**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 120, № 3
сентябрь, 1999**

© 1999 г. **О.И. Завьялов***, **А.М. Малокостов***

В.А. ФОК И Н.Н. БОГОЛЮБОВ И ИХ РОЛЬ В СТАНОВЛЕНИИ СОВРЕМЕННОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Обсуждается связь между аксиомами Вайтмана в квантовой теории поля и "S-матричными" аксиомами Боголюбова. Выбор фоковского представления канонических перестановочных соотношений для асимптотических полевых переменных трактуется как условие корректности релятивистской задачи рассеяния.

Осенью этого года в рамках празднования 275-летия Академии наук России в Объединенном институте ядерных исследований (в Дубне) и в Математическом институте им. В.А. Стеклова (в Москве) состоится Международная конференция "Математические проблемы теоретической физики", посвященная юбилею основателя нашего журнала Николая Николаевича Боголюбова – 90-летию со дня рождения. В конце прошлого года научное сообщество России отмечало еще один юбилей – сто лет со дня рождения Владимира Александровича Фока. Эти два события почти вековой давности, разделенные всего десятью годами, подарили миру двух великих физиков-теоретиков, которые хотя и не сотрудничали, насколько нам известно, непосредственно при жизни, но фактически заложили вдвоем фундамент отечественной школы квантовой теории поля. В настоящей статье мы постараемся доказать, что определяющие черты современной квантовой теории поля были предугаданы и корректно поняты в рамках именно этой школы, к вдохновителям которой следует отнести также и Игоря Евгеньевича Тамма. Разумеется, мы с почтением и восхищением признаем также заслуги и других великих – Фейнмана, Дайсона, Томонага, Швингера, Гординга, Гелл-Мана, Вайтмана, Хаага, Салама, Лемана, Циммермана и т.д.

Мы обратимся лишь к одной из тем научного наследия, оставленного этими выдающимися учеными, а именно, к их работам по квантовой теории поля, заложившим фундамент этой науки и определившим ее основные элементы. Уместно напомнить, что математический аппарат квантовой теории поля возник и начал активно развиваться в пятидесятые годы нашего века в рамках так называемого аксиоматического подхода, вызванного к жизни стремлением преодолеть остро ощущавшийся тогда кризис этой науки, желанием разобраться в ее истинной логической структуре, отделить в ней "здравый смысл от бессмыслицы" [1]. Этот подход связан прежде всего с именами Вайтмана, Хаага, Рюэля и др. (см., например, [2, 1, 3]). На его основе такие важнейшие физические

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

результаты, как связь спина частиц и их статистики, теорема о CPT-инвариантности, аналитические свойства четырехточечной функции в импульсном пространстве и многие другие, впервые были доказаны как четкие математические выводы из сформулированного набора аксиом. Соответственно эти результаты существенно стимулировали развитие собственно математики, породив, как, например, известная теорема Баргмана–Холла–Вайтмана [4, 5], новые направления исследований. Аксиоматика Вайтмана сохраняет свое значение и в наши дни, определяя минимальный набор требований, которые следует предъявить к релятивистской квантовой теории поля. Для нас здесь важно прежде всего то, что эта аксиоматика была выработана как обобщение на случай взаимодействия тех результатов, которые были получены Фоком в его знаменитом построении свободных релятивистских полей.

Боголюбов же убедительно показал, что квантовая теория поля в ее современной трактовке действительно корректно реализуема, по крайней мере пертурбативно. В конце 50-х годов научное соообщество было весьма озабочено проблемой обоснования так называемых дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния сильно взаимодействующих частиц. Тогда казалось, что метод дисперсионых соотношений способен привести к построению полного динамического описания сильных взаимодействий независимо от квантовой теории поля. Именно в связи с дисперсионными соотношениями Боголюбов предложил свою версию аксиоматического подхода к проблеме [7, 8].

Основным объектом этого подхода явилась непосредственно матрица рассеяния вне массовой поверхности, удовлетворяющая знаменитому боголюбовскому условию причинности (см. ниже). Опираясь на условие причинности, Боголюбов действительно получил первое строгое доказательство дисперсионных соотношений. Однако с теперешней точки зрения, возможно, даже более важным является следующее обстоятельство. Оказалось, что условие причинности вообще можно положить в саму основу построения (пертурбативной) квантовой теории поля [7]. При этом обнаруживается глубокая связь между вайтмановской и боголюбовской системами аксиом. Один из авторов настоящей статьи уже имел случай кратко писать о соотношении между боголюбовской и вайтмановской аксиоматиками (см. [9, гл. 1]). Ниже мы вернемся к вопросу о корректности понятия поля в рамках боголюбовского S-матричного подхода и обсудим значение фоковского представления алгебры канонических коммутаторов для внутренней непротиворечивости этой теоретической схемы. Мы увидим, в частности, что именно требование фоковости пространства состояний асимптотического свободного in-поля заведомо обеспечивает в рамках боголюбовской теории самосогласованность постановки задачи рассеяния. Такое обсуждение кажется нам сейчас уместным в связи с попыткой [10] использовать в теории поля нефоковские представления. Возвращаясь к основной теме настоящей статьи, отметим еще раз, что с нашей точки зрения основные судьбоносные (для квантовой теории поля) шаги были совершены нашими замечательными соотечественниками – Фоком и Боголюбовым.

Мы не будем говорить здесь о весомом вкладе Фока и Боголюбова в другие области теоретической физики, например о существенном вкладе Фока в вычислительные методы квантовой теории и в общую теорию относительности или же о незабываемом вкладе Боголюбова в квантовую статистическую механику. Мы ограничимся здесь обсуждением наиболее сложной квантовой системы, а именно системы квантовых полей, где квантовая динамика наиболее затруднена нетривиальной математической ситуацией, делающей непригодными почти все, казалось бы, вполне традиционные динамические схемы квантовой механики и оставляющей жизнеспособной лишь наиболее изощренную, но зато и наименее ограничительную логическую схему.

В качестве основной величины в квантовой теории может быть избран, например, гамильтониан H или же матрица рассеяния S. Последняя призвана показать, как далеко физическая система в процессе своей эволюции отклоняется от идеализированной свободной системы в результате взаимодействия. Таким образом, необходимо знать, какова эволюция свободной системы. Иными словами, требуется разделить полный гамильтониан H на сумму "свободной части" и "взаимодействия":

$$H = H_0 + V.$$

С помощью этого разбиения составляют предел

$$\lim_{t_1\to+\infty, t_2\to-\infty} e^{iH_0t_1}e^{-iH(t_1-t_2)}e^{-iH_0t_2}.$$

Если этот предел существует, то он называется матрицей рассеяния:

$$S = \lim_{t_1\to+\infty, t_2\to-\infty} e^{iH_0t_1}e^{-iH(t_1-t_2)}e^{-iH_0t_2}.$$

Как видно, S-матрица состоит из двух "половин" Ω_+^+ и Ω_-, называемых волновыми матрицами:

$$S = \Omega_+^+\Omega_-,$$

где

$$\Omega_+ = \lim_{t\to+\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t},$$
$$\Omega_- = \lim_{t\to-\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}.$$

Пусть $A(t)$ – система гейзенберговых переменных в момент времени t:

$$A(t) = e^{iHt}A(0)e^{-iHt}.$$

С помощью волновых матриц определяют in- и out-операторы:

$$A_{\mathrm{in}}(t) = \Omega_-e^{iH_0t}A(0)e^{-iH_0t}\Omega_-^+, \tag{1}$$
$$A_{\mathrm{out}}(t) = \Omega_+e^{iH_0t}A(0)e^{-iH_0t}\Omega_+^+, \tag{2}$$

Матрица рассеяния тогда выступает как оператор, осуществляющий унитарную связь между in- и out-переменными.

Изложенная простая схема деления движения на "свободную часть" и часть "взаимодействия", однако же, очень уязвима. Дело в том, что упомянутые пределы существуют лишь в жестких предположениях о спектрах операторов H и H_0. В случае же квантовых релятивистских полей выражение полного гамильтониана H в терминах канонических переменных чаще всего плохо определено. Поэтому гейзенберговы переменные в различные моменты времени также определены сингулярно, и эти величины нужно понимать скорее просто как решения квантовых уравнений движения (при этом, конечно, приходится независимо доопределять нелинейные члены, символизирующие в уравнениях коммутаторы $[A(t), H])$. Даже если полный гамильтониан определен корректно, то правильное разбиение $H = H_0 + V$ заведомо сингулярно, что специфично для квантовой теории поля. С другой стороны, формулы типа (1), (2) для in- и out-полей можно интерпретировать независимо от волновых матриц. Именно, in-поле можно рассматривать как свободное поле, асимптотически близкое к взаимодействующему гейзенбергову полю при больших отрицательных временах:

$$A_{\mathrm{in}}(t) \approx A(t)$$

при $t \to -\infty$. Аналогично out-переменные $A_{\mathrm{out}}(t)$ можно понимать как свободное поле, "касательное" по отношению к гейзенбергову полю при "бесконечном" положительном времени, т.е.

$$A_{\mathrm{out}}(t) \approx A(t)$$

при $t \to +\infty$. Матрицу же рассеяния можно определить как унитарный оператор, связывающий in-картину свободных полей со свободной out-картиной:

$$A_{\mathrm{out}} = S^+ A_{\mathrm{in}} S$$

(разумеется, если такая унитарная связь существует). Таким образом, наиболее устойчивая логическая схема может обойтись не только без предположения о существовании волновых матриц, но и без представления о динамике, базирующейся на самосопряженном гамильтониане.

Такая схема естественнее всего строится на основе так называемого фоковского представления канонических перестановочных соотношений или, другими словами, в формализме фоковского пространства (см., например, [11]). Исходным объектом такого построения является *фоковское релятивистское свободное поле*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \left[a^+(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})x^0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})x^0 + i\mathbf{k}\mathbf{x}}\right]. \tag{3}$$

Здесь $a(\mathbf{k})$ и $a^+(\mathbf{k})$ – операторнозначные обобщенные функции, зависящие от трехмерного импульса $\mathbf{k}$ и подчиненные *каноническим перестановочным соотношениям*

$$[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \omega(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{4}$$

Эти операторные обобщенные функции называются соответственно *операторами уничтожения и рождения* частиц. Они действуют в гильбертовом пространстве, содержащем вектор $|0\rangle$, который является *циклическим* по отошению к алгебре операторов рождения и который превращается в нуль под действием любого из операторов уничтожения:

$$a(k)|0\rangle = |0\rangle.$$

Этот вектор называется *вакуумом.* Именно наличие вакуума – отличительная черта фоковского представления канонических перестановочных соотношений (4). Говоря точнее, каждое неприводимое представление алгебры (4), содержащее вакуумный вектор, унитарно-эквивалентно фоковскому. В трудах Фока нам не удалось найти указаний на то, что ему был известен факт существования бесконечного множества нефоковских неприводимых представлений алгебры полевых перестановочных соотношений (такие представления были построены еще фон Нейманом [12], в более общей форме они описаны и классифицированы Гордингом и Вайтманом в [13]). Напротив, из написанного Фоком приложения к знаменитой книге Дирака "Принципы квантовой механики" [14] можно усмотреть, что Фоку была симпатична красивая (но, к сожалению, не соответствующая действительности) мысль, что каждому касательному преобразованию канонических переменных в классической механике отвечает некоторое унитарное преобразование в механике квантовой. Внимательное прочтение этого текста показывает, впрочем, что на самом деле Фок здесь имеет в виду лишь случай конечного числа степеней свободы.

Так или иначе, но построенное Фоком релятивистское свободное поле реализует представление канонических переменных, играющее в физике совершенно исключительную роль. Напомним некоторые из его основных свойств.

1. *Фоковское свободное поле локально-коммутативно*:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0,$$

если точки x и y разделены пространственноподобным интервалом.

2. *Фоковское свободное поле пуанкаре-инвариантно.*

3. *Фоковское свободное поле удовлетворяет условию спектральности.*

Согласно условиям спектральности и релятивистской инвариантности каждое преобразование (Λ, a) из группы Пуанкаре, где Λ – лоренцев поворот, а a – вектор четырехмерной трансляции, представлено в гильбертовом пространстве состояний поля унитарным оператором $U(\Lambda, a)$, таким что

$$U\varphi(x)U^{+} = \varphi(\Lambda x + a).$$

При этом предполагается, что спектр генераторов трансляций

$$p = (E, \mathbf{p}),$$

где E – энергия, а $\mathbf{p}$ – количество движения, состоит из точки $(0, \mathbf{0})$ и множества

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \geqslant m^2 > 0.$$

Мы не станем повторять здесь всем памятные другие фундаментальные утверждения о фоковском свободном поле. Напомним только еще раз, что вайтмановские аксиомы для нетривиального поля $\Phi(x)$ представляют собой практически кальку соответствующих утверждений о свободном поле. В частности, требования локальной коммутативности и спектральности для вайтмановского поля получаются простой заменой в приведенных выше формулах символа $\varphi(x)$ на $\Phi(x)$.

Обратимся теперь к альтернативной боголюбовской аксиоматике (ее история ретроспективно изложена в [15]).

Учитывая произошедшую смену поколений, поясним сначала теперь уже не всем понятный, но популярный в те годы жаргон. Операторы $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $S(\varphi)$ и т.д. *вне массовой поверхности* определяются последовательностью их быстроубывающих по мере увеличения номера коэффициентных функций $A_l(x_1,\ldots,x_l)$, $B_l(x_1,\ldots,x_l)$, $S_l(x_1,\ldots,x_l)$, так что, например, величина

$$S(\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty}\int dx_1\ldots dx_l\,S_l(x_1,\ldots,x_l)\,{:}\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_l){:}$$

определяет (нелинейный) функционал, зависящий от гладкой быстроубывающей функции $\varphi(x)$, где $x=(x_0,\mathbf{x})$ – четырехмерный аргумент (при такой интерпретации двоеточия, окаймляющие произведение полей φ, разумеется, не означают ничего существенного и могут быть без ущерба для понимания опущены). Эти функционалы и называются операторами вне массовой поверхности. Обычно предполагается, что коэффициентные функции A_l, B_l, S_l симметричны по отношению к перестановкам своих аргументов и пуанкаре- (в том числе и трансляционно-) инвариантны:

$$S_l(\Lambda x_1+a,\ldots,\Lambda x_l+a)=S_l(x_1,\ldots,x_l). \tag{5}$$

Последнее означает, что фурье-преобразование этих функций имеет вид

$$\int dx_1\ldots dx_l\,e^{ik_1x_1+\cdots+ik_lx_l}S_l(x_1,\ldots,x_l)=(2\pi)^{4l}\delta\left(\sum k_l\right)\widetilde{S}_l(k_1,\ldots,k_l).$$

Если функция $\widetilde{S}_l$ после выделения всех подобных δ-функций, выражающих трансляционную инвариантность различных компонент связности матрицы рассеяния, является гладкой в окрестности произведения гиперболоидов $k_i^2=m^2$, то говорят, что операторы $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $S(\varphi)$, ... можно сузить на массовую поверхность, т.е. заменить в них аргумент $\varphi(x)$ на фоковское свободное поле (3). Функциональным аргументом полученных таким путем новых функционалов становятся теперь операторы рождения $a^+(\mathbf{k})$ и уничтожения $a(\mathbf{k})$. Введенное ранее двоеточие, окаймляющее произведение полей ${:}\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_l){:}$, теперь интерпретируется как виковское (нормальное) упорядочение операторов рождения и уничтожения. При таком соглашении исходные операторы $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $S(\varphi)$, ... вне массовой поверхности порождают обычные операторы $A,B,S,\ldots$ в фоковском пространстве. При обратной процедуре обычному произведению операторов $A\otimes B$, где умножение обозначено символом $\otimes$, вне массовой поверхности соответствует функционал

$$(A\otimes B)(\varphi)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int dx_1\,dx_2\,\frac{\delta}{\delta\varphi(x_1)}D^-(x_1-x_2)\frac{\delta}{\delta\varphi(x_2)}\right\}A(\varphi_1)B(\varphi_2)\Big|_{\varphi_1=\varphi_2=\varphi},$$

а функция $D^-(x)$ определена равенством

$$D^-(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\,e^{-ikx}\theta(k_0)\delta(k^2-m^2).$$

Как уже говорилось, основной величиной в боголюбовском подходе является продолженная за пределы массовой поверхности матрица рассеяния $S(\varphi)$. Она удовлетворяет следующим требованиям: ее коэффициентные функции пуанкаре-инвариантны (5), она подчинена соотношению

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(S^+\otimes\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}\right)=0\quad\text{при}\quad x\gtrsim y, \tag{6}$$

где символ $\gtrsim$ означает, что точка x либо пространственноподобна y, либо что отвечающее ей время x^0 больше, чем y^0, соотношению

$$S^+(\varphi) \otimes S(\varphi) = S(\varphi) \otimes S^+(\varphi) = 1, \tag{7}$$

а также некоторым условиям *стабильности*, например условиям

$$S(\varphi)|_{\varphi=0} = 1, \tag{8}$$

$$S_1(x) = 0. \tag{9}$$

Соотношение (6) называется *условием причинности*, а соотношение (7) – *условием унитарности* матрицы рассеяния вне массовой поверхности. Величину

$$J(x) = \frac{1}{i} S^+ \otimes \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \tag{10}$$

называют *током*. В терминах тока условие причинности записывается следующим образом:

$$\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)} = 0 \quad \text{при} \quad x \gtrsim y.$$

Из условия (7) следует, что ток вне массовой поверхности эрмитов:

$$J^+(x) = J(x).$$

Из свойств $S(\varphi)$ вытекает также, что при $x_1 \gtrsim x_2 \gtrsim \cdots \gtrsim x_l$ локально справедливо равенство

$$S^+ \otimes \frac{\delta^l S}{\delta\varphi(x_1)\ldots\delta\varphi(x_l)} = i^l J(x_1) \otimes \cdots \otimes J(x_l). \tag{11}$$

Из тех же свойств вытекает также условие локальной коммутативности тока: при $x_1 \sim x_2$ имеем

$$J(x_1) \otimes J(x_2) - J(x_2) \otimes J(x_1) = 0. \tag{12}$$

Наконец, введем гейзенбергово поле $\Phi(x)$ посредством соотношения Янга–Фельдмана:

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int dy\, D^{\mathrm{ret}}(x-y) J(y), \tag{13}$$

где D^{ret} – запаздывающая функция Грина оператора Клейна–Гордона

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{ret}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, e^{-ikx} \frac{1}{m^2 - k^2 + ik_0 \cdot 0} = \\ &= \theta(x_0)\bigl(D^-(x) - D^-(-x)\bigr) = \theta(x_0) D(x), \end{aligned} \tag{14}$$

а $D(x)$ – перестановочная функция Паули–Иордана.

Таким образом, после сужения на массовую поверхность поле $\Phi(x)$ оказывается операторнозначой обобщенной функцией в обычном фоковском пространстве. Можно убедиться [9], что таким путем введенное поле $\Phi(x)$ удовлетворяет всем аксиомам Вайтмана. Напомним для примера, как выводится условие локальной коммутативности поля $\Phi(x)$. Имеем

$$[\Phi(x_1), \Phi(x_2)] = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)] + \int dy_2\, D^{\rm ret}(x_2 - y_2)\, [\varphi(x_1), J(y_2)] + \\ + \int dy_1\, D^{\rm ret}(x_1 - y_1)\, [J(y_1), \varphi(x_2)] + \\ + \int dy_1\, dy_2\, D^{\rm ret}(x_1 - y_1) D^{\rm ret}(x_2 - y_2)\, [J(y_1), J(y_2)]. \qquad (15)$$

Воспользуемся равенством

$$[J(y_1), J(y_2)] = i\left(\frac{\delta J(y_2)}{\delta\varphi(y_1)} - \frac{\delta J(y_1)}{\delta\varphi(y_2)}\right),$$

которое вытекает из определения тока, а также правилом вычисления коммутатора φ и J. Сделав необходимые переобозначения в интегралах, находим

$$[\Phi(x_1), \Phi(x_2)] = \frac{1}{i} D(x_1 - x_2) + i \int dy_1\, dy_2\, D^{\rm ret}(x_2 - y_2) \frac{\delta J(y_2)}{\delta\varphi(y_1)} D^{\rm adv}(x_1 - y_1) - \\ - i \int dy_1\, dy_2\, D^{\rm ret}(x_1 - y_1) \frac{\delta J(y_1)}{\delta\varphi(y_2)} D^{\rm adv}(x_2 - y_2). \qquad (16)$$

Здесь функция $D^{\rm adv}(x)$ определена равенством

$$D^{\rm adv}(x) = D^{\rm ret}(x) - D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk\, e^{-ikx}\, \frac{1}{m^2 - k^2 + ik_0 \cdot 0}$$

и обращается в нуль при $x \lesssim 0$. Она называется *опережающей* функцией Грина скалярного поля. Возвращаясь к коммутатору полей, мы видим, что первое слагаемое в правой части (16) пропорционально перестановочной функции D и, следовательно, исчезает при пространственноподобных x_1 и x_2. Что касается второго слагаемого, то носитель $D^{\rm ret}(x_2 - y_2)$ содержится в множестве $x_2^0 > y_2^0$ (кратко $x_2 > y_2$), носитель величины $\delta J(y_2)/\delta\varphi(y_1)$ – в множестве $y_2 > y_1$ в силу условия причинности, а носитель $D^{\rm adv}(x_1 - y_1)$ – в множестве $y_1 > x_1$. Таким образом, в соответствующий интеграл ненулевой вклад дает лишь область изменения переменных интегирования y_1 и y_2, ограниченная условиями $x_2 > y_2 > y_1 > x_1$. При пространственноподобных x_2 и x_1 эта область оказывается пустой. Третье слагаемое в (16) рассматривается аналогично.

Столь же просто проверяются и все другие вайтмановские аксиомы. В частности, пуанкаре-инвариантность поля $\Phi(x)$ следует из наличия операторов $U(\Lambda, a)$ для фоковского свободного поля $\varphi(x)$ и пуанкаре-инвариантности коэффициентных функций функционала $S(\varphi)$.

В вайтмановской теории само существование матрицы рассеяния (на массовой поверхности) предполагает выполнение ряда дополнительных аксиом – так называемых аксиом Хаага–Рюэля [16], являющихся дополнительными по отношению к основному корпусу предположений Вайтмана. Можно убедиться, что аксиомы Хаага–Рюэля также справедливы для построенного выше поля $\Phi(x)$. Именно так мы рассуждали в [9]. Однако легче увидеть корректность задачи рассеяния в теории Боголюбова непосредственно из его же аксиоматики. Пользуясь соотношением (14), перепишем соотношение Янга–Фельдмана в виде

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int dy\, \theta(t - y^0) D(x - y) J(y),$$

где $t = x^0$.

Ясно теперь, что при $t \to -\infty$ гейзенбергово поле становится сколь угодно близким к полю $\varphi(x)$, т.е. $\varphi_{\mathrm{in}}(x) = \varphi(x)$. С другой стороны, при $t \to +\infty$ поле $\Phi(x)$ сколь угодно близко к свободному полю $\varphi_{\mathrm{out}}(x)$, где

$$\varphi_{\mathrm{out}}(x) = \varphi(x) + \int dy\, D(x - y) J(y). \tag{17}$$

Итак, существование асимптотических полей в рамках боголюбовской аксиоматики – факт самоочевидный. Проблема состоит лишь в том, чтобы доказать, что out-представление канонических перестановочных соотношений унитарно-эквивалентно in-представлению.

Каждое представление операторов рождения и уничтожения $a^+(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$, удовлетворяющих каноническим перестановочным соотношениям, задается своим производящим функционалом $F(f^*, g)$, где f и g – гладкие функции, зависящие от трехмерного импульса. Производящий функционал F должен удовлетворять специальным соотношениям положительной определенности. Матричные элементы всех операторов представления в соответствующем гильбертовом пространстве могут быть получены из этого функционала посредством дифференцирования по f^* и g. Например,

$$\langle 0 | a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \omega(\mathbf{k})\omega(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta f^*(\mathbf{k})} \frac{\delta}{\delta g(\mathbf{p})} F(f^*, g) \bigg|_{f^* = g = 0}. \tag{18}$$

В терминах теоремы реконструкции производящий функционал имеет следующий смысл:

$$\begin{aligned} F(f^*, g) &= \langle 0 | \exp\{f^* \circ a^+\} \exp\{g \circ a\} | 0 \rangle \equiv \\ &\equiv \Big\langle 0 \,\Big|\, \exp\Big\{ \int f^*(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \Big\} \exp\Big\{ \int g(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})} \Big\} \,\Big|\, 0 \Big\rangle, \end{aligned} \tag{19}$$

где $|0\rangle$ – соответствующий циклический (не обязательно вакуумный) вектор данного представления.

Упомянутые выше условия положительности обеспечивают положительность скалярного произведения в соответствующем гильбертовом пространстве. Например, одно из таких условий дается соотношением

$$\sum_{i,j} \bar{z}_i z_j F(f_i^*, f_j) \geqslant 0 \tag{20}$$

для любого конечного набора ненулевых комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots$ и для любого набора пробных функций f_i. Это соотношение символизирует неотрицательность нормы вектора

$$\sum_j z_j \exp\left\{\int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} f_j(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})\right\}|0\rangle.$$

Другие аналогичные соотношения можно легко получить при другом выборе вектора, определяющего правую часть равенств типа (20). Напомним, что производящий функционал, соответствующий фоковскому представлению (если в качестве циклического вектора выбран вакуум), тождественно равен единице: $F(f^*, g) \equiv 1$.

Предположим, что у нас имеются два производящих функционала $F_1(f^*, g)$ и $F_2(f^*, g)$. Эти функционалы определяют два набора канонических операторов a_1, a_1^+ и a_2, a_2^+. Легко проверить, что два этих набора унитарно-эквивалентны, если $F_1 \equiv F_2$, и что унитарный оператор V, осуществляющий эту эквивалентность, может быть явно построен. Именно,

$$V|0_1\rangle = |0_2\rangle, \qquad VP(a_1^+, a_1)|0_1\rangle = P(a_2^+, a_2)|0_2\rangle,$$

где P – произвольно упорядоченный полином по a^+ и a. Если отождествить соответствующие гильбертовы пространства H_1 и H_2 (т.е. положить $|0_1\rangle = |0_2\rangle = |0\rangle$), получится так называемое условие стабильности циклического вектора

$$V|0\rangle = |0\rangle. \tag{21}$$

Отметим, что $F_1 \neq F_2$ не означает, что эти два представления обязательно неэквивалентны. Например, если выбрать $|0_2\rangle \neq |0_1\rangle$ в том же самом неприводимом гильбертовом пространстве H_1, то производящий функционал изменится, но унитарная эквивалентность сохранится.

Покажем теперь, что если $\varphi_{\rm in}(x)$ – свободное поле в фоковском представлении, т.е. $F^{(\rm in)}(f^*, g) \equiv 1$, то при переходе к out-представлению полей $\varphi_{\rm out}(x)$ он не меняется: $F^{(\rm out)}(f^*, g) \equiv 1$. Это собственно последнее, в чем нужно убедиться для самосогласованности боголюбовской схемы.

Выделяя из out-поля (17) положительно- и отрицательно-частотные амплитуды, получим out-операторы рождения и уничтожения. Именно,

$$a_{\rm out}^+(\mathbf{k}) = a^+(\mathbf{k}) + \delta a^+(\mathbf{k}), \tag{22}$$

$$a_{\rm out}(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}) + \delta a(\mathbf{k}), \tag{23}$$

где

$$\delta a^+(\mathbf{k}) = \frac{i}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \int dz\, e^{ikz} \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \times$$
$$\times J_l(z, x_1, \ldots, x_l) {:}\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_l){:}\, dx_1 \ldots dx_l,$$

а $\delta a(\mathbf{k})$ определяется эрмитово сопряженным выражением. Здесь суммирование по l начинается лишь с $l = 2$ в силу упоминавшихся выше условий стабильности, наложенных на S-матрицу.

Рассмотрим результат действия показателя экспоненты $e^{a\circ g+\delta a\circ g}$ на циклический вакуум:

$$
\begin{aligned}
(a\circ g+\delta a\circ g)|0\rangle = \delta a\circ g|0\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2(2\pi)^3}}\frac{1}{l!}\sum_{l=2}^{\infty}\int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})}\frac{d\mathbf{p}_1}{\omega(\mathbf{p}_1)}\dots\frac{d\mathbf{p}_l}{\omega(\mathbf{p}_l)}\times \\
\times\, g(\mathbf{k})g(\mathbf{p}_1)\dots g(\mathbf{p}_l)\delta\bigl(\omega(\mathbf{k})-\omega(\mathbf{p}_1)-\dots-\omega(\mathbf{p}_l)\bigr)\times \\
\times\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1-\dots-\mathbf{p}_l)\tilde{J}_l(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_l)\times \\
\times\, a^+(\mathbf{p}_1)\dots a^+(\mathbf{p}_l)a^+(\mathbf{p}_1)\dots a^+(\mathbf{p}_l)|0\rangle. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

В разложении (24) выживают лишь слагаемые, содержащие только операторы рождения (каждый член, содержащий хотя бы один оператор уничтожения, действуя на вакуум, даст нуль благодаря условию фоковости in-представления). Поскольку $l\geqslant 2$, носитель δ-функции $\delta(\omega(\mathbf{p})-\omega(\mathbf{p}_1)-\dots-\omega(\mathbf{p}_l))$ имеет пустое пересечение с носителем функции $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1-\dots-\mathbf{p}_l)$. Таким образом,

$$e^{a\circ g+\delta a\circ g}|0\rangle = |0\rangle.$$

Аналогично убеждаемся, что

$$\langle 0|e^{a^+\circ f^*+\delta a^+\circ f^*} = \langle 0|.$$

Следовательно, $F^{(\mathrm{out})}(f^*,g)=F^{(\mathrm{in})}(f^*,g)\equiv 1$. Мы видели, что определяющим для существования матрицы рассеяния явилось условие фоковости свободного поля $\varphi_{\mathrm{in}}(x)$. Кажется, что в общем случае, когда в качестве φ_{in} выбрано нефоковское поле, подобный механизм исчезает и говорить о существовании матрицы рассеяния нельзя. Однако в рассмотренной нами в [10] простой нефоковской ситуации сохранение производящего функционала все же имеет место, по крайней мере в первом порядке теории возмущений. Сохраняется ли подобный "спасительный" факт в старших порядках или же при ином выборе нефоковского in-представления канонических перестановочных соотношений, нам еще предстоит выяснить.

Что касается реализации боголюбовской схемы, так сказать, "в железе", то мы думаем, что самый важный вклад Николая Николаевича в квантовую теорию поля – это R-операция, предложенная им в 1956 г. для устранения ультрафиолетовых расходимостей из фейнмановских диаграмм [17–20], а также доказанная им тогда же вместе с О.С. Парасюком теорема (см. [20, 21]) о том, что R-операция определяет корректную обобщенную функцию. Мы не хотим умалить его другие всегда важные результаты, в частности описанные выше аксиоматические построения, но в этих работах решался (и был решен) кардинальный вопрос – а существует ли собственно сама квантовая теория поля? Мы считаем также, что теорема Боголюбова–Парасюка – это вообще самый важный результат в квантовой теории поля 50-х–80-х г., сравнимый по значению с открытием калибровочных полей и способов их квантования.

В самом деле, в те времена (а по существу, и до сих пор, если не иметь в виду суперперенормируемые модели) квантовая теория поля и была, собственно, всего лишь совокупностью диаграмм Фейнмана. Различные математические понятия – континуальный интеграл, уравнения Швингера–Дайсона, T-экспонента и пр. – были, в сущности, лишь эвфемизмами, позволяющими как-то оперировать с этой совокупностью. Математический смысл этих символов восстанавливался только в "тепличных" условиях, когда квантово-полевые гамильтонианы подвергались суровым инфракрасным и ультрафиолетовым обрезаниям, фактически сводящим задачу к случаю конечного числа степеней свободы. Конечно, основные контуры перенормировочной процедуры к тому времени были уже ясны. Перенормировка интерпретировалась как сингулярное переопределение констант связи, масс и волновых функций (отсюда идет и само название процедуры). Понятно было также, что технически дело сводится к введению в T-экспоненту "бесконечных контрчленов", что предполагает софистицированный предельный переход.

Однако конкретная последовательность действий резко усложнялась от порядка к порядку, и предписания, приложимые к произвольной диаграмме, отсутствовали. Вовсе не было уверенности, что перенормировка и впрямь освобождает все без исключения диаграммы от ультрафиолетовых расходимостей.

Николай Николаевич был первым, кто понял, что адекватный проблеме язык – это теория обобщенных функций (весьма мало употреблявшаяся тогда в физической литературе). На этом языке проблема перенормировок каждый раз превращалась в задачу определения произведения некоторого числа обобщенных функций, заданных регулярно на всем координатном пространстве за вычетом некоторого многообразия меньшей размерности. Таким образом, трудно формализуемые рассуждения о "бесконечной голой массе" и конечной "физической массе" заменялись ясными выкладками в терминах теории расширений функционалов. Вот что писал Боголюбов в работе [17]: "Если мы раскроем (фейнмановские) коэффициенты ... , то заметим, что они включают в себя произведения сингулярных функций с сильными особенностями на световом конусе. Правило интегрирования для каждой отдельной из таких функций установлено лишь для ее интеграции с достаточно регулярной функцией, и "интеграл" от их произведения нуждается в особом определении. Непосредственное применение правил интеграции ... приводит к расходимостям, давно известным под именем "ультрафиолетовой катастрофы" ... . Проблема решается следующим путем. Прежде всего непосредственно определяются указанные функционалы для специального класса функций, которые вместе со всеми частными производными до некоторого порядка обращаются в нуль при совпадении любой пары аргументов. Затем производится расширение этих линейных функционалов на класс произвольных регулярных функций. Эта операция неоднозначна. В некоторых случаях, впрочем, эта неоднозначность соответствует произволу в ренормировке масс частиц, констант связи и единиц измерения полей."

А вот как может быть решена эта проблема в рамках той же боголюбовской аксиоматики.

В теории возмущений матрицу рассеяния представляет ряд по степеням константы связи g:

$$S(\varphi) = 1 + gS^{(1)}(\varphi) + g^2 S^{(2)}(\varphi) + \cdots .$$

Соответственно ток $J(x)$ имеет вид

$$J(x) = gj(x) + g^2 J^{(2)}(x) + g^3 J^{(3)}(x) + \cdots ,$$

где $gj(x)$ называется затравочным током и определяет характер взаимодействия между частицами. Условия унитарности, причинности и другие требования, налагаемые на

S-матрицу, понимаются в смысле формальных степенных рядов, т.е. при любом N они должны выполняться для "оборванного" ряда

$$1+\sum_{n=1}^{N} g^n S^{(n)}(\varphi)$$

с точностью до членов порядка g^{N+1}. Пусть $j(x)$ – локальный полином свободного поля. Тогда локальный полином $gL(x)$ такой, что

$$j(x)=\frac{\partial}{\partial\varphi}L(x),$$

называется *затравочным лагранжианом взаимодействия*. Соотношение

$$j(x)=\frac{1}{i}\frac{\delta S^{(1)}}{\delta\varphi(x)}$$

определяет матрицу рассеяния в первом порядке теории возмущений:

$$S(\varphi)\simeq 1+gS^{(1)}=1+ig\int L(x)\,dx.$$

Условия релятивистской инвариантности и унитарности требуют соответственно, чтобы лагранжиан $gL(x)$ был инвариантным:

$$U^{+}_{(\Lambda,a)}L(x)U_{(\Lambda,a)}=L(\Lambda x+a),$$

и эрмитовым:

$$L^{+}(x)=L(x).$$

Чтобы интеграл в правой части существовал, нужно предположить, что $L(x)$ не содержит "вакуумного" слагаемого, т.е. слагаемого, не зависящего от поля φ. Следует считать сверх того, что $L(x)$ не содержит линейного и квадратичного по полю φ слагаемых.

Покажем, что выбор затравочного лагранжиана взаимодействия фиксирует теорию и в старших порядках с точностью до произвола в определении хронологического произведения локальных мономов. Для этого перепишем соотношение (11) в n-м порядке теории возмущений. Поскольку разложение $J(x)$ по степеням g начинается с члена $gj(x)$, сомножитель S в правой части дает единичный вклад в этот порядок, и мы имеем

$$\frac{\delta^n S^{(n)}}{\delta\varphi(x_1)\ldots\delta\varphi(x_n)}=i^n j(x_{i_1})\otimes\cdots\otimes j(x_{i_n})$$

$$(x_{i_1}\gtrsim x_{i_2}\gtrsim\cdots\gtrsim x_{i_n}).$$

Это равенство можно трактовать как "дифференциальное уравнение" для определения $S^{(n)}$. Его решение имеет вид

$$S^{(n)}(\varphi)=\frac{i^n}{n!}\int dx_1\ldots dx_n\,RT'_V(L(x_1)\ldots L(x_n)),$$

где штрих и символ R, которыми помечено T-произведение, подчеркивают, что хронологическое упорядочение под знаком интеграла определено с точностью до произвола в выборе R-операции R, а V означает, что из разложения этой величины по диаграммам Фейнмана удалены все слагаемые, содержащие вакуумные поддиаграммы, т.е. поддиаграммы без внешних линий.

Таким образом, мы приходим к стандартным ответам (перенормированной) теории возмущений. Мы не будем здесь приводить еще раз полное определение R-операции Боголюбова (подробнее см., например, [7]).

Так или иначе несомненно, и в заключение скажем это еще раз, что по существу контуры современной квантовой теории поля были предвосхищены в основополагающих работах В. А. Фока и Н. Н. Боголюбова. Печально, что мы (авторы имеют в виду прежде всего себя), кому повезло жить и работать рядом с этими замечательными учеными, как это, увы, часто случается в "своем отечестве", не разглядели уже тогда в них корифеев, намного опередивших свое время и проложивших неизведанные до них пути в теории поля. Конечно, в те ранние годы нельзя было предсказать, по какой извилистой и длинной дороге реально пойдет эта замечательная наука от вайтмановских аксиом и дисперсионных соотношений до калибровочных симметрий, квантовой хромодинамики, конфайнмента и всего другого. Впрочем, в это новейшее развитие теории прямые ученики и духовные наследники Фока и Боголюбова также внесли существенный вклад.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00033. Работа одного из авторов (О.И.З.) была поддержана грантом поддержки научных школ.

Список литературы

[1] *Р. Йост.* Общая теория квантованных полей. М.: Мир, 1967.

[2] *Р. Стритер, А. Вайтман. PCT*, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.

[3] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

[4] *V. Bargmann.* Ann. Math. 1954. V. 59. № 2. P. 1.

[5] *D. Hall, A. S. Wightman.* Math. Phys. Medd. Danske Vid. Selsk. 1957. V. 31. № 5.

[6] *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

[7] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.

[8] *Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Гостехиздат, 1958.

[9] *О. И. Завьялов.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.

[10] *О. И. Завьялов, А. М. Малокостов.* Квантовая теория поля с нефоковскими асимптотическими полями: существование S-матрицы. ТМФ. 1999. Т. 121 (в печати).

[11] *В. А. Фок.* Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1957.

[12] *J. von Neumann.* Compos. Math. 1938. V. 6. P. 1.

[13] *L. Garding, A. S. Wightman.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. V. 40. P. 617.

[14] *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.

[15] *Б. В. Медведев.* УМН. 1994. Т. 49. № 5. С. 83.

[16] *R. Haag.* Phys. Rev. 1958. V. 112. P. 669.

[17] *Н. Н. Боголюбов.* ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 217.

[18] *Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк.* ДАН СССР. 1955. Т. 100. № 1. С. 25.

[19] *N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk.* Acta Math. 1957. V. 97. P. 227.

[20] *Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 5. С. 585.

[21] *О. С. Парасюк.* Укр. мат. ж. 1960. Т. 12. № 3. С. 287.

Поступила в редакцию 25.I.1999 г.