q,p) &= \tilde{a}(p) + \frac{\partial F_2(q,p)}{\partial q},\\
b(q,p) &= \tilde{b}(p) + \frac{\partial F_2(q,p)}{\partial p};
\end{aligned}
$$

$$
a\delta q + b\delta p = \tilde{a}(p)\delta q + \tilde{b}(p)\delta p + \delta F_2(q,p); \tag{26.11}
$$

$$
J = \oint_{\bar{C}} \{\tilde{a}(p)\delta q + \tilde{b}(p)\delta p\}. \tag{26.12}
$$

$\underline{H = -q}$. В (26.3): $q = q^0$, $p = p^0 + t$. Интеграл (26.6) с учетом (26.7) равен

$$
J(t) = \oint_{\bar{C}_0} \{\tilde{a}(p^0 + t)\delta q^0 + \tilde{b}(p^0 + t)\delta p^0\}.
$$

Факт инвариантности (26.8) приводит к результату (q^0, p^0 заменяем на q, p)

$$
\dot{J}(0) = \oint_{\bar{C}_0} \{\frac{d\tilde{a}(p)}{dp}\delta q + \frac{d\tilde{b}(p)}{dp}\delta p\} = 0,
$$

вследствие которого выражение под интегралом должно быть полным дифференциалом (изохронным) некоторой функции $f_3(q,p)$:

$$
\frac{\partial f_3(q,p)}{\partial q} = \frac{d\tilde{a}(p)}{dp}, \qquad \frac{\partial f_3(q,p)}{\partial p} = \frac{d\tilde{b}(p)}{dp},
$$

т. е. для функции $\tilde{f}(q,p) = f_3(q,p) - \tilde{b}(p)$ должно выполняться

$$
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} = \frac{d\tilde{a}(p)}{dp}, \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} = 0.
$$

В левой части первого уравнения находится функция, независящая от p (см. второе уравнение), в правой — независящая от q, поэтому каждая часть равна постоянной c, откуда следует

$$
\tilde{a}(p) = cp + c_1, \qquad \tilde{f} = cq + c_2.
$$

Подстановка $\tilde{a}(p)$ в форму под интегралом (26.12) определяет формулу

$$\tilde{a}(p)\delta q + \tilde{b}(p)\delta p = cp\delta q + \delta(c_1 q + \int \tilde{b}(p)dp). \qquad (26.13)$$

Последовательная подстановка (26.13) в (26.11), затем (26.11) в (26.9) приводит к доказываемому результату (26.2), функция F в котором строится по функциям, определенным в процессе доказательства:

$$F = -(c_1 q + F_2(q,p) + F_1(t,q,p)) + \int \tilde{b}(p)dp.$$

Доказательство общего случая ($n > 1$) требует дополнительных «пробных» функций $H(t,q,p)$, что приводит к более громоздким вычислениям.

Доказательство б)$\Rightarrow$ а). Интегрирование соотношения (26.2) по произвольному изохронному контуру приводит к связи между интегралом (26.1) и инвариантом Пуанкаре (24.6) $J = cJ_{\Pi}$ ($\oint \delta F = 0$), вследствие которого результат а) очевиден. ■

Сформулируем результат (следствие из теоремы 26.1), при помощи которого конструктивно проверяется, является ли конкретный интеграл (26.1) универсальным интегральным инвариантом.

Следствие. *Интеграл (26.1) является универсальным интегральным инвариантом тогда и только тогда, когда при некотором числе с выполняются условия*

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial A_k}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial B_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial B_k}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial p_k} &= \frac{\partial B_k}{\partial q_i} + c\delta_{ik} \end{aligned} \qquad (26.14)$$

(δ_{ik} — символ Кронекера) интегрируемости системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} &= cp_i - A_i(t,q,p), \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= -B_i(t,q,p). \end{aligned} \qquad (26.15)$$

□ Раскрытие в (26.2) изохронного дифференциала $F(t,q,p)$ и приравнивание коэффициентов при δq_i, δp_i приводит к системе (26.15). Условия (26.14) есть условия интегрируемости $(\partial^2 F/\partial q_i \partial q_k = \partial^2 F/\partial q_k \partial q_i, \ldots$ системы (26.15). ■

Глава VI. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

§ 27. Канонические преобразования: определение, основной критерий

Как было установлено, поведение голономной системы при любом выборе обобщенных координат может быть описано уравнениями Лагранжа — в этом смысл ковариантности уравнений Лагранжа. Другими словами, переход к другим обобщенным координатам всегда влечет перевод уравнений Лагранжа опять в уравнения Лагранжа. Формула (21.12), связывающая лагранжианы в разных координатах, была выведена в § 21. Иначе обстоит дело в случае уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{27.1}$$

Замена переменных в уравнениях (27.1) может или приводить к уравнениям Гамильтона, или нет.

Пример 27.1. Одномерному осциллятору соответствует функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) \tag{27.2}$$

и уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\omega^2 q. \end{aligned} \tag{27.3}$$

Замена переменных

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= p, \\ \tilde{p} &= q e^p \end{aligned} \tag{27.4}$$

приведет к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= -\omega^2 \tilde{p} e^{-\tilde{q}}, \\ \dot{\tilde{p}} &= \tilde{q} e^{\tilde{q}} - \omega^2 \tilde{p}^2 e^{-\tilde{q}}. \end{aligned} \tag{27.5}$$

Для выяснения, является ли полученная система гамильтоновой, требуется исследовать на интегрируемость систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} &= -\omega^2 \tilde{p} e^{-\tilde{q}}, \\
\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} &= -\tilde{q} e^{\tilde{q}} + \omega^2 \tilde{p}^2 e^{-\tilde{q}}.
\end{aligned} \tag{27.6}
$$

Условие интегрируемости

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \tilde{p} \partial \tilde{q}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{p}} \left(-\tilde{q} e^{\tilde{q}} + \omega^2 \tilde{p}^2 e^{-\tilde{q}}\right) \stackrel{?}{=} \\
&\stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \left(-\omega^2 \tilde{p} e^{-\tilde{q}}\right)
\end{aligned} \tag{27.7}
$$

не выполнено, поэтому система (27.6) не имеет решения, а система (27.5) не является гамильтоновой.

Пример 27.2. Замена переменных

$$
\begin{aligned}
\tilde{q} &= p, \\
\tilde{p} &= q + e^p
\end{aligned} \tag{27.8}
$$

в системе (27.3) приводит к уравнениям

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{q}} &= \omega^2 \left(e^{\tilde{q}} - \tilde{p}\right), \\
\dot{\tilde{p}} &= \tilde{q} + \omega^2 \left(e^{\tilde{q}} - \tilde{p}\right) e^{\tilde{q}}.
\end{aligned} \tag{27.9}
$$

Нетрудно убедиться в том, что аналогичное (27.7) условие интегрируемости для системы

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} &= \omega^2 \left(e^{\tilde{q}} - \tilde{p}\right), \\
\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} &= -\tilde{q} - \omega^2 \left(e^{\tilde{q}} - \tilde{p}\right) e^{\tilde{q}}
\end{aligned} \tag{27.10}
$$

выполнено, поэтому система (27.9) в переменных $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ является гамильтоновой. Функция Гамильтона $\tilde{H}$ находится интегрированием уравнений (27.10):

$$
\tilde{H} = -\frac{1}{2} \left[\tilde{q}^2 + \omega^2 \left(e^{\tilde{q}} - \tilde{p}\right)^2\right]. \tag{27.11}
$$

Заметим, что если сделать замену переменных (35.8) в исходной функции Гамильтона (27.2), то получим не функцию (27.11), а обратную ей по знаку.

Определение 27.1. *Неособенное преобразование переменных*

$$\begin{array}{rcl}\tilde{q}_i & = & \tilde{q}_i(t,q,p), \\ \tilde{p}_i & = & \tilde{p}_i(t,q,p), \qquad i=\overline{1,n},\end{array} \tag{27.12}$$

$$\det M \neq 0, \tag{27.13}$$

$$M = \left\| \begin{array}{cc} \left\| \dfrac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \right\| & \left\| \dfrac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k} \right\| \\ \left\| \dfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k} \right\| & \left\| \dfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k} \right\| \end{array} \right\| \tag{27.14}$$

называется **каноническим**, *если замена переменных (27.12) в любой гамильтоновой системе приводит опять к гамильтоновой системе, M — матрица Якоби преобразования (27.12).*

Пример 27.1 показывает, что преобразование (27.4) не является каноническим, а про преобразование (27.8) из примера 27.2 ничего определенного сказать нельзя: для каноничности требуется перевод любой гамильтоновой системы в гамильтонову. В данной главе используются следующие обозначения: $dF(t,q,p)$ для полного дифференциала; $\delta F(t,q,p)$ — для изохронного (при фиксированном времени t), т. е. справедливо равенство

$$dF = \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Докажем основной критерий каноничности.

Теорема 27.1 (основной критерий). *Следующие два утверждения эквивалентны:*

а) преобразование (27.12) является каноническим;

б) существуют такое число c **(валентность)** *и функция F* **(производящая функция),** *что в силу преобразования (27.12) справедливо тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt\right) - dF. \tag{27.15}$$

□ Доказательство а) ⇒ б). Дано, что преобразование (27.12) каноническое и что система (27.1) с функцией H перешла в систему с функцией $\tilde{H}$. Требуется доказать, что при некоторых c и F справедливо (27.15). В пространствах (t, q, p) и $(t, \tilde{q}, \tilde{p})$ рассмотрим согласованные преобразованием (27.12) контуры C, $\widetilde{C}$ и соответствующие функциям H, $\tilde{H}$ трубки прямых путей (см. рис. 27.1). В один и тот же момент времени t введем согласованные изохронные контуры $\bar{C}$ и $\bar{\tilde{C}}$. Справедливы равенства

$$\oint\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt = \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i, \tag{27.16}$$

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = \oint\limits_{\bar{\tilde{C}}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i. \tag{27.17}$$

В (27.17) сделаем переход к переменным t, q, p, применим теорему 26.1 и используем (27.16):

$$\oint\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i =$$

$$= \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i,k=1}^{n} \tilde{p}_i \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k} \delta p_k \right) =$$

$$= \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{k=1}^{n} (A_k \delta q_k + B_k \delta p_k) = c \oint\limits_{\bar{C}} \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i =$$

$$= c \oint\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt.$$

Приравнивание первого и последнего выражения в цепочке равенств определяет результат

$$\oint\limits_{C} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt - c \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt \right) \right] = 0.$$

Так как контур С произволен, подынтегральное выражение есть полный дифференциал $(-dF)$, что и приводит к равенству (27.15).

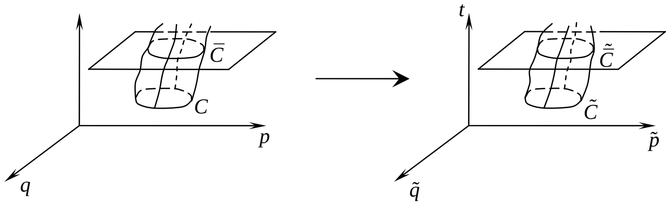

Рис. 27.1

Доказательство б) $\Rightarrow$ а). Даны: преобразование (27.12), число c и функция F. Дано также, что для любой функции $H(t,q,p)$ найдется такая функция $\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p})$, что равенство (27.15) выполняется тождественно. Требуется доказать, что замена переменных (27.12) в системе (27.1) приводит к гамильтоновой системе с гамильтонианом $\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p})$. Как и при доказательстве а) $\Rightarrow$ б), построим согласованные контуры C, $\tilde{C}$ и соответствующие трубки прямых путей (см. рис. 27.1). Считаем, что в (27.15) все функции выражены через t, q, p, проинтегрируем (27.15) по контуру C :

$$c\oint\limits_C \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \oint\limits_C \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt.$$

Последнее равенство есть результат перехода от переменных t, q, p к переменным $t, \tilde{q}, \tilde{p}$ (контур C переходит в контур $\tilde{C}$). Так как первый интеграл в цепочке равенств на различных согласованных контурах, охватывающих трубку прямых путей, принимает одно и то же значение, таким же свойством обладает и последний интеграл. По теореме 24.2 система в переменных $t, \tilde{q}, \tilde{p}$ является гамильтоновой с функцией Гамильтона $\tilde{H}$. ■

Следствие 1. *Пусть каноническому преобразованию (27.12) соответствуют валентность $c \neq 0$ и производящая функция F. Обратное к нему преобразование также каноническое с валентностью $\tilde{c} = 1/c$ и производящей функцией $\tilde{F} = -F/c$.*

□ По формуле (27.15) решается вопрос о каноничности преобразования $q,\ p \ \longrightarrow\ \tilde{q},\ \tilde{p}$. Обратное преобразование $\tilde{q},\ \tilde{p} \ \longrightarrow\ q,\ p$ удовлетворяет этой же формуле (27.15), переписанной иначе:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \frac{1}{c}\left(\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt\right) - \frac{1}{c} d(-F),$$

что и доказывает утверждение следствия. ■

Формула (27.15) концентрирует в себе исследование вопроса о каноничности преобразования (27.12) и в случае положительного ответа дает связь между функциями Гамильтона. При практическом использовании формулы (27.15) требуется сделать в ней переход к некоторым независимым переменным и, приравнивая коэффициенты при однаковых дифференциалах в левой и правой частях, получить $(2n+1)$ условие. Решение конкретного вопроса, связанного с каноническими преобразованиями, приводит к целесообразности конкретного выбора $2n$ независимых координат из набора $4n$ координат: $q, p, \tilde{q}, \tilde{p}$.

§ 28. Варианты выбора независимых переменных в основном критерии

Рассматривается несколько вариантов наборов независимых переменных в равенстве (27.15). Целесообразность выбора конкретного набора обосновывается доказательством утверждений.

1. $\underline{q,\ p.}$ Этот выбор является наиболее естественным. При переходе к этим координатам требуется в (27.15) раскрыть дифференциалы $d\tilde{q}(t,q,p)$ и $dF(t,q,p)$. Результат приравнивания коэффициентов при dt приводит к формуле

$$\tilde{H} = cH + \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{28.1}$$

Равенство коэффициентов при dq_i, dp_i запишем в виде системы уравнений для производящей функции $F(t,q,p)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} &= cp_i - \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= -\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial p_i}. \end{aligned} \tag{28.2}$$

Проверка на каноничность сводится к вопросу: будут ли при некотором числе c выполняться условия интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial F}{\partial q_k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial F}{\partial p_k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_l}, \ldots$$

Проверим на каноничность преобразования (27.4) и (27.8) из примеров 27.1 и 27.2.

Пример 28.1. Подстановка преобразования (27.4) в уравнения (28.2) приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} &= cp, \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= -qe^p. \end{aligned}$$

Вычисление $\partial^2 F/\partial q \partial p$ при помощи первого уравнения дает число c, а при помощи второго — функцию $(-e^p)$. Так как ни при каком числе c условие интегрируемости ($c \equiv -e^p$) не выполняется, то преобразование (27.4) не является каноническим, т. е. не любую гамильтонову систему переводит в гамильтонову, но в частных случаях это возможно. Например, уравнения Гамильтона $\dot{q} = p$, $\dot{p} = 0$ для свободной частицы $H = \frac{1}{2}p^2$ переходят в уравнения Гамильтона $\dot{\tilde{q}} = 0$, $\dot{\tilde{p}} = \tilde{q}e^{\tilde{q}}$ ($\tilde{H} = (1 - \tilde{q})e^{\tilde{q}}$).

Пример 28.2. Подстановка преобразования (27.8) в уравнения (28.2) приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q} &= cp, \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= -q - e^p, \end{aligned}$$

для которой условие интегрируемости

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = \frac{\partial (cp)}{\partial p} = \frac{\partial (-q - e^p)}{\partial q}$$

выполнено при $c = -1$, т. е. преобразование (27.8) каноническое с валентностью $c = -1$ и производящей функцией $F = -qp - e^p + f(t)$ ($f(t)$ — произвольная функция). Функция Гамильтона $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p})$, определяющая уравнения Гамильтона в переменных $\tilde{q}$, $\tilde{p}$, связана с гамильтонианом $H(q,p)$ в исходных переменных q, p формулой (28.1):

$$\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = -H(\tilde{p} - e^{\tilde{q}},\tilde{q}) + \dot{f}(t).$$

Валентность $c = -1$ объясняет экспериментально полученный знак минус в правой части (27.11). Добавление к H произвольной функции $\dot{f}(t)$ не оказывает влияния на правые части уравнений Гамильтона (27.1), поэтому обычно полагают $f(t) \equiv 0$, что было и сделано при интегрировании системы (27.10).

Пример 28.3. Пусть задан переход от одних обобщенных координат к другим

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,q), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{28.3}$$

$$\det \|a_{ik}(t,q)\| \neq 0, \tag{28.4}$$

где

$$\|a_{ik}(t,q)\| = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k} \right\|. \tag{28.5}$$

Как надо преобразовывать импульсы

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t,q,p), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{28.6}$$

чтобы получить в совокупности (28.3), (28.6) каноническое преобразование? Подстановка (28.3), (28.6) в систему (28.2) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} &= cp_i - \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Из последних n уравнений заключаем, что F не зависит от p_i. Решаем алгебраически первые n уравнений относительно $\tilde{p}_k$, получаем преобразование (28.6):

$$\tilde{p}_i = c\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t,q)p_k - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t,q)\frac{\partial F(t,q)}{\partial q_k}, \tag{28.7}$$

где $F(t,q)$ — произвольная функция, $b_{ik}(t,q)$ — элементы матрицы, обратной к (28.5), c — любое неравное нулю число (при $c = 0$ у отображения (28.3), (28.7) отсутствует ему обратное, далее будет показано, что канонических преобразований с валентностью $c = 0$ не существует).

Замечание 28.1. Полученный результат (28.7) приводит, в частности, к следующему выводу: знание валентности c и производящей функции F не позволяет однозначно восстановить каноническое преобразование. Так, пара $c = 1$, $F(t,q,p) \equiv 0$ соответствует каноническим преобразованиям

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,q), \qquad \tilde{p}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t,q)p_k$$

при любых функциях $\tilde{q}_i(t,q)$, удовлетворяющих (28.4).

Замечание 28.2. Классу преобразований (28.3), (28.7) принадлежат канонические преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= q_i, \\ \tilde{p}_i &= cp_i - \frac{\partial F(t,q)}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{28.8}$$

с тождественным преобразованием обобщенных координат и с произвольными числом $c \neq 0$ и функцией $F(t,q)$ в преобразовании импульсов. Множество преобразований (28.8) подчеркивает вспомогательную роль обобщенных импульсов p. Если совокупность движений $\{q(t)\}$ системы задается уравнениями Гамильтона, определенными гамильтонианом $H(t,q,p)$, то эта же совокупность $\{q(t)\}$ задается уравнениями Гамильтона, определенными множеством гамильтонианов (см. (28.1) и (28.8))

$$\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p}) = cH\left(t,\tilde{q},\frac{1}{c}\left(\tilde{p} + \frac{\partial F(t,\tilde{q})}{\partial \tilde{q}}\right)\right) + \frac{\partial F(t,\tilde{q})}{\partial t}.$$

2. $\underline{\tilde{q},\ \tilde{p}.}$ В этих переменных удобно доказывается следующий результат.

Теорема 28.1. *Для валентости c канонического преобразования справедливо $c \neq 0$.*

□ В противном случае ($c = 0$) из (27.15) при независимых переменных t, $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ следовало бы

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H} dt = -dF =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{q}_i} d\tilde{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_i} d\tilde{p}_i\right) - \frac{\partial F}{\partial t} dt,$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах, приходим к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \tilde q_i} &= -\tilde p_i,\\ \frac{\partial F}{\partial \tilde p_i} &= 0,\\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \tilde H.\end{aligned}$$

Полученная система не имеет решения: из первой группы уравнений следует $\partial^2 F/\partial\tilde q_i\partial\tilde p_i = -1$, из второй — $\partial^2 F/\partial\tilde q_i\partial\tilde p_i = 0$. ■

При решении многих вопросов, связанных с каноническими преобразованиями, можно ограничиться случаем $c = 1$ (см., например, § 31). Во многих книгах по аналитической механике и теоретической физике иная возможность ($c \neq 1$) и не упоминается.

Определение 28.1. *Каноническое преобразование при $c = 1$ называется* **унивалентным**.

3. $\underline{q,\ \tilde q}$. В качестве недостатков набора независимых переменных q, p (аналогично $\tilde q$, $\tilde p$) можно отметить громоздкость уравнений (28.2) для производящей функции F и то, что производящая функция F не определяет (в совокупности с валентностью) однозначно канонического преобразования (см. замечание 28.1). Оба недостатка могут быть устранены, если в качестве независимых переменных брать другие наборы. Одним из таких наборов является набор t, q, $\tilde q$, который будем называть **свободным**. Название оправдано тем, что дифференциалы от этих переменных находятся в формуле (27.15) «на свободе». Переменные t, q, $\tilde q$ не для каждого преобразования могут быть приняты в качестве независимых. Это возможно, если оставшиеся переменные p, $\tilde p$ могут быть выражены через свободные. Такое выражение осуществимо, если для преобразования (27.12) справедливо

$$\det\left\|\frac{\partial\tilde q_i(t,q,p)}{\partial p_k}\right\| \neq 0. \qquad (28.9)$$

Тогда зависимость $p(t,q,\tilde q)$ найдется из первых n уравнений в (27.12), а зависимость $\tilde p(t,q,\tilde q)$ найдется в результате подстановки $p(t,q,\tilde q)$ в последние n уравнений (27.12). Преобразованию (27.12) при условии

(28.9) можно придать эквивалентную форму

$$\begin{array}{rcl} p_i & = & p_i(t,q,\tilde{q}), \\ \tilde{p}_i & = & \tilde{p}_i(t,q,\tilde{q}), \qquad i=\overline{1,n}. \end{array} \tag{28.10}$$

Для обратного перехода (28.10) $\longrightarrow$ (27.12) нужно первые n уравнений в (28.10) разрешить относительно $\tilde{q}$ (соответствующая матрица Якоби является обратной по отношению к матрице, участвующей в (28.9), поэтому невырождена), результат разрешения подставить в последние n уравнений. Как будет показано далее, по функциям (28.10) удобно судить о каноничности исходного преобразования (27.12), и поиск преобразования, удовлетворяющего определенным свойствам, также удобно вести в терминах функций (28.10).

Определение 28.2. Неособенное преобразование (27.12) называется **свободным**, если для него выполнено условие (28.9).

Пусть преобразование (27.12) является свободным. Сделаем при помощи (28.10) переход в (27.15) к независимым переменным t, q, $\tilde{q}$:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}(t,q,\tilde{q})_i d\tilde{q}_i - \tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p}(t,q,\tilde{q}))dt = \\ = c(\sum_{i=1}^{n} p_i(t,q,\tilde{q})dq_i - H(t,q,p(t,q,\tilde{q}))dt) - \\ -\frac{\partial S}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}dq_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i}d\tilde{q}_i. \end{gathered} \tag{28.11}$$

Введено обозначение для производящей функции

$$S(t,q,\tilde{q}) = F(t,\tilde{q},\tilde{p}(t,q,\tilde{q})).$$

Приравнивая в (28.11) коэффициенты при одинаковых дифференциалах, получим связь между функциями Гамильтона:

$$\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p}(t,q,\tilde{q})) = \frac{\partial S}{\partial t} + cH(t,q,p(t,q,\tilde{q})) \tag{28.12}$$

и систему уравнений, которая связывает каноническое преобразование в форме (28.10) с производящей функцией S :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial S}{\partial q_i} & = & cp_i(t,q,\tilde{q}), \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} & = & -\tilde{p}_i(t,q,\tilde{q}). \end{array} \tag{28.13}$$

Каноничность преобразования (27.12) определяется условиями интегрируемости системы (28.13), наложенными на функции (28.10):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} = c\frac{\partial p_i(t,q,\tilde{q})}{\partial q_l} \overset{?}{=} c\frac{\partial p_l(t,q,\tilde{q})}{\partial q_k}, \ldots$$

Пример 28.4. Преобразование (27.4) из примера 27.1 удовлетворяет условию свободности (28.9) и представляется в форме (28.10):

$$\begin{aligned} p &= \tilde{q}, \\ \tilde{p} &= qe^{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Система (28.13) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= c\tilde{q}, \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} &= -qe^{\tilde{q}} \end{aligned}$$

и ни при каком значении числа c не является интегрируемой: из первого уравнения $\partial^2 S/\partial q\partial\tilde{q} = c$, из второго уравнения $\partial^2 S/\partial q\partial\tilde{q} = -e^{\tilde{q}}$. Преобразование (27.4) — неканоническое.

Пример 28.5. Преобразование (27.8) из примера 27.2 удовлетворяет условию свободности (28.9) и представляется в форме (28.10):

$$\begin{aligned} p &= \tilde{q}, \\ \tilde{p} &= q + e^{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Система (28.13) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= c\tilde{q}, \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} &= -q - e^{\tilde{q}} \end{aligned}$$

и при $c = -1$ интегрируема: из первого уравнения $\partial^2 S/\partial q\partial\tilde{q} = c$, из второго уравнения $\partial^2 S/\partial q\partial\tilde{q} = -1$. Преобразование (27.8) — каноническое с валентностью $c = -1$ и производящей функцией $S = -q\tilde{q} - e^{\tilde{q}}$.

В отличие от производящей функции $F(t,q,p)$ в независимых переменных t, q, p (аналогичная ситуация в переменных t, $\tilde{q}$, $\tilde{p}$) функция $S(t,q,\tilde{q})$ по настоящему «производит» : при помощи (28.13) по функции $S(t,q,\tilde{q})$ и валентности $c \neq 0$ однозначно находятся формулы (28.10). Для перехода к виду (27.12) надо решить первые n уравнений системы (28.10) относительно $\tilde{q}$ и подставить $\tilde{q}(t,q,p)$ в оставшиеся уравнения (28.10). Уравнения $p_i = p_i(t,q,\tilde{q})$ решаются относительно $\tilde{q}_i$ при условии на матрицу Якоби (используются первые n уравнений системы (28.13))

$$\det\left\|\frac{\partial p_i(t,q,\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_k}\right\| = \frac{1}{c^n}\det\left\|\frac{\partial^2 S(t,q,\tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right\| \neq 0.$$

Таким образом, каноническое преобразование (27.12) однозначно определяется производящей функцией $S(t,q,\tilde{q})$ и валентностью $c \neq 0$ при условии

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(t,q,\tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right\| \neq 0. \tag{28.14}$$

Например, функция $S = q\tilde{q}$ и число $c = 1$ определяют с использованием (28.13) формулы (28.10)

$$p = \tilde{q}, \qquad \tilde{p} = -q.$$

и свободное унивалентное каноническое преобразование (27.12)

$$\tilde{q} = p, \qquad \tilde{p} = -q. \tag{28.15}$$

Отметим определенный ущерб переменных q, $\tilde{q}$. Очевидно, что тождественное преобразование $\tilde{q}_i = q_i$, $\tilde{p}_i = p_i$ переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову, т. е. оно является каноническим, но оно не является свободным — не выполнено условие (28.9). Одно из следствий этого обстоятельства: совокупность свободных канонических преобразований не есть группа преобразований. Другое следствие: не везде определена главная функция Гамильтона (см. определение 29.1) — производящая функция одного из важных канонических преобразований (преобразование фазового пространства фазовым потоком гамильтоновой системы). Указанный ущерб устраняется, в частности, следующим выбором независимых переменных.

4. $\underline{q,\ \tilde{p}}$. Выбор возможен при следующем условии для преобразования (27.12):

$$\det\left\|\frac{\partial \tilde{p}_i(t,q,p)}{\partial p_k}\right\| \neq 0. \tag{28.16}$$

При выполнении (28.16) зависимость $p_i(t,q,\tilde{p})$ находится из последних n уравнений преобразования (27.12), а зависимость $\tilde{q}_i(t,q,\tilde{p})$ — подстановкой $p_i(t,q,\tilde{p})$ в первые n уравнений. Преобразование (27.12) в независимых переменных q, $\tilde{p}$ принимает вид

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t,q,\tilde{p}), \\ \tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t,q,\tilde{p}), \qquad i=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{28.17}$$

Определение 28.3. Преобразование (27.12) будем называть **полусвободным**, если для него выполнено условие (28.16).

«Полусвобода» заключается в том, для размещения дифференциалов dq, $d\tilde{p}$ «на свободе» требуется применить некоторые усилия, а именно, заменить условие каноничности (27.15) эквивалентной формулой

$$-\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i d\tilde{p}_i - \tilde{H}dt = c(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt) - d\Phi(t,q,\tilde{p}), \tag{28.18}$$

где обозначено

$$\Phi = F + \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \tilde{q}_i,$$

и предполагается, что вместо переменных $\tilde{q}$, p подставлены функции (28.17) (в том числе и в H, $\tilde{H}$). Равенство (28.18) определяет взаимосвязь

$$\tilde{H}(t,\tilde{q}(t,q,\tilde{p}),\tilde{p}) = \frac{\partial\Phi(t,q,\tilde{p})}{\partial t} + cH(t,q,p(t,q,\tilde{p})) \tag{28.19}$$

функций Гамильтона и систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial q_i} &= cp_i(t,q,\tilde{p}), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{p}_i} &= \tilde{q}_i(t,q,\tilde{p}), \end{aligned} \tag{28.20}$$

интегрируемость которой при некотором числе $c \neq 0$ гарантирует каноничность преобразования (27.12). Аналогично свободным преобразованиям пара $c \neq 0$, $\Phi(t,q,\tilde{p})$ при выполнении условия

$$\det \left\| \frac{\partial^2\Phi(t,q,\tilde{p})}{\partial q_i \partial\tilde{p}_k} \right\| \neq 0. \tag{28.21}$$

единственным образом порождает полусвободное каноническое преобразование (27.12). К примеру, пара $c = 1$, $\Phi = q\tilde{p}$ ((28.21) выполнено) определяет при помощи (28.20) систему (28.17): $\tilde{q} = q$, $p = \tilde{p}$, разрешив которую относительно $\tilde{q}$, $\tilde{p}$, получим полусвободное тождественное преобразование: $\tilde{q} = q$, $\tilde{p} = p$.

Пример 28.6. Преобразование (27.8) из примера 27.2 удовлетворяет условию полусвободности (28.16) и представляется в форме (28.17):

$$\begin{aligned} p &= \ln(\tilde{p} - q), \\ \tilde{p} &= \ln(\tilde{p} - q). \end{aligned}$$

Система (28.20) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= c \ln(\tilde{p} - q), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{p}} &= \ln(\tilde{p} - q) \end{aligned}$$

и при $c = -1$ интегрируема: из первого уравнения $\partial^2\Phi/\partial q \partial \tilde{p} = c/(\tilde{p} - q)$, из второго уравнения $\partial^2\Phi/\partial q \partial \tilde{p} = -1/(\tilde{p} - q)$. Преобразование (27.8) — каноническое с валентностью $c = -1$ и производящей функцией

$$\Phi = (\tilde{p} - q)\ln(\tilde{p} - q) - (\tilde{p} - q).$$

До сих пор в построениях участвовали следующие наборы независимых переменных: 1. q, p; 2. $\tilde{q}, \tilde{p}$; 3. $q, \tilde{q}$; 4. $q, \tilde{p}$. Переменные 3.q,$\tilde{q}$, 4.q,$\tilde{p}$ в качестве независимых удобны для синтеза канонического преобразования. Например, в § 31 решается вопрос нахождении унивалентного канонического преобразования, в результате которого конкретная гамильтонова система упростится до «дальше некуда» . Поиск преобразования в форме (28.10) или (28.17) позволяет вместо $2n$ функций, определяющих каноническое преобразование (27.12), составить и по возможности решить уравнение относительно одной функции S (или Φ), по которой однозначно определяется преобразование (27.12). Не для каждого преобразования (27.12) выполняется одно из условий (28.9) или (28.6), в чем можно убедиться на примере (преобразование каноническое с $c = 1$ и $F = p_1 q_1$ в (27.15))

$$\tilde{q}_1 = -p_1, \qquad \tilde{q}_2 = q_2, \qquad \tilde{p}_1 = q_1, \qquad \tilde{p}_2 = p_2. \tag{28.22}$$

Доказывается[1], что для любого преобразования (27.12) — (27.14) существует набор $2n$ переменных

$$q_1, \dots, q_l, p_{l+1}, \dots, p_n, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n \tag{28.23}$$

(возможно с перенумерацией), которые могут быть приняты за независимые, т. е. прочие переменные выражаются через них. В преобразовании (28.22) в качестве независимых переменных можно взять переменные (28.23):

$$q_1,\, q_2,\, \tilde{q}_1,\, \tilde{p}_2. \tag{28.24}$$

Остальные переменные выражаются через них следующим образом:

$$p_1 = -\tilde{q}_1, \qquad p_2 = \tilde{p}_2, \qquad \tilde{q}_2 = q_2 \qquad \tilde{p}_1 = q_1. \tag{28.25}$$

Набор (28.23) характерен отсутствием в нем пар q_i, p_i и $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$, что позволяет, аналогично тому, как это было сделано в случае $4.\,q,\tilde{p}$, эквивалентной заменой равенства (27.15) добиться того, чтобы дифференциалы от переменных (28.23) и только от них были «на свободе». Для преобразования (28.22) результат таков:

$$\tilde{p}_1 d\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2 d\tilde{p}_2 - \tilde{H} dt = c(p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - H dt) - dU,$$

где обозначено

$$U(t, q_1, q_2, \tilde{q}_1, \tilde{p}_2) = F + \tilde{q}_2 \tilde{p}_2 = F + q_2 \tilde{p}_2.$$

Также на примере преобразования (28.22) приведем результат приравнивания коэффициентов при дифференциалах от независимых переменных:

$$\tilde{H}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\partial U}{\partial t} + cH(q_1, q_2, p_1, p_2) \tag{28.26}$$

с подстановкой в обе части (28.25),

$$\begin{array}{rclcl} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} & = & cp_1 & = & -c\tilde{q}_1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_2} & = & cp_2 & = & c\tilde{p}_2, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \tilde{q}_1} & = & -\tilde{p}_2 & = & -q_1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \tilde{p}_2} & = & \tilde{q}_2 & = & q_2. \end{array} \tag{28.27}$$

[1] Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике—2-е изд.—М.: Наука, 1966. 300 с., § 29, с.176.

Исследование системы (28.27) на интегрируемость приводит к результату $c = 1$, $U = -q_1\tilde{q}_2 + q_2\tilde{p}_2$, по которому можно осуществить обратный переход: при помощи системы (28.27) к — уравнениям (28.25) и далее — к преобразованию (28.22).

§ 29. Фазовый поток гамильтоновой системы и канонические преобразования

Естественным классом канонических преобразований является фазовый поток: совокупность преобразований $\{q^0,\ p^0\} \longrightarrow \{q,\ p\}$ фазового пространства, которые определяются при разных фиксированных значениях t общим решением

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t,q^0,p^0), \\ p_i &= p_i(t,q^0,p^0), \qquad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{29.1}$$

гамильтоновой системы, заданной некоторой функцией Гамильтона $H(t,q,p)$. При $t = t_0$ преобразование (29.1) является тождественным $q_i = q_i^0$, $p_i = p_i^0$ с якобианом (27.13) равным единице, поэтому при близких к t_0 значениях t преобразование обратимо:

$$\begin{aligned} q_i^0 &= q_i^0(t,q,p), \\ p_i^0 &= p_i^0(t,q,p), \qquad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{29.2}$$

Функции, задающие преобразование (29.2), — первые интегралы системы, для них в соответствии с определением 20.1 выполняется

$$\dot{q}_i^0 = 0,\ \dot{p}_i^0 = 0,$$

т. е. они есть решение гамильтоновой системы, заданной функцией Гамильтона $H_0 = 0$.

Теорема 29.1. *Преобразование $\{q^0, p^0\} \longrightarrow \{q, p\}$, заданное общим решением (29.1) гамильтоновой системы, и обратное ему (29.2) — унивалентные канонические преобразования. Производящая функция преобразования (29.2) — действие по Гамильтону (21.1)*

$$W(t,q^0,p^0) = \int\limits_{t_0}^{t} L(s,q(s,q^0,p^0),\dot{q}(s,q^0,p^0))ds, \tag{29.3}$$

в подынтегральное выражение которого подставлено преобразование (29.1), нижний предел t_0 фиксирован (значению t_0 соответствуют q^0, p^0 в (29.1) — (29.3)), верхний предел t является переменным. Производящая функция обратного к (29.2) преобразования (29.1): $-W$.

□ Пусть система определена функциями Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$ и Гамильтона $H(t,q,p)$. На решении $\bar{q}(t)$, $\bar{p}(t)$, соответствующем начальным данным t_0, $\bar{q}_0$, $\bar{p}_0$, фиксируем произвольный текущий момент $t = \bar{t}_1$ и проварьируем (см. определение 21.1) решение специальным образом: а именно, включим в однопараметрическое семейство $q(t,\alpha)$ $(q(t,0) = \bar{q}(t))$ прямых путей — решений с начальными данными

$$t_0(\alpha) \equiv t_0, \quad q_i^0(\alpha) = q_i(t_0,\alpha), \quad \dot{q}_i^0(\alpha) = \dot{q}_i(t_0,\alpha),$$
$$p_i^0(\alpha) = p(t_0,\alpha) = \frac{\partial L(t_0,q^0(\alpha),\dot{q}^0(\alpha))}{\partial \dot{q}_i}. \tag{29.4}$$

В отличие от общего случая не варьируется начальный момент $t_0(\alpha) \equiv t_0$ (ср. рис. 21.2 и рис. 29.1). Конечные точки у представителей семейства $q(t,\alpha)$ определяются зависимостью $t_1(\alpha)$:

$$t_1(\alpha), \quad q_i^1(\alpha) = q_i(t_1(\alpha),\alpha), \quad \dot{q}_i^1(\alpha) = \dot{q}_i(t_1(\alpha),\alpha),$$
$$p_i^1(\alpha) = p(t_1(\alpha),\alpha) = \frac{\partial L(t_1(\alpha),q^1(\alpha),\dot{q}^1(\alpha))}{\partial \dot{q}_i}. \tag{29.5}$$

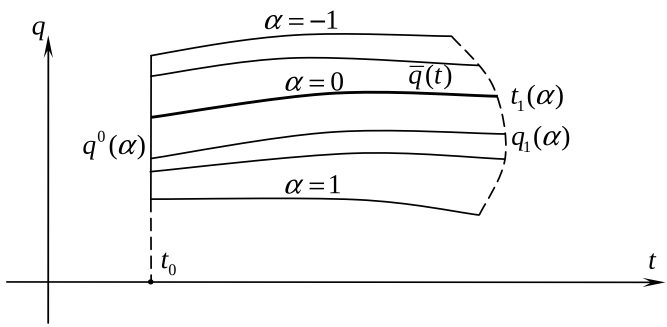

Рис. 29.1

На рис. 29.1 изображен результат варьирования. К изображению можно отнестись как к проекции части трубки прямых путей на подпространство $(t,\ q)$: кривая начальных точек $t_0(\alpha) \equiv t_0$, $q^0(\alpha)$ —

проекция некоторого изохронного контура $\bar{C}_0$ (см. рис. 24.2), кривая конечных точек $t_1(\alpha)$, $q^1(\alpha)$ — проекция любого другого согласованного с $\bar{C}_0$ контура C. Семейство решений при фиксированном значении t_0 однозначно определено функциями $t_1(\alpha)$, $q^0(\alpha))$, $p^0(\alpha)$. Подставим эти функции в (29.3), вычислим дифференциал dW, получим соотношение

$$\begin{gathered} dW(t_1,q^0,p^0) = \\ = \frac{\partial W}{\partial t_1}dt_1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i^0}dq_i^0 + \frac{\partial W}{\partial p_i^0}dp_i^0\right) = \\ = \left\{\frac{\partial W}{\partial t_1}\frac{dt_1}{d\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i^0}\frac{dq_i^0}{d\alpha} + \frac{\partial W}{\partial p_i^0}\frac{dp_i^0}{d\alpha}\right)\right\}d\alpha = \\ = \frac{dW}{d\alpha}d\alpha = \delta W. \end{gathered} \tag{29.6}$$

Из (29.6) следует, что полный дифференциал dW совпадает при данном варьировании с вариацией (см. определение 21.2) и определяется формулой (21.3), которая при $\alpha = 0$ с учетом специфики использованного варьирования (см. (29.4), (29.5)) принимает вид

$$dW(t,q^0,p^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(t,q,p)dt - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 dq_i^0. \tag{29.7}$$

Интегральное выражение в (21.3) равно нулю, так как все представители семейства $q(t,\alpha)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа, δt во второй квадратной скобке в (21.3) равно нулю, вследствие $t_0(\alpha) \equiv t_0$. К замене δq, δt, δq^0 на dq, dt, dq^0 привели вычисления, аналогичные (29.6). Значение $\alpha = 0$ определяет решение $q(t,0) = \bar{q}(t)$, соответствующее начальным данным $t = t_0$, $\bar{q}^0 = q^0(0)$, $\bar{p}^0 = p^0(0)$ и текущим значениям $t = \bar{t}_1 = t_1(0)$, $q = q^1(0) = \bar{q}(\bar{t}_1) = \bar{q}(t)$, $p = p^1(0) = \bar{p}(\bar{t}_1) = \bar{p}(t)$ (ввиду произвольности исходного решения в (29.7) сделана замена $\bar{q}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{q}$, $\bar{p}$ на q_0, p_0, q, p.)

Соотношение (29.7), записанное иначе

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 dq_i^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(t,q,p)dt - dW(t,q^0,p^0), \tag{29.8}$$

совпадает с равенством (27.15) и подтверждает унивалентность и каноничность преобразования (29.2). Подтверждает также, что переменным q^0, p^0 соответствует функция Гамильтона $H_0 \equiv 0$. Унивалентность, каноничность и вид производящей функции у преобразования (29.3) подтверждается следствием 1 из теоремы 27.1. ■

Вывод и запись условия каноничности (29.8) преобразования (29.2) сделаны при выборе независимых переменных $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ (роль $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ играют в данном случае переменные q^0, p^0). Если выразить $p_i(t,q,q^0)$ из первых n уравнений преобразования (26.40), и подставить $p_i(t,q,q^0)$ в последние n уравнений (или выразить $p_i^0(t,q,q^0)$ из первых n уравнений преобразования (29.1) и подставить $p_i^0(t,q,q^0)$ в последние n уравнений), то преобразования (29.1), (29.2) запишутся в свободном виде (28.7)

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t,q,q^0), \\ p_i^0 &= p_i^0(t,q,q^0), \qquad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{29.9}$$

Возможность перехода от (29.1) или (29.2) к (29.9), влечет возможность и обратного перехода: для возврата (29.9) $\longrightarrow$ (29.2) требуется из первых n уравнений (29.9) выразить $q_i^0(t,q,p)$ и подставить в последние n уравнений; для перехода (29.9) $\longrightarrow$ (29.1) требуется из последних n уравнений (29.9) выразить $q_i(t,q^0,p^0)$ и подставить в первые n уравнений. Возможность обратного перехода связана с выполнением для (29.9) одного из условий

$$\det \left\| \frac{\partial p_i(t,q,q^0)}{\partial q_k^0} \right\| \neq 0, \qquad \det \left\| \frac{\partial p_i^0(t,q,q^0)}{\partial q_k} \right\| \neq 0. \tag{29.10}$$

Подстановка (29.9) в равенство (29.8) приводит к условию каноничности (28.11) в независимых переменных t, q, q^0:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} p_i^0 dq_i^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(t,q,p)dt - \\ - \frac{\partial W(t,q,q^0)}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(t,q,q^0)}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(t,q,q^0)}{\partial q_i^0} dq_i^0. \end{gathered} \tag{29.11}$$

Для производящей функции $W(t,q,q^0)$ в переменных t, q, q^0 принято следующее название.

Определение 29.1. Действие по Гамильтону (29.3), в котором переменная p^0 понимается как функция $p^0(t,q,q^0)$ (см. (29.9)), называется **главной функцией Гамильтона** $W(t,q,q^0)$.

Равенство (29.11) определяет следующую связь между главной функцией Гамильтона $W(t,q,q^0)$, гамильтонианом $H(t,q,p)$ и общим решением, представленным функциями (29.9):

$$\frac{\partial W(t,q,q^0)}{\partial q_i} = \quad p_i(t,q,q^0), \tag{29.12}$$

$$\frac{\partial W(t,q,q^0)}{\partial q_i^0} = -p_i^0(t,q,q^0), \tag{29.13}$$

$$\frac{\partial W(t,q,q^0)}{\partial t} + H(t,q,p(t,q,q^0)) = 0. \tag{29.14}$$

Главная функция Гамильтона $W(t,q,q^0)$ при помощи равенств (29.12), (29.13) определяет каноническое преобразование в форме (29.9), а гарантия (29.10) возможности перехода к общему решению (29.1) или к полному набору первых интегралов (29.2) представляется с использованием $W(t,q,q^0)$ следующим образом

$$\det \left\| \frac{\partial^2 W(t,q,q^0)}{\partial q_i \partial q_k^0} \right\| \neq 0. \tag{29.15}$$

Подстановка (29.12) в (29.14)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(t,q,\frac{\partial W}{\partial q}) = 0 \tag{29.16}$$

с учетом (29.15) дает возможность сделать вывод, что главная функция Гамильтона $W(t,q,q^0)$ есть полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (см. далее определения 31.1 и 31.2). Рассуждения, которые привели к главной функции Гамильтона $W(t,q,q^0)$ и к полному интегралу уравнения (29.16), основаны на предположении о том, что преобразование (29.1) — свободное (см. определение 28.2), т. е. возможен переход (29.1) $\longrightarrow$ (29.9). К сожалению, это не всегда так. Заведомо это не так при $t = t_0$:

$$q_i = q_i(t_0,q^0,p^0) = q_i^0, \qquad p_i = p_i(t_0,q^0,p^0) = p_i^0,$$

а тождественное преобразование не является свободным. Аналогичная ситуация при $t = t_f$, где t_f определяет кинетический фокус, сопряженный с положением t_0, q^0 (см. определение 23.1). В экзотическом, но не отвергаемом случае $H \equiv 0$ ($q_i(t) \equiv q_i^0$, $p_i(t) \equiv p_i^0$) главная функция Гамильтона $W(t,q,q^0)$ при любом значении t не определена.

Пример 29.1. Линейному осциллятору соответствуют функции Лагранжа и Гамильтона:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \qquad H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

Общее решение (29.1) уравнений Гамильтона (27.1) ($t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} q &= q^0 \cos\omega t + p^0 \frac{\sin\omega t}{\omega}, \\ p &= -q^0 \omega \sin\omega t + p^0 \cos\omega t \end{aligned} \tag{29.17}$$

— каноническое преобразование q^0, $p^0 \longrightarrow q$, p. Подстановка $q(t)$ в действие по Гамильтону (29.3), интегрирование, приводящее к $W(t, q, q^0)$, и замена p^0 функцией $p^0(t, q, q^0)$, найденной из первого уравнения системы (29.17), приводит к главной функции Гамильтона

$$W(t,q,q^0) = \frac{1}{2}[q^2 + (q^0)^2]\omega \mathrm{ctg}\omega t - \frac{\omega q q^0}{\sin\omega t}, \tag{29.18}$$

которая не определена при $\omega t = k\pi$, $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в частности, при $t = t_0 = 0$. На интервалах, не содержащих значений $\omega t = k\pi$, функция (29.18) удовлетворяет условию (29.15), уравнению (29.16) и по ней с привлечением уравнений (29.12), (29.13) можно восстановить общее решение (29.1).

Построения, основанные на свободности преобразования (29.1), т. е. на возможности пользоваться независимыми переменными q, q^0, привели к главной функции Гамильтона $W(t,q,q^0)$ — производящей функции унивалентного канонического преобразования (29.2). Аналогичные построения можно провести при выборе независимых переменных q, $\tilde{p}$ (в данном случае q, p^0) — полусвободных преобразований по определению 28.3. Условие полусвободности (28.13) при значениях t близких к t_0 выполнено (в (29.2) при $t = t_0$: $q_i^0 = q_i^0(t_0, q, p) = q_i$, $p_i^0 = p_i^0(t_0,q,p) = p_i$)

$$\det \left\| \frac{\partial p_i^0(t,q,p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0,$$

и преобразования (29.1), (29.2) представимы в форме (28.14)

$$\begin{aligned} q_i^0 &= q_i^0(t,q,p^0), \\ p_i &= p_i(t,q,p^0), \qquad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{29.19}$$

Замена условия каноничности (29.8) эквивалентным условием (см. (28.15))

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i^0 dp_i^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt - d(W + \sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0), \tag{29.20}$$

переход в (29.20) при помощи (29.19) к полусвободным переменным t, q, p^0 введение обозначения

$$V(t,q,p^0) = W(t,q^0(t,q,p^0),p^0) + \sum_{i=1}^{n} p_i^0 q^0(t,q,p^0), \tag{29.21}$$

раскрытие дифференциала и приравнивание коэффициентов при дифференциалах от независимых переменных приводит к соотношениям, аналогичным (29.12), (29.13), (29.16):

$$\frac{\partial V(t,q,p^0)}{\partial q_i} = p_i(t,q,p^0), \tag{29.22}$$

$$\frac{\partial V(t,q,p^0)}{\partial p_i^0} = q_i^0(t,q,p^0), \tag{29.23}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t,q,\frac{\partial V}{\partial q}) = 0. \tag{29.24}$$

Условия

$$\det\left\|\frac{\partial p_i(t,q,p^0)}{\partial p_k^0}\right\| \neq 0, \qquad \det\left\|\frac{\partial q_i^0(t,q,p^0)}{\partial q_k}\right\| \neq 0$$

возможности возврата от равенств (29.19) к преобразованиям (27.2), (29.1) при t близким к t_0 выполнены и при помощи (29.22), (29.23) принимают следующий вид

$$\det\left\|\frac{\partial^2 V(t,q,p^0)}{\partial q_i \partial p_k^0}\right\| \neq 0. \tag{29.25}$$

Определение 29.2. Функцию $V(t,q,p^0)$, заданную формулой (29.21), назовем **полуглавной функцией Гамильтона.** Функция $W(t,q^0,p^0)$ в (29.21) — действие по Гамильтону (29.3), а зависимость $q^0(t,q,p^0)$ находится или из общего решения (29.1) вычислением q^0 из первых

n уравнений или вычислением p из последних n уравнений в (29.2) и подстановкой в первые n уравнений.

Как следует из (29.24), (29.25), определений 31.1, 31.2, полуглавная функция Гамильтона $V(t,q,p^0)$ также как и главная функция Гамильтона $W(t,q,q^0)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби.

Пример 29.2. Вычислим функцию $V(t,q,p^0)$ для линейного осциллятора из примера 29.1. Из первого уравнения в общем решении (29.17) находится зависимость $q^0(t,q,p^0)$, которая подставляется в формулу (29.22) (предполагается, что зависимость $W(t,q^0,p^0)$ в результате интегрирования в (29.3) получена). Итогом вычислений является полуглавная функция Гамильтона

$$V(t,q,p^0) = \frac{qp^0}{\cos\omega t} - \frac{1}{2}\left[(p^0)^2 + \omega^2 q^2\right]\frac{\mathrm{tg}\omega t}{\omega} \qquad (29.26)$$

— производящая функция унивалентного канонического полусвободного преобразования (29.2) ($-V$ — производящая функция преобразования (29.1)). Функция (29.25) определена на интервалах, не содержащих значений

$$\omega t = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и по ней с привлечением уравнений (29.22), (29.23) можно восстановить общее решение (29.1).

Обе функции (29.18) и (29.25) для осциллятора определены не всюду, но некоторым преимуществом функции $V(t,q,p^0)$ по сравнению с функцией $W(t,q,q^0)$ является то, что для любой системы при $t = t_0$ функция $V(t,q,p^0)$ гарантировано определена, а функция $W(t,q,q^0)$ гарантировано неопределена. Для наглядного сравнения приведем функции V и W для свободной одномерной частицы (в (29.18) и (29.25) $\omega \to 0$)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2t}(q - q^0)^2, \\ V &= qp^0 - \frac{t}{2}(p^0)^2. \end{aligned} \qquad (29.27)$$

Обе функции удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби (см. (29.16) и (29.24))

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2=0, \tag{29.28}$$

и по ним восстанавливается общее решение: $q=q^0+tp^0$, $p=p^0$.

Главная и полуглавная функции Гамильтона концентрируют информацию об общем решении, но для их вычисления требуется общее решение знать. Порочный круг будут преодолен в § 31.

§ 30. Следствия из основного критерия каноничности. Инволютивные системы

Приводятся с эскизными доказательствами два условия каноничности — следствия из основного критерия (теоремы 27.1)[1]. Условия удобны для анализа — ответа на вопрос: является ли конкретное преобразование (27.12) каноническим? В формулировках и доказательствах участвует матрица порядка $2n$

$$J=\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{30.1}$$

где E — единичная матрица порядка n.

Теорема 30.1. *Преобразование (27.12) является каноническим в том и только в том случае, если соответствующая преобразованию матрица Якоби (27.14), результат ее транспонирования M^T и матрица (30.1) при некотором числе $c\neq 0$ связаны соотношением*

$$M^TJM=cJ. \tag{30.2}$$

□ Факт каноничности преобразования (27.12) эквивалентен интегрируемости при некотором числе $c\neq 0$ системы (28.2), а интегрируемость, в свою очередь, эквивалентна совпадению двумя способами вычисленных всевозможных производных второго порядка от

[1]Подробности доказательств см.: Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике—2-е изд.—М.: Наука, 1966. 300 с. § 31, с.184. § 32, с. 187.

функции F. После переноса в одну часть результаты приравнивания имеют следующий вид.

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial q_l}=\frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial F}{\partial q_i}:$$

$$A_{il}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_l}-\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_l}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_i}\right)=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_l}=\frac{\partial}{\partial p_l}\frac{\partial F}{\partial q_i}:$$

$$B_{il}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_l}-\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_l}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial q_i}\right)=c\delta_{il}.$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial p_l}=\frac{\partial}{\partial p_l}\frac{\partial F}{\partial p_i}:$$

$$C_{il}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_l}-\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial p_l}\frac{\partial\tilde{p}_k}{\partial p_i}\right)=0.$$

С учетом введенных обозначений A_{il}, B_{il}, C_{il} результат приравнивания можно записать в матричном виде:

$$\left\|\begin{matrix}\|A_{il}\| & \|-B_{il}\|\\ \|B_{il}\| & \|\ \ C_{il}\|\end{matrix}\right\|=c\left\|\begin{matrix}0 & -E\\ E & 0\end{matrix}\right\|=cJ, \tag{30.3}$$

где J — матрица (30.1). Перемножение матриц в левой части доказываемого равенства (30.2) (см. (27.14) и (30.1)) приводит к такому же результату, как и в левой части условия интегрируемости (30.3), а значит совпадают и правые части. ■

Теорема 30.2. *Преобразование (27.12) является каноническим в том и только в том случае, если при некотором числе $c \neq 0$ вычисление скобок Пуассона (20.3) от функций, определяющих преобразование (27.12), приводит к результату:*

$$(\tilde{q}_i,\tilde{q}_k)=0,\ \ (\tilde{p}_i,\tilde{p}_k)=0,\ (\tilde{q}_i,\tilde{p}_k)=c\delta_{ik},\ \ i,k=\overline{1,n}. \tag{30.4}$$

□ Из определения (30.1) матрицы J непосредственно следуют формулы

$$J^{-1} = -J, \quad J^2 = -\begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix},$$

согласно которым справедлива следующая последовательность преобразований условия каноничности (30.2):

$$M^T JM\ JM^T = cJ\ JM^T = cJ^2 M^T = -cM^T,$$

$$(M^T)^{-1}\ M^T JM\, JM^T = -(M^T)^{-1}\ cM^T = -c,$$

$$J^{-1}\ JMJM^T = -cJ^{-1},$$

$$MJM^T = cJ. \tag{30.5}$$

Последнее равенство — цель преобразований. Перемножение матриц в левой части (30.5) с использованием обозначений для скобок Пуассона (20.3) и определения (30.1) матрицы J приводит к эквивалентной формуле

$$\begin{Vmatrix} \|(\tilde{q}_i,\tilde{q}_k)\| & \|-(\tilde{q}_i,\tilde{p}_k)\| \\ \|(\tilde{q}_i,\tilde{p}_k)\| & \|\ \ (\tilde{p}_i,\tilde{p}_k)\| \end{Vmatrix} = c\begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix},$$

которая эквивалентна доказываемым равенствам (30.4). ■

Отметим, что условия каноничности (30.2) и (30.4) удобны для анализа преобразования на каноничность, хотя бы потому, что не требуют дополнительных усилий на выбор независимых координат, но неудобны для синтеза: каждое из условий (30.2) и (30.4) — система из n^2 нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $\tilde{q}_i(t,q,p)$, $\tilde{p}_i(t,q,p)$. При дополнительных условиях для синтеза канонического преобразования достаточно знать n функций $\varphi_i(t,q,p)$ из набора $\tilde{q}_i(t,q,p)$, $\tilde{p}_i(t,q,p)$. Одно из условий — инволютивность.

Определение 30.1. Функции $\varphi_i(t,q,p)$, $i = \overline{1,m}$, находятся **в инволюции** (система $\varphi_i(t,q,p)$, $i = \overline{1,m}$, — **инволютивна**), если для скобок Пуассона выполняется

$$(\varphi_i,\varphi_j) = 0, \qquad i,j = \overline{1,m}. \tag{30.5}$$

Как следует из теоремы 30.2 (см. (30.4)), среди функций

$$\tilde{q}_i(t,q,p),\ \tilde{p}_i(t,q,p),$$

задающих каноническое преобразование, достаточно много инволютивных систем. По такой системе, состоящей из n функционально независимых функций, строится каноническое преобразование. Один из вариантов выбора приводит к следующему результату.

Теорема 30.3. *Пусть для инволютивной системы*

$$\varphi_i(t,q,p),\ i=\overline{1,n}, \tag{30.6}$$

выполняется

$$\det\left\|\frac{\partial\varphi_i(t,q,p)}{\partial p_k}\right\|\neq 0. \tag{30.7}$$

Тогда, не выходя за рамки алгебраических операций и вычисления интегралов, строится такое свободное унивалентное каноническое преобразование

$$\tilde{q}_i=\varphi_i(t,q,p), \tag{30.8}$$

$$\tilde{p}_i=\tilde{p}_i(t,q,p), \tag{30.9}$$

переход в котором к переменным $\tilde{q}_i$ определяется функциями $\varphi_i(t,q,p)$.

□ Условие инволютивности (30.5) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_k}, \tag{30.10}$$

позволяющем менять местами индексы i и j. Условие (30.7) дает возможность алгебраически решить систему (30.8) относительно p_i:

$$p_i=\psi_i(t,q,\tilde{q}). \tag{30.11}$$

Подстановка (30.8) в (30.11) приводит к тождеству

$$p_i=\psi_i(t,q,\varphi(t,q,p)), \tag{30.12}$$

дифференцируя которое по p_l и q_j приходим к равенствам

$$\delta_{il}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial\tilde{q}_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_l}, \tag{30.13}$$

$$0=\frac{\partial\psi_i}{\partial q_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial\tilde{q}_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_j}. \tag{30.14}$$

Запишем (30.14) иначе

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} \tag{30.15}$$

и, преобразовывая правую часть, докажем формулу

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \psi_j}{\partial q_i}. \tag{30.16}$$

В преобразованиях: левая часть равенства (30.13) заменяется правой; согласно (30.10) «перебрасываются» индексы α и k; правая часть равенства (30.13) заменяется левой; левая часть (30.15) — правой.

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} = -\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \delta_{jl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} =$$

$$= -\sum_{k,l,\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} = \sum_{k,l,\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_l} =$$

$$= -\sum_{l,\alpha=1}^{n} \delta_{il} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_l} = -\sum_{l,\alpha=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{q}_\alpha} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi_j}{\partial q_i}$$

Формула (30.16) есть условие интегрируемости системы

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \psi_i(t,q,\tilde{q}), \tag{30.17}$$

решение $S(t,q,\tilde{q})$ которой вследствие (30.16) находится квадратурой. Для $S(t,q,\tilde{q})$ с учетом (30.17), (30.13) и (30.7) выполняется

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \varphi_i(t,q,p)}{\partial p_k} \right\|^{-1} \neq 0, \tag{30.18}$$

т. е. функция $S(t,q,\tilde{q})$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к производящей функции свободного унивалентного канонического преобразования (см. (28.11)). Для построения преобразования нужно добавить к системе (30.17) систему (см. (28.10))

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial S(t,q,\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{p}_i(t,q,\tilde{q}), \tag{30.19}$$

решить уравнение (30.11) относительно $\tilde{q}_i$, что приведет к (30.8), и подставить (30.8) в (30.19). Результат не однозначен: каждому решению $S_0(t,q,\tilde{q})$ системы (30.17) соответствует множество решений $S(t,q,\tilde{q}) = S_0(t,q,\tilde{q}) + \tilde{S}(t,\tilde{q})$ с произвольной функцией $\tilde{S}(t,\tilde{q})$. ■

Следствие. *Пусть дополнительно к тому, что система (30.6) инволютивна и выполнено условие (30.7), функции $\varphi_i(t,q,p)$ — первые интегралы гамильтоновой системы, соответствующей функции Гамильтона $H(t,q,p)$. Тогда система*

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \psi_i(t,q,\tilde{q}), \qquad i = \overline{1,n}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H(t,q,\psi(t,q,\tilde{q})) \end{aligned} \tag{30.20}$$

вполне интегрируема, и для любого ее решения $S(t,q,\tilde{q})$ выполняется условие (30.18) (функции $\psi_i(t,q,\tilde{q})$ введены в (30.11)).

□ Для первых интегралов (30.6) выполняется равенство (30.2)

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = 0. \tag{30.21}$$

Дифференцирование тождества (30.12) по t приводит к аналогичному
(30.15) равенству

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}.$$

Подстановка $\partial\varphi_k/\partial t$ из (30.21) и учет тождеств (30.13) — (30.16) определяет соотношение

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \tilde{q}_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \sum_{l=1}^{n} \delta_{il} \frac{\partial H}{\partial q_l} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial \psi_l}{\partial q_i},$$

которое есть часть условий интегрируемости системы (30.20):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t}.$$

Прочие условия —
$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_i}$$
— проверены в доказательстве теоремы: см. (30.16). Там же для любого решения системы (30.17) доказано условие (30.18), а решение системы (30.20) есть решение и системы (30.17). Аналогично менее жесткой системе (30.17) любому решению $S_0(t,q,\tilde{q})$ системы (30.20) соответствует множество решений $S(t,q,\tilde{q}) = S_0(t,q,\tilde{q}) + \tilde{S}(\tilde{q})$ с произвольной функцией $\tilde{S}(\tilde{q})$. ■

§ 31. Уравнение Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби традиционно выводится с привлечением свободных канонических преобразований — условие каноничности (27.15) в независимых переменных q, $\tilde{q}$ (см. определение 28.2). Исходная функция Гамильтона $H(t,q,p)$ и функция $\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p})$, определяющая уравнения Гамильтона, в которые переходят в результате преобразования исходные уравнения, связаны соотношением (28.12). С привлечением уравнений (28.13) соотношение (28.12) можно записать так, что связь между гамильтонианами H и $\tilde{H}$ задается только производящей функцией $S(t,q,\tilde{q})$ и валентностью $c \neq 0$:
$$\tilde{H}\left(t,\tilde{q},-\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}}\right) = c\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,q,\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial q}\right). \qquad (31.1)$$
К соотношению (31.1) можно относиться как к уравнению для нахождения S (при заданном числе c). Решение $S(t,q,\tilde{q})$, удовлетворяющее условию (28.14), определит преобразование (27.12), связывающее заданные гамильтоновы системы.

К уравнению Гамильтона-Якоби приводит следующий вопрос: найти такое свободное унивалентное ($c = 1$) каноническое преобразование ($S(t,q,\tilde{q}) =?$), в результате которого система с функцией Гамильтона $H(t,q,p)$ перейдет в систему с функцией Гамильтона $\tilde{H} \equiv 0$. В переменных t, $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ уравнения Гамильтона примут вид
$$\dot{\tilde{q}}_i = 0, \quad \dot{\tilde{p}}_i = 0, \quad i = \overline{1,n},$$
и будут иметь общее решение
$$\tilde{q}_i = \alpha_i, \ \tilde{p}_i = -\beta_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (31.2)$$

Если вопрос о переходе к $\tilde{H} = 0$ решится положительно, то есть найдется функция $S(t,q,\tilde{q}) = S(t,q,\alpha)$, удовлетворяющая условию (28.14)

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(t,q,\tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 S(t,q,\tilde{q})}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0, \qquad (31.3)$$

то по $S(t,q,\alpha)$ при помощи (28.13) и (31.3)) найдется общее решение в исходных переменных t, q, p (учтено переобозначение (31.2) и $c = 1$):

$$p_i = \frac{\partial S(t,q,\alpha)}{\partial q_i} = \psi_i(t,q,\alpha), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (31.4)$$

$$\beta_i = \frac{\partial S(t,q,\alpha)}{\partial \alpha_i} = f_i(t,q,\alpha), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (31.5)$$

Для нахождения общего решения

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t,\alpha,\beta), \\ p_i &= p_i(t,\alpha,\beta), \end{aligned} \quad i = \overline{1,n}, \qquad (31.6)$$

нужно уравнения (31.5) разрешить относительно q_i и подставить $q_i(t,q,\alpha)$ в равенства (31.4). Условие (31.3) гарантирует также возможность решить (31.4) относительно α_i, что после подстановки $\alpha_i(t,q,p)$ в (31.5) приведет к полному набору первых интегралов

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(t,q,p), \\ \beta_i &= \beta_i(t,q,p), \end{aligned} \quad i = \overline{1,n}. \qquad (31.7)$$

Одновременное существование соотношений (31.6) и (31.7), во-первых, обеспечивает функциональную независимость первых интегралов (31.7) (уравнения (31.7) решаются относительно q_i, p_i, во-вторых, подтверждает, что (31.6) — общее решение (любому набору начальных условий t_0, q^0, p^0 уравнения (31.7) ставят в соответствие набор произвольных постоянных α_i, β_i.

Уравнение для производящей функции S, реализующей переход

$$H(t,q,p) \longrightarrow \tilde{H} \equiv 0,$$

есть уравнение (31.1) при $c = 1$, $\tilde{H} = 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \qquad (31.8)$$

Определение 31.1. *Уравнение (31.8) —* **уравнение Гамильтона–Якоби***, соответствующее системе, определенной функцией Гамильтона* $H(t,q,p)$.

Отметим, что, если вопрос о переходе $H(t,q,p) \longrightarrow \tilde{H} \equiv 0$ решать при помощи полусвободных унивалентных преобразований (см. определение 28.3), то подстановка в (28.11) $\tilde{H} = 0$, $c = 1$, $p_i = \partial\Phi/\partial q_i$ (см. (28.20)) приводит к такому же уравнению, как и уравнение Гамильтона–Якоби (31.8). Обозначение в этом случае $\tilde{q}_i = \beta_i$, $\tilde{p}_i = \alpha_i$ определит такое же как и (31.3), условие на решение Φ (см. (28.21)) и такие же уравнения (31.4), (31.5) для вычисления общего решения (31.6) или первых интегралов (31.7) (см. (28.20)).

Сопоставим уравнения Гамильтона–Якоби некоторым механическим системам, введенным в предыдущих параграфах.

Пример 31.1. Свободная частица:

$$H = \frac{1}{2}p^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0. \tag{31.9}$$

Пример 31.2. Линейный осциллятор:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \tag{31.10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \omega^2 q^2\right] = 0. \tag{31.11}$$

Пример 31.3. Движение в поле Всемирного тяготения (см. пример 30.1):

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{\beta}{r}. \tag{31.12}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \right.\right.\\ \left.\left. + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\} - \frac{\beta}{r} = 0.\end{gathered} \tag{31.13}$$

Спектр решений уравнения в частных производных (31.8) простирается от частных решений до общего решения, зависящего от произвольных функций. Как было обсуждено, для нахождения движений системы требуется решение в следующем смысле.

Определение 31.2. *Полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби (31.8) называется решение*

$$S(t,q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n),$$

зависящее от произвольных постоянных $\alpha_1,...,\alpha_n$ *и удовлетворяющее условию (31.3).*

Полными интегралами уравнения Гамильтона–Якоби являются главная и полуглавная функции Гамильтона с отождествлением $q^0 \equiv \alpha$ для главной функции, $p^0 \equiv \alpha$ — для полуглавной (см. определения 29.1 и 29.2, уравнения 29.15, 29.16, 29.24, 29.25, а также в примерах 29.1 и 29.2 результаты вычислений (29.18), (29.26), (29.27)).

Название — полный интеграл — оправдано тем обстоятельством, что при переходе: функция Гамильтона → уравнение Гамильтона-Якоби → полный интеграл, — не происходит потери информации. По полному интегралу $S(t,q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n)$ вычисляются равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = g(t,q,\alpha), \qquad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \psi_i(t,q,\alpha), \quad i = \overline{1,n}.$$

Последние n уравнений решаются относительно α_i:

$$\alpha_i = \alpha_i\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right),$$

что возможно в силу условия (31.3). Подстановка α_i в первое уравнение однозначно определит уравнение Гамильтона–Якоби (31.8).

Полезность уравнения Гамильтона-Якоби заключается в том, что один из его полных интегралов часто удается найти без громоздких вычислений и без применения общей теории интегрирования уравнений в частных производных. Один из приемов нахождения полных интегралов заключается в **методе разделения переменных:** вместо функции $S(t,q,\alpha)$ многих переменных отыскивается комбинация функций, каждая из которых является функцией одной переменной. Наиболее популярной является аддитивная комбинация

$$S = S_0(t) + S_1(q_1) + \ldots + S_n(q_n). \tag{31.14}$$

Пример 31.4. Применение такой комбинации к уравнению (31.9) разделит переменные t и q

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dS_1(q)}{dq}\right)^2 = -\frac{1}{2}\alpha^2.$$

Очевидные решения

$$S_0(t) = -\frac{1}{2}t\alpha^2,\ \ S_1(q) = \alpha q$$

приводят к полному интегралу

$$S = S_0 + S_1 = -\frac{1}{2}t\alpha^2 + \alpha q. \tag{31.15}$$

Произвольная постоянная α введена, чтобы удовлетворить определению 31.2 полного интеграла. Полный интеграл (31.15) с точностью до обозначений для произвольной постоянной совпадает с полуглавной функцией Гамильтона (29.28). Главная функция Гамильтона (29.27) — еще один полный интеграл уравнения (31.9). Отметим две характерные особенности, проявившиеся в рассмотренном примере: при аддитивном разделении переменных (31.14) для циклической координаты q_k ($\partial H/\partial q_k = 0$) можно положить $S_k(q_k) = \alpha q_r$, а в случае обобщенно-консервативной системы ($\partial H/\partial t = 0$) — положить $S_0(t) = \alpha_0 t$. Подстановка полного интеграла (31.15) в формулы (31.4), (31.5):

$$p = \alpha,\ \ \beta = -t + q,$$

приводит и к общему решению (31.6)

$$q = t + \beta,\ \ p = \alpha$$

и к первым интегралам (31.7)

$$\alpha = p,\ \ \beta = q - t.$$

Пример 31.5. Подстановка (31.14) в (31.11), как и в предыдущем примере, разделит переменные —

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dS_1(q)}{dq}\right)^2 + \omega^2 q^2\right] = -\frac{dS_0(t)}{dt} = \alpha \tag{31.16}$$

— и приведет к полному интегралу

$$
\begin{aligned}
S = S_0(t) + S_1(q) = -\alpha t + \int \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}\, dq = \\
= -\alpha t + \frac{1}{2} q \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} + \frac{2\alpha}{\omega^2} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}.
\end{aligned}
\tag{31.17}
$$

Два других полных интеграла приведены в § 29: главная (29.18) и полуглавная (29.26) функции Гамильтона.

Подстановка полного интеграла (31.17) в формулы (31.4), (31.5):

$$
p = \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}, \quad \beta = -t + \int \frac{dq}{\sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2}} = -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{2\alpha}}
$$

— приводит к общему решению (31.6)

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} \sin \omega (t + \beta), \\
p &= \sqrt{2\alpha} \cos \omega (t + \beta)
\end{aligned}
$$

и к первым интегралам

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \ \ (= H), \\
\beta &= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega q}{\sqrt{p^2 + \omega^2 q^2}} = \\
&= -t + \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega q}{p}.
\end{aligned}
$$

Пример 31.6. Пример линейного осциллятора с функцией Гамильтона (31.10) иллюстрирует, как при помощи уравнения Гамильтона–Якоби находить движение для целого класса обобщенно–консервативных систем ($H = H(q,p)$) с одной степенью свободы при дополнительном условии

$$
\partial H / \partial p \neq 0,
$$

которое дает возможность равенство

$$
H(q,p) = h \tag{31.18}
$$

разрешить относительно p

$$p = f(q,h). \tag{31.19}$$

Разделение переменных (31.14) в уравнении Гамильтона–Якоби (31.8) приведут к аналогичному (31.16) уравнению

$$H\left(q, \frac{dS_1(q)}{dq}\right) = -\frac{dS_0(t)}{dt} = h$$

и к аналогичному (31.17) полному интегралу

$$S = -ht + \int f(q,h)dq$$

(см. (31.19)), при помощи которого вычисляется общее решение

$$\begin{aligned} q &= q(t,h,\beta), \\ p &= p(t,h,\beta) \end{aligned}$$

и дополнительный к (31.18) первый интеграл $w(t,q,p) = \beta$.

Пример 31.7. Разделение переменных (31.14) в уравнении Гамильтона-Якоби (31.13) приводит к уравнению

$$\begin{gathered} \frac{dS_0(t)}{dt} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_3(r)}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dS_2(\theta)}{d\theta}\right)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \ \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{dS_1(\varphi)}{d\varphi}\right)^2\right]\right\} - \frac{\beta}{r} = 0. \end{gathered} \tag{31.20}$$

Система является обобщенно-консервативной и имеет циклическую координату ψ, поэтому положим $S_0 = \alpha_0 t$, $S_1 = \alpha_1\psi$. После подстановки в уравнение , получим в квадратных скобках выражение , зависящее только от θ. Распорядимся выбором $S_2(\theta)$ так, чтобы это выражение равнялось α_2. Из уравнения с разделяющимися переменными находим

$$S_2(\theta) = \int\sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}d\theta.$$

После подстановки S_0, S_1, S_2, получаем для $S_3(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и решением

$$S_3(r) = \int \sqrt{2m\left(\frac{\beta}{r} - \alpha_0\right) - \frac{\alpha_2}{r^2}}dr.$$

Функция

$$S(t,\psi,\theta,r,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{i=0}^{3} S_i = \alpha_0 t + \alpha_1\psi +$$

$$+\int\sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}d\theta + +\int\sqrt{2m\left(\frac{\beta}{r} - \alpha_0\right) - \frac{\alpha_2}{r^2}}dr$$

по построению есть решение уравнения (31.13), нетрудно убедиться, что требование (31.3), предъявляемое к полному интегралу, также выполнено. Полный интеграл S при помощи (31.4) определит в квадратурах всю совокупность движений в поле Всемирного тяготения и дополнительные к H, p_φ,z (см. (20.6) — (20.8)) три первых интеграла.

Пример 31.8. Рассмотрим систему с более общей, по сравнению с (31.12) функцией Гамильтона (см. (20.13))

$$H(F_2(F_1(q_1,p_1),q_2,p_2),p_3,q_4,p_4). \tag{31.21}$$

В примере 20.2 приведены четыре первых интеграла (20.14) соответствующей гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} F_1(q_1,p_1) &= \alpha_1, \\ F_2(\alpha_1,q_2,p_2) &= \alpha_2, \\ p_3 &= \alpha_3, \\ H(\alpha_2,\alpha_3,q_4,p_4) &= \alpha_4. \end{aligned} \tag{31.22}$$

Предполагается, что равенства (31.22) разрешимы относительно обобщенных импульсов

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(\alpha_1,q_1), \\ p_2 &= f_2(\alpha_1,\alpha_2,q_2), \\ p_3 &= \alpha_3, \\ p_4 &= f_4(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,q_4). \end{aligned} \tag{31.23}$$

Аналогично переходу (31.13) $\longrightarrow$ (31.20), разделение переменных (31.14) в уравнении Гамильтона–Якоби, соответствующем функции (31.21), приводит к результату

$$
\begin{gathered}
\frac{dS_0(t)}{dt} + H\left(F_2\left(F_1\left(q_1,\frac{dS_1(q_1)}{dq_1}\right),q_2,\frac{dS_2(q_2)}{dq_2}\right),\right. \\
\left.\frac{dS_3(q_3)}{dq_3},q_4,\frac{dS_4(q_4)}{dq_4}\right) = 0.
\end{gathered}
\tag{31.24}
$$

Распорядимся выбором функций $S_1(q_1),\ldots,S_4(q_4)$ так, чтобы выполнялось

$$
\begin{aligned}
F_1\left(q_1,\frac{dS_1(q_1)}{dq_4}\right) &= \alpha_1, \\
F_2\left(\alpha_1,q_2,\frac{dS_2(q_2)}{dq_2}\right) &= \alpha_2, \\
\frac{dS_3(q_3)}{dq_3} &= \alpha_3, \\
H\left(\alpha_2,\alpha_3,q_4,\frac{dS_4(q_4)}{dq_4}\right) &= \alpha_4.
\end{aligned}
\tag{31.25}
$$

С учетом обозначений (31.23) уравнения (31.25) эквивалентны уравнениям с разделяющимися переменными

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_1(q_1)}{dq_1} &= f_1(\alpha_1,q_1), \\
\frac{dS_2(q_2)}{dq_2} &= f_2(\alpha_1,\alpha_2,q_2), \\
\frac{dS_3(q_3)}{dq_3} &= \alpha_3, \\
\frac{dS_4(q_4)}{dq_4} &= f_4(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,q_4).
\end{aligned}
\tag{31.26}
$$

Подстановка (31.25) в (31.24) приводит к еще одному уравнению

$$
\frac{dS_0(t)}{dt} + \alpha_4 = 0,
$$

которое в совокупности с (31.26) определяет полный интеграл

$$
\begin{aligned}
&S(t,q_1,\ldots,q_4,\alpha_1,\ldots,\alpha_4) = -\alpha_4 t + \int f_1(\alpha_1,q_1)dq_1 + \\
&+ \int f_2(\alpha_1,\alpha_2,q_2)dq_2 + \alpha_3 q_3 + \int f_4(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,q_4)dq_4.
\end{aligned} \tag{31.27}
$$

Функция (31.27) является решением уравнения (31.24) по построению, а условие (31.3):

$$
\det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial f_4}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial f_4}{\partial \alpha_3} & \dfrac{\partial f_4}{\partial \alpha_4} \end{Vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial f_4}{\partial \alpha_4} \neq 0,
$$

— выполняется по предположению о возможности перехода (20.14) $\longrightarrow$ (31.23) и обратно. Уравнения (31.4) и (31.5) определят общее решение (31.6) и восемь первых интегралов (31.7). Четыре из них — результат решения относительно α_i уравнений (31.4) — совпадут с (20.14). Как отмечалось в конце § 20, удвоение числа первых интегралов — следствие инволютивности функций (20.14). Сформулируем общий результат.

Теорема 31.1 (Ж.Лиувилль). *Пусть для первых интегралов*

$$
w_i(t,q,p) = \alpha_i, \;\; i = \overline{1,n} \tag{31.28}
$$

(n — количество координат q и количество импульсов p) гамильтоновой системы, определенной функцией $H(t,q,p)$, выполняется

а) $(w_i,\, w_k) = 0$, $\;i,k = \overline{1,n}$, — интегралы находятся в инволюции (см. определение 30.1);

б) уравнения (31.28) разрешимы относительно p:

$$
p_i = \psi_i(t,q,\alpha), \;\; i = \overline{1,n}. \tag{31.29}
$$

Тогда, не выходя за рамки алгебраических операций и квадратур, по функциям $w_i(t,q,p)$, $i = \overline{1,n}$, вычисляется полный интеграл $S(t,q,\alpha)$

соответствующего H уравнения Гамильтона–Якоби (31.8) и дополнительные к (31.28) первые интегралы $w_{n+i}(t,q,p)$, $i = \overline{1,n}$.

□ Как было доказано в следствии из теоремы 30.2, система

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_i} &= \psi_i(t,q,\alpha), \qquad i = \overline{1,n}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H(t,q,\psi(t,q,\alpha)) \end{aligned} \tag{31.30}$$

(ψ_i — функции из (31.29)) вполне интегрируема, и для любого решения $S(t,q,\alpha)$ выполняется условие (31.3). Подстановка ψ_i из первых n уравнений системы (31.30) в последнее уравнение приводит к выводу, что любое решение $S(t,q,\alpha)$ системы (31.30) есть полный интеграл сответствующего уравнения Гамильтона–Якоби. При помощи уравнений (31.4), (31.5) (уравнения (31.4) совпадают с первыми n уравнениями из (31.30)) вычисляются $2n$ функционально независимых первых интеграла (первые n интегралов совпадают с (31.28)). Система (31.30) эквивалентна уравнению в полных дифференциалах

$$dS(t,q,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t,q,\alpha)dq_i - H(t,q,\psi(t,q,\alpha))dt,$$

которое, как известно[3], интегрируется в квадратурах. Одно из решений

$$\begin{gathered} S(t,q,\alpha) = \int_0^1 \{\sum_{i=1}^{n} q_i\psi_i(ts,qs,\alpha)dq_i - \\ -tH(ts,qs,\psi(ts,qs,\alpha))\}ds. \blacksquare \end{gathered} \tag{31.31}$$

Утверждение теоремы 31.1 открывает параллельный путь, минуя уравнение Гамильтона–Якоби, вычисления полного интеграла (см. (31.31)) и общего решения (31.6) уравнений Гамильтона. Приведенные выше примеры показывают, что удовлетворяющие условиям теоремы 31.1 первые интегралы «поставляют» теоремы 20.2, 20.3, 20.5 (циклическая и отделимая переменные, обобщенно–консервативные системы). Не исключено, что существуют другие «честные» примеры систем, для которых легко вычисляются или «угадываются» первые интегралы (31.28) в инволюции, разрешимые относительно обобщенных импульсов. К «нечестным» примерам приводит следующий

[3] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 420 с.

способ. По известному полному интегралу, например, по главной или полуглавной функциям Гамильтона, (см. определения 29.1, 29.2), вычисляются первые интегралы (31.7). Функции $\alpha_i(t,q,p)$, $i = \overline{1,n}$, в (31.7) удовлетворяют всем условиям теоремы 31.1. Условие а) справедливо в силу теоремы 30.2: преобразование (31.7) каноническое, переменные α_i, β_i играют роль $\tilde{q}_i$, $\tilde{p}_i$. Условие б) выполнено по построению функций $\alpha_i(t,q,p)$: они есть результат решения уравнений (31.4) относительно α_i, функции (31.4) (они же (31.29)) результат обратной операции — решения уравнений $\alpha_i = \alpha_i(t,q,p)$ относительно p_i.

Следующий пример показывает, что аддитивная замена переменных (31.14) в случае обобщенно–консервативной системы первого порядка не всегда приводит к успеху (ср. пример 31.6).

Пример 31.9. В результате канонического преобразования

$$\tilde{q} = p, \tilde{p} = -q$$

свободной частице ставится в соответствие функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}q^2$$

и уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 = 0.$$

Разделение переменных (31.14)

$$\frac{dS_0(t)}{dt} + \frac{1}{2}q^2 = 0$$

к полному интегралу не приводит. Другой вариант разделения переменных $S = S_0(t)S_1(q)$ определяет уравнение

$$\frac{dS_0(t)}{dt}S_1(q) + \frac{1}{2}q^2 = 0$$

и очевидным образом решает задачу:

$$S_1 = \frac{1}{2}q^2,\ \ S_0 = \alpha - t,\ \ S = \frac{1}{2}q^2(\alpha - t);$$

$$\frac{1}{2}q^2 = \beta,\ \ p = q(\alpha - t);$$

$$q = \sqrt{2\beta},\ \ p = \sqrt{2\beta}(\alpha - t).$$

Разделение переменных — в той или иной форме — в уравнении Гамильтона–Якоби не является универсальным методом нахождения движения, но, как показывают примеры 31.6, 31.8, заслуживает внимания, хотя бы за то, что обслуживает достаточно обширные классы систем.

В следующем примере кроме разделения переменных требуется некоторая «смекалистость».

Пример 31.10. Системе с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p_1 + q_2}{p_2 + q_1} \tag{31.32}$$

соответствует уравнение Гамильтона–Якоби (проведено разделение переменных (31.14))

$$\frac{dS_0(t)}{dt} + \left(\frac{dS_1(q_1)}{dq_1} + q_2\right) \Big/ \left(\frac{dS_2(q_2)}{dq_2} + q_1\right) = 0.$$

Выбор $S_0 = -ht$ и освобождение от знаменателя делит переменные

$$\frac{dS_1(q_1)}{dq_1} - hq_1 = h\frac{dS_2(q_2)}{dq_2} - q_2.$$

Приравнивание левой и правой части постоянной α и интегрирование определяет полный интеграл

$$S = -ht + \frac{1}{2h}(\alpha + hq_1)^2 + \frac{1}{2h}(\alpha + q_2)^2.$$

Подстановка S в уравнения (31.4) и решение относительно α и h приводит к двум первым интегралам в инволюции: один из них $H = h$, где H— функция Гамильтона (31.32), другой —

$$\frac{p_1 p_2 - q_1 q_2}{p_2 + q_1} = \alpha. \tag{31.33}$$

Уравнения (31.5) после подстановки вместо h функции (31.32) определят два других первых интеграла

$$\begin{gathered} hp_1 + p_2 = \beta_1, \\ -t + \frac{1}{h}p_1 q_1 - \frac{1}{2h^2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 = \beta_2. \end{gathered} \tag{31.34}$$

Функции (31.34) — еще одна пара первых интегралов в инволюции. Равенства (31.32) — (31.34) неявно определяют движение $q_i(t)$, $p_i(t)$.

Учебное издание

Геннадий Николаевич Яковенко

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Устойчивость, Колебания,
Гамильтонова Механика

Редактор *И.А. Волкова*
Художник *А.И. Лискович*

Подписано в печать . Формат 60х90 1/16. Бумага писчая N1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 10,00. Уч.-изд.л. 10.00.
Тираж экз. Заказ N

Московский физико-технический институт Лаборатория обработки учебной и научной информации 141700, Моск.обл., г.Долгопрудный, Институтский пер. 9