1994 г. сентябрь — октябрь *т. 49, вып. 5(299)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

Н. Н. БОГОЛЮБОВ И НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА

А. М. Самойленко

> "... Чем и может быть объяснена, по мнению авторов, необходимость выделения общей совокупности вопросов по теории нелинейных колебаний в особую науку, которой можно было бы присвоить наименование НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА".
>
> Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, 1932 г. [1, с. 5], Киев

В 1932 г. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов сообщили в Парижскую академию наук свои первые результаты, относящиеся к разработке новых методов исследования нелинейных колебаний [2]. Развитие этих результатов послужило основой их первой совместной монографии по теории нелинейных колебаний "Новые методы нелинейной механики" [1], сданной ими в издательство в том же 1932 г. и пролежавшей там два года. Эта монография явилась началом цикла фундаментальных исследований авторов в математической физике, продолжавшихся ряд десятилетий. За этот период Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов создали совершенно новую область математической физики, которую назвали *нелинейной механикой.*

Созданию новых методов предшествовал глубокий анализ метода малого параметра Пуанкаре, проведенный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в монографии "Про деякі формальні розклади нелінійної механіки" в 1934 г. [3]. выяснив причины появления секулярных членов $t^\alpha \sin\beta t, t^\alpha \cos\beta t$ в разложении по степеням малого параметра на примере уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\mu f\left(x,\frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$

они убедительно доказали, что наличие секулярных членов в разложениях, получаемых методом Пуассона, "засоряет" эти разложения, делает их непригодными для качественной характеристики решений на бесконечном интервале времени, в частности, для выяснения свойств периодичности, устойчивости и т.д.

Методы, предложенные Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым не имеют этих недостатков и приводят к асимптотическим разложениям решений, не содержащим секулярных членов. Впервые в мире был предложен практически удобный и строго математически обоснованный аппарат исследования колебательных процессов с широким диапазоном приложений. Уже в следующей монографии "Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний" в 1934 г. [4] Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов, сочетав свои методы с результатами А. Пуанкаре и А. Данжуа по теории динамических систем на торе, провели качественный анализ колебательных систем второго порядка, установив для них наличие квазипериодических решений и описав их свойства устойчивости. Особо следует отметить установление авторами фактического соответствия свойств квазипериодичности и устойчивости первых приближений аналогичным свойствам точных решений.

Основным моментом в этих исследованиях является доказательство существования инвариантной кривой некоторого точечного отображения T. Связь между существованием инвариантной кривой отображения T и свойством квазипериодичности решений соответствующих дифференциальных уравнений была установлена еще в работах Дж. Биркгофа по теории канонических систем с двумя степенями свободы. Однако знаменитому американскому математику, в отличие от авторов монографии, не удалось сформулировать критерии существования этой инвариантной кривой. В сущности, в своей монографии Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов заложили основы метода интегральных многообразий нелинейной механики и создали общие алгоритмы асимптотического интегрирования уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2}$$

где

$$f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)=\sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

$f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ – полиномы относительно x, $\frac{dx}{dt}$. Метод нахождения асимптотических решений уравнения (2) различает нерезонансный случай, когда $\omega \neq \frac{p}{q}\nu+\varepsilon\Delta$, и резонансный, когда $\omega=\frac{p}{q}\nu+\varepsilon\Delta$. Здесь p и q взаимно простые (практически небольшие) целые числа, $\varepsilon\Delta$ – расстройка между ω и $\frac{p}{q}\nu$. Решение уравнения (2) ищется в виде

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\nu t,\psi)+\varepsilon^2u_2(a,\nu t,\psi)+\cdots+\varepsilon^n u_n(a,\nu t,\psi)+\cdots, \tag{3}$$

где $u_1(a,\nu t,\psi), u_2(a,\nu t,\psi),\ldots,u_n(a,\nu t,\psi)$ – периодические функции $\nu t, \psi$ с периодом 2π, а a и $\psi=\frac{p}{q}\nu t+\theta$ – решения уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\varepsilon A_1(a,\theta)+\varepsilon^2A_2(a,\theta)+\cdots+\varepsilon^nA_n(a,\theta)+\cdots,\\ \frac{d\psi}{dt}&=\frac{p}{q}\nu+\varepsilon B_1(a,\theta)+\varepsilon^2B_2(a,\theta)+\cdots+\varepsilon^nB_n(a,\theta)+\cdots.\end{aligned} \tag{4}$$

Функции $u_i(a,\nu t,\psi)$, $A_i(a,\nu t,\psi)$, $B_i(a,\nu t,\psi)$, $i=\overline{1,n}$, выбираются из условия, чтобы выражение (3) в силу уравнений (4) удовлетворяло исходному уравнению (2) с точностью до величин порядка ε^{n+1}. Исходя из физических соображений, указан однозначный способ выбора этих функций, проведен анализ алгоритма в первом приближении. В нерезонансном случае амплитудное уравнение (4) не зависит от фазы и интегрируется в явном виде. В резонансном – эти уравнения (4) являются автономными, что упрощает их качественный анализ и интегрирование.

Удивление вызывает то, что совершенно незамеченным специалистами осталось глубокое исследование, проведенное в монографии, квазипериодических решений системы двух автономных уравнений вида

$$\frac{d^2q_k}{dt^2} + \omega_k^2 q_k = \varepsilon f_k\left(q_1, q_2, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}\right) \qquad (k = 1, 2), \tag{5}$$

где ε – малый параметр, f_k – аналитические функции, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ – иррационально и удовлетворяет известному неравенству Лиувилля. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов для (5) не только доказали существование инвариантного тора, заполненного квазипериодическими траекториями, но и установили причину неаналитической зависимости тора от параметра ε. К нашему большому сожаления, лишь в 1963 г. на этом сакцентировал внимание Н. Н. Боголюбов в своих лекциях [5].

Первая реакция математической общественности на новые методы была неоднозначной. Высказывались предостережения против широкого практического применения созданных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым методов, особенно в задачах радиотехники и аэродинамики. Так, на 2-м Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде в 1934 г. А. А. Марков (впоследствии чл.-корр. Российской АН) в своем докладе резко критиковал их теорию стационарных колебательных процессов, пытаясь показать ее ошибочность и неприменимость для практических приложений. Время подтвердило правоту Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, а в 1945 г. Н. Н. Боголюбов опубликовал свою монографию [8], в которой дал дал строгое математическое обоснование этим методам.

Естественно, что новые методы нелинейной механики были вызваны острыми потребностями практики 20–30-х годов, в первую очередь потребностями радиотехники, а над созданием таких методов одновременно работали крупные ученые того времени, такие как Ван-дер-Поль, П. Фату, Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов. Однако лишь Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову удалось дальше всех продвинуться на пути создания таких методов.

Зародившиеся в [4] идеи метода интегральных многообразий Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов развили в монографии "Приближенные методы нелинейной механики в приложении к изучению возмущений периодических движений и к различным относящимся сюда резонансным явлениям" [6]. В монографии изложена теория возмущений семейств периодических решений и, по-видимому, впервые высказана идея одночастотного метода нелинейной механики, сыгравшего в последующем чрезвычайно важную роль в практическом использовании новых методов.

Создание авторами асимптотического метода было завершено в монографии "Введение в нелинейную механику" в 1937 году [7]. Здесь рассматривается уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{6}$$

где

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{n=0}^{N}\left[f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\cos\lambda_n t + f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\sin\lambda_n t\right],$$

f_0, f_n^*, f_n^{**} – некоторые полиномы относительно x, $\frac{dx}{dt}$, ε – малый параметр, и для него предлагается алгоритм асимптотического интегрирования. Существенно новым является то, что правая часть уравнения (6) квазипериодическая по t. Это обстоятельство усложняет алгоритм получения асимптотических разложений как в резонансном, так и в нерезонансном случаях. Однако идеи Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова построения решений в виде разложения (3) оказались пригодными и для этого уравнения. В монографии детализируется асимптотический алгоритм для частных случаев уравнения (6) (консервативных, автоколебательных, канонических уравнений).

При получении уравнений первых приближений Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов обнаружили глубокую связь асимптотического алгоритма с методом усреднения в небесной механике. Они показали, что уравнения первого приближения получаются из точных путем усреднения по времени последних и сформулировали это в виде общего принципа, назвав его *принципом усреднения*. Строгое математическое обоснование эти идеи получили лишь в монографии Н. Н. Боголюбова [8] (1945 г.). Асимптотический метод в [7] иллюстрирован на многочисленных примерах из радиотехники, что сделало эту монографию чрезвычайно популярной среди прикладников и инженеров.

Поражает мастерство подбора рассмотренных в монографии примеров. Отдельные из них послужили в последующем отправным моментом для развития новых подходов в теории дифференциальных уравнений, устойчивости и т.д.

Так, в качестве примера в [7] асимптотическим методом исследована ударная модель часов, дифференциальное уравнение которой содержит δ-функцию Дирака. Впоследствии этот пример сыграл определяющую роль для разработки математической теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, о чем речь будет идти позже.

С 1937 г. по 1945 г. математические интересы Н. Н. Боголюбова были в стороне от проблем нелинейной механики. В этот период совместно с Н. М. Крыловым он работал над общей теорией меры в нелинейной механики. В 1937 г. они издают фундаментальную монографию "Загальна теорія міри в нелінійній механіці" [9]. Работая над теорией стохастических динамических систем, издают в 1939 году монографии: "Про деякі проблеми ергодичної теорії стохастичних систем" [10], "Про рівняння Фоккера–Планка, що виводяться з теорії пертурбацій методом, основанним на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана" [11]. В 1941 г. появилась их совместная публикация по проблемам стохастической динамики [12].

В 1945 г. вышла в свет упоминавшаяся выше фундаментальная монография Н. Н. Боголюбова "О некоторых статистических методах в математической физике" [8]. Центральное место в монографии занимает проблема математического обоснования методов нелинейной механики. Она сводится к установлению соответствия между решениями точных и усредненных уравнений.

Посредством особых замен переменных точные уравнения приводятся к форме, в которой правые части отличаются от правых частей усредненных уравнений членами высших порядков малости, что облегчает решение возникающих здесь проблем математического обоснования предложенных методов.

Относящиеся к асимптотическим методам результаты монографии [8] содержатся в нескольких теоремах Н. Н. Боголюбова. Если учесть, что за весь 30-летний период работы в области нелинейной механики Н. Н. Боголюбов доказал всего лишь девять таких теорем, было бы несправедливо обойти вниманием хотя бы одну из них. Поэтому приступим к детальному изложению основных результатов Н.Н. Боголюбова из монографии [8].

Математической моделью процессов, изучаемых в нелинейной механике, как отмечено в [8], является система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x), \tag{7}$$

правая часть которой обладает определенным свойством "возвращаемости по времени", так что существует среднее

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,\xi)\,dt. \tag{8}$$

Наряду с [7] рассматривается усредненная система уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_0(\xi) \qquad (\tau = \varepsilon t). \tag{9}$$

Предполагается, что $X(t,x)$ непрерывная по t, x и удовлетворяет условиям

$$|X(t,x)| \le M, \qquad |X(t,x') - X(t,x'')| \le \lambda |x' - x''|$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, где λ, M – положительные постоянные, x', x'' – произвольные точки из D, и что предел (8) равномерен по x в области D. Доказывается

ТЕОРЕМА I. *Пусть выполняются приведенные выше условия. Тогда любым сколь угодно малым положительным ρ, η можно сопоставить такое положительное ε_0, что если $\xi(\tau)$ есть решение уравнения* (9), *определенное в интервале $0 < \tau < L$ и лежащее в области D вместе со своей ρ-окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ справедливо неравенство*

$$|x(t) - \xi(\varepsilon t)| < \eta,$$

в котором $x(t)$ – решение уравнения (7), *совпадающее с $\xi(\varepsilon t)$ при $t = 0$.*

Вторая теорема Н.Н. Боголюбова из [8] относится к установлению соответствия между положением равновесия $\xi = \xi_0$ усредненного уравнения

$$X(\xi_0) = 0$$

и ограниченным на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ решением точного уравнения (7). Приведем эту теорему, следуя [8]:

Теорема II. *Пусть выполняются следующие условия:*

a) *уравнение*

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_0(\xi) \qquad (\tau = \varepsilon t)$$

имеет постоянное решение $\xi = \xi_0$;

b) *вещественные части всех n характеристических показателей матрицы* $H = \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi}$ *отличны от нуля;*

c) *можно найти такую* ρ*-окрестность* D_ρ *точки* ξ_0, *что функция* $X(t,x)$ *и ее частные производные первого порядка по* x_k *ограничены и равномерно непрерывны по* x *в области*

$$-\infty < t < \infty, \qquad x \in D_\rho;$$

d) *в каждой точке* D_ρ

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(t,x)\,dt \to X_0(x)$$

равномерно по t *в интервале* $(-\infty,\infty)$.

Тогда можно указать такие положительные ε_0, σ_0, σ_1 *(причем* $\sigma_0 \le \sigma_1 < \rho$*), что каждого положительного* ε, *меньшего* ε_0, *уравнение* (7) *имеет одно единственное решение* $x = x^*(t)$, *определенное на интервале* $(-\infty,\infty)$, *для которого*

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Это решение при любом ε *таком, что* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *обладает следующими свойствами:*

1) *Можно найти такую функцию* $\delta(\varepsilon)$, *стремящуюся к нулю вместе с* ε, *что*

$$|x^*(t) - \xi_0| \le \delta(\varepsilon).$$

2) *Если* $\{\tau_m\}$ *есть последовательность вещественных чисел, для которой*

$$X(t+\tau_m, x) - X(t,x) \to 0, \qquad m \to \infty,$$

равномерно по (t,x), $\{-\infty < t < \infty, x \in D_\rho\}$, *то равномерно по* t

$$x^*(t+\tau_m) - x^*(t) \to 0, \qquad m \to \infty.$$

3) *Пусть* $x = x(t)$ *представляет любое решение уравнения* (7), *удовлетворяющее при некотором* t_0 *неравенству*

$$|x(t_0) - \xi_0| < \sigma_0.$$

Тогда, если вещественные части всех характеристических показателей отрицательны, расстояние $|x(t) - x^*(t)|$ *экспоненциально стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Если вещественные части всех характеристических показателей положительны, можно найти такое $t_1 > t_0$, *что*

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \tag{10}$$

Если s *вещественных частей рассматриваемых показателей отрицательны, а остальные* $n-s$ *положительны, в области* D_{σ_0} *существует* s*-мерное многообразие* $\mathfrak{M}_{t_0}$ *такое, что из соотношения* $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ *вытекает экспоненциальное стремление к нулю при* $t \to +\infty$ *расстояния* $|x^*(t) - x(t)|$, *а из соотношения* $x(t_0) \notin \mathfrak{M}_{t_0}$ *вытекает справедливость неравенства* (10).

Третья теорема [8] посвящена установлению соответствия между предельным циклом усредненного уравнения (8) и интегральным многообразием исходного уравнения (7). При установлении этого соответствия Н. Н. Боголюбов изложил свою теорию интегральных многообразий. В отличие от локальной теории периодических решений Пуанкаре, трудности которой связаны с разрешимостью системы обыкновенных уравнений с конечным числом неизвестных и преодолеваются с помощью теоремы о неявных функциях, в теории интегральных многообразий приходится иметь дело с функциональными уравнениями, решения которых в соответствующих пространствах характеризуют используемые интегральные многообразия. Авторская формулировка третьей теоремы Н. Н. Боголюбова следующая.

Теорема III. *Пусть выполнены следующие условия:*

a) *уравнение* (9) *имеет периодическое решение*

$$\xi = \xi(\omega\tau), \qquad \xi(\varphi + 2\pi) = \xi(\varphi); \tag{11}$$

b) *вещественные части всех* $n-1$ *характеристических показателей уравнения в вариациях, соответствующего периодическому решению* (11), *отличны от нуля*;

c) *можно найти такую* ρ*-окрестность* D_ρ *орбиты этого периодического решения, что функция* $X(t,x)$ *и ее частные производные первого порядка по* x_k *ограничены и равномерно непрерывны по* x *в области*

$$-\infty < t < \infty, \qquad x \in D_\rho;$$

d) *в каждой точке* D_ρ

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(t,x)\,dt \to X_0(x), \qquad T \to \infty$$

равномерно по t *в интервале* $(-\infty, \infty)$.

Тогда можно указать такие положительные ε_0, σ_0, σ_1, $\sigma_0 < \sigma_1 < \rho$, что каждого положительного ε, меньшего ε_0, уравнение (7) *имеет единственное интегральное многообразие S_t, лежащее для всех вещественных t в области D_{σ_0}. Это интегральное многообразие при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ обладает следующими свойствами:*

1) *S_t допускает параметрическое представление вида*

$$x = f(t, \theta),$$

где $f(t,\theta)$ определено для всех вещественных t, θ, обладает периодом 2π по переменной θ и можно найти такие функции $\delta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, стремящиеся к нулю вместе с ε, что

$$|f(t,\theta) - \xi(\theta)| \le \delta(\varepsilon); \qquad |f(t,\theta') - f(t,\theta'')| \le \eta(\varepsilon)|\theta' - \theta''|$$

для любых вещественных t, θ, θ', θ''.

2) *Можно построить функцию $F(t,\theta)$, определенную для всех вещественных t, θ, обладающую периодом 2π по θ и удовлетворяющую неравенствам*

$$|F(t,\theta)| \le \delta^*(\varepsilon); |F(t,\theta') - F(t,\theta'')| \le \eta^*(\varepsilon)|\theta' - \theta''|, \tag{12}$$

в которых $\delta^*(\varepsilon)$, $\eta^*(\eta)$ стремятся к нулю вместе с ε таким образом, что всякое решение уравнения (7), *принадлежащее многообразию S_t представимо в виде*

$$x = f\big(t, \theta(t)\big), \tag{13}$$

где $\theta = \theta(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon F(t,\theta), \tag{14}$$

и, наоборот, выражение (13), *в котором $\theta(t)$ есть решение уравнения* (14), *всегда является решением* (7), *принадлежащим многообразию S_t.*

2′) *Если $\{\tau_m\}$ есть последовательность вещественных чисел, для которой*

$$X(t + \tau_m, x) - X(t,x) \to 0, \qquad m \to \infty,$$

равномерно по отношению к t, x, $\{-\infty < t < \infty, x \in D_\rho\}$, то тогда равномерно по отношению к t, θ

$$f(t + \tau_m, \theta) - f(t,\theta) \to 0; \qquad F(t + \tau_m, \theta) - F(t,\theta) \to 0, \quad m \to \infty.$$

3) *Пусть точка $x = x(t)$ представляет любое решение уравнения* (7), *удовлетворяющее при некотором t_0 соотношению*

$$x(t_0) \in D_{\sigma_0}.$$

Тогда, если вещественные части всех $n-1$ вышеупомянутых характеристических показателей отрицательны, расстояние $\rho\{x(t), S_t\}$ точки $x(t)$ до множества S_t экспоненциально стремится к нулю при $t \to +\infty$. Если все эти вещественные части положительны, можно найти такое $t_1 > t_0$, что

$$x(t_1) \notin D_{\sigma_1}. \tag{15}$$

Если s рассматриваемых вещественных частей отрицательны, а остальные $n-1-s$ положительны, то в области D_{σ_0} существует $(1+s)$-мерное многообразие $\mathfrak{M}_{t_0}$ такое, что из соотношения $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает экспоненциальное стремление к нулю расстояния $\rho\{x(t), S_t\}$ при $t \to +\infty$, а из соотношения $x(t_0) \notin \mathfrak{M}_{t_0}$ вытекает справедливость соотношения (15).

Эти три теоремы образуют фундамент Нелинейной механики Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

В монографии [8] имеется теорема IV, которая, как отмечает автор, представляет собой аналог теорем II, III для случая колебательных систем второго порядка. Она утверждает существование инвариантного тороидального многообразия системы дифференциальных уравнений вида (5) в окрестности квазистатического положения равновесия ее усредненной системы уравнений.

Существенно замечание Н. Н. Боголюбова относительно случая, когда среди вещественных частей характеристических чисел матрицы H имеются нулевые и положительные. В этом случае нельзя применить непосредственно теорему II и доказать существование почти периодического решения. Тем не менее, и в этом случае можно воспользоваться асимптотическим методом и установить следующий результат: существует такое положительное $\sigma < \rho$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ всякое решение уравнений (7), исходящее из точки, принадлежащей к σ-окрестности ξ_0, но не лежащей на некотором особом многообразии, с течением времени выйдет из этой окрестности.

Теоремы I–IV вместе с этим замечанием полностью решают задачу о соответствии между точными и приближенными решениями исходного уравнения.

Не поддающимся исследованию остался лишь случай, когда среди собственных чисел матрицы H нет с положительной, но есть с нулевой вещественной частью. И для этого случая Н. Н. Боголюбов предлагает оригинальное решение путем привлечения высших приближений асимптотических разложений.

В этом месте монографии следует примечательная фраза о монографии, следа которой так и не удалось найти. Приведем ее дословно: "Этот, в ряде вопросов, весьма важный и математически интересный случай может быть иногда исследован с помощью перехода к уравнениям высших приближений, которые были выведены в работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова "Теория возмущений в нелинейной механике"". Лишь в 1950 году в сборнике трудов Института строительной механики АН УССР появилась статья Н. Н. Боголюбова с тем же названием [13], по-видимому, частично восстанавливающая текст потерянной в годы войны монографии.

Высшие приближения строятся в [8] для уравнения (7), правая часть которого представима рядом

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(x), \tag{16}$$

и определяются выражением

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \cdots + \varepsilon^m F_m(t,\xi), \tag{17}$$

в котором

$$F_k(t,\xi) = \sum_{\mu\neq 0} e^{i\mu t} F_{k,\mu}(\xi), \tag{18}$$

а ξ есть решение уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \cdots + \varepsilon^m P_m(\xi). \tag{19}$$

Функции $F_1, \dots, F_m, P_1, \dots, P_m$ выбираются из условия, чтобы формула (17), как замена переменных $x \to \xi$, преобразовала уравнение (7), к уравнению, совпадающему с (19) с точностью до величин ε^{m+1}. В монографии указан алгоритм однозначного построения функций $F_1, \dots, F_m; P_1, \dots, P_m$ для произвольного m и отмечается, что если считать (16) конечной суммой, а $X_\nu(x)$ – полиномами по x, то $F_1, \dots, F_m; P_1, \dots, P_m$ определяются также конечными суммами, коэффициенты которых полиномы по ξ.

Изложенный в [8] алгоритм получения приближений (17), (19) вошел в историю как метод усреднения нелинейной механики Н. Н. Боголюбова.

К идее одночастотного метода Н. Н. Боголюбов возвращается в 1949 г. в работе "Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы" [14]. В этой работе рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^{N} c_{kq} x_q \doteq \varepsilon f_k^{(1)}(x_1, \dots, x_N) + \varepsilon^2 f_k^{(2)}(x_1, \dots, x_N) + \cdots, \tag{20}$$

в предположении существования (при $\varepsilon = 0$) двупараметрического семейства периодических решений вида

$$x_k = a\varphi_k e^{i(\omega t+\theta)} + a\overline{\varphi}_k e^{-i(\omega t+\theta)}. \tag{21}$$

Суть предложенного Н. Н. Боголюбовым одночастотного метода состоит в том, что решение системы уравнений (20) ищется в виде двупараметрического семейства функций

$$x_k = a\varphi_k e^{i\psi} + a\overline{\varphi}_k e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a,\psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a,\psi) + \cdots, \tag{22}$$

где a и ψ – решения уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots, \end{aligned} \tag{23}$$

$u_k^{(1)}(a,\psi), u_k^{(2)}(a,\psi)$ – периодические по ψ периода 2π функции, для нахождения которых предлагается легко реализуемый на практике алгоритм.

Одночастотный метод Н. Н. Боголюбова значительно расширил область применимости асимптотических методов нелинейной механики.

В 1950 году в работе "теория возмущений в нелинейной механике" [13] Н. Н. Боголюбов излагает теорию метода усреднения, следуя монографии [8], максимально приспосабливая метод для практических применений. Изложенную теорию он иллюстрирует на мастерски подобранном примере маятника с вибрирующей точкой подвеса, уравнение которого имеет вид

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{g-a\omega^2\sin\omega t}{l}\sin\theta=0. \tag{24}$$

Н. Н. Боголюбовым впервые было доказано, что неустойчивое верхнее положение равновесия маятника $\theta=\frac{\pi}{2}$ можно сделать устойчивым за счет достаточно высокой частоты вибрации ω.

Молва утверждает, что еще в 1942 году в споре с М. А. Лаврентьевым по этому поводу Н. Н. Боголюбов выиграл пари, показав математическое доказательство этого факта. Косвенным подтверждением этому является приведенная выше фраза из монографии 1945 года о работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова "Теория возмущений в нелинейной механике".

Лишь через год, в 1951 году, в ЖЭТФ появляется известная работа П. Л. Капицы "Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса" [15], в которой излагаются аналогичные результаты об устойчивости верхнего положения маятника и приводится экспериментальное подтверждение этого факта.

Уместно привести здесь оценку снизу частоты ω, при которой верхнее положение становится устойчивым. Это известная формула Н. Н. Боголюбова

$$\omega>\frac{\sqrt{2gl}}{a}, \tag{25}$$

где l – длина маятника, а a – амплитуда вертикальных колебаний точки подвеса.

Пример стимулировал исследования по повышению устойчивости упругих систем при помощи вибрации. В первую очередь речь идет о работах В. Н. Челомея, в которых выясняется природа динамических сил, позволяющих статически неустойчивую систему делать динамически устойчивой.. Исследования этого направления оказались чрезвычайно важными при конструировании различных сложных систем для запросов космоса.

В 1951 г. появляется работа Н. Н. Боголюбова по распространению асимптотических методов на системы с вращающейся фазой, выполненная совместно с Д. Н. Зубаревым, в которой асимптотический метод блестяще применяется к исследованию вращательных движений заряженных частиц в магнитном поле [17].

С 1947 года начинается развитие асимптотических методов и их распространение на широкие классы дифференциальных уравнений в работах большого числа авторов. Одной из первых работ такого рода является статья С. Ф. Фещенко [18], в которой асимптотический алгоритм распространен на линейные дифференциальные уравнения с медленно меняющимися параметрами.

Следующий шаг в развитии асимптотических методов сделан И. М. Раппопортом, монография которого 1954 года "О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений" [19] открывает список монографий по развитию асимптотических методов Крылова–Боголюбова.

Разработка теории асимптотического интегрирования линейных дифференциальных уравнений продолжена в работах учеников С. Ф. Фещенко и подытожена в монографии 1966 года С. Ф. Фещенко, Н. Т. Шкиля и Л. Д. Николенко "Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений" [20].

В 1949 году появляется первая публикация Ю. А. Митропольского по изучению нестационарных явлений, возникающих в колебательных системах при медленном изменении частот и других параметров [21]. С этой работы начинается плодотворная научная деятельность Ю. А. Митропольского в области развития асимптотических методов нелинейной механики. Прежде всего следует отметить разработку в [22], [23] асимптотического алгоритма для колебательных систем с медленно меняющимися параметрами

$$\frac{d}{dt}\left\{m(\tau)\frac{dx}{dt}\right\} + c(\tau)x = \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где $\tau = \varepsilon t$ – "медленное время", $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ – медленно меняющаяся частота внешней периодической силы, F – функция вида f в (2).

Это позволило в дальнейшем изучить нестационарные явления, возникающие при изменении частот и других параметров в нелинейной системе. Особенно глубоки здесь результаты, касающиеся изучения явления медленного прохождения через резонанс в системах типа центрифуги, в роторах турбомашин, гироскопических устройствах и др. Уже в 1955 году эти результаты подытожены в монографии Ю. А. Митропольского "Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах" [24]. В этой монографии тщательно разработана алгоритмическая сторона метода применительно к колебательным системам с медленно меняющимися параметрами, предложены новые схемы, удобные для практического построения приближенных решений, исследованы новые физические явления, характерные для нелинейных колебательных систем. Много внимания уделено здесь разработке одночастотного метода для систем, содержащих медленно меняющиеся параметры.

Дальнейшие исследования в этом направлении, включая математическое обоснование разработанных методов, составили содержание монографии Ю. А. Митропольского 1964 года "Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний" [25].

Широкое распространение в это же время получили асимптотические методы как аппарат исследования колебательных явлений в системах с учетом распределенной массы в работах Г. С. Писаренко [26], [27]. Результаты этих исследований изложены в его монографии 1955 года " Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале" [28].

Больше всего дальнейшее обобщение и развитие получил метод усреднения Н. Н. Боголюбова. Так, уже в 1952 году И. И. Гихман в работе [29] дал свое оригинальное доказательство теоремы I. Он связал вопрос о близости решений точной и усредненной системы на временном интервале длины порядка $1/r$ с непрерывной зависимостью от параметра решений системы дифференциальных уравнений, правая часть которых интегрально непрерывна по параметру. Близкий к теореме И. И. Гихмана результат получил позже Б. П. Демидович [30]. При более общих, чем в теореме I, условиях доказаны аналогичные результаты в работах М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [31], Я. Курцвейла и З. Ворела [32], Г. Антосевича [33] и целого ряда других авторов (см. ссылки в [34]).

В работе Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна этого периода [35] асимптотическими методами исследуется дифференциальное уравнение в бесконечномерных пространства.

Ф. С. Лосем в [36] дано обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

В работах И. З. Штокало [37], [38], начатых в это время и подытоженных в монографии "Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами" [39], на основе асимптотических методов Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова найдены критерии устойчивости линейных систем с почти периодическими коэффициентами.

В 1947 году, опираясь на идеи асимптотических методов, А. А. Дородницын предложил метод асимптотического решения уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра λ [40]. Эта работа послужила началом многочисленных исследований в этом направлении.

Особенно интенсивно этот раздел начал развиваться поле работы А. Н. Тихонова 1948 года [41], в которой изучены особенности зависимости от параметра решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.

В начале пятидесятых годов появились первые работы В. М. Волосова по распространению метода усреднения на системы уравнений с малым параметром при старшей производной и уравнений с медленными и быстрыми переменными [42], [43].

В 1955 году появилась фундаментальная монография Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний" [44]. В эту работу вошли основные результаты Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, о которых говорилось выше, а также результаты Ю. А. Митропольского по разработке асимптотического метода для колебательных систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами. В последующем книга неоднократно переиздавалась (последнее четвертое издание книги с дополнениями вышло в 1974 г.) и была переведена на ряд иностранных языков. Она стала учебником для нового поколения специалистов в области асимптотических методов и стимулировала дальнейшую разработку этой области исследований.

В 1957 году А. М. Федорченко [45], основываясь на идеях Н. Н. Боголюбова, получил простые и изящные формулы метода канонического усреднения для гамильтоновых систем с периодическим по t гамильтонианом. Основной особенностью предложенного им метода усреднения уравнений в канонической форме является, то, что усредненные уравнения также являются каноническими, что существенно упрощает исследование их первых интегралов. В дальнейшем разработкой метода усреднения для уравнений в канонической форме занимались Л. Л. Бурштейн и С. С. Соловьев [46], В. П. Вчерашнюк [47] и др.

Идеи метода усреднения и одночастотного метода Н. Н. Боголюбова и его развитие Ю. А. Митропольским послужили основой для изучения сложных явлений, наблюдаемых при нестационарных колебаниях стержней и валов, в ряде работ Б. И. Моисеенкова [48], [49], В. А. Гробова [50], [51], В. О. Кононенко [52]. Особо отметим монографию В. А. Гробова "Нестационарные колебания роторов турбомашин при переходе через критические числа оборотов" [53](1959 г.), в которой была продемонстрирована эффективность и широта практического применения одночастотного метода.

Широко применяется асимптотический метод при решении задач теории регулирования. Так, в работах А. И. Лурье [54] метод использован для исследования автоколебательных процессов, в работах Е. П. Попова и И. П. Пальтова [55], [56] – для изучения переходных процессов таких задач.

В 1961 году вышла в свет монография Ю. А. Митропольского и Б. И. Моисеенкова "Дослідження коливань в системах з поділеними параметрами" [57], в которой в полной мере освещены результаты исследований асимптотическими методами колебаний в системах с распределенными параметрами.

Дальнейшие исследования Ю. А. Митропольского и Б. И. Моисеенкова в этом направлении, включая его математическое обоснование, нашли отражение в обширной монографии авторов 1976 года "асимптотические решения уравнений в частных производных" [58].

С 1961 года интенсивной разработкой метода усреднения для систем с медленными и быстрыми переменными вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x,y); \qquad \frac{dy}{dt} = Y(t,x,y) \tag{26}$$

занимается В. М. Волосов [59]. Он предложил новую идею в методе усреднения, связанную с усреднением уравнений медленных переменных вдоль решений вырожденной системы

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,x,y), \qquad x = \text{const} . \tag{27}$$

В. М. Волосов дает обоснование предложенного метода, устанавливает оценку разности $x(t) - \overline{x}(t)$ решений точной и усредненной систем уравнений для медленных переменных на временном интервале длины порядка $1/\varepsilon$. В дальнейшем развитием метода усреднения для системы уравнений (26) и уравнений с отклоняющимся аргументом вместе с В. М. Волосовым занимались его ученики Б. И. Моргунов и Г. Н. Медведев [60]–[62] и др. основные их результаты подытожены в монографии В. М. Волосова и Б. И. Моргунова "Метод усреднения в теории нелинейных колебаний" [63] (1971 г.).

Системами с быстрыми колебаниями в системе быстрых движений занимались также в школе Л. С. Понтрягина. Так, ряд результатов, касающихся исследования систем с гиперболическим предельным циклом в системе быстрых движений, принадлежит Л. С. Понтрягину и Л. В. Родыгину [64]–[66]. К этому направлению относятся также работы А. М. Колесова и Е. Ф. Мищенко [67]. Системы с консервативной системой быстрых движений изучались Г. С. Макаевой и Д. В. Аносовым [69], [70].

Новый период развития асимптотической теории релаксационных колебаний, истоки которой восходят к работам Ж. Хаага [71]–[73], связан с исследованиями Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко 1957 года [74], [75], в которых предложены основные идеи построения асимптотической теории релаксационных колебаний систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. Последовавшие за этими работами исследования Е. Ф. Мищенко [76], [77] создали основу асимптотической теории "разрывных" колебаний. Эти исследования были продолжены дальше в работах Н.Х. Розова [78], [79], получившего формулы полных асимптотических разложений для предельного цикла и периода релаксационных колебаний. Основные результаты по этой теории подытожены в 1975 году в монографии Е.Ф. Мищенко и Н.Х. Розова “Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания” [80].

Весьма общие результаты о предельных циклах сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений принадлежат Д.В. Аносову [81].

К этому времени относятся также разработки основ методов асимптотического исследования сингулярно возмущенных уравнений в работах М.И. Вишика и М.А. Люстерника [82], А.Б. Васильевой [83]. Позже в эту работу интенсивно включился В..Ф. Бутузов [84]–[86].

Г.Е. Кузмак [87], [88], опираясь на исследования Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, впервые разработал основы метода регуляризации, который в последствии получил систематическое развитие и распространение на широкий круг задач в работах С.А. Ломова. Эти результаты подытожены в обширной монографии С.А. Ломова “Введение в общую теорию сингулярных возмущений” [89] (1981 г.).

Идеи метода точечных отображений А. Пункаре, использованные еще в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова для исследования нелинейных колебаний [4], в пятидесятых годах получили независимую разработку в теории нелинейных колебаний работами Ю.И. Неймарка [90], [91]. Исследования Ю.И. Неймарка этого направления вылились в его фундаментальную монографию 1972 года “Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний” [92].

Появившиеся в пятидесятые годы первые работы А.Д. Мышкиса [93], [94] по теории дифференциальных уравнений с запаздыванием привлекли к себе внимание, и уже в 1959 году первая теорема Н.Н. Боголюбова была распространена на указанные уравнения в работе А. Халаная [95]. Другие результаты асимптотической теории нелинейной механики на этот класс уравнений были распространены позже работами С.Н. Шиманова [96], [97], Л.Э. Эльсгольца [98], [99], В.П. Рубаника [100], [101], Ю.А. Рябова [102] [103], В.И. Фодчука [104], [105], Д.И. Мартынюка [106], [107]. Большинство из них вошли в монографии по этой тематике Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка “Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием” [108] (1969 г.) и “Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием” [109] (1979 г.).

Развитие космонавтики потребовало разработки идей Н.Н. Боголюбова применительно к задачам динамики космических аппаратов. В 1962 году на XIV Международном конгрессе по астронавтике Н.Н. Моисеев изложил свои результаты по использованию метода усреднения для расчета орбит космических аппаратов. При построении асимптотических решений для таких задач Н.Н. Моисеев учел тот факт, что в динамике космических аппаратов имеется по меньшей мере два различных масштаба времени, что позволило ему из асимптотических разложений получить важную информацию о природе движения этих аппаратов. Разработки асимптотических методов для задач небесной механики и динамики космических аппаратов подытожены в обширной монографии Н.Н. Моисеева 1969 года “Асимптотические методы нелинейной механики” [110]. В последующем эта область исследований разрабатывалась Ю.М. Евтушенко [111], Г.Е. Кузмаком, Ф.Л. Черноусько [133] и др.

В это же время интенсивно расширяется область применимости результата

Н.Н. Боголюбова, содержащегося в теореме II.

Так, в работе Ю.А. Митропольского [114] обосновывается применимость этой теоремы к системам стандартного вида с периодической по t и липшицевой по x правой частью.

В 1961 году Н.Н. Боголюбовым (мл.) и Б.И. Садовниковым был предложен вариант метода усреднения для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений n-го порядка с малым параметром [115]. Идейно их метод близок к методу известного американского математика Л. Чезари [116]. В 1966 году в процессе развития этих идей автор обзора предложил метод последовательных периодических приближений для нелинейных систем довольно общего вида [117], [118]. В последующем метод оказался весьма полезным для решения разного рода краевых задач, что стало очевидным после исследований Н.И. Ронто [119].

Глубокие разработки методов малого параметра в теории периодических решений систем нелинейной механики проведены Ю.А. Рябовым и подытожены в 1974 году в монографии Д.К. Лика и Ю.А. Рябова “Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний” [120].

Широкий круг вопросов, посвященных исследованию периодических колебаний методом усреднения, рассмотрен в работах М.А. Красносельского [121], Ю.Г. Борисовича [122], П.П. Забрейко [123], А.И. Перова [124], Ю.С. Колесова [125] и др. [126], [127].

В этот период интенсивно развиваются идеи о периодических решениях систем нелинейной механики за рубежом. Глубокие результаты в этом направлении получены итальянскими математиками [128], в первую очередь Д. Графи [129], Р. Конти [130], Л. Каприоли [131].

Фундаментальные разработки теории вынужденных периодических и почти периодических колебаний в нелинейных системах принадлежат японским математикам Т. Хаяси [132], Т. Иошизове [133], М. Урабе [134]. Существенным продвижением в теории периодических решений нелинейных систем явилось обоснование метода Галеркина построения периодических решений нелинейных уравнений в работе М. Урабе [135].

В США теорию периодических и почти периодических решений развивали Н. Левинсон [136], С. Дилиберто [137], [138], Л. Чезари [139], Г. Сейферт [140], Дж.Хейл [141], П. Сетна [142] и др.

В Англии М. Картрайт на основании совместной с Дж. Литлвудом теоремы о неподвижной точке [143] провела глубокие исследования почти периодических решений системы периодических по t уравнений, в частности, уравнений типа (2) [144].

Исследованиям периодических решений широких классов нелинейных дифференциальных уравнений занимались Ж. Мавин (Бельгия) [145], А. Ван дер Бург (Голландия) [146], О. Вейвода (Чехословакия) [147], К. Кордуняну (Румыния) [148], Г. Баяджиев (Болгария) [149], К.Р. Шнайдер [150] и Т. Шмидт [151] (Германия), Р. Гутовский и Б. Радзишевский (Польша) [152].

Нельзя не указать на проведенные в этот период фундаментальные исследования линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это, в первую очередь, результаты по гамильтоновым системам М.Г. Крейна и В.А. Якубовича [153] и результаты по общим линейным системам В.А. Якубовича и В.М. Старжинского, составившие их фундаментальную монографию [154].

В 1961 году были предприняты первые попытки распространения асимптотических методов на уравнения с особенностями типа δ-функции Дирака [155].

В отличие от линейной теории дифференциальных уравнений с δ-функцией, успех в которой связан с применением операционных методов и исследованиями Я.З. Цыпкина [156], А.И. Лурье [157], позже А. Халаная и Д. Векслера [158], нелинейная теория уравнений с δ-функцией потребовала разработки новых идей и методов. Лишь в 1971 году в [159] теорема I Н.Н. Боголюбова была доказана для данного класса уравнений. Важную роль при этом сыграла работа А.Д. Мышкина и автора обзора [160], в которой были заложены основы общей теории этого класса уравнений.

Позже активно включились в разработку этой области Н.А. Перестюк [161], [162], С.И. Трофимчук [163], М.У. Ахметов [164] и др. [165]–[167].

Исследования дифференциальных уравнений с δ-функцией Дирихле оформились позже в отдельную теорию дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, первая монография по которой появилась в 1987 году [168]. Последнее десятилетие активно развивают асимптотические методы для таких уравнений С. Швабик [169] и коллективы болгарских и американских математиков, возглавляемые Д. Байновым и В. Лакшмикантамом [170].

Идейно близка к этому направлению теория "бушующих систем" известного французского математика Т Вожеля [171].

Ударные модели различных технических устройств с успехом исследуются качественными методами в работах Н.Н. Баутина [172].

Со второй половины пятидесятых годов появляются первые работы по развитию метода интегральных многообразий Н.Н. Боголюбова и обобщению его теоремы III. Так, в 1957 году [173] Ю.А. Митропольский доказал существование инвариантного тороидального многообразия в окрестности периодического решения невозмущенной системы для системы уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon X_1(\nu t, x, \varepsilon)$$

с периодической по t периода 2π правой частью. Это было первое обобщение теоремы III Н.Н. Боголюбова. В этом же году появились первые работы О.Б. Лыковой [174], в которых идеи метода интегральных многообразий были использованы для доказательства существования двупараметрических локальных интегральных многообразий нелинейной динамической системы в окрестности изолированного положения равновесия и цикла, при этом был исследован случай зависимости частоты от амплитуды. Эти же идеи были использованы К.В. Задиракой [175] для построения многообразий, с помощью которых он свел рассматриваемые им задачи теории сингулярных возмущений к задачам регулярной теории возмущений.

В связи с этими исследованиями укажем также на работы Я.С. Бариса [176] и Н. Феничела [177].

В работах [178], [179] Ю.А. Митропольский распространяет метод интегральных многообразий на нестационарные процессы, в частности, на процессы в системах с медленно меняющимися параметрами.

В этот же период локальные интегральные многообразия применялись для качественного исследования решений дифференциальных уравнений в задачах устойчивости [180].

Разрабатываются первые алгоритмы построения интегральных многообразий для систем с медленно меняющимися параметрами [181]. В дальнейшем эти результаты широко используются [182] для построения m-параметрических интегральных многообразий. Проясняется важная роль локальных интегральных многообразий для теории критических случаев в теории устойчивости М.А. Ляпунова [180], [181], что завершилось позднее созданием В.А. Плиссом общего принципа сведения в теории устойчивости [184]. В бесконечномерном банаховом пространстве этот принцип сведения был сформулирован в работах О.Б. Лыковой [185], [186]. Теория возмущений инвариантных тороидальных многообразий нелинейных систем, использующая идеи метода интегральных многообразий Н.Н. Боголюбова, интенсивно рассматривается в это время в работах С. Дилиберто [187], В. Кайнера [188], [189], Дж.Хейла и А. Стокса [190], И. Купки [191] и др.

В 1961 году на международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в своем фундаментальном докладе Н.Н. Боголюбов и Ю.А. Митропольский [192] подвели итоги развитию метода интегральных многообразий за период с 1945 года. В этом докладе авторы наметили пути дальнейшего развития метода интегральных многообразий и указали, в частности, на необходимость распространения метода на бесконечномерные системы уравнений, на уравнения с запаздывающим аргументом, на сингулярно-возмущенные системы и др. Именно в этом направлении были получены позже глубокие результаты Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [193], А. Халаная [194], А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [86].

Интенсивно теорию периодических поверхностей для уравнений в частных производных разрабатывают Л. Чезари [195], В.Х. Харасахал [196], Д.У. Умбетжанов [197], Г.П. Хома [198], Б.П. Ткач [199].

С конца сороковых и до начала шестидесятых годов, как видно даже из обзора, Н.Н. Боголюбов эпизодически обращал внимание на проблемы нелинейной механики, сосредоточив все свое внимание на решении важных проблем физики, в частности, статистической механики классических систем, квантовой статистики, теории сверхпроводимости и сверхтекучести, квантовой теории поля и др. Результаты научной деятельности Н.Н. Боголюбова этого периода отражены в ряде его фундаментальных монографий, широко известных специалистам в области теоретической физики.

В 1963 году в первой летней математической школе в г. Каневе Н.Н. Боголюбов прочитал две лекции “О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики” [5], в которых после длительного перерыва возвратился к старым проблемам и изложил слушателям свои новые результаты в нелинейной механике. Лекции прочитаны, как мне представляется, под влиянием появившихся исследований А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда по проблемам устойчивости движений в классической небесной механике [200]–[202].

В лекциях предложена теория возмущения устойчивых квазипериодических решений неконсервативных систем дифференциальных уравнений, траектории которых образуют обмотку аналитического тора. При построении этой теории Н.Н. Боголюбов удачно объединил свой метод интегральных многообразий с разработанным к тому времени для гамильтоновых систем в указанных работах А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда итерационным методом ньютоновского типа, обеспечивающим ускоренную сходимость итераций.

Этими лекциями завершается разработка Н.Н. Боголюбовым обширной области математической физике, начатая совместно с Н. М. Крыловым в 30-х годах.

Приведем результаты Н. Н. Боголюбова последнего периода его работы в нелинейной механике.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dH}{dt} = Hh + F(h, \varphi, \Delta); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta), \tag{28}$$

где H – вещественная n-мерная постоянная матрица; F, f – периодические по $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ периода 2π функции, вещественные при вещественных значениях h, φ, Δ; $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – вещественные частоты; $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ параметр.

Система (28) рассматривается в предположении, что F, f являются аналитическими в области

$$\|h\| < \eta; \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho; \qquad |\Delta| < \sigma \tag{29}$$

и удовлетворяют в (29) неравенствам

$$\|F\| \le N \le \frac{\alpha\eta}{2}; \qquad \|f\| \le M \le \frac{\sigma}{4m}, \qquad n\left\|\frac{\partial F}{\partial h_\nu}\right\| \le L \le \frac{\alpha}{4}, \quad \nu = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Матрица H и частоты ω таковы, что

$$\left\|e^{Ht}\right\| \le Pe^{-\alpha t}; \qquad t \ge 0, \tag{31}$$

где P, α – положительные постоянные;

$$|(k, \omega)| \ge K|k|^{-(m+1)} \qquad (|k| \ne 0) \tag{32}$$

для всех целочисленных векторов $k = (k_1, \ldots, k_m)$ и некоторого $K > 0$. Здесь $|h| = \sup\limits_{\nu=\overline{1,n}} |h_\nu|$; $\|h\| = \sup\limits_{t>0} |e^{Ht}h|e^{\alpha t}$.

Основу теории составляет фундаментальная теорема Н. Н. Боголюбова о приведении динамической системы в тороидальной области к каноническому виду, приводимая ниже.

Теорема V. *Если для системы* (28) *выполняются приведенные выше условия, то при достаточно малом M в области $|\Delta| \le 2M$ можно найти вещественные $\Delta(\omega)$ так, что система уравнений* (28) *при $\Delta = \Delta(\omega)$ заменой переменных*

$$\varphi = \theta + \Phi(h, \theta) \tag{33}$$

с функцией Φ, аналитической в области

$$\|h\| \le \eta/2; \qquad |\operatorname{Im}\theta| < \rho/2, \tag{34}$$

вещественной при вещественных значениях h, θ и удовлетворящей в (34) *неравенствам*

$$|\Phi| \le \rho/4m; \qquad \sum_{\nu=1}^{m}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_\nu}\right| \le \frac{1}{2}, \tag{35}$$

приводится к виду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \theta + \Phi, \Delta(\omega)); \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \tag{36}$$

Уравнения (36) названы здесь *каноническим видом* исходной системы в тороидальной области (34). По сути (36) – это m-параметрическое семейство дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами и "сильно несоизмеримым" частотным базисом ω

Оценка для M, указанная Н. Н. Боголюбовым при доказательстве теоремы V, может служить образцом оценочных расчетов. Приведем эту оценку

$$\frac{M}{\alpha} \frac{Q(\rho, \gamma)}{\gamma^{4(m+2)}} \leq r_0 < 1, \tag{37}$$

где

$$\gamma = \frac{\rho}{\rho + 4}; \qquad \gamma^{2(m+2)} r_0 \leq \frac{1}{4m}; \qquad \frac{\gamma^{2(m+2)}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} < \ln \frac{3}{2},$$

$$\frac{2m}{2m-1} \frac{P^2 \rho^2 n^2 m}{Q(\rho, \gamma)} \sum_{s=0}^{\infty} r_0^{2^s} \gamma^{(s+1)(2m+1)+2(m+2)} \leq \frac{1}{8}, \tag{38}$$

$$Q(\rho, \gamma) = 4P\rho\gamma^{2(m+1)} nm + 2\frac{\alpha\gamma^2}{K} \left(\frac{m+2}{e}\right)^{m+2} (1+e)^m$$
$$+ \frac{2m^2}{2m-1} \left(\gamma^2 + 4P^2\rho^2 n^2\right) \left[4P\rho\gamma^{2m} n + \frac{\alpha}{K} \left(\frac{m+1}{e}\right)^{m+1} (1+e)^m\right].$$

Оценка (37), (38) особо подтверждает серьезное отношение Н. Н, Боголюбова к завершенности каждого своего оценочного результата.

Отметим, что преобразование (33) является аналитически обратимым в области

$$\|h\| < \frac{1}{2}\eta; \qquad |\operatorname{Im} \varphi| < \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{1}{2m}\right), \tag{39}$$

так что из (33) следует формула

$$\theta = \varphi + \Psi(h, \varphi), \tag{40}$$

где Ψ – функция, обладающая свойствами, аналогичными свойствам функции Φ.

Основная теорема Н. Н. Боголюбова позволяет решить задачу о квазипериодических решениях системы (28), свойствах их устойчивости и зависимости от параметра. Утверждения о квазипериодических решениях системы (28) составляет содержание следующей теоремы Н. Н. Боголюбова.

ТЕОРЕМА VI. *Если в уравнениях* (28) *правые части удовлетворяют всем условиям теоремы V, то эти уравнения при соответствующем выборе* Δ *имеют квазипериодические решения с частотным базисом вида*

$$h_t = s(\omega t + \theta); \qquad \varphi_t = \omega t + \theta + \Phi\big(s(\omega t + \theta), \omega t + \theta\big), \tag{41}$$

где s – *аналитическая функция* θ *в области* (34), *вещественная при вещественных значениях* θ *и удовлетворящая неравенству*

$$\|s\| \le \frac{\eta}{2}. \tag{42}$$

Если h_t, φ_t – *любые решения системы* (28), *начальные значения которых* h_0, φ_0 *принадлежат области* (39), *то* h_t *и* φ_t *асимптотически приближаются при* $t \to \infty$ *к квазипериодическому решению* (41) *с* $\theta = \varphi_0 + \Psi(h_0, \varphi_0)$.

Следующей задачей, решаемой Н. Н. Боголюбовым в излагаемой теории, является задача построения асимптотических и сходящихся разложений квазипериодических решений.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{43}$$

где функции F, f – аналитические в области

$$|h| < \eta; \qquad |\operatorname{Im} \varphi| < \rho; \qquad |\Delta| < \sigma; \qquad |\varepsilon| < \varepsilon_0 \tag{44}$$

и обладают по h, φ, Δ свойствами правых частей уравнений (28), матрица H и частоты ω удовлетворяют условиям теоремы V.

Предполагается, что в области (44) функции F, f удовлетворяют неравенствам

$$|F| \le C_1|h|^2 + C_2|\Delta| + C_3|\varepsilon|; \qquad |f| \le C_4|h| + C_5|\Delta| + C_6|\varepsilon|, \tag{45}$$

где C_ν, $\nu = \overline{1,6}$, – положительные постоянные,

При этих условиях для системы (43) имеет место утверждение Н. Н. Боголюбова об аналитичности по ε преобразования $\varphi\Delta \to \theta\Delta(\omega)$ следующего содержания: можно найти такие положительные постоянные $\eta_1 < \eta$, $\rho_1 < \rho$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, для которых в области $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ существует аналитическая по ε функция $\Delta(\varepsilon)$, вещественная при вещественных ε, такая, что что уравнение (43) при $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ имеет квазипериодические решения с частотным базисом ω вида

$$h = s(\omega t + \theta, \varepsilon); \qquad \varphi = \omega t + \theta + \Phi(\omega t + \theta, \varepsilon), \tag{46}$$

где S и Φ – аналитической функции θ, ε в области

$$|\operatorname{Im} \theta| < \rho_1; \qquad |\varepsilon| < \varepsilon_1, \tag{47}$$

периодические по θ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, с периодом 2π, вещественные при вещественных θ, ε.

Асимптотические свойства этих квазипериодических решений такие же, как и для системы (28).

Приведенное утверждение составляет основное содержание седьмой теоремы Н.Н. Боголюбова.

Согласно этой теореме функции $\Delta(\varepsilon)$, $S(\theta,\varepsilon)$, $\Phi(\theta,\varepsilon)$, определяющие квазипериодическое решение, могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням ε, что удобно для приближенного построения квазипериодических решений системы (43).

Чрезвычайно важным для нелинейной механики является следующий результат Н.Н. Боголюбова, относящийся к системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon Ah + \varepsilon F(h,\varphi,\Delta,\varepsilon); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + \varepsilon f(h,\varphi,\Delta,\varepsilon). \tag{48}$$

Здесь F, f, частоты ω удовлетворяет таким же условиям, что и в уравнениях (43), а матрица A является вещественной постоянной матрицей, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части.

Особенностью рассматриваемой системы (48) является то, что матрица $e^{\varepsilon At}$ не может удовлетворять неравенству виде (31) для всех комплексных ε, лежащих в сколь угодно малой области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$: соответствующим выбором $\arg\varepsilon$ всегда можно сделать собственное число матрицы εA мнимым. Для этого ε неравенство вида (31) нарушается, и такая система уравнений (48) не имеет квазипериодических решений. Этим обосновывается необходимость рассмотрения системы (48) либо только для положительных ε, лежащих в достаточно малом интервале, либо для ε, лежащих в клинообразной области с достаточно малым $\arg\varepsilon$, обеспечивающим неравенство

$$\operatorname{Re}\varepsilon a < -|\varepsilon|\beta < 0; \qquad |\varepsilon| < \varepsilon_0 \tag{49}$$

для любого собственного значения a матрицы A, где $\beta = \text{const} > 0$.

Лишь при указанном выборе ε к системе уравнений (48) применим основной результат Н.Н. Боголюбова о квазипериодических решениях, что приводит к следующему утверждению.

Теорема VIII. *Пусть находящиеся в правой части системы уравнений* (48) *функции F, f, матрица A и частоты ω удовлетворяют приведенным выше условиям.*

Тогда можно найти также положительные $\eta_1 < \eta$, $\rho_1 < \rho$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, для которых

1) *в клинообразной области*

$$|\arg\varepsilon| < \varepsilon_1; \qquad |\varepsilon| < \varepsilon_1 \tag{50}$$

можно определить функцию $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, $\Delta(0) = 0$, вещественную при вещественных ε, так, чтобы уравнения (48) *при $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ имели квазипериодические решения с частотным базисом ω вида* (46), *где S, Φ – аналитические функции θ, ε в области*

$$|\operatorname{Im}\theta| < \rho_1; \qquad |\arg\varepsilon| < \varepsilon_1; \qquad 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1, \tag{51}$$

периодические по θ с периодом 2π, вещественные при вещественных θ;

2) *решения h_t, начальные значения которых удовлетворяют условиям*

$$|h_0| < \eta_1; \qquad |\operatorname{Im}\varphi_0| < \rho_1, \tag{52}$$

асимптотически приближаются при $t \to \infty$ к квазипериодическому решению вида (46) с $\theta = \varphi_0 + \Psi(h_0, \varphi_0, \varepsilon)$.

Из аналитичности в клинообразной области не следует, как известно, сходимость степенных разложений. Поэтому функции $\Delta(\varepsilon)$, $S(\theta, \varepsilon)$, $\Phi(\theta, \varepsilon)$, характеризующие квазипериодическое решение уравнений (48), разлагаются лишь в формальные ряды по степеням ε. Аналитичность в клинообразной области обеспечивает асимптотическую сходимость этих разложений. Иначе говоря, для формальных разложений

$$\Delta(\varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \Delta_\nu; \qquad S(\theta, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu S_\nu(\theta); \qquad \Phi(\theta, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \Phi_\nu(\theta) \tag{53}$$

справедлива оценка

$$\left|\Delta - \sum_{\nu=1}^{l} \varepsilon^\nu \Delta_\nu\right| + \left|S - \sum_{\nu=1}^{l} \varepsilon^\nu S_\nu\right| + \left|\Phi - \sum_{\nu=1}^{l} \varepsilon^\nu \Phi_\nu\right| \le C|\varepsilon|^{\nu+1}, \tag{54}$$

где $C = \text{const} > 0$.

Вместо асимптотических рядов (53) для Δ, S, Φ Н. Н. Боголюбов предложил различные способы получения сходящихся разложений. Приведем два из них. Вместо уравнений (48) рассматриваются уравнения (48), в которых в функциях F, f вместо ε вводится новый параметр μ. Определяющие квазипериодические решения этих уравнений функции Δ, S, Φ зависят теперь от двух параметров ε и μ, так что $\Delta = \Delta(\varepsilon, \mu)$, $S = S(\theta, \varepsilon, \mu)$, $\Phi = \Phi(\theta, \varepsilon, \mu)$, и эти функции являются аналитическими функциями в области $|\mu| < \varepsilon_1$, $) < \varepsilon < \varepsilon_1$ и, следовательно, разлагаются в равномерно сходящиеся степенные ряды по ε. Полагая в этих рядах $\mu = \varepsilon$, получаем равномерно сходящиеся ряды для функций $\Delta(\varepsilon)$, $S(\theta, \varepsilon)$, $\Phi(\theta, \varepsilon)$.

Другой чрезвычайно удобный для практических расчетов способ получения равномерно сходящихся разложений состоит в том, что вместо уравнений (48) рассматриваются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \varepsilon A h + \varepsilon z F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon z), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + \varepsilon z f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon z), \end{aligned} \tag{55}$$

совпадающие с (48) при $z = 1$.

Для системы дифференциальных уравнений (55) Н. Н. Боголюбов установил применимость своего основного результата о квазипериодических решениях при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $|z| < \dfrac{\text{const}}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Согласно этому при достаточно малом ε_1 функции $\Delta(\varepsilon, z)$, $S(\theta, \varepsilon, z)$, $\Phi(\theta, \varepsilon, z)$ разлагаются в равномерно сходящиеся степенные ряды по параметру z и нужная точка $z = 1$ лежит в круге сходимости. Положив $z = 1$ в этих рядах, получаем равномерно сходящиеся ряды для $\Delta(\varepsilon)$, $S(\theta,\varepsilon)$, $\Phi(\theta,\varepsilon)$.

Последнюю теорему Н. Н. Боголюбов применил для исследования квазипериодических колебаний в системе дифференциальных уравнений вида (5)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \lambda^2 q = \varepsilon f\left(q, \frac{dq}{dt}\right), \tag{56}$$

где

$$q = (q_1, \dots, q_n), \qquad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \qquad \lambda_\nu > 0; \quad \nu = \overline{1,n}, \qquad \lambda^2 q = \left(\lambda_1^2 q, \dots, \lambda_n^2 q\right),$$

ε – малый положительный параметр.

Записав систему (56) в амплитудно-фазовых переменных a, φ и усреднив полученные уравнения по фазовым переменным φ, он получил уравнения первого приближения вида

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a,\lambda); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \lambda + \varepsilon B(a,\lambda). \tag{57}$$

В (57) введем поправку на частоты, положив

$$\lambda = \omega + \nu \tag{58}$$

и считая ω удовлетворяющими условиям (32).

Пусть $a = a^{(0)}$ – квазистатическое положение равновесия уравнений (57) при $\lambda = \omega$: $A\left(a^{(0)}, \omega\right) = 0$ и координаты вектора $a^{(0)}$ отличны от нуля.

Результат Н. Н. Боголюбова о квазипериодических решениях системы (56) состоит в следующем.

Теорема IX. *Пусть для системы дифференцильных уравнений* (56) *выполняются приведенные выше условия и, кроме того:*

1. *Функции $f(q,\dot q)$ являются аналитическими относительно переменных q, $\dot q$ в окрестности тора*

$$q = a^{(0)}\sin\varphi, \qquad \dot q = a^{(0)}\omega\cos\varphi. \tag{59}$$

2. *Вещественные части всех собственных значений матрицы $\frac{\partial A(a^{(0)},\omega)}{\partial a}$ отрицательны.*

Тогда можно указать такое положительное ε_0, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ будут справедливы следующие утверждения:

1) *можно определить $\nu(\varepsilon)$ так, чтобы уравнения* (56) *при*

$$\lambda = \omega + \nu(\varepsilon) \tag{60}$$

имели квазипериодические решения с частотным базисом вида

$$q = S(\omega t + \theta, \varepsilon) \tag{61}$$

и всякое решение системы (56), *достаточно близкое при* $t = 0$ *к решению* (61), *асимптотически приближалось при* $t \to \infty$ *к одному из квазипериодических решений;*

2) *формальные разложения функций* $\nu(\varepsilon)$, $S(\theta, \varepsilon)$ *по степеням являются асимптотически сходящимися и могут быть преобразованы в равномерно сходящиеся разложения с помощью парциальных суммирований, основанных на введении вспомогательных параметров* z *или* μ.

Теорема IX – последняя из результатов Н.Н. Боголюбова, относящихся к нелинейной механике.

Следует заметить, что теорема VIII остается в силе, если линейный член уравнений (48) εA заменить на $H + \varepsilon A$ и потребовать выполнения неравенства

$$\left|e^{(H+\varepsilon A)t}\right| \leq Pe^{-\beta t}, \qquad t \geq 0$$

для ε из области (50) и $\beta = \text{const} > 0$.

Это замечание позволяет избавить теорему IX от предположения положительности всех координат вектора $a^{(0)}$ и включить в рассмотрение случай, когда $a_\nu^{(0)} \neq 0$ при $\nu = \overline{1,p}$ и $a_{p+1}^{(0)} = \cdots = a_n^{(0)} = 0$.

В этом случае теорема IX остается в силе с тем изменением, что квазипериодическое решение (61) зависит лишь от p частот $\omega_1, \ldots, \omega_p$. Указанный факт существенен при разработке и обосновании p-частотного метода асимптотического интегрирования системы дифференциальных уравнений (56), изложенного в [203].

Важно отметить, что теоремы Н.Н. Боголюбова о квазипериодических решениях остаются в силе, если вместо постоянной матрицы H в соответствующих уравнениях брать матрицу $P(\varphi)$, аналитически зависящую от φ в области $|\operatorname{Im}\varphi| < \rho$, вещественную при вещественных φ и такую, что фундаментальная матрица решений соответствующей линейной системы уравнений $\Omega_0^t(\varphi)$ удовлетворяет неравенству вида (31)

$$|\Omega_0^t(\varphi)| \leq Pe^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0.$$

Для получения такого обобщения теоремы Н.Н. Боголюбова следует определить по $\Omega_0^t(\varphi)$ норму вида $\|\cdot\|$, положив

$$\|h\| = \sup\left|\Omega_0^t(\varphi)h\right|e^{\alpha t},$$

где sup берется по области $t \geq 0$, $|\operatorname{Im}\varphi| < \rho$.

Отметим, наконец, что утверждения теорем Н.Н. Боголюбова об асимптотических при $t \to \infty$ свойствах исходной системы, начинающиеся в малой окрестности семейства квазипериодических решений вида (41), гарантируют, с одной стороны, устойчивость по Ляпунову квазипериодических решений, с другой стороны, эргодичность положительных полутраекторий этих решений. На такие свойства квазипериодических решений, исследованных Н.Н. Боголюбовым, было обращено внимание лишь в 1990 году в работе [204].

Вместе с теорией квазипериодических решений классической и небесной механики Колмогорова–Арнольда–Мозера [200]–[207], [205]–[208], приведенные выше результаты Н. Н. Боголюбова представляют одно из самых замечательных достижений 60-х годов в теории возмущения динамических систем.

Начиная с 1964 года, идеи и методы Н. Н. Боголюбова, высказанные в лекциях, получили развитие и применение для других задач в работах целого ряда авторов.

Речь идет, в первую очередь, о работах киевских математиков, относящихся к изучению квазипериодической системы дифференциальных уравнений вида (36). Одной из задач, поставленных исследованиями Н. Н. Боголюбова этого периода, является задача о линеаризации системы (36)

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h,\theta); \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{62}$$

в окрестности ее инвариантного тора

$$h = s(\theta). \tag{63}$$

Эта задача включает в себя как задачу локальной линеаризации системы (62) в нелинейном случае, так и задачу приводимости этой системы к системе уравнений с постоянными коэффициентами в линейном случае. Обе проблемы восходят к классическим работам А. Пункаре и А. М. Ляпунова и к тому времени имели решение в более частных, чем рассматриваемая, ситуациях. Так, проблема линеаризация была хорошо изучена для точки покоя и периодической орбиты динамической системы [209], [210], а проблема приводимости решена для системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [211].

В общей постановке задача состоит в том, чтобы подходящей заменой преобразовать систему дифференциальных уравнений (62) в систему

$$\frac{dg}{dt} = Gg; \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{64}$$

с постоянной матрицей коэффициентов G.

В 1964 году Ю. А. Митропольский в работе [212] ввел поправку

$$\zeta = H - G \tag{65}$$

в линейную часть системы (62) и доказал одну из первых теорем о приводимости нелинейной системы (62) аналитическим преобразованием переменных h к системе уравнений (64). Вместе с результатами Е. Г. Белаги теорема Ю. А. Митропольского по существу решает проблему линеаризации системы в окрестности ее инвариантного аналитического тора.

В следующем году в [214] доказана теорема о приводимости линейной системы с аналитической по θ правой частью

$$\frac{dh}{dt} = (G + \zeta)h + \varepsilon P(\theta)h; \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \tag{66}$$

Условия, обеспечивающие приводимость, выражаются неравенством

$$(67)\qquad \left|\lambda_\nu - \lambda_j + i(k,\omega)\right| \geq K|k|^{-(m+1)}, \qquad |k| \neq 0,$$

для любых $\nu, j = \overline{1,n}$ и всех целочисленных векторов $k = (k_1,\dots,k_n)$, где $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – собственные числа матрицы G.

Этот результат позволил в 1967 году предложить метрический аспект проблемы приводимости и доказать первую теорему о мере приводимых систем [215].

В этом же году появилась известная работа Ю Мозера [216], цель которой определена им как задача построения теории возмущений для условно-периодических решений нелинейной системы дифференциальных уравнений. Из работа ясно, что Ю. Мозер не был знаком с лекциями Н. Н. Боголюбова и не знал, насколько глубоко разработана Н. Н. Боголюбовым эта область. Одним из основных результатов [216] является исследование квазипериодических систем уравнений вида

$$(68)\qquad \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + \varepsilon F(h,\varphi,\varepsilon) + \mu + Mh, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon f(h,\varphi,\varepsilon) + \Delta, \end{aligned}$$

где F, f – такие же, как в (43), H – диагональная матрица с собственным числом $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Предполагается, что "характеристические системы ω, λ" удовлетворяют неравенствам

$$(69)\qquad \left|(l,\lambda) + i(k,\omega)\right| \leq K\left(|k|^d + 1\right)^{-1}$$

для всех целочисленных k и всех l таких, что

$$(70)\qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu\right| \leq 1; \qquad \sum_{\nu=1}^{n} |l_\nu| \leq 2$$

за исключением конечного числа $(l,k) = (l,0)$, для которых левая часть неравенства (69) обращается в нуль.

Ю. Мозером доказывается существование однозначно определенных степенных рядов $\Delta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ с положительным радиусом сходимости ε_0, удовлетворяющих условиям

$$(71)\qquad H\mu = 0; \qquad HM = MH; \qquad \Delta(0) = 0; \qquad \mu(0) = 0; \qquad M(0) = 0$$

и таких, что у системы уравнений (68) при $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, $M = M(\varepsilon)$ имеются условно периодические решения с теми же характеристическими числами ω, λ, аналитически зависящие от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Более того, доказывается, что существует преобразование координат h, $\varphi \to g$, θ аналитическое по g, θ, ε, переводящее систему (68) при $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, $M = M(\varepsilon)$ в систему вида

$$(72)\qquad \frac{dg}{dt} = Hg + O(g^2); \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega + O(g),$$

где $O(g^k)$ означает аналитическую функцию g, θ, ε, обращающуюся при $g = 0$ в нуль вместе со своими производными по g до порядка $k-1$.

Приведенная теорема Ю. Мозера и теорема V Н.Н. Боголюбова посвящены одной и той же проблеме и естественно дополняют друг друга.

В 1975 году Е.И. Динабург и Я.Г. Синай применили разработку метода Н.Н. Боголюбова [214], [215] к одномерному уравнению Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом и получили весьма общий результат о распределении зон устойчивости оператора Шрёдингера для больших λ [217]. В дальнейшем в этом направлении существенное продвижение было получено в работе [218].

В 1989 году автором обзора рассмотрена задача о приводимости системы (66), матрица G которой имеет действительную каноническую форму

$$G = G(\alpha, \beta, \lambda) = \operatorname{diag}\left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d; \beta_1 E + \lambda_1 J, \ldots, \beta_p E + \lambda_p J\right\},$$

где E – двумерная единичная матрица, J – двумерная кососимметрическая матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (α, β), λ – действительные числа, принадлежащие некоторой области $D \times \theta$, $\lambda_\nu > 0$, $\nu = \overline{1,p}$, где θ – довольно "дырявое" множество R^p [219].

Опираясь на идеи Н.Н. Боголюбова при выборе матрицы ζ вида

$$\zeta = \varepsilon G(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)),$$

доказана приводимость системы (66) к системе дифференциальных уравнений (64) с аналитическими по ε функциями $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ и аналитической по θ, ε приводящей матрицей, а при выборе матрицы ζ вида $\zeta = G(0, 0, \lambda(\varepsilon))$ доказана приводимость (66) к системе

$$\text{(73)} \qquad \frac{dg}{dt} = G\left(\alpha + \varepsilon\alpha(\varepsilon), \beta + \varepsilon\beta(\varepsilon), \lambda\right) g; \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

с конечное число раз дифференцируемыми по ε функциями $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ и приводящей матрицей. Из этого результата следует метрическая интерпретация проблемы приводимости следующего содержания: в произвольном шаре S пространства параметров λ мера множества $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ значений $\mu = \mu(\varepsilon)$, для которых система (66) с $G + \zeta = G(\alpha, \beta, \mu)$ приводится к системе (73) с λ из области θ, удовлетворяет соотношению

$$\text{(74)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{mes} \mathfrak{M}(\varepsilon)}{\operatorname{mes} \theta} = 1.$$

Если учесть, что $\lim\limits_{k \to 0} \operatorname{mes} \theta / \operatorname{mes} S = 1$, то становится ясным смысл метрической интерпретации.

Глубокие результаты по проблеме приводимости линейных систем с квазипериодическими коэффициентами в это время получены в работах [220], [221].

В нелинейной механике обычно речь идет не об аналитических, а лишь обладающих конечным числом производных дифференциальных уравнениях. Распространение результатов Н. Н. Боголюбова на такие уравнения имеет чрезвычайно объемную библиографию. Так, в 1964 в работе [222] рассмотрена гладкая динамическая система на m-мерном торе

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \Delta + \varepsilon f(\varphi, \Delta) \tag{75}$$

и на нее распространен результат В. И. Арнольда [202] о приведении (75) к системе

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{76}$$

с помощью гладкого преобразования переменных $\varphi \to \theta$.

Техника сглаживания Нэша, использованная при доказательстве этого результата, дает большую "потерю гладкости" $l-s$, где l – гладкость функции f, s – гладкость преобразования $\varphi \to \theta$. Позже для этой "потери гладкости" Ю. Мозером получена довольно точная оценка:

$$l - s \geq m + 1, \qquad s \geq 1. \tag{77}$$

Результат о приводимости системы (75) открыл большие возможности распространения теорем Н. Н. Боголюбова на случай гладких систем дифференциальных уравнений.

В 1965 году Ю Мозер применил свой метод конструирования решений нелинейных дифференциальных уравнений [224] к задачам нелинейной механики и существенно продвинул теорию Н. Н. Боголюбова возмущения инвариантных тороидальных многообразий. Исследования Ю. Мозера и Р. Сакера [223], [225], [226], а также Н. Феничел [227], [228], явились крупным вкладом в эту теорию.

В 1969 году в докладе [229] была введена функция Грина линейного расширения динамической системы на торе

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x; \qquad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \tag{78}$$

что оказалось чрезвычайно плодотворным и привело к новым результатам теории возмущений [230]–[233]. Произошел возврат в этих исследованиях к идеям метода интегральных многообразий и подтвердилась плодотворность идей Н. Н. Боголюбова.

Интенсивно в это время развивается теория линеаризации динамических систем в окрестности положения равновесия, цикла, гладкого инвариантного тороидального и компактного многообразий. В первую очередь речь идет о работах Ф. Хартмана [234], С. Стернберга [235], М. Хирша, Ч. Пью, М. Шуба [236], а также о работах более позднего периода И. У. Бронштейна [237], В. С. Самовола [238], Г. С. Осипенко [239].

В совокупности отдельных результатов, полученных в этот период для гладких динамических систем, фактически содержатся утверждения теорем VI–IX Н. Н. Боголюбова для случая гладких систем.

В работе [204] на гладкие динамические системы распространена и теорема V Н. Н. Боголюбова. Важным дополнением к теоремам Н. Н. Боголюбова является следующее утверждение относительно канонического вида динамической системы в окрестности ее инвариантного тора, извлеченное автором обзора из доказательства этих теорем:

Пусть для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h,\varphi); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega + f(h,\varphi) \tag{79}$$

выполняются условия аналитичности F, f в области

$$\|h\| < \eta, \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho, \tag{80}$$

имеют место неравенства (30), (31) и

$$F(0,\varphi) \equiv 0, \qquad f(0,\varphi) \equiv 0. \tag{81}$$

Тогда для достаточно малого M существует замена переменных

$$\varphi = \theta + \Phi(h,\theta), \qquad \Phi(0,\theta) = 0 \tag{82}$$

с функцией Φ, аналитической в области

$$\|h\| < \eta/2, \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho/2, \tag{83}$$

вещественной при вещественных значениях h, θ и удовлетворяющей неравенствам (35), приводящая систему уравнений (79) к виду

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F\big(h, \theta + \Phi(h,\theta)\big); \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega. \tag{84}$$

Малость M, обеспечивающая справедливость этого утверждения, выражается теми же неравенствами (37) с единственным изменением: в них $Q(\rho,\gamma)$ следует определить выражением

$$Q(\rho,\gamma) = \frac{4Pnm\rho}{2m-1}\gamma^{2m}\left[(4m-1)\delta^2 + 8P^2n^2m\rho^2\right]. \tag{85}$$

Результаты Н.Н. Боголюбова, представленные в лекциях, вместе с их развитием вошли в монографию Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и А.М. Самоленко 1969 года “Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике” [223].

Естественно, что в этот период продолжалась разработка идей и методов Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова по асимптотическим методам нелинейной механики.

Прежде всего, надо отметить подключение в 60-х годах к этой тематике больших групп математиков как в нашей стране, так и за рубежом. Продолжались и углублялись разработки асимптотических методов, метода усреднения, одночастотного метода, метода интегральных многообразий для тех классов уравнений, о которых говорилось выше: уравнений с медленно меняющимися параметрами, сингулярно-возмущенных уравнений, уравнений с отклоняющимся аргументом, уравнений канонического вида, уравнений с распределенными параметрами, уравнений с импульсным воздействием, систем уравнений с медленным и быстрыми переменными. Одновременно с этим указанные методы развивались применительно к новым классам дифференциальных уравнений, в первую очередь, к стохастическим дифференциальным уравнениям, к многочастотным системам нелинейной механики.

С небольшим интервалом появляются две фундаментальные монографии Ю.А. Митропольского в 1971 г. "Метод усреднения в нелинейной механике" [241] и в 1973 г. – "Интегральные многообразия в нелинейной механике" (совместно с О.Б. Лыковой) [242]. Эти монографии носят энциклопедический характер и содержат основные результаты по разработке метода усреднения и метода интегральных многообразий, имевшиеся к началу 70-х годов.

Первые результаты по распространению и обоснованию метода усреднения на стохастические системы уравнений принадлежат И.И. Гихману [243]. Они получили затем развитие в работах Р.Л. Стратоновича [244], Р.З. Хасьминского [245], В.Г. Коломийца [246]. Результаты этого направления подытожены в обзоре Ю.А. Митропольского и В.Г. Коломийца [247].

В последние годы В.С. Королюк, используя метод усреднения, получил глубокие результаты по устойчивости стохастических динамических систем [248].

Метод усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, обоснован А.Н. Филатовым. Его результаты отражены в монографии 1971 г. "Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях" [249]. Много внимания уделено А.Н. Филатовым позже разработке алгоритмов частичного усреднения [250].

Разработке асимптотических методов сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений посвящен большой цикл работ М.И. Иманалиева и его учеников [251].

Обширные исследования периодических решений и интегральных многообразий различных классов дифференциальных уравнений выполнены В.В. Стрыгиным и В.А. Соболевым [252], В.И. Рожковым [253], В.И. Фодчуком [254].

Для задач устойчивости нелинейных систем общего вида и систем небесной механики с успехом применяется принцип усреднения в большом цикле работ М.М. Хапаева [255], [256] и Е.А. Гребеникова [257]. Для счетных систем дифференциальных уравнений асимптотические методы и метод усреднения в это время разрабатывается К.Г. Валеевым и О.А. Жаутковым [258], позже – Ю.В. Теплинским [259].

Большой успех достигнут в области применения идей Н.Н. Боголюбова к задачам оптимального управления усилиями Ф.Л. Черноусько, В.Д. Акуленко, Б.Н. Соколова [260], [261].

В теории адиабатических инвариантов успешно применяются асимпотические методы благодаря исследованиям А.С. Бакая [262].

Определяющую роль в разработке метода усреднения для многочастотных систем сыграла работа В.И. Арнольда 1965 года [263]. Доказанная в ней теорема для двухчастотной системы гарантирует прохождение рассматриваемой системы через резонансные зоны на временном промежутке длины порядка $1/\varepsilon$ и обеспечивает на этом интервале точность приближения амплитуд исходных и усредненных уравнений порядка $\sqrt{\varepsilon}\,\ln^2\varepsilon$. Сложные явления прохождения через резонанс в многочастотных системах небесной механики изучены с помощью метода усреднения и численной реализации на ЭВМ в цикле работ Е. А. Гребеникова и его учеников [264], [265]. Результаты этого направления вошли монографии Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова [266], [267].

В последующем глубокие исследования по проблеме усреднения многочастотных систем, давшие оценки нового типа для разности между решениями исходных и усредненных уравнений, принадлежат А. И. Нейштадту [268], Н. Н. Нехорошеву [269].

Уместно отметить здесь также оценочные результаты в обосновании метода усреднения для многочастотных систем с медленно меняющимися частотами Р. Петришина [270].

Общие закономерности построения асимптотических разложений для дифференциальных уравнений с малым параметром изложены в работах [271], [272]. В этих работах, а также в более ранней работе А. Д. Брюно [273] выяснена глубокая связь разных вариантов метода усреднения и метода нормальных форм.

Важные приложения асимптотических методов к системам маятникового типа предложены Т. Г. Стрижак [274].

Теоретико-групповой подход к теории асимптотических методов, опираясь на результаты А. Я. Повзнера [275] развит А. К. Лопатиным [276]. Результаты этого направления в последующем составили основу монографии Ю. А. Митропольского и А. К. Лопатина "Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики" [277] (1988 г.).

Плодотворно разрабатывается асимптотический алгоритм для дифференциальных уравнений третьего и высших порядков как обыкновенных, так и стохастических, в работах вьетнамских математиков [261], [262].

Продолжаются исследования неавтономных систем дифференциальных уравнений методом интегральных многообразий, которые отражены в монографии О. Б. Лыковой и Я. С. Бариса "Приближенные интегральные многообразия" [280].

Существенные продолжения исследований по теории тороидальных инвариантных многообразий выполнены В. Л. Куликом. Им изучены проблемы устойчивости линейных расширений динамических систем на торе [281], [282].

Проблемы интегрируемости нелинейных динамических систем математической и теоретической физики и построения их точных решений исследованы в работах Н. Н. Боголюбова(мл.), А. К. Прикарпатского, В. Г. Самойленко и подытожены в их совместной с Ю. А. Митропольским монографии 1987 года "Интегрируемые динамические системы" [283].

Важные результаты по теории квазипериодических решений динамических систем получены в последние годы Ю. С. Бибиковым [284].

Качественные методы и метод точечных отображений для задач теории колебаний развиваются в работах Л. П. Шильникова [285], Л. Н. Белюстиной [286], В. Н. Белых [287], [288].

Теория асимптотических методов для дифференциальных включений, краевых задач, систем оптимального управления интенсивно разрабатывается В. А. Плотниковым [289], С. Т. Завалищиным и А. Н. Сесекиным [290].

Осциляционные свойства дифференциальных уравнений и уравнений с отклоняющимся аргументом изучаются в большом цикле работ И. Т. Кигурадзе и П. А. Чантурии [291], В. Н. Шевело [292] и др.

В последние годы интенсивно развиваются качественные методы в сочетании с методами компьютерной математики применительно к теории хаотических процессов [293]–[295].

Заканчивая настоящий обзор, хотелось бы надеяться, что в нем нашло отражение основное из математического наследия Н. Н. Боголюбова, относящиеся к нелинейной механике, а также показано влияние его идей и результатов на развитие такой обширной области математической физики, как нелинейная механика.

Естественно, что все полученное за более чем шестидесятилетний период с момента зарождения нелинейной механики, даже ряд основных результатов, не поместилось в этом обзоре и ожидает своего осмысления и оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики. М.–Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934.

[2] Kryloff N. et Bogoluboff N. Quelques exemples d'oscilations non lineaires // Comptes rendus des seances des l'Academie des Scitnces de Paris. 194. 14.03.1932.

[3] Крилов М. М., Боголюбов М. М. Про деякі формальні розклади нелінійной механіки. Київ: Вид-во Загальноукр. АН, 1934.

[4] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев: Изд-во Всеукр. АН, 1934.

[5] Боголюбов Н. Н. О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики // Труды Первой летней матем. школы. Т. 1. Киев: Наук. думка. 1964. С. 11–101.

[6] Kryloff N. et Bogoluboff N. Methodes approchées de la mecanique non lineaire dans leur application a l'etude de la perturbastion des mouvements periodiques et de divers phenomenes de resonance s'y rapportant. Kiev: Publie par l'Academie des Scienties d'Ukraine, 1935.

[7] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.

[8] Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.

[9] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Общая теория меры в нелинейной механике // Н. Н. Боголюбов. Избранные труды в 3-х т. Т. 1. Киев: Наук. думка. 1969. С. 411–464.

[10] Крилов М. М., Боголюбов М. М. Про деякі проблеми ергодичноі теоріі стохастичних систем // Зап. кафедри мат. фізики АН УРСР. 1939. Т. 4. С. 243–287.

[11] Крилов М. М., Боголюбов М. М. Про рівняния Фоккера–Планка, що виводяться з теоріі пертурбацій методом, що оснований на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана // Зап. кафедри мат. фізики АН УРСР. 1939. Т. 4. С. 5–157.

[12] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Об асимптотических неравенствах, приложимых к некоторым вопросам статистической динамики систем с весьма большим числом степеней свободы // Наук. зап. мех.-матем. факультету Київ держ. ун-ту. 1941. Т. 5. С. 49–68.

[13] Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. Т. 14. 1950. С. 9–34.

[14] Боголюбов Н. Н. Одночастные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. Т. 10. 1949. С. 9–21.

[15] Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЕТФ. 1951. Т. 21. №5. С. 588–597.

[16] Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. 1956. Т. 110. №3. С. 345–347.

[17] Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле // Укр. матем. журн. 1955. Т. 7. №1. С. 5–17.

[18] Фещенко С. Ф. Про асимптотичне представлення інтегралів спеціальної системи лінійних диференціальних рівнянь, що мають малий параметр // ДАН УССР. 1947. Т. 2. №3.

[19] Раппопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.
[20] Фещенко С. Ф. Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1966.
[21] Митропольский Ю. А. Собственные колебания нелиненой системы с медленно меняющимися параметрами // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. Т. 11. 1948.
[22] Митропольский Ю. А. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы // Прикл. математика и механика. 1950. Т. 14. №2. С. 139–170.
[23] Митропольский Ю. А. Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс // Инженерн. сб. 1953.
[24] Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Киев: Изд-во АН УССР, 1955.
[25] Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964.
[26] Писаренко Г. С. Вынужденные колебания упругих систем с одной степенью свободы с учетом рассеяния энергии в материале // Сб. тр. Ин-та строит механики АН УССР. Т. 10. 1948.
[27] Писаренко Г. С. Применение методов нелинейной механики для учета рассеяния энергии в материале // ЖТФ. 1949. Т. 19. №12.
[28] Писаренко Г. С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. Киев: Изд-во АН УССР, 1955.
[29] Гихман И. И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр матем. журн. 1952. Т. 4. №2. С. 215–219.
[30] Демидович В. П. Об одном обобщении принципа усреднения Н. Н. Боголюбова // ДАН СССР. 1954. Т. 96. №4. С. 693–694.
[31] Красносельский М. Г., Крейн С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике // УМН. 1955. №3. С. 147–152.
[32] Курцвейль Я., Ворел З. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Чехословац. матем. журн. 1957. Т. 7. №4. С. 568–580.
[33] Antosiewicz H. A. Continuous parameter dependence and the method of averaging // Тр. междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 51–58.
[34] Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971.
[35] Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве // Укр. матем. журн. 1950. Т. 2. №4. С. 71–91.
[36] Лось Ф. С. О принципе усреднения для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. матем. журн. 1950. Т. 2. №3. С. 87–93.
[37] Штокало И. З. Критерии устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Матем. сб. 1946. Т. 19. №2. С. 263–286.
[38] Штокало И. З. К вопросу о решении линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с переменными коэффициентами // Сборник трудов института математики. №9. Киев: Изд-во АН УССР. 1947. С. 140–159.
[39] Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев: Изд-во АН УССР, 1960.
[40] Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля // Прикл. матем. и мех. 1947. Т. 11. №3. С. 313–328.
[41] Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. 1948. Т. 22. №193–204.
[42] Волосов В. М. Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной // Матем. сб. 1952. Т. 30. №2. С. 245–270.
[43] Волосов В. М. О решении некоторых дифференциальных уравнений второго порядка, зависящих от параметра // Матем. сб. 1952. Т. 31. №3. С. 675–686.
[44] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1955.

[45] Федорченко А. М. Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний // Укр. матем. журн. 1957. Т. 9. №2. С. 220–224.
[46] Бурштейн Э. Л., Соловьев Л. С. Гамильтониан усредненного движения // ДАН СССР. 1961. Т. 139. №4. С. 855–858.
[47] Вчерашнюк В. П. К вопросу об интегрируемости канонических уравнений с помощью принципа усреднения // Тр. науч. конф. сотрудников и аспирантов Ин-та математики АН УССР. Киев: Инт-т математики АН УССР. 1963. С. 20–24.
[48] Мосеенков Б. И. Поперечнi коливання стержня двоякої жорсткостi в перехiдному режимi обертання // Прикл. механика. 1957. Т. 3. №2. С. 155–159.
[49] Мосеенков Б. И. Поперечнi коливання стержня двоякої жорсткостi в стацiонарному режимi обертання // Прикл. механика. 1958. Т. 4. №2. С. 130–138.
[50] Гробов В. А. О поперечных колебаниях вала при переменной скорости вращения // Изв. АН Латв. ССР. 1955. №5.
[51] Гробов В. А. Нестационарные колебания вала турбины в области критических чисел оборотов // Изв. АН Латв. ССР. 1957. №8.
[52] Кононенко В. О. О колебаниях в нелинейных системах со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1955. Т. 105. №4. С. 664–667.
[53] Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
[54] Лурье А. И. Об автоколебаниях в регулируемых системах // Автоматика и телемеханика. 1947. Т. 8. №5.
[55] Попов Е. П. Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных автоматических системах // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. №9.
[56] Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960.
[57] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Дослiдження коливань в системах з розподiленими параметрами (Асимптотичнi методи). Киiв: Вид-во Киiв ун-ту, 1961.
[58] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киiв: Вищ. шк., 1976.
[59] Волосов В. М. О методе усреднения // ДАН СССР. 1961. Т. 137. №1.
[60] Волосов В. М., Моргунов Б. И. К расчету стационарных резонансных режимов некоторых нелинейных колебательных систем // ДАН СССР. 1963. Т. 153. №3. С. 559–561.
[61] Волосов В. М., Моргунов Б.И. Лекции по асимптотическим методам исследования стационарных резонансных режимов нелинейных колебательных систем // 5-я Летняя матем. школа. Киев: Наук. думка. 1968. С. 158–223.
[62] Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. Применение метода усреднения к расчету некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник МГУ. Сер. III. Физика, астрономия. 1965. Т. 6. С. 89–91.
[63] Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.
[64] Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В. Приближенные решения одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ДАН СССР. 1960. Т. 131. №2. С. 255–258.
[65] Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В. Периодические решения одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ДАН СССР. 1960. Т. 132. №3. С. 537–540.
[66] Пулькин С. С., Розов Н. Х. К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы. 1. Вычисление фазовых траекторий // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1964. Т. 2. С. 70–82.
[67] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф. Существование и устойчивость релаксационного тора // УМН. 1989. Т. 44. №3. С. 161–162.
[68] Макаева Г. С. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром, системы "быстрых движений" которых гамильтоновые // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. №5. С. 685–716.
[69] Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. №5. С. 721–742.

[70] Аносов Д. В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Матем. сб. 1960. Т. 50. №3. С. 299–334.

[71] Haag J. Etude asymptotique des oscillations de relaxation // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1943. V. 60. P. 35–64.

[72] Haag J. Exemples concrets d'etude asymptotique d'oscillation de relaxation // Ann. Sci. Norm. Sup. 1944. V. 61. P. 65–111.

[73] Haag J. Les mouvements vibratoires. V. 1, 2. Paris: Press Univ. de France, 1952, 1955.

[74] Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. №5. С. 605–626.

[75] Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. №5. С. 627–654.

[76] Мищенко Е. Ф. Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка // Матем. сб. 1958. Т. 44. №4. С. 457–480.

[77] Мищенко Е. Ф. Асимптотические методы в теории релаксационных колебаний // УМН. 1959. Т. 14. №6. С. 229–336.

[78] Розов Н. Х. К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы. Вычислительные методы предельного цикла // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1964. Т. 3. С. 56–65.

[79] Розов Н. Х. Асимптотические вычисления близких к разрывным периодических решений, описывающих релаксационные колебания в системах с одной степенью свободы // Междунар. конгресс математиков. Тез. кратких науч. сообщ. Секция 6. М. 1966. С. 45–66.

[80] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

[81] Аносов Д. В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Матем. сб. 1960. Т. 50. №3. С. 299–334.

[82] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. №5. С. 3–122.

[83] Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // УМН. 1963. Т. 18. №3. С. 15–86.

[84] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

[85] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно-возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.

[86] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.

[87] Кузмак Г. Е. Асимптотические решения уравнения движения нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы с медленно изменяющимися параметрами // ДАН СССР. 1958. Т. 20. №3.

[88] Кузмак Г. Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Прикл. матем. и мех. 1959. Т. 23. №3.

[89] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

[90] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Части I, II, III // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. №1, 2, 5, 6.

[91] Неймарк Ю. И. Исследование устойчивости неподвижных точек преобразования в критических случаях // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. №3.

[92] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1972.

[93] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.

[94] Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // УМН. 1949. Т. 2. №5. С. 99–141.

[95] Халанай А. Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Revue math. pures et appl. Acad. RPR. 1959. Т. 4. №3. С. 467–483.

[96] Шиманов С. Н. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием // ПММ. 1959. Т. 23. №5. С. 836–844.

[97] Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3. №3.

[98] Эльсгольц Л. Э. Периодические решения квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Тр. 3-го Всесоюз. матем. съезда. Т. 4. М.: Изд-во АН СССР. 1959.

[99] Эльсгольц Л. Э. Основные направления развития теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументов. Т. 1. М.: Ун-т дружбы народов. 1962.

[100] Рубаник В. П. Применение асимптотического метода Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям // Укр. матем. журн. 1959. Т. 11. №4. С. 446–449.

[101] Рубаник В. П. Обоснование применимости принципа усреднения к системам дифференциально-разностных уравнений // Науч. ежегодник Черновиц. гос. ун-та. Черновцы. 1960. С. 63–67.

[102] Рябов Ю. А. Некоторые вопросы применения метода малого параметра и оценки области его сходимости в теории нелинейных колебаний и систем с запаздыванием // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М. 1962.

[103] Рябов Ю. А. Метод малого параметра теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументов. №1. М.: Ун-т дружбы народов. 1962. С. 103–113.

[104] Фодчук В. И. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. матем. журн. 1964. Т. 16. №2. С. 273–279.

[105] Фодчук В. И. Обоснование метода усреднения для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. Т. 4. 1967. С. 163–172.

[106] Мартынюк Д. И., Фодчук В. И. Асимптотическое интегрирование квазилинейных автономных систем с запаздыванием // Укр. матем. журн. 1966. Т. 8. №4. С. 117–121.

[107] Мартынюк Д. И. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Укр. матем. журн. 1967. Т. 19. №4. С. 125–132.

[108] Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969.

[109] Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Выща шк., 1979.

[110] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

[111] Евтушенко Ю. Г. Асимптотические методы интегрирования уравнений движения искусственных спутников Земли при наличии аэродинамических воздействий // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29. №3. С. 408–417.

[112] Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970.

[113] Черноусько Ф. Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // ЖВМ и ФМ. 1963. Т. 3. №3. С. 528–538.

[114] Митропольский Ю. А. О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы // Укр. матем. журн. 1959. Т. 11. №4. С. 366–377.

[115] Боголюбов Н. Н.(мл.), Садовников Б. И. Об одном варианте методов усреднения // Вестник МГУ. Сер. III. Физика, астрономия. 1961. Т. 3. С. 24–34.

[116] Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.

[117] Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. 1966. Т. 18. №2. С. 50–59.

[118] Самойленко А. М. О периодических решения нелинейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. №11. С. 1903–1912.

[119] Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наук. думка, 1986.

[120] Лика Д. К., Рябов Ю. А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиица, 1974.

[121] Красносельский М. А. Функционально-аналитические методы в теории нелинейных колебаний // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 322–331.

[122] Борисович Ю. Г. К теории периодических и ограниченных решений дифференциально-разностных уравнений // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 83–89.

[123] Забрейко П. П., Стригін С. О. Рівняння Чезарі та метод Гальоркіна віидшукання періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1970. Т. 7. С. 583–586.

[124] Перов А. И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1981.

[125] Колесов Ю. С. Об одном новом методе доказательства существования устойчивых периодических решений // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 299–303.

[126] Бурд В. Ш., Забрейко П. П., Колесов Ю. С., Красносельский М. А. Малые комбинационные колебания и принцип усреднения // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 120–125.

[127] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1979.

[128] Conti R., Graffi L., Sansone G. The Italian contribution to the theory of nonlinear ordinary differential equations and to nonlinear mechanics during the years 1951–1961 // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 172–180.

[129] Graffi L. Sur une methode Approchee pour la resolution d'equations non-lineaires auant des termes hereditaires // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 216–228.

[130] Conti R. Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard generalizzata Esistenza ed unicita (8) // Boll. Unione Mat. Ital. 1952. V. 7. № 3. P. 111–118.

[131] Caprioli L. Sur un oscillater triodique regi par une equation non-lineairedu troisoeme ordre // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 322–331.

[132] Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М.: ИЛ, 1957.

[133] Yoshizawa T. Note on the existence theorem of a periodic solution of the non-linear differential equation // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. 1954. V. 28. P. 153–159.

[134] Urabe M. On the nonlinear autonomous system admitting of a family of periodic solutions near its certain periodic solution // J. Sci. Hiroshima Univ. 1958. V. 22. № 3. P. 153–173.

[135] Urabe M. Galerkin's procedure for nonlinear periodicsystems // Arch. Ration Mech. and Anal. 1965. V. 20. № 2. P. 120–152.

[136] Levinson N. Small periodicperturbations of an autonomous system with a stable orbit // Ann. Math. 1950. V. 52. № 3. P. 727–738.

[137] Diliberto S. P. An application of periodic surfaces. Solution of a small divisor problem // Ann. Math. Studies. 1956. V. 36. P. 257–259.

[138] Diliberto S. P. Perturbation theorems for periodic surfaces echnical Report // Berkley 1958. № 24.

[139] Cesari L. Existence theorems for periodic solutions of nonlinear differential systems // Dol. Soc. Vat. Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 24–41.

[140] Seifert G. Periodic integral surfaces for periodic systems of differential equations // Contribs. ifferential Equations. II. New York. 1963. P. 341–350.

[141] Hale J. K., Seifert G. Bounded and almost periodic solutions of singularly perturbed equations // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. II. Качественные

методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 427–432.
[142] Sethna P. R. An extension of the method of averaging // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. №2. P. 205–211.
[143] Cartwright M. L., Littlewood J. E. Some fixed point theorems // Ann. Math. 1951. V. 54. P. 1–37.
[144] Cartwright M. L. Almost periodic solutions of systems of two periodic equations // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 256–263.
[145] Mawhin Ja. Periodic solutions of strongly nonlinear differential systems // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 380–400.
[146] Van der Burgh A. On second order asymptotic approximations for solutions of nonlinear differential equations // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 133–141.
[147] Вейвода О. О периодическом движении слабо нелинейной струны // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. II. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 120–122.
[148] Кордуняну К. О существовании ограниченных решений для некоторых нелинейных дифференциальных систем // ДАН СССР. 1960. Т. 131. №4. С. 735–737.
[149] Бояджиев Г. Периодические решения одной квазилинейной системы дифференциальных уравнений в критическом случае // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 90–96.
[150] Schneider K. P. Een einschliessungssatz fur die periode nichtlinearer schwin-gungen // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. II. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 558–572.
[151] Шмидт Т. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
[152] Гутовский Р., Радзишевский Б. Об асимптотике решений одной системы дифференциальных уравнений второго порядка // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 234–243.
[153] Крейн М. Г., Якубович В. А. Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 277–305.
[154] Старжинский В. М., Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.
[155] Самойленко А. М. Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах второго порядка с малым параметром // Укр. матем. журн. 1961. Т. 13. №3. С. 103–109.
[156] Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958.
[157] Лурье А. И. Операционное исчисление. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
[158] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
[159] Самойленко А. М. Метод усреднения в системах с толчками // Матем. физика. 1971. Т. 9. С. 101–117.
[160] Мышкис А. Д., Самойленко А. М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Матем. сб. 1967. Т. 74. №2. С. 202–208.
[161] Перестюк Н. А. К вопросу об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Год. на ВУЗ. Прил. матем. Т. 11. №1. София. 1976. С. 145–150.
[162] Перестюк Н. А. Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр. матем. журн. 1984. Т. 36. №1. С. 63–68.
[163] Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И. Проблема "биений" в импульсных системах. Киев: Препр. АН УССР. Ин-т математики. 90.11, 1990.
[164] Ахметов М. В., Перестюк Н. А. О почти периодических решениях одного класса систем с импульсным воздействием // Укр. матем. журн. 1984. Т. 36. №3. С. 486–490.
[165] Слюсарчук В. Е. Ограниченные решения импульсных систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №4. С. 588–596.

[166] Самойленко В. Г., Елгондыев К. К. Периодические и почти периодические решения линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. физика. 1991. Т. 15. С. 13–19.

[167] Самойленко А. М., Илолов М. К. К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием // ДАН СССР. 1991. Т. 316. №4. С. 822–825.

[168] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Выща шк., 1987.

[169] Schwabik S. Generalized differential equations. Special results // Rozpravy CSAV (rada MPV). 99,3. Praha. 1989.

[170] Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. Theory of impulse differential equations. Ser. Modern App. Math. V. 6.: World Scientific, 1989.

[171] Vogel Th. Theoric des systemes evolutifs // Goutnier Villons. 1965.

[172] Баутин Н. Н. Динамическая теория часов. М.: Наука, 1986.

[173] Митропольский Ю. А. О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний // Укр. матем. журн. 1957. Т. 9. №3.

[174] Лыкова О. Б. О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит // Укр. матем. журн. 1957. Т. 9. №4.

[175] Задирака К. В. Об интегральном многообразии системы дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр // ДАН СССР. 1957. Т. 115. №4.

[176] Барис Я. С. Об интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. матем. журн. 1968. Т. 20. №4. С. 439–442.

[177] Fenichel N. Geometric singular perturbations theory for ordinary differential equations // J. Different. Equat. 1979. V. 31. P. 53–98.

[178] Митропольский Ю. А. Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. 1958. Т. 10. №3. С. 270–279.

[179] Митропольский Ю. А. Об устойчивости однопараметрического семейства решений системы уравнений с переменными коэффициентами // Укр. матем. журн. 1958. Т. 10. №4.

[180] Лыкова О. Б. К вопросу об устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. 1959. Т. 11. №3. С. 251–255.

[181] Лыкова О. Б. Об одночастотных колебаниях в системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. матем. журн. 1957. Т. 9. №2. С. 155–161.

[182] Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966.

[183] Самойленко А. М. О локальных интегральных многообразиях в окрестности периодических решений системы дифференциальных уравнений // Тр. Семинара по матем. физике и нелинейн. колебаниям. Т. 1. №1. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1963. С. 60–87.

[184] Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. С. 1297–1324.

[185] Лыкова О. Б. Принцип сведения в банаховом пространстве // Укр. матем. журн. 1971. Т. 23. №4. С. 464–471.

[186] Лыкова О. Б. Принцип сведения для дифференциального уравнения с неограниченным операторным коэффициентом // Укр. матем. журн. 1975. Т. 27. №2. С. 240–243.

[187] Diliberto S. P., Hufford G. Perturbation theorems for nonlinear ordinary differential equations // Ann. Math. Studies. 1956. V. 36. P. 207–236.

[188] Kyner W. T. An existence proof for periodic k-surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. V. 61. №2.

[189] Kyner W. Invariant manifolds // Rend. Circ. Math. Palermo. 1961. V. 2. №10. P. 98–110.

[190] Hale J. K., Stokes A. Behavior of solutions near integral manifolds // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1960. V. 6. №2. P. 133–170.

[191] Kupka I. Stabilite des varietes invariantes d'un champ de vecteurs pour les petites perturbations // C. R. Acad. Sci. Paris. 1964. V. 258. №17. P. 4197–4200.

[192] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 93–154.

[193] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[194] Halanay A. Invariant manifolds for systems with time lag // Proc. Symp. Diff. Eq. and Dyn. Sust. Puerto Ricj. Acad. Press. New York. 1967. P. 199–213.

[195] Cesari L. Periodic solutions of partial differential equations // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейн. колебаниям. Т. II. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 440–457.

[196] Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1970.

[197] Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1979.

[198] Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев: Наук. думка, 1991.

[199] Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1992.

[200] Колмогоров А.Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98. №4. С. 527–530.

[201] Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Междунар. матем. конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз. 1961. С. 187–208.

[202] Арнольд В.И. Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. №1. С. 21–86.

[203] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Общие вопросы теории асимптотического интегрирования систем нелинейной механики. Киев: Препр. АН УССР Ин-т математики. 87.41, 1987.

[204] Самойленко А.М. Исследование динамической теории в окрестности квазипериодической траектории. Киев: Препр. АН УССР. Ин-т математики. 90.35, 1990.

[205] Арнольд В.И. Малые знаменатели. Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18. №5. С. 13–40.

[206] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. №6. С. 91–192.

[207] Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Akad. Gottingen Math. Phys. Kl. 1962. №1 ;// Математика. 1962. Т. 6. №5. С. 51–67.

[208] Moser J. On invariant surfaces and almost periodic solutions for ordinary differential equations // Notices Amer. Math. Soc. 1965. Т. 12. №1.

[209] Poincare H. Sur les proprietes des fonctions definies par less equations aux differences partielles: These, 1879.

[210] Siegel C.L. Uder die Normal form analytischer Lifferentialg leichungen in der Nahe einer Gleichgewichts losung // Nachr. Akad. Wiss. Gottengen Math. Phys. Kl. 1952. P. 21–30 ;// Математика. 1961. V. 5. №2.

[211] Ляпунов М.А. Собрание сочинений. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

[212] Митропольский Ю.А. О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего "ускоренную" сходимость // Укр. матем. журн. 1964. Т. 16. №4. С. 475–501.

[213] Белага Э.Г. О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения // ДАН СССР. 1962. Т. 143. №2. С. 255–258.

[214] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью ускоренной сходимости // Укр. матем. журн. 1965. Т. 17. №6. С. 42–59.

[215] Самойленко А.М. Некоторые вопросы теории периодических и квазипериодических систем // Автореф. дис. докт. физ.-матем. наук. Киев. 1967.

[216] Мозер Ю. О разложении условно периодических движений в сходящиеся степенные ряды // УМН. 1969. Т. 24. №2. С. 165–211.

[217] Динабург Е.И., Синай Я.Г. Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №4. С. 8–21.

[218] Mozer J., Poschel J. An extension of a result by Dynaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. Math. Helv. 1984. V. 59. №1. P. 39–85.

[219] Самойленко А.М. Приводимость системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41. №12.

С. 1669–1680.

[220] Sell G.R. The Floquet problem for almost periodic linear differential equations // Lect. Notes in Math. 1974. V. 415. P. 239–251.

[221] Johunson R.A., Sell G.R. Smoothness of Spectral Subbundes and Reducibility of Quasi-periodic linear differential systems // J. Different. Equat. 1981. V. 41. №2. P. 262–288.

[222] Самойленко А.М. К вопросу о структуре траекторий на торе // Укр. матем. журн. 1964. Т. 16. №6. С. 769–782.

[223] Mozer J. A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. III. 1966. V. 20. №3. P. 490–536 ;// УМН. 1968. V. 142. №4. P. 179–238.

[224] Mozer J. A new technique for construction of solutions of non-linear differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47. №11. P. 1824–1831.

[225] Sacker R.J. A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. №4. P. 717–732.

[226] Sacker R.J. A perturbation theorem for invariant manifolds and older continuity // J. Math. and Mech. 1969. V. 18. №8. P. 705–761.

[227] Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. №3. P. 193–226.

[228] Fenichel N. Asymptotic stability with rate conditions // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 23. №1. P. 81–93.

[229] Самойленко А.М. К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. I. Аналитические методы. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 495–499.

[230] Кулик В.Л. О необходимых и достаточных условиях существования функции Грина задачи об инвариантном торе // Аналитические методы исследования решений нелинейный дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1974. С. 63–72.

[231] Бронштейн И.У. Слабая регулярность и функции Грина линейного расширения динамических систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №2. С. 2031–2038.

[232] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. Киев: Наук. думка, 1984.

[233] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. М.: Наука, 1987.

[234] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[235] Sternberg S. On the behavior of invariant curves near a hyperbolic points of a surface transformation // Amer. J. Math. 1955. V. 77. P. 526–534.

[236] Hirsch M.W., Pugh C.C., Shub M. Invariant manifolds // Lect. Notes Math. 1977. V. 583.

[237] Бронштейн И.У. Слабая регулярность и функция Грина линейного расширения динамических систем // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №12. С. 2031–2038.

[238] Самовол В.С. Эквивалентность и линеаризация для дифференциальных уравнений в окрестности особенностей // УМН. 1989. Т. 44. №4. С. 218–219.

[239] Осипенко Г.С. Возмущение динамических систем вблизи инвариантных многообразий // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. №4. С. 620–628.

[240] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1969.

[241] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971.

[242] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.

[243] Гихман И.И. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями // Укр. матем. журн. 1950. Т. 2. №3.

[244] Стратонович Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.

[245] Хасьминский Р.З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее прим. 1963. Т. 8. №1. С. 3–25.

[246] Коломиец В. Г. Случайные колебания квазилинейных систем // Abhandl. Deutsch. Acad. Wissensch. Berlin. Kl. Math. Phys. Tech. 1965. №1.
[247] Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г. Усреднение в стохастических системах // Укр. матем. журн. 1971. Т. 23. №3. С. 313–345.
[248] Королюк В. С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. матем. журн. 1991. Т. 4. №9. С. 1176–1181.
[249] Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971.
[250] Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974.
[251] Иманалиев М. Колебания и устойчивость решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илым, 1974.
[252] Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.
[253] Рожков В. И. Асимптотика периодического решения уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием // ДАН СССР. 1968. Т. 180. №5. С. 1041–1044.
[254] Фодчук В. И. Исследование интегральных многообразий для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр. матем. журн. 1965. Т. 17. №4. С. 94–102.
[255] Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
[256] Хапаев М. М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высш. шк., 1988.
[257] Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
[258] Валеев К. Г., Жаутыков А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1974.
[259] Самойленко А. М., Теплинский Ю. В. Счетные системы дифференциальных уравнений. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993.
[260] Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
[261] Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
[262] Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты. Киев: Наук. думка, 1981.
[263] Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы // ДАН СССР. 1965. Т. 161. №1. С. 9–12.
[264] Иванов В. А., Клоса М. Н., Миронов С. В., Приходько В. А. Использование ЭВМ в процедуре обращения первых интегралов дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел // Вычислит. методы и программирование. Т. 37. М.: Изд-во МГУ. 1982. С. 29–56.
[265] Гребеников Е. А., Миронов С. В., Приходько В. А. Применение ЭВМ БЭСМ-6 для построения промежуточных орбит резонансных астероидов семейства Минервы // М. Астроном. журн. 1973. Т. 50. №6.
[266] Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.
[267] Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978.
[268] Нейштадт А. И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно периодических движений // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. №6. С. 1016–1025.
[269] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 5–56 ; // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. №5. М.: Изд-во МГУ. 1979. С. 5–50.
[270] Самойленко В. М., Петришин Р. Об интегральных многообразиях многочастотных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №2. С. 378–395.
[271] Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Об асимптотических разложениях нелинейной механики // Тез. докл. 5-й Всесоюзн. конф. по качественной теории дифференц. уравнений. Кишинев. 22–24 авг. Кишинев: Штиица. 1979.
[272] Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. матем. журн. 1979. Т. 31. №1. С. 42–53.

[273] Брюно А. Д. Нормальные формы и методы осреднения // ДАН СССР. 1976. Т. 240. №2. С. 257–260.

[274] Стрижак Т. Г. Асимптотический метод нормализации. Метод усреднения и метод нормальных форм. Киев: Выща шк., 1984.

[275] Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987.

[276] Лопатин А. К. Асимптотическое расщепление систем нелинейных обыкновенных уравнений высокой размерности // Кибернетика и вычислит. техника. 1978. Т. 39. С. 39–45.

[277] Митропольский Ю. А., Лопатин А. К. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. Киев: Наук. думка, 1988.

[278] Нгуен Ван Дао, Чан Ким Тьи. Асимптотический метод исследования квазилинейных колебаний динамических систем высокого порядка // Успехи механики. 1980. Т. 3. №4. С. 3–21.

[279] Митропольский Ю. А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев: Наук. думка, 1992.

[280] Лыкова О. Б., Барис Я. С. Приближенные интегральные многообразия. Киев: Наук. думка, 1993.

[281] Кулик В. Л. Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. 1982. Т. 34. №1. С. 43–49.

[282] Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. Киев: Наук. думка, 1990.

[283] Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н.(мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г. Интегрируемые динамические системы. Киев: Наук. думка, 1987.

[284] Бибиков Ю. С. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.

[285] Шильников Л. П. О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой // ДАН СССР. 1967. Т. 172. №2. С. 298–301.

[286] Белюстина Л. Н. О некоторых нелинейных задачах синхронизации колебаний // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 2. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1970. С. 83–93.

[287] Белых В. Н. О качественном исследовании неавтономного уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. №10. С. 1738–1753.

[288] Белюстина Л. Н., Белых В. Н. О неавтономной фазовой системе уравнений с малым параметром, содержащей инвариантные торы и грубые гомоклинические кривые // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. С. 1039–1048.

[289] Плотников В. А. Метод усреднения в задачах управления. Одесса: Лыбидь, 1992.

[290] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

[291] Кикурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

[292] Шевело В. Н. Осцилляция решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев: Наук. думка, 1978.

[293] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1986.

[294] Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.

[295] Шарковский А. Н., Коляда В. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989.

Поступила в редакцию
24.05.1993