ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2011, том 51, № 6, с. 963–978

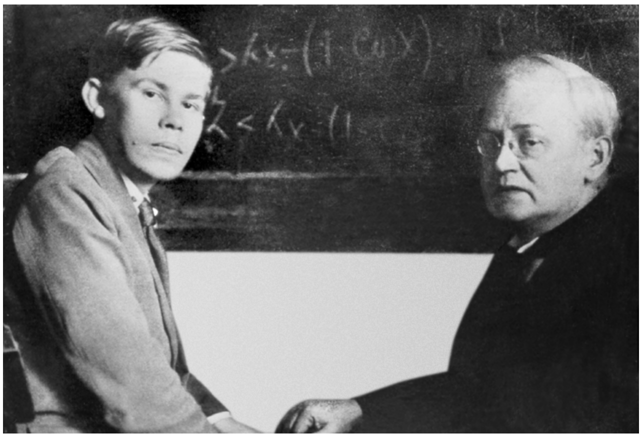
УДК 51(092)

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА БОГОЛЮБОВА (1909–2009)

© 2011 г. М. К. Керимов
(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: comp_mat@ccas.ru
Поступила в редакцию 27.12.2010 г.

Недавно научная общественность нашей страны отметила столетие со дня рождения крупнейшего ученого современности – математика, механика, физика-теоретика, академика двух Академий – Российской и Украинской – Николая Николаевича Боголюбова.

Н.Н. Боголюбова с одинаковым правом считают своим не только математики, но и механики, физики-теоретики. Все же он – прежде всего крупнейший математик, сделавший великие открытия в этой области и ее приложениях, причем начиная с самого юного возраста. О жизни и научной деятельности Николая Николаевича опубликовано много статей и даже книг. Однако в них больше всего говорится о его открытиях в области нелинейной механики, теоретической физики. О работах Н.Н. Боголюбова по вариационному исчислению, по вычислительной и прикладной математике упоминается очень кратко. Даже в таких больших работах о научных достижениях Н.Н. Боголюбова как книги: А.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов. Жизнь, творчество. Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 1996. 182 с.; Николай Николаевич Боголюбов. Математик, механик, физик / Под ред. А.Н. Сисакяна и Д.В. Ширкова. Изд. 2-е, испр. и доп. Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2009. 356 с.; В.С. Владимиров. Н.Н. Боголюбов и математика // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56. Вып. 3 (339). С. 185–190 –



Н.Н. Боголюбов и академик Н.М. Крылов. 1930-годы.

о больших успехах Н.Н. Боголюбова по вариационному исчислению и вычислительной математике говорится недостаточно подробно. Ведь ученый получил обе свои первоначальные научные степени (кандидата и доктора физико-математических наук) в совсем юном возрасте и именно за работы, относящиеся к вариационному исчислению и прикладной математике.

С работами Н.Н. Боголюбова мне посчастливилось ознакомиться еще в молодые годы, когда я учился в аспирантуре Математического института им. В.А. Стеклова и специализировался по вариационному исчислению. Мой научный руководитель член-корреспондент АН СССР Лазарь Аронович Люстерник посоветовал мне прочитать статьи наших известных математиков Михаила Алексеевича Лаврентьева и Николая Николаевича Боголюбова по прямым методам вариационного исчисления. Глубокие по содержанию работы этих ученых подвигли меня к углублению в область прямых методов вариационного исчисления, которая в те годы развивалась благодаря работам известных итальянских математиков таких как Тонелли, его учеников и др. Эти работы, как правило, публиковались на итальянском языке, поэтому мне пришлось изучить итальянский язык, я сдавал даже аспирантский экзамен по этому языку. Я благодарен судьбе и моей незабвенной учительнице итальянского языка, этот язык до сих пор помогает мне в моих научных исследованиях.

Учитывая сказанное, я решил в этой заметке, посвященной памяти Н.Н. Боголюбова, более подробно рассказать о его вкладе в вариационное исчисление, а попутно и о его вкладе в вычислительную и прикладную математику. Прежде всего я расскажу о его жизни, пользуясь уже опубликованными источниками.

Н.Н. Боголюбов родился 8 (21) августа 1909 г. в Нижнем Новгороде в интеллигентной семье. Отец его, Николай Михайлович Боголюбов, был профессором философии и психологии Нижегородской духовной семинарии, а мать, Ольга Николаевна, работала в Нижнем Новгороде преподавателем музыки. О перипетиях, связанных с жизнью Николая Николаевича, подробно рассказано в книге его брата А.Н. Боголюбова, упомянутой выше. В 1921 г. семья переехала в Киев, и Н.Н. Боголюбов в 13-летнем возрасте начал посещать сначала семинар академика Д.А. Граве, а потом семинар академика Николая Митрофановича Крылова. Последний сыграл огромную роль в судьбе юного Николая не только в научном, но и в житейском плане. В 1925 г. малый Президиум Укрглавнауки принял судьбоносное для Николая решение: “Ввиду феноменальных способностей по математике считать Н.Н. Боголюбова на положении аспиранта Научно-исследовательской кафедры математики в Киеве”. Так началась научная карьера Н.Н. Боголюбова и его многолетняя совместная с Н.М. Крыловым научная деятельность (см. фотографию Крылова с Боголюбовым).

Первая его научная работа совместно с Н.М. Крыловым, посвященная приближенному обоснованию принципа Рэлея, опубликована в 1926 г. в престижном французском журнале. Было ему тогда 17 лет. В течение 1926 г. Н.Н. Боголюбов занимался своей аспирантской работой на тему: “Про некоторые новые методы в вариационном исчислении”. Эту работу он представил к защите, блестяще защитил ее (по нынешнему – на степень кандидата физико-математических наук) и в 1927 г. был зачислен на должность научного сотрудника кафедры математики Н.М. Крылова.

В 1930 г. она была опубликована в весьма авторитетном итальянском математическом журнале. Об этой работе мы скажем ниже более подробно.

В 1927 г. в итальянских научных журналах было опубликовано объявление об учреждении премии им. Адольфо Мерлани, присуждение которой было поручено Академии Наук в г. Болонье. По условию учредителей премии, требовалось представление работ на тему: “Исследование прямыми методами вариационного исчисления экстремальных свойств криволинейного интеграла

$$\int_C f(x, y, y', x', x'', y'')dt \tag{1}$$

в некотором классе кривых C”.

В 1928 г. Н.Н. Боголюбов подал в комитет по этой премии свою новую работу под названием “Sur l’application des methods directes â quelques problémes du calcul variations”, посвященную именно исследованию экстремальных свойств интеграла (1), применимых к случаю как полурегулярных, так и неполурегулярных интегралов вида (1). В этот период итальянские математики, интенсивно работавшие в этой области (например, Л. Тонелли), исследовали лишь полунепрерывные функционалы. Несмотря на большой конкурс, за эту работу Н.Н. Боголюбову была присуждена упомянутая премия Болонской Академии наук. Из этих результатов Н.Н. Боголюбова для нерегулярных функционалов, как частные случаи, следуют труды итальянских математиков, относящиеся к регулярным функционалам. Эта работа Н.Н. Боголюбова в 1931 г. была опубликована в упомянутом выше итальянском журнале, об этой работе более подробно мы скажем позже.

В 1930 г. Президиум АН СССР по совокупности работ без защиты диссертации присудил Н.Н. Боголюбову (21-летнему молодому ученому) ученую степень доктора математики.

В 1939 г. Н.Н. Боголюбов был избран членом-корреспондентом АН УССР, в 1947 г. – членом-корреспондентом АН СССР, а через год после этого стал действительным членом АН УССР. В 1953 г. Н.Н. Боголюбов был избран действительным членом АН СССР.

Научная деятельность Н.Н. Боголюбова чрезвычайно интенсивна и охватывает самые различные разделы математики, механики, физики. К ним относятся вариационное исчисление, теория функций, дифференциальные уравнения, теория колебаний, теория устойчивости, статистическая физика, квантовая теория поля и др.

Как было сказано выше, мы более подробно остановимся на работах Н.Н. Боголюбова по вариационному исчислению, очень кратко – по вычислительной и прикладной математике.

Читая в молодые годы работы Н.Н. Боголюбова, я восхищался величием его таланта и не мог тогда подозревать, что автор этих работ был совсем молодым человеком, который сумел не только включиться в сферу математики, где работали многие выдающиеся ученые того периода, но и получить в этой области фундаментальные результаты. К этой же области математики и к этому же периоду относятся результаты нашего другого выдающегося математика академика Михаила Алексеевича Лаврентьева по вариационному исчислению. В науке известен так называемый “феномен” М.А. Лаврентьева, которому посвящен ряд работ других авторов, в том числе опубликованных в последние годы.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов по вариационному исчислению, полученных Н.Н. Боголюбовым, напомним некоторые понятия теории прямых методов вариационного исчисления.

Рассмотрим задачу об абсолютном минимуме интеграла в смысле Лебега

$$I(y) = \int_a^b f\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right)dx \tag{2}$$

в пространстве $\mathbb{G}$ всех функций $y(x)$, которые имеют почти всюду на интервале (a, b) первую производную, интегрируемую в смысле $y = y(a) + \int_a^x y'dx$, и удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1, \tag{3}$$

где a, b, a_1, b_1 – некоторые постоянные числа. Функция $f(x, y, z)$ является непрерывной вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Предположим, что условие

$$f(x, y, z) \geq -N, \tag{3'}$$

где N — некоторое положительное число, удовлетворяется для всех значений y, z и для всех значений x на интервале (a,b). Тогда имеем

$$I(y) \geq -N(b-a),$$

откуда следует, что $I(y)$ достигает в пространстве $\mathbb{G}$ точной нижней грани i, которая удовлетворяет неравенству $i \geq -N(b-a)$.

Следовательно, согласно определению точной нижней грани, в пространстве $\mathbb{G}$ существует минимизирующая последовательность $y_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, для которой справедливо предельное соотношение

$$I(y_n(x)) \to i \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Кроме этого, необходимо доказать, что из последовательности $y_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, можно выбрать бесконечную сходящуюся подпоследовательность, чтобы можно было применить теорему Арцела, согласно которой из каждой равномерно непрерывной и равномерно ограниченной на некотором интервале (a,b) последовательности функций $l_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, можно выбирать подпоследовательность $\Theta_n(x)$ такую, что равномерно на (a,b) имеет место сходимость $\Theta_n(x) \to \Theta(x)$ при $n \to \infty$, где $\Theta(x)$ — некоторая непрерывная и ограниченная функция, заданная на (a,b). Чтобы можно было применить теорему Арцела в случае рассматриваемой минимизирующей последовательности, необходимо установить ее равномерную непрерывность и равномерную ограниченность. Это можно сделать, если наложить на функцию $f(x,y,z)$ условие более ограничительное, чем условие (3)':

$$f(x,y,z) \geq \alpha|z|^{1+\beta} - N, \tag{5}$$

где α, β, N — положительные числа, причем α и β не равны нулю.

Таким образом, можно доказать следующее:

1) существует минимизирующая последовательность $y_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, для интеграла $I(y)$ в пространстве $\mathbb{G}$, т.е. такая последовательность, что $I(y_n(x)) \to i$ при $n \to \infty$, где i — нижняя грань функционала $I(y)$ в пространстве $\mathbb{G}$;

2) из последовательности $y_n(x)$ можно выбрать подпоследовательность $u_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, такую, что равномерно на (a,b) справедливо предельное соотношение

$$u_n(x) \to u(x),$$

где $u(x)$ — некоторая функция, принадлежащая пространству $\mathbb{G}$.

В силу существования производной $u'(x)$, функционал $I(y)$ принимает определенное значение, конечное или бесконечное.

Далее нужно установить предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n(x)) = I(u(x)), \tag{6}$$

на основании которого можно получить равенство $I(u(x)) = i$, т.е. доказать, что предельная функция минимизирующей последовательности $u(x)$ дает абсолютный минимум.

В вариационном исчислении величина $I(y(x))$, хотя ее и можно рассматривать как функцию от функции $y(x)$, не обладает относительно своего аргумента — функции $y(x)$ — свойством непрерывности. Точнее, если $w(x)$ и $z(x)$ — две функции из $\mathbb{G}$, которые удовлетворяют на (a,b) неравенству

$$|w(x) - z(x)| \leq \varepsilon,$$

где ε — произвольное малое число, то, вообще говоря, величины $I(w(x))$ и $I(z(x))$ могут отличаться одна от другой произвольно большим числом.

Следовательно, для доказательства равенства (6) кроме соотношения

$$u_n(x) \to u(x), \quad a \leq x \leq b, \quad n \to \infty,$$

необходимо еще доказать, что

$$u_n'(x) \to u'(x), \quad a \leq x \leq b, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

В общем случае доказать непосредственно соотношение (7) не представляется возможным. Однако при дополнительных условиях, накладываемых на подынтегральную функцию $f(x, y, z)$, такое доказательство возможно. Эти условия при всех значениях y, z для всех значений x на интервале (a, b) имеют вид

$$\begin{gathered} R > f''_{zz}(x, y, z) > \gamma, \\ |f''_{yz}(x, y, z)| \le Q, \quad |f''_{yz}(x, y, z)| \le P, \end{gathered} \tag{8}$$

где γ, P, Q, R – положительные числа, $\gamma \neq 0$, не зависящие от значений x, y, z.

Интеграл $I(y)$ при выполнении условий (8) называется регулярным.

При выполнении условий (8) существует непрерывная функция $u(x)$, принадлежащая пространству $\mathbb{G}$, такая, что в $\mathbb{G}$ она дает абсолютный минимум функционала $I(y)$.

Такое же доказательство можно обобщить и на тот случай, когда вместо условий (8) выполняется условие $f''_{zz}(x, y, z) \ge \gamma$ для всех значений $x \in (a, b)$ и для произвольных значений y, z.

Для действительного построения минимизирующих последовательностей разработаны специальные методы, например метод Ритца, метод конечных разностей и др. С практической точки зрения метод конечных разностей в общем случае имеет преимущества перед методом Ритца, так как для составления уравнений метода конечных разностей обычно не приходится вычислять очень сложные квадратуры, что неизбежно при составлении уравнений метода Ритца.

Существуют методы, позволяющие исследовать сходимость минимизирующих последовательностей.

Несмотря на важность случая регулярных функционалов вариационного исчисления, многие задачи этой науки не удовлетворяют условиям регулярности. Поэтому приходится рассматривать и нерегулярные функционалы, для которых обычным методом доказать справедливость соотношения $i = \lim\limits_{n\to\infty} I(u_n(x)) = I(u(x))$ не удается. Поэтому Тонелли ввел понятие полунепрерывности функционала $I(y)$ по аналогии с понятием полунепрерывности функции, введенным в анализе Бэром.

Функционал $I(y)$ называется полунепрерывным снизу вблизи некоторой функции $y_0(x)$ из какого-нибудь функционального пространства Γ, если справедливо одно из следующих условий:

1) величина $I(y_0)$имеет конечное значение: каким бы не было положительное число ε, можно найти такое положительное число ρ_ε, что неравенство $I(y) \ge I(y_0) - \varepsilon$ будет справедливо для каждой функции $y(x)$ из пространства Γ, которая на (a, b) удовлетворяет соотношению $|y - y_0| \le \rho_\varepsilon$;

2) величина $I(y_0)$имеет бесконечное значение (т.е. $+\infty$): каким бы ни было большим положительное число ρ_k, неравенство $I(y) \ge k$ будет справедливым для произвольной функции $y(x)$ из пространства Γ, которая на (a, b) удовлетворяет соотношению $|y - y_0| \le \rho_k$.

Если $I(y)$ полунепрерывен вблизи всех функций пространства Γ, то его называют полунепрерывным всюду в пространстве Γ.

В вариационном исчислении доказывается, что если величина $I(y)$ является полунепрерывной вблизи граничной функции минимизирующей последовательности для $I(y)$, то соотношение

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n(x)) = I(u(x)) \tag{9}$$

удовлетворяется. Если функция $u(x)$ дает абсолютный минимум величине $I(y)$ в пространстве $\mathbb{G}$, то эта величина полунепрерывна вблизи функции $u(x)$. Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы удовлетворялось равенство (9), которое обеспечивает реализацию абсолютного минимума функционала при предельной функции $u(x)$ минимизирующей последовательности, является полунепрерывность (снизу) рассматриваемого функционала $I(y)$ вблизи функции $u(x)$. Ряд условий, необходимых и достаточных для полунепрерывности функционала $I(y)$ вблизи некоторой данной функции из пространства $\mathbb{G}$, установил Тонелли. Так как для предельной функции самой минимизирующей последовательности не получено какого-либо специального уравнения, которое давало бы возможность судить о свойстве предельной функции, то для того, чтобы иметь уверенность относительно полунепрерывности функционала $I(y)$ вблизи одной только этой функции, Тонелли должен был наложить на $I(y)$ условия полунепрерывности всюду в пространстве $\mathbb{G}$. Объясняя это требование, он установил ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы функционал $I(y)$ всюду в $\mathbb{G}$ был полунепрерывным. Однако эти условия более жесткие, чем условия для полунепрерывности вблизи только одной данной функции. Например, если выполняется условие (5), то необходимым и достаточным условием для полунепрерывности всюду в $\mathbb{G}$ является выполнение неравенства

$$f''_{zz}(x, y, z) \geq 0, \tag{10}$$

где x, y, z – произвольные числа, лежащие на интервалах (a, b), $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Условие (10) Тоннели назвал условием квазирегулярности функционала. Оно только немногим более общее, чем условие простой регулярности. В квазирегулярный и регулярный случаи не входит наиболее интересный пример, когда функция $f''_{zz}(x, y, z)$ может менять знак. Сложность этого случая проявляется в том, что тогда дифференциальное уравнение Эйлера, соответствующее функционалу $I(y)$, будет иметь сингулярность и это уравнение примет вид

$$y'' = \frac{A(x, y, y')}{f''_{zz}(x, y, y')},$$

где $A(x, y, y')$ – некоторая регулярная функция от своих аргументов.

Вследствие этих трудностей, возникающих при использовании прямых методов в квазирегулярном случае, исследователи не рассматривали его (кроме очень специального случая, названного Тонелли incompletamente regulare). Именно этому трудному случаю посвящены работы Н.Н. Боголюбова по прямым методам вариационного исчисления.

Теперь изложим основные результаты работ Н.Н. Боголюбова по вариационному исчислению. Начнем с работы, текст которой составил его кандидатскую диссертацию: “Sur quelques methods nouvelles dans le calcul des variations” // Ann. Matematica pura ed Applicata. 1929 (1930). V. (4)7. P. 249–271.

В этой работе речь идет о нахождении абсолютного минимума функционала

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y')dx, \tag{11}$$

не являющегося почти регулярным в смысле Тонелли. Н.Н. Боголюбов существенно обобщил результаты Тонелли на случай нерегулярных функционалов. Следуя конструкциям Тонелли, наряду с (11) он рассматривает почти регулярный интеграл

$$J_{\mathbb{G}} = \int_a^b \mathbb{G}(x, y, y')dx \tag{12}$$

и доказывает, что в классе $\mathbb{D}$ допустимых функций для (11), ординаты которых принимают фиксированные значения при $x = a$ и $x = b$, задача об абсолютном минимуме интеграла I_C в $\mathbb{D}$ допускает решения, вдоль которых выполняется условие

$$f(x, y, y') = \mathbb{G}(x, y, y'), \tag{13}$$

если не считать возможного случая наличия псевдодуг “сингулярных” кривых, вдоль которых выполняется неравенство

$$f(x, y, y') > \mathbb{G}(x, y, y'). \tag{14}$$

Таким образом, задача об абсолютном минимуме интеграла I_C в классе $\mathbb{D}$ допускает решения тогда и только тогда, когда среди кривых, реализующих абсолютный минимум функционала I_C в классе $\mathbb{D}$, существует кривая, не содержащая псевдодуг сингулярных кривых с мерой, не равной нулю.

При исследовании задачи об абсолютном минимуме функционала I_C в некотором специальном классе функций доказаны следующие результаты:

1) через любые две точки всегда можно провести по крайней мере один экстремалоид для I_C (терминология Тонелли), состоящий из конечного числа экстремальных кривых;

2) для любого положительного числа ε всегда можно найти в классе $\mathbb{D}$ экстремалоид функционала I_C такой, что рассматриваемый интеграл принимает значение, отличающееся от его нижней грани в классе $\mathbb{D}$ на величину, не превышающую ε.

Напомним, что Тонелли понимает под экстремалоидом для интеграла (12).

Кривая C_0, т.е. соответствующая ей функция $y_0(x)$, представляет собой экстремалоид, если почти всюду на (a, b) выполняется условие

$$G'_y[x, y_0(x), y'_0(x)] - \int_0^x G'_y[x, y_0(x), y'_0(x)]dx = \text{const}. \tag{15}$$

Из утверждения 2) вытекает, что если существует только конечное число экстремалоидов, принадлежащих классу $\mathbb{D}$, то задача об абсолютном минимуме интеграла I_C в $\mathbb{D}$ допускает решения.

Работа, за которую Н.Н. Боголюбову была присуждена премия Болонской Академии наук, опубликована под названием “Sur l’application des methods directes à quelques problémes du calcul des variations” // Ann. Matematica pura ed Applicata. 1931.V. (4) 9. P. 195–241. Изложим кратко ее содержание.

Эта работа посвящена задаче об абсолютном минимуме криволинейного интеграла

$$I(C) = \int_0^{L_C} f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)ds, \tag{16}$$

где x, y, θ, s – координаты, угол направления и дуга для текущей точки кривой C, L_C – длина кривой C, $f(x, y, \theta, z)$ – непрерывная функция, периодическая по θ с периодом 2π. Минимум ищется в классе M кривых C (удовлетворяющих определенным условиям) таких, что их углы направления $\theta(s)$ имеют ограниченную вариацию. Н.Н. Боголюбов показывает, что задача о минимуме интеграла (16) эквивалентна задаче об отыскании минимума криволинейного интеграла

$$I(C) = \int_C F(x, y, x', y', x'', y'')dt, \tag{17}$$

т.е. интеграла, за исследование которого была объявлена премия. В интеграле (17) функция $F(x, y, x', y', x'', y'')$ является непрерывной при $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

Интегралы (16) и (17) эквивалентны, и между ними существует взаимно однозначное соответствие, так как

$$f(x, y, \theta, z) = F(x, y, \cos\theta, \sin\theta, -z\sin\theta, z\cos\theta),$$

$$F(x, y, x', y', x'', y'') = f\left(x,\, y,\, \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'},\, \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}(x'^2 + y'^2)^{1/2}\right).$$

Поэтому Н.Н. Боголюбов изучает минимальные свойства именно интеграла (16).

В работе доказаны следующие основные результаты:

1) задача об абсолютном минимуме интеграла I_C в поле кривых M, вообще говоря, не имеет решения;

2) если функция $f(x, y, \theta, z)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y, \theta, z)| \le A|z|^{\delta} + B, \tag{18}$$

где $A(x, y)$ и $B(x, y)$ ограничены при ограниченных x, y, a, δ – фиксированное число, $\delta < 1$, то задача об абсолютном минимуме криволинейного интеграла I_C в поле $\mathbb{D}$ кривых, углы направления которых абсолютно непрерывны и которые удовлетворяют тем же граничным условиям, что и кривые поля M, вообще говоря, не имеет решения;

3) пусть $f(x, y, \theta, z)$ является дважды дифференцируемой функцией, удовлетворяющей неравенству

$$A(x, y)|z|^{1+\delta} + B(x, y) \ge f(x, y, \theta, z) \ge k|z|^{1+\delta}, \tag{19}$$

где k и δ – фиксированные положительные числа, а $A(x, y)$ и $B(x, y)$ ограничены при ограниченных значениях x, y, то тогда предел при $\varepsilon \longrightarrow 0$ нижней грани интеграла (16) в поле $\mathbb{D}_\varepsilon(C)$ кривых C класса M, имеющих вместе с C окрестность (ε) порядка 1, равен криволинейному интегралу

$$J(C) = \int_0^{L_C} \Phi(x, y, \theta, \theta')ds, \tag{20}$$

где

$$\Phi(x, y, \theta, \theta') \geq K|z|^{1+\delta}; \tag{21}$$

здесь K и δ – положительные фиксированные числа;

4) если функция $f(x, y, \theta, z)$ удовлетворяет определенным условиям (перечисленным в работе), то для того, чтобы существовала кривая, на которой достигается абсолютный минимум интеграла $I(C)$ в поле $\mathbb{D}$, необходимо и достаточно, чтобы среди кривых (всегда существующих), на которых достигается абсолютный минимум интеграла $J(C)$ в поле $\mathbb{D}$, существовала кривая, не имеющая общей дуги с "особыми кривыми" рассматриваемой задачи о минимуме;

5) если функция $f(x, y, \theta, z)$ удовлетворяет условиям, о которых говорилось в п. 4, то в поле кривых $\mathbb{D}$ существует по крайней мере одно решение уравнения Эйлера, соответствующего функционалу $I(C)$, на котором он достигает значения, отличающегося не более чем на ε от нижней грани интеграла $I(C)$.

В те же годы Н.Н. Боголюбов опубликовал на украинском языке монографию, посвященную прямым методам вариационного исчисления: "Нові методи в варіаціиному численні". Харьків–Київ: Техніко-терорeтичне видавнитицтво, 1932. 110 с.

Эта монография, которая стала библиографической редкостью, развивает и дополняет известный трактат Л. Тонелли: Fondamenti di calcolo dell variazioni. T. I, II. Bologna: Zanichelli, 1922.

В книге Н.Н. Богомолова имеются следующие разделы, из которых понятно содержание книги.

1. Введение.
2. Представление о прямых методах.
3. Регулярные случаи вариационного исчисления.
4. Методы действительного образования минимизирующих последовательностей.
5. Понятие полунепрерывности функционалов. Исследования Тонелли.
6. Изучение общего (неквазирегулярного) случая вариационного исчисления.
7. Некоторые свойства решений уравнения Эйлера.

В частности, относительно решений уравнения Эйлера для функционала $I(y)$ доказано, что при выполнении некоторых условий относительно функции $f(x, y, z)$ всюду в пространстве $\mathbb{G}$ существует решение уравнения Эйлера

$$\frac{df_z''(x, y, dy/dx)}{dx} - f_y'\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{22}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1$$

и состоящее из конечного числа экстремалей (эктремалоидов).

Какое бы ни было положительное число ε, всегда можно найти такое решение уравнения Эйлера (22) (в пространстве $\mathbb{G}$), состоящее из конечного числа экстремалей, которое дает интегралу $I(y)$ значение, отличающееся от нижней грани i не больше, чем ε. Отсюда следует, что если существует только конечное число решений уравнения Эйлера, то задача абсолютного минимума функционала $I(y)$ в пространстве $\mathbb{G}$ может быть решена.

Первая научная работа Н.Н. Боголюбова, выполненная в 1924 г., называлась "О поведении решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности". В 1926 г. Н.Н. Боголюбов (совместно с Н.М. Крыловым) опубликовал в журнале французской Академии наук свою печатную работу "Sur la justification du principe de Rayleigh par l'orde de l'erreur commis à la n-ieme approximation" // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. 1926. V. 183. P. 476–479.

В 1929 г. опубликована его совместная с Н.М. Крыловым работа “La solution approchée du probleme de Dirichlet” // Докл. АН СССР. 1929. № 12. С. 284–288.

Ряд его работ по приближенным методам решения дифференциальных уравнений опубликован в журнале Известия АН СССР, Отд. ОМЕН. Среди научных работ Н.Н. Боголюбова первых лет его научной карьеры значительное число принадлежит приближенным и численным методам решения дифференциальных уравнений. Это видно из списка его работ, который приведен в конце нашей заметки.

В свои молодые годы Н.Н. Боголюбов получил также фундаментальные результаты по теории почти периодических функций (в этой области он фактически создал новое направление), по приближенным методам решения дифференциальных уравнений, по теории динамических систем и др.

Следующее крупное достижение его – создание теории нелинейных колебаний. В этой новой области его уникальные результаты быстро завоевали сторонников не только среди математиков, но и среди механиков. Его фундаментальные результаты по нелинейным колебаниям составляют предмет любого учебника в этой области и изучаются студентами всего мира. Эти результаты Н.Н. Боголюбова положили основу теории устойчивости движения, теории управления, регулирования и стабилизации, механики космического полета и др.

Н.Н. Боголюбову принадлежат фундаментальные исследования в статистической физике, в квантовой теории поля и теории элементарных частиц.

Кратко остановимся на работах Н.Н. Боголюбова, посвященных приближенному решению граничных задач дифференциальных уравнений и математической физики. Ряд его ранних работ посвящен оценке погрешности при приближенном определении собственных значений и собственных функций граничной задачи. Приближенное решение граничной задачи в них базируется на так называемом принципе Рэлея в статистической механике, который заключается в переходе разностного уравнения к дифференциальному уравнению при переходе от механики дискретной системы к механике непрерывной системы. Для обоснования принципа Рэлея необходимо показать, что решения соответствующего разностного уравнения стремятся к решениям соответствующего дифференциального уравнения. На примере задачи об экстремуме функционала вида (2) Н.Н. Боголюбов показал, что при некоторых ограничениях, накладываемых на производные подынтегральных функций, уравнение Эйлера для этого функционала при заданных граничных условиях является предельным для соответствующего конечно-разностного уравнения при тех же граничных условиях. Этот аппроксимационный метод пригоден не только для приближенного вычисления собственных значений и собственных функций для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и для уравнений с частными производными.

Особо следует сказать о работах Н.Н. Боголюбова по теории нелинейных колебаний. В этой области они совместно с Н.М. Крыловым создали новую науку, названную ими нелинейной механикой. В этой области они разработали методы асимптотического интегрирования нелинейных уравнений, описывающих колебательные процессы и их математическое обоснование с применением общей теории динамических систем. Эти методы применяются для асимптотического решения дифференциальных уравнений с малым или большим параметром и при получении приближенных формул для практического применения. До указанных работ асимптотические методы применялись исключительно для решения консервативных систем. Это существенно ограничивало применение метода теории возмущений к исследованию колебательных систем, которые, как правило, являются консервативными системами. Преодолев большие принципиальные трудности, Н.Н. Боголюбов и Н.М. Крылов распространили методы теории возмущений на общие неконсервативные системы и построили новые асимптотические методы нелинейной механики. Эти методы ими строго математически обоснованы и позволяют получить решение не только в первом приближении, но и найти высшие приближения решений. Методы применимы для изучения как периодических, так и квазипериодических колебательных процессов. Они очень просты и наглядны при расчетах конкретных задач. Разработанные методы позволяют получить n-е приближение к искомому решению. Если формулу n-го приближения рассматривать как замену переменных, то можно привести точное уравнение к форме, удобной для теоретических исследований, и таким образом получить возможность как оценки погрешности данного приближения, так и установления ряда свойств точного решения. Разработанные приближенные методы применимы к разнообразным системам с малым или большим параметром, в том числе к системам с бесконечно большим числом степеней свободы. Из разработанных методов особо следует указать очень эффективный принцип эквивалентной линеаризации, символические методы. Асимптотические методы сразу можно применить к решению ряда актуальных практических задач. В области качественного направления нелинейной механики Н.Н. Боголюбову принадлежит ряд результатов, соприкасающихся с абстрактной теорией динамических систем. Он доказал существование инвариантной меры, ввел важное понятие об эргодическом множестве, установил теоремы о разбиении инвариантной меры на "неразложимые" инвариантные меры, "локализованные" в эргодических множествах.

Первые работы Н.Н. Боголюбова в области физики были связаны с дальнейшим развитием и применением разработанных им асимптотических методов в задаче многих тел к классической статистической механике. Уже первые применения асимптотических методов при исследовании задач статистической механики позволили получить интересные принципиальные результаты. Этим вопросам посвящена его монография "О некоторых статистических методах в математической физике", изданной в 1945 г. Н.Н. Боголюбов разработал методы функций распределения и производящих функционалов для решения основной задачи статистической физики о вычислении термодинамических функций через молекулярные характеристики вещества. Метод кинетических функций распределения он использовал при исследовании вопроса о получении уравнений гидромеханики на основе классической механики совокупности молекул, взаимодействующих друг с другом. Его основополагающие идеи и методы в квантовой статистической физике привели к созданию микроскопической теории фундаментальных явлений природы – сверхтекучести и сверхпроводимости. Эти исследования легли также в основу современной теории неидеальных квантовых микросистем и теории атомного ядра. Н.Н. Боголюбов является создателем аксиоматической квантовой теории поля, в рамках которой он впервые сформулировал главный постулат теории – принцип причинности в микромире. На основе этой теории он с единой точки зрения исследовал многие явления в мире элементарных частиц, установил между ними глубокие внутренние связи. Эти работы Н.Н. Боголюбова породили также новые направления в математике – многомерный комплексный анализ (теорема "об острие клина" Боголюбова), тауберова теория функций многих переменных и др. За цикл исследований по микроскопической теории сверхпроводимости и квантовой теории поля Н.Н. Боголюбову была присуждена Ленинская премия в 1958 г.

В 60–70 гг. прошлого века в работах Н.Н. Боголюбова и его учеников впервые была введена новая физическая характеристика, получившая позднее название "цвет кварка". Введение этого понятия позволило разрешить известную проблему статистики кварков, и явилось основой для построения квантовой хромодинамики – современной калибровочной теории сильных взаимодействий.

Крупнейшим вкладом Н.Н. Боголюбова в статистическую механику является вывод уравнений для равновесных и неравновесных многочастичных функций распределения. На основе этих уравнений он вывел кинетические уравнения, играющие фундаментальную роль в теории плазмы и в нейтронной физике.

В начале 50-х годов Н.Н. Боголюбов принимает активное участие в создании термоядерного оружия в нашей стране.

Одновременно с чисто научной деятельностью и в тесной связи с ней Н.Н. Боголюбов всю свою жизнь вел большую педагогическую и научно-организационную работу. Начиная с 1936 г. он руководил кафедрой сначала в Киевском университете, а затем в Московском университете. В течение четырех лет Н.Н. Боголюбов был деканом механико-математического факультета Киевского университета, руководил рядом Отделов АН УССР (Отдел нелинейной механики Института строительной механики, Отдел математической физики Института математики). Много лет он руководил Отделом теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова, Лабораторией теоретической физики Объединенного института ядерных исследований в г. Дубна, носящей ныне его имя, и был главным редактором "Журнала теоретической и математической физики" с 1969 по 1992 г.

Ряд лет он был депутатом Верховного Совета СССР.

Много лет он работал директором Объединенного института ядерных исследований в г. Дубна, директором Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Много лет он работал академиком-секретарем Отделения математики АН СССР.

Н.Н. Боголюбов воспитал несколько поколений математиков и физиков-теоретиков. Многие известные ученые с уважением и гордостью называют его своим учителем.

Н.Н. Боголюбов создал плодотворно работающие школы: по линейной механике в Киеве, по теоретической физике в Москве и в Дубне. Эти школы имеют в своем составе десятки докторов и кандидатов наук, некоторые из них имеют высокие академические звания и создали свои школы.

Н.Н. Боголюбов неоднократно приглашался для чтения лекций и докладов о своих исследованиях в ряд зарубежных университетов, научно-исследовательских институтов, на международные конференции и конгрессы. Некоторые монографии Н.Н. Боголюбова переведены на иностранные языки.

Научная и общественная деятельность Н.Н. Боголюбова получила высокую оценку со стороны правительства. Он являлся дважды лауреатом Сталинской премии, лауреатом Ленинской премии, награжден семью орденами, в том числе шестью орденами Ленина, двумя орденами Трудового Красного знамени и др. Он был дважды Героем Социалистического труда, награжден Золотой медалью им. М.В. Ломоносова.

Н.Н. Боголюбов был избран иностранным членом ряда зарубежных академий наук, ему присуждены почетные степени доктора наук авторитетных университетов мира. Он удостоен многих международных премий и медалей.

Интересы Николая Николаевича не ограничивались сферой его профессии. Он обладал весьма широким кругозором, владел несколькими иностранными языками, интересовался историей, философией, классической литературой. Он был отзывчивым и добрым человеком. Жизнь и дела Николая Николаевича Боголюбова – высокий пример самоотверженного служения науке, родине и человечеству. Благодаря его бесценным научным трудам имя Николая Николаевича будет примером многим поколениям ученых всего мира.

Н.Н. Боголюбов опубликовал свыше 400 научных работ. Часть из этих работ собрана в 12-томном Собрании его научных трудов, вышедших в свет в 2005–2009 гг. в издательстве “Наука”.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ РАБОТ Н.Н. БОГОЛЮБОВА

Sur la justification du principe de Rayleigh par l’ordre de l’érreur commise à la *n*-ième approximation // Compt. Rend. Acad. Sci. 1926. V. 183. P. 476–479. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Про Rayleigh’ів принцип в теорії дифференціальних рівнань математичної фізики та про одну ейлерову методу в варияційнім численні // Тр. фіз.-матем. відд. ВУАН. 1926. Т. 3. Вып. 3. С. 39–57.

Про наближене розв’язування диференціяльних рівнань // Тр. фіз.-матем. відд. ВУАН. 1927. Т. 5. Вып. 5.

Sur quelques criteres, concernant l’existance des dérivees d’une function d’une variable reelle // Зб. матем.-природописно-лікарської секції наук. т-ва ім. Шевченка 27. Львів, 1928. С. 215–221. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur les methods des differences finies pour la résolution approchee des problemes fondamentaux de la physique mathémetique // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1928. V. 186. P. 422–425. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur la theorie mathématique des oscillographes // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1928. V. 187. P. 938–940. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

On Rayleigh’s principle in the theory of differential equations of mathematical physics and on Euler’s method in calculus of variations // Ann. Math. Ser. 2. 1928. V. 29. № 3. P. 255–276. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sopra il methodo dei coefficienti constanti (methodo dei tronconi) per l’integrazione approsimata delle equazioni differenziali della fisica mathematica // Boll. Un. Math. Ital. 1928. V. 7. № 1. P. 72–77. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

La solution approchee du probleme de Dirichlet // Докл. АН СССР. 1929. A. № 12. С. 284–288. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur le calcul des raciness de la transcendante de Fredholm les plus voisines d’un nombre donne par des methods des moindres carres et de l’algorithme variationnel // Изв. АН СССР. ОФМН. 1929. № 5. С. 471—488. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur l’approximation des functions par des sommes trigonometriques // Докл АН СССР. 1930. A. № 6. С. 147–152.

Application de la methode de l’algorithme variationel a la solution approchee des equations differentiielles aux derives partielles du type elliptique. Estimation des erreurs qu’on commet en s’arretant a la *n*-eme approximation dans le calcul des valeurs et des functions singulieres. Cas general de l’equation non homogene. I // Изв. АН СССР. ОФМН. 1930. № 1. С. 43–71; II // № 2. С. 105–114. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

До теорії синхронізаці // Зап. фіз.-матем. відд. (ВУАН). 1930. Т. 4. Вып. 5. С. 299–302. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

La solution approchee du probleme de Dirichlet (Resume) // Vortrage aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete. Aachen, 1929. Berlin: Springer, 1930. P. 53–55. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Application de la méthode des réduites à la solution approchee des équations differentielles aux derives partielles du type elliptique / Vortrage aus dem Gebite der Aerodynamik und verwandter Gebriete. Aachen, 1929. Berlin: Springer, 1930. P. 55–57. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur quelques méthodes nouvelles dans le calcul des variations // Ann Math. Pura and Appl. Ser. IV. 1930. V. 7. P. 249–271.

Sur l’approximation trigonometrique des functions dans l’intervalle infiini // Изв. АН СССР. ОМЕН. 1931. № 1. С. 23–54; № 2. С. 149–160. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

О некоторых теоремах, касающихся существования интегралов дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа // Изв. АН СССР. ОМЕН. 1931. № 3. С. 323–344. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Определение максимальных значений некоторых величин (прогибов, моментов и т.д.) с помощью специальных методов, выработанных для снижения мажораций этих величин // Изв. АН СССР. ОМЕН, 1931. № 6. С. 771–785. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur un probleme de l'électrostatique // Тр. Харьковского электротехн. ин-та. 1931. № 1. С. 7–19. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur l'application des méthods directes à quelques problemes du calcul des variations // Ann. Math. Pura and Appl. Ser. IV. 1931. V. 9. P. 195–241.

Исследование продольной устойчивости аэроплана. М.–Л.: Изд-во Госавиаавтотракт, 1932. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Основные проблемы нелинейной механики. М.–Л.: Гостехнтеориздат, 1932.

Нові методив варіаційному численні. Харьків–Київ: Технтеориздат, 1932.

О колебаниях синхронных машин. 2. Об устойчивости параллельной работы *n* синхронных машин. Харьків–Київ: Енерговидав, 1932. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Méthodes nouvelles pour la solution quelques problemes mathématiques se rencontrant dans la science des constructions. Киев, 1932. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Recherches sur la stabilite statique et la stabilite dynamique des machines synchrones // Compt. Rend. Travaux de la Troisieme section (Paris). Gauthier-Villars, 1932. P. 179–205. (Совм. с Н.М. Крыловым.) (Congres internat. d'electricite 4, 3 sect. T. 1. Rap. № 14).

Fundamental problems of the non-linear mechanics // Congres Internat. des Math. Zurich. 1932. V. 2. P. 270–272. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Quelques exemples d'oscillation non lineares // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1932. V. 194. P. 957–960. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur le théoreme fundamental de l'algebra // Boll. Un. Math. Ital. 1932. V. 5. P. 65–66.

Новые методы для решения некоторых математических проблем, встречаемых в технике. Харьков–Киев: Будвидав, 1933. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Основные проблемы нелинейной механики // Изв. АН СССР. ОМЕН. 1933. № 4. С. 475–498. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur quelques propriétes generales des resonances dans la mécanique non linéaire // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1933. V. 197. № 17. P. 908–910. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов. Ч. I. М.–Л.: Объед. научно.-техн. изд-в, 1934. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев: ВУАН, 1934. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Символические методы нелинейной механики в их приложениях к исследованию резонансов в электронном генераторе // Изв. АН СССР. ОМЕН. 1934. № 1. С. 7–34. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur les solutions quasi-périodiques des équations de la mecanique non linéare // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1934. V. 199. P. 1592–1593. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Uber einige Methoden der nicht linearen Mechanik in ihren Anwendungen zur Theorie der nicht linearen Resonanz // Schweiz. Bauzig. 1934. V. 103. № 22. P. 255–257; № 23. P. 267–270. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня // Иссл. колебаний конструкций. Сб. статей. Харьков–Киев: Научно-техн. изд-во, 1935. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Новые методы нелинейной механики в их применении к исследованию продольной устойчивости самолета // Тр. Всес. конфер. по аэродинамике, 23–27 декабря 1993. Ч. I. М.: ЦАГИ, 1993. С. 101–109. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur l'étude du cas de résonance dans les problémes de la mécanique non linéaire // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1935. V. 200. P. 113–115. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur quelques théorems de la théorie génerale de la mesure // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1935. V. 201. P. 1002–1003. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Les measures invariants et la transivité // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1935. V. 201. P. 1454–1456. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Méthodes de la méchanique non linéaire appliqués à la theorie des oscillations stationnaires // Čas. Pest. Math. 1935. V. 64. P. 107–115. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Les measures invariantes et transitives dans la mécanique non linéaire // Матем. сб. 1. 1936. № 5. С. 707–710. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Les mouvements stationnaires généraux dans les systémes dynamiques de la mécanique non linéaire // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1936. V. 202. P. 200–201. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Sur les propriétes ergodiques de l'équation de Smoluchovsky // Soc. Math. 1936. Fr. 64. P. 49–56. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Upon some new resulte in the domain of non-linear mechanics // Proc. Ind. Acad. Sci. Ser. A. 1936. V. 3. P. 523–526. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Application de la mécanique linéaire à quelques problémes de la radiotechnique moderne // Onde électr. 1936. V. 15. № 164. P. 508–531. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Введение в нелинейную механику (приближенные и асимптотические методы нелинейной механики). Киев: Изд-во АН УССР, 1937. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Про повторювані ітерації зі змінними параметрами // Зб. праць з нелінійної механ. Київ: Изд-во АН УССР, 1937. С. 191–200. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Деякі уваги до теореми Ріца // Наук. зап. Киівськ всрос. ун-ту. 1937. Т. 3. Вип. 1; Фіз.-матем. зб. 1937. № 3. С. 9–23.

Sur les probabilitiés en chaine // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1937. V. 204. P. 1386–1388. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Les proprietés ergodiques des suites de probabilitiés en chaine // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1937. V. 204. P. 1454–1456. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

La théorie generale de la mesure dans son application à l'étude des systemes dynamiques de la mecanique non lineaire // Ann. Math. Ser. 2. 1937. V. 38. № 1. P. 65–113. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Про рівняння Фоккера–Планка, що виводяться в теорії пертурбації методом, основаним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана // Зап. каф. матем. фіз. Т. 4. Київ: АН УССР, 1939. С. 5–80. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Про деякі проблеми ергодичної теорії стохастичних систем // Зап. каф. матем. фіз. Т. 4. Київ: АН УССР. С. 243–287. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Про деякі ергодичні властивості суцільних груп перетворень // Наук. зап. Київск. держ. ун-ту. 1939. Т. 4. Вип. 5. Фіз.-матем. зб. № 4. С. 45–52.

О приложении метода наименьшего спуска к доказательству некоторых асимптотических неравенств // Наук. зап. Київск. держ. ун-ту. 1939. Т. 4. Вип. 5. Фіз.-матем. зб. № 4. С. 221–250. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Про лінеаризацію транзитивних, компактних груп переворень // Наук. зап. механ.-матем. Київськ. держ. ун-ту. 1941. Т. 5. С. 17–24.

Об асимптотических неравенствах, приложимых к некоторым вопросам статистической динамики систем с весьма большим числом степеней свободы // Наук. зап. механ.-матем. фак. Київськ. держ. ун-ту. 1941. Т. 5. С. 49–68. (Совм. с Н.М. Крыловым.)

Introduction to non-linear mechanics by N. Kryloff and N. Bogoliuboff. A free translation by Solomon Lefschets from two Russia monographs. Princeton: Princeton Univ. Press, 1943.

О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: АН УССР, 1945.

О некоторых предельных распределениях для сумм, зависящих от произвольных фаз // Уч. зап. МГУ. 1945. Вып. 77. Физ. Кн. 3. С. 43–50.

О влиянии случайной силы на гармонический вибратор // Уч. зап. МГУ. 1945. Вып. 77. Физ. Кн. 3. С. 51–73.

Статистическая теория возмущений // Уч. зап. МГУ. 1945. Вып. 77. Физ. Кн. 3. С. 74–100.

Проблемы динамической теории в статистической физике. М.–Л.: Гостехиздат, 1946.

Разложения по степеням малого параметра в теории статистического равновесия // Ж. эксперим. и теор. физ. 1946. Т. 16. Вып. 8. С. 681–690.

Кинетические уравнения // Ж. эксперим. и теор. физ. 1946. Т. 16. Вып. 8. С. 691–702.

К теории сверхчувствительности // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. № 1. С. 77–90.

Кинетические уравнения в квантовой механике // Ж. эксперим. и теор. физ. 1947. Т. 17. Вып. 7. С. 614–628. (Совм. с К.П. Гуровым.)

Энергетические уровни неидеального бозе-эйнштейновского газа // Вестн. МГУ. 1947. № 7. С. 43–53.

On the theory of superfluidity // J. Phys. 1947. V. 11. № 1. P. 23–32.

Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. Тр. Ин-та строит. механ. Т. 10. Киев: АН УССР, 1948. С. 9–21.

Застосування методів нелініної механіки до проблем кінетики // Зб. праць Ін-ту буд. механ. 1948. № 8. С. 3–17.

До теорії надплинності // Зб. праць Ін-ту буд. механ. 1948. № 9. С. 89–103.

Про позитивні цілком неперервні оператори // Зб. праць Ін-ту буд. механ. 1948. № 9. С. 130–139. (Совм. с С.Г. Крейном.)

Рівняння гідродинаміки в статистичній механіці // Зб. праць Ін-ту буд. механ. 1948. № 10. С. 41–59.

Об одном приложении теории положительно определенных функций // Тр. Ин-та матем. АН СССР. 1948. № 11. С. 113–120.

Кинетические уравнения в теории сверхтекучести // Ж. эксперим. и теор. физ. 1948. Т. 18. Вып. 7. С. 622–630.

Лекції з квантової статистики. Питания стат. Механіки квантових систем. Київ: Рад. шк., 1949.

Об одном применении теории возмущений к полярной модели металла // Ж. эксперим. и теор. физ. 1949. Т. 19. Вып. 3. С. 251–255. (Совм. с С.В. Тябликовым.)

Приближенный метод нахождения низших энергетических уровней электронов в металле // Ж. эксперим. и теор. физ. 1949. Т. 19. Вып. 3. С. 256–258. (Совм. с С.В. Тябликовым.)

Метод теории возмущений вырожденного уровня в полярной модели металла // Вестн. МГУ. 1949. № 3. С. 35–48. (Совм. с С.В. Тябликовым.)

Про усунення розбіжності власної енергії в нерелятивістській теорії поля // Докл АН УССР. 1949. № 5. С. 10–16. (Совм. с С.В. Тябликовым.)

К инвариантному построению квантовой теории поля // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74. № 4. С. 681–684. (Совм. с В.Л. Бонч-Бруевичем, Б.В. Медведевым.)

Теория возмущения в нелинейной механике // Тр. Ин-та строит. механ. АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.

Колебания // Механика в СССР за тридцать лет, 1917–1947. Сб. статей. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. С. 99–114.

Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // Укр. матем. журнал. 1950. Т. 2. № 2. С. 3–24.

К вопросу об основных уравнениях релятивистской квантовой теории поля // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. № 5. С. 757–760.

Об одном классе основных уравнений релятивистской квантовой теории поля // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. № 6. С. 1018–1051.

Уравнения в вариациях квантовой теории поля // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82. № 2. С. 217–220.

О представлении функций Грина–Швингера при помощи функциональных интегралов // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99. № 2. С. 225–226.

Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

К теории умножения причинных сингулярных функций // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. № 1. С. 25–28. (Совм. с О.С. Парасюком.)

О вычитательным формализме приумножения причинных сингулярных функций // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. № 3. С. 429–432. (Совм. с О.С.Парасюком.)

О ренормализационной группе в квантовой электродинамике // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. № 2. С. 203–206. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Приложение ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений // Докл. АН СССР. 1055. Т. 103. № 3. С. 391–394. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Модель типа Ли в квантовой электродинамике // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 4. С. 685–688. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Условие причинности в квантовой теории поля // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. 19. № 2. С. 237–246.

Уравнения с вариационными производными в проблемах статистической физики и квантовой теории поля // Вестн. МГУ. 1955. № 4–5. С. 115–124.

Вопросы квантовой теории поля. I // Успехи физ. наук. 1955. Т. 55. Вып. 2. С. 149–214. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Вопросы квантовой теории поля. II. Устранение расходимостей из матрицы рассеяния // Успехи физ. наук. 1955. Т. 57. Вып. 1. С. 3–92. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле // Укр. матем. журнал. 1955. Т. 7. № 1. С. 5–17. (Совм. с Д.Н. Зубаревым.)

Об аналитическом продолжении обобщенных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 4. С. 717–719. (Совм. с О.С. Парасюком.)

О вычитательном формализме при умножении причинных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 5. С. 585–610. (Совм. с О.С. Парасюком.)

Группа мультипликативной ренормировки в квантовой теории поля // Ж. экспер. и теор. физ. 1956. Т. 30. № 1. С. 77–86. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Введение в теорию квантовых полей. М.: Гостехиздат, 1957. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Приближенные методы вторичного квантования в квантовой теории магнетизма // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 849–853. (Совм. с С.В. Тябликовым.)

Дисперсионные соотношения для комптоновского рассеяния на нуклонах // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 3. С. 529–532. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Дисперсионные соотношения в случаях слабого взаимодействия // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115. № 5. С. 891–893. (Совм. с С.М. Беленьким, А.А. Логуновым.)

Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций // Научн. докл. высшей школы Физ.-матем. науки. 1958. Т. 3. С. 26–35. (Совм. с В.С. Владимировым.)

Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Физматгиз, 1958. (Совм. с Ю.А. Митропольским).

Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.:. Физматгиз, 1958. (Совм. с Б.В. Медведевым, М.К. Поливановым.)

Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд-во АН СССР, 1958. (Совм. с В.В. Толмачевым, Д.В. Ширковым.)

Об аналитическом продолжении обобщенных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 1. С. 15–48. (Совм. с В.С. Владимировым.)

К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 1. С. 52–55.

Об одном вариационном принципе в задаче многих тел // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 2. С. 244–246.

О новом методе в теории сверхпроводимости. 1, 3 // Ж. эксперим. и теор. физ. 1958. Т. 34. Вып. 1. С. 58–65, 73–79.

К вопросу об индефинитной метрике в квантовой теории поля // Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки. 1958. Т. 2. С. 137–142. (Совм. с Б.В. Медведевым, М.К. Поливановым.)

Некоторые проблемы квантовой теории поля // Тр. III Всес. матем. съезда. 1958. Т. 3. С. 514–521. (Совм. с Д.В. Ширковым.)

Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций // Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки. 1958. Т. 3. С. 26–35. (Совм. с В.С. Владимировым.)

On a variant of the theory with indefinite metric // Proc. VIII Internat. Conf. High Energy Phys. Geneva, 1958. P. 129–130.

Probleme der Theorie der Dispersionsbeziehungen // Fortschr. Phys. 1958. V. 6. № 4/5. P. 169–245. (Совм. с Б.В. Медведевым, М.К. Поливановым.)

A new method in the theory of superconductivity // Fortschr. Phys. 1958. V. 6. № 11/12. P. 605–682. (Совм. с В.В. Толмачевым, Д.В. Ширковым.)

О принципе компенсации в методе самосогласованного поля // Успехи физ. наук. 1959. Т. 67. № 4. С. 549–580.

О методе дисперсионных соотношений и теории возмущений // Ж. эксперим. и теор. физ. 1959. Т. 37. № 3. С. 805–815. (Совм. с А.А. Логуновым, Д.В. Ширковым.)

On some problems of the theory of superconductivity // Physica. 1960. V. 26. Congress of Many Particle problems. Utrecht, P. 1–16.

Об аналитическом продолжении обобщенных функций // Иссл. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного. М., 1960. С. 535–536. (Совм. с В.С. Владимировым.)

Methodes analytiques de la theorie des oscillations nonlineaires // Proc. 10th Internat. Congress Appl. Mech., Amsterdam, 1960. P. 9–25. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

On some mathematical problems of quantum field theory // Proc. Intern. Congress Math., 1958. Cambridge, 1960. P. 19–32. (Совм. с В.С. Владимировым.)

Применение методов Н.И. Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля // Пробл. механ. сплошной среды АН СССР. М., 1961. С. 45–59. (Совм. с Б.В. Медведевым, А.Н. Тавхелидзе.)

Аналитические методы теории нелинейных колебаний // Тр. I Всес. съезда по теор. и прикл. механ. М., 1962. С. 25–35. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

О некоторых математических вопросах квантовой теории поля // Междунар. матем. конгресс в Эдинбурге. М.: 1957, 1962. С. 27–47. (Совм. с В.С. Владимировым.)

Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е, испр. и доп. М., 1963. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

Метод интегральных многообразий в нелиненйной механике // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев, 1963. С. 93–154. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

Поля и кванты. Квантовая теори поля – наука об элементарных частицах и их взаимодействия // Глазами ученого. М.: АН СССР, 1963. С. 159–173. (Совм. с М.К. Поливановым.)

Метод интегральных многообразий в теории дифференциальных уравнений // Тр. IV Всес. матем. съезда. 1964. Т. 2. С. 432–437. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

Математические проблемы квантовой теории поля // Успехи матем. наук. 1964. Т. 20. Вып. 3. С. 31–40.

Об исследовании квазипериодических режимов в нелинейных колебательных системах // Les vibrations forcees dans les systemes non-lineaires. Paris, 1964. P. 181–192. (Совм. с Ю.А. Митропольским.)

Советская математическая школа. М., 1967. С. 1–63. (Совм. с С.Н. Мергеляном.)

Современная математика // Октябрь и научный прогресс. 1. М., 1967. С. 21–69. (Совм. с С.Н. Мергеляном.)

Теория симметрии элементарных частиц // Физ. высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев: Наук. думка, 1967. С. 5–112.

Adler-Weisenberger relation and dispersion sum rules in the theory of strong interactions // Nuovo Cimento. 1967. V. 48. № 1. P. 132–139. (Совм. с В.А. Матвеевым, А.Н. Тавхелидзе.)

Динамические моменты локальных типов составных частиц в квантовой теории поля // Вопр. теории элементарных частиц. Тр. Междун. симп. в Варне. Дубна, 1968. С. 269–279. (Совм. с В.А. Матвеевым, А.Н. Тавхелидзе.)

Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969. (Совм. с А.А. Логуновым, И.Т. Тодоровым.)

Избранные труды в трех томах. Т. 1–3. Киев: Наук. думка, 1969.

Представление *n*-точечных функций // Тр. МИАН. М., 1971. Т. 112. С. 5–21. (Совм. с В.С. Владимировым.)

Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля // Ж. теор. матем. физ. 1972. Т. 12. № 3. С. 305–330. (Совм. с В.С. Владимировым, А.Н. Тавхелидзе.)

Selected works. Part I. Dynamical theory. New York: Gordon and Breach Publ., 1990.

Selected works. Part II. Quantum and classical statistical mechanics. New York: Gordon and Breach Publ., 1991.

Selected works. Part III. Nonlinear mechanics and pure mathematics. New York: Gordon and Breach Publ., 1995.

Selected works. Part IV. Quantum field theory. New York: Gordon and Breach Publ., 1995.

Сборник научных трудов в 12 томах. М.: Наука, 2005–2009.