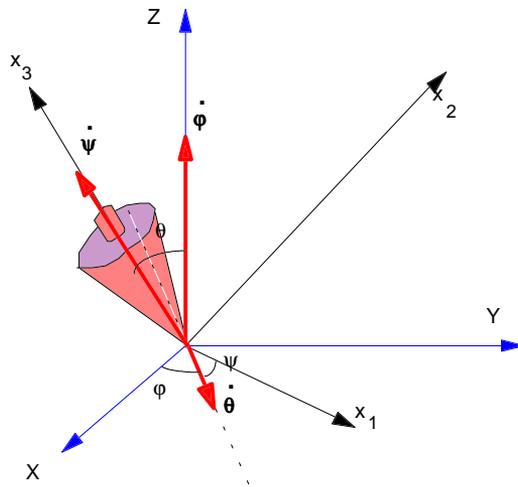


Mécanique Classique II

P. Amiot et L. Marleau



Mécanique Classique II

P. Amiot et L. Marleau

Département de physique ★ Université Laval ★ Québec ★ Canada

Cet ouvrage a été rédigé avec *Scientific WorkPlace*
et composé avec L^AT_EX 2_ε.
Copyright © 1997. Tous droits réservés.
L. Marleau, P. Amiot
Département de physique
Université Laval
Québec, Canada.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Avant-Propos | ix |
| 1 RAPPEL | 1 |
| 1.1 Trajectoire et cinématique d'une particule ponctuelle | 1 |
| 1.2 Plusieurs particules ponctuelles | 3 |
| 1.3 Éléments de dynamique | 4 |
| 1.4 Travail et Énergie | 7 |
| 1.5 Systèmes à N particules et forces extérieures | 8 |
| 1.6 Degrés de liberté | 10 |
| 2 FORMALISME DE LAGRANGE | 15 |
| 2.1 Résultats d'expérience et principe de base | 15 |
| 2.2 Variation fonctionnelle et application du principe | 18 |
| 2.3 La fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ | 20 |
| Forces conservatrices | 21 |
| Forces non conservatrices | 23 |
| 2.4 Coordonnées curvilignes | 23 |
| 2.5 Les contraintes | 28 |
| Méthode des multiplicateurs de Lagrange | 30 |
| 2.6 Invariance de jauge | 31 |
| 2.7 Quelques caractéristiques, propriétés, limites... | 34 |
| 3 APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS | 37 |
| 3.1 Cas simples en mécanique | 37 |
| Particule dans un champ gravitationnel | 37 |
| Particule suspendue à un ressort | 38 |
| Particule suspendue au haut d'une tige rigide | 39 |
| Pendule plan suspendu par un ressort de masse nulle | 42 |
| 3.2 Exemples non mécaniques | 44 |

| | |
|---|-----------|
| Principe de Fermat | 44 |
| 3.3 Problème à deux corps | 45 |
| 3.4 Le potentiel central | 47 |
| 3.5 Constantes du mouvement | 51 |
| 4 LE FORMALISME CANONIQUE | 57 |
| 4.1 La transformation de Legendre | 57 |
| 4.2 Le Hamiltonien | 58 |
| 4.3 Quelques exemples | 60 |
| Particule soumise à une force en une dimension | 60 |
| Particule soumise à une force en trois dimensions | 60 |
| Particule dans un champ central | 61 |
| 4.4 Les crochets de Poisson | 64 |
| 4.5 Les moments généralisés | 67 |
| 4.6 Les transformations canoniques (T.C.) | 67 |
| Quelques exemples | 72 |
| 4.7 Une transformation canonique très spéciale: La méthode de Hamilton-Jacobi | 76 |
| L'objectif | 76 |
| La méthode | 76 |
| 4.8 $T(q_i, p_i)$ en coordonnées généralisées | 80 |
| 4.9 La fonction S (ou comment refermer la boucle) | 82 |
| 5 THÉORIE DES PERTURBATIONS | 85 |
| 5.1 Buts de la méthode | 85 |
| 5.2 L'idée de base: la variation des constantes | 85 |
| 5.3 Les approximations | 86 |
| Méthode par série | 87 |
| Méthode itérative | 87 |
| Méthode de la moyenne | 88 |
| 5.4 Exemple | 88 |
| 5.5 Méthode canonique de perturbations | 90 |
| 5.6 Autre exemple | 91 |
| Développement en série | 92 |
| Solution itérative. | 93 |
| Méthode de la moyenne | 94 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 6 | MOUVEMENT DU SOLIDE | 99 |
| 6.1 | Degrés de liberté du solide | 99 |
| 6.2 | L'énergie cinétique et le tenseur d'inertie | 101 |
| 6.3 | Parentèse sur les axes principaux et le tenseur d'inertie | 104 |
| 6.4 | Le moment cinétique/angularaire du solide | 108 |
| 6.5 | Approche vectorielle et les équations d'Euler | 112 |
| 6.6 | Angles d'Euler et approche Lagrangienne | 115 |
| 6.7 | Exemple | 117 |
| 6.8 | Mouvement d'une toupie symétrique pesante à un point fixe | 120 |
| 6.9 | La toupie asymétrique libre: problème de stabilité | 124 |
| A | Notations, conventions,... | 127 |
| A.1 | Notations et conventions | 127 |
| A.2 | Systèmes de coordonnées | 128 |
| | Coordonnées cartésiennes | 128 |
| | Coordonnées cylindriques | 129 |
| | Coordonnées sphériques | 130 |
| A.3 | Aide-mémoire | 132 |
| | Mécanique lagrangienne | 132 |
| | Corps solide | 132 |
| A.4 | Références | 133 |
| Index | | 135 |



Avant-Propos

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de Mécanique Classique II (PHY-10492). Il est basé sur les notes de cours de P. Amiot et prennent leur inspiration comme il est coutume de plusieurs livres de références.

Les notes couvrent la mécanique classique avancée, soit le formalisme de Lagrange, le formalisme canonique, la théorie des perturbation et le mouvement d'un corps rigide. Les notions de mécanique sont rappelées dans le chapitre 1. Le formalisme de Lagrange est introduit au Chapitre 2. Suivent quelques applications et propriétés (Chapitre 3), le formalisme canonique (Chapitre 4), la théorie des perturbations (Chapitre 5) et finalement le mouvement d'un corps rigide (Chapitre 6). L'appendice contient un résumé des notations, un aide-mémoire et quelques références complémentaires.

Québec
Mai 1997

Luc Marleau
Département de Physique
Université Laval

1.1 Trajectoire et cinématique d'une particule ponctuelle

La particule ponctuelle est sans dimension. C'est une création de l'esprit, un modèle, représentant un objet physique qui n'est animé que d'un mouvement de translation (pas de rotation sur lui-même). On admet ici que notre espace physique est à trois dimensions auquel on adjoint le temps qui n'est pas ici une dimension mais un paramètre immuable et indépendant des objets physique et de leur évaluation dont il sert à mesurer le taux.

Nous représentons l'espace physique par un espace à trois dimensions à l'échelle, doté d'une origine notée O et de trois axes orientés. La position instantanée de la particule y est notée par un point P dont la position est entièrement définie par un triplet de nombres appelés coordonnées du point et qui mesurent généralement des longueurs ou des angles (voir figure 1.1). Ces coordonnées seront souvent notées x_i ou q_i . Il est souvent pratique de parler du *vecteur* position de la particule, noté \mathbf{x} ou \mathbf{p} qui va de l'origine O au point P .

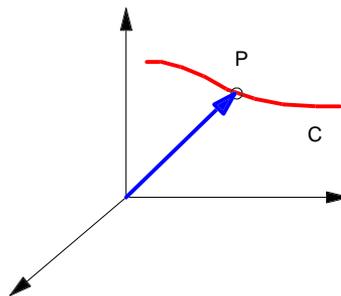


Figure 1.1 Trajet d'une particule

L'évaluation du système physique sera décrite par une courbe ou trajectoire C , décrivant le déplacement continu du point P dans notre espace de configuration. On conçoit cette évolution comme résultant d'un paramètre invariant qui *augmente*. On le choisit généralement et pour des raisons pratiques comme étant le temps, noté t , mais ce choix n'est pas unique. Le point P se déplaçant avec le temps sa position, \mathbf{r} , variera dans le

temps et la trajectoire sera décrite par $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en terme des composantes par:

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Qui dit mouvement pense intuitivement à une rapidité de mouvement. Cette notion, ce concept est quantifié par la définition de la vitesse \mathbf{V}

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (1.2)$$

Notons par la lettre p le paramètre (arbitraire) dont la variation génère la trajectoire (il peut être ou non le temps). Alors la longueur s de la trajectoire entre p_0 et p_1 , est donnée par :

$$s(p_0, p_1) = \int_{p_0}^{p_1} dp \sqrt{\sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} \quad (1.3)$$

où p varie de façon monotone entre p_0 et p_1 . Alors on peut écrire (voir figure 1.2):

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \equiv v \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (1.4)$$

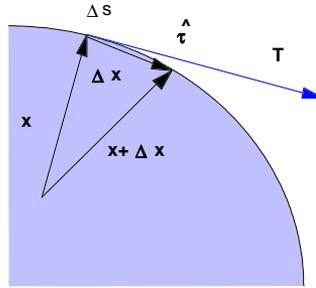


Figure 1.2

On voit immédiatement que :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (1.5)$$

un vecteur unitaire dans la direction du vecteur \mathbf{T} qui donne la tangente à la trajectoire au point P . En effet

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (1.6)$$

On obtient ainsi $\mathbf{V} = \hat{\boldsymbol{\tau}}v$ ou $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ donne la direction et v la grandeur de la vitesse (vectorielle) \mathbf{V} . Par abus de langage v s'appelle aussi la vitesse. Ce qu'il faut souligner, c'est que \mathbf{V} est toujours tangent (c'est un vecteur) à la trajectoire. D'ailleurs, pourvu que le paramètre p varie de façon monotone (et continue) le vecteur $\frac{d\mathbf{x}}{dp}$ est tangent à la trajectoire, le cas $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ n'est qu'un cas particulier.

Intuitivement la vitesse \mathbf{V} peut varier le long de la trajectoire (voir figure 1.3). Pour quantifier cet effet nous définissons l'accélération \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \equiv \dot{\mathbf{V}} \equiv \ddot{\mathbf{x}} \quad (1.7)$$

et clairement

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d(\hat{\boldsymbol{\tau}}v)}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}\end{aligned}\quad (1.8)$$

Parce que $\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = 1$ alors $\frac{d(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}})}{dt} = 2\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = 0$. Ainsi $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$ est perpendiculaire à $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ qui est tangent à la trajectoire. Donc $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$ est normal à cette trajectoire. Appelons $\hat{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire (dans la direction de $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$ i.e. dans le plan instantané de la trajectoire). On calcule

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \left| \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \right| \hat{\mathbf{n}} = \left| \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \right| v \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.9)$$

On écrit par définition, $\rho^{-1} = \left| \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \right|$. On a donc pour \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} + \frac{d^2s}{dt^2} \hat{\boldsymbol{\tau}}. \quad (1.10)$$

Ainsi l'accélération a une composante tangente à la trajectoire ($\hat{\boldsymbol{\tau}}$) de valeur $\frac{d^2s}{dt^2}$ et

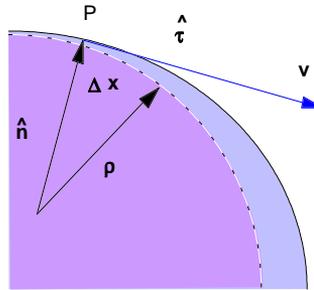


Figure 1.3

une composante normale à la trajectoire ($\hat{\mathbf{n}}$) de valeur $\frac{v^2}{\rho}$. On peut montrer que ρ est le rayon de courbure de la trajectoire. En effet, dans le voisinage immédiat du point P , la trajectoire peut être approximée par un arc de cercle, ρ serait alors le rayon de ce cercle. Plus la trajectoire est courbée autour de P , plus la vitesse changera rapidement selon $\hat{\mathbf{n}}$. De fait, plus ρ sera petit et plus la composante normale de \mathbf{a} , $\frac{v^2}{\rho}$, sera grande.

1.2 Plusieurs particules ponctuelles

Pour représenter la position de N particules dans notre espace de configuration à 3 dimensions nous avons besoin de N triplets de nombres (total $3N$)

$$\mathbf{r}_\nu = (x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, x_{\nu 3}); \quad \nu = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

L'évaluation d'un tel système sera représentée par N trajectoires (une par particule) dans cet espace.

Il est souvent utile d'imaginer un espace abstrait comptant $3N$ dimensions, $3N$ coordonnées y sont nécessaires pour décrire la position d'un point de cet espace qui donne à lui seul la position instantanée des N particules. Par un léger abus de notation on note les coordonnées de ce point $\{x_i; i = 1, 2, \dots, n = 3N\}$ et on peut parler de la trajectoire du système dans cet espace.

Ainsi, assez typiquement on écrira alors des expressions comme la force par exemple :

$$F_i(x_j, t) \text{ (} i^{\text{ème}} \text{ composante); } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

1.3 Éléments de dynamique

Depuis Newton on connaît l'équation fondamentale du mouvement :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1.13)$$

Elle prend plusieurs formes (pas nécessairement équivalentes)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}; \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.14)$$

La quantité \mathbf{F} est la force. Elle détermine le système et est déterminée empiriquement, i.e. c'est l'expérience qui nous en donne l'expression.

Cette expression qui est vraie pour

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1.15)$$

le demeure pour un nombre n de degrés de liberté. Pour alléger, écrivons

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \quad (1.16)$$

un vecteur à n composantes. Intégrant m dans \mathbf{F} (qui n'aura plus les dimensions d'une force mais celles d'une accélération) écrivons l'opération de Newton :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t); \quad n \text{ composantes, } n = 3N \quad (1.17)$$

$$\ddot{x}_i = f_i(x_j, \dot{x}, t); \quad n \text{ équations, } i = 1, 2, \dots, N \quad (1.18)$$

ou encore

$$\ddot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}_\mu, \dot{\mathbf{x}}_\mu, t); \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots, N \text{ particules.} \quad (1.19)$$

L'équation de Newton, en tant que loi physique se doit d'obéir à certaines symétries que nous fait découvrir l'observation de la nature. On dit alors que la mécanique classique doit être invariante sous les transformations de Galilée. Cette invariance est valable pour les systèmes physiques fermés. Il n'y a qu'un seul tel système, c'est l'Univers mais en pratique les effets des corps *éloignés* sont souvent négligeables et on fait l'approximation que le système est fermé. Cela signifie que tous les corps qui jouent un rôle significatif sur le système sont inclus dans le système. Il n'y a pas de *force extérieure*. Cette dernière notion de force extérieure peut également être utile, mais nous y reviendrons.

L'étude d'un système physique peut se faire entre t_0 et t ou entre $t_0 + s$ et $t + s$ (on peut refaire aujourd'hui une expérience faite hier et obtenir les mêmes résultats). Ainsi,

$$\ddot{x}_i = f_i(x_j, \dot{x}, t) = f_i(x_j, \dot{x}, t + s) \quad (1.20)$$

où s est quelconque. On en conclut que f ne peut dépendre du temps et donc

$$\ddot{x}_i = f_i(x_j, \dot{x}); \quad n = 3N \text{ équations.} \quad (1.21)$$

Postulons que les résultats d'une expérience sont indépendants de l'endroit où elle est faite. Si je déplace d'une même distance orientée, \mathbf{l} , chaque particule du système physique alors sa position passe de \mathbf{x}_ν à $\mathbf{x}_\nu + \mathbf{l}$ (ν compte les particules) alors que $\dot{\mathbf{x}}_\nu$ demeure $\dot{\mathbf{x}}_\nu$, puisque $\dot{\mathbf{l}} = 0$. La loi de Newton $\ddot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}_\mu, \dot{\mathbf{x}}_\mu)$ doit être indépendante de \mathbf{l} , ce qui impose que \mathbf{f}_ν dépende de \mathbf{x}_μ sous la forme $\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda$ puisque

$$\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda \rightarrow (\mathbf{x}_\mu + \mathbf{l}) - (\mathbf{x}_\lambda + \mathbf{l}) \equiv \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda \quad (1.22)$$

donc

$$\ddot{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda, \dot{\mathbf{x}}_\mu). \quad (1.23)$$

On sait également par expérience que la physique est la même pour deux observateurs se déplaçant l'un par rapport à l'autre avec une vitesse constante (*translation* de vitesses). Cela impose soit

$$\mathbf{f}_\nu = \begin{cases} \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda) \\ \text{ou} \\ \mathbf{f}_\nu(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda, \dot{\mathbf{x}}_\mu - \dot{\mathbf{x}}_\lambda). \end{cases} \quad (1.24)$$

On admet également que la physique au Canada est la même qu'en Australie, même s'ils ont la tête en bas. Par conséquent les lois physiques, telles l'équation de Newton ne peut pas dépendre de l'orientation de notre système de référence. Un tel changement d'un angle ϕ autour d'un axe $\hat{\mathbf{n}}$ se note, en coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{r} \rightarrow \phi \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} \quad (1.25)$$

ou, si on écrit r sous forme (matricielle) d'un vecteur où les éléments sont les composantes de r ,

$$\mathbf{r} \rightarrow G\mathbf{r}; \text{ où } G = \text{matrice } 3 \times 3 \text{ pour une particule} \quad (1.26)$$

Clairement, si

$$\mathbf{r} \rightarrow G\mathbf{r} \quad (1.27)$$

alors

$$\dot{\mathbf{r}} \rightarrow G\dot{\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{r}} \rightarrow G\ddot{\mathbf{r}} \quad (1.28)$$

donc l'invariance de

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \implies \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(G\mathbf{r}, G\dot{\mathbf{r}}) \quad (1.29)$$

implique

$$\mathbf{f}(G\mathbf{r}, G\dot{\mathbf{r}}) = G\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (1.30)$$

Complétons tout cela avec les autres lois de Newton avant de revenir plus tard sur certaines conséquences des résultats ci-dessus. Dans un système fermé, la loi d'action-réaction stipule que si un corps, noté par l'indice ν agit avec une force $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ sur un corps μ alors ce corps agit sur avec une force $\mathbf{F}_{\mu\nu} = -\mathbf{F}_{\nu\mu}$. Ainsi si nous n'avons que deux corps, avec $\mathbf{r}_\nu = (x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, x_{\nu 3})$

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad (1.31)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (1.32)$$

ou de façon générale, pour N corps (sans somme sur ν)

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{\nu\mu} = - \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

Cette loi a une conséquence immédiate et importante : la conservation du moment

total. Sommons ci-dessus sur ν

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \ddot{\mathbf{r}}_{\nu} = \sum_{\mu, \nu} \mathbf{F}_{\nu\mu} = 0 \quad (1.34)$$

donc

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \ddot{\mathbf{r}}_{\nu} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} = 0. \quad (1.35)$$

La quantité dérivée est donc une constante dans le temps, i.e. $\sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} = \mathbf{C}$.

Il est habituel de définir le moment $\mathbf{p}_{\nu} = m \dot{\mathbf{r}}_{\nu}$. Nous aurons donc

$$\sum_{\nu} \mathbf{p}_{\nu} = \mathbf{C} \equiv \mathbf{P}: \quad \text{le moment total.} \quad (1.36)$$



Remarque 1

En conclusion : le moment (linéaire) total d'un système fermé est une constante du mouvement.

On définit le moment angulaire d'une particule par

$$\mathbf{l}_{\nu} = \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{p}_{\nu} = m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \quad (1.37)$$

donc

$$\dot{\mathbf{l}}_{\nu} = m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu} + m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \ddot{\mathbf{r}}_{\nu} = 0 + m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \ddot{\mathbf{r}}_{\nu} \quad (1.38)$$

$$= \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{F}_{\nu} = \mathbf{r}_{\nu} \times \sum_{\mu} \mathbf{F}_{\nu\mu}. \quad (1.39)$$

Définissant le moment angulaire total du système

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu} \mathbf{l}_{\nu} \quad (1.40)$$

alors

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \sum_{\mu} \mathbf{F}_{\nu\mu} = \sum_{\mu, \nu} \mathbf{r}_{\nu} \times \mathbf{F}_{\nu\mu}. \quad (1.41)$$

Avec $\mathbf{F}_{\nu\mu} = 0$ (la particule n'agit pas sur elle-même).

Or, le vecteur $\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}_{\mu}$ est dans la direction reliant les particules ν et μ . Si la force entre ces particules est dans cette direction, comme sur la figure 1.4, alors le produit (\times) sera zéro et $\dot{\mathbf{L}} = 0$ donc $\mathbf{L} = \text{constante}$.

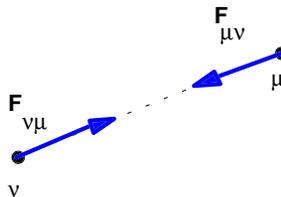


Figure 1.4



Remarque 2

Par conséquent : si les particules constituant un système fermé n'agissent les unes sur les autres que selon la droite qui les relie, alors le moment angulaire total du système est une constante du mouvement.

1.4 Travail et Énergie

Lorsqu'une force \mathbf{F} agit sur un système physique, disons une particule, on dit qu'elle fait un travail sur ce système. Ceci cause un changement de l'énergie de ce système. Soit une trajectoire entre les temps t_0 et t . Calculons le long de cette trajectoire la quantité $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \stackrel{\text{traj. phys.}}{=} m \int_{t_0}^t \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \\ &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (v^2) dt \\ &= \frac{1}{2} m v^2(t) - \frac{1}{2} m v^2(t_0) = T - T_0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Appelant $T = \frac{1}{2} m v^2$ l'énergie cinétique, on voit que l'application de la force \mathbf{F} se traduit par un changement de cette énergie cinétique. Notons cependant que l'intégrale ci-dessous se fait le long d'une trajectoire. Le résultat peut donc dépendre de cette trajectoire (voir figure 1.5), i.e. de façon générale

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.43)$$

Dans certains cas cependant, et ils sont physiquement importants, l'intégrale ne

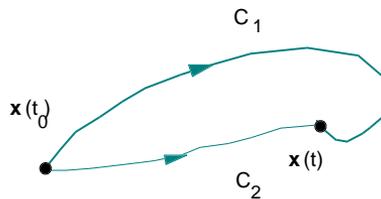


Figure 1.5

dépend pas de la trajectoire mais uniquement des points initial et final, on dit qu'elle est conservatrice (la force). Strictement parlant, il s'agit d'une propriété mathématique, i.e. qui résulte de la façon dont \mathbf{F} dépend de \mathbf{x} , \mathbf{v} , t . Il se trouve que dans monde physique réel, plusieurs forces peuvent être décrites par de telles fonctions. Lorsque tel est le cas,

l'intégrale de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ sur un parcours fermé est évidemment nul.

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{S \in C} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.44)$$

où l'application du théorème de Stokes est responsable de la dernière branche de cette équation avec S une surface dont la courbe fermée C marque la frontière. Comme cette surface est arbitraire mais que le résultat de l'intégrale doit toujours être nul alors la fonction à intégrer doit être nulle

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 : \quad \text{force conservatrice.} \quad (1.45)$$

Dans ce cas il est toujours possible d'écrire \mathbf{F} comme le gradient d'une fonction scalaire. On écrit

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad (1.46)$$

et on appelle $V(\mathbf{x})$ l'énergie potentielle. Ainsi le travail fait par une telle force entre les points \mathbf{x}_0 et \mathbf{x} sera

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \nabla V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x}) \doteq V_0 - V. \quad (1.47)$$

On avait vu que ce même travail était donné par $T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)$. Nous aurons donc

$$T + V = T_0 + V_0 : \quad \text{Énergie conservée.} \quad (1.48)$$

Lorsque la force qui agit sur une particule est conservatrice on peut définir une constante du mouvement (indépendante de t) qu'on appelle l'énergie $E = T + V$. Physiquement la force est donnée par $-\nabla V$, on peut donc remplacer V par $V + \text{constante}$ sans changer la force \mathbf{F} . On change alors la valeur de E en $E + \text{constante}$. L'échelle d'énergie ne peut donc être fixée qu'à une constante additive près. En pratique on fixe la valeur de $V(\mathbf{x})$ à une certaine valeur, V_0 , pour un $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, \mathbf{x}_0 et V_0 étant arbitraires.

1.5 Systèmes à N particules et forces extérieures

Supposons un ensemble de N particules interagissant entre elles et sur lesquelles peuvent également agir des forces extérieures. Notons m_i la masse de la $i^{\text{ème}}$ particule, \mathbf{F}_i la force externe qui agit sur elle et \mathbf{F}_{ij} la force due à l'interaction de la $j^{\text{ème}}$ particule sur la $i^{\text{ème}}$. Évidemment $\mathbf{F}_{ij} = 0$ et par la troisième loi de Newton $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Pour la $i^{\text{ème}}$ particule, l'équation de mouvement est

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (1.49)$$

Sommant sur toutes les particules

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} : \quad \text{force externe totale} \quad (1.50)$$

parce que $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = 0$. Avec $M = \sum_i m_i$: masse totale des N particules,

$$\mathbf{F} = M \left[\frac{1}{M} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \right] = M \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{x}_i \right] \quad (1.51)$$

d'où

$$\mathbf{F} = M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X} : \text{où } \mathbf{X} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{x}_i \quad (1.52)$$

donne la position du centre de masse du système. Le mouvement du centre de masse se fait comme si toute la masse y était concentrée et que la force externe totale s'y appliquait, *quelle que soit* l'interaction entre les particules. Définissant le moment linéaire total où $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}$, on aura

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P} : \text{où } \mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (1.53)$$

Si la force extérieure disparaît, alors $\mathbf{P} = \text{constante}$.

Après le moment linéaire total, étudions le moment angulaire total. Nous aurons évidemment par rapport à l'origine Ox

$$\mathbf{L} = \sum_i^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i \quad (1.54)$$

mesuré à partir de l'origine du système de coordonnées utilisées. Il est utile d'utiliser les coordonnées relatives que nous noterons les \mathbf{y}_i (aucun rapport avec le y des coordonnées cartésiennes), et définis par $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{X} \implies \mathbf{x}_i = \mathbf{X} + \mathbf{y}_i$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{X} + \mathbf{y}_i) \times (\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{y}}_i) \\ &= \sum_i^N m_i (\mathbf{y}_i \times \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{y}_i \times \dot{\mathbf{X}}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

mais $\sum_i m_i \mathbf{y}_i = 0$ donc $\sum_i m_i \dot{\mathbf{y}}_i = 0$ aussi, et alors

$$\mathbf{L} = \sum_i^N m_i \mathbf{y}_i \times \dot{\mathbf{y}}_i + M\mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}_r + \mathbf{L}_{\text{CM}} \quad (1.56)$$

où $\mathbf{L}_r = \sum_i^N m_i \mathbf{y}_i \times \dot{\mathbf{y}}_i$ et $\mathbf{L}_{\text{CM}} = M\mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{P}}$.

Ainsi le moment angulaire total par rapport à l'origine d'un système inertiel est la somme vectorielle du mouvement angulaire relatif des particules par rapport au CM et d'un moment angulaire correspondant à la totalité de la masse centrée au CM par rapport à l'origine du système inertiel.

On peut passer d'un ensemble de particules ponctuelles à un corps de volume fini en remplaçant de façon adéquate les sommes par des intégrales. Dans ce cas on voit apparaître des densité de masse $\rho(\mathbf{x})$ telles que

$$M = \int_{\text{Volume}} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (1.57)$$

Exemple 1.1

Système simple unidimensionnel:

Si la force $F = F(x)$ et qu'en une dimension il existe une fonction $V(x)$ telle que

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (1.58)$$



Supposons $V(x)$ comme sur la figure 1.6 et étudions une particule qui serait soumise à une telle force. Nous avons

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = T + V. \quad (1.59)$$

Évidemment $T \geq 0$ et donc $E \geq V(x)$ toujours. Donc $E \geq E_0$. Ceci contraint le mouvement. Par exemple si $E = E_1$, alors le mouvement sera limité à la région entre x_1 et x_2 . Par contre si $E = E_2$, alors non seulement la région $x_0 \leq x \leq x_3$ est-elle possible mais aussi la région $x \geq x_4$.

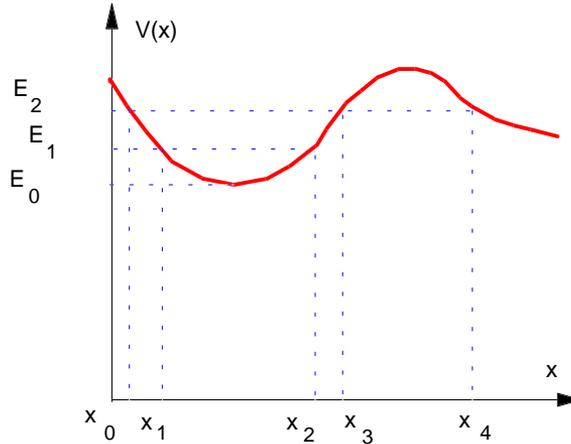


Figure 1.6

En une dimension il est simple d'obtenir la solution à partir de l'équation pour l'énergie ci-dessus. En effet, isolant $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} (E - V(x))^{\frac{1}{2}} \quad (1.60)$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (1.61)$$

Intégrant,

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (1.62)$$

ou formellement $t - t_0 = f(x, E) - f(x_0, E)$ où on isole $x = x(t - t_0, E, x_0)$: solution unique si on connaît E et $x_0 = x(t_0)$.

1.6 Degrés de liberté

La notion de degré de liberté jouera un rôle important dans les chapitres qui vont suivre. Cette section est consacrée à la première étape de cette notion.

La première caractéristique des degrés de liberté est qu'ils se comptent. Un système physique a un, deux, trois, ..., N degrés de liberté.

Le degré de liberté est généralisation du nombre de directions indépendantes selon lesquelles une particule peut se déplacer dans l'espace physique. Ainsi, une particule ponctuelle pouvant se déplacer dans une direction possède un degré de liberté; elle en possède deux si elle peut se déplacer dans un espace à deux dimensions, etc... Des forces agissant selon une ou plusieurs de ces directions peuvent limiter le mouvement de la particule à un domaine fini selon ces directions sans faire disparaître le degré de liberté. Par exemple, si une particule est libre de se déplacer selon l'axe Ox seulement, elle a un degré de liberté. Si une force, disons harmonique, $F_x = -kx$, agit sur la particule, le domaine de variation de la particule sera réduit de $-x_0$ à $+x_0$ selon son énergie $E = \frac{kx_0^2}{2}$, et la particule a toujours un degré de liberté. Cependant si cette force est caractérisée par une tige rigide qui empêche tout mouvement, alors le domaine de variation du mouvement est réduit à zéro et la particule perd son degré de liberté. Dans l'exemple considéré ici (voir figure 1.7) la direction du mouvement est une droite (cartésienne). C'est un espace à une dimension géométrique correspondant à un degré de liberté physique. La particule pourrait ne pouvoir se déplacer que selon une courbe quelconque, disons la deuxième courbe de la figure 1.7. Encore une fois la particule n'a qu'un seul degré de liberté, une courbe étant un espace à une dimension, un seul nombre ou coordonnée étant suffisant pour déterminer la position de tout point sur la courbe, par exemple la distance orientée (+ ou -) par rapport à une origine O quelconque.

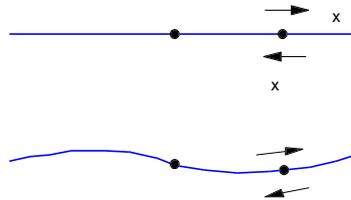


Figure 1.7

On peut donc prendre pour règle que le nombre de degrés de liberté d'une particule est égal au nombre de coordonnées nécessaires et suffisantes pour déterminer la position de la particule. Compter le nombre nécessaire en général n'est pas difficile; un système physique comptant n particules pouvant toutes se déplacer dans un espace à D dimensions aura nD degrés de liberté même si ces particules sont en interaction à condition que ces interactions ne limitent pas à zéro les domaines de variation. Prenons par exemple deux particules ponctuelles, 1 et 2 dans un espace à deux dimensions (voir figure 1.8). Ce système compte $2 \times 2 = 4$ degrés de liberté. Pour décrire ces 4 degrés de liberté on peut choisir les 4 coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 . On peut aussi choisir x_1, y_1, θ et r , cette dernière coordonnée mesurant la distance entre les deux particules. À chaque fois, quatre coordonnées sont nécessaires et suffisantes pour décrire les directions selon lesquelles les composantes du système peuvent se déplacer, i.e. définir exactement la position des deux particules du système. Dans ce problème il existe des familles de solutions, correspondant à des conditions initiales spéciales, qui ont comme caractéristique, soit $\theta =$ constante soit que $r =$ constante et où il apparaît donc que le domaine de variation de

certaines coordonnées est réduit à zéro, semblant indiquer que le nombre de degrés de liberté est maintenant de moins de quatre. Il n'en est rien, le système continue d'avoir quatre degrés de liberté, un simple changement des conditions initiales demandera quatre coordonnées encore une fois pour décrire le mouvement. Le nombre de degrés de liberté ne se compte pas dans la solution mais est une propriété intrinsèque du système physique.

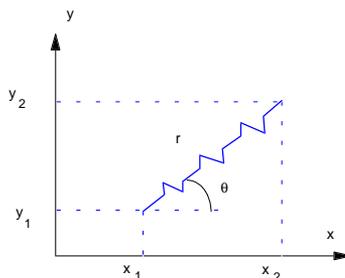


Figure 1.8

Supposons maintenant que le ressort soit remplacé par une tige rigide sans masse de longueur l (voir figure 1.9). Le domaine de variation de la distance entre les deux particules est réduit à zéro. Un degré de liberté vient de disparaître. En effet on peut écrire soit

$$r = l \implies dr = 0$$

soit

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l$$

alors

$$d\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0.$$

Dans la première équation on lit directement que r est réglé à la valeur l . Il ne reste que le degrés de liberté décrits par x_1, y_1, θ . Dans la deuxième équation on lit qu'il existe un relation de dépendance entre quatre coordonnées (x_1, y_1, x_2, y_2) . Algébriquement cela signifie que trois seulement des quatre coordonnées sont indépendantes. Ainsi donc un degré de liberté est décrit mathématiquement par une coordonnée indépendante. Cela signifie que, physiquement, un degré de liberté correspond à une *direction généralisée* le long de laquelle le système peut se déplacer indépendamment des autres *directions*, i.e. en les gardant constantes. Clairement ici, si on varie x_1, x_2 , et y_1 par exemple, alors y_2 n'est pas libre de prendre n'importe quelle valeur. y_2 est contraint de prendre la valeur telle que $\sqrt{\quad} = l$ ci-dessus. Ce n'est pas un degré de liberté puisqu'il n'est pas indépendant des autres. Nous aurons à revenir sur la notion de degré de liberté. Notons ici que nous les comptons dans l'espace physique, en général l'espace à 3 dimensions dans lequel se situe la mécanique classique (ou ses sous-espaces à 2 ou 1 dimensions). Il existe aujourd'hui des domaines d'études en physique, par exemple celui appelé *systèmes dynamiques*, où on préfère travailler dans un espace de phase qui contient les vitesses en plus des coordonnées. Par exemple, l'espace de phase correspondant à notre espace physique habituel décrit, disons par les coordonnées x, y , et z , comprendra également les vitesses

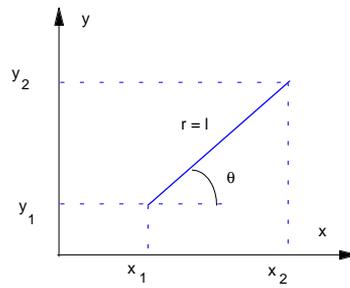


Figure 1.9

\dot{x} , \dot{y} , et \dot{z} . C'est un espace à 6 dimensions et il est commun en système dynamique de compter coordonnées et vitesses comme étant des degrés de liberté. Comme nous le verrons la chose se justifie aisément mais nous garderons ici notre notion de degré de liberté défini dans l'espace physique seulement. Simple question de convention.



2 FORMALISME DE LAGRANGE

Le formalisme de Lagrange permet d'étudier une vaste gamme de problèmes en mécanique. En ce sens il est équivalent au formalisme de Newton mais, il a sur ce dernier un certain nombre d'avantages. D'abord, il est fondé sur un principe théorique fondamental et élégant. Il utilise des quantités scalaires plutôt que vectorielles et, en ce sens, sa forme est indépendante des coordonnées utilisées. C'est également la porte d'entrée à une foule de méthode qui forment la base de la physique moderne en mécanique quantique et dans les théories de champs classiques et quantiques.

Nous présenterons d'abord la méthode dans un cadre assez simple pour ensuite en souligner certaines limites d'application. L'intérêt et les avantages de ce formalisme deviendront graduellement évident.

Afin de souligner l'invariance de forme selon les types de coordonnées utilisées, nous les noterons q_i et on les appelle souvent coordonnées généralisées. Elles sont absolument quelconques sauf pour les limitations que nous verrons dans la section sur les contraintes.

2.1 Résultats d'expérience et principe de base

Nous discutons ici d'une particule ponctuelle dont la position instantanée est donnée par les trois nombres notés $\{q_i \mid i = 1, 2, 3\}$. Cette particule suit une trajectoire qui se développe avec le temps t et dont l'équation

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

est le résultat recherché. Le long de la trajectoire, on définira les composantes de la vitesse généralisée $\{\dot{q}_i \mid i = 1, 2, 3\}$ définies par

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Notre expérience consiste en une source de particules (identiques) que nous nous situons au point P_1 et en un détecteur que nous situons en P_2 . A un temps noté t_1 nous émettons une particule en P_1 (de coordonné $q_i(t_1)$). Nous ne nous intéressons qu'aux particules détectées en P_2 à un temps t_2 tel que $t_2 - t_1$ est le même pour toutes les expériences. Nous répétons l'expérience un bon nombre de fois. À priori il y a un nombre infini de trajectoires possibles pour les particules satisfaisant les paramètres de l'expérience : $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ (voir figure 2.1). Pour les distinguer les unes des autres, utilisons un paramètre tel que la trajectoire C obéit aux équations

$$q_i^{(\alpha)} = q_i^{(\alpha)}(t) \quad (2.3)$$

où, pour un i donné $q_i^{(\alpha)}(t) \neq q_i^{(\alpha')}(t)$ pour $\alpha \neq \alpha'$ (deux trajectoires différentes). Ayant filmé l'expérience, nous constatons que les particules ayant satisfait les paramètres de l'expérience ont *toute* utilisé la même trajectoire, disons C_0 . La nature semble donc préférer cette trajectoire et la choisit toujours.

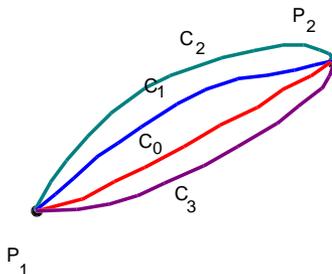


Figure 2.1

La méthode de Lagrange compare les trajectoires possibles entre elles et nous donne un critère pour choisir la bonne. Pour ce faire nous calculerons (en principe) une quantité, notée $S(\alpha)$, qui caractérise la trajectoire

$$S(\alpha) = \int_{t_2}^{t_1} L(q_i^{(\alpha)}(t), \dot{q}_i^{(\alpha)}(t), t) dt \quad (2.4)$$

où la fonction L , qui reste à déterminer, dépend des $q_i(t)$, des $\dot{q}_i(t)$ et possiblement explicitement de t lui-même. On aurait pu prévoir que L ait une dépendance en \ddot{q}_i — mais l'expérience nous indique que ce n'est pas nécessaire. Ayant calculé (en principe) $S(\alpha)$ pour toutes les trajectoires nous décidons de la bonne en comparant les différentes valeurs obtenues pour S . Pour pouvoir choisir un donné il faut que S prenne une valeur particulière en ce point (trop arbitraire) ou ait un comportement particulier. Le comportement le plus simple à identifier, c'est le point stationnaire, là où S est un extrémum. C'est le cas de α sur la figure 2.2, mais également de α^1 . Dans ce qui suit nous supposons toujours qu'il s'agit de (bien que ce soit difficilement démontrable. Nous écrivons donc que

$$\left. \frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\bar{\alpha}} = 0 \quad (2.5)$$

définit $\bar{\alpha}$ et fixe ainsi la *bonne* trajectoire sur laquelle S prend la valeur extrême (minimale) $S(\bar{\alpha})$.

La quantité S s'appelle l'action et le principe énoncé ci-dessus est le principe de moindre action. C'est un principe variationnel, i.e. nous recherchons un point fixe de S tel que $dS = 0$. Aujourd'hui, on tend à baser toutes les lois de la physique sur de tels principes.

2.2 Variation fonctionnelle et application du principe

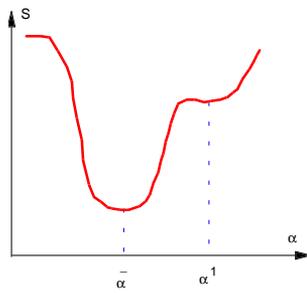


Figure 2.2

Ci-dessus nous avons écrit

$$dS = 0 \quad (2.6)$$

comme si la variation de S en était une au sens habituel, i.e. le long d'une trajectoire. Or, ce n'est pas le cas du tout, la variation est faite en comparant des trajectoires, i.e. en variant selon les fonction $q_i^{(\alpha)}(t)$ (voir figure 2.3). On notera de telles variations à l'aide du symbole plutôt que du symbole δ . La différence est très nette

$$dq_i^{(\alpha)}(t) = q_i^{(\alpha)}(t + dt) - q_i^{(\alpha)}(t) \quad (2.7)$$

$$\delta q_i^{(\alpha)}(t) = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t). \quad (2.8)$$

Sur une trajectoire donnée on connaît $q_i^{(\alpha)} = q_i^{(\alpha)}(t)$ et les vitesses $\dot{q}_i^{(\alpha)}(t)$ sont

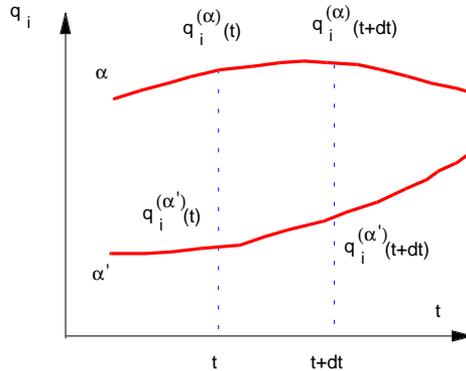


Figure 2.3

fixées. Mais en comparant des trajectoires on constate sur la figure 2.4 qu'entre α et α' , $\delta q^{(\alpha)}(t)$ est le même qu'en comparant α avec α'' . Ceci n'est pas vrai des $\delta \dot{q}^{(\alpha)}(t)$. Les variations des vitesses sont donc indépendantes des variations des coordonnées dans ce formalisme parce que nous comparons des trajectoires différentes. Ces variations étant à temps constant i.e. par exemple

$$q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t) = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha'')}(t) = \delta q_i^{(\alpha)}(t) \quad (2.9)$$

mais

$$\dot{q}_i^{(\alpha)}(t) - \dot{q}_i^{(\alpha')}(t) \neq \dot{q}_i^{(\alpha)}(t) - \dot{q}_i^{(\alpha'')}(t) \quad (2.10)$$

les variations en α et en temps t sont indépendantes et

$$\delta \dot{q}_i^{(\alpha)}(t) = \delta \left(\frac{d}{dt} q_i^{(\alpha)}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\delta q_i^{(\alpha)}(t) \right). \quad (2.11)$$

Si nous calculons la différentielle ordinaire d'une fonction $f(x, y)$, i.e. df , nous obtiendrons

$$df(x, y) = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy \quad (2.12)$$

si les variations dx et dy sont indépendantes. Le même type d'opération s'applique au

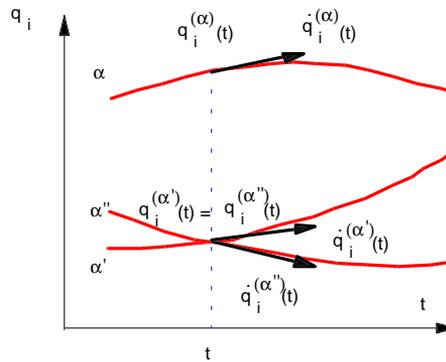


Figure 2.4

calcul, par exemple de L

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \frac{dL}{dq_i} q_i + \sum_i \frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (2.13)$$

et il n'y a pas de terme $\frac{\partial L}{\partial t} \delta t$ puisque $\delta t = 0$, les variations étant à temps constant.

Pour appliquer le principe de moindre action nous aurons à calculer

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (2.14)$$

puisque'on peut intervertir les variations en t et en α et puisque $q_i(t_1) = 0 = q_i(t_2)$ étant donné que selon les paramètres de l'expérience en t_1 la particule est nécessairement en P_2 et en t_2 elle est en P_2 . Ces deux points ne sont pas variés, toutes les trajectoires considérées devant les relier.

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{dL}{dq_i} q_i + \sum_i \frac{dL}{d\dot{q}_i} \dot{q}_i \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{dL}{dq_i} q_i + \sum_i \frac{dL}{d\dot{q}_i} \frac{dq_i}{dt} \right] dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Intégrons par parties le deuxième terme du crochet []

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{d\dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (2.16)$$

où le premier terme de droite est zéro puisque $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Remplaçant nous

avons

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \quad (2.17)$$

Pour aller plus loin nous devons faire l'hypothèse que les q_i sont indépendants les uns des autres. En termes physiques, cette indépendance des δq_i signifiera que les q_i sont indépendants les uns des autres, i.e. qu'il n'existe aucune contrainte les reliant. Ils devront donc correspondre à des degrés de liberté physique du système.

Posant donc que les q_i sont indépendants et comme ils sont quelconques, la seule façon de satisfaire cette équation est que chaque terme dans [] de (2.17) soit nul, i.e.

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.18)$$

généralement écrit comme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = 0. \quad (2.19)$$

Ce sont les fameuses équations d'*Euler-Lagrange*. Nous posons qu'une fois solutionnées, elles définissent une trajectoire privilégiée

$$q_i = q_i(t) \quad (2.20)$$

qui est identifiée à la trajectoire physique.

Nous avons débuté en parlant d'une particule mais clairement, cela n'a eu aucun impact dans le développement de cette équation. Elle demeure valable pour un système à un nombre arbitraire, n , de degrés de liberté pourvu qu'ils ne soient pas contraints. Nous obtiendrons alors n équations pour $i = 1, 2, \dots, n$. De plus, rien n'a été dit sur les $\{q_i\}$. Ils sont quelconques et mesurent des longueurs, des angles, des.... La forme de l'équation n'est pas affectée par le choix des $\{q_i\}$.

Remarque 3

On remarque ici qu'étant donné que les q_i sont quelconques, ils n'ont pas nécessairement les mêmes dimensions. Là où dans l'équation de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.21)$$

toutes les composantes de cette équation vectorielle ont une dimension de $[MLT^{-2}]$, il n'en va pas de même des composantes de l'équation d'Euler-Lagrange. Elles n'auront dimension de forces que si q_i a les dimensions de longueur. L'approche Lagrangienne fait automatiquement la cuisine des dimensions. Elle est dimensionnellement homogène.

2.3 La fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

Il est évident, toute la validité de la méthode repose sur le choix ou la définition de L . Il devrait être également évident, étant donné que les équations d'Euler-Lagrange prétendent résoudre le problème mécanique en ayant la trajectoire physique comme solution, que ces équations devraient correspondre aux équations de Newton. On peut de fait démontrer la forme de L à partir des équations de Newton. Nous en postulons la forme et vérifierons le bien fondé de notre hypothèse.

Forces conservatrices

On appelle une force conservatrice (sur une particule), une force \mathbf{F} telle que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Une telle force $\mathbf{F}(r)$ peut s'écrire alors

$$\mathbf{F}(r) = -\nabla V(r) \quad (2.22)$$

où $V(r)$ est appelé le potentiel ou l'énergie potentielle.

On vérifie facilement alors qu'on peut écrire

$$L = T - V \quad (2.23)$$

où T est l'énergie cinétique.

Vérifions-le pour une particule soumise à une telle force et utilisons les coordonnées cartésiennes que nous noterons $x_i = (x, y, z)$. Alors

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2, \quad V = V(x_j). \quad (2.24)$$

Donc

$$L = T - V = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 - V(x_j). \quad (2.25)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le degré de liberté x_i (i fixé) demande que l'on calcule

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m \ddot{x}_i \quad (2.27)$$

L'équation d'Euler-Lagrange donne donc ici

$$m \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (2.28)$$

ou

$$m \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i. \quad (2.29)$$

Il y a donc équivalence complète avec Newton.

Dans l'approche Lagrangienne, on apprend à raisonner à partir de concepts d'énergie, potentielle et cinétique, au lieu de concepts de force. Les deux approches sont évidemment équivalentes physiquement, mais les énergies n'étant pas des quantités vectorielles, elles sont conceptuellement plus faciles à utiliser dans une vaste gamme de problèmes. En physique quantique par exemple, la notion de force n'a aucune signification mais les notions d'énergie demeurent valables. C'est une raison de plus pour se familiariser avec leur utilisation. De plus, la force au sens de Newton est une action instantanée à distance. En relativité, une telle chose est impossible. La notion de force est donc une création purement classique et macroscopique et contrairement à notre intuition, son intérêt est limité.

Quelques exemples importants:

Il est important de noter que nous n'avons identifié que quatre types d'interactions (*forces*) fondamentales dans la nature: gravitationnelle, électromagnétique, faible et forte. Les deux dernières étant purement quantiques, seules les deux premières se mani-

festent en physique classique. Or, la force gravitationnelle est du type en r^{-2} et dérive donc d'un potentiel

$$V_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{r} \propto -\frac{1}{r}. \quad (2.30)$$

Il en va de même de l'interaction coulombienne qui fait partie des interactions électromagnétiques (nous reviendrons plus tard sur l'ensemble des forces électromagnétiques) a aussi une force en r^{-2} et de ce fait dérive d'un potentiel

$$V_{\text{Coulomb}} = -\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r} \propto -\frac{1}{r}. \quad (2.31)$$

Un autre cas important est celui de la force harmonique (typiquement le ressort parfait) qui est $-kx$ et dérive donc d'un potentiel

$$V_{\text{harm.}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.32)$$

Bien que n'étant pas une interaction fondamentale de la nature, elle joue fréquemment un rôle important dans les calculs. En effet dans des systèmes à géométrie un peu compliquée, l'énergie potentielle d'une particule peut prendre une allure assez quelconque comme sur la figure 2.5. Cependant au voisinage de x_0 correspondant à un extrémum

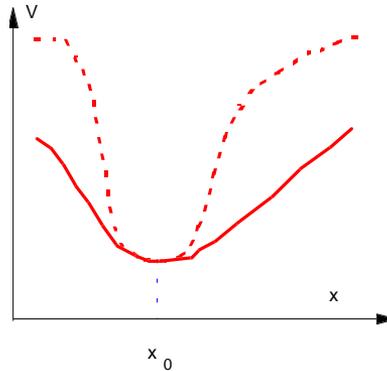


Figure 2.5

de $V(x)$ on peut faire l'expansion

$$V(x) \approx V(x_0) + (x - x_0)V'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}V''(x_0) + \dots \quad (2.33)$$

Le premier terme est une constante sans grand intérêt. Le deuxième terme est nul, $V'(x_0)$. La première approximation non triviale est donc

$$V(x) \sim \frac{(x - x_0)^2}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} = \frac{k}{2}u^2 = V_{\text{harm.}}(u) \quad (2.34)$$

où

$$u = (x - x_0) \quad \text{et} \quad k = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} : \text{un nombre.} \quad (2.35)$$

Ainsi pour bon nombre de matériaux, la première réponse à un (petit) déplacement hors

d'équilibre est harmonique. Ceci est d'une grande importance pratique.

Forces non conservatrices

Mathématiquement, peu de fonctions \mathbf{F} dérivent d'un gradient

$$\mathbf{F}(r) \neq -\nabla V(r). \quad (2.36)$$

Il en est ainsi par exemple des forces de frictions que l'on écrit souvent empiriquement comme

$$\mathbf{F}_{\text{frict.}}(r) \neq -k_{(n)}\dot{x}^n \quad (2.37)$$

où typiquement $n \approx 1$ pour les basses vitesses (écoulement laminaire) et $n \approx 2$ pour des vitesses plus élevées (écoulement turbulent). La constante k dépend entre autre de la géométrie du problème et sa détermination est généralement empirique.

Pour tenir compte de tels effets, il faut alors définir une force généralisée, de composantes Q_i et notre équation d'Euler-Lagrange devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = Q_i. \quad (2.38)$$

En général il faut être prudent dans la détermination de Q_i puisque les *composantes* ne sont pas nécessairement cartésiennes et que les équations n'ont même pas toutes les mêmes dimensions!

Il existe une exception notable et qui apparaît aujourd'hui comme extraordinairement importante. Nous en discuterons plus loin dans le cadre de l'invariance de jauge et nous verrons qu'elle correspond à l'interaction électromagnétique complète.

2.4 Coordonnées curvilignes

On écrit communément

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (2.39)$$

où il est entendu que

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.40)$$

Cette notation peut rapidement prêter à confusion. En effet, en coordonnées cartésiennes, il n'y a pas de problème

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y + \hat{\mathbf{k}}z \quad (2.41)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\dot{x} + \hat{\mathbf{j}}\dot{y} + \hat{\mathbf{k}}\dot{z} \quad (2.42)$$

donc

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2.43)$$

et

$$\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (2.44)$$

Cette simplicité vient du fait que x, y et z ont tous les trois des dimensions de longueur et que leurs axes sont fixes et orthogonaux. Qu'arrive-t-il lorsqu'on passe à d'autres coordonnées? Prenons par exemple les coordonnées sphériques où

$$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi) \quad (2.45)$$

où θ et φ sont des angles (voir figure 2.6). Doit-on sans ambiguïtés définir

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})? \tag{2.46}$$

Deux problèmes surgissent ici, dus aux fait que (voir figure 2.7):

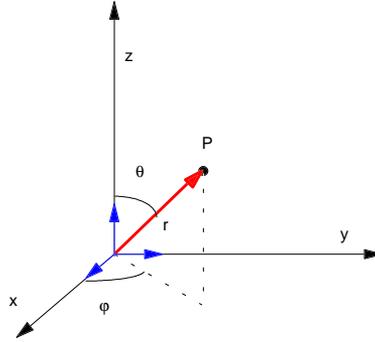


Figure 2.6

1. r, θ et φ n'ont pas les mêmes dimensions,
2. leurs axes sont orthogonaux mais ne sont pas fixes.

Les axes cartésiens (a) demeurent parallèles à eux-mêmes en différents points, ici P_1 et P_2 alors qu'en (b) on voit que les axes du système sphérique sont en tous points perpendiculaires l'un à l'autre mais (P_1) n'est pas parallèle à (P_2), etc...

En effet, si nous écrivons le rayon vecteur

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y + \hat{\mathbf{k}}z, \tag{2.47}$$

nos obtenons

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{\mathbf{i}}\dot{x} + \hat{\mathbf{j}}\dot{y} + \hat{\mathbf{k}}\dot{z} \tag{2.48}$$

parce que $\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \dot{\hat{\mathbf{j}}} = \dot{\hat{\mathbf{k}}} = 0$. On a cette simplicité qu'en coordonnées cartésiennes. De fait, sachant que

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \tag{2.49}$$

on calcule

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \tag{2.50}$$

De

$$\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \tag{2.51}$$

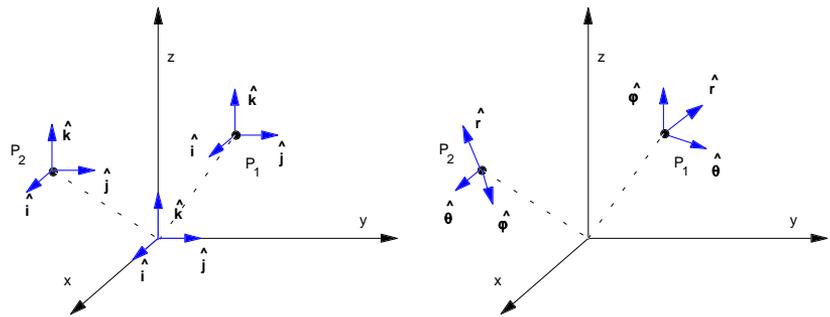


Figure 2.7

on obtient

$$\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (2.52)$$

Les coordonnées étant r, θ et φ , clairement

$$T \neq \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2. \quad (2.53)$$

mais bien

$$T = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (2.54)$$

De façon générale on écrira alors

$$T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad : \text{ coordonnées généralisées.} \quad (2.55)$$

Pour les coordonnées cartésiennes, on identifie, $q_i = (x, y, z)$ et

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

alors que pour les coordonnées sphériques, $q_i = (r, \theta, \varphi)$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Ici, dans les deux cas, g_{ij} est diagonal parce que les deux systèmes d'axes restent orthogonaux en tout point. Pour le cas sphériques, les g_{ij} ne sont pas des constantes, mais des fonctions de la position qui tiennent compte simultanément du fait que θ et φ n'ont pas des dimensions de longueur et du fait que les axes $\hat{r}, \hat{\theta}$ et $\hat{\varphi}$ varient en direction d'un point à l'autre de l'espace. g_{ij} s'appelle la métrique (tenseur métrique) et il apparaît généralement dans la définition de l'élément de longueur souvent noté

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.58)$$

En coordonnées cartésiennes

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.59)$$

alors qu'en coordonnées sphériques

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \quad (2.60)$$

et on écrit de façon générale

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j. \quad (2.61)$$

C'est là la définition formelle de la métrique, g_{ij} , qui a une dépendance sur les coordonnées (en général). Fondamentalement la métrique permet de définir la longueur dans un espace donné. On vérifie facilement ci-dessus que g_{ij} est identique au g_{ij} qui nous permet de définir sans ambiguïté l'énergie cinétique T par

$$T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.62)$$

Tout ceci est très important pour obtenir les équations du mouvement, spécialement lorsque les coordonnées utilisées ne sont pas les coordonnées cartésiennes. En effet, dans le cas des coordonnées cartésiennes, l'équation de Newton est $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ avec les compo-

santes

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = F_i \quad (2.63)$$

là où $x_i = (x, y, z)$ pour $i = 1, 2, 3$. Du Lagrangien

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x_i), \quad (2.64)$$

les équations d'Euler-Lagrange nous donnent

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (2.65)$$

Identifiant $\mathbf{F} = -\nabla V$, les deux équations sont identiques et Lagrange concorde avec Newton.

En coordonnées sphériques, par contre, et l'équation de Newton pour θ n'est pas

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\theta}_i) = F_{\theta}. \quad (2.66)$$

Sachant que le Lagrangien sera

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r, \theta, \varphi) \quad (2.67)$$

l'équation d'Euler-Lagrange pour θ nous donnera, avec

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} \quad (2.69)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \quad (2.70)$$

donc

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (2.71)$$

ce qui n'était pas à priori évident. On sait retrouver ce résultat à partir de l'équation de Newton si on fait attention dans le calcul de $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$. Cependant la cuisine est relativement désagréable. La méthode Lagrangienne nous donne "automatiquement" la bonne équation.

On remarquera qu'en divisant par mr^2 , l'équation en θ est

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{mr^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (2.72)$$

Le côté gauche est de la forme

$$\ddot{q}_i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.73)$$

C'est ce qui s'appelle la dérivée covariante par rapport au temps du vecteur vitesse de composante \dot{q}_i . Ici, si $q_i = (r, \theta, \varphi)$ pour $i = 1, 2, 3$, l'équation en θ correspond à $i = 2$ et au lieu de $\frac{d}{dt} \dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$, la bonne définition de la dérivée par rapport au temps, tenant compte des unités et du fait que les vecteurs unitaires varient d'un point à l'autre, donc dans le temps le long de la trajectoire nous avons des termes additionnels

$$\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}\dot{r} + \Gamma_{12}^2 \dot{r}\dot{\theta} + \Gamma_{13}^2 \dot{r}\dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{\theta}\dot{r} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}\dot{\theta}$$

$$+\Gamma_{23}^2 \dot{\theta} \dot{\phi} + \Gamma_{31}^2 \dot{\phi} \dot{r} + \Gamma_{32}^2 \dot{\phi} \dot{\theta} + \Gamma_{33}^2 \dot{\phi} \dot{\phi}. \quad (2.74)$$

Tenant compte du fait que $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ on identifie, pour les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{23}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^2 &= 0, \\ \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2, \\ \Gamma_{31}^2 &= \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.75)$$

À partir de L on peut identifier les Γ_{jk}^1 et les Γ_{jk}^3 de la même façon. Ce qui distingue les coordonnées cartésiennes, c'est que tous les $\Gamma_{jk}^i = 0$, c'est le seul système de coordonnées pour lequel c'est vrai (et uniquement parce que l'espace considéré ici est plat, i.e. sa courbure est nulle). Ces facteurs géométriques, Γ_{jk}^i , appelés symboles de Christoffel, jouent donc un rôle important. On peut les calculer par la formule

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l \left[(g^{-1})_{il} \left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} \right] \right] \quad (2.76)$$

où g^{-1} est la matrice inverse de g . On voit qu'ils sont entièrement déterminés par la métrique, g . Cette cuisine compliquée, la méthode Lagrangienne la fait automatiquement. Ce n'est pas le moindre de son intérêt! ¹

2.5 Les contraintes

Il peut exister plusieurs types de contraintes, par exemple $x = a$ signifie que le mouvement est gelé en x et qu'il est contraint de ne se faire que dans le plan yz passant par $x = a$. Il ne reste que deux degrés de liberté, y et z . On peut également avoir une contrainte du type

$$\dot{y} = a, \quad (2.77)$$

i.e. la vitesse selon y est contrainte d'avoir la valeur a . Cette équation s'intègre trivialement pour donner

$$y = at + b. \quad (2.78)$$

Soit le Lagrangien (avant de tenir compte des contraintes)

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (2.79)$$

Si la contrainte est $x = a$ donc $\dot{x} = 0$, on devra écrire

$$L = \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (2.80)$$

et nous n'aurons que deux équations d'Euler-Lagrange, une pour y et une pour z .

Si la contrainte est $\dot{y} = a$ donc $y = at + b$, on devra écrire

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + a^2 + \dot{z}^2) - V(x, at + b, z) \quad (2.81)$$

¹ Vector Analysis, M. Spiegel, Schaum.

et nous n'aurons que deux équations d'Euler-Lagrange, ici une pour x et une pour z . Notons que ces solutions seront paramétrisées par b s'il reste inconnu.

De façon générale une contrainte s'écrit sans la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} . \quad (2.82)$$

Les cas d'inégalité correspondent à des contraintes *non-holonomes*. En fait on définit comme contraintes *holonomes*, les contraintes qui s'écrivent

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt}h(q_i, t) = 0 \quad \text{soit} \quad h(q_i, t) = C \quad (2.83)$$

où $h(q_i, t)$ est une fonction quelconque des coordonnées (et du temps). On appelle *non-holonomes* celles qui n'obéissent pas à une telle relation, soit que

1. $f(q_i, \dot{q}_i, t) \neq \frac{d}{dt}h(q_i, t)$
2. ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) < 0$ ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) > 0$.

Nous parlons de trajectoires, i.e. de l'existence de fonctions

$$q_i = q_i(t) \quad \longrightarrow \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(t). \quad (2.84)$$

Par conséquent, pour une contrainte holonome

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt}h(q_i, t) = \sum_i \frac{\partial h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (2.85)$$

De telles trajectoires satisfont

$$h(q_i, t) = C \quad : \text{ une constante.} \quad (2.86)$$

Dans les deux exemples vus précédemment les contraintes sont holonomes. Nous avons d'abord étudié $x = a$. Ici, nous aurons simplement $h = x = a$ où $C = a$ et

$$f = \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{x} = 0. \quad (2.87)$$

Par contre, le deuxième cas étudié correspond à

$$\dot{y} = a \quad (2.88)$$

et nous écrivons

$$f = \dot{y} - a = 0 \quad (2.89)$$

ce qui même à

$$h = y - at = C. \quad (2.90)$$

De façon générale, une contrainte holonome est intégrable au sens où on peut (même si c'est compliqué) l'écrire sous une forme permettant une substitution exacte dans le Lagrangien, faisant ainsi disparaître les degrés de liberté contraints. Physiquement on peut visualiser la contrainte comme étant due à une force extérieure telle que son effet impose au mouvement d'être contraint. Si cette force est indépendante des (i.e. la même pour) trajectoires possibles, alors la contrainte est holonome. Si cette force dépend de la trajectoire (raie d'une trajectoire à l'autre) alors la contrainte est non holonome.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Si un Lagrangien L dépend de degrés de liberté contraints, les équations d'Euler-Lagrange qu'on peut en déduire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = 0 \quad (2.91)$$

ne sont pas valides. Elles ne peuvent donc pas représenter nos équations de mouvement. Ce Lagrangien est inutile. Or, lorsque les contraintes sont non holonomes nous sommes en général incapable d'extraire exactement les degrés de liberté contraints du Lagrangien. Même pour certaines contraintes holonomes, l'exercice peut être difficile. Il existe une méthode, dite des multiplicateurs de Lagrange, qui peut alors être utile. Nous la présentons sans démonstration.

Soit un Lagrangien, $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ décrivant un système mécanique dont les trajectoires doivent obéir à une contrainte qu'on sait exprimer comme

$$f(q_j, \dot{q}_j, t) = 0. \quad (2.92)$$

On construit alors un Lagrangien auxiliaire, L'

$$L' = L + \lambda f \quad (2.93)$$

pour lequel on suppose que la contrainte est (temporairement) levée. Ceci étant, les n degrés de liberté peuvent être considérés comme indépendants et les n équations de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL'}{dq_i} \right) - \frac{dL'}{dq_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.94)$$

sont valides. En principe on peut résoudre pour obtenir les équations de la trajectoire

$$q_i = q_i(t, \lambda) \quad (2.95)$$

qui seront paramétrisées par λ puisque L' en dépend. On peut en calculer les

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i = \dot{q}_i(t, \lambda). \quad (2.96)$$

On remplace alors dans l'équation de contrainte

$$f(q_i(t, \lambda), \dot{q}_i(t, \lambda), t) = 0 \quad (2.97)$$

qui permet de calculer la valeur de λ

$$\lambda = \bar{\lambda} \quad (2.98)$$

permettant à la contrainte d'être satisfaite. On remplace alors cette valeur de $\lambda = \bar{\lambda}$ dans les équations de la trajectoire pour obtenir les équations de la trajectoire contrainte

$$q_i = q_i(t, \bar{\lambda}) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.99)$$

Pour simple qu'elle soit en apparence, cette méthode n'est pas triviale d'application. En effet, on doit prévoir de

$$f(q_i(t, \lambda), \dot{q}_i(t, \lambda), t) = 0 \quad (2.100)$$

que la solution dépende de t i.e. $\lambda = \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(t)$ dépendra généralement de t . Or, si

l'équation de contrainte dépend des \dot{q}_j alors

$$\frac{dL'}{dq_i} = \frac{dL}{dq_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.101)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL'}{dq_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_i} \right) + \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.102)$$

et nous voyons apparaître non plus seulement mais aussi inconnu. C'est d'ailleurs toujours le cas pour les contraintes non-holonomes.

Nous ne pousserons pas plus loin la présentation de cette méthode qui nous mènerait à des divergences considérables. Pour ceux qui sont intéressés on peut consulter les livres de Goldstein ou de Saletan et Cramer par exemple.

2.6 Invariance de jauge

On appelle transformation de jauge une transformation de L en L'

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} F(q_i, t) \quad (2.103)$$

où F est une fonction des q_i et de t (appelée génératrice de la transformation) et

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{dF}{dq_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.104)$$

Remplaçant dans la définition de l'action, S devient S'

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_i, t) dt \\ &= S + F(2) - F(1) \end{aligned} \quad (2.105)$$

où $F(1) = F(q_i(t_1), t_1)$ donc $\delta F(2) = \delta F(1) = 0$ puisque $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

Ainsi

$$\delta S' = \delta S. \quad (2.106)$$

Or comme la physique est déterminée par l'extrémisation de S , ou de S' , rien n'est changé ici. La physique sera inchangée, les trajectoires seront les mêmes.

On constate cependant que le passage de L à L' ne laisse pas la forme du Lagrangien inchangée. En effet, supposons que

$$L = T - V(q_i, t). \quad (2.107)$$

Alors une transformation de jauge générée par $F(q_i, t)$ nous donnera

$$L' = T - V(q_i, t) + \sum_i \frac{dF(q_i, t)}{dq_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t}. \quad (2.108)$$

Puisque est une fonction de q_i et de t , appelons

$$V'(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t}. \quad (2.109)$$

Ainsi

$$L' = T - V'(q_i, t) + \sum_i \frac{dF(q_i, t)}{dq_i} \dot{q}_i. \quad (2.110)$$

Le dernier terme fait que la forme de L n'est pas inchangée.

Opérons une deuxième transformation de jauge, générée par la fonction $G(q_i, t)$. Nous obtiendrions de L' un nouveau Lagrangien, L''

$$L'' = T - V''(q_i, t) + \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dq_i} (F + G) \quad (2.111)$$

où

$$V''(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial}{\partial t} [F(q_i, t) + G(q_i, t)]. \quad (2.112)$$

On voit donc que L' est invariant de forme sous une transformation de jauge qui laisse la physique inchangée. Aujourd'hui on a admis le principe théorique qu'il s'agit de la forme la plus générale que peut prendre un Lagrangien, i.e. que les seules interactions possibles sont des interaction de jauge. C'est cette philosophie qui a permis l'unification de trois des quatre interactions fondamentales en théorie du champ.

Le terme en \dot{q}_i , i.e. $\sum_i \frac{dF}{dq_i} \dot{q}_i$, est la forme $\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla F$, i.e. le produit scalaire entre le vecteur et un champ vectoriel (local) que la transformation de jauge nous donne comme étant le gradient de F , ∇F .

Supposons maintenant que notre Lagrangien L s'écrive

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, t) + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q_i, t) \quad (2.113)$$

où $\mathbf{A}(q_i, t)$ est un vecteur quelconque, et non un gradient. Alors une transformation de jauge $L \xrightarrow{\mathbf{F}} L'$ donnera

$$L' = L - V'(q_i, t) + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}'(q_i, t) \quad (2.114)$$

où

$$V'(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t} \quad (2.115)$$

$$\mathbf{A}'(q_i, t) = \mathbf{A}(q_i, t) + \nabla F(q_i, t). \quad (2.116)$$

La forme du Lagrangien est clairement restée la même et nous savons que la physique (la trajectoire) n'est pas affectée par la transformation de jauge. En physique moderne, on adopte aujourd'hui une approche basée l'axiome suivant: la nature est telle qu'observée, invariante de jauge (interaction électromagnétique). Nous devons donc développer un formalisme physique qui respecte cet aspect de la nature et qui soit invariant de jauge. En mécanique classique, cela signifie que le Lagrangien le plus général que l'on peut écrire à priori devra être invariant de forme sous une transformation, i.e. devra être de la forme

$$L = T - V(q_i, t) + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q_i, t) \quad (2.117)$$

où V et \mathbf{A} sont des champs locaux, scalaire et vectoriel respectivement. La conclusion qui s'impose est que les seules interactions permises par la nature sont celles décrites par ce Lagrangien. Il nous reste donc à vérifier quel type d'interaction existe dans la nature, au niveau classique, sur la base de cet axiome d'invariance de jauge.

Typiquement donc un interaction invariante de jauge dépendra des vitesses puisque $L \sim \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q_i, t)$, donc la force dépendra des vitesses. Clairement cette force n'est pas

conservatrice au sens vu dans le chapitre précédent, néanmoins de telles forces trouvent leur place dans le formalisme Lagrangien. Examinons le type de forces qui émergent de

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V'(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{m}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 - V'(\mathbf{x}, t) + \sum_j \dot{x}_j \cdot A_j(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.118)$$

qui restera invariant de forme lors d'une transformation de jauge même dans le cas général où

$$\mathbf{A} \neq \nabla F. \quad (2.119)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour la composante x_i demande que l'on calcule

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_i} A_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + A_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.121)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m\ddot{x}_i + \sum_j \dot{x}_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} A_j(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} A_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.122)$$

puisque, sur une trajectoire $x_i = x_i(t)$

$$\frac{d}{dt} f(x_i, t) = \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.123)$$

Au total nous avons donc

$$m\ddot{x}_i + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = 0 \quad (2.124)$$

donc

$$m\ddot{x}_i = - \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) + \sum_j \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.125)$$

C'est la composante x_i de l'équation vectorielle

$$m\ddot{\mathbf{x}} = - \left(\nabla V(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) + \dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (2.126)$$

On sait qu'en électromagnétisme les champs électrique et magnétique peuvent être obtenus des potentiels scalaire et vecteur $V_{\text{élect}}$ et $\mathbf{A}_{\text{élect}}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla V_{\text{élect}}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{élect}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.127)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{élect}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.128)$$

On sait également qu'une particule de charge e placée dans des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} est soumise à la force de Lorentz

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}). \quad (2.129)$$

On peut donc aisément identifier V avec $eV_{\text{élect}}$ et \mathbf{A} avec $e\mathbf{A}_{\text{élect}}$ et conclure que l'invariance de jauge du Lagrangien qui nous a permis de poser la forme la plus générale possible pour L nous mène directement à l'interaction électromagnétique. C'est un résultat remarquable.

L'électromagnétisme possède également son invariance de jauge, i.e. que les champs physiques \mathbf{E} et \mathbf{B} sont invariants si on change simultanément

$$V_{\text{élect}} \rightarrow V_{\text{élect}} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.130)$$

$$\mathbf{A}_{\text{élect}} \rightarrow \mathbf{A}_{\text{élect}} + \nabla F. \quad (2.131)$$

Cette invariance de jauge électromagnétique est identique à l'invariance de jauge Lagrangienne.

Plus haut, nous avons identifié la partie de l'interaction de jauge qui dépend des vitesses comme étant de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad (2.132)$$

par analogie avec le terme

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla F. \quad (2.133)$$

Si $\mathbf{A} = \nabla F$ i.e. si \mathbf{A} est le gradient d'une fonction scalaire alors le Lagrangien

$$T - V(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \equiv T - V(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla F \quad (2.134)$$

décrit, par invariance de jauge, la même physique que le Lagrangien L qui apparaît au début et par conséquent il n'y a pas ici d'interaction nouvelle. Il n'y aura interaction nouvelle que si

$$\mathbf{A} \neq \nabla F, \quad (2.135)$$

i.e. il n'y aura interaction nouvelle ou de jauge que si \mathbf{A} n'est pas le gradient d'une fonction scalaire. De fait physiquement, en électromagnétisme, un potentiel vecteur qui n'est que le gradient d'une fonction scalaire ne génère pas de champs. Il est évident que le cas particulier $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ est possible. Il permet de couvrir les interactions à potentiel habituel i.e. $V(q_i, t)$, ce qui permet les interactions électromagnétiques et gravitationnelles par exemple.

2.7 Quelques caractéristiques, propriétés, limites...

1. On ne saurait trop insister sur l'indépendance des coordonnées généralisées, les q_i , qui décrivent les degrés de liberté physiquement indépendants. Si cette condition n'est pas satisfaite en écrivant le Lagrangien, celui-ci n'est pas valide et les équations d'Euler-Lagrange qui en découlent non plus. Les trajectoires, solutions de ces équations n'ont rien de physique.
2. En mécanique classique non relativiste, pour chaque vrai degré de liberté du système, q_i , le Lagrangien contient un terme en \dot{q}_i^2 . Le Lagrangien peut également dépendre linéairement de \dot{q}_i et sa dépendance en q_i est quelconque. La dépendance en \dot{q}_i^2 est nécessaire pour garantir que l'équation d'Euler-Lagrange sera en \ddot{q}_i . Depuis Newton, on sait que la connaissance des deuxièmes taux de variation (\ddot{q}_i) des q_i est nécessaire et suffisante pour déterminer l'historique du système. La dépendance en \dot{q}_i apparaît avec les potentiels de jauge (potentiel vecteur) discuté à la section précédente. La dépendance en q_i est quelconque. Elle dépend du système de coordonnées et des interactions.

3. Coordonnée cyclique: Une coordonnée q_j (j fixé) est cyclique si elle n'apparaît pas dans le Lagrangien alors même que ce dernier dépend de \dot{q}_i . De l'équation d'Euler-Lagrange pour ce degré de liberté

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.136)$$

il ne reste alors que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.137)$$

Formellement la solution est

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \pi_i = \text{constante} \quad (2.138)$$

une telle équation est généralement plus simple à résoudre que l'équation d'Euler-Lagrange complète.

4. Le Lagrangien $L = T - V$ est structuré comme les énergies cinétique, T , et potentielle V . Il en partage plusieurs propriétés, en particulier l'additivité. Si L_1 et L_2 sont des Lagrangiens de deux systèmes physiques indépendants, alors le Lagrangien du système physique constitué de l'union des deux précédents systèmes est

$$L = L_1 + L_2. \quad (2.139)$$

Si les deux systèmes interagissent alors le Lagrangien total sera

$$L = L_1 + L_2 - V(1, 2). \quad (2.140)$$

Peuvent jouer le rôle de sous-systèmes des particules différentes ou une même particule à qui on octroie des degrés de liberté additionnels.

Exemple 2.1



Si $L_1 = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 - V_1(\mathbf{r}_1)$ décrit le mouvement de la particule 1 et si $L_2 = \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_2(\mathbf{r}_2)$ décrit le mouvement de la particule 2 alors le système physique constitué des deux particules sans interaction est

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_1(\mathbf{r}_1) - V_2(\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (2.141)$$

Si en plus on permet aux deux particules d'interagir via une force $\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V(1,2)}{\partial \mathbf{r}_i}$ = force sur la particule i due à la particule j , alors le Lagrangien est

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 - V(1, 2) \\ &= L_1 + L_2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_1(\mathbf{r}_1) \\ &\quad - V_2(\mathbf{r}_2) - V_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (2.142)$$



3 APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS

3.1 Cas simples en mécanique

Particule dans un champ gravitationnel



Une particule de masse m dans le champ gravitationnel près de la surface a une énergie potentielle $V = mgz$ où z mesure sa hauteur et g est l'accélération due à la gravité (voir figure 3.1). Son énergie cinétique est

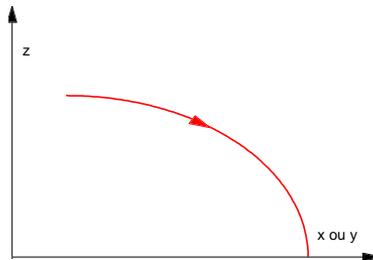


Figure 3.1

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (3.1)$$

donc

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (3.2)$$

Nous aurons trois équations d'Euler-Lagrange, celles pour x et y étant identiques. Voyons celle en x . On constate que $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Dans un tel cas, on dit de x que c'est une variable

cyclique. L'équation d'Euler-Lagrange pour x se limite donc à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (3.3)$$

ou $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{constante}$ (d'intégration). De $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = C$, on tire

$$mx = ct + a \quad (3.4)$$

où les constantes c et a sont déterminées par les conditions du problème. De la même façon

$$my = c't + a' \quad (3.5)$$

Pour z nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \quad (3.7)$$

alors

$$m\ddot{z} + mg = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{z} = -g \quad (3.8)$$

donc

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + c''t + a'' \quad (3.9)$$

où c'' et a'' sont déterminées par les conditions du problème.

Particule suspendue à un ressort



Une particule de masse m est suspendue à un ressort de constante k dans le champ gravitationnel près de la surface de la terre (voir figure 3.2). Son énergie potentielle

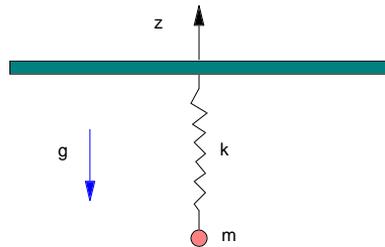


Figure 3.2

est

$$V = \frac{k}{2}(z - z_0)^2 + mgz \quad (3.10)$$

où z_0 est la longueur au repos du ressort. Le mouvement n'étant que vertical,

$$T = \frac{m}{2}\dot{z}^2 \quad (3.11)$$

et

$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{k}{2}(z - z_0)^2 - mgz \quad (3.12)$$

donc

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -k(z - z_0) - mg \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \quad (3.14)$$

l'équation d'Euler-Lagrange (il n'y a qu'un seul degré de liberté) est

$$m\ddot{z} + k(z - z_0) + mg = 0 \quad (3.15)$$

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg. \quad (3.16)$$

Posons $z = z_h + z_p$ où

$$m\ddot{z}_h + kz_h = 0 \quad (3.17)$$

alors (pour $ms^2 + k = 0 \implies s^2 = -\frac{k}{m} \implies s = \pm i\omega$ où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$) la solution générale s'écrit

$$z_h(t) = A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t} = A \sin(\omega t + \delta) \quad (3.18)$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.19)$$

et A et δ qui sont des constantes d'intégration devant être déterminées par les conditions initiales. Le terme non homogène étant constant, on n'est pas surpris de trouver

$$z_p = \text{constante} = C \quad (3.20)$$

$$z(t) = z_h(t) + C \quad (3.21)$$

où C est une constante. Remplaçant, avec

$$\ddot{z} = \ddot{z}_h + 0 = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) \quad (3.22)$$

on obtient

$$\underbrace{-m\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) - kA \sin(\omega t + \delta)}_0 + kC = kz_0 - mg \quad (3.23)$$

$$kC = kz_0 - mg \implies C = z_0 - \frac{mg}{k} \quad (3.24)$$

$$z(t) = A \sin(\omega t + \delta) + z_0 - \frac{mg}{k}. \quad (3.25)$$

Ainsi, au repos ou $A = 0$ nous avons $z = z_0 - \frac{mg}{k}$, i.e. le champ gravitationnel cause un étirement du ressort (vers le bas) d'une longueur $\frac{mg}{k}$

Particule suspendue au haut d'une tige rigide



Une particule est suspendue au haut d'une tige rigide sans masse et se déplace dans le plan xy (voir figure 3.3). Cependant la tige rigide constitue une contrainte telle que la particule ne se déplace que sur la courbe C qui n'a qu'une dimension. Le système ne possède donc qu'un seul degré de liberté. Dû au champ gravitationnel, l'énergie potentiel

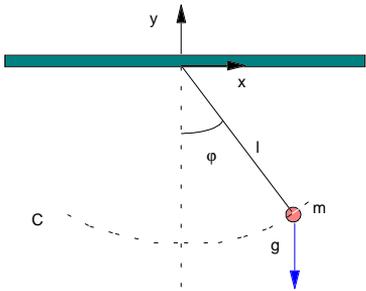


Figure 3.3

est $V = mgy$. Géométriquement

$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi \quad (3.26)$$

donc

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3.27)$$

donc

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 \quad (3.28)$$

et

$$V = -mgl \cos \varphi \quad (3.29)$$

et ainsi

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (3.30)$$

C'est un Lagrangien pour un système à un seul degré de liberté, ici φ , comme il se doit. Un choix *intelligent* de coordonnées généralisées, lorsqu'il y a contrainte, consiste à choisir les degrés de liberté contraints (ils ne sont plus des degrés de liberté alors) comme faisant partie des coordonnées généralisées. Ainsi dans cet exemple, le mouvement dans le plan xy peut être décrit en coordonnées polaires (r, φ) où $r = l$ est précisément l'équation de contrainte ici. C'est le choix que nous faisons, ce qui ne laisse que le degré de liberté décrit par φ . Ce degré de liberté est un angle et n'a pas de dimension. Il n'y a qu'une seule équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \quad (3.32)$$

$$\implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2\ddot{\varphi} \quad (3.33)$$

donc l'équation d'Euler-Lagrange se lit

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad (3.34)$$

ou $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$, après division par ml^2 . La solution n'est pas triviale et fait appel à des intégrales elliptiques. Cependant si φ reste petit, alors

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \quad (3.35)$$

et ne retenir que

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad (3.36)$$

et l'équation devient

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \approx 0 \implies \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \quad (3.37)$$

qui a comme solution

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (3.38)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, A et δ étant des constantes déterminées par les conditions initiales du problème. C'est le fameux problème du pendule plan qui a longtemps servi de référence pour mesurer le temps.

**Remarque 4**

Dans les deux derniers exemples, le mouvement est "harmonique". C'est le cas à chaque fois que l'équation du mouvement est du type

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \implies \quad \ddot{u} = -\omega^2 u \quad ; \quad \omega^2 > 0 \quad (3.39)$$

qui a comme solution

$$u(t) = A \sin(\omega t + \delta) = A' \cos(\omega t + \delta') \quad (3.40)$$

ou

$$u(t) = B \sin \omega t + B' \cos \omega t \quad (3.41)$$

où ω est la fréquence (angulaire) du mouvement. $u(t)$ revient au même point à chaque fois que

$$\omega t = 2n\pi \quad : \quad n \text{ entier} \quad (3.42)$$

on a $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ où τ est la période, ν la fréquence du mouvement et $\omega = 2\pi\nu$ est la fréquence angulaire.

On notera également que dans les deux premiers exemples, la coordonnée utilisée pour décrire le degré de liberté a les dimensions de longueur, ainsi les équations d'Euler-Lagrange ont des dimensions de force, comme l'équation de Newton. Il n'en va pas de même de le dernier exemple où la variable n'a pas de dimension (un angle). L'équation d'Euler-Lagrange est l'équation du mouvement même si elle n'a pas des dimensions de force.

Pendule plan suspendu par un ressort de masse nulle



Soit un pendule plan dans lequel la tige rigide est remplacée par un ressort de masse nulle, en fait négligeable (voir figure 3.4). Le mouvement étant dans le plan xy on attend deux degrés de liberté. Puisque la tige n'est pas rigide le mouvement n'est pas contraint à une trajectoire et on conserve deux degrés de liberté. On pourrait conserver x et

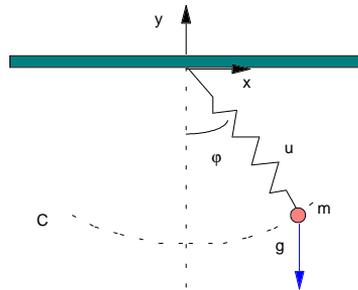


Figure 3.4

y pour les décrire mais ces coordonnées ne *collent* pas très bien avec la géométrie de l'objet. Clairement u et φ collent mieux à cette géométrie où φ est l'angle du pendule

avec la verticale et u sa longueur. On obtient facilement

$$x = u \sin \varphi, \quad y = -u \cos \varphi \quad (3.43)$$

donc

$$\dot{x} = \dot{u} \sin \varphi + u \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (3.44)$$

$$\dot{y} = -\dot{u} \cos \varphi + u \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3.45)$$

et

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{u}^2 \sin^2 \varphi + 2u\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + u^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \\ &\quad + \dot{u}^2 \cos^2 \varphi - 2u\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + u\dot{u}\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{u}^2 + u^2\dot{\varphi}^2). \end{aligned} \quad (3.46)$$

L'énergie cinétique a un terme en \dot{u}^2 et un en $\dot{\varphi}^2$, ce qui est correct dans un Lagrangien destiné à décrire un système physique à deux degrés de liberté .

L'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} V &= mgy + \frac{K}{2}(u - u_0)^2 \\ &= -mgu \cos \varphi + \frac{K}{2}(u - u_0)^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

et finalement

$$L = \frac{m}{2}(\dot{u}^2 + u^2\dot{\varphi}^2) + mgu \cos \varphi - \frac{K}{2}(u - u_0)^2 \quad (3.48)$$

où u_0 est la longueur au repos du ressort-tige. Ici nous avons une coordonnée qui a des dimensions de longueur (u) et une qui n'en a pas (φ) puisque c'est un angle. Néanmoins, nos équations d'Euler-Lagrange seront de la même forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.50)$$

Dans (3.49),

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{m}{2}u\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi - K(u - u_0) \quad (3.51)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m\ddot{u} \quad (3.52)$$

et donc

$$m\ddot{u} - \frac{m}{2}u\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + K(u - u_0) = 0 \quad (3.53)$$

qui a des dimensions $[MLT^{-2}]$, i.e. de force. Pour (3.50)

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgu \sin \varphi \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (mu^2\dot{\varphi}) = 2mu\dot{u}\dot{\varphi} + mu^2\ddot{\varphi} \quad (3.55)$$

ce qui donne

$$mu^2\ddot{\varphi} + 2mu\dot{\varphi} + mgu \sin \varphi = 0 \quad (3.56)$$

qui a des dimensions $[MLT^{-2}]$, qui ne sont pas des dimensions de force

La solution de ces deux équations couplées n'est pas triviale. Cependant leur obtention, par une méthode raisonnablement simple constitue déjà en soi un résultat intéressant.

3.2 Exemples non mécaniques

Principe de Fermat



On peut baser toute l'optique géométrique sur le principe de Fermat qui, remarquablement, est un principe variationnel. Les trajectoires des rayons lumineux à des équations d'Euler-Lagrange.

Énoncé : Entre deux points, 1 et 2, le rayon lumineux suit la trajectoire qui prend le moins de temps.

Si η est l'indice de réfraction, la vitesse du rayon lumineux est c/η . Appelons ds l'élément de longueur de la trajectoire, alors le temps requis pour parcourir ds est $dt = ds/v$. Entre les points 1 et 2 le temps requis sera T

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_1^2 \eta ds \quad (3.57)$$

où η peut varier d'un point à l'autre comme dans une fibre optique par exemple.

Pour simplifier limitons-nous à un système à deux dimensions, (x, y) donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (3.58)$$

La trajectoire du rayon est une équation du type $y = y(x)$. (on aurait pu choisir $x = x(y)$). Écrivons donc

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \equiv dx \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (3.59)$$

où $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ et ici x est considéré comme le paramètre et y une variable. Nous aurons donc

$$T = \frac{1}{c} \int_1^2 \eta(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \equiv \int_1^2 L(y, \dot{y}, x) dx \quad (3.60)$$

Le Lagrangien est ici

$$L(y, \dot{y}, x) = \frac{1}{c} \eta(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2}. \quad (3.61)$$

Insistons sur le fait que le problème est semblable à un problème de mécanique à un degré de liberté, décrit par y . Ici x est le paramètre, ne décrit pas un degré de liberté et joue le rôle joué généralement par le temps en mécanique. Ainsi ce qui joue le rôle de la vitesse (un degré de liberté donc une vitesse) est $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ i.e. la dérivée totale de la coordonnée y par rapport au paramètre x .

On cherche à minimiser $T = \int_{x_1}^{x_2} L dx$ entre deux points fixes en comparant toutes les trajectoires $y(x)$, qui les relient. On calcule donc

$$\delta T. \quad (3.62)$$

Le résultat est connu, c'est l'équation d'Euler-Lagrange pour le degré de liberté y (ici le seul avec le paramètre x)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (3.63)$$

Nous calculons donc, avec L défini ci-dessus

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\eta}{c} \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} 2\dot{y} \\ &= \frac{\eta \dot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\eta \ddot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ &\quad + \frac{\eta \dot{y}}{c} \left(-\frac{1}{2} \right) (1+\dot{y}^2)^{-\frac{3}{2}} 2\dot{y} \ddot{y} \\ &= \frac{\eta \ddot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ &\quad - \frac{\eta \dot{y}^2 \ddot{y}}{c(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.66)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\eta \ddot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ - \frac{\eta \dot{y}^2 \ddot{y}}{c(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

et puisque $c\sqrt{1+\dot{y}^2}$ n'est jamais nul, on peut simplifier en

$$\eta \ddot{y} - (1-\dot{y}^4) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dot{y} (1+\dot{y}^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (3.68)$$

3.3 Problème à deux corps

C'est le système physique fermé le plus simple qui existe. Deux particules, de masses m_1 et m_2 , dont les positions instantanées sont \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 interagissent via un potentiel

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.69)$$

pour respecter l'homogénéité de l'espace. Ainsi leur Lagrangien s'écrira (le Lagrangien est additif)

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3.70)$$

Opérons un changement de coordonnées définissant la coordonnée relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ et la coordonnée du centre de masse (voir figure 3.5)

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.71)$$

ainsi

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.73)$$

donc

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.74)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.75)$$

Remplaçant dans le Lagrangien nous obtenons

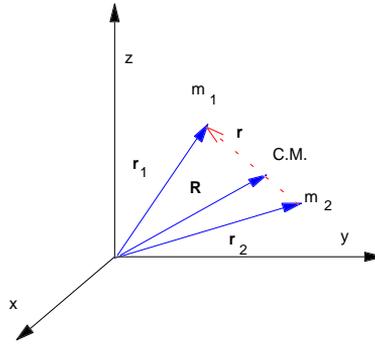


Figure 3.5

$$L = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (3.76)$$

où

$$M = m_1 + m_2 = \text{masse totale du système} \quad (3.77)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{masse réduite du système} \quad (3.78)$$

Le Lagrangien se décompose en deux éléments qui ne sont pas reliés

$$L = L_{\text{CM}} + L_{\text{rel.}} \quad (3.79)$$

L_{CM} est simplement l'énergie cinétique globale du système et

$$L_{\text{CM}} = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 \quad (3.80)$$

puisque $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{C} = \text{constante}$

$$M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{C}. \quad (3.81)$$

Le C.M. se déplace à vitesse constante. La deuxième partie, relative, est

$$L_{\text{rel.}} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (3.82)$$

apparaît comme le Lagrangien d'une particule de masse m et de position \mathbf{r} . Aucune des deux particules n'a la masse m et \mathbf{r} ne donne la position d'aucune des deux particules. L décrit le mouvement relatif entre les deux particules en le réduisant à un problème d'une seule particule (fictive), de masse m et de position \mathbf{r} . Parce qu'il peut se réduire de cette façon à un problème à un corps, le problème à deux corps peut avoir une solution analytique.

Le problème à N corps, ou $N > 2$, n'a pas de solution analytique.

3.4 Le potentiel central

Nous étudions ici un problème à un corps qui peut être le problème relatif d'un système à deux corps qui est aussi assimilable à celui d'une particule soumise à une force centrée à l'origine. Le Lagrangien est de la forme

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (3.83)$$

Dans bon nombre de cas, l'interaction ne dépendra que de la distance, soit entre les (deux) corps, soit entre le corps étudié et le point d'origine de la force. On a alors $V(\mathbf{r}) = V(r)$ et la force est dans la direction \mathbf{r} . C'est le potentiel central.

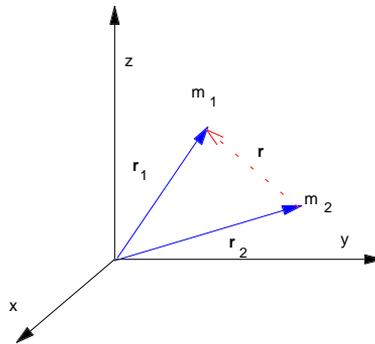


Figure 3.6

Physiquement, si le problème de base est un problème à deux corps (voir figure 3.6) alors la force est purement dans la direction de la droite les reliant. C'est le cas de l'interaction gravitationnelle entre deux corps massifs ainsi que de l'interaction coulombienne entre deux corps chargés.

Puisqu'ici la force est purement radiale (aucune composante θ et φ) le torque $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ s'exerçant sur la particule est identiquement nul et par conséquent le moment cinétique

(voir figure 3.7),

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3.84)$$

est une constante du mouvement. En effet

$$\dot{\mathbf{l}} = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.85)$$

puisque \mathbf{r} et \mathbf{F} sont colinéaires. La conséquence physique est que le mouvement est

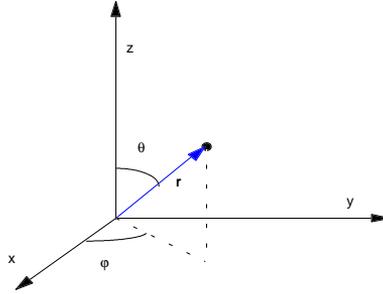


Figure 3.7

dans un plan perpendiculaire à \mathbf{l} puisque $\mathbf{l} = \text{constant}$ signifie constant en grandeur et en direction. Choisissons ce plan comme étant le plan xOy , i.e. le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\dot{\theta} = 0$. Le Lagrangien se réduira (avec $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$) à

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (3.86)$$

comme en coordonnées polaires. Immédiatement, on constate que φ est une variable cyclique et donc

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.87)$$

et donc $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr^2\dot{\varphi} = l$, une constante même si $r = r(t)$ et $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$.

On vérifie trivialement que cette constante l est précisément la longueur du moment cinétique qui pointe ici selon l'axe Oz . Comme est une constante du mouvement sa valeur est fixée par les conditions initiales. L'équation en r se calcule aussi:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad (3.89)$$

donc

$$m\ddot{r} - m\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (3.90)$$

et toujours en φ : $mr^2\dot{\varphi} = l$.

De l'équation en φ on tire

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (3.91)$$

que l'on remplace dans l'équation en r

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (3.92)$$

ou

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{mr^3} \equiv -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \quad (3.93)$$

où

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (3.94)$$

Tout se passe donc en r comme dans une équation à la Newton pour un système à un degré de liberté

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} = F_{\text{eff}}(r). \quad (3.95)$$

Ce potentiel efficace $V_{\text{eff}}(r)$ est constitué du potentiel original $V(r)$ plus qui représente une répulsion centrifuge: un corps qui tourne par rapport à l'origine O est effectivement *repoussé* de l'origine (il ne peut pas l'atteindre) et plus il tourne i.e. plus l est grand, plus il est *repoussé*. L'exemple de la figure 3.8 est pour $V = -\frac{K}{r}$ (gravitationnel ou électrostatique). On constate dans ce cas que

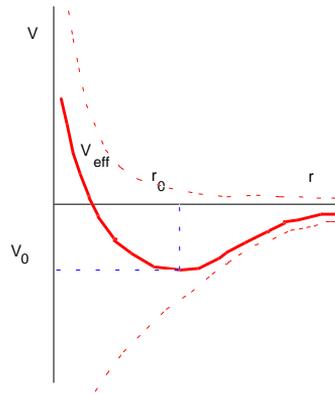


Figure 3.8

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (3.96)$$

a un extremum V_0 en r_0 qui obéit à

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \right|_{r_0} = \frac{K}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \quad (3.97)$$

donc à

$$r_0 = \frac{l^2}{Km} \implies V_0 = -\frac{mK^2}{l^2}. \quad (3.98)$$

Puisque

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \implies m\ddot{r}|_{r_0} = 0 \quad (3.99)$$

ce qui correspond à $r = r_0$ donc $\dot{r} = 0$ donc $\ddot{r} = 0$. C'est un point stationnaire qui correspond physiquement à une orbite circulaire (seul φ varie) avec une vitesse angulaire

constante donnée par

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr_0^2} = \text{constante} \quad (3.100)$$

$$\implies \varphi(t) = \frac{l}{mr_0^2}t + \varphi_0. \quad (3.101)$$

Ici, les conditions initiales ont fixé $r = r_0$, $E = V_0$, la valeur de l et de celle de φ_0 . Nous continuons d'avoir $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\dot{\theta} = 0$.

Pour chaque intervalle de temps, τ , pour lequel $\varphi(t)$ augmente de 2π , nous complétons une orbite, donc

$$\frac{mK^2}{l^3}\tau = 2\pi \implies \tau = \frac{2\pi l^3}{mK^2} = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^3}{K}} = \text{période}. \quad (3.102)$$

La fréquence est $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{mK^2}{2\pi l^3}$ et la fréquence angulaire de l'orbite circulaire est

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{mK^2}{l^3}. \quad (3.103)$$

Les conditions initiales pour que l'orbite soit précisément circulaire sont relativement peu probables. Étudions la situation lorsque l'orbite se dégage légèrement de ce cas particulier, i.e. $E > V_0$

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \underbrace{V_{\text{eff}}(r)}_{\text{constante}} + (r - r_0) \underbrace{\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r}}_{=0} \Big|_{r_0} + \frac{(r - r_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \Big|_{r_0} \dots \quad (3.104)$$

Si r ne s'éloigne pas trop de r_0 , c'est le terme harmonique en $(r - r_0)^2$ qui va gérer le mouvement par

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \quad \text{où} \quad V_{\text{eff}}(r) \sim (r - r_0)^2 \quad (3.105)$$

Ici, avec le choix particulier $V = -\frac{K}{r}$ que nous avons fait

$$\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \Big|_{r_0} = -\frac{2K}{r_0^3} + \frac{3l^2}{mr_0^4} = \frac{m^3 K^4}{l^6} \quad (3.106)$$

on obtient pour $V_{\text{eff}}(r)$

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \frac{(r - r_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \Big|_{r_0} \quad (3.107)$$

et donc en terme des paramètres de $V(r)$

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \frac{(r - r_0)^2}{2!} \frac{m^3 K^4}{l^6}. \quad (3.108)$$

L'équation de mouvement en r est $m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r}$. Nous calculons

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \approx (r - r_0) \frac{m^3 K^4}{l^6} \quad (3.109)$$

donc l'équation de mouvement donne

$$m\ddot{r} \approx -(r - r_0) \frac{m^3 K^4}{l^6}. \quad (3.110)$$

Définissant $u(t) = r(t) - r_0$, nous obtenons ($\ddot{r} = \ddot{u}$) (voir figure 3.9)

$$m\ddot{u} = -\frac{m^3 K^4}{l^6} u \quad (3.111)$$

ou

$$\ddot{u} = -\frac{m^2 K^4}{l^6} u = -\Omega^2 u \quad (3.112)$$

l'équation harmonique qui a comme solution

$$u(t) = r(t) - r_0 = A \sin(\Omega t + \delta) \quad (3.113)$$

où $r(t)$ apparaît comme une constante, r_0 plus une fluctuation d'amplitude A et

$$r(t) = r_0 + A \sin(\Omega t + \delta) \quad (3.114)$$

avec $\Omega = \frac{mK^2}{l^3} =$ fréquence angulaire de la fluctuation $u(t)$.

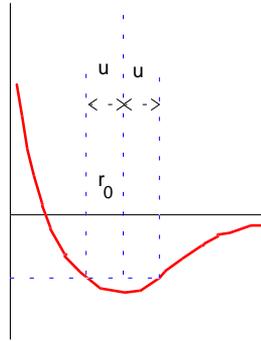


Figure 3.9

Cette fréquence de fluctuation de r autour de r_0 se fait à la même fréquence que la rotation sur l'orbite circulaire puisque $u(t)$ mesure la variation ou fluctuation de $r(t)$ autour de r_0 . Ceci est caractéristique du choix particulier $V(r) = -\frac{K}{r}$ que nous avons fait. On dit d'un tel potentiel qu'il génère des orbites stables.

Cette fluctuation de $r(t)$ autour de r_0 (orbite circulaire) cause un étirement de l'orbite à des extrémités opposées et un écrasement aux extrémités perpendiculaire (voir figure 3.10). De plus comme $\Omega = \omega$, le mouvement de fluctuation est synchronisé avec la fluctuation et la particule revient au même point. C'est la première déformation du cercle vers l'ellipse que l'on sait être la trajectoire *normale* des planètes. On note ici que la proto-ellipse est encore centrée sur l'origine. Ce sont les termes asymétrique de $V_{\text{eff}}(r)$, dont le premier est

$$\frac{(r - r_0)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^3} \right|_{r_0} \quad (3.115)$$

qui seront responsables de ce déplacement.

3.5 Constantes du mouvement

Nous avons vu quelques exemples de situation où le Lagrangien dépend d'une cer-

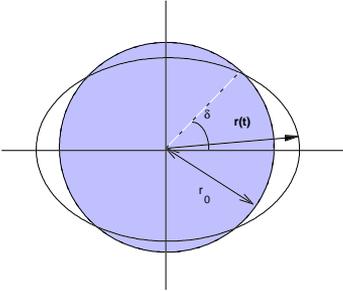


Figure 3.10

taine variable q mais ne dépend pas de q . On appelle q une variable cyclique et de l'équation d'Euler-Lagrange pour q

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3.116)$$

on tire, du fait de l'indépendance de L en q , que

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3.117)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (3.118)$$

d'où nous concluons que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{constante.} \quad (3.119)$$

Cette constante s'appelle constante du mouvement.

Pour un système à n degrés de liberté $\{q_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ nous aurons n équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.120)$$

En mécanique, ces équations sont des équations différentielles du 2ⁱème ordre, i.e. chaque équation est du type

$$f_i(\ddot{q}_j, \dot{q}_j, q_j, t) = 0. \quad (3.121)$$

Pour fixer de façon unique la solution d'une équation du 2ⁱème ordre nous avons besoin de deux conditions, qu'elles soient initiales, finales, limites... Techniquement cela signifie que l'intégration de chacune de ces équations requiert deux constantes d'intégration. Comme il y a n équations cela fait $2n$ constantes qui seront indépendantes puisque fixées arbitrairement dans le laboratoire.

$$q_i = q_i(t, C_j, C'_j); \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.122)$$

Ajoutant

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, C_j, C'_j); \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.123)$$

nous avons $2n$ équations qui dépendent des $2n$ constantes (les n C_j et les n C'_j). Un tel système peut en principe s'inverser pour obtenir

$$\left. \begin{array}{l} C_i = C_i(t, q_j, \dot{q}_j) \\ C'_i = C'_i(t, q_j, \dot{q}_j) \end{array} \right\} = 2n \text{ constantes,} \quad (3.124)$$

Physiquement, ce sont les données d'un problème qui fixent ces constantes. Le but de l'exercice est d'arriver à exprimer les q_i en fonction de ces constantes et du temps.

Exemple 3.1

Prenons l'exemple simple de l'oscillateur harmonique à une dimension

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - m\omega^2 x^2 \quad (3.125)$$

Ici, $n = 1$, nous n'aurons qu'une seule équation donc deux constantes d'intégration. L'équation d'Euler-Lagrange est

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (3.126)$$

dont la solution peut s'écrire de plusieurs façons

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta); \quad A, \delta = \text{const. d'intégration}$$



$$x(t) = B \cos(\omega t + \Delta); \quad B, \Delta = \text{const. d'intégration}$$

$$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t; \quad C, D = \text{const. d'intégration}$$

Ici A, B, C et D sont des amplitudes et δ et Δ des phases. Ces trois solutions sont absolument équivalentes. Pour les fins d'illustration prenons la dernière forme

$$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (3.127)$$

$$\dot{x}(t) = \omega C \cos \omega t - \omega D \sin \omega t. \quad (3.128)$$

Ces deux équations s'inversent assez facilement en

$$C = x(t) \sin \omega t + \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \cos \omega t \quad (3.129)$$

$$D = x(t) \cos \omega t - \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \sin \omega t. \quad (3.130)$$

a) Conditions initiales

Soit que, dans le problème étudié on sache qu'à un temps initial $t = t_0$ la position est $x(t_0) = x_0$ et la vitesse initiales $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ où x_0 et \dot{x}_0 sont connus. On identifie facilement

$$C = x_0 \sin \omega t_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t_0 \quad (3.131)$$

$$D = x_0 \cos \omega t_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t_0 \quad (3.132)$$

et la solution est

$$x(t) = \left[x_0 \sin \omega t_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t_0 \right] \sin \omega t \\ + \left[x_0 \cos \omega t_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t_0 \right] \cos \omega t. \quad (3.133)$$

b) Conditions limites

Soit que dans le problème étudié on sait qu'à un temps $t = t_0$, la position est $x(t_0) = x_0$ et qu'à un autre temps $t = t_1$, la position est $x(t_1) = x_1$ où x_0 et x_1 sont connus (mesurés):

$$\text{À } t = t_0 : \quad x_0 = C \sin \omega t_0 + D \cos \omega t_0 \quad (3.134)$$

$$\text{À } t = t_1 : \quad x_1 = C \sin \omega t_1 + D \cos \omega t_1 \quad (3.135)$$

On peut inverser ces deux équations

$$C = \frac{x_0 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \quad (3.136)$$

$$D = \frac{x_0 \sin \omega t_1 - x_1 \sin \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \quad (3.137)$$

et la solution s'écrit

$$x(t) = \left[\frac{x_0 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \right] \sin \omega t \quad (3.138)$$

$$+ \left[\frac{x_0 \sin \omega t_1 - x_1 \sin \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \right] \cos \omega t. \quad (3.139)$$

c) Conditions mixtes

Toutes sortes de quantités peuvent être déterminées (expérimentalement) pour fixer la solution : position, vitesse, angle, énergie, moment cinétique (plus d'une dimension), etc...



4 LE FORMALISME CANONIQUE

Le formalisme canonique n'introduit pas une nouvelle physique mais nous propose une nouvelle gamme d'outils pour étudier les phénomènes physiques. Son élément central, le Hamiltonien, joue un grand rôle en mécanique quantique. Comme dans le formalisme de Lagrange nous travaillerons avec des quantités comme l'énergie, T et V , plutôt qu'avec des quantités vectorielles comme la force \mathbf{F} de Newton. Ici encore le formalisme sera invariant de forme.

Dans le formalisme de Lagrange, la description d'un système mécanique à n degrés de liberté décrits par les coordonnées généralisées q_i | $i = 1, 2, \dots, n$ indépendantes (non contraintes) nous mène à n équations d'Euler-Lagrange qui sont des *équations différentielles du 2^{ème} ordre*.

Dans le formalisme canonique, ou de Hamilton, un système mécanique à n degrés de liberté toujours décrits par des q_i indépendants nous mènera à $2n$ *équations du premier ordre*.

Chez Lagrange on compare des trajectoires et par conséquent les q_i et les \dot{q}_i sont tous indépendants (tant que nous n'avons pas résolu les équations d'Euler-Lagrange qui choisissent la trajectoire extremum). Chez Hamilton nous devons d'abord apprendre à définir les moments généralisés, les p_i , pour *remplacer* les \dot{q}_i , et qui eux aussi resteront indépendants entre eux et indépendants des q_i .

4.1 La transformation de Legendre

Cette transformation est souvent utilisée en thermodynamique où elle permet de relier entre eux les différents *potentiels* thermodynamiques. En mécanique elle permet de définir le Hamiltonien à partir du Lagrangien. Nous en donnons une description simplifiée.

Soit une fonction $f(u, v)$ où u et v sont les deux variables indépendantes dont dépend f . Définissons

$$w = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = w(u, v). \quad (4.1)$$

La transformation de Legendre permet de définir une fonction $g(u, w)$ qui peut remplacer $f(u, v)$:

$$g(u, w) = v \cdot w - f. \quad (4.2)$$

On vérifie facilement la chose. En effet

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial u} du + w dv. \quad (4.3)$$

De la définition de g nous calculons

$$\begin{aligned} dg &= w dv + v dw - df \\ &= w dv + v dw - \frac{\partial f}{\partial u} du - w dv \\ &= v dw - \frac{\partial f}{\partial u} du \implies g = g(u, w) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ce qui confirme que g est bien fonction de u et de w . Pour opérationnaliser cette transformation et la disparition de v dans g on doit, à partir de la définition de w

$$w = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = w(u, v) \quad (4.5)$$

pouvoir l'inverser en $v = v(u, w)$

$$g(u, w) = wv(u, w) - f(u, v(u, w)). \quad (4.6)$$

Puisque g est fonction de u et w

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial w} dw \quad (4.7)$$

et on identifie avec l'expression pour dg plus haut

$$v = \frac{\partial g}{\partial w}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}. \quad (4.8)$$

4.2 Le Hamiltonien

Posons un Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ que nous traiterons comme la fonction f ci-dessus avec les q_i jouant le rôle de u et les \dot{q}_i le rôle de v . À la place de w , nous définissons les moments généralisés

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_j, \dot{q}_j, t); \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

un système de n équations que, comme pour v et w , nous devons pouvoir inverser pour obtenir les n relations

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t); \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

Nous définissons donc, en analogie avec g , une fonction des q_i et des p_i que nous noterons $H(q_i, p_i, t)$

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (4.11)$$

dans laquelle expression \dot{q}_i est présumé être $\dot{q}_i(q_i, p_i, t)$.

De

$$dL = \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.12)$$

on calcule dH à partir de sa définition

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i^n \dot{q}_i dp_i + \sum_i^n p_i d\dot{q}_i - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_i^n p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i^n \dot{q}_i dp_i - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

ce qui vérifie que H est fonction des q_i , des p_i (et de t). On peut donc écrire

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (4.14)$$

et comme les q_i et p_i sont indépendants on identifie, en comparant nos deux expressions pour dH

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad n \text{ équations} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i; \quad n \text{ équations} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

On sait que la trajectoire physique obéit à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (4.16)$$

et ainsi les $2n$ équations ci-dessus se liront

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} 2n \quad (4.17)$$

ce sont nos $2n$ équations canoniques du mouvement. Ce sont des équations différentielles du premier ordre et on voit que les q_i et les p_i y sont traités de façon beaucoup plus symétrique que ne l'étaient les q_i et les \dot{q}_i dans l'équation d'Euler-Lagrange. L'apparition du signe moins ($-$) entre les équations pour les q_i et celles pour leurs moments conjugués, s'appelle une symétrie symplectique. Les $2n$ équations canoniques remplacent les n équations d'Euler-Lagrange.

De

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (4.18)$$

on peut, sur une trajectoire qui obéit aux équations canoniques, calculer

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= -\sum_i^n \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i^n \dot{q}_i \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.19)$$

Ainsi, H est une constante du mouvement à moins de dépendre explicitement du temps, i.e. à moins qu'un agent extérieur n'agisse sur le système étudié et ce de façon non constante dans le temps.

4.3 Quelques exemples

Particule soumise à une force en une dimension



Soit une particule de masse m se déplaçant en une dimension (disons x) et soumise à une force $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Nous savons que son Lagrangien est

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x). \quad (4.20)$$

Nous n'aurons qu'un seul moment, noté p , conjugué à x et défini par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad (4.21)$$

équation que nous pouvons (on doit pouvoir le faire) inverser

$$\dot{x} = \frac{p}{m}. \quad (4.22)$$

On note qu'ici le moment p correspond à la composante x de la définition élémentaire $p = mv$. Ce ne sera pas toujours trivialement le cas. Selon la définition de H

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}(p)p - L(x, \dot{x}(p)) \\ &= \frac{p}{m} \cdot p - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \end{aligned} \quad (4.23)$$

que l'on écrit souvent

$$H = T + V \quad (4.24)$$

où T est l'énergie cinétique exprimée en fonction des moments. Ici, H est indépendant du temps et est égal à l'énergie totale, une constante du mouvement.

Particule soumise à une force en trois dimensions



Comme les énergies, H est additif. Ainsi pour une particule de masse m se déplaçant en trois dimensions sous l'influence d'une force $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ nous obtiendront, de

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (4.25)$$

que

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \quad (4.26)$$

Ainsi les équations canoniques donneront (nous regardons celle en x seulement)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad (4.27)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.28)$$

Trivialement, redérivant par rapport au temps (4.27)

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} \quad (4.29)$$

et utilisant alors (4.28) nous obtenons

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \implies \ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} = -(\nabla V)_x = F_x \quad (4.30)$$

qui n'est autre que l'équation de Newton. On vérifie trivialement la même chose pour y et z . De plus, les moments p_x, p_y, p_z soit ici les trois composantes de $m\mathbf{v}$.

Particule dans un champ central



La forme des équations canoniques ne dépend pas du choix qui a été fait des coordonnées généralisées, les q_i , choix qui influencera la signification et même les dimensions des p_i . Rappelons le cas étudié plus tôt d'une particule dans un champ central $V(r)$ et dont le mouvement sera limité à un plan que nous choisissons être $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou le plan xOy . Le Lagrangien se réduit à

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (4.31)$$

Nous avons vu que les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$mr^2\dot{\varphi} = l = \text{constante}, \quad (4.32)$$

puisque φ est cyclique

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (4.33)$$

(après remplacement de $\dot{\varphi}$). Nos moments généralisés seront

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (4.34)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \quad (4.35)$$

que l'on peut inverser en $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ où on voit que p_r et p_φ n'ont même pas les mêmes dimensions!

On construit H selon la formule générale

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad (4.36)$$

qui donne ici

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_r}{m}p_r + \frac{p_\varphi}{mr^2}p_\varphi - \frac{m}{2} \left[\left(\frac{p_r}{m} \right)^2 + r^2 \left(\frac{p_\varphi}{mr^2} \right)^2 \right] + V(r) \\ &= \frac{p_r^2}{2m}p_r + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ici φ est variable cyclique donc

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi = \text{constante} \quad (4.38)$$

où on voit que dans ce formalisme une variable cyclique, en plus d'être (automatiquement) *éliminée, éliminera* aussi son moment conjugué qui sera une constante. Deux des variables de H sont ainsi éliminées, ce qui n'est pas le cas dans le formalisme de Lagrange. Les équations pour r et p_r sont

$$\dot{r} = -\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (4.39)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (4.40)$$

Si on veut comparer avec Euler-Lagrange, on dérive par rapport au temps (4.39) et on compare p_r avec (4.40). L'identification est immédiate avec $p_\varphi = l$.

On voit que, comme dans le cas de Lagrange, le formalisme canonique est invariant de forme, i.e. il prend à son compte la cuisine algébrique qui entoure le choix de coordonnées généralisées dont les propriétés géométriques et dimensionnelles peuvent être quelconques.

Remarque 5

Les exemples ci-dessus donnent tous

$$H = T(q_i, p_i) + V(q_i), \quad (4.41)$$

i.e. le Hamiltonien est la somme de l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle du système. Cette forme de H demeurera vrai tant et aussi longtemps que les interactions qui apparaissent dans le Lagrangien ne dépendent pas des vitesses comme dans le cas de l'interaction électromagnétique par exemple.

Tant et aussi longtemps que H ne dépend pas explicitement du temps, c'est une constante du mouvement. Cependant $H(q_i, p_i)$ n'est identifiable à l'énergie physique que si les coordonnées généralisées, les $\{q_i\}$, n'ont pas été obtenues de coordonnées inertielles par une transformation dépendant du temps.

Exemple 4.1

Le cas suivant en est un exemple (voir figure 4.1). Soit une bille contrainte de se déplacer sur une bouche circulaire (disons centrée à l'origine) et qui elle-même tourne autour de l'axe Oz avec une fréquence angulaire ω , entraînée par un moteur (extérieur). A priori, on peut écrire, en coordonnées sphériques

$$T = \frac{m}{2}(r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (4.42)$$

mais ici $r = a$: rayon de la bouche, donc $\dot{r} = 0$ et de plus $\varphi = \omega t$ donc $\dot{\varphi} = \omega = \text{constante}$.

Donc

$$T = \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta), \quad (4.43)$$



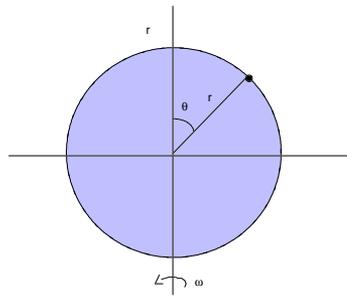


Figure 4.1

un seul degré de liberté, θ . En l'absence d'autre interaction $L = T$, i.e.

$$L = \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta), \quad (4.44)$$

de

$$p_\theta = ma^2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} \quad (4.45)$$

on trouve

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - \frac{ma^2}{2}\omega^2 \sin^2 \theta. \quad (4.46)$$

Ici H ne dépend pas du temps, c'est donc une constante du mouvement mais on ne peut pas l'identifier à l'énergie physique de la particule parce que en posant

$$\varphi = \omega t \quad (4.47)$$

on fait l'équivalent d'une transformation de coordonnées dépendant du temps. En fait on se retrouve dans un repère non-inertiel puisqu'il tourne donc est accéléré par rapport au laboratoire (que nous considérons inertiel).

Exercice 4.1

Obtenez les équations du mouvement.



4.4 Les crochets de Poisson

Le crochet de Poisson $\{A, B\}_{q,p}$ est la façon standard de noter une certaine opération qui implique les quantités $A(q_i, p_i)$ et $B(q_i, p_i)$ ainsi que l'ensemble de variables canoniques (q_i, p_i)

$$\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_i^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \quad (4.48)$$

De cette définition on déduit un certain nombre de propriétés

$$\{A, B\} = \{B, A\} \quad (4.49)$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \quad (4.50)$$

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C \quad (4.51)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 \quad (4.52)$$

où cette dernière expression est l'identité de Jacobi.

Au delà d'une simple notation, leur calcul assez facile permet d'obtenir un certain nombre de résultats intéressants. D'autre part, ils sont intimement reliés aux *commutateurs* de la mécanique quantique.

Considérons une fonction quelconque $F(q_i, p_i, t)$. Sa dérivée totale par rapport au temps le long d'une trajectoire s'écrit

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i^n \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (4.53)$$

Si cette trajectoire est une trajectoire physique, elle obéit aux équations canoniques du Hamiltonien H du système

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.54)$$

et alors

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_i^n \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4.55)$$

En particulier, cette équation permet un calcul *facile* des constante du mouvement, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. En effet, le calcul de $\frac{\partial F}{\partial t}$ est immédiat et le calcul de $\{F, H\}$ est un simple exercice

Ainsi donc, on calcule facilement . Par exemple, si F ne dépend pas explicitement du temps i.e. $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ alors $F(q_i, p_i)$ est une constante du mouvement si son crochet de Poisson avec H est nul. Ceci permet d'identifier rapidement bon nombre de constantes du mouvement.

Par exemple nous avons déjà vu que la conservation du moment angulaire $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ a comme conséquence que le mouvement est dans un plan. L'inverse n'est pas vrai cependant. Considérons un mouvement dans le plan xOy d'une particule obéissant au Hamiltonien.

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y). \quad (4.56)$$

Sous quelles conditions le moment angulaire \mathbf{l} sera-t-il constant? Ici \mathbf{l} n'a qu'une composante, soit l_z où

$$l_z = xp_y - yp_x. \quad (4.57)$$

Or l_z ne dépend pas explicitement du temps donc $\frac{\partial l_z}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned}\dot{l}_z &= \{l_z, H\} \\ &= \frac{\partial l_z}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial l_z}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial l_z}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial l_z}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4.58)$$

On calcule

$$\frac{\partial l_z}{\partial x} = p_y, \quad \frac{\partial l_z}{\partial y} = -p_x, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial p_x} = -y, \quad \frac{\partial l_z}{\partial p_y} = x \quad (4.60)$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.62)$$

et on obtient

$$\dot{l}_z = \frac{p_y p_x}{m} - \frac{p_x p_y}{m} + y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (4.63)$$

l_z sera donc une constante du mouvement ssi

$$x \frac{\partial V}{\partial y} = y \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (4.64)$$

Mathématiquement cela n'est possible que si, indépendamment de z qui n'apparaît pas ici, $V(x, y)$ ne dépend de x et de y que sous la forme $(x^2 + y^2)^n$.

Si on s'intéresse aux trois dimensions on obtiendra des conditions sur $l_x \rightarrow V \sim$

$(y^2 + z^2)^m$ et sur $l_y \rightarrow V \sim (x^2 + z^2)^k$. Pour avoir conservation de I on doit donc avoir $V \sim (x^2 + y^2 + z^2)^n \sim r^{2n}$: un potentiel central.

Il existe toute une famille de résultats intéressants du crochet de Poisson. Parmi les plus importants, calculons certains de ces crochets entre des variables canoniques : coordonnées et moments : $\{q_k, q_j\}$, $\{p_k, p_j\}$ et $\{q_k, p_j\}$ où k et j sont fixés

$$\{q_k, q_j\} = \sum_i^n \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right] \equiv 0 \quad (4.65)$$

puisque

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0 \quad (4.66)$$

parce que les variables canoniques sont indépendantes et

$$\{p_k, p_j\} = 0 \quad (4.67)$$

pour la même raison, mais

$$\begin{aligned} \{q_k, p_j\} &= \sum_i^n \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right] \\ &= \sum_i^n \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\ &= \sum_i^n \delta_{ki} \delta_{ji} = \delta_{kj} \end{aligned} \quad (4.68)$$

où δ_{kj} est le delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} . \quad (4.69)$$

Ces résultats sont très importants parce qu'on peut démontrer que leur inverse est vrai, i.e. si un ensemble de n q_i et de n p_i obéit aux relations ci-dessus, alors l'ensemble des q_i et des p_i constitue un ensemble de variables canoniques. Ceci est très important et trouve éventuellement des applications dans les théories quantiques du champ.

Une autre utilisation intéressante des crochets de Poisson est qu'ils permettent de *symétriser* les équations canoniques. Puisqu'il est vrai que pour une fonction quelconque des variables (p_i, q_i) , soit $F(p_i, q_i)$, sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\dot{F} = \{F, H\} \quad (4.70)$$

la chose est certainement vrai pour les q_i et les p_i eux-mêmes et les équations canoniques peuvent s'écrire

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (4.71)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (4.72)$$

A cause de cette symétrie on est parfois amené à parler des $2n$ variables canoniques. Une telle symétrie n'existe pas dans le formalisme Lagrangien entre les q_i et les \dot{q}_i .

4.5 Les moments généralisés

On parle des p_i comme étant des moments généralisés de la même façon que les q_i sont des coordonnées généralisées. Comme les dimensions des q_i peuvent être à peu près n'importe quoi, il en va de même des p_i .

Dans les exemples que nous avons vu les p_i étaient les composantes de \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.73)$$

ce qui est particulièrement évident en coordonnées cartésiennes. Mais même en coordonnées cartésiennes cette définition n'est pas toujours vraie. En effet, lorsque l'interaction dépend des vitesses $\mathbf{p} \neq m\mathbf{v}$. L'exemple le plus important est sans doute celui des interactions de jauge. En effet, nous avons vu que le Lagrangien d'une particule de masse m et de charge e dans un champ électromagnétique est, en coordonnées cartésiennes, $x_i = (x, y, z)$

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 + e \sum_i \dot{x}_i A_i - eV \quad (4.74)$$

où V et A sont les potentiels scalaire et vectoriel du champ électromagnétique et dépendant généralement des x_i et de t .

Définissant les moments généralisés p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i \quad (4.75)$$

on constate que \mathbf{p} n'est plus $m\mathbf{v}$ mais

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (4.76)$$

Ces équations s'inversent en

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \quad (4.77)$$

Avec la définition de $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$, on obtient

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i (p_i - eA_i)^2 + eV. \quad (4.78)$$



Exercice 4.2

Vérifiez ce résultat et vérifiez que les équations canoniques redonnent les équations du mouvement d'une particule soumise à une force de Lorentz.

Ce résultat est important puisqu'il nous dit comment écrire le Hamiltonien pour une particule soumise à une interaction de jauge. Aujourd'hui on cherche à écrire toutes les interactions qui apparaissent dans la nature comme des interactions de jauge.

4.6 Les transformations canoniques (T.C.)

On dit que des q_i et des p_i que ce sont des variables canoniques généralisées. Ce n'est pas un euphémisme puisqu'il n'y a pratiquement aucune limite à ce qu'elles peuvent représenter physiquement. Nous en venons d'ailleurs quelques exemples. Puisque tel est

le cas il doit exister des transformations entre ces différents choix. Nous noterons Q_i et P_i les nouvelles variables canoniques obtenues suite à une telle transformation.

On n'est pas surpris par contre de constater que ces transformations sont soumises à des conditions assez sévères. En effet les q_i et p_i sont généralisés et obéissent à

$$\{q_k, q_j\} = 0, \quad \{p_k, p_j\} = 0, \quad \{q_k, p_j\} = \delta_{ij} \quad (4.79)$$

et les équations canoniques

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.80)$$

sont invariantes de forme. Ainsi, à la suite d'une transformation des q_i et p_i vers les Q_i et P_i et définissant un nouvel Hamiltonien que nous noterons $K(Q_i, P_i)$ nous devons avoir

$$\{Q_k, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_k, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_k, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (4.81)$$

et les équations canoniques

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (4.82)$$

Strictement les équations de transformation peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_j, p_j, t) \\ P_i &= P_i(q_j, p_j, t) \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.83)$$

et doivent pouvoir s'inverser puisque la physique reste indépendante des variables qu'on emploie pour la décrire, donc on doit pouvoir écrire les transformations inverses

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_j, P_j, t) \\ p_i &= p_i(Q_j, P_j, t) \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.84)$$

Les q_i, p_i, Q_i et P_i forment $4n$ variables mais il est évident que seules $2n$ d'entre elles sont indépendantes. D'autre part s'il est généralement possible d'écrire par exemples les n équations de transformation

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t) \quad (4.85)$$

de façon assez arbitraire il est généralement impossible d'écrire les n autres équations

$$P_i = P_i(q_j, p_j, t) \quad (4.86)$$

de façon aussi arbitraire puisqu'un tel choix ne satisfera pas en général les conditions énoncées plus haut.

Il faut donc apprendre à faire correctement ces transformations. La façon *standard* de le faire est de considérer que pour les fins de la transformation n des anciennes variables et n des nouvelles sont linéairement indépendantes, par exemple les q_i et les P_i alors que n anciennes et n nouvelles restantes sont linéairement dépendantes, ici les p_i et les Q_i . Dans ce cas précis nous écrivons donc les équations de transformation

$$p_i = p_i(q_j, P_j, t) \quad (4.87)$$

$$Q_i = Q_i(q_j, P_j, t) \quad (4.88)$$

Pour obtenir la forme habituelle on inverse les n premières en

$$P_j = P_j(q_i, p_i, t) \quad (4.89)$$

que l'on remplace dans les n dernières

$$Q_i = Q_i(q_j, P_j(q_k, p_k, t), t) = Q_i(q_j, p_j, t). \quad (4.90)$$

Pour générer ces transformations, nous retournerons au principe variationnel lui-même. Nous savons que

$$\delta S = \delta \int_1^2 L dt = 0. \quad (4.91)$$

Par ailleurs de

$$H = \sum_i^n p_i \dot{q}_i - L \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.92)$$

on peut obtenir

$$L = \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \quad \text{où} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial p_i} \quad (4.93)$$

ce qui permet d'écrire

$$\delta S = \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 L dt = 0. \quad (4.94)$$

Or si L correspond à H , L' correspondra à K et nous exigeons d'avoir également

$$\delta \int_1^2 L' dt = 0 \quad \text{où} \quad L' = \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - K. \quad (4.95)$$

Pour que L' et L décrivent la même physique nous avons déjà vu que L et L' ne peuvent différer l'un de l'autre que par la dérivée totale d'une fonction F , i.e.

$$L = L' + \frac{dF}{dt}. \quad (4.96)$$

Nous poserons donc

$$\delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \right] dt \quad (4.97)$$

Cette fonction F , que l'on appelle le générateur de la T.C. sera choisie comme ne dépendant que des variables indépendantes de la transformation. On identifie généralement quatre cas

| Variables indépendantes | Variables dépendantes | Générateurs |
|-------------------------|-----------------------|--------------------|
| q_i, Q_i | p_i, P_i | $F_1(q_i, Q_i, t)$ |
| q_i, P_i | p_i, Q_i | $F_2(q_i, P_i, t)$ |
| p_i, Q_i | q_i, P_i | $F_3(p_i, Q_i, t)$ |
| p_i, P_i | q_i, Q_i | $F_4(p_i, P_i, t)$ |

Étudions un peu plus en détails les cas $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$. Dans le cas $F_1(q_i, Q_i, t)$

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.98)$$

Ici, il est suffisant de comparer les fonctions à intégrer dans $\delta \int_1^2 L dt = 0$ de qui donne

$$\begin{aligned} \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) &= \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i, t) + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &+ \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Cette équation est satisfaite si on identifie, q_i, Q_i et donc \dot{q}_i et \dot{Q}_i comme étant indépendantes. Les facteurs de ces variables indépendantes, doivent donc être identiques

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_j, Q_j, t) = p_i(q_j, Q_j, t) \\ P_i &= -\frac{\partial}{\partial Q_i} F_1(q_j, Q_j, t) = P_i(q_j, Q_j, t) \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Clairement ces lois de transformation nous permettent d'écrire les $2n$ variables dépendantes (ici les p_i et P_i) en fonction des $2n$ variables indépendantes (ici les q_i et Q_i). Ces $2n$ équations peuvent se mettre sous la forme *plus habituelle*

$$q_i = q_i(Q_j, P_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.101)$$

$$p_i = p_i(Q_j, P_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.102)$$

ce qui permet de calculer K

$$\begin{aligned} K(Q_i, P_i, t) &= H(q_i(Q_j, P_j, t), p_i(Q_j, P_j, t), t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i(Q_j, P_j, t), Q_i, t). \end{aligned} \quad (4.103)$$

En étudiant les équations de transformation obtenues ci-dessus, on constate que

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}, \quad \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} \quad (4.104)$$

ainsi donc, un test du caractère canonique de la transformation

$$p_i = p_i(q_j, P_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.105)$$

$$P_i = P_i(q_j, P_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.106)$$

est qu'elle doit satisfaire

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \quad (4.107)$$

ce qui est équivalent à

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{et} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}. \quad (4.108)$$

Dans le cas $F_2(q_i, P_i, t)$ ce sont les q_i et les P_i qui sont considérés indépendants. On calcule

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (4.109)$$

Ici la comparaison des fonctions à intégrer n'est pas suffisante et nous devons récrire au

complet

$$\delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 \left\{ \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} dt. \quad (4.110)$$

Le problème vient de ce que les Q_i ne sont pas considérés indépendants ici et donc les \dot{Q}_i ne le sont pas. Intégrons par partie le premier terme à droite

$$\delta \int_1^2 \sum_i^n P_i \dot{Q}_i dt = \delta \underbrace{\sum_i^n P_i \dot{Q}_i \Big|_1^2}_{=0 \text{ pcq points fixes}} - \delta \int_1^2 \sum_i^n \dot{P}_i Q_i dt. \quad (4.111)$$

Maintenant nous pouvons comparer les fonctions à intégrer

$$\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_i^n \dot{P}_i Q_i - K + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (4.112)$$

et identifier les facteurs des variables indépendantes, \dot{q}_i et \dot{P}_i

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} F_2(q_j, P_j, t) = p_i(q_j, P_j, t) \\ Q_i &= -\frac{\partial}{\partial Q_i} F_2(q_j, P_j, t) = P_i(q_j, P_j, t) \\ K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Ici encore les variables dépendantes apparaissent exprimées en fonction des variables indépendantes. Comparant les expressions pour p_i et Q_i , le test du caractère d'une transformation de type F_2 est

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad (4.114)$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{et} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}. \quad (4.115)$$

Remarque 6

Les fonctions $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$ etc..., ne génèrent pas des transformations différentes mais sont simplement des façons différentes de générer une transformation donnée. Évidemment, deux fonctions F_1 différentes par exemple vont en général générer des transformations différentes.



Quelques exemples

a) Fréquemment on cherche à effectuer une transformation de coordonnées, i.e. on connaît les fonctions

$$Q_i = Q_i(q_j, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.116)$$

toujours inversibles en

$$q_i = q_i(Q_j, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.117)$$

En général il n'est alors pas possible de poser à priori les équations de transformation des moments, on doit s'assurer que ces derniers seront des moments canoniques généralisés. Une façon "simple" de procéder est par le biais d'une transformation de type $F_2(q_i, P_i, t)$ définie comme

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_i^n Q_i(q_j, t) P_i. \quad (4.118)$$

Dans ce cas les équations canoniques de transformation seront

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i(q_j, t) : \quad \text{tel que désiré} \quad (4.119)$$

et

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j^n P_j \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j(q_k, t) = p_i(P_j, q_k, t). \quad (4.120)$$

Ces n dernières équations peuvent s'inverser en

$$P_i = P_i(q_j, p_j, t) \quad (4.121)$$

complétant ainsi l'opération et garantissant que les P_i ainsi définis seront canoniques.



Exemple 4.2

Voyons un exemple simple (voir figure 4.2), celui du passage aux coordonnées cartésiennes en deux dimensions, x et y aux coordonnées polaires, r, φ . Ici $q_i = (x, y)$ et $Q_i = (r, \varphi)$ avec $i = 1, 2$. De plus, $p_i = (p_x, p_y)$ et $P_i = (P_r, P_\varphi)$. Nous savons que

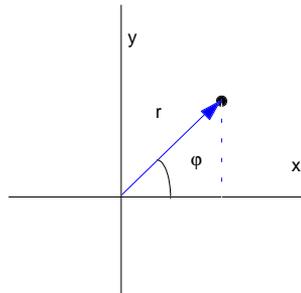


Figure 4.2

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x = r \cos \varphi \\ q_2 &= y = r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ du type } q_i = q_i(Q_j) \text{ et } \left\{ \begin{aligned} p_1 &= p_x \\ p_2 &= p_y \end{aligned} \right. \quad (4.122)$$

donc

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \iff Q_1 = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.123)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \iff Q_2 = \tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right). \quad (4.124)$$

Nous écrivons la fonction $F_2(q_i, P_i) = F_2(x, y, P_r, P_\varphi)$

$$\begin{aligned} F_2(q_i, P_i) &= (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} P_r + \tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) P_\varphi \\ \equiv F_2(x, y, P_r, P_\varphi) &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} P_r + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) P_r. \end{aligned}$$

Les lois canoniques d'une transformation F_2 sont

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} P_r - \frac{y}{(x^2 + y^2)} P_\varphi \\ &= \cos \varphi P_r - \frac{\sin \varphi}{r} P_\varphi \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} P_r + \frac{x}{(x^2 + y^2)} P_\varphi \\ &= \sin \varphi P_r + \frac{\cos \varphi}{r} P_\varphi \end{aligned} \quad (4.126)$$

d'où on obtient facilement

$$P_r = \frac{xp_x + yp_y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.127)$$

$$P_\varphi = xp_y - yp_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \quad (4.128)$$

où $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z$ = composante z du moment angulaire. Supposons de plus que nous ayons

$$T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) \quad (4.129)$$

alors on calcule facilement

$$T = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2}\right) \quad (4.130)$$

que l'on sait déjà être le bon résultat.

Exercice 4.3

Calculez les $\{Q_i, P_j\}$ pour vérifier que les nouvelles variables sont canoniques.

Exemple 4.3

Quelques exemples illustreurs sur l'oscillateur harmonique dont le Hamiltonien (1 dimension) est

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (4.131)$$

Tentons de passer des variables canoniques x et p_x à de nouvelles, notées q et p par

$$x = \sqrt{\frac{1}{m\omega}}q \implies q = \sqrt{m\omega}x \quad (4.132)$$

$$p_x = \sqrt{m\omega}p \implies p = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_x. \quad (4.133)$$



On vérifie que

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p_x} - \frac{\partial q}{\partial p_x} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.134)$$

$$= \sqrt{m\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\omega}} - 0 \cdot 0 = 1 \quad (4.135)$$

de qui est correct et de toute évidence $\{q, q\} = \{p, p\} = 0$, donc la transformation est canonique et H devient K :

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H \quad (4.136)$$

$$K(q, p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2). \quad (4.137)$$

La solution est triviale

$$\dot{q} = \frac{\partial K}{\partial p} = \omega p \text{ et } \dot{p} = -\frac{\partial K}{\partial q} = -\omega q \quad (4.138)$$

alors

$$\ddot{q} = \omega \dot{p} = -\omega^2 q \quad (4.139)$$

d'où

$$q(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (4.140)$$

donc

$$x(t) = \sqrt{m\omega} A \sin(\omega t + \delta). \quad (4.141)$$

Exemple 4.4



Au lieu de cette transformation, essayons plutôt de passer de (x, p_x) à (q, p) définis par

$$x = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} q \quad \text{et} \quad p_x = \sqrt{2m} p \quad (4.142)$$

ou

$$q = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} x \quad \text{et} \quad p = \frac{p_x}{\sqrt{2m}}. \quad (4.143)$$

Nous passons alors de H à K défini par ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \implies K = H$)

$$\begin{aligned} K(q, p) &= H(x(q), p_x(p)) \\ &= \frac{1}{2m} \cdot 2mp^2 + \frac{m\omega^2}{2} \cdot \frac{2}{m\omega^2} q^2 \\ &= p^2 + q^2 \end{aligned} \quad (4.144)$$

La solution est triviale

$$\dot{q} = \frac{\partial K}{\partial p} = 2p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial K}{\partial q} = -2q \quad (4.145)$$

donc

$$\ddot{q} = 2\dot{p} = -4q \quad (4.146)$$

donc

$$q(t) = A \sin(\omega t + \delta). \quad (4.147)$$

On s'attend à ce que $q(t) = N \sin(\omega t + \delta)$ où $\omega \neq 2$ en général, donc ce résultat est faux. La raison est que la transformation faite ici, même si elle semble très simple, n'est pas canonique. En effet on vérifie que

$$\begin{aligned} \{q, p\} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p_x} - \frac{\partial q}{\partial p_x} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m}} - 0 \cdot 0 = \frac{\omega}{2} \neq 1 \end{aligned} \quad (4.148)$$

sauf pour le cas particulier $\omega = 2$.

Reprenons l'Hamiltonien $K(q, p)$ correctement obtenu précédemment et supposons que $\omega = 1$

$$\implies K(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \quad (4.149)$$

dont la solution sera trivialement

$$q = A \sin(t + \delta). \quad (4.150)$$

Faisons une T.C. additionnelle définie par

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad (4.151)$$

et

$$P = \frac{i}{\sqrt{2}}(q - ip) \quad (4.152)$$

qui s'inverse facilement en

$$q = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \quad p = -\frac{i(Q + iP)}{\sqrt{2}} \quad (4.153)$$

Même si la transformation est complexe on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Trivialement le nouveau K , noté ici K_1 est

$$K_1(Q, P) = -iQP \quad (4.155)$$

Les équations du mouvement seront

$$\dot{Q} = \frac{\partial K_1}{\partial P} = -iQ, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K_1}{\partial Q} = +iP \quad (4.156)$$

donc

$$Q(t) = Ae^{-it}, \quad P(t) = Be^{it}. \quad (4.157)$$

Ainsi

$$q(t) = \frac{Ae^{-it} - iBe^{it}}{\sqrt{2}}. \quad (4.158)$$

Par les définitions même de Q et P , $P = iQ^*$, donc

$$A^*e^{it} = Be^{it} \implies B = iA^* \quad (4.159)$$

et

$$q(t) = \frac{Ae^{-it} + A^*e^{it}}{\sqrt{2}}. \quad (4.160)$$

Mais A est une constante (complexe) que l'on peut écrire

$$A = |A| e^{i\Delta} \implies A^* = |A| e^{-i\Delta} \quad (4.161)$$

ce qui donne

$$q(t) = |A| \cos(t - \Delta) \quad (4.162)$$

qui est une bonne solution. Cette façon de faire peut sembler étrange mais en plus de mélanger coordonnées et moments, elle trouve une application en mécanique quantique.

4.7 Une transformation canonique très spéciale: La méthode de Hamilton-Jacobi

L'objectif

Les transformations canoniques ont pour but de simplifier les problèmes. L'une d'entre elles est tellement systématique qu'elle porte un nom, la méthode de Hamilton-Jacobi.

Soit un Hamiltonien $(H(q_i, p_i))$ dépendant de $2n$ variables canoniques, les (q_i, p_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Nous savons que nous pouvons passer à un nouvel ensemble de variables canoniques, les (Q_i, P_i) également au nombre de $2n$ et dont sera fonction un nouvel Hamiltonien $K(Q_i, P_i)$. Par ailleurs nous savons que le système compte $2n$ constantes du mouvement. Le but de la méthode est d'opérer une T.C. telle que les (Q_i, P_i) soient précisément $2n$ constantes du mouvement. Si tel est le cas, alors

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \iff Q_i = \beta_i = \text{constantes} \quad (4.163)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \iff P_i = \alpha_i = \text{constantes} \quad (4.164)$$

d'où

$$q_i = q_i(Q_j, P_j, t) \quad (4.165)$$

$$= q_i(\beta_j, \alpha_j, t) \quad (4.166)$$

$$p_i = p_i(Q_j, P_j, t) \quad (4.167)$$

$$= p_i(\beta_j, \alpha_j, t) \quad (4.168)$$

ce qui trivialisait au maximum les équations du mouvement dans la cadre Q_i, P_i et $K(Q_i, P_i)$.

Pour y arriver nous chercherons la fonction génératrice, ici choisie de type $F_2(q_i, P_i, t)$ donc du type $F_2(q_i, \alpha_i, t)$, que nous noterons de façon standard $S(q_i, \alpha_i, t)$, telle que

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0. \quad (4.169)$$

La méthode

La T.C. est de type F_2 et donc

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (4.170)$$

Le but recherché est $H + \frac{\partial S}{\partial t} = K = 0$, ce sera notre équation fondamentale après remplacement des p_i dans H

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.171)$$

c'est l'équation de Hamilton-Jacobi, une équation différentielle pour S . Une fois solu-

tionnée i.e. une fois que l'on connaît S il ne reste qu'à opérer les T.C.

$$p_i = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial q_i} = p_i(q_j, \alpha_j, t) \quad (4.172)$$

et

$$\begin{aligned} Q_i &= \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i} \\ &= Q_i(q_j, \alpha_j, t) = \beta_i. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Ces n équations peuvent s'inverser en

$$q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (4.174)$$

ce qui est la solution! Si on veut les p_i , on remplace dans les résultats de la T.C. pour

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(q_i, \alpha_i, t) = p_i(q_j(\alpha_k, \beta_k, t), \alpha_i, t) \\ &= p_i(\alpha_l, \beta_l, t). \end{aligned} \quad (4.175)$$

Une simplification importante apparaît lorsque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dans ce cas, par séparation de variables, on peut écrire (puisqu'alors H est une constante donc de $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \implies S \sim t$)

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t \quad (4.176)$$

où on identifie l'un des α , soit ici α_1 comme la valeur numérique (constante) de H : $H = \alpha_1$.

Comme

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \implies p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (4.177)$$

l'équation de Hamilton-Jacobi devient simplement

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0. \quad (4.178)$$

C'est l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi pour la fonction $W(q_i, \alpha_i)$. La simplification peut aller plus loin. En effet, toujours par séparation de variables on constate que si une coordonnée, disons q_k pour k fixé, est cyclique, elle n'apparaît pas dans H et p_k est alors une constante qui peut être utilisé comme p_k . Dans ce cas on peut écrire la dépendance en W sur q_k simplement comme

$$W \sim \alpha_k q_k \implies p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k} = \alpha_k : \text{constante} \quad (4.179)$$

et de façon générale W s'écrira

$$W(q_i, \alpha_i) = \sum_k^{\text{cycliques}} \alpha_k q_k + W(q_j, \alpha_j) \quad (4.180)$$

où les q_k cycliques n'apparaissent pas dans W' .

Exemple 4.5

Illustrons la méthode par un exemple simple, soit un problème physique décrit par

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.181)$$



Ici, H ne dépend pas du temps, donc on peut écrire

$$S(q_i, \alpha_i, t) = S(x, y, z, \alpha_i, t) = -\alpha_1 t + W(x, y, z, \alpha_i). \quad (4.182)$$

De plus, z est variable cyclique et nous pouvons écrire

$$W(x, y, z, \alpha_i) = \alpha_2 z + W'(x, y, \alpha_3). \quad (4.183)$$

Nous aurons donc

$$p_x = \frac{\partial W'}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial W'}{\partial y}, \quad p_z = \alpha_2. \quad (4.184)$$

L'équation caractéristique de H.-J. sera, de

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0 \quad (4.185)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W'}{\partial y} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \alpha_1 = 0 \quad (4.186)$$

C'est une équation différentielle (non linéaire). Cependant la forme relativement simple de l'équation permet d'espérer qu'une séparation de variables

$$W' = W_x(x) + W_y(y) \implies \begin{cases} \frac{\partial W'}{\partial x} = \frac{\partial W_x(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial W'}{\partial y} = \frac{\partial W_y(y)}{\partial y} \end{cases} \quad (4.187)$$

donnera des résultats. On obtient en effet alors, regroupant

$$\underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2}_{\text{constante}} + \frac{\alpha_2^2}{2m} - \alpha_1 = 0. \quad (4.188)$$

Les deux premiers termes contiennent toute et seulement la dépendance en x , leur somme doit donc être égale à une constante que nous appellerons α_3^2 . Ceci nous laisse

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \alpha_3^2 \quad (4.189)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2 + \alpha_3^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m} - \alpha_1 = 0. \quad (4.190)$$

Ainsi donc les deux termes en y sont aussi égaux à une constante mais ici il n'est pas nécessaire d'en introduire une nouvelle. Nous aurons donc trois constantes $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ qui représentent les trois nouveaux moments, P_i , ce qui est correct puisque nous avons trois degrés de liberté. Isolant les dérivés ci-dessus nous obtenons

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = \sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2} \quad (4.191)$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial y} = \sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2} \quad (4.192)$$

ou

$$W_x = \int \sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2} dx \quad (4.193)$$

$$W_y = \int \sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2} dy. \quad (4.194)$$

Souvent il n'est pas nécessaire de faire ces intégrales puisque nous n'avons pas besoin de W en soi. Ici, S s'écrira donc

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 z + \int \sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2} dx$$

$$+ \int \sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2} dy \quad (4.195)$$

Souvent, il reste à appliquer les règles de transformation pour une T.C. de type F_2 i.e. où nous savons que

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \beta_i : \text{constante} \quad (4.196)$$

ce que se lira ici, avec α_i et β_i constantes

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}. \quad (4.197)$$

Explicitement nous aurons donc

$$\begin{aligned} \beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= 2m\alpha_3 \int \frac{dx}{\sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2}} \\ &\quad - 2m\alpha_3 \int \frac{dy}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2}} \end{aligned} \quad (4.198)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = z - \alpha_2 \int \frac{dy}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2}} \quad (4.199)$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + m \int \frac{dy}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2}} \quad (4.200)$$

Si on intègre les équations pour β_3 et β_2 , nous obtiendrons deux expressions du type

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = 0 \quad (4.201)$$

$$g(y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2) = 0. \quad (4.202)$$

Comme nous avons 3 dimensions, ces deux équations satisfaites simultanément nous laissent un espace à une dimension: la trajectoire, exprimée en termes de x, y et z , sans la dépendance en temps. En d'autres termes $f = 0$ et $g = 0$ laissent une des coordonnées indépendante, disons y et inversant f et g on peut en principe écrire

$$x = x(y, \alpha_i, \beta_2, \beta_3) \quad (4.203)$$

$$z = z(y, \alpha_i, \beta_2, \beta_3). \quad (4.204)$$

La dernière équation, celle en β_1 donne $y = y(t, \alpha_i, \beta_1)$.

C'est de là qu'on obtient le développement dans le temps de la trajectoire. Dans un certain nombre de cas cette dépendance en t n'est pas le but recherché et on peut alors se limiter aux deux premières qui nous donnent la trajectoire uniquement en fonction des coordonnées.

Voyons voir ce que cela donne ici.

$$\beta_3 = \frac{2\alpha_3}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{x\omega\sqrt{m}}{\alpha_3\sqrt{2}} \right] - \frac{2\alpha_3}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^4}}} \right], \quad (4.205)$$

$$\beta_2 = z - \frac{2\alpha_2}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^4}}} \right] \quad (4.206)$$

et

$$\beta_1 = -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^4}}} \right]. \quad (4.207)$$

Des deux premières expressions nous tirons $x(y)$ et $z(y)$ après un peu d'algèbre élémentaire

$$x(y) = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\alpha_3}{m} \sin \left(\frac{\omega \beta_3}{2\alpha_3} + \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^4}}} \right] \right) \quad (4.208)$$

$$z(y) = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^4}}} \right] \quad (4.209)$$

qui sont les expressions donnant la trajectoire sous la forme $x = x(y)$ et $z = z(y)$. L'équation en β_1 donne

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^4}} \sin(\omega t + \omega \beta_1) = y(t) \quad (4.210)$$

Dans le problème étudié, il est évident que le mouvement en x et y est harmonique de fréquence et le mouvement en z est libre. Clairement la solution $y(t)$ est de la bonne forme

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \delta). \quad (4.211)$$

Remplaçant ce résultat dans les solutions $x(y)$ et $z(y)$, nous obtenons

$$x = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\alpha_3}{\omega} \sin \left[\omega t + \omega \left(\beta_1 + \frac{\beta_3}{2\alpha_3} \right) \right] \quad (4.212)$$

aussi de la forme

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \Delta) \quad (4.213)$$

et

$$\begin{aligned} z &= \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m} (t + \beta_1) \\ &= \frac{\alpha_2}{m} t + \left(\beta_2 + \frac{\alpha_2 \beta_1}{m} \right) \end{aligned} \quad (4.214)$$

de la bonne forme

$$z = v_z t + z_0 \quad (4.215)$$

où v_z est une vitesse constante. On voit directement ici comment relier les constantes α_i et β_i aux conditions initiales du problème.

L'exemple ci-dessus est simple mais il illustre de façon claire que pour la première fois nous obtenons la trajectoire sans passer par une équation du mouvement se ramenant à $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La méthode est appréciée pour son intérêt théorique, sa relation avec l'optique! et lorsqu'on cherche la trajectoire sous la forme

$$x = x(y), \quad z = z(y) \quad (4.216)$$

plutôt que sous la forme

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (4.217)$$

4.8 $T(q_i, p_i)$ en coordonnées généralisées

Nous avons vu dans le cadre Lagrangien que l'énergie cinétique s'écrit de façon géné-

rale en fonction des vitesses q_i :

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i,j} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.218)$$

Ainsi les moments généralisés (absence d'interaction dépendant de \mathbf{v}) sont

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m \sum_i g_{ik} \dot{q}_i \quad (4.219)$$

en utilisant la symétrie $g_{ik} = g_{ki}$ (espace de Riemann). On peut écrire cette équation de façon matricielle

$$p = mg\dot{q} \quad (4.220)$$

où

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (4.221)$$

et m est la masse, un simple nombre. Multipliant de la gauche par $\frac{g^{-1}}{m}$ où g^{-1} est la matrice inverse de g , i.e.

$$g^{-1}g = gg^{-1} = I = \text{la matrice identité} \quad (4.222)$$

on obtient

$$\frac{1}{m}g^{-1}p = \dot{q} \quad (4.223)$$

ou de façon explicite

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m} \sum_j (g^{-1})_{ij} p_j. \quad (4.224)$$

Utilisant la notation matricielle on peut écrire

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^T g \dot{q} \quad (4.225)$$

et donc en formalisme de Hamilton où $T = T(p)$ nous aurons

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} g^{-1} p \right)^T g \left(\frac{1}{m} g^{-1} p \right) \\ &= \frac{1}{2m} p^T (g^{-1})^T g g^{-1} p \\ &= \frac{1}{2m} p^T (g^{-1})^T p \end{aligned} \quad (4.226)$$

ou explicitement

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} p_i (g^{-1})_{ij}^T p_j \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} p_i g_{ij}^{-1} p_j \end{aligned} \quad (4.227)$$

Lorsque g est diagonal, ces opérations sont encore plus simplifiées puisqu'alors $g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij}$ et que les opérations de transposition sont sans effet. Par exemple nous avons vu

qu'en coordonnées sphériques, $q_i = (r, \theta, \varphi)$, la métrique

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.228)$$

Trivialement

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (4.229)$$

donc ici

$$T = \frac{1}{2m} \left[1 \cdot p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right] \quad (4.230)$$

ce qui est le bon résultat et est de la forme

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} p_i g_{ij}^{-1} \delta_{ij} p_j \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} g_{ij}^{-1} p_i^2 \end{aligned} \quad (4.231)$$

qui est générale pour les cas où la métrique g est diagonale.

4.9 La fonction S (ou comment refermer la boucle)

La méthode Hamilton-Jacobi voit apparaître une fonction génératrice de transformation canonique et noté S . Nous avons déjà utilisé ce symbole pour désigner l'action. Ici, S est défini par

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4.232)$$

où $S = S(q_i, \alpha_i, t)$. Nous avons donc, calculant la dérivée total de S par rapport au paramètre t ,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.233)$$

puisque $\dot{\alpha}_i = 0$, et

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad (4.234)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L \quad (4.235)$$

ou

$$dS = L dt \quad (4.236)$$

ou

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (4.237)$$

La fonction génératrice de H.-J. est donc simplement l'action. Formellement intéressant, ce résultat est cependant pratiquement inutile parce qu'il faut avoir complété la solution

du problème pour la vérifier.



5 THÉORIE DES PERTURBATIONS

5.1 Buts de la méthode

Il s'agit d'une méthode approximative pour obtenir une solution analytique à un problème de mécanique qui n'a pas de solution analytique exacte ou pour lequel cette solution est trop difficile à obtenir. En fait il n'existe que très peu de problèmes de mécanique qui ont une solution analytique exacte. Le problème à trois corps par exemple n'a pas de telle solution. Les ordinateurs d'aujourd'hui permettent de résoudre numériquement ces problèmes avec pratiquement la précision désirée mais à chaque fois pour un ensemble donné de conditions initiales. Pour avoir une vision générale du type de trajectoire, il faut faire plusieurs fois les calculs et ceci peut être onéreux.

5.2 L'idée de base : la variation des constantes

Soit un système décrit par un Hamiltonien $H(q_i, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. On sait que la solution du problème dépend de $2n$ constantes d'intégration, appelons-les les a_i et les b_i , $i = 1, 2, \dots, n$, qui sont évidemment des constantes du mouvement. La solution devrait alors s'écrire

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, a_j, b_j) \\ p_i &= p_i(t, a_j, b_j) \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Supposons que nous soyons incapables d'obtenir ces solutions analytiques mais que pour des raisons du type énumérées en ci-haut, nous désirons obtenir une solution approximative et analytique. La méthode des perturbations peut permettre d'obtenir cette solution approximative. Elle requiert que nous soyons capables d'écrire

$$H(q_i, p_i) = H_0(q_i, p_i) + H_1(q_i, p_i) \quad (5.2)$$

de façon telle que

1. il soit possible d'obtenir une solution analytique pour H_0 et,
2. que H_1 soit *petit* devant H_0 .

Cette dernière condition est souvent difficile à vérifier a priori. Elle requiert une certaine stabilité du mouvement face aux changements dans les conditions initiales et de fait la méthode n'est pas appropriée au traitement des mouvements chaotiques par exemple qui sont caractérisés par une très grande sensibilité aux conditions initiales.

L'idée de base est relativement simple et elle compte les étapes suivantes:

i) On résout analytiquement pour H_0 et on obtient les solutions

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^{(0)}(t, a_j^{(0)}, b_j^{(0)}) \\ p_i &= p_i^{(0)}(t, a_j^{(0)}, b_j^{(0)}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ii) On inverse ces $2n$ équations pour obtenir les

$$\begin{aligned} a_i &= a_i^{(0)}(t, q_j^{(0)}, p_j^{(0)}) \\ b_i &= b_i^{(0)}(t, q_j^{(0)}, p_j^{(0)}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

qui vérifient évidemment (ce sont des constantes)

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \{a_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i^{(0)} \\ \dot{b}_i &= \{b_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} b_i^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

iii) On pose que la solution complète pour H peut prendre la même forme que celle en i) et ii) mais avec des $a_i^{(0)}$ et $b_i^{(0)}$ remplacés par des a_i et b_i qui ne sont plus des constantes du mouvement i.e. pour lesquels $\dot{a}_i \neq 0 \neq \dot{b}_i$.

iv) On calcule les a_i et les b_i par leur équation du "mouvement impliquant H au complet et dans lesquelles les a_i et b_i sont présumés avoir la même dépendance dans les q_i et p_i qu'en ii). Ainsi

$$\dot{a}_i = \{a_i, H\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i = \dot{a}_i = \{a_i, H_0\} + \{a_i, H_1\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i. \quad (5.6)$$

Mais selon la seconde relation

$$\{a_i, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i = 0 \quad (5.7)$$

et il ne reste que

$$\dot{a}_i = \{a_i, H_1\} \quad (5.8)$$

et

$$\dot{b}_i = \{b_i, H_1\}. \quad (5.9)$$

v) Il reste à intégrer ces équations pour obtenir $a_i(t)$ et $b_i(t)$ et à les replacer dans les équations (i) en lieu et place des $a_i^{(0)}$ et $b_i^{(0)}$ pour obtenir la solution désirée

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^{(0)}(t, a_j^{(0)}, b_j^{(0)}) \\ p_i &= p_i^{(0)}(t, a_j^{(0)}, b_j^{(0)}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

mêmes fonctions que pour la solution non-perturbée mais ici $a_i = a_i(t)$ et $b_i = b_i(t)$.

5.3 Les approximations

À ce point-ci, il n'y a aucune approximation de faite. Elles apparaissent dans l'intégration des équations pour a_i et b_i souvent elles-mêmes trop difficiles pour être résolues exactement.

On présente souvent la méthode perturbative comme l'approximation d'une expansion en série de puissance d'un paramètre qui caractérise H_1 . C'est d'ailleurs généralement le cas en mécanique quantique. Ce n'est pas cependant la seule approximation possible. Mentionnons la méthode itérative et celle de la moyenne, cette dernière étant utile lorsque les trajectoires de H_0 sont des orbites fermées.

Méthode par série

Sous une forme simplifiée, on peut la présenter de la façon suivante. On identifie d'abord un paramètre λ , idéalement sans dimension (et petit) tel que

$$H_1 = \lambda h(q_i, p_i) \quad (5.11)$$

et on pose que l'on peut écrire les a_i (et les b_i) en séries de puissance

$$a_i = a_i^{(0)} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \dots \quad (5.12)$$

Remplaçant dans l'équation pour \dot{a}_i on obtient

$$\dot{a}_i^{(0)} + \lambda \dot{a}_i^{(1)} + \lambda^2 \dot{a}_i^{(2)} + \dots = \lambda \{a_i^{(0)}, h\} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \dots, h\}. \quad (5.13)$$

Égalant les termes en même puissance on obtient

$$\begin{aligned} \dot{a}_i^{(0)} &= 0 \implies a_i^{(0)} = \text{constante} \\ \dot{a}_i^{(1)} &= \{a_i^{(0)}, h\} \\ \dot{a}_i^{(2)} &= \{a_i^{(1)}, h\} \\ &\vdots \\ \dot{a}_i^{(n)} &= \{a_i^{(n-1)}, h\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

et de même pour les b_i . C'est la philosophie qu'on retrouve dans la théorie des perturbations de la mécanique quantique par exemple.

Méthode itérative

La méthode suppose que la séquence suivante converge. À partir de

$$\dot{a}_i = \{a_i, H_1\} \quad (5.15)$$

$$\dot{b}_i = \{b_i, H_1\}, \quad (5.16)$$

on calcule d'abord la première itération

$$\dot{a}_i^{(1)} = \{a_i, H_1\}|_{a_j^{(0)}, b_j^{(0)}} \quad (5.17)$$

$$\dot{a}_i^{(1)} = \{a_i, H_1\}|_{a_j^{(0)}, b_j^{(0)}} \quad (5.18)$$

où $\{ \quad , \quad \}|_{a_j^{(0)}, b_j^{(0)}}$ signifie que le résultat du calcul du crochet est évalué en $a_j^{(0)}, b_j^{(0)}$, i.e. que les $a_j^{(0)}$ et $b_j^{(0)}$ apparaissant à droite de l'équation après le calcul du crochet sont

remplacés par les déjà connus. Suite à l'intégration de H_0 . La seconde approximation suit

$$\dot{a}_i^{(2)} = \{a_i, H_1\}|_{a_j^{(1)}, b_j^{(1)}} \quad (5.19)$$

$$\dot{b}_i^{(2)} = \{b_i, H_1\}|_{a_j^{(1)}, b_j^{(1)}} \quad (5.20)$$

etc...

Méthode de la moyenne

Elle est utilisable lorsque la solution non perturbée est une orbite cyclique de période τ . On peut alors calculer l'effet net moyen de la perturbation sur une orbite par

$$\bar{\dot{a}}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{a_i, H_1\} dt \quad (5.21)$$

$$\bar{\dot{b}}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{b_i, H_1\} dt \quad (5.22)$$

Cette méthode est compatible avec la méthode itérative par exemple. Les changements orbitaux des satellites et des planètes dus à certaines excentricités ou aux autres planètes, sont généralement calculés de cette façon, comme le déplacement (rotation) de l'orbite (elliptique) de Mercure par exemple.



Remarque 7

Les crochets de Poisson qui apparaissent ici sont présumés calculés en utilisant les variables canoniques q_i et p_i . Cela implique d'avoir constamment recours aux équations (i) et (ii). On verra en plus bas une façon systématique de choisir ces constantes en optant pour les α_i et β_i de Hamilton-Jacobi qui ont l'avantage considérable d'être variables canoniques.

5.4 Exemple



Exemple 5.1

Voyons d'abord un cas très simple, soit celui d'une particule soumise à une force constante en une dimension donc

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \lambda q \quad (5.23)$$

où $V = \lambda q$ donc la force s'oppose au mouvement vers les q croissant si $\lambda > 0$ et l'inverse si $\lambda < 0$. On sait résoudre exactement

$$\dot{q} = \{q, H\} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -\lambda \quad (5.24)$$

et donc

$$\ddot{q} = -\frac{\lambda}{m} \implies \begin{cases} q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{\lambda t^2}{2m} \\ p(t) = m\dot{q} = m\dot{q}_0 - \lambda t. \end{cases} \quad (5.25)$$

Afin de tester la méthode perturbative décomposons H en $H_0 + H_1$ où

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad H_1 = \lambda q \quad (5.26)$$

et reprenons les étapes i) - v).

i) La solution analytique pour H_0 est triviale, nous avons une particule libre et donc

$$q = a^{(0)}t + b^{(0)} \quad (5.27)$$

$$p = ma^{(0)}. \quad (5.28)$$

ii) L'inverse de ces équations est

$$a^{(0)} = \frac{p}{m} \quad (5.29)$$

$$b^{(0)} = q - \frac{p}{m}t \quad (5.30)$$

et même si $b^{(0)}$ dépend explicitement du temps on vérifie (c'est inutile en fait) que

$$\dot{a}^{(0)} = \{a^{(0)}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}a^{(0)} = \left\{ \frac{p}{m}, \frac{p^2}{2m} \right\} + 0 \equiv 0 \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}^{(0)} &= \{b^{(0)}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}b^{(0)} \\ &= \left\{ q - \frac{p}{m}t, \frac{p^2}{2m} \right\} - \frac{p}{m} \\ &= \frac{1}{2m}\{q, p^2\} - \frac{t}{2m}\{p, p^2\} - \frac{p}{m} \\ &= \frac{2p}{2m} - 0 - \frac{p}{m} = \frac{p}{m} - \frac{p}{m} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

iii) On pose que la solution pour H sera

$$\begin{aligned} q &= at + b \\ p &= ma \end{aligned} \implies \begin{aligned} a &= \frac{p}{m} \\ b &= q - \frac{p}{m}t. \end{aligned} \quad (5.33)$$

iv) On calcule les équations d'évolution de a et b

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \{a, H_1\} = \left\{ \frac{p}{m}, \lambda q \right\} \\ &= \frac{\lambda}{m}\{p, q\} = \frac{\lambda}{m} \cdot (-1) \\ &= -\frac{\lambda}{m} \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \{b, H_1\} = \left\{ q - \frac{pt}{m}, \lambda q \right\} \\ &= \frac{\lambda}{m}\{q, q\} - \frac{\lambda t}{m}\{p, q\} \\ &= \lambda \cdot 0 - \frac{\lambda t}{m}(-1) = \frac{\lambda t}{m}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

v) On intègre trivialement en posant que la perturbation a été allumée à $t = 0$ et que pour $t < 0$, seul H_0 jouait un rôle. Ceci nous donne les conditions initiales donc les constantes d'intégration pour les équations pour a et b . Donc ici

$$a(t) = -\frac{\lambda}{m}t + a^{(0)} \implies a(0) = a^{(0)} \quad (5.36)$$

$$b(t) = \frac{\lambda}{m}t^2 + b^{(0)} \implies b(0) = b^{(0)}. \quad (5.37)$$

Remplaçant dans les équations en iii) on obtient

$$q = \left(a^{(0)} - \frac{\lambda t}{m} \right) t + \frac{\lambda t^2}{2m} + b^{(0)} \quad (5.38)$$

$$= b^{(0)} + a^{(0)}t - \frac{\lambda t^2}{2m} \quad (5.39)$$

ainsi que

$$p = ma^{(0)} - \lambda t. \quad (5.40)$$

Ces résultats sont exacts avec $q_0 = b^{(0)}$ et $a^{(0)} = \dot{q}_0$.

5.5 Méthode canonique de perturbations

L'idée est la même mais les manipulations sont sensiblement simplifiées du fait qu'on choisit les constantes de la méthode de Hamilton-Jacobi, les α_i et β_i au lieu de laisser ce choix au *hasard*. Ces constantes ne seront vraiment constantes que pour H_0 , l'introduction de H_1 fera qu'elles ne seront plus constantes du mouvement. L'avantage vient du fait que les α_i et β_i étant variables canoniques (respectivement moments et coordonnées généralisés) on peut les utiliser pour calculer les crochets de Poisson. On évite ainsi cet incessant va-et-vient entre les (a_i, b_i) et les (p_i, q_i) qui ressort dans les exemples de la section ci-dessus. Une fois que H_0 a été résolu par H.-J. on obtient

$$q_i = q_i(t, \alpha_j, \beta_j) \quad (5.41)$$

$$p_i = p_i(t, \alpha_j, \beta_j) \quad (5.42)$$

que l'on inverse en

$$\alpha_i = \alpha_i(t, q_j, p_j) \quad (5.43)$$

$$\beta_i = \beta_i(t, q_j, p_j) \quad (5.44)$$

C'est toutefois la première forme qui est utile puisqu'elle permet d'écrire

$$H_1(q_i, p_i) = H_1(q_i(t, \alpha_j, \beta_j), p_i(t, \alpha_j, \beta_j)) \quad (5.45)$$

$$= K_1(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (5.46)$$

Par la suite, tous les calculs des crochets de Poisson se feront par

$$\{A, B\} = \sum_j \left[\frac{\partial A}{\partial \beta_j} \frac{\partial B}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A}{\partial \alpha_j} \frac{\partial B}{\partial \beta_j} \right] \quad (5.47)$$

ainsi

$$\dot{\alpha}_i = \{\alpha_i, H_1\} = \sum_j^n \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_j} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j} \right] \quad (5.48)$$

$$= - \sum_j^n \delta_{ij} \frac{\partial K_1}{\partial \beta_j} = - \frac{\partial K_1}{\partial \beta_i} \quad (5.49)$$

et

$$\dot{\beta}_i = - \frac{\partial K_1}{\partial \alpha_i}. \quad (5.50)$$

C'est sous cette forme que la théorie des perturbations est généralement présentée

dans la littérature.

5.6 Autre exemple



Exemple 5.2

Voyons un exemple assez "classique" parfois appelé l'oscillateur quantique décrit par

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{mk}{4}q^4. \quad (5.51)$$

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.52)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2q - mkq^3 \quad (5.53)$$

ou, en les combinant

$$\ddot{q} = -\omega^2q - kq^3. \quad (5.54)$$

Intégrer cette équation n'est pas trivial. Choisissons de décomposer H en $H_0 + H_1$ où

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 : \text{ oscillateur harmonique} \quad (5.55)$$

$$H_1 = \frac{mk}{4}q^4 : \text{ perturbation.} \quad (5.56)$$

Nous allons d'abord résoudre pour H_0 par la méthode de H.-J. Puisqu'on peut écrire, H_0 étant indépendant du temps,

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + W(q, \alpha) \quad (5.57)$$

et sachant que

$$H_0(q, \frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.58)$$

On voit immédiatement que

$$H_0(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = 0. \quad (5.59)$$

Ainsi notre nouveau moment canonique, α , sera une constante égale à l'énergie du système! Explicitant l'équation ci-dessus

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \alpha \quad (5.60)$$

on obtient

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2} \quad (5.61)$$

$$W = \int dq \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2}. \quad (5.62)$$

En plus de $p = \frac{dW}{dq}$, nos équations de transformation canonique comptent

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial q} = -t + \int \frac{dq}{\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2}} \quad (5.63)$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{m\omega q}{\sqrt{2m\alpha}} \right] \quad (5.64)$$

qui s'inverse en

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta). \quad (5.65)$$

Nous pouvons réécrire H_1

$$H_1 = \frac{mk}{4} q^4 = \frac{k\alpha^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta). \quad (5.66)$$

α et β nos nouveaux moment et coordonnée généralisés sont des constantes sous H_0 mais ne le sont plus lorsqu'on introduit la perturbation (disons à $t = 0$). Leur équation d'évolution est canonique

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = -\frac{4k\alpha^2}{m\omega^3} \sin^3 \omega(t + \beta) \cos \omega(t + \beta) \quad (5.67)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = -\frac{2k\alpha}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta) \quad (5.68)$$

Ces équations ne sont pas triviales à résoudre non plus mais elles se prêtent à une d'approximation, que ce soit par développement en série, par itération ou par moyenne.

Développement en série

On constate que k est le paramètre qui caractérise H_1 . Ce n'est par un très bon choix puisqu'il est lui-même dimensionné, néanmoins nous allons tenter une expansion en série du type

$$\alpha = \alpha_0 + k\alpha_1 + k^2\alpha_2 + \dots \quad (5.69)$$

$$\beta = \beta_0 + k\beta_1 + k^2\beta_2 + \dots \quad (5.70)$$

Cependant on constate ici que le côté droit des équations pour $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ dépend de fonctions trigonométriques d'argument $\omega(t + \beta)$. Comme les fonctions trigonométriques sont hautement non-linéaires dans leur argument, il n'est pas trivial d'identifier leur degré de dépendance en β . Par exemple

$$\dot{\beta} \sim \sin^4 \omega(t + \beta) \quad (5.71)$$

de

$$\sin \omega(t + \beta) = \sin \omega t \cos \omega \beta + \sin \omega \beta \cos \omega t \quad (5.72)$$

on aura

$$\begin{aligned} \cos \omega \beta &\approx \cos(\omega \beta_0 + \omega k \beta_1) \\ &\approx \cos \omega \beta_0 \cos \omega k \beta_1 - \sin \omega \beta_0 \sin \omega k \beta_1 \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \sin \omega \beta &\approx \sin(\omega \beta_0 + \omega k \beta_1) \\ &\approx \sin \omega \beta_0 \cos \omega k \beta_1 + \cos \omega \beta_0 \sin \omega k \beta_1 \end{aligned} \quad (5.74)$$

et prenant

$$\sin \omega k \beta_1 \approx \omega k \beta_1 + \mathcal{O}(k^3) \quad (5.75)$$

$$\cos \omega k \beta_1 \approx 1 + \mathcal{O}(k^2) \quad (5.76)$$

alors

$$\sin \omega(t + \beta) = \sin \omega(t + \beta_0) + \omega k \beta_1 \cos \omega(t + \beta_0). \quad (5.77)$$

Si k est considéré petit alors

$$\begin{aligned} \sin^4 \omega(t + \beta) &\approx \sin^4 \omega(t + \beta_0) \\ &\quad + 4\omega k \beta_1 \sin^3 \omega(t + \beta_0) \cos \omega(t + \beta_0) + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned}$$

(5.78)

et faire les remplacements appropriés pour identifier les termes d'une puissance donnée de k . L'exercice est assez lourd ici et nous ne le complétons pas.

Solution itérative.

À partir des équations pour $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ qui sont de la forme

$$\dot{\alpha} = f(\alpha, \beta, t) \quad (5.79)$$

$$\dot{\beta} = g(\alpha, \beta, t) \quad (5.80)$$

elle consiste à dire qu'on peut tendre vers α et β par une série d'itérations

$$\dot{\alpha} = f(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, t) = - \left. \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\alpha_{n-1}, \beta=\beta_{n-1}} \quad (5.81)$$

$$\dot{\beta} = g(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, t) = \left. \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{n-1}, \beta=\beta_{n-1}} \quad (5.82)$$

au sens où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \rightarrow \alpha \quad (5.83)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \rightarrow \beta. \quad (5.84)$$

La première de ces itérations est

$$\dot{\alpha}_1 = f(\alpha_0, \beta_0, t) = - \left. \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0} \quad (5.85)$$

$$\dot{\beta}_1 = g(\alpha_0, \beta_0, t) = \left. \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0}. \quad (5.86)$$

Nous nous limiterons ici à cette première étape et résoudre donc

$$\dot{\alpha}_1 = - \frac{4k\alpha_0^2}{m\omega^3} \sin^3 \omega(t + \beta_0) \cos \omega(t + \beta_0) \quad (5.87)$$

$$\dot{\beta}_1 = - \frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta_0). \quad (5.88)$$

Comme α_0 et β_0 ne dépendent pas de t , l'intégration est triviale et donne

$$\alpha_1 = \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^3} \sin^4 \omega(t + \beta_0) + C \quad (5.89)$$

$$\beta_1 = \frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \left\{ \frac{3\omega}{8} (t + \beta_0) - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0)}{4} + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0)}{32} \right\} + C' \quad (5.90)$$

Les constantes d'intégration sont ajustées par les conditions initiales touchant la perturbation. Si par exemple, on dit que la perturbation est *allumée* à $t = 0$, alors pour $t < 0$,

la solution non perturbée prévaut et $\alpha(t \leq 0) = \alpha_0$, $\beta(t \leq 0) = \beta_0$. Donc à $t = 0$, $\alpha_1(0) = \alpha_0$, $\beta_1(0) = \beta_0$, ce qui fixe

$$C = \alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^3} \sin^4 \omega\beta_0 \quad (5.91)$$

$$C' = \beta_0 - \frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \left[\frac{3\omega\beta_0}{8} - \frac{\sin 2\omega\beta_0}{4} + \frac{\sin 4\omega\beta_0}{32} \right] \quad (5.92)$$

et alors

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^3} [\sin^4 \omega(t + \beta_0) + \sin^4 \omega\beta_0] \quad (5.93)$$

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \left\{ \frac{3\omega t}{8} - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0) - \sin 2\omega\beta_0}{4} + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0) - \sin 4\omega\beta_0}{32} \right\}. \quad (5.94)$$

Ci-dessous fixons β_0 pour alléger les expressions. La solution perturbée est obtenue de celle non perturbée en y remplaçant α_1 et β_1 . Nous obtenons

$$q(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \left[\alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega t \right]^{\frac{1}{2}} \times \sin \left(\omega t + \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \left[\frac{3\omega t}{8} - \frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{\sin 4\omega t}{32} \right] \right). \quad (5.95)$$

On voit que l'amplitude, qui était $(\frac{2\alpha_0}{m\omega^2})^{\frac{1}{2}}$ dans le cas non perturbé, a été modifiée, α_1 étant remplacé par

$$\left[\alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega t \right] \quad (5.96)$$

ceci nous donne un test de petitesse de k puisque la quantité est à la puissance $\frac{1}{2}$ et que $q(t)$ doit demeurer réel, donc

$$k < \frac{m\omega^4}{\alpha_0}. \quad (5.97)$$

Pour $k > 0$, l'amplitude décroît. De plus, le comportement qui était harmonique en ω , i.e. $\sin \omega t$ a été modifié en

$$\sin \left(\omega \left(1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^5} \right) t + \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \left[-\frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{\sin 4\omega t}{32} \right] \right) \quad (5.98)$$

où, si on veut encore parler d'une fréquence Ω , on doit définir

$$\Omega \approx \omega \left(1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^5} \right). \quad (5.99)$$

On voit que pour $k > 0$, la fréquence augmente. Il faut aussi préciser que s'ajoute une modulation en $\sin 2\omega t$ et $\sin 4\omega t$. Strictement le mouvement n'est plus harmonique.

Méthode de la moyenne

Elle ne donne pas des résultats aussi détaillés que cette en série mais c'est parfois

suffisant. Sachant que le mouvement non perturbé est ici cyclique de période ($\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, ici) nous remplaçons $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ moyennés sur une période

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{4k}{m\omega^3} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha^2 \sin^3 \omega(t + \beta) \cos \omega(t + \beta) dt \quad (5.100)$$

$$\bar{\beta}_1 = -\frac{2k}{m\omega^4} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha \sin^4 \omega(t + \beta) dt. \quad (5.101)$$

Il est trivial de voir que, ne connaissant pas $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ (c'est ce que nous cherchons), il est difficile sinon impossible de faire les intégrales. C'est pourquoi cette méthode est souvent augmentée de l'approximation itérative, remplaçant α et β dans les intégrales par α_0 et β_0 pour faire un premier calcul de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, le résultat duquel pourra être remplacé dans les intégrales...etc. Au premier ordre nous aurons ici

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\approx -\frac{4k}{m\omega^3} \frac{1}{\tau} \alpha_0^2 \int_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \sin^3 \omega(t + \beta) \cos \omega(t + \beta) dt \\ &\approx -\frac{4k}{m\omega^3} \frac{\omega}{2\pi} \alpha_0^2 \sin^4 \omega(t + \beta) \Big|_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \equiv 0 \end{aligned} \quad (5.102)$$

donc $\bar{\alpha} \approx 0 \implies \alpha = \text{constante} = \alpha_0$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &\approx -\frac{2k}{m\omega^4} \frac{1}{\tau} \alpha_0 \int_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \sin^4 \omega(t + \beta) dt \\ &\approx \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{3\omega(t + \beta_0)}{8} - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0)}{4} + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0)}{32} \right] \Big|_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \\ &\approx \frac{k\alpha_0}{\pi m\omega^4} \left[\frac{3\omega}{8} \frac{2\pi}{\omega} + 0 \right] \Big|_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \approx \frac{3k\alpha_0}{m\omega^4} \end{aligned} \quad (5.103)$$

et donc

$$\beta(t) \approx \frac{3k\alpha_0}{m\omega^4} t + \beta_0. \quad (5.104)$$

Ici, la solution perturbée se lira

$$\begin{aligned} q(t) &\approx \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin \left(\omega t + \beta_0 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} t \right) \\ &\approx \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin \left(\omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^5} \right] t + \beta_0 \right). \end{aligned} \quad (5.105)$$

Le seul effet de la perturbation ici est une modification de la fréquence qui de ω passe à

$$\omega \rightarrow \omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^5} \right] \equiv \Omega \quad (5.106)$$

donc qui augmente si $k > 0$, et qui est d'ailleurs la fréquence Ω déjà obtenue.



Remarque 8

À une énergie E donnée (voir figure 5.1), le mouvement va de $-x_0$ à $+x_0$ avec une fréquence ω . Introduisant le terme quartique diminuera l'amplitude entre $-x_1$ à $+x_1$ tout en affectant la fréquence de $\omega \rightarrow \Omega$.

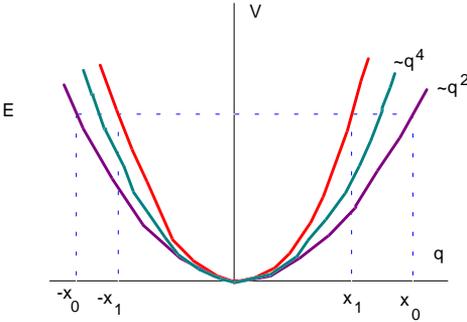


Figure 5.1



6 MOUVEMENT DU SOLIDE

6.1 Degrés de liberté du solide

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des particules ponctuelles en nombre relativement petit. Nous allons maintenant permettre aux corps physiques d'avoir de véritables dimensions physiques, telles des longueurs, largeurs et épaisseurs. Nous allons cependant nous limiter aux corps indéformables, ce qui est une approximation de la réalité physique, mais une approximation souvent très valable. Nous considérerons donc que chaque point du corps solide demeure à distance constante de tout autre point du même corps solide. Il n'y a pas de déformation.

En mécanique classique la structure microscopique du corps solide est sans intérêt. On peut donc le considérer comme constitué d'un grand nombre de *petites* particules ou comme un ensemble continu de matière. Par exemple, la masse d'un tel corps s'écrira

$$M = \sum_i m_i = \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (6.1)$$

où m_i serait la masse de la particule i , constituante du corps solide, et $\rho(\mathbf{x})$ serait une densité continue de masse (les unités de masse par volume). À l'occasion nous utiliserons donc l'une ou l'autre notation. La notation discrète (\sum_i) est parfois plus pédagogique puisqu'elle fait essentiellement la somme sur un grand nombre de particules ponctuelles, concept avec lequel nous sommes maintenant familiers.

Dans l'espace physique à trois dimensions, une particule ponctuelle a trois degrés de liberté. Dans le cas du corps rigide on se convainc rapidement que l'état du solide peut se décrire par la position d'un des points du solide (3 degrés de liberté) et l'orientation du corps rigide (solide) par rapport à un système d'axes fixées en ce point, ce qui implique trois autres degrés de liberté. Au total donc un solide a 6 degrés de liberté. (Il est très avantageux, pour assurer la simplicité des expressions qui vont suivre, de choisir le point dont nous suivons le déplacement et par rapport auquel nous mesurons l'orientation du solide, comme étant le centre de masse du solide). Si on visualise le solide comme étant constitué de N particules, on devrait avoir à priori $3N$ degrés de liberté. Le fait qu'il n'en reste que 6, résulte de l'ensemble de contraintes qui font que chacune de ces particules est toujours à égale distance de chacune des autres.

Pour décrire ces 6 degrés de liberté nous procéderons de la façon suivante. Imaginons un premier système de référence, noté XYZ , fixé dans le laboratoire et présumé inertiel.

Fixons ensuite rigidement au corps en O un nouveau système de référence $x_1x_2x_3$ (voir figure 6.1). Ce système se déplace et tourne avec le corps rigide. Ce n'est donc généralement pas un système inertiel mais comme il est solidaire du solide il apparaît comme immobile à un observateur se trouvant sur le solide. Pour faciliter le travail à venir nous centrerons souvent le système $x_1x_2x_3$ sur le centre de masse du solide, auquel cas \mathbf{R} est la position du centre de masse du solide. \mathbf{r} est la position d'un point P de ce solide, mesurée dans le système inertiel XYZ . Notons par \mathbf{x} la position de ce même point P mesurée dans le système $x_1x_2x_3$. Comme ce dernier est fixé au corps, \mathbf{x} est constant

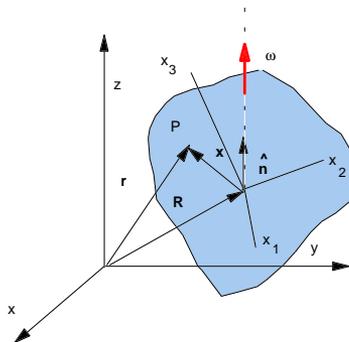


Figure 6.1

(mesuré dans $x_1x_2x_3$). Lorsque le solide se déplace, le point P se déplace. Pour mesurer un déplacement dans le système inertiel, $d\mathbf{r}$, nous le décomposons en déplacement du point O , $d\mathbf{R}$, plus un changement possible d'orientation du solide, $d\varphi$, mesuré par rapport à l'axe de rotation instantanée. Alors

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\varphi \times \mathbf{x} \quad \text{où} \quad d\varphi = \hat{\mathbf{n}}d\varphi \quad (6.2)$$

ce qui nous donne

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (6.3)$$

ou

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}. \quad (6.4)$$

Si \mathbf{R} mesure la position du C.M., i.e. si O est positionné sur le C.M., alors \mathbf{V} est la vitesse de C.M. et correspond à une translation du solide comme un tout. $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse angulaire du solide et sa direction, comme celle de $d\hat{\varphi}$ coïncide avec l'axe de rotation du solide. Notons qu'elle n'est pas constante en général. Comme le système $x_1x_2x_3$ est fixé dans le solide, $\boldsymbol{\Omega}$ est également la vitesse angulaire de la rotation de ce système. Ce résultat ne dépend en aucune façon du fait que nous ayons centré le système $x_1x_2x_3$ en O , le C.M. du solide. Nous aurions pu choisir ici un autre centre O' déplacé de O par une longueur \mathbf{a} au sens où la position \mathbf{x}' du même point P est reliée à \mathbf{x} par

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a}. \quad (6.5)$$

Nous aurions alors au lieu de (6.4)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}' + \mathbf{a}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}. \quad (6.6)$$

D'autre part, à partir de la forme de (6.4) nous pouvons écrire

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{x}' \quad (6.7)$$

ce qui nous force à identifier, \mathbf{v} étant identique à lui-même et \mathbf{a} arbitraire

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}. \quad (6.8)$$

La deuxième de ces équations est importante puisqu'elle nous indique que la vitesse angulaire de rotation est totalement indépendante du système $x_1x_2x_3$ (fixé dans le solide) choisi. À un moment donné, tous ces systèmes tournent donc autour d'axes parallèles les uns aux autres (de direction donnée par celle de $\boldsymbol{\Omega}$) avec une même vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$. Cette propriété *d'absolu* dans la rotation du solide ne se retrouve pas dans la translation du solide puisque $\mathbf{V}' \neq \mathbf{V}$. Notons qu'en général, lorsque le solide se déplace, $\boldsymbol{\Omega}$ n'est constant ni en direction ni en longueur. Il est parfois intéressant de choisir une origine O' telle que $\mathbf{V}' = 0$. Instantanément le mouvement apparaîtra comme une rotation pure autour de l'axe défini par passant par O' évidemment. On appelle cet axe, l'axe de rotation instantané du corps. Cependant à partir de maintenant nous choisirons l'origine O du système $x_1x_2x_3$ comme étant le centre de masse du solide, à moins que la chose ne soit clairement spécifiée.

6.2 L'énergie cinétique et le tenseur d'inertie

Considérons le solide comme étant constitué de points matériels discrets et calculons l'énergie cinétique du solide, évidemment mesurée dans le système inertiel XYZ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{v}^2 \quad (6.9)$$

la somme porte sur tous les points du solide $\sum_a^N \frac{m_a}{2} \mathbf{v}_a^2$ mais pour simplifier l'écriture nous laissons tomber les indices identifiant ces points. Nous nous sommes évidemment placés dans le référentiel inertiel et $v^2 = \mathbf{v}^2$ où \mathbf{v} est défini par l'équation (6.4), ce qui donne

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V}^2 + \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Les vitesses \mathbf{V} et $\boldsymbol{\Omega}$ sont les mêmes pour tous les points et peuvent donc sortir des sommes. Ainsi le premier terme devient

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V}^2 = \frac{\mathbf{V}^2}{2} \sum_{\text{part.}} m = \frac{M \mathbf{V}^2}{2} \quad (6.11)$$

où M = masse totale du solide.

Le deuxième terme devient, par la propriété des produits triples

$$\sum_{\text{part.}} m \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = \sum_{\text{part.}} m \mathbf{x} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega})$$

$$= (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \sum_{\text{part.}} m \mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \quad (6.12)$$

parce que la somme est nulle, ayant choisi l'origine du référentiel $x_1x_2x_3$ au centre de masse du solide. Pour le troisième terme nous développons le carré du produit vectoriel

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \left[\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2 \right]. \quad (6.13)$$

Au total (6.10) devient donc, lorsque $(x_1x_2x_3)$ est centré sur le C.M.,

$$T = \frac{M\mathbf{V}^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \left[\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2 \right]. \quad (6.14)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique de translation du solide. Ce serait le seul terme si toute la masse du solide était concentrée au C.M. Le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation, donc

$$T = T_{\text{CM}} + T_{\text{rot.}} \quad (6.15)$$

Étudions la forme de T_{rot} en décomposant les vecteurs selon les axes $x_1x_2x_3$ puisque T_{rot} est une énergie cinétique de rotation impliquant certains concepts d'inertie qui seraient propres i.e. intrinsèques au solide. Les composantes de $\boldsymbol{\Omega}$ et de \mathbf{x} seront donc selon les axes du référentiel $Ox_1x_2x_3$ (notons que T demeure mesuré dans le système inertiel)

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m [\Omega_i \Omega_i x_l x_l - \Omega_i \Omega_k x_i x_k] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m [\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l x_l - \Omega_i \Omega_k x_i x_k]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Les coordonnées² x_j dépendent de la particule sur laquelle on fait la somme mais $\Omega_i \Omega_k$ n'en dépend pas et peut sortir de la somme sur les particules, ce qui donne

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum_{\text{part.}} m [\delta_{ik} x_l x_l - x_i x_k] \\ &\equiv \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k I_{ik} = \frac{1}{2} \Omega_i I_{ik} \Omega_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T I \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Cette expression a la forme usuelle d'une énergie cinétique mais ce qui le rôle d'inertie est plus compliqué que dans le cas des translations. Ici on l'appelle le tenseur d'inertie, on identifie ses éléments

$$I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m [x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k] = I_{ki}. \quad (6.18)$$

On dit qu'il est un tenseur parce qu'il a deux indices. On peut dès lors lui donner une représentation matricielle

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

² Dans ce chapitre, nous utilisons la notation d'Einstein où un indice répété dans un terme est automatiquement sommé à moins d'avis contraire, ainsi $\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l x_l = \sum_{i,j,l} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l x_l$

Si on écrit aussi

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \implies \Omega^T = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \quad (6.20)$$

alors on peut écrire

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega \quad (6.21)$$

À partir de (6.18) on calcule directement

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(x_2^2 + x_3^2) & -\sum m x_1 x_2 & -\sum m x_1 x_3 \\ -\sum m x_2 x_1 & \sum m(x_1^2 + x_3^2) & -\sum m x_2 x_3 \\ -\sum m x_3 x_1 & -\sum m x_3 x_2 & \sum m(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

où ici, on a alléger la notation par $\sum_{\text{part.}} \rightarrow \sum$. On voit aussi qu'on peut passer à une rotation et un calcul continues où la matière est réputée être distribuée de façon continue dans le solide selon une densité $\rho(\mathbf{x}) = \rho(x_1, x_2, x_3)$. On écrit alors

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [x_i x_l \delta_{ik} - x_i x_k] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.23)$$

Il est possible de choisir le référentiel $Ox_1 x_2 x_3$ en l'orientant de telle sorte que I est diagonal

$$I = \begin{pmatrix} I_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3'} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Les éléments $I_{1'}$, $I_{2'}$ et $I_{3'}$ sont en fait les valeurs propres de la matrice (6.22). Ici nous avons noté prime (') le référentiel (voir figure 6.2) qui garantit que le tenseur d'inertie est diagonal : $Ox_{1'} x_{2'} x_{3'}$. On appelle ces trois directions, $Ox_{1'}$, $Ox_{2'}$ et $Ox_{3'}$ les

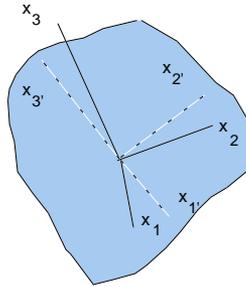


Figure 6.2

axes principaux (d'inertie) du solide et $I_{1'}$, $I_{2'}$ et $I_{3'}$ les moments principaux d'inertie. Si on choisit le référentiel $Ox_1 x_2 x_3$ pour coïncider avec les axes principaux alors T_{rot} devient

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{i'} \Omega_{i'}^2. \quad (6.25)$$

Pour alléger la notation il sera entendu dans ce qui suit que, lorsque les éléments du tenseur d'inertie apparaissent avec un seul indice, c'est que nous avons choisi de faire coïncider le référentiel fixé au corps et les axes principaux. Nous laisserons tomber les

primés (') pour écrire simplement

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_i \Omega_i^2. \quad (6.26)$$

6.3 Parenthèse sur les axes principaux et le tenseur d'inertie

Il n'est pas nécessaire de diviser à priori la direction des axes principaux. Lorsque le solide a certaines symétries la direction de ces axes est parfois évidente. Il est toujours possible de choisir arbitrairement un système $Ox_1x_2x_3$ et de déterminer par rapport à ce dernier la direction des axes principaux.

On calcule d'abord les éléments de I par rapport au système d'axes choisi, ce qui nous donne I_{ik} qu'on retrouve en (6.18), (6.22) ou (6.23). On remarque d'abord que la matrice (6.22) est symétrique i.e.

$$I_{ik} = I_{ki}; \quad I_{ik} \text{ réel} \quad (6.27)$$

Les valeurs propres de cette matrice seront tout simplement les éléments I_1, I_2 et I_3 de I sous sa forme diagonale, I_D .

De façon plus technique nous dirons qu'il existe une matrice U , avec son inverse U^{-1} , telle que $U^{-1} = U^\dagger$: unitaire

$$UIU^{-1} = I_D : \quad \text{diagonale.} \quad (6.28)$$

Reprenant l'expression pour T_{rot}

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \Omega^\dagger I \Omega = \frac{1}{2} \Omega^\dagger U^{-1} UIU^{-1} U \Omega \\ &= \frac{1}{2} \Omega^\dagger U^{-1} I_D U \Omega = \frac{1}{2} \Omega'^\dagger I_D \Omega' \end{aligned} \quad (6.29)$$

où $\Omega' = U \Omega$.

Strictement ceci termine l'opération puisqu'en (6.29) nous avons T_{rot} écrit en utilisant I_D . On voit qu'ici

$$\Omega' = U \Omega \implies \begin{pmatrix} \Omega'_1 \\ \Omega'_2 \\ \Omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= u_{11}\Omega_1 + u_{12}\Omega_2 + u_{13}\Omega_3 \\ \Omega'_2 &= u_{21}\Omega_1 + u_{22}\Omega_2 + u_{23}\Omega_3 \\ \Omega'_3 &= u_{31}\Omega_1 + u_{32}\Omega_2 + u_{33}\Omega_3. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Le système prime qui définit les axes principaux du solide est obtenu du système original par une rotation du système original à condition que l'origine O ait été choisie comme le C.M. du solide (voir figure 6.3). Autrement il faudra effectuer d'abord une translation vers le C.M. Évidemment le vecteur ne bouge pas lors de cette rotation qui n'est en fait qu'un simple réalignement des axes du référentiel fixé dans le solide. Il n'a rien à voir avec le mouvement de rotation du solide.

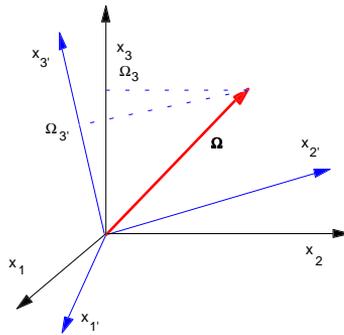


Figure 6.3

Techniquement tout repose sur la matrice U , ce qui est relativement simple puisque les colonnes de U^{-1} sont tout simplement les vecteurs propres de I . Ceci se vérifie immédiatement en rappelant (6.28)

$$UIU^{-1} = I_D \quad (6.32)$$

qu'on multiplie par la gauche par U^{-1} ce qui donne

$$IU^{-1} = U^{-1}I_D. \quad (6.33)$$

Il s'agit d'une égalité entre 2 matrices 3×3 . Écrivant v_{ij} pour les éléments U^{-1} nous explicitons (6.33) mais en ne spécifiant ici que la première colonne des deux matrices produites ce qui donne

$$\begin{pmatrix} I_{11}v_{11} + I_{12}v_{21} + I_{13}v_{31} & \cdots & \cdots \\ I_{21}v_{11} + I_{22}v_{21} + I_{23}v_{31} & \cdots & \cdots \\ I_{31}v_{11} + I_{32}v_{21} + I_{33}v_{31} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 v_{11} & \cdots & \cdots \\ I_1 v_{21} & \cdots & \cdots \\ I_1 v_{31} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Si deux matrices sont égales c'est que tous leurs éléments sont égaux et par extension les éléments d'une colonne de l'une sont égaux aux éléments d'une colonne de l'autre. Considérons la première colonne de chacune des deux matrices ci-dessus et égalons l'une à l'autre. On constate immédiatement qu'il est possible d'écrire l'égalité entre ces deux colonnes sous la forme

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Si nous écrivons V_1 pour la 1ère colonne de U^{-1} i.e. (ne pas confondre V_1 avec une composante du vecteur vitesse)

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

cette équation s'écrit

$$IV_1 = I_1 V_1; \quad I_1 = \text{un nombre} \quad (6.37)$$

où I_1 est la 1ère valeur propre de la matrice I alors que V_1 est un vecteur colonne. C'est l'équation type du problème aux valeurs propres. Pour résoudre on obtient d'abord les valeurs propres de I et ensuite on obtient les éléments (non normalisés) de V_1 à l'aide de (6.35) ou (6.37). Nous aurons ici 3 équations de ce type à partir de (6.34), une pour chaque valeur propre I_i avec son vecteur propre V_i qui constitue la $i^{\text{ième}}$ colonne de U^{-1} .

La séquence d'opérations est donc la suivante.

1. On choisit un référentiel centré sur le C.M., $Ox_1x_2x_3$ par rapport auquel on calcule les I_{ij} ; $i, j = 1, 2, 3$, éléments de I .
2. On calcule les valeurs propre de cette matrice, ce qui nous donne I_D qui n'a que les éléments diagonaux I_1, I_2 et I_3 .
3. On calcule les vecteurs propres V_k de I , chacun correspondant à une des 3 valeurs propres, I_1, I_2 et I_3 .
4. Les V_k sont les colonnes de la matrice U^{-1} que nous pouvons inverser pour avoir la

matrice U , une matrice qui représente une rotation.

5. Pour obtenir les axes principaux $Ox_1x_2x_3$ il suffit de soumettre le référentiel $Ox_1x_2x_3$ à la rotation représentée par U .



Remarque 9

La rotation représentée par U est généralement par rapport à un axe qui n'est pas un des axes de $Ox_1x_2x_3$ ni de Ox_1', x_2', x_3' . Il est cependant toujours possible d'opérer cette rotation à l'aide de 3 rotations successives faites autour d'axes choisis. La façon la plus courante est celle des angles d'Euler

Laissant tomber les prime (') et supposant que les axes du système $Ox_1x_2x_3$ coïncident avec les axes principaux la définition générale des éléments de I_{ij} en (6.18, 6.22, 6.23) est toujours valide sauf que seuls les termes $j = i$ ne seront pas nuls, nous les avons notés avec un seul indice

$$I_i = I_{ii} = \sum_{\text{part.}} m(x_l x_l - x_i^2) \quad (6.38)$$

où il y a une somme sur l mais pas sur i . Ainsi trivialement

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{\text{part.}} m(x_2^2 + x_3^2) \\ I_2 &= \sum_{\text{part.}} m(x_1^2 + x_3^2) \\ I_3 &= \sum_{\text{part.}} m(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (6.39)$$

et on note qu'aucun des ces I_i n'est plus grand que la somme des deux autres; tout au plus est-il égal à cette somme. Lorsque $I_1 = I_2 = I_3$ on dit que nous avons une toupie sphérique. Si deux seulement des moments d'inertie sont égaux, on parle d'une toupie symétrique et si les trois sont différents, d'une toupie asymétrique.

Une remarque importante s'impose ici. Nous avons réussi en (6.14) et (6.17) à écrire

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \quad (6.40)$$

expression qui n'est valide que si le référentiel intrinsèque est centré sur le centre de masse, O . Cependant, pour calculer les I_{ik} , il peut s'avérer utile d'utiliser d'abord un autre référentiel, également intrinsèque mais centré sur une autre origine O' et dont les axes sont parallèles au premier. Il s'agit donc ici d'une translation du référentiel et non d'une rotation (voir figure 6.4). Appelons \mathbf{a} le déplacement OO' , de telle sorte que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a} \implies x_i = x'_i + a_i. \quad (6.41)$$

On sait que

$$I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m(x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (6.42)$$

Par rapport au système prime nous aurons

$$I'_{ik} = \sum_{\text{part.}} m(x'_l x'_l \delta_{ik} - x'_i x'_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\text{part.}} m [(x_l + a_l)(x_l + a_l) \delta_{ik} - (x_i + a_i)(x_k + a_k)] \\
&= \sum_{\text{part.}} m [x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k] + 2a_l \delta_{ik} \sum_{\text{part.}} m x_l \\
&\quad + a_i \sum_{\text{part.}} m x_k - a_k \sum_{\text{part.}} m x_i + (a_l a_l \delta_{ik} - a_i a_k) \sum_{\text{part.}} m \\
&= I_{ik} + M(a_l a_l \delta_{ik} - a_i a_k) \tag{6.43}
\end{aligned}$$

où $\sum_{\text{part.}} m x_i = 0$ et $\sum_{\text{part.}} m = M$. C'est le fameux *théorème des axes parallèles*.

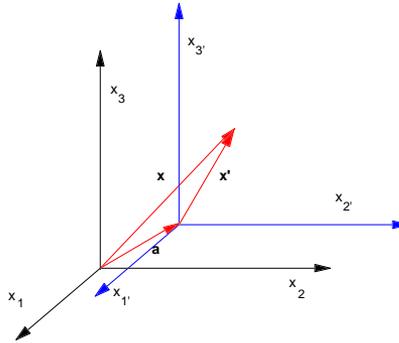


Figure 6.4

Nous savons donc écrire l'énergie cinétique du solide en (6.40). Si le référentiel intrinsèque correspond aux axes principaux alors cette expression se réduit à

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_i \Omega_i^2. \tag{6.44}$$

Deux types de forces peuvent être présentes dans le système; des forces de cohésion particule-particule dans le solide dont le résultat global sur le solide est nul à cause du principe d'action-réaction comme nous l'avons vu au chapitre I. Il reste les forces externes et si ces forces sont dérivables d'un potentiel U alors on peut écrire le Lagrangien

$$L = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_i \Omega_i^2 - U. \tag{6.45}$$

Nous y reviendrons plus tard.

6.4 Le moment cinétique/angularaire du solide

Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel il est défini. Dans l'étude du mouvement du solide il apparaît raisonnable de choisir ce point à l'origine du référentiel intrinsèque qu'en (6.45) nous avons choisi pour coïncider avec le C.M. du solide (voir figure 6.5). Nous avons noté \mathbf{x} la position d'un point P mesurée à partir de O . Le moment cinétique de ce point matériel est

$$\mathbf{l}_p = m \mathbf{x} \times \mathbf{v}. \tag{6.46}$$

Ici, la vitesse \mathbf{v} est uniquement celle due à la rotation du solide, rotation que se fait

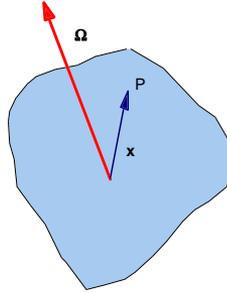


Figure 6.5

à la vitesse de rotation instantanée et par conséquent \mathbf{v} est ici $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{x}$ qui ne permet pas de changer la longueur de \mathbf{x} comme il se doit puisque nous avons un solide rigide et donc, sommant sur tous les points matériels nous aurons pour le moment cinétique

$$\mathbf{l} = \sum_{\text{part.}} m \mathbf{x} \times (\Omega \times \mathbf{x}). \quad (6.47)$$

Explicitant chaque composante du triple produit vectoriel nous avons

$$\begin{aligned} l_i &= \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \Omega_i - x_i x_k \Omega_k) \\ &= \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \delta_{ik} \Omega_k - x_i x_k \Omega_k) \\ &= \Omega_k \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k) \end{aligned} \quad (6.48)$$

et donc

$$l_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (6.49)$$

Évidemment si nous avons choisi de faire coïncider le référentiel intrinsèque avec les axes propres du solide nous aurions simplement

$$l_1 = I_1 \Omega_1, \quad l_2 = I_2 \Omega_2, \quad l_3 = I_3 \Omega_3. \quad (6.50)$$

On voit donc qu'en général (sauf pour une toupie sphérique) la direction de \mathbf{l} ne correspond pas à celle de Ω . C'est là une différence *dramatique* avec le mouvement d'une particule et ce seul fait introduit déjà des différences notables entre le mouvement de la particule et celui du solide. Étudions brièvement la situation qui prévaut dans trois cas simples sans forces extérieures, i.e. le Lagrangien se limite à l'énergie cinétique. Dans un tel cas on peut faire coïncider les origines des référentiels inertiel et intrinsèque puisque le C.M. ne sera soumis à aucune accélération: $\mathbf{V} = 0$.

Exemple 6.1

La toupie sphérique (essentiellement une sphère) a ses trois moments égaux $I_1 = I_2 = I_3 = I$ et par conséquent

$$\mathbf{l} = I \Omega. \quad (6.51)$$



En l'absence de force/torque extérieur, \mathbf{l} est une constante. Il en va de même de $\mathbf{\Omega}$. La toupie sphérique libre tourne tout simplement par rapport à un axe fixe défini par \mathbf{l} ou $\mathbf{\Omega}$ (le même axe) à vitesse constante .



Exemple 6.2

Un autre cas simple est le rotateur où la masse du solide est essentiellement répartie sur une droite. Plaçant les axes principaux comme sur la figure 6.6 on voit que $I_3 = 0$, $I_1 = I_2 = I$. De plus

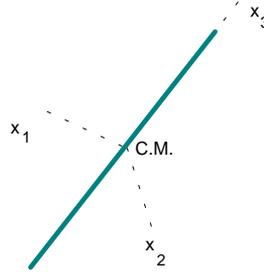


Figure 6.6

$\Omega_3 = 0$ puisque la rotation d'une droite sur son axe est comme la rotation d'un point et n'a pas de sens (du moins classiquement). La vitesse de rotation n'a donc que des composantes Ω_1 et Ω_2 et $\mathbf{\Omega}$ se trouve dans le plan x_1Ox_2 comme d'ailleurs \mathbf{l} et $\mathbf{\Omega}$ sont colinéaires comme dans le cas de la toupie sphérique.



Exemple 6.3

La toupie symétrique (voir figure 6.7) est un véritable objet en trois dimensions (un beigne, un ballon de football sont des toupies symétriques) caractérisé par un axe de symétrie que nous choisissons comme Ox_3 . Ainsi $I_1 = I_2 \neq I_3$ avec I_1, I_2 et $I_3 \neq 0$. En l'absence de torque i.e. en rotation libre $\mathbf{l} = \text{constante}$. Pour décrire qualitativement le mouvement nous figeons le temps au moment où le plan $\mathbf{l}Ox_3$ est perpendiculaire à l'axe Ox_2 i.e. correspond au plan x_1Ox_3 . À ce moment $l_2 = 0$ mais puisque $l_2 = I_2\Omega_2$ nous avons $\Omega_2 = 0$. Donc le vecteur $\mathbf{\Omega}$ est alors également dans le plan $\mathbf{l}Ox_3$. La propriété que $\mathbf{l}, \mathbf{\Omega}$ et Ox_3 sont dans le même plan a été obtenue facilement à la suite d'un choix particulier d'orientation de l'axe Ox_2 mais une propriété indépendante de ce choix et reste vraie pour tout le mouvement. Ainsi tout point sur l'axe de symétrie Ox_3 , identifié par \mathbf{x}_a a une vitesse donnée par $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}_a$ qui sera nécessairement perpendiculaire au plan $\mathbf{l}\mathbf{\Omega}Ox_3$ et puisque \mathbf{l} est constant, en longueur et en direction le mouvement sera forcément tel que l'axe de symétrie tournera autour de la direction donnée par \mathbf{l} , l'axe Ox_3 , ce dernier dessinant un cône autour de la direction constante, \mathbf{l} . Ce mouvement est appelé précession naturelle de la toupie symétrique. Le mouvement de la toupie se décompose donc en rotation de la toupie autour de son axe Ox_3 plus la précession autour de \mathbf{l} , on décompose $\mathbf{\Omega}$, qui est dans le plan $\mathbf{l}Ox_3$, selon Ox_3 et selon \mathbf{l} qui ne sont en général pas orthogonaux. Pour faire le calcul, on se replace au moment où Ox_1 est dans le plan $\mathbf{l}\mathbf{\Omega}$. Selon la figure 6.8, clairement

$$\cos \chi = \frac{\Omega_1}{\Omega_{pr}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad (6.52)$$

donc

$$\Omega_1 = \Omega_{pr} \sin \theta \implies \Omega_{pr} = \frac{\Omega_1}{\sin \theta} \quad (6.53)$$

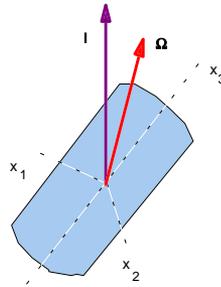


Figure 6.7

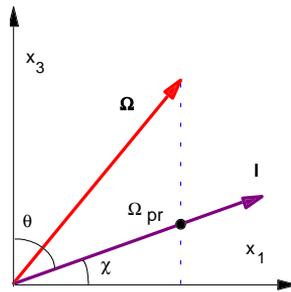


Figure 6.8

Nous avons également (voir figure 6.9)

$$\sin \theta = \frac{l_1}{l} = \frac{I_1 \Omega_1}{l} \quad (6.54)$$

donc

$$\Omega_{pr} = \Omega_1 \frac{l}{I_1 \Omega_1} \quad (6.55)$$

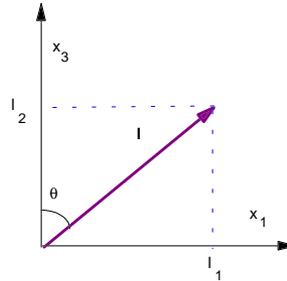


Figure 6.9

6.5 Approche vectorielle et les équations d'Euler

En pratique on cherche toujours l'approche la plus simple. Par exemple si le solide étudié n'est pas attaché en un point alors on utilisera comme point d'ancrage du système intrinsèque celui qui décompose l'énergie cinétique en un terme de translation plus un terme de rotation. Évidemment si le solide a un point fixé dans un référentiel inertiel, un tel point devient naturel pour définir une origine.

Il n'en demeure pas moins que pour établir des équations de mouvement nous devons nous référer à un référentiel inertiel, quitte à traduire ensuite en termes de quantités mesurées dans un référentiel non inertiel si on choisit de le faire. Notre solide a 6 degrés de liberté que nous avons noté en page 99 par X, Y, Z, x_1, x_2, x_3 . Donc en principe 6 équations de mouvement. Nous les établirons ici vectoriellement, à Newton en considérant $\dot{\mathbf{P}}$ et $\dot{\mathbf{l}}$. Rappelons que \mathbf{P} est le moment linéaire total

$$\mathbf{P} = \sum_{\text{part.}} \mathbf{p} = M\mathbf{V} = \mathbf{P}_{\text{CM}}. \quad (6.56)$$

Nous avons déjà vu au chapitre 1 que

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} : \text{ la force extérieure.} \quad (6.57)$$

On solutionne ce problème exactement comme dans la mécanique d'une particule. Il n'y a rien de neuf ici. Considérons maintenant $\dot{\mathbf{l}}$, i.e. la variation dans le temps du moment cinétique/angularaire. Dans un référentiel inertiel ou du *laboratoire* que nous notons par l'indice L

$$\dot{\mathbf{l}} \Big|_L = \frac{d\mathbf{l}}{dt} \Big|_L = \mathbf{N} \quad (6.58)$$

où \mathbf{N} est le torque extérieur. Nous référant toujours à la figure 6.1 de la page 99 nous pouvons écrire

$$\mathbf{l}|_L = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{l}|_{SF} \quad (6.59)$$

où $\mathbf{l}|_{SF}$ est mesuré par rapport au point O du solide qui sert à y ancrer le référentiel intrinsèque mais le F de l'indice SF signifie que les composantes de sont prises par rapport à un référentiel fixe (F), i.e. qui ne tourne pas avec le solide. À ce point-ci cette nuance n'est pas significative puisque a une existence physique indépendante du référentiel par rapport auquel nous en mesurons les composantes. Par contre, dans ce qui suit nous allons le dériver par rapport au temps et là ça deviendra significatif, parce que dans un premier temps nous voulons éviter les dépendances dans le temps provenant de la rotation des axes. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{l}}|_L &= \underbrace{\dot{\mathbf{R}} \times M\mathbf{V}}_{=0 \text{ pq } \dot{\mathbf{R}}=\mathbf{V}} + \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{l}}|_{SF} = \mathbf{N} \\ &= \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{l}}|_{SF} = \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Ici nous allons nous limiter aux cas où $\dot{\mathbf{V}} = 0$, ce qui veut dire que $\mathbf{V} = \text{constante}$ ou $\mathbf{V} = 0$, ce dernier cas étant utile lorsque le solide a un point fixe dans un référentiel inertiel. Nous gardons donc

$$\dot{\mathbf{l}}|_{SF} = \mathbf{N}. \quad (6.61)$$

Nous avons cependant pris l'habitude de décomposer \mathbf{l}_S selon un système d'axes qui tourne avec le solide avec la vitesse instantanée $\boldsymbol{\Omega}$. Il s'agit toujours du même vecteur, qui a toujours la même réalité physique mais tout simplement dans le calcul de la dérivée par rapport au temps de ses composantes, nous devons maintenant tenir compte du fait que ces axes tournent. Ils sont donc accélérés et de ce fait le référentiel n'est par inertiel. Il a été vu en Mécanique Classique I que nous avons alors

$$\dot{\mathbf{l}}|_{SF} = \dot{\mathbf{l}}|_S + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}_S = \mathbf{N}. \quad (6.62)$$

Gardant en mémoire que nous mesurerons toujours les composantes de \mathbf{l}_S selon les axes du référentiel intrinsèque qui tourne avec le solide, nous laissons tomber l'indice S et nous écrivons simplement

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l} = \mathbf{N}. \quad (6.63)$$

Si les axes du système inertiel coïncident avec les axes principaux nous avons

$$l_i = I_i \Omega_i \quad (\text{pas de somme sur } i). \quad (6.64)$$

Ceci permet d'écrire (6.63)

$$I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k I_k = N_i \quad (\text{pas de somme sur } i) \quad (6.65)$$

où ϵ_{ijk} est le "tenseur antisymétrique". En termes plus explicites nous avons ici 3 équations

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= N_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Ce sont les équations d'Euler

Évidemment s'il n'y a aucun torque extérieur, i.e. $\mathbf{N} = 0$ alors (6.66) se réduit à

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= 0 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= 0 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

À l'aide de ces équations voyons si nous pouvons refaire le problème de la toupie symétrique de la page 110. Rappelons que nous avons $I_1 = I_2 \neq I_3 \neq 0$. Avec $I_1 = I_2$, (6.67) nous donne

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = 0 \implies \Omega_3 = \text{constante}. \quad (6.68)$$

De plus les deux premières équations de (6.67) deviennent

$$\dot{\Omega}_1 = \omega \Omega_2 \quad (6.69)$$

$$\dot{\Omega}_2 = \omega \Omega_1 \quad (6.70)$$

où $\omega = \Omega_3 \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}$, et

$$\ddot{\Omega}_1 = \omega \dot{\Omega}_2 \quad (6.71)$$

$$= \omega^2 \Omega_1 \quad (6.72)$$

et donc

$$\Omega_1(t) = A \cos(\omega t + \beta) \quad (6.73)$$

$$\Omega_2(t) = A \sin(\omega t + \beta) \quad (6.74)$$

Donc $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$ une constante qui est la longueur de la projection de la vitesse angulaire dans le plan $x_1 O x_2$ (voir figure 6.10). D'autre part Ω_3 (projection de $\mathbf{\Omega}$ sur l'axe de la toupie) est une constante donc c'est l'ensemble de $\mathbf{\Omega}$ qui tourne autour de l'axe de la toupie à vitesse angulaire ω . A première vue ce résultat ne semble pas correspondre au résultat de la page 110 mais on s'intéressait alors à la vitesse de précession de l'axe Ox_3 par rapport à un axe fixe donné par la direction de \mathbf{l} . Ici nous avons tout exprimé (tous les vecteurs) selon leur composantes mesurées sur des axes tournants. Il faudrait savoir faire le bien entre les deux. C'est ce que la méthode des angles d'Euler va nous apprendre à faire.

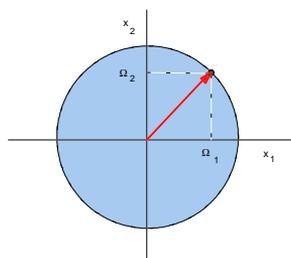


Figure 6.10

En première approximation on peut appliquer ce même genre de raisonnement au mouvement de la terre si on considère que (le torque dû à) la force soleil-terre reste faible,

donc $\mathbf{V} \approx 0$ est une approximation raisonnable. Aucun torque extérieur ne s'applique dans ce cas et on peut utiliser (6.67). C'est que la terre n'est pas tout-à-fait sphérique (ni rigide) de telle sorte que

$$I_2 \approx I_1 < I_3 \quad (6.75)$$

du fait de l'aplatissement de la terre si on prend l'axe Ox_3 comme son axe de rotation.

En fait

$$\frac{I_2 - I_3}{I_2} \approx -0.003 \quad (6.76)$$

et par conséquent, appliquant les résultats du problème précédent nous avons une fréquence

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx -0.003\Omega_3 \quad (6.77)$$

or $\frac{2\pi}{\Omega_3} \approx 1$ jour et par conséquent on devrait avoir

$$\frac{2\pi}{\omega} \approx 333 \text{ jours.} \quad (6.78)$$

De fait, un tel mouvement est observé mais son amplitude est très faible, l'amplitude du déplacement du pôle étant de l'ordre de 5m. D'autre part, la période est réellement ~ 427 jours mais cette différence est imputable au fait que la terre n'est ni rigide ni uniforme.

6.6 Angles d'Euler et approche Lagrangienne

Il nous manque encore un outil, celui qui nous permettrait de faire systématiquement le passage entre référentiels tournants et immobiles. Ce même outil faciliterait aussi l'écriture d'un Lagrangien. Ici nous ne nous intéressons qu'aux rotations. Nous faisons donc coïncider les origines de $OXYZ$ et de $Ox_1x_2x_3$. Ceci semble indiquer que $\mathbf{V} = 0$ mais en fait s'applique tant que O peut être l'origine d'un référentiel $Ox_1x_2x_3$ de $OXYZ$ c'est une rotation. Cette rotation s'effectue instantanément par rapport à un axe. Malheureusement cet axe peut varier en direction avec le temps. Les angles d'Euler permettent de représenter cette rotation (en fait toute rotation) comme une séquence de trois rotations successives mais par rapport à des axes dont il nous est possible de garder la trace.

Sur la figure 6.11 nous avons indiqué le repère fixe $OXYZ$ et le repère tournant $Ox_1x_2x_3$. On y remarque de plus l'axe ou la droite ON qui est la droite de contact entre les plans XOY et x_1Ox_2 . On l'appelle la ligne nodale. L'angle φ est l'angle entre l'axe OX et cette ligne nodale suite à une rotation dans le plan XOY , i.e. par rapport à l'axe OZ . L'angle ψ est l'angle entre cette même ligne nodale et l'axe Ox_1 , mesuré dans le plan x_1Ox_2 , i.e. par rapport à l'axe Ox_3 . Quant à l'angle θ , c'est simplement l'angle entre l'axe OZ et l'axe Ox_3 , il correspond à une rotation par rapport à l'axe ON . Ce sont ces axes par rapport auxquels sont effectuées les rotations que nous avons représentés par $\dot{\varphi}$, $\dot{\chi}$ et $\dot{\theta}$. Décomposant ces trois vecteurs vitesse selon les axes mobiles de $Ox_1x_2x_3$ nous avons

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi; \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta} \sin \psi; \quad \dot{\theta}_3 = 0 \quad (6.79)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi; \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi; \quad \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta \quad (6.80)$$

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 = 0; \quad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi} \quad (6.81)$$

Les composantes Ω_1 , Ω_2 , et Ω_3 de $\boldsymbol{\Omega}$ sont simplement les sommes des composantes

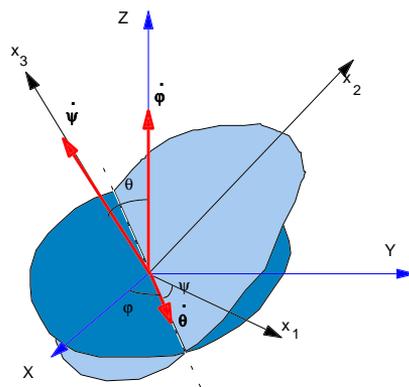


Figure 6.11

respectives. Par exemple

$$\Omega_1 = \dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1, \quad (6.82)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Nous avons maintenant complété l'élaboration des outils qui sont nécessaires pour attaquer plusieurs problèmes impliquant le mouvement du solide. En choisissant les axes $Ox_1x_2x_3$ comme les axes propres du solides, nous pouvons spécialiser ces expressions pour écrire T_{rot} en fonction des angles d'Euler. Dans ce cas nous avons

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \Omega_1^2 + \frac{I_2}{2} \Omega_2^2 + \frac{I_3}{2} \Omega_3^2. \quad (6.84)$$

Par exemple, pour la toupie symétrique où $I_1 = I_2 = I_3 = I$ nous avons

$$T_{\text{rot}} = \frac{I}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta \right). \quad (6.85)$$

Pour la toupie symétrique où $I_1 = I_2 \neq I_3$ nous avons

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2. \quad (6.86)$$

6.7 Exemple



Comme exemple d'application retournons au cas de la toupie symétrique libre $I_1 = I_2 \neq I_3$. Choisissons l'axe OZ du référentiel pour qu'il coïncide avec la direction de \mathbf{l} donc

$$\mathbf{l} = l\hat{\mathbf{z}} : \quad \text{une constante.} \quad (6.87)$$

Trivialement

$$l_3 = l \cos \theta = I_3 \Omega_3. \quad (6.88)$$

Le rôle du Lagrangien sera joué par T_{rot} de la toupie symétrie ci-dessus

$$L = T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2. \quad (6.89)$$

On constate que ψ et φ sont cycliques et par conséquent p_ψ et p_φ sont des constantes

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \underbrace{\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)}_{\Omega_3} = I_3 \Omega_3 = \text{constante} \quad (6.90)$$

puisque pour des variables cyclique $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{dp_\psi}{dt} = 0$. Par conséquent $l \cos \theta = I_3 \Omega_3$ est une constante, donc $\cos \theta$ est une constante, donc θ est constant. Calculant

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \cos \theta \\ &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \Omega_3 \cos \theta = \text{constante} \end{aligned} \quad (6.91)$$

où I_1 , θ et $I_3 \Omega_3$ sont des constantes donc $\dot{\varphi} = \text{constante}$. L'angle φ indique une rotation

du référentiel intrinsèque, donc du solide, par rapport à un axe OZ fixe choisi dans la direction de \mathbf{l} . C'est donc une précession du solide ou si on préfère de l'axe de symétrie Ox_3 du solide par rapport à cet axe fixe. De toute évidence il s'agit de la même précession que celle étudiée en page 110. Elle est toutefois différente de celle étudiée en page 114 où on étudiait une précession de l'axe de rotation instantanée par rapport à l'axe Ox_3 i.e. par rapport à l'axe de symétrie du solide. Dans ce dernier cas nous avons vu que l'axe de rotation de la terre, qui ne correspond pas à l'axe de symétrie de la terre (axe des pôles), tourne autour de cet axe de symétrie avec une période de rotation de 1 an. Ceci n'interdit pas à l'axe de symétrie de la terre de précesser par rapport à un axe approximativement fixe qui serait celui du moment angulaire. Une précession libre de ce type se ferait avec une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Il convient donc d'étudier celle-ci d'un peu plus près. En fait nous connaissons la réponse

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{I_1}; \quad l \text{ et } I_1 = \text{constantes.} \quad (6.92)$$

Le vecteur \mathbf{l} est constant et on peut le décomposer selon le système d'axes que l'on veut. Choisissons le référentiel intrinsèque nous savons que

$$\mathbf{l} = I_1 \boldsymbol{\Omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\Omega}_2 + I_3 \boldsymbol{\Omega}_3 \quad (6.93)$$

où $\boldsymbol{\Omega}_i = \Omega_i \hat{\mathbf{x}}_i$. Or ces trois axes sont orthogonaux et ici $I_2 = I_1$, donc

$$l^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = I_1^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3 \Omega_3^2 = \text{constante} \quad (6.94)$$

que l'on peut récrire en fonction des angles d'Euler

$$l^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = I_1^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3^2 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 = \text{constante} \quad (6.95)$$

où $\dot{\theta} = 0$ ($\theta = \text{constante}$) et nous savons déjà par la définition de p_ψ que la deuxième terme est simplement égal à $I_3 \Omega_3^2 = l_3^2$, donc

$$l^2 = I_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + l_3^2. \quad (6.96)$$

Sachant que $l_3 = l \cos \theta$ et isolant $\dot{\varphi}^2$ nous obtenons

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2 (1 - \cos^2 \theta)}{I_1^2 \sin^2 \theta} = \frac{l^2}{I_1^2} \quad (6.97)$$

ou encore

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{I_1} = \frac{l_3}{I_1 \cos \theta} = \frac{I_3}{I_1} \frac{\Omega_3}{\cos \theta}. \quad (6.98)$$

Par exemple, lorsque $I_1 \approx I_3$ et que la vitesse de rotation est essentiellement $\omega \approx \Omega_3$ (le cas de la terre) alors

$$\dot{\varphi} \approx \frac{I_3}{I_1} \omega \approx \omega. \quad (6.99)$$

Pour la terre $\omega \approx \frac{2\pi}{\text{jour}}$. Ainsi dans le cas libre il y a une précession de l'axe de symétrie par rapport à un axe dont la direction est donnée par le vecteur moment angulaire constant \mathbf{l} , et cette précession a une vitesse angulaire donnée par $\dot{\varphi}$. Dans le cas de la terre cette précession fait que l'axe de symétrie de la terre tourne autour de $\mathbf{l} \sim$ une fois par jour. Dans le cas de la terre, il y a une autre précession causée par un torque cette fois, résultant de l'action de la lune et du soleil sur une terre non sphérique. Cette précession, dite des équinoxes est de plus grande amplitude mais a une période d'environ 26,000 ans. Elle est donc faible et il était raisonnable en première approximation de la négliger et de parler

ce cas libre.

La situation n'est pas encore lumineuse. En effet en page 114 nous avons étudié la précession libre à l'aide des équations d'Euler et obtenu une période de précession de l'ordre d'une année pour la terre. C'est suffisamment différent de la période d'environ une journée obtenue ci-dessus, apparemment dans les mêmes conditions, pour se poser la question de la cohérence entre ces deux résultats. Physiquement, la situation est effectivement différente. La période d'environ 1 journée ci-dessus est celle de la précession de l'axe de symétrie de la terre par rapport à l'axe défini par la direction de \mathbf{l} . En page 114 nous avons étudié la précession du vecteur $\boldsymbol{\Omega}_\perp$, tel que

$$\boldsymbol{\Omega}_\perp = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_\perp + \boldsymbol{\Omega}_3 \quad (6.100)$$

par rapport à l'axe Ox_3 , lui-même mobile. Cette précession apparaît dans la dépendance dans le temps de Ω_1 et Ω_2

$$\Omega_1 = A \sin(\Omega_{\text{pr}} t + \delta) \quad (6.101)$$

$$\Omega_2 = A \cos(\Omega_{\text{pr}} t + \delta). \quad (6.102)$$

Étudions donc ici ce que nous obtenons pour $\Omega_1(t)$. De (6.83)

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi. \quad (6.103)$$

Ici $\theta = \text{constante} = \theta_0$, donc $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = \frac{l}{I_1}$ et donc

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi = \frac{l}{I_1} \sin \theta_0 \sin \psi. \quad (6.104)$$

Recherche de $\psi(t)$:

Rappelant la définition de p_ψ déjà obtenue (6.90) nous avons

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ &= I_3 \Omega_3 = l_3 = l \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.105)$$

On peut y isoler $\dot{\psi}$ en remplaçant $\dot{\varphi} = \frac{l}{I_1}$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I_3} \left(l \cos \theta - I_3 \cos \theta \frac{l}{I_1} \right) \quad (6.106)$$

$$= \frac{l \cos \theta}{I_3} \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} = \frac{l_3}{I_3} \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \quad (6.107)$$

avec $l_3 = I_3 \Omega_3$ nous avons

$$\dot{\psi} = \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \implies \psi = \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} t + \psi_0 \quad (6.108)$$

Nous avons donc pour $\Omega_1(t)$

$$\Omega_1(t) = \frac{l}{I_1} \sin \theta_0 \sin \left[\Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} t + \psi_0 \right]. \quad (6.109)$$

Nous identifions donc, comparant (6.109) à (6.101) et (6.102)

$$|A| = \left| \frac{l \sin \theta_0}{I_1} \right|; \quad \delta = \psi_0; \quad |\Omega_{\text{pr}}| = \left| \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \right|. \quad (6.110)$$

Nous avons donc le même résultat pour Ω_2 . Ainsi, le petit vecteur $\boldsymbol{\Omega}_\perp$ dans le plan (non fixe) $x_1 O x_2$ tourne autour de l'axe de symétrie de la terre avec la fréquence Ω_{pr} dont la

période est de l'ordre d'un an.

6.8 Mouvement d'une toupie symétrique pesante à un point fixe

C'est l'exemple typique de tout manuel de mécanique. Ayant complété l'étude du mouvement du solide libre, nous nous attaquons au mouvement du solide soumis à un torque. Pour ce faire nous choisissons l'exemple le plus simple d'une toupie symétrique dont la pointe est fixe et placée dans un champ gravitationnel uniforme. Comme la pointe est fixe, nous allons l'utiliser comme l'origine à la fois pour le système inertiel $OXYZ$ et pour le système intrinsèque $Ox_1x_2x_3$ qui lui, tourne avec la toupie (voir la figure 6.12). À priori ceci semble poser un problème puis que nous avons réussi en (6.40) à séparer T à condition que l'origine du référentiel intrinsèque coïncide avec le C.M. du solide, ce qui n'est pas le cas ici. Par contre ici, les deux origines coïncident et donc $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \mathbf{0}$ et il ne reste que T_{rot} . De plus, le corps étant symétrique, l'énergie cinétique de rotation peut s'écrire

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{I_3}{2} \Omega_3^2 \quad (6.111)$$

avec $I_1 = I_2$ mais ici I_1 n'est pas égal au moment d'inertie calculé par rapport à l'axe principal 1: I_{pr} qui lui, passe par le C.M. Cependant, par le théorème des axes

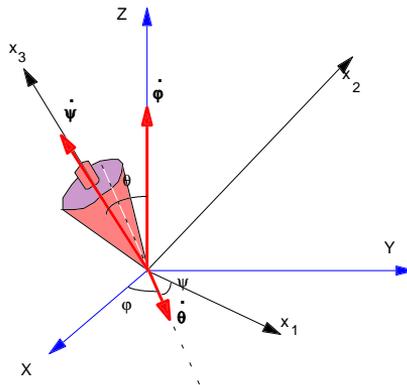


Figure 6.12

parallèles on calcule trivialement que le I_1 qui apparaît ici est simplement

$$I_1 = I_{1\text{pr}} + Mh^2 \quad (6.112)$$

où M est la masse de la toupie et h la distance séparant la pointe du C.M.. Auparavant nous n'avions pas l'habitude de spécifier "pr" pour alléger l'écriture nous retenons le symbole *même si ce n'est pas une moment d'inertie par rapport à un axe principal*.

En terme des angles d'Euler (6.111) est identique à (6.86) puisque $I_2 = I_1$

$$T = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \quad (6.113)$$

tenant compte que I_1 est défini en (6.112). Comme le champ gravitationnel est constant on peut représenter son effet comme une force Mg appliquée au C.M.. Puisque la pointe est fixe, cette force génère un torque ainsi \mathbf{l} n'est plus une constante du mouvement. Pour écrire le Lagrangien nous n'avons besoin que de l'énergie potentielle résultant de la présence de ce champ de force, c'est simplement

$$V = Mgh \cos \theta \quad (6.114)$$

et alors

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta. \quad (6.115)$$

Ici, comme d'ailleurs dans le cas libre, φ et ψ sont cycliques et par conséquent p_φ et p_ψ sont des constantes du mouvement. D'autre part de façon générale $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{N}$ (le torque) où $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Or ici la force est parallèle à OZ et donc $l_z =$ constante et de plus cette force est attachée à un point se trouvant sur l'axe Ox_3 et donc $l_3 =$ constante aussi. Nous avons déjà remarqué (dans le cas libre) en (6.90) que

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ &= I_3 \Omega_3 = l_3 = \text{constante} \end{aligned} \quad (6.116)$$

identifiant p_ψ à l_3 . D'autre part, il est également évident que

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \\ &= l_z = \text{constante.} \end{aligned} \quad (6.117)$$

Combinant ce deux expressions nous obtenons

$$\dot{\varphi} = \frac{l_z - l_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (6.118)$$

et combinant (6.116) et (6.118) nous isolons $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{l_3}{I_3} - \frac{\cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} (l_z - l_3 \cos \theta). \quad (6.119)$$

Si on connaît $\theta(t)$, on peut en principe intégrer (6.118) et (6.119) pour obtenir $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, ce qui donnerait la solution complète du problème. Pour obtenir $\theta(t)$ on peut utiliser l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (6.120)$$

dont on élimine les $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ à l'aide de (6.118) et (6.119) pour avoir une équation différentielle uniquement en $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$. Isolant $\ddot{\theta}$ dans une telle équation nous donne

$$I_1 \ddot{\theta} = \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)(l_z \cos \theta - l_3)}{I_1 \sin^2 \theta} - Mgh \cos \theta \equiv -\frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{eff}}(\theta) \quad (6.121)$$

ce qui nous permettrait d'identifier (par définition) un potentiel efficace pour le mouvement en θ . Est-il besoin de dire qu'intégrer une telle équation différentielle est tech-

niqument assez difficile. Il existe cependant une autre approche qui nous donne V_{eff} plus facilement. Rappelons qu'en présence d'un torque, l n'est plus que une constante de mouvement mais l'énergie E continue à être une constante du mouvement là où

$$E = T + V. \quad (6.122)$$

Utilisant (6.113, 6.114, et 6.116) nous avons

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \underbrace{\frac{l_3^2}{2I_3}}_{= \text{const.}} + - Mgh \cos \theta. \quad (6.123)$$

Définissant $E' = E - \frac{l_3^2}{2I_3}$ et à l'aide de (6.118) nous avons

$$\begin{aligned} E' &= \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta \\ &= T_\theta + V_\theta \end{aligned} \quad (6.124)$$

définissant ainsi V_θ , un potentiel efficace pour l'étude du mouvement en θ . Ici aussi l'intégration mène à des intégrales elliptiques et on perd les propriétés du mouvement dans les méandres techniques. Heureusement il est possible de déterminer qualitativement les propriétés intéressantes de ce mouvement. Avant de procéder cependant remarquons que si $\theta = 0$, V_θ semble exploser à cause du facteur $\sin^2 \theta$ au dénominateur. En fait, à $\theta = 0$ les axes Ox_3 et OZ coïncident, et $l_z - l_3 \cos \theta = 0$. C'est donc une détermination. On peut vérifier, par la règle de l'Hôpital que le terme litigieux de $V_\theta \rightarrow 0$ lorsque $\theta \rightarrow 0$.

Faisons la transformation de variable

$$u = \cos \theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta \quad (6.125)$$

remplaçons dans (6.124) et isolons \dot{u}^2 pour obtenir

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E'}{I_1} - \frac{2Mghu}{I_1} \right) (1 - u^2) - \frac{(l_z - l_3 u)^2}{I_1^2} \quad (6.126)$$

qui est de la forme

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u) (1 - u^2) - (b - au)^2 \equiv f(u). \quad (6.127)$$

La fonction $f(u)$ est un polynôme cubique en u dont le coefficient de u^3 , $\beta > 0$. Donc $f(-\infty) \rightarrow -\infty$ et $f(+\infty) \rightarrow +\infty$ avec deux extrema entre ces deux limites. Puisque $u = \cos \theta$, seul le problème de u compris $u = -1$ et $u = +1$ nous intéresse. D'autre part en (6.127)

$$f(u) = \dot{u}^2 > 0 \quad (6.128)$$

et nous sommes donc limités au domaine entre u_1 et u_2 . Pour qu'une situation physique existe, il faut que ces deux conditions soient remplies. Si tel est le cas et puisque θ marque l'angle entre la verticale et l'axe de symétrie de la toupie, cet axe de symétrie aura, par rapport à la verticale, un angle qui oscillera entre les angles θ_1 et θ_2 où

$$\cos \theta_1 = u_1, \quad \cos \theta_2 = u_2. \quad (6.129)$$

C'est ce qu'on appelle une *nutation*. Rappelons qu'en (6.118) nous avons obtenu pour $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{l_z - l_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (6.130)$$

Selon les conditions initiales qui déterminent l_z et l_3 et selon le domaine de variation permis pour θ , donc pour $\cos \theta$ on peut identifier trois scénarios différents pour

1. $l_z - l_3 \cos \theta > 0$ pour tout le domaine de variation de θ . Alors $\dot{\varphi}$ ne change pas de signe et la précession est continue bien que de vitesse variable. (La même chose est valide si $l_z - l_3 \cos \theta < 0$ dans tout le domaine, on change simplement le signe de $\dot{\varphi}$).
2. $l_z - l_3 \cos \theta > 0$ change de signe entre θ_1 et θ_2 . Parce que la fonction $\cos \theta$ est monotoniquement croissante entre -1 et $+1$, alors $\dot{\varphi}(\theta_1)$ aura le signe inverse de $\dot{\varphi}(\theta_2)$. La précession continuera de se produire mais avec des mouvements de va-et-vient.
3. $l_z - l_3 \cos \theta > 0$ ne change pas de signe dans le domaine $\theta_1 < \theta < \theta_2$ mais s'annule soit à θ_1 soit à θ_2 . Dans ce cas la précession est toujours dans la même direction mais marque un temps d'arrêt lorsque la nutation atteint une de ses valeurs limites (soit θ_1 soit θ_2) là où $\dot{\varphi}$ s'annule.

Il est habituel de représenter ces trois situations à l'aide de figures simples. On dessine une sphère qui est celle que l'extrémité libre de la toupie peut générer (puisqu'elle a une pointe fixe) et sur la surface de cette sphère on trace la trajectoire que la pointe libre y dessinerait. On a alors les trois sphères de la figure 6.13 respectivement.

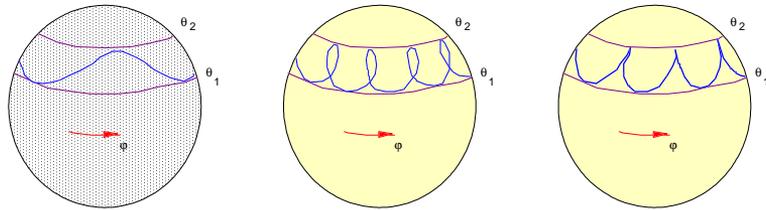


Figure 6.13

Tous ceux qui se sont amusés avec une toupie ont pu constater la chose suivante. Si on démarre la toupie avec une vitesse élevée et une faible inclinaison par rapport à la verticale, alors elle *dort*, son axe demeurant pratiquement vertical. La friction aidant sa vitesse diminue jusqu'à un point où la toupie devient presque brutalement instable. Pour étudier ce phénomène rappelons la définition de V_θ en (6.124)

$$V_\theta = \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta. \quad (6.131)$$

On constate d'abord que $V_\theta(\theta = 0) = Mgh$ et que le deuxième terme de V_θ est répulsif parce que $\cos \theta$ est maximum à $\theta = 0$. Si la position de la toupie est stable à $\theta \approx 0$, c'est que V_θ doit avoir un minimum à $\theta \approx 0$. Pour étudier ce phénomène faisons une

expansion de V_θ valable aux petits angles (Taylor)

$$V_\theta = V_\theta(0) + \theta \left. \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2} \left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} + \dots \quad (6.132)$$

Se rappelant qu'à $\theta = 0$, OZ et Ox_3 coïncident, donc $l_3 = l_z$

$$V_\theta(0) = Mgh = \text{constante sans intérêt} \quad (6.133)$$

$$\left. \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)(l_3 - l_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \right|_{\theta=0} - Mgh \sin \theta \Big|_{\theta=0}. \quad (6.134)$$

Alors utilisant la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 - 0 = 0 : \quad \text{extremum à } \theta = 0. \quad (6.135)$$

Par ailleurs

$$\left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{l_3^2 (1 - \cos \theta)}{I_1 \sin^4 \theta} (2 + \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) \right|_{\theta=0} - Mgh \cos \theta \Big|_{\theta=0} \quad (6.136)$$

Le premier terme donne, utilisant une fois la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{l_3^2 (1 - \cos \theta)}{I_1 \sin^4 \theta} (2 + \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) = \frac{0}{0} \quad (6.137)$$

une indétermination. Une double application de la règle de l'Hôpital donne cependant

$$\left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{l_3^2}{I_1} \frac{1}{4} - Mgh. \quad (6.138)$$

Au total donc

$$V_\theta = Mgh + \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{l_3^2}{4I_1} - Mgh \right) + \dots \quad (6.139)$$

L'extremum à $\theta = 0$ sera un minimum si $\frac{l_3^2}{4I_1} - Mgh > 0$ donc si $l_3^2 = I_3^2 \Omega_3^2 > 4I_1 Mgh$ ou encore

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1 Mgh}{I_3^2} \quad (6.140)$$

Tant que la vitesse de rotation de la toupie *qui dort*, essentiellement Ω_3 , satisfait cette condition, la position verticale de la toupie est stable. Lorsque la friction fait tomber la vitesse sous cette limite l'extremum de V_θ à $\theta \approx 0$ devient instable et le mouvement devient rapidement désordonné. Le tout est en fait le résultat d'une compétition entre le terme de V_θ , $Mgh \cos \theta$, qui tend à faire tomber la toupie, et un terme qui provient de la rotation de la toupie et tend à la garder verticale. Plus la vitesse de rotation augmente, plus la stabilité est grande et moins l'effet de $Mgh \cos \theta$ (donc du torque extérieur) est important. En fait, on peut dire qu'à grande vitesse la situation ressemble au cas libre.

6.9 La toupie asymétrique libre: problème de stabilité

Nous avons ici $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Posons ici $I_1 < I_2 < I_3$. Dans la cas libre nous avons essentiellement conservation de \mathbf{l} donc de \mathbf{l}^2 et de E . Développant selon les axes principaux nous aurons

$$\mathbf{l}^2 = l^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 = \text{constante} \quad (6.141)$$

$$E = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2 = \text{constante.} \quad (6.142)$$

On peut aussi écrire

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \quad (6.143)$$

$$E = \frac{l_1^2}{2I_1} + \frac{l_2^2}{2I_2} + \frac{l_3^2}{2I_3} \quad (6.144)$$

Traçant les trois axes orthogonaux de coordonnées, l_1 , l_2 et l_3 , on constate que la première équation définit la surface d'une sphère de rayon l alors que la deuxième définit la surface d'une ellipsoïde de demi-axes de longueurs $\sqrt{2EI_1}$, $\sqrt{2EI_2}$ et $\sqrt{2EI_3}$. Les deux équations doivent être satisfaites simultanément. Ainsi l'extrémité du vecteur \mathbf{l} ne pourra suivre que les courbes d'intersection de ces deux surfaces. Il est également clair que

$$2EI_1 \leq l^2 \leq 2EI_3 \quad (6.145)$$

Si $l^2 = 2EI_1$ (ou $= 2EI_3$), l est minimum (maximum) et \mathbf{l} est selon l'axe 1 (l'axe 3). Toutes les valeurs intermédiaires sont permises. On voit sur la figure 6.14 un série de trajectoires tracées par la pointe de \mathbf{l} pour différentes valeurs de l allant croissant de la trajectoire 1 où l est près de la valeur minimum jusqu'à la trajectoire 6 où l est près de sa valeur maximale. Dans le cas de la courbe 1, l est près de la valeur minimale donc

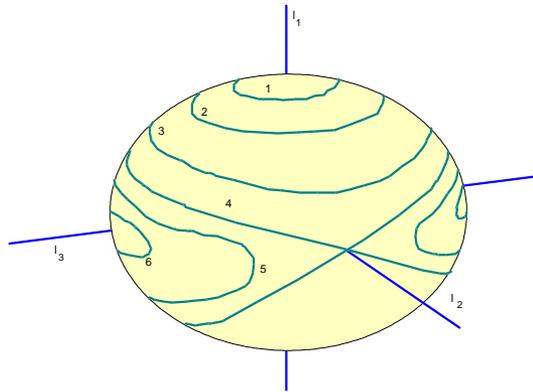


Figure 6.14

et \mathbf{l} est surtout selon l'axe 1 ce qui indique une rotation autour de l'axe 1. On voit que la trajectoire est fermée et que \mathbf{l} dérive peu de la direction 1. La rotation autour, ou presque, de l'axe 1 est stable. La même chose s'applique lorsque l est près de la valeur maximale alors que \mathbf{l} est près de la direction de l'axe 3, indiquant une rotation autour de l'axe 3. Ici encore \mathbf{l} trace une trajectoire fermée autour de l'axe 3. Mais tel n'est pas le cas lorsque la rotation se fait autour de l'axe 2 parce que les trajectoires tracées par \mathbf{l} et qui passent près de ou par la direction de l'axe 2 (rotation autour de cet axe) ne sont pas fermées autour de l'axe 2 mais se promènent tout autour de l'ellipsoïde, passant même par les parties négatives de l_2 . Nous en concluons qu'une trajectoire initiée autour de l'axe 2, celui dont le moment d'inertie a la valeur intermédiaire, entre I_1 et I_3 , sera instable. C'est ce qu'on constate expérimentalement lorsqu'on fait tourner une raquette ou un livre (gardé fermé par un élastique) par exemple.

Cette explication est clairement plus qualitative que quantitative mais elle nous donne néanmoins une image raisonnable du phénomène.



Annexe A: Notations, conventions,...

A.1 Notations et conventions

Dans cet ouvrage, un certain nombre de conventions ont été adoptées pour faciliter la lecture. Les vecteurs sont notés par des caractères gras

$$\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \dots \quad (\text{A.1})$$

L'alphabet grec est utilisé fréquemment:

| Majuscule | Minuscule | Prononciation |
|------------|-------------------------|---------------|
| <i>A</i> | α | alpha |
| <i>B</i> | β | bêta |
| Γ | γ | gamma |
| Δ | δ | delta |
| <i>E</i> | ϵ, ε | epsilon |
| <i>Z</i> | ζ | zeta |
| <i>H</i> | η | eta |
| Θ | θ, ϑ | theta |
| <i>I</i> | ι | iota |
| <i>K</i> | κ | kappa |
| Λ | λ | lambda |
| <i>M</i> | μ | mu |
| <i>N</i> | ν | nu |
| Ξ | ξ | xi |
| <i>O</i> | o | omicron |
| Π | π | pi |
| <i>P</i> | ρ | rho |
| Σ | σ | sigma |
| <i>T</i> | τ | tau |
| Υ | υ | upsilon |
| Φ | ϕ, φ | phi |
| Ψ | ψ | psi |
| <i>X</i> | χ | chi |
| Ω | ω, ϖ | omega |

A.2 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

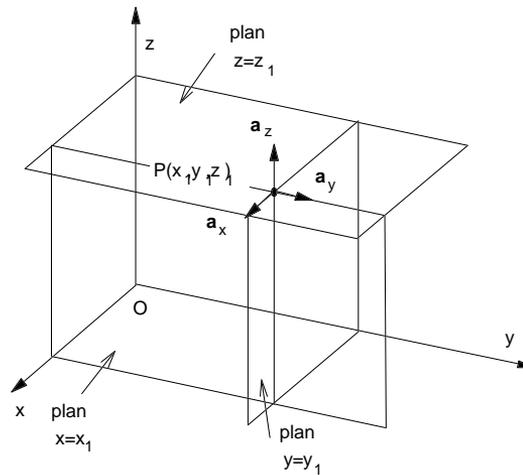


Figure 6.1

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}_x \times \hat{\mathbf{a}}_y &= \hat{\mathbf{a}}_z \\ \hat{\mathbf{a}}_y \times \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_x \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_x &= \hat{\mathbf{a}}_y.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x A_x + \hat{\mathbf{a}}_y A_y + \hat{\mathbf{a}}_z A_z.\tag{A.3}$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$, de surface, (ds_x, ds_y, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_x dx + \hat{\mathbf{a}}_y dy + \hat{\mathbf{a}}_z dz\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}ds_x &= dydz \\ ds_y &= dx dz \\ ds_z &= dx dy\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$dv = dx dy dz. \tag{A.6}$$

Remarque 10 Dans ces notes, nous allégeons la notation en prenant

$$\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \tag{A.7}$$

mais dans la littérature, les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z$ s'écrivent aussi souvent sous les formes variées

$$\begin{aligned} \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \\ \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques

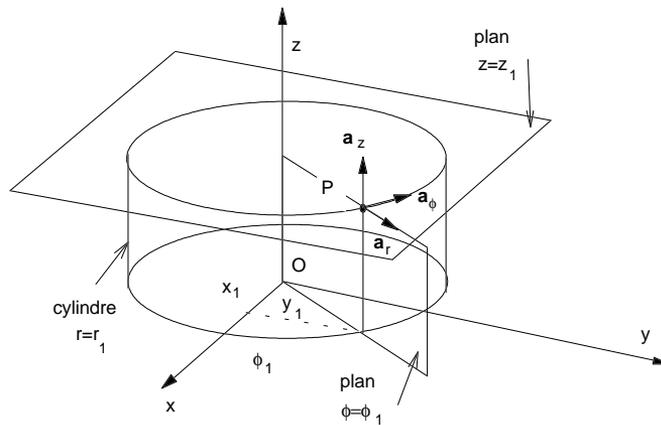


Figure 6.2

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cylindriques $\hat{\mathbf{a}}_r, \hat{\mathbf{a}}_\phi, \hat{\mathbf{a}}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_r \times \hat{\mathbf{a}}_\phi &= \hat{\mathbf{a}}_z \\ \hat{\mathbf{a}}_\phi \times \hat{\mathbf{a}}_z &= \hat{\mathbf{a}}_r \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_r &= \hat{\mathbf{a}}_\phi. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_r, A_\phi, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_r A_r + \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi + \hat{\mathbf{a}}_z A_z. \tag{A.9}$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dr, d\phi, dz)$, de surface, (ds_r, ds_ϕ, ds_z) , et de volume,

dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_r dr + \hat{\mathbf{a}}_\phi r d\phi + \hat{\mathbf{a}}_z dz \quad (\text{A.10})$$

$$ds_r = r d\phi dz$$

$$ds_\phi = dr dz \quad (\text{A.11})$$

$$ds_z = r dr d\phi$$

$$dv = r dr d\phi dz. \quad (\text{A.12})$$

Les relations de transformations de coordonnées cylindriques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi \quad (\text{A.13})$$

$$z = z$$

et inversement

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{A.14})$$

$$z = z.$$

Coordonnées sphériques

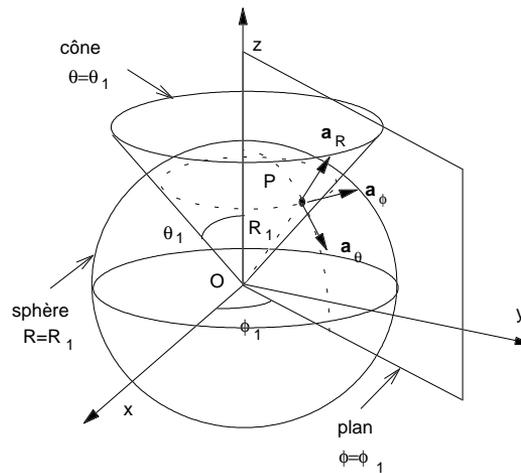


Figure 6.3

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées sphériques $\hat{\mathbf{a}}_R$, $\hat{\mathbf{a}}_\theta$, $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ ont les propriétés suivantes

$$\hat{\mathbf{a}}_R \times \hat{\mathbf{a}}_\theta = \hat{\mathbf{a}}_\phi$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\theta \times \hat{\mathbf{a}}_\phi = \hat{\mathbf{a}}_R \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\phi \times \hat{\mathbf{a}}_R = \hat{\mathbf{a}}_\theta.$$

Un vecteur \mathbf{A} dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_R, A_\theta, A_\phi)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_R A_R + \hat{\mathbf{a}}_\theta A_\theta + \hat{\mathbf{a}}_\phi A_\phi. \quad (\text{A.16})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dR, d\phi, dz)$, de surface, $(ds_R, ds_\theta, ds_\phi)$, et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{a}}_r dr + \hat{\mathbf{a}}_\theta R d\theta + \hat{\mathbf{a}}_\phi R \sin \theta d\phi \quad (\text{A.17})$$

$$ds_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$ds_\theta = R \sin \theta dR d\phi \quad (\text{A.18})$$

$$ds_\phi = R dR d\theta$$

$$dv = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi.$$

Les relations de transformations de coordonnées sphériques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$x = R \sin \theta \cos \phi$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A.19})$$

$$z = R \cos \theta$$

et inversement

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (\text{A.20})$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}.$$

A.3 Aide-mémoire

Mécanique lagrangienne

L'équation d'Euler-Lagrange pour un Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

(À compléter par l'étudiant.)

Corps solide

Moments d'inertie I par rapport à l'axe de symétrie:

| | |
|----------------------------------|---|
| Tige mince p/r extrémité | $\frac{1}{3}MR^2$ |
| Tige mince p/r centre | $\frac{1}{12}MR^2$ |
| Sphère pleine: | $\frac{2}{5}MR^2$ |
| Sphère creuse ou coquille mince: | $\frac{2}{3}MR^2$ |
| Disque ou cylindre plein: | $\frac{1}{2}MR^2$ |
| Cylindre creux ou anneau mince: | MR^2 |
| Anneau épais: | $\frac{1}{2}M(R_{\text{int}}^2 + R_{\text{ext}}^2)$ |

Dynamique

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Condition de roulement sans glissement

$$v = \omega R$$

Théorème des axes parallèles:

$$I = I_{CM} + M \cdot d^2$$

Théorème des plaques minces:

$$I_z = I_x + I_y$$

Constantes usuelles:

Accélération gravitationnelle: $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Rayon terrestre: $R = 6378 \text{ km}$

Vitesse angulaire terrestre: $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

A.4 Références

Les notes couvrent une partie de ce qui est traité dans les volumes suivants et ceux-ci peuvent être utilisés à titre complémentaire.

1. *Classical Mechanics*, H. Goldstein, 2^e édition, Addison-Wesley (1980).
2. *Mécanique.*, L. Landau et E. Lifchitz, 4^e édition, Éditions MIR.





Index

Particule ponctuelle, 1