1994 г. сентябрь — октябрь *т. 49, вып. 5(299)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

Н.Н. БОГОЛЮБОВ И МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Б.В. Медведев

Одним из главных вкладов Н.Н. Боголюбова в квантовую теорию поля является, безусловно, созданный им метод прямого построения матрицы рассеяния без обращения к гамильтонову формализму либо другой форме уравнений движения, а исходя только из одних общих требований, которые по всеобщему мнению надо налагать на любую разумную теорию – т.е. того подхода, который впоследствии станут называть *аксиоматическим построением* квантовой теории поля. Сам Н.Н. никогда не пользовался таким словоупотреблением[1] и, напротив, подчеркивал, что положения, принимаемые им в качестве исходных, отнюдь не составляют систему аксиом в математическом смысле, а лишь собрание предположений, которые реально потребовались ему, чтобы прийти к конечным результатам. Я попробую здесь восстановить тот путь, на котором Н.Н. пришел к этому подходу.

1. Как я уже рассказывал в другом месте [1], я стал учеником и сотрудником Н.Н. Боголюбова с 1948 года в Институте Химической физики, где он заведовал тогда отделом математической физики. Для квантовой теории поля это был самый разгар ее героического периода, когда после полутора десятилетий беспомощного топтания практически на одном месте перед лицом закрывавших все пути ультрафиолетовых расходимостей была выдвинута идея перенормировок, расчистившая, как минимум, дорогу как для получения многих практических результатов, так и для дальнейшего построения теории. Почти каждый номер "физрева" – о препринтах тогда еще никто

[1]Когда говорят об аксиоматической теории поля, то в это слово вкладывают двоякий смысл. В одном, физическом, словоупотреблении имеют в виду просто такой способ построения теории, который не опирается на уравнения движения – в гамильтоновой или лагранжевой форме –, а непосредственно исходит из – в том или ином виде сформулированных – основных свойств, которыми должна обладать теория с физической точки зрения. При этом и рассуждения могут проводиться – хотя бы там, где не чувствуется опасных мест, – на "обычном в физике уровни строгости" и, скажем, вопросами о полноте, независимости и непротиворечивости выбранных "аксиом" вообще не задаются.

С другой стороны, можно понимать под этим термином то, что имеют под ним в виду в математике, с использованием соответствующего языка, точных определений и построения удовлетворяющей всем нужным требованиям системы аксиом.

Естественно, что между работами, подпадающими под то или другое понимание, нельзя провести резкой грани; отмеченное замечание Н.Н. означает, что он считал свой подход более близким к первому.

еще и не помышлял – приносил известия о новых успехах, но и о возникавших новых недоумениях – отношение к "вычитательному формализму" отнюдь не было однозначным, и многие считали, что это есть лишь способ "заметания трудностей под ковер".

В частности, возникали сомнения и в отношении релятивистской инвариантности новой теории: хотя проведение всех вычислений в явно ковариантной форме и составляло ее существенный момент, но на это возражали, что нет смысла говорить, что две величины преобразуются одинаковым образом при изменении системы координат, если каждая из них расходится. В начале 1949 года появилась работа Дирака [2], в которой требование релятивистской ковариантности теории было сформулировано в виде условий выполнения правильных соотношений в скобках Пуассона между генераторами неоднородной группы Лоренца

$$H,\ P_\alpha,\ M_\beta \text{ и } I_\gamma \tag{1}$$

– энергией, импульсом, моментом и временной частью 4 момента. Рассмотрение Дирака было проведено в рамках классического гамильтонова формализма для системы материальных точек, а также для электромагнитного поля.

Подход Дирака заинтересовал Н.Н., он обратил наше – В. Л. Бонч-Бруевича и мое – внимание на эту работу и предложил нам провести аналогичное исследование для квантовой теории поля. Насколько я могу судить, это было первое обращение Н.Н. к квантовой теории поля, но он уже много работал в статистической механике, и поэтому для него было естественным предложить сразу использовать формализм вторичного квантования, введя в качестве основных объектов не поля в координатном представлении $\varphi(x), \psi(x), \ldots$, как то обычно делается, а сразу операторы рождения и уничтожения a_μ^+, a_λ, подчиняющиеся бозевским (для простоты) перестановочным соотношениям:[2]

$$a_\lambda a_\mu^+ - a_\mu^+ a_\lambda = \delta(\mu - \lambda). \tag{2}$$

Откровением для нас послужило продемонстрированное Н.Н. в первом же разговоре преимущество общего рассмотрения перед частным при условии рационально выбираемых сокращенных обозначений. Он предложил обозначать в (2) одним индексом μ совокупность двух индексов $\mathbf{m}$ и M, первый из которых есть (трехмерный) импульс частицы, а второй обозначает всю совокупность квантовых чисел ("сорт" поля, номер компоненты и т.п.), полностью вместе с импульсом определяющих состояние частицы; считать, что диракова δ в правой части (2) означает для дискретных частей индекса – кронекерову, а интегрирования по индексам означают для их дискретных составляющих – суммирование. Более того, при наличии группы равноправных индексов было решено обозначать светлой латинской буквой как их число в группе, так и всю группу

$$m = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\},$$

так что вместо $a_{\mu_1} \ldots a_{\mu_m}$ можно было писать просто Π_m.

---

[2]Эти две группы объектов связаны соотношениями типа (49), причем дело сильно осложняется тем, что в обычном подходе поля $\varphi(x)$ рассматриваются как на, так и вне поверхности энергии, в то время как операторы a^+, a определены только на этой поверхности

Наконец, предложенную Н.Н. постановку задачи завершило то, опять-таки перенесенное из статистики, замечание, что любая участвующая в теории динамическая переменная должна выражаться через a^+_μ и a_λ, и, следовательно, записываться в принятых обозначениях в виде двойного ряда:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int dm\, dl\, f_{ml}(\mu_1, \ldots, \mu_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_l) \Pi^+_m \Pi_l, \tag{3}$$

где коэффициентные функции $f_{m,l}(\ldots, \ldots)$ симметричны относительно перестановок аргументов внутри каждой группы.

После принятия анзаца (3) для генераторов (1) (для импульса **P** в силу избранных квантовых чисел было достаточно оставить в ряду (3) только первый член) оставалось только проделать выкладки – нашу с В.Л. долю труда. Самым трудоемким было получить выражение для коэффициентных функций коммутатора двух операторов вида (3) через коэффициентные функции каждого. Мы возились с этим – несмотря на все облегчения, которые давали сокращенные обозначения – несколько недель, Н.Н. все время спрашивал, как идет дело, и когда я, наконец, показал ему результат, удовлетворенно промолвил: "Так ..., так. Правильно. У меня получилось то же самое, но ваши обозначения, пожалуй, удачнее". Это была очень характерная особенность Николая Николаевича – "озадачив" чем-нибудь кого-либо из своих сотрудников, он всегда прикидывал ту же задачу сам, а потом, если результаты сходились, всегда говорил: "А у Вас получше получилось".

Найденная формула для коммутатора была применена к перестановочным соотношениям генераторов неоднородной группы Лоренца, и в результате выяснилось, что релятивистски-инвариантная теория фактически полностью определяется своим гамильтонианом, однако его коэффициентные функции не произвольны, а должны удовлетворять некоторой, явно выписанной нами бесконечной системе зацепляющихся нелинейных уравнений [3].

На этом обстоятельстве наша совместная с Н.Н. деятельность была искусственно прервана – ему пришлось переехать на "Тайвань", как на физическом сленге называли "объект", известный теперь как Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, само местоположение которого было величайшим секретом, и научное общение с Н.Н. оказалось возможным только в моменты его не слишком частых и кратких по времени наездов в Москву.

2. Поэтому дальнейший ход развития взглядов Боголюбова на проблемы квантовой теории поля приходится реконструировать по его опубликованным в этот период работам, дополняя их моими воспоминаниями о содержании рукописей, которые он почти каждый раз привозил с собой и давал для ознакомления (лучше сказать – изучения) В. Л. Бонч-Бруевичу и мне – сами они повидимому не сохранились. Прежде всего тут надо обратить внимание на три статьи в Докладах АН, две, поступившие 18 октября 1951 г. и третью, поступившую 14 ноября того же года. Хотя две из них сданы в один день, а третья – меньше чем месяц спустя, создается впечатление, что ход изложения в них передает и временную эволюцию взглядов Н.Н., и что он просто не нашел лучшей логики изложения полученных результатов, чем та последовательность, в какой он сам к ним приходил.

Первая из этих статей [4] начинается с того замечания, что для сохранения ковариантности в "новом" формализме теории поля при записи уравнения Шрёдингера в представлении взаимодействия нет нужды во введении произвольных пространственно подобных гиперповерхностей $\sigma(x)$, а достаточно четырехпараметрического семейства гиперплоскостей.

$$x \cdot \xi = \tau \qquad (\xi^2 = +1,\ \xi_0 > 0),$$

после чего Н.Н. ставит перед собой задачу посмотреть, как будет в таком случае выглядеть теория.

В уравнения движения войдут тогда вместо плотности гамильтониана $H(x, \sigma)$ только четыре относящихся к системе в целом *эрмитовых* оператора $H(\tau, \xi)$ и $H_\alpha(\tau, \xi)$ ($\alpha = 1, 2, 3$), которые играют роль энергии H и временной части 4-момента I_γ обсуждавшегося выше подхода Дирака, и которые сами зависят от операторов порождения и уничтожения свободных частиц. Сами же уравнения движения примут форму:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\tau, \xi)}{\partial \tau} = H(\tau, \xi)\Phi(\tau, \xi) \ \text{ и } \ i\hbar \frac{\partial \Phi(\tau, \xi)}{\partial \xi_\alpha} = H_\alpha(\tau, \xi)\Phi(\tau, \xi). \tag{4}$$

Чтобы эти уравнения были совместны, надо наложить *условия разрешимости*:

$$i\hbar\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial \tau}\right) = [H_\alpha, H]_-; \qquad i\hbar\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial H_\beta}{\partial \xi_\alpha}\right) = [H_\beta, H_\alpha]_-. \tag{5}$$

Далее Н.Н. переходит к требованиям релятивистской ковариантности. Если при неоднородном преобразовании Лоренца $L = L_r L_{tr}$ операторы свободных частиц преобразуются с помощью унитарного оператора U_L, то на H, H_α налагаются *условия релятивистской ковариантности*:

$$\begin{gathered} \overset{+}{U}_L H(\tau, \xi) U_L = H(\tau + a \cdot \xi, L_r \xi); \\ \overset{+}{U}_L H_\alpha(\tau, \xi) U_L \cdot \partial \xi_\alpha = H_\alpha(\tau + a \cdot \xi, L_r \xi)(\delta L_r \xi)_\alpha. \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения (4) сохранят свою форму, если *волновой вектор*, как говорит здесь Н.Н. – впоследствии он принял термин *амплитуда состояния* – преобразуется по закону

$$\Phi'(\tau, \xi) = U_L \Phi(\tau + a \cdot \xi, L_r \xi) \tag{7}$$

– насколько я понимаю, это было первое в литературе правило для релятивистского преобразования амплитуды состояния.

Рассмотрение бесконечно малого преобразования Лоренца показывает тогда, если определить полные 4-импульс и 4-момент как генераторы бесконечно малого преобразования волнового вектора Φ,

$$i\hbar\, \delta\Phi(\tau, \xi) = \left(P \cdot \delta a - \frac{1}{2} M_{ij} \delta\omega_{ij}\right) \Phi(\tau, \xi),$$

что для них получаются выражения

$$(8)\qquad P_i = P_i^0 + \xi_i H(\tau,\xi); \qquad \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= M^0_{\alpha\beta} + (\xi_\beta H_\alpha(\tau,\xi) - \xi_\alpha H_\beta(\tau,\xi)); \\ M_{\alpha 0} &= M^0_{\alpha 0} + \xi_0 H_\alpha(\tau,\xi). \end{aligned}$$

До сих пор мы имеем дело только с уточнением обычной формулировки теории, и Н.Н. подчеркивает, что основная проблема начинается с фактического построения операторов H, H_α, удовлетворяющих сформулированным требованиям. И тут следует весьма глубокое замечание, предвосхищающее теорему Хаага, которое я позволю себе процитировать дословно.

"Предположим на минуту, что мы можем построить унитарный оператор $S(\tau,\xi)$, удовлетворяющий условию

$$(9)\qquad \overset{+}{U}_L S(\tau,\xi) U_L = S(\tau + a\cdot\xi, L_r\xi).$$

Тогда ясно, что выражения

$$(10)\qquad H = i\hbar \frac{\partial S}{\partial \tau}\overset{+}{S}; \qquad H_\alpha = i\hbar \frac{\partial S}{\partial \xi^\alpha}\overset{+}{S}$$

удовлетворяют всем наложенным требованиям. Это, однако, обесценивается тем обстоятельством, что во всех физически интересных случаях такого оператора $S(\tau,\xi)$ вообще не существует. Точнее, если такой оператор существует, то все энергетические уровни рассматриваемой системы с наличием взаимодействия будут те же, что и при полном отсутствии взаимодействия. Указанную трудность можно попытаться обойти, заметив, что нам вовсе не требуется, чтобы существовал сам оператор $S(\tau,\xi)$, переводящий волновой вектор свободных невзаимодействующих частиц в $\Phi(\tau,\xi)$; необходимо лишь, чтобы имело смысл символическое произведение $S(\tau,\xi)\overset{+}{S}(\tau',\xi')$, представляющее оператор преобразования волнового вектора с гиперплоскости (τ',ξ') на гиперплоскость (τ,ξ)."

В оставшейся части первой заметки Н.Н. занимается странной процедурой, которая на первый взгляд представляется естественной только с точки зрения популярной у теоретиков песенки: "Надо, надо, надо! Надо в ряд разлагать!" Он действительно разлагает формальный оператор $S(\tau,\xi)$ в формальный ряд

$$(11)\qquad S(\tau,\xi) = 1 + \frac{1}{i\hbar}S_1(\tau,\xi) + \cdots + \frac{1}{(i\hbar)^n}S_n(\tau,\xi) + \cdots$$

совершенно неизвестно по какому параметру (но не по обратным степеням $i\hbar$ – сами S_n могут зависеть от $\hbar$ произвольным образом и неизвестно чем отличаются друг от друга), затем переносит требование ковариантности и эрмитовости всего $S(\tau,\xi)$ на отдельные операторы S_n, налагая на них условия

$$(12)\qquad \overset{+}{U}_L S_n(\tau,\xi) U_L = S_n(\tau + a\cdot\xi, L_r\xi);$$

$$(13)\qquad \overset{+}{S}_1 = S_1; \qquad S_n + (-1)^n \overset{+}{S}_n + \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^{n-k} S_k \overset{+}{S}_{n-k} = 0,$$

и, наконец, подставляя разложение (11) в (10), получает – опять-таки неизвестно по какому параметру произведенные – разложения для H и H_α:

(14)
$$H = \frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \tau} - \frac{\partial S_1}{\partial \tau}\overset{+}{S}_1\right) + \cdots, + \frac{1}{(i\hbar)^n}\sum_{1\le k\le n}\frac{\partial S_k}{\partial \tau}\overset{+}{S}_{n-k}(-1)^{n-k} + \cdots.$$

(15)
$$H_\alpha = \frac{\partial S_1}{\partial \xi_\alpha} + \frac{1}{i\hbar}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \xi_\alpha} - \frac{\partial S_1}{\partial \xi_\alpha}\overset{+}{S}_1\right) + \cdots + \frac{1}{(i\hbar)^n}\sum_{1\le k\le n}\frac{\partial S_k}{\partial \xi_\alpha}\overset{+}{S}_{n-k}(-1)^{n-k} + \cdots$$

Дело начинает проясняться только во второй статье [5], где Н.Н. конкретизирует характер зависимости S, H и H_α от параметров гиперплоскости τ, ξ, принимая, что она осуществляется лишь через посредство некоторой функции $f(\tau - x\cdot\xi)$, так что S, H и H_α рассматриваются фактически как зависящие от f функционалы, а ряд (11) является разложением функционала по степеням f:

$$S_n(\tau,\xi) = \frac{1}{n!}\int f(\tau - x_1\cdot\xi)\ldots f(\tau - x_n\cdot\xi)H_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \tag{16}$$

Естественно, что условия ковариантности и унитарности (12), (13) легко переносятся на симметричные в своих аргументах операторные коэффициентные функции $H_n(x_1,\ldots,x_n)$ операторов (16).

Более существенное следствие сделанного допущения состоит в том, что и H и H_α выразятся теперь в виде различающихся лишь весовой функцией однократных интегралов

$$\begin{aligned} H(\tau,\xi) &= \int \frac{\partial f(\tau - x\cdot\xi)}{\delta\tau} Q(\tau,\xi,x)\,dx;\\ H_\alpha(\tau,\xi) &= \int \frac{\partial f(\tau - x\cdot\xi)}{\delta\xi_\alpha} Q(\tau,\xi,x)\,dx \end{aligned} \tag{17}$$

от одного и того же оператора

$$Q(\tau,\xi,x) = i\hbar\frac{\partial S[f]}{\partial f(\tau - x\cdot\xi)}\overset{+}{S}[f], \tag{18}$$

с разложением

$$\begin{aligned} Q(\tau,\xi,x) &= Q_0(x)\\ &+ \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n!}\int f(\tau - x_1\cdot\xi)\ldots f(\tau - x_n\cdot\xi)Q_n(x;x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} Q_n(x;x_1,\ldots,x_n) &= \frac{1}{(i\hbar)^n}\Big\{H_{n+1}(x;x_1,\ldots,x_n)\\ &+ \sum_{0\le k\le n-1}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}H_{k+1}(x;x_1,\ldots,x_n)\overset{+}{H}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)\Big\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, в теории оказываются два основных оператора: $S[f]$ и $Q[f;x)$, который можно назвать обобщенной плотностью гамильтониана или, кратко, обобщенным гамильтонианом.

Обычная теория получается из развиваемой схемы наложением трех дополнительных условий:

(а) $Q_0(x) = H(x)$ – обычной плотности гамильтониана, коммутирующей в пространственно подобных точках;

(б) $H_r(x_1, \ldots, x_r) = P(H(x_1) \ldots H(x_r))$, где P указывает на хронологическое упорядочение;

(в) $f(\tau) = \vartheta(\tau)$.

Тогда обобщенный гамильтониан сводится к обычному $Q = H(x)$ и появляются расходимости трех видов: 1) ультрафиолетовые, 2) резонансные знаменатели и 3) поверхностные расходимости, связанные с резким выделением момента времени ϑ-функцией.

Н.Н. решает сохранить ограничения (а) и (б), но отказаться, следуя Штюкельбергу [7], от (в), заменяя $\vartheta(\tau)$ такой функцией $f(\tau)$, которая отличается от нее лишь при $|\tau| \le \Delta t$ и достаточно гладка. При этом $Q[f, x]$ теряет свой строго локальный характер, но при выполнении (а), (б) и учете ограничений, налагаемых на $H_r(x_1, \ldots, x_r)$ условием унитарности выражения для $Q_n(x; x_1, \ldots, x_n)$ приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
(21)\qquad & Q_n(x; x_1, \ldots, x_n) \\
&= \frac{1}{(i\hbar)^n} n!\, \vartheta[(x_n - x_{n-1})\xi] \ldots \vartheta[(x_1 - x)\xi][H(x_n), \ldots, [H(x_1), H(x)]_- \ldots]_-,
\end{aligned}
$$

т.е. в них образуется цепочка

$$
f(\tau - t_n)\vartheta(t_n - t_{n-1}) \ldots \vartheta(t_1 - t).
$$

Поскольку, однако, и $f(\tau)$ и $f(\tau) + \delta f(\tau)$ отличны от $\vartheta(\tau)$ лишь при $|\tau| < \Delta t$, то $\delta f(\tau)$ может быть отлична от нуля лишь при $|\tau| < \Delta t$. Но это значит, что и в выписанной цепочке τ и t не могут различаться больше, чем на Δt, а стало быть то же справедливо и для всех разностей $|t_k - t|$ и, следовательно, оператор $Q(\tau, \xi, x)$ зависит лишь от состояния полей в окрестности точки x, тем более узкой, чем меньше Δt. Тем самым оказывается, что сглаживание ϑ-функции, которое с физической точки зрения сводится к отказу от точного фиксирования момента времени,избавляя теорию от расходимостей второго и третьего типа, позволяет в то же время сохранить в ней приближенную локализуемость. Что же касается ультрафиолетовых расходимостей (типа 1)), то во второй статье Н.Н. ограничивается замечанием о введении регуляризации.

Зато заканчивается статья очень важным для дальнейшего обобщением: предлагается рассматривать волновой вектор как функционал $\Phi(g)$ не только от сглаживающих ϑ-ы функций $f(\tau - x \cdot \xi)$, но от произвольных гладких функций $g(x)$, определив его уравнением в функциональных производных

$$
i\hbar \frac{\delta \Phi(g)}{\delta g(x)} = Q(x; g)\Phi(g), \tag{22}
$$

в котором $Q(x; g)$ определяется уравнением (19) с заменой в нем функций $f(\tau - x_k \cdot \xi)$ на произвольные $g(x_k)$. Разработке этой идеи посвящена третья заметка [6].

Основным оператором теории оказывается теперь обобщенный гамильтониан $Q(x;g)$; $S(g)$ даже не упоминается, кроме одного критического замечания в адрес Штюкельберга [7]. Для записи $Q(x;g)$ используется форма (19) с заменой в ней f на $g(x)$. На $Q(x;x_1,\dots,x_n)$, которые теперь нельзя получить из коэффициентных функций $H_n(x_1,\dots,x_n)$ разложения $S(g)$, налагаются условия *эрмитовости*

$$\overset{+}{Q}_n = Q_n, \tag{23}$$

ковариантности (типа (9)) и (выполнявшееся при получении гамильтониана из S-матрицы автоматически) условие *разрешимости*:

$$\begin{aligned} i\hbar\{Q_{n+1}(y;x,x_1,\dots,x_n) - Q_{n+1}(x;y,x_1,\dots,x_n)\} \\ = \sum_{0\le k\le n} \sum \left(\frac{x_1,\dots,x_k}{x_{k+1},\dots,x_n}\right) [Q_k(x;x_1,\dots,x_k), Q_{n-k}(y;x_{k+1},\dots,x_n)]_-. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь впервые появляется оператор симметризации $\sum\left(\frac{x_1,\dots,x_k}{x_{k+1},\dots,x_n}\right)$ (в дальнейшем он получит обозначение $P\left(\frac{\dots}{\dots}\right)$), означающий сумму по всем возможным $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ разбиениям совокупности n точек $(x_1,\dots,x_n)$ на две совокупности из k и $(n-k)$ точек, использование которого чрезвычайно упрощает запись многих уравнений. Наконец выписываются близкие к (8) выражения для полных 4-импульса и 4-момента.

Итак, отмечает Н.Н., в формулируемой теории роль одной плотности гамильтониана $H(x)$ играет последовательность операторов:

$$Q_0(x) = H(x),\ Q_1(x;x_1),\ \dots \tag{25}$$

Далее начинается самое любопытное место этой работы, наглядно показывающее, как Н.Н. пришел к своему условию причинности. Во второй заметке приближенная локализуемость обобщенного гамильтониана достигалась, как мы отмечали выше, за счет заимствованного из обычной теории выражения коэффициентных функций оператора $S(f)$ через хронологические произведения – откуда следовало выражение (21) коэффициентных функций Q_n обобщенного гамильтониана через запаздывающие мультикоммутаторы – в комбинации с близостью функции $f(\tau - x\cdot\xi)$ к ϑ-функции. Теперь Н Н. "на пробу" сохраняет это выражение (21) с тем уточнением, что вместо множителя $n!$ явно включает в него оператор симметризации – ведь в интегралы в (19) все равно дадут вклады только симметричные в $x_1,\dots,x_n$ части Q_n. Так определенные операторы Q_n формально удовлетворяют всем ранее наложенным условиям.

И вот теперь – самое замечательное – Н.Н. специально отмечает, что "кроме того они обладают еще следующим важным свойством:

$$Q_n(x;x_1,\dots,x_n) = 0, \text{ если, хотя бы для одного } k=1,\dots,n\ \ x \gtrsim x_k\text{"}, \tag{26}$$

– т.е. интеграции в (19) по всем переменным ведутся лишь по послеконусу точки x. Достаточно было бы перевести это условие на оператор $Q(x;g)$ в целом, выражая его в терминах вариационных производных, и перед нами предстало бы боголюбовское условие причинности. Но для этого Николаю Николаевичу потребуется еще, как мы увидим, два с половиной года.

А пока Н.Н. заботят ультрафиолетовые расходимости, положение с которыми от перехода к сглаженным функциям f или g не улучшилось. Анализируя источник их появления, Н.Н. отмечает, что операторы (21) содержат сингулярные функции типа $\mathcal{D}^{(\cdots)}$ и поэтому могут (и должны) иметь смысл только в проинтегрированной с достаточно регулярными функциями определенного класса, например, с $F = g(x)g(x_1)\ldots g(x_n)$, форме, образуя линейные функционалы от F. Если выделить из Q_n операторную часть, приведя ее к нормальному виду, то линейными функционалами должны быть коэффициенты при нормальных произведениях.

Однако в действительности эти коэффициентны будут содержать произведения сингулярных функций, в то же время как для каждой из них установлены правила интеграции лишь с достаточно регулярными функциями, и непосредственное применение этих правил при интеграции с тоже сингулярными функциями и приводит к ультрафиолетовым расходимостям.

Итак, возникает задача доопределения таких произведений. Н.Н. предлагает использовать для ее решения известную в математику технику расширения функционалов, хотя она и неоднозначна.

Как я уже упоминал, рукописные материалы, которые Н.Н. привозил в Москву в 1952–53 годах, повидимому не сохранились, и я могу полагаться только на свою память, которая говорит мне, прежде всего, что была очень большая рукопись, страниц на 100 на машинке, в которой Н.Н. пытался последовательно, по возрастанию числа аргументов, вводить дополнительные правила, которые придавали произведениям сингулярных функций типа $\delta(x)$ и $\vartheta(x)$ (конечно, после интегрирования с достаточно регулярными функциями) однозначный смысл. Правила эти по мере роста числа аргументов невероятно запутывались, и помню, что нам – совместно изучавшим этот манускрипт В. Л. Бонч-Бруевичу, Д. Е. Меньшову и мне – становилось все труднее следить за нитью изложения. В других рукописях подробно и в разных формах исследовалась взаимная связь между физическими требованиями, налагаемыми на обобщенный гамильтониан и на матрицу рассеяния; чувствовалось, что Н.Н. ощущает себя подобно экспериментатору, который столкнулся с новым явлением и пробует с разных сторон – если поступить с ним так, то получится это, а если сяк, то получится то. Наконец стали появляться напечатанные на бумаге разных цветов фрагменты, называвшиеся "параграфами", повидимому это происходило уже зимой 1953/1954 года, когда по воспоминаниям Д. В. Ширкова [8] они с Н.Н. начали работу над книгой.

3. 14 апреля 1954 года на сессии отделения физико-математических наук АН СССР в конференц-зале института Физпроблем Н. Н. Боголюбов читает доклад под названием "Условие причинности в квантовой теории поля" [9]. В этом докладе, отмечая генетическую связь с работами Штюкельберга [10]–[12], Н.Н. ставит себе задачу "с полной ясностью представить те основные физические положения, на которых всегда фактически строится квантовая теория поля" и, исходя из них, найти, без обращения к гамильтонову формализму, самое общее возможное выражение для матрицы рассеяния.

Для этой цели вводится обобщенная матрица рассеяния $S(g)$, являющаяся функционалом гладких функций $g(x)$ со значениями из интервала $(0,1)$. Сами функции $g(x)$ трактуются теперь, как представляющие степень интенсивности включения взаимодействия. Конечно, в окончательных результатах надо рассматривать предел $g(x) \to 1$ во всем пространстве-времени, но главный смысл их введения состоит в том, что с их помощью можно выделять отдельные области или даже окрестности отдельных 4-точек, т.е. что они позволяют осуществлять пространственно-временное описание. Можно сказать, что в определенном смысле они играют роль внешнего классического поля, с которым взаимодействует изучаемая квантовая система, позволяя совершать над ней мысленные эксперименты.

На обобщенную матрицу $S(g)$ по прежнему налагаются условия *релятивистской ковариантности* и *унитарности*. Главным же новым условием является условие *причинности*. Фактически это, как мы уже подчеркивали, "важное свойство" (26) обобщенного гамильтониана из работы [6]. Но теперь оно не только перенесено с коэффициентных на оператор в целом и с гамильтониана на матрицу рассеяния, но оно получило и совсем другое обоснование. Если в [6] оно было следствием заимствованного из обычного гамильтонова формализма выражения (21), то теперь оно обосновывается совершенно независимо, опираясь только на выражаемые через посредство "поля" $g(x)$ общие соображения причинности. Конкретно это условие гласит:

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{+}{S}(g)\right) = 0 \quad \text{при} \quad y \gtrsim x. \tag{27}$$

Дальнейший ход рассуждений Н.Н., содержащий практически уже все важнейшие элементы, вошедшие потом в метод, изложенный в классической монографии Н.Н. и Ширкова, протекает следующим образом. $S(g)$ раскладывается в аналогичный (11), (16) формальный ряд по степеням $g(x)$:

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n) g(x_1) \ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{28}$$

где S_n суть *полилокальные операторы*

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum K_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) \psi_{\alpha_1}(x_1) \ldots \psi_{\alpha_n}(x_n), \tag{29}$$

зависящие от функций поля и их производных $\psi_\alpha(x)$ только в точках x_k, $k = 1, \ldots, n$, причем от функций, взятых в целом, без разбиения на положительно и отрицательно частотные части. Благодаря этому два полилокальных оператора коммутируют, если все аргументы одного пространственно подобны всем аргументам другого. Далее условия ковариантности, унитарности и причинности переносятся на полилокальные операторы S_n:

$$S_n(Lx_1,\ldots,Lx_n)=\overset{+}{U}_L S_n(x_1,\ldots,x_n)U_L; \tag{30}$$

$$\begin{gathered} S_n(x_1,\ldots,x_n)+S_n^+(x_1,\ldots,x_n) \\ +\sum_{1\le k\le n-1} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right) S_k(x_1,\ldots,x_k)S^+_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)=0; \end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered} S_{n+1}(x,x_1,\ldots,x_n) \\ +\sum_{1\le k\le n-1} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right) S_{k+1}(x,x_1,\ldots,x_k)S^+_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)=0, \\ \text{если хотя бы для одного } j=1,\ldots,n\ \ x\gtrsim x_j, \end{gathered} \tag{32}$$

и ставится вопрос, с какой степенью произвола определяют эти условия полилокальный оператор S_{n+1}, если считать все $S_1,\ldots,S_n$ заданными. Простое рассуждение показывает, что этот произвол состоит в возможности добавлять к S_{n+1} антиэрмитов *квазилокальный оператор*

$$i\Lambda_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) \tag{33}$$

– такой, что он обращается в нуль, если среди его аргументов есть хотя одна пара неравных (условие унитарности (31) однозначно определяет эрмитову часть S_{n+1}, а условие причинности (32) вкупе со свойством симметрии S_{n+1} делает оставшийся антиэрмитов оператор квазилокальным). Коэффициентными функциями $K(x_1,\ldots,x_{n+1})$ квазилокального оператора могут быть только выражения типа

$$Z\left(\ldots\frac{\partial}{\partial x}\ldots\right)\delta(x_1-x_2)\ldots\delta(x_1-x_{n+1}),$$

где $Z(\ldots)$ – некоторые полиномы от операторов дифференцирования.

Теперь, как и в работе [5], Н.Н. замечает, что одно формальное решение задачи о восстановлении S_n, удовлетворяющих всем наложенным на них условиям, предоставляется выражением:

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=i^nT\{\mathcal{L}(x_1)\ldots\mathcal{L}(x_n)\}, \tag{34}$$

где $\mathcal{L}(x)$ – некоторый скалярный эрмитов локальный оператор.

Тогда проведенный анализ оставляемого условиями произвола показывает, что самым общим выражением для $S_n(x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющим условиям ковариантности, унитарности и причинности, будет

$$\begin{gathered} S_n(x_1,\ldots,x_n)=i^nT\{\mathcal{L}(x_1)\ldots\mathcal{L}(x_n)\} \\ +\sum_{\substack{2\le m\le n-1\\ \sum\nu_i=n;\nu_i\ge1}}\frac{i^m}{m!}P(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|\ldots|\ldots x_n)T\{\Lambda_{\nu_1}(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\ldots\Lambda_{\nu_m}(\ldots,x_n)\} \\ +i\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n);\qquad \Lambda_1(x)=\mathcal{L}(x), \end{gathered} \tag{35}$$

где $P(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|\ldots|\ldots x_n)$ означает симметризацию по всем $\dfrac{n!}{\nu_1!\ldots\nu_m!}$ разбиениям совокупности n точек $x_1,\ldots,x_n$ на m подсовокупностей по $\nu_1,\ldots,\nu_m$ точек в каждой, а

$$\Lambda_1(x)=\mathcal{L}(x),\qquad \Lambda_2(x_1,x_2),\ldots,\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n),\ldots \tag{36}$$

– последовательность скалярных, эрмитовых, симметричных в своих аргументах квазилокальных операторов.

После этого, по любимому выражению Н.Н., "кинолента раскручивается назад", и мы возвращаемся от отдельных членов разложения (28) к операторам в целом. "Простое решение" (34) свертывается в уже всем тогда знакомую T-экспоненту

$$S(g)=T\left\{e^{i\int\mathcal{L}(x)g(x)\,dx}\right\}, \tag{37}$$

откуда видно, что $\mathcal{L}(x)$ имеет символ обычного лагранжиана взаимодействия. Что же касается общей формы (35), то после некоторых комбинаторных перестроек ее можно свернуть в

$$S(g)=T\left\{e^{i\int\mathcal{L}(x;g)g(x)\,dx}\right\}, \tag{38}$$

где обобщенный лагранжиан есть

$$\mathcal{L}(x;g)=\mathcal{L}(x)+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}\int\Lambda_{n+1}(x,x_1,\ldots,x_n)g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \tag{39}$$

Итак, нашли самое общее выражение для матрицы рассеяния, удовлетворяющее всем сформулированным общим положениям, и на первый взгляд кажется, что гора родила мышь: все выигранное обобщение обычной теории состоит в том, что произошла замена

$$S(g)=T\left\{e^{i\int\mathcal{L}(x)g(x)\,dx}\right\}\Rightarrow T\left\{e^{i\int\mathcal{L}(x;g)g(x)\,dx}\right\}. \tag{40}$$

Но ведь физический смысл имеет вообще только состояние полного включения взаимодействия, когда $g=1$, а при $g=1$ все новое исчерпывается заменой

$$\mathcal{L}(x)\Rightarrow\mathcal{L}_{\text{eff}}(x)=\mathcal{L}(x)+\sum_{\nu\geq 2}\frac{1}{\nu!}\int\Lambda_\nu(x,x_1,\ldots,x_{\nu-1})\,dx_1\ldots dx_{\nu-1}, \tag{41}$$

где после (тривиального из-за δ-функций в Λ_ν) выполнения интеграций старшие члены ничем не будут отличаться от первого!

Однако Н.Н. показывает – эскизному наброску этих рассуждений посвящена заключительная пара страниц статьи [9], что дело обстоит совсем не так просто.

Фигурирующие в (34) T-произведения хорошо определены только при отсутствии совпадения аргументов $x_r\neq x_s$, а при совпадающих аргументах $x_r=x_1$ они требуют доопределения, точнее установления правил их интеграции в бесконечно малых окрестностях таких областей, иначе мы сразу приходим к произведениям причинных функций с совпадающими аргументами и ультрафиолетовым расходимостям[3]

Предлагаемый Н.Н. путь решения этой проблемы как раз и опирается на эффективный лагранжиан (41). Прибегая к технике несобственного предельного перехода, $\mathcal{D}^c$-функции сперва регуляризуются, например, по Паули–Вилларсу, с помощью вспомогательных масс M. Тогда коэффициентные функции

$$S_n^M = i^n \operatorname{reg}_M T\{\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_n)\} \tag{42}$$

окажутся непрерывными и, пока массы M конечны, никаких трудностей не будет. Они возникнут – в некоторых членах – при $M \to \infty$. Но если мы исходим из эффективного лагранжиана (41), с квазилокальными операторами, зависящими от M, и рассматриваем последовательно, по возрастающим n, выражения (35), то в каждом из них кроме T-произведений имеется еще квазилокальный оператор $\Lambda_n^M(x_1,\dots,x_n)$, зависимость которого от M можно подобрать так, чтобы все выражение для полилокального оператора S_n^M:

$$\begin{aligned} S_n^M(x_1,\dots,x_n) &= i^n \operatorname{reg}_M T\{\mathcal{L}(x_1)\dots\mathcal{L}(x_n)\} \\ &+ \sum_{\substack{2\le m\le n-1 \\ \sum\nu=n;\nu\ge1}} \frac{i^m}{m!} P(x_1,\dots,x_{\nu_1}|\dots|\dots x_n) \operatorname{reg}_M T\{\Lambda_{\nu_1}^M(x_1,\dots,x_{\nu_1})\dots\Lambda_{\nu_m}^M(\dots,x_n)\} \\ &+ i\Lambda_n^M(x_1,\dots,x_n) \end{aligned} \tag{43}$$

оказалось бы, при $M \to \infty$, уже сходящимся, в несобственном смысле. Дальнейшая разработка этой программы привела Н.Н. к созданию техники R-операции, освещение которой составляет предмет статьи О.И.Завьялова [13].

Подробно рассмотренный здесь доклад 1954 года содержит практически в окончательном виде всю идейную часть предложенного Н.Н. способа непосредственного построения матрицы рассеяния в рамках теории возмущений (легко заметить, что разложение по функции включения взаимодействия $g(x)$ является одновременно и разложением по силе этого взаимодействия). В последующих публикациях – в напечатанной в 1955 году большой обзорной статье УФН [14] и в ставшей классической монографии [15], первое издание которой вышло в 1957, изложение уточнялось за счет конкретных деталей и более подробно проводимых выводов.

4. Тем временем в 1954–55 годах интересы теоретиков, занимающихся теорией поля и элементарных частиц, оказались прикованными к дисперсионным соотношениям – в первую очередь для пион-нуклоного рассеяния. Энтузиазм этот был вызван тем, что в то время как существовавшая тогда теория элементарного πN-взаимодействия была не в состоянии, из-за большой величины константы связи, сколько-нибудь продвинуться в описании эксперимента, дисперсионный метод как будто позволял прийти к определенным выводам независимо от модельных соображений. В то же время метод оказался довольно коварным и, пока он не получил твердого обоснования, не всегда позволял отделить верные результаты от ошибочных.

---

[3]Здесь Н.Н. специально подчеркивает, что для *обычных* произведений полилокальных операторов этой проблемы не возникает; она появляется за счет операции хронологического упорядочения.

Естественно, что задача построения вывода дисперсионных соотношений непосредственно из основных физических положений без использования модельных представлений и, особенно, теории возмущений, живо заинтересовала Н.Н. К этому времени он уже находился в Москве, заведуя отделом в Математическом институте и кафедрой в Университете. Я был научным сотрудником у него в отделе, а М.К. Поливанов сперва дипломником, а потом аспирантом на его кафедре; и вот Н.Н. после небольшого реферативного доклада, который он сделал на эту тему в Стекловке, предложил нам ассистировать ему в работе над этой проблемой. Мы, конечно, с восторгом согласились, и я оказался таким образом не только свидетелем, но и участником работы Н.Н. над последним вариантом его "полевой аксиоматики".

Н.Н. естественно отталкиваться от основных положений, сформулированных им в докладе и уже в существовавших в то время рукописных фрагментах будущей книги Боголюбова и Ширкова [15], однако сразу же отметил два недостатка сформулированного там подхода, от которых он считал нужным избавиться. Это, во-первых, работа в рамках теории возмущений и, во-вторых, использование нефизического представления об адиабатическом включении и выключении взаимодействия, описывавшегося математически с помощью функции $g(x)$.

Он тут же подчеркнул, что функция $g(x)$ требовалась не только для этого, что, пожалуй еще более важную роль играло то обстоятельство, что, как мы уже отмечали выше, с ее помощью можно было различать пространственно-временные области, сформулировать условие причинности и вообще характеризовать локальную структуру квантовой теории поля. Технически введение $g(x)$ было существенно тем, что можно было брать вариационные производные $g(x)$ и с их помощью выражать локальные свойства.

Теперь Н.Н. заметил, что подобную роль могли бы взять на себя сами поля $\psi(x)$, входящие, скажем, в лагранжиан взаимодействия обычного выражения матрицы рассеяния через T-экспоненту, вариационные производные по которым можно было бы (например, следуя Швингеру, с помощью сообщения полям классических добавок $\psi(x) \to \psi(x) + \eta(x)$) определить, например, как

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_\alpha(x)} = iT\left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \psi_\alpha(x)} e^{i\int \mathcal{L}(x)\,dx}\right).$$

Но ссылаться на представление матрицы рассеяния через хронологическую экспоненту, ни даже на понятие об лагранжиане взаимодействия Н.Н. естественно не хотел, желая взять в качестве исходного пункта ее первоначальное определения, данное Гейзенбергом [16], как матрицы, элементами которой являются амплитуды вероятностей перехода от одного состояния при $t = -\infty$ к другому состоянию при $t = +\infty$. В каждом из них может находиться система бесконечно удаленных друг от друга элементарных (или составных) частиц, взаимодействие *между* которыми естественно выключено, так что квадраты их 4-импульсов равны соответствующим массам. Полные энергия и импульс при этом сохраняются, и о таких матричных элементах говорят, как об элементах на поверхности энергии.

В соответствии с этим вся система предложенных Н.Н. основных физических положений [17] естественно распалась на две группы: *общих свойств*, относящихся к матрице рассеяния на поверхности энергии и характеризующих первоначальную гейзенбергову программу, и специальных *локальных свойств*, связанных с наложением условия причинности и требующих, как мы увидим, расширения S-матрицы на поверхность энергии.

I. *Общие свойства.*

(1). *Состояния.* асимптотические состояния системы представляют собой совокупности некоторого числа бесконечно удаленных друг от друга реальных элементарных (или составных) частиц. Взаимодействие *между* частицами равно нулю, и потому такие величины как энергия, импульс и т.д. являются *аддитивными*. Такие состояния описываются амплитудами $|\ \rangle$, являющимися элементами некоторого линейного пространства.

(2). *Ковариантность.* Имеется группа G преобразований L, включающая в качестве подгруппы группу Лоренца. Под действием L из G амплитуды состояний $|\ \rangle$ преобразуются с помощью некоторого ее унитарного представления с элементами U_L. Если в состоянии $|p\rangle$ вектор энергии-импульса имеет определенное значение p, и L_a – трансляция $x \to x + a$, то

(44) $$U_{L_a}|p\rangle = e^{-ipa}|p\rangle.$$

(3). *Существование вакуума.* Существует единственное состояние $|0\rangle$, для которого

(45) $$U_L|0\rangle = |0\rangle$$

для всех U_L. Это – состояние вакуума.

(4). *Полнота и спектральность.* Существует система собственных амплитуд состояния 4-импульса, отвечающих неотрицательным значениям энергии, которая полна, так что

(46) $$\langle\alpha|AB|\beta\rangle = \langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle + \sum_n \int d\mathbf{k}\langle\alpha|A|n\mathbf{k}\rangle\langle n\mathbf{k}|B|\beta\rangle$$

для любых $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, A и B. Здесь n означает совокупность всех остальных дискретных и непрерывных квантовых чисел, которые вместе с $\mathbf{k}$ полностью определяют состояние.

(5). *Унитарность.* Амплитуда вероятности перехода $|\alpha\rangle \to |\beta\rangle$ дается матричным элементом $\langle\beta|S|\alpha\rangle$ унитарного оператора S:

(47) $$SS^+ = 1.$$

(6). *Стабильность.* Вакуум и одночастичные состояния стабильны, т.е. для них

(48) $$S|0\rangle = |0\rangle; \qquad S|1\rangle = |1\rangle.$$

Для формулировки локальных свойств нужно было расширить гейзенбергово определение матрицы рассеяния за поверхность энергии. Мы представляли себе эту процедуру примерно следующим образом.

Матрицу рассеяния *на* поверхности энергии можно в самом общем случае мыслить записанной в форме (3) разложения по операторам рождения и уничтожения частиц, фигурирующих в I (1).[4] Из этих операторов можно построить обычные пространственно-локализованные комбинации типа

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \left\{ e^{ikx} a^+(\mathbf{k}) + e^{-ikx} a(\mathbf{k}) \right\}, \tag{49}$$

где $k_0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ и $[\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0$ для $x \sim y$, и после этого переписать общее выражение для матрицы рассеяния в форме функционального ряда по нормальным произведениям этих асимптотических полей

$$S = \sum_{\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int dx_1 \ldots dx_\nu \Phi^\nu(x_1, \ldots, x_\nu) : \varphi(x_1 \ldots \varphi(x_\nu) : . \tag{50}$$

Однако в этом выражении для гейзенберговой матрицы рассеяния на поверхности энергии поля́ $\varphi(\mathrm{x})$ не произвольны, а удовлетворяют уравнению движения, например, Клейна–Гордона

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0. \tag{51}$$

Поэтому их вариации не зависимы, и применить к (50) обычную технику вариационного дифференцирования нельзя.

Предложение Н.Н. состояло в том, чтобы для формулирования локальных свойств *расширить* определение (50), рассматривая в нем матрицу рассеяния, как функционал от *произвольных*, но коммутирующих (в Бозе-случае) полей $\varphi(x)$. Чтобы пояснить смысл совершаемого, Н.Н. несколько раз продиктовал нам текст примечания, которое мы тогда, должен сознаться, скорее запомнили и записали, чем поняли до конца, и которое я позволю себе воспроизвести здесь буквально:

“Подчеркнем, что такое расширение никоим образом не выводит нас за рамки обычной теории. Действительно, и в обычном наложении “поля́” $\varphi(x)$ играют двоякую роль: во-первых, сам оператор S мыслится функционалом от этих полей, а, во-вторых, соответствующие полям операторы рождения и уничтожения $a^{\pm}$ служат для вычисления матричных элементов этого оператора. При этом в первой из этих ролей поля всегда стоят под знаком хронологических или нормальных произведений и потому коммутируют (антикоммутируют) друг с другом. Кроме того, в этом случае при варьировании не налагается ограничений, связанных с тем, чтобы поля удовлетворяли каким-либо уравнениям. Фактически это эквивалентно допущению, что S-матрица рассматривается как функционал от произвольных классических функций $\varphi(x)$, в точности коммутирующих (антикоммутирующих), которые обладают лишь *транформационными свойствами* квантовых полей. Наоборот, при вычислении

[4] Опять: “Надо, надо, надо! Надо в ряд разлагать!” Но если не по теории возмущений, то по чему же? Ответ: “По числу частиц!” При этом, если в числе асимптотических нет частиц с нулевой массой, то это разложение окажется также и разложением по энергиям. А вот если такие есть ... в электродинамике – опять по константе связи, а вот в хромодинамике, если энергии не велики достаточно, то “так таки плохо”.

матричных элементов существенно, что $a^{\pm}$ являются *операторами*, обладающие свойствами (56)".

Только немало лет спустя мы поняли, что математический смысл этой процедуры заключен в цепочке:

(52)

оператор в нормальной форме → его символ →

→ расширение символа → его обычное варьирование →

→ сужение вариации символа → новый оператор в нормальной форме,

см. подробнее [18], где вся операция, связанная с расширением S-матрицы за поверхность энергии и ее варьированием, разобрана в деталях, и сами, "аксиомы" сформулированы на более современном языке.

После этих замечаний вторая группа основных положений была сформулирована следующим образом:

II. *Локальные свойства.*

(1). *Интегрируемость.* Расширенный оператор S обладает вариационными производными любого порядка по асимптотическим поля, такими что для *радиационных операторов*

$$S^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta\varphi(x_1)\dots\delta\varphi(x_n)} S^+ \tag{53}$$

все матричные элементы их и их произведений *со всеми различными аргументами*

$$\langle\alpha|S^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\dots S^{(m)}(z_1, \dots, z_m)|\beta\rangle \tag{54}$$

суть обобщенные функции умеренного роста.

(2). *Причинность.* Выполняется условие причинности в форме

$$0 = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^+\right) \quad \text{для} \quad x \lesssim y. \tag{55}$$

(3). *Редукция.* Матричные элементы расширенной матрицы рассеяния можно сводить к вакуумным средним радиационных операторов с помощью формальных соотношений коммутации:

$$[\varphi(x), a^+(\mathbf{p})]_- = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2p_0}}; \qquad [a(\mathbf{p}), \varphi(x)]_- = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2p_0}};$$
$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{56}$$

Свойство (3) надо заново потребовать, поскольку из (49) вытекают подобные соотношения лишь для не расширенных за поверхность энергии асимптотических полей, удовлетворяющих (51). На самом деле в локальные свойства надо было бы включить также и то требование, чтобы при расширении S не были бы потеряны свойства унитарности и ковариантности нерасширенной S-матрицы; в [17] мы не сделали этого явно, считая это условие самоочевидным.

Основное локальное свойство (2) достаточно обсуждалось выше. Что же касается свойства (1), то главная его часть – интегрируемость матричных элементов радиационных операторов – это в каком-то смысле просто требование существования тех объектов, с которыми хочет работать теория, а уточнение "и их произведений" связано с наблюдением Н.Н., отмеченным в сноске после формулы (41).

5. Опираясь на эти основные положения Н.Н. смог, как известно [19], [17], построить строгий вывод дисперсионных соотношений для рассеяния пионов на нуклонах и исследовать границы его применимости. Для этой цели ему пришлось привлечь совершенно непривычные в то время для физиков методы теории обобщенных функций и теории функций многих комплексных переменных, методы, ставшие с тех пор стандартным аппаратом в ряде разделов квантовой теории поля. В частности, очень плодотворным оказалось рассмотрение обобщенных функций умеренного роста, какими являются по II, (1) матричные элементы оператора S, как граничных значений аналитических функций многих комплексных переменных. Тем самым на первый план вышла задача определения аналитических свойств (областей регулярности и характера особенностей) продолженных в комплексную плоскость матричных элементов. А эти свойства, в свою очередь, являются в конечном счете следствиями условия причинности.[5]

Тут хочется отметить своеобразную двойственность свойств фигурирующих в квантовой теории поля функций: вследствие условия причинности определенные их комбинации обращаются в нуль всюду, кроме половины светового конуса, а вследствие условия спектральности обращаются в нуль всюду, кроме половины светового конуса, их Фурье-образы. Сложность проблемы лежит в том, что эти свойства выполняются, вообще говоря, для разных комбинаций. Это затруднение, которое совсем не проявляется для вакуумных средних радиационных операторов с двумя аргументами, становится, по мере роста числа аргументов - "внешних хвостов" –, все более и более обременительным, так что при исследовании "многохвосток" комбинаторные трудности выходят чуть ли не на первое место и требуют разработки специального языка в обозначениях (см., например, [18]).

Вместе с ростом комбинаторных усложнений уменьшается объем точных – составляющих содержание собственно дисперсионного подхода – результатов, которые можно получить из анализа одних лишь следующих из условия причинности и спектра рассматриваемой системы аналитических свойств Фурье-образов коэффициентных функций Φ^{ν} расширенного функционала (50) – в конце 50-х годов в этой связи кто-то метко сказал об использовании только линейной части информации, содержащейся в общих нелинейных связях между функциями Φ^{ν} разных номеров. Если для $\nu = 2$ эта информация достаточна, чтобы выяснить аналитические свойства всего Фурье-образа $\tilde{\Phi}^2(k)$ и установить для него спектральное представление [20], [17], то уже для $\nu = 4$ удается доказать только дисперсионные соотношения в ограниченной

---

[5] В своей самой элементарной одномерной форме дисперсионное соотношение есть прямое следствие того обстоятельства, что если некоторая функция обращается в нуль на половине прямой, то продолжение ее Фурье-образа в комплексную область будет функцией, аналитической в одной полуплоскости, а сам вещественный Фурье-образ – граничным значением этой аналитической функции.

области передачи импульса, да и то лишь при благоприятном спектре, как в случае рассеяния на пионов нуклонах. Для многохвосток же с большими ν удается доказать только существование единой аналитической функции, граничными значениями которой являются амплитуды всех каналов процесса с данным числом частиц [18].

Значительно дальше можно продвинуться, если, оставляя в стороне вопрос о точном математическом смысле совершаемых построений, чисто формально рассматривать для разложения (50) его расширение за поверхность энергии с соблюдением условий унитарности, II, (2) и II, (3). Тогда комбинаторика оказывается только умеренно запутанной и весьма близкой к разобранной Н.Н. в рамках теории возмущений [9], [14], [15], позволяя прийти к окончательным выводам. Выводы эти оказались весьма своеобразными [21]. С одной стороны, выяснилось, что формально теория, удовлетворяющая основным физическим положениям Н.Н., приводит опять к выражению матрицы рассеяния в виде T-экспоненты от проинтегрированного лагранжиана

$$S = T\left(e^{i\int \mathcal{L}(x)\,dx}\right). \tag{57}$$

С другой стороны, однако, оказывается, что для того, чтобы матрица рассеяния обладала свойствами унитарности и причинности, этот лагранжиан не должен (и не может), вообще говоря, быть ни эрмитовым, ни локальным.

Таким образом, наши представления о том, как может быть устроена локальная квантовая теория поля, испытали довольно нетривиальную эволюцию. Исходя из подсказываемого гамильтоновым формализмом выражения матрицы рассеяния в форме "наивной" хронологической экспоненты от локального, эрмитова (и конечного) лагранжиана, мы, в поисках надежной опоры перед лицом расходимостей и связанных с ними неопределенностей, обратились к вообще исключающему лагранжиан аксиоматическому пути, а он опять привел нас, хотя бы на "обычном в физике уровне строгости", к той же форме, но с лагранжианом нелокальным, неэрмитовым (и содержащим бесконечные контрчлены). Ну, чем не иллюстрация к любимому тезису диамата о "развитии по спирали"!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Медведев Б. В. Николай Николаевич Боголюбов – математик, механик, физик. Дубна, 1994. С. 64–77 ;Ширков Д. В.. С. 180–197.

[2] Dirac P. A. M. Forms of relativistic dynamics // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392–399.

[3] Боголюбов Н. Н., Бонч-Бруевич В. Л., Медведев Б. В. К инвариантному построению квантовой теории поля // ДАН СССР. 1950. Т. 74. С. 681–684.

[4] Боголюбов Н. Н. К вопросу об основных уравнениях релятивистской квантовой теории поля // ДАН СССР. 1951. Т. 81. С. 757–760.

[5] Боголюбов Н. Н. Об основном классе уравнений релятивистской квантовой теории поля // ДАН СССР. 1951. Т. 81. С. 1015–1018.

[6] Боголюбов Н. Н. Уравнения в вариациях квантовой теории поля // ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 217–220.

[7] Stueckelberg E. C. G. // Phys. Rev. 1951. V. 81. P. 130.

[8] Ширков Д. В. Ренормгруппа Боголюбова // УМН. 1994. Т. 49. №5. С. 147–164.

[9] Боголюбов Н. Н. Условие причинности в квантовой теории поля. Доклад на сессии Отделения физ.-матем. наук АН СССР 14-го апр. 1954 г. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. XIX. С. 237.

[10] Stueckelberg E. C. G. and Rivier D // Helv. Phys. Acta. 1950. V. 23. Suppl. 3. P. 236.
[11] Stueckelberg E. C. G. and Peterman A. // Helv. Phys. Acta. 1953. V. 26. P. 499.
[12] Stueckelberg E. C. G. and Crean T. A. // Helv. Phys. Acta. 1951. V. 24. P. 153.
[13] Завьялов О. И. R-операция Боголюбова и теорема Боголюбова-Парасюка // УМН. 1994. Т. 49. №5. С. 61–70.
[14] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Вопросы квантовой теории поля // УФН. 1955. Т. LV. С. 149–214 ; 1955. Т. LVII. С. 3–92.
[15] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Гостехиздат, 1957.
[16] Heisenberg W. Die "Beobachtbaren Größen" in der Theorie der Elementarteilchen // Zs. f. Phys. 1943. V. 120. P. 513, 673 ;// Zs. f. Naturf. 1946. V. 1. P. 608.
[17] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперситных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
[18] Медведев Б. В., Павлов В. П., Поливанов М. К., Суханов А. Д. Амплитуда в квантовой теории поля // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 501–536.
[19] Боголюбов Н. Н. Доклад на конференции в Сиаттле, сентябрь 1956.
[20] Lehmann H. Über Eigenschaften fon Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten Quantesierten Felder // Nuovo Cimento. 1954. V. 11. P. 342.
[21] Медведев Б. В. К асимптотическому построению матрицы рассеяния // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1518–1525.

ИТЭФ

Поступила в редакцию
28.07.1994