1994 г. сентябрь — октябрь *т. 49, вып. 5(299)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.5

О РАБОТАХ НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА БОГОЛЮБОВА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Б. М. Левитан

СОДЕРЖАНИЕ

Работ, непосредственно посвященных теории почти-периодических (п.-п.) функций, Николай Николаевич опубликовал немного. Можно предполагать, что интерес Николая Николаевича к теории п.-п. функций был связан с исследованиями по нелинейным проблемам механики и математической физики. Во всяком случае, одна из его работ по теории п.-п. функций была опубликована еще в 1934 году в совместной с Н.Н. Крыловым книге “Новые методы нелинейной механики”. Так как работы Николая Николаевича по теории почти-периодических функций опубликованы в трудно доступных в настоящее время изданиях, мы сочли целесообразным изложить в двух приложениях к настоящей статье доказательство двух главных теорем Николая Николаевича в области теории почти-периодических функций.

§1. Некоторые предварительные сведения из теории почти-периодических функций

Бесспорным создателем теории почти-периодических функций является датский математик Харальд Бор. Он опубликовал в 1924–26 годах в Acta Mathematica три обширных мемуара. Первые два мемуара посвящены теории непрерывных п.-п. функций от одной вещественной переменной, третий мемуар посвящен аналитическим в полосе п.-п. функциям.

Определение п.-п. функций, использованное Бором основано на обобщении понятия периода функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Число τ называется ε-почти-периодом функции $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, если выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\mathcal{E}$ действительных чисел называется относительно плотным, если существует такое положительное число l, что в каждом интервале действительной оси длины l имеется хотя бы одно число множества $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Определение п.-п. функций по Бору). Функция $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, называется почти-периодической, если для любого положительного числа ε множество ε-почти-периодов $f(x)$ функции относительно плотно.

В первой главе первого мемуара Бора рассмотрены сравнительно простые свойства п.-п. функций, а именно:

1) П.-п. функция ограничена и равномерно непрерывна на всей оси.

2) Сумма и произведение п.-п. функций есть п.-п. функция.

3)Для каждой п.-п. функции $f(x)$ существует среднее значение

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \int_a^{T+a} f(x)\,dx,$$

причем равномерно относительно $a \in \mathbb{R}$.

4) Из теоремы о среднем значении следует: каждая п.-п. функция имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad a_n = M_x\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}.$$

В отличие от периодических функций, показатели Фурье функции $f(x)$, т.е. числа λ_n, могут образовывать счетное множество, которое может быть всюду плотным.

5) Справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \le M\{|f(x)|^2\}. \tag{1}$$

Во второй главе первого мемуара Бор доказывает, что на самом деле в неравенстве (1) имеет место знак равенства (равенство Парсеваля). Эту теорему (т.е. равенство Парсеваля) Бор называет основной теоремой теории п.-п. функций. Второй основной теоремой является теорема единственности: если две п.-п. функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые ряды Фурье, то они тождественно равны.

Доказывается эквивалентность равенства Парсеваля и теоремы единственности.

Обширный второй мемуар Бора полностью посвящен доказательству теоремы аппроксимации, которая гласит:

Для каждой п.-п. функции $f(x)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} b_{k,\varepsilon} e^{i\mu_k^{(\varepsilon)} x},$$

что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \mathcal{P}_\varepsilon(x)| \le \varepsilon,$$

при этом показатели Фурье многочлена $\mathcal{P}_\varepsilon(x)$ можно выбирать из показателей Фурье функции $f(x)$.

Доказательство Бора теоремы аппроксимации основано на связи между почти-периодическими функциями и функциями от бесконечного числа переменных, которые Бор назвал *предельно-периодическими.*

Теорема аппроксимации является третьей основной теоремой теории п.-п. функций. Три основные теоремы эквивалентны в том смысле, что если одна из них доказана, то доказательство двух других может быть получено сравнительно просто (иногда совсем просто, например, то, что из равенства Парсеваля следует теорема единственности).

У Бора было два предшественника. Это математик из Риги П. Боль и французский математик и астроном Е. Ескланьон. Оба открыли и изучили важный подкласс п.-п. функций, так называемые квазипериодические функции. Боль сделал это еще в 1893 году [2], а Ескланьон позже [3].

Для лучшего понимания вклада Николая Николаевича в теорию п.-п. функций полезно остановиться на исследованиях Боля (и Ескланьона).

Определение 4 (Определение квази-периодических функций по Болю и Ескланьону). Функция $f(x)$ называется квази-периодической, если существует конечное число фиксированных чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, таких, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каждое число τ, удовлетворяющее системе неравенств

$$|e^{i\omega_k\tau} - 1| < \delta, \qquad k = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

является ε-почти-периодом функции $f(x)$.

Имеется существенное различие между исследованиями Бора и Боля. В отличие от Боля (и Ескланьона), Бор не предполагал заранее существования чисел ω_k (в общем случае множество чисел ω_k может оказаться бесконечным). Однако из теоремы аппроксимации (или равенства Парсеваля) существование чисел ω_k может быть просто доказано.

Наоборот, если с самого начала предположить, что почти-периоды функции $f(x)$ суть числа, удовлетворяющие системе неравенств вида (2), то при помощи классической теоремы Кронекера о совместных решениях системы неравенств, можно доказать теорему аппроксимации. Именно так и доказывал Боль теорему аппроксимации для квази-периодических функций.

§ 2. Вклад Николая Николаевича в теорию почти-периодических функций

Николая Николаевич разработал два различных доказательства теоремы аппроксимации.

Первое доказательство опубликовано в книге [1]. Это доказательство воспроизведено в Приложении 2 к настоящей статье.

Используя только определение п.-п. функций и простые факты из математического анализа, Николай Николаевич сумел с помощью остроумных конструкций доказать теорему аппроксимации, а из нее, как мы уже отмечали, следуют другие основные теоремы и основные свойства п.-п. функций. Например, то, что сумма п.-п. функций есть п.-п. функция, становится очевидным, существование среднего значения следует из существования среднего значения для тригонометрических многочленов и равномерной сходимости тригонометрических многочленов и т.д.

Таким образом,доказав теорему аппроксимации, Николай Николаевич дал новое независимое построение теории п.-п. функций.

Второе доказательство Николая Николаевича основной теоремы теории п.-п. функций связано с открытой Николаем Николаевичем замечательной теоремой об арифметических свойствах относительно плотных множеств действительных чисел. Первое доказательство этой теоремы было опубликовано в 1939 году [4]. В 1948 году Николай Николаевич вернулся к этой теореме и дал более простое доказательство [5]. Это доказательство Николая Николаевича воспроизведено в Приложении 2 к настоящей статье.

Приведем формулировку теоремы Н.Н. Боголюбова об арифметических свойствах относительно плотных множеств.

Теорема. *Пусть $\mathcal{E}$ есть относительно плотное множество действительных чисел, δ – положительное число, $V_\delta = \{t \in \mathbb{R}; |t| < \delta\}$ – окрестность точки $t = 0$. Тогда можно указать число $\eta = \eta(\delta) > 0$ и конечное число действительных чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ таких, что каждое действительное число τ, удовлетворяющее системе неравенств*

$$(2') \qquad |\exp(i\omega_k\tau) - 1| < \eta, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

принадлежит множеству $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus V$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ множество почти-периодов п.-п. функции относительно плотно.Теорема Боголюбова связывает непосредственно почти-периоды п.-п. функции с системой неравенств типа (2′), а это эквивалентно теореме аппроксимации теории п.-п. функций (см. конец предыдущего пункта).

§ 3. Влияние исследований Николая Николаевича на дальнейшее развитие теории почти-периодических функций

Исследования Николая Николаевича по теории п.-п. функций получили широкую известность и признание. Упомянем здесь лишь некоторые работы, которые основаны на работах Николая Николаевича или продолжают их.

1. В книге немецкого математика Маака [6] доказательство теоремы аппроксимации для числовых п.-п. функций проведено по методу Николая Николаевича.

2. В более поздней книге Америо–Проуза [7] методом Николая Николаевича доказана теорема аппроксимации для абстрактных (т.е. со значениями в банаховом пространстве) функций.

3. В работе Фолнера [8] теорема Николая Николаевича об арифметических свойствах относительно плотных множеств обобщается на случай абелевых групп.

4. Александр Осипович Гельфонд, познакомившись с теоремой Николая Николаевича об относительно плотных множествах действительных чисел, говорил мне, что эта теорема так же весьма интересна с точки зрения теории чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Боголюбов Н.Н.,Крылов Н.М Новые методы нелинейной механики. Киев: Наукова думка, 1934.

Bohl,P. Ueber die Darstellung von Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalenArgumenten. Dorpat, 1893.

Esclagnon, E. Les fonctions quasi-periodiques. Paris: Thè se, 1904.

Боголюбов Н.Н. Некоторые арифметические свойства почти-периодов // Записки кафедры математической физики института строительной механики Укр. Акад. Наук. 1939. Т. 4.

Боголюбов Н.Н. Об одном приложении теории положительно определенных функций // Сб. трудов Института математики АН УССР. 1948. Т. 2. С. 113.

Maak, V. Fastperiodische Functionen: Springer-Verlag, 1950.

Amerio,L., Prouse, G. Almost periodic functions and functional equations: van Norstand-Reinholds, 1971.

Folner, E. Generalization of a theorem of Bogoliouboff to topological abelian groups // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 5–13.

Приложение 1.

Доказательство Н.Н. Боголюбова теоремы аппроксимации

1. Доказательство удобно разбить на леммы

Лемма П.1. *Для каждой п.-п. функции $f(x)$ и каждого положительного числа ε можно указать такие положительные числа $l = l(\varepsilon)$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$, что в каждом интервале действительной прямой длины l можно указать подинтервал длины δ, все точки которого суть ε-почти-периоды функции $f(x)$.*

Доказательство следует из равномерной непрерывности п.-п. функций.

2. Пусть l и δ выбраны согласно предыдущей лемме. Положим $I_k = (kl, (k+l)l)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В каждом интервале I_k существует подинтервал $\Delta_k = (\tau_k - \delta/2, \tau_k + \delta/2)$ длины δ, все точки которого суть ε-почти периоды функции $f(x)$. Определим функцию $\mathcal{K}(s)$, положив $\mathcal{K}(s) = l/\delta$, если $s \in \Delta_k$ и $\mathcal{K}(s) = 0$, если s не принадлежит ни одному из интервалов Δ_k. Таким образом, если $\mathcal{K}(s) \neq 0$, то s является ε-почти-периодом. Для произвольного натурального n имеем

$$\frac{1}{2nl}\int_{-nl}^{nl} \mathcal{K}(s)\,ds = \frac{1}{2nl}\sum_{k=-n}^{k=n} \frac{l}{\delta}\int_{\Delta_k} ds = 1,$$

$$\frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} \mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt = 1. \tag{П.1.1.}$$

Лемма П.2. *Положим*

$$f_n(x) = \frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} f(x+s+t)\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt. \tag{П.1.2.}$$

Для всех действительных x справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon. \tag{П.1.3.}$$

Доказательство. Умножим равенство (П.1.1.) на $f(x)$ и результат вычтем из равенства (П.1.2.). Получим

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl}[f(x+s+t) - f(x)]\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt. \tag{П.1.4.}$$

Если $\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t) \neq 0$, то $\mathcal{K}(s) \neq 0$ и $\mathcal{K}(t) \neq 0$. Поэтому числа s и t сути ε-почти-периоды функции $f(x)$, а значит число $s + t$ есть 2ε-почти-период $f(x)$, т.е. имеет место неравенство

$$\sup_x |f(x+s+t) - f(x)| \le 2\varepsilon.$$

Из равенства (П.1.4.) следует (принимая во внимание равенство (П.1.1.)) оценка

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\le \frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl}|f(x+s+t) - f(x)|\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt\\ &\le 2\varepsilon\frac{1}{(2nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl}\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. Определим периодические функции $f_T(x)$ и $\mathcal{K}_T(s)$ с одним и тем же периодом $2T = 6nl$, положив

$$\begin{gathered}f_T(x) = f(x), \quad |x| < 3nl, \qquad f_T(x+2T) = f_T(x),\\ \mathcal{K}_T(s) = \mathcal{K}(s), \quad |s| < kl, \qquad \mathcal{K}_T(s) = 0, \quad nl < s < 3nl,\\ \mathcal{K}_T(s+2T) = \mathcal{K}_T(s).\end{gathered}$$

Функции $f_T(x)$ и $\mathcal{K}_T(s)$ разрывны и имеют изолированные точки разрыва первого рода. В дальнейшем нам понадобятся ряды Фурье функций $f_T(x)$ и $\mathcal{K}_T(x)$:

$$f_T(x) \sim \sum_{k=-\infty} \mathcal{A}_k^{(n)} e^{i\nu_k^{(n)}x},$$

$$\mathcal{K}_T(x) \sim \sum_{k=-\infty} a_k^{(n)} e^{i\nu_k^{(n)}s},$$

причем

$$\mathcal{A}_k^{(n)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\nu_k^{(n)}x}\,dx, \qquad \nu_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{6nl} = \frac{k\pi}{3nl}, \tag{П.1.5.}$$

(П.1.6.)

$$\begin{aligned}a_k^{(n)} &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathcal{K}_T(s)e^{-i\nu_k^{(n)}s}\,ds = \frac{1}{6nl}\int_{-nl}^{nl}\mathcal{K}(s)e^{-i\nu_k^{(n)}s}\,ds\\ &= \frac{1}{6nl}\sum_{j=-n}^{n}\frac{l}{\delta}\int_{\Delta_j} e^{-i\nu_k^{(n)}s}\,ds = \frac{1}{3n}\sum_{j=-n}^{n}\frac{e^{-i\nu_k^{(n)}\tau_i}\sin\frac{\delta}{2}\nu_k^{(n)}}{\delta\nu_k^{(n)}}.\end{aligned}$$

ЛЕММА П.3. *Имеют место оценки:*

(П.1.7.) $$|\mathcal{A}_k^{(n)}| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M,$$

(П.1.8.) $$|a_k^{(n)}| \le \frac{2}{3\delta}|\nu_k^{(n)}|,$$

(П.1.9.) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{A}_k^{(n)}|^2 \le M^2,$$

а также равенство

(П.1.10.) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 = \frac{l}{3\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (П.1.7.) и (П.1.8.) следуют непосредственно из формул (П.1.5.) и (П.1.6.). Оценка (П.1.9.) следует из неравенства Бесселя. Чтобы получить равенство (П.1.10) применим к периодической функции $\mathcal{K}_T(s)$ равенство Парсеваля. Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 = \frac{1}{6nl}\int_{-3nl}^{3nl} \mathcal{K}_T^2(s)\,ds = \frac{1}{6nl}\int_{-nl}^{nl} \mathcal{K}^2(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{6nl}\frac{l^2}{\delta^2}\sum_{j=-n}^{n}\int_{\Delta_j} ds = \frac{l}{3\delta}.$$

4. Рассмотрим функцию

$$f_{n,T}(x) = \frac{1}{(2T)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} f_T(x+s+t)\mathcal{K}_T(s)\mathcal{K}_T(t)\,dt\,ds.$$

Функция $f_{n,T}(x)$ непрерывна и имеет период $2T$ (ибо $f_T(x)$ обладает этим свойством).

ЛЕММА П.4. *Справедливо разложение*

(П.1.11.) $$f_{n,T}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_k^{(n)}\{a_{-k}^{(n)}\}^2 e^{i\nu_k^{(n)}x},$$

причем ряд сходится абсолютно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для $nl < |s| < 3nl$ функция $\mathcal{K}_T(s) = 0$, то

$$f_{n,T}(x) = -\frac{1}{(6nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} f_T(x+s+t)\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt.$$

Если $|x| < nl$, $|s| < nl$, $|t| < nl$, то $|x+s+t| < 3nl$. Поэтому $f_T(x+s+t) = f(x+s+t)$ и, следовательно,

$$f_{n,T}(x) = \frac{1}{(6nl)^2}\int_{-nl}^{nl}\int_{-nl}^{nl} f(x+s+t)\mathcal{K}(s)\mathcal{K}(t)\,ds\,dt = \frac{1}{9}f_n(x),$$

т.е.

(П.1.12.) $$f_n(x) = 9f_{n,T}(x).$$

Вычислим ряд Фурье функции $f_{n,T}(x)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
b_k^{(n)} &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{n,T}(x)e^{-i\nu_k^{(n)}x}\,dx \\
&= \frac{1}{(2T)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\mathcal{K}_T(s)\mathcal{K}_T(t)\,ds\,dt\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(x+s+t)e^{-i\nu_k^{(n)}x}\,dx \\
&= \frac{1}{(2T)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\mathcal{K}_T(s)\mathcal{K}_T(t)e^{i\nu_k^{(n)}s}e^{i\nu_k^{(n)}t}\,ds\,dt\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(x)e^{-i\nu_k^{(n)}x}\,dx \\
&= \mathcal{A}_k^{(n)}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathcal{K}_T(s)e^{i\nu_k^{(n)}s}\,ds\right)^2 = \mathcal{A}_k^{(n)}(a_{-k}^{(n)})^2.
\end{aligned}$$

Сходимость ряда (П.1.11.) следует из (П.1.7.), (П.1.10.) и непрерывности функции $f_{n,T}(x)$.

Лемма П.5. *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$, зависящее от ε и не зависящее от n, что*

(П.1.13.) $$\sum_{|\nu_k^{(n)}|>\Lambda} |\mathcal{A}_k^{(n)}||3(a_{-k}^{(n)})|^2 < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через λ произвольное положительное число. При $|\nu_k^{(n)}| > \lambda$ оценка (П.1.8.) дает $|a_{-k}^{(n)}| < \frac{2}{3\delta\lambda}$. Поэтому из (П.1.9.), (П.1.10) и неравенства Коши–Буняковского следует

$$\begin{aligned}
\sum_{|\nu_k^{(n)}|>\lambda} |\mathcal{A}_k^{(n)}||3a_{-k}^{(n)}|^2 &= 9\sum_{|\nu_k^{(n)}|>\lambda} |\mathcal{A}_k^{(n)}||a_{-k}^{(n)}||a_{-k}^{(n)}| \\
&\le \frac{6}{\delta\lambda}\sum_{|\nu_k^{(n)}|>\lambda} |\mathcal{A}_k^{(n)}||a_{-k}^{(n)}| \\
&\le \frac{6}{\delta\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\mathcal{A}_k^{(n)}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{-k}^{(n)}|^2\right)^{1/2} \\
&\le \frac{6}{\delta\lambda}\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{3\delta}}M = \frac{2M\sqrt{3l}}{\delta^{3/2}\lambda}.
\end{aligned}$$

Так как числа l и δ зависят только от ε (и не зависят от n), то лемма П.5. следует из последней оценки. Из оценки (П.1.13) и равенств (П.1.11.) и (П.1.12.) для $|x| < nl$ вытекает, что

(П.1.14.) $$\left|f_n(x) - \sum_{|\nu_k^{(n)}|<\Lambda} \mathcal{A}_k^{(n)}\left(3a_{-k}^{(n)}\right)^2 e^{i\nu_k^{(n)}x}\right| < \varepsilon,$$

причем Λ от n не зависит.

Зафиксируем n и рассмотрим те k, для которых $\left|\nu_k^{(n)}\right| \le \Lambda$. Соответствующие $A_k^{(n)}$ расположим в порядке убывания их модуля. Получим числа $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots, u_{r_n}^{(n)}$, причем $\left|u_q^{(n)}\right| \ge \left|u_{q+1}^{(n)}\right|, q = 1, 2, \ldots, r_{r_n - 1}$. Показатели Фурье функции $f_T(x)$ (т.е. числа $\nu_k^{(n)}$), соответствующие числам $u_q^{(n)}$, обозначим через $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_{r_n}^{(n)}$. Наконец, числа $3a_{-k}^{(n)}$, соответствующие числам $u_q^{(n)}$ обозначим через $\alpha_q^{(n)}$. В этих обозначениях неравенство (П.1.14.) перепишется в виде

$$\left|f_n(x) - \sum_{q=1}^{r_n} u_q^{(n)} \left(\alpha_q^{(n)}\right)^2 e^{i\mu_q^{(n)}x}\right| < \varepsilon. \tag{П.1.15.}$$

Лемма П.6. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое целое положительное число $r_0 = r_0(\varepsilon)$, зависящее от ε и не зависящее от n, что*

$$\sum_{q=r_0}^{r_n} \left|u_q^{(n)} \left(\alpha_q^{(n)}\right)^2\right| < \varepsilon. \tag{П.1.16.}$$

Доказательство. Обозначим через r произвольное натуральное число, не превосходящее r_n. Из неравенства (П.1.9.) следует

$$\sum_{q=1}^{r} |u_q^{(n)}|^2 \le M^2.$$

Так как числа $|u_q^{(n)}|$ убывают, то из последнего неравенства следует

$$M^2 \ge \sum_{q=1}^{r} |u_q^{(n)}|^2 \ge r|u_r^{(n)}|^2,$$

откуда

$$|u_r^{(n)}| \le \frac{M}{\sqrt{r}}.$$

Из этой оценки и равенства (П.1.10.) следует

$$\sum_{q=r}^{r_n} |u_q^{(n)}||\alpha_q^{(n)}|^2 \le \frac{M}{\sqrt{r}} \sum_{q=r}^{r_n} |\alpha_q^{(n)}|^2 \le \frac{M}{\sqrt{r}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\left(3a_{-k}^{(n)}\right)^2\right| = \frac{3Ml}{\delta\sqrt{r}}.$$

Поэтому неравенство (П.1.16.) выполняется, если $r_0 > \frac{9M^2l^2}{\varepsilon^2\delta^2}$. Так как M, l и δ от n не зависят, то лемма П.1.6 доказана.

Из (П.1.15.) и (П.1.16.) для $|x| < nl$ следует оценка:

$$\left|f_n(x) - \sum_{q=1}^{r_0} u_q^{(n)} (\alpha_q^{(n)})^2 e^{i\mu_q^{(n)}x}\right| < 2\varepsilon. \tag{П.1.17.}$$

Положим $u_q^{(n)}(\alpha_q^{(n)})^2 = \mathcal{B}_q^{(n)}$. Из (П.1.17.) и (П.1.3.) для $|x| < nl$ имеем:

$$\left| f(x) - \sum_{q=1}^{r_0} \mathcal{B}_q^{(n)} e^{i\mu_q^{(n)} x} \right| < 4\varepsilon. \tag{П.1.18.}$$

Из (П.1.18.) просто следует теорема аппроксимации. Сначала докажем оценку:

$$|\mathcal{B}_q^{(n)}| \le M. \tag{П.1.19.}$$

В самом деле, в силу (П.1.7.) $|u_q^{(n)}| \le M$. Далее

$$|a_k^{(n)}| = \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathcal{K}_T(s) e^{-i\nu_k^{(n)} s}\, ds \right| \le \frac{1}{6nl} \int_{-nl}^{nl} \mathcal{K}(s)\, ds$$
$$= \frac{1}{6nl} \sum_{j=-n}^{n} \frac{l}{\delta} \int_{\Delta_j} ds = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $|3a_k^{(n)}| \le 1$ и получаем оценку (П.1.19.).

При фиксированном ε и $n \to \infty$ число чисел $\mathcal{B}_q^{(n)}$ и $\mu_q^{(n)}$, $q = 1, 2, \ldots, r_0$ остается конечным. Поэтому можно выбрать такую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_k \to \infty$, что существуют конечные пределы

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{B}_q^{(n_k)} = \mathcal{B}_q, \qquad \lim_{k\to\infty} \mu_q^{(n_k)} = \mu_q.$$

Полагая в неравенстве (П.1.18.) $n = n_k$ и затем, полагая $k \to \infty$, получим неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{q=1}^{r_0} \mathcal{B}_q e^{i\mu_q x} \right| \le 4\varepsilon.$$

Это неравенство доказывает теорему аппроксимации, ибо число ε было нами выбрано произвольно.

Приложение 2.

Доказательство теоремы Н.Н. Боголюбова об арифметических свойствах относительно плотных множеств

Выберем произвольно $\delta > 0$ и положим

$$V_\delta = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \delta\}.$$

Пусть l длина из определения относительно плотного множества $\mathcal{E}$. Множество $\mathcal{E}$ имеет непустое пересечение с каждым интервалом длины l. Разобьем вещественную ось $\mathbb{R}$ на интервалы $I_n = [2nl, 2(n+1)l]$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$: В каждом интервале I_n фиксируем интервал Δ_n длины $\delta/2$, принадлежащий множеству $\mathcal{E} \oplus V_{\delta/4}$ и рассмотрим функцию

$$\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}_\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Delta_n, \\ 0, & \text{если } t \notin \Delta_n. \end{cases}$$

Нетрудно показать существование такой последовательности T_m, $T_m \to +\infty$, $m \to +\infty$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \mathcal{K}(t)\mathcal{K}(t+x)\, dt.$$

Функция $\varphi(x)$ положительно определена и поэтому

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k \exp(i\omega_k x) + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x)\, d\mathcal{S}(\omega) = a(x) + b(x), \tag{П.2.1.}$$

где $\mathcal{A}_k > 0$ и $\mathcal{S}(\omega)$ непрерывная неубывающая функция. Покажем, что $\varphi(x)$ обладает следующим свойством: если $\varphi(x_0) > 0$, то $x_0 \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus V_{\delta/2}$. В самом деле, если $\varphi(x_0) > 0$, то для некоторого t_0 $\mathcal{K}(t_0)$ и $\mathcal{K}(t_0 + x) > 0$. Поэтому $t_0 \in \mathcal{E} \oplus V_{\delta/4}$ и $t_0 + x_0 \in \mathcal{E} \oplus V_{\delta/4}$, что доказывает указанное выше свойство функции $\varphi(x)$.

Пусть множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_q$ является сетью для интервала $[0, 2l]$. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ по крайней мере одно из чисел $x + a_1, x + a_2, \ldots, x + a_q$ принадлежит некоторому интервалу Δ_k.Поэтому для произвольного $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{q} \mathcal{K}(x + a_i) \geq 1.$$

Из этого неравенства следует:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q} \varphi(x + a_i) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \mathcal{K}(t) \left(\sum_{i=1}^{q} \mathcal{K}(t + x + a_i) \right) dt \\ &\geq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathcal{K}(t)\, dt > 0. \end{aligned}$$

Беря среднее по x от обеих частей последнего неравенства, получим

$$M\{\varphi(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(x)\, dx > 0.$$

В представлении (П.2.1.) положим $\omega_0 = 0$, следовательно $\mathcal{A}_0 = M\{\varphi(x)\} > 0$. Далее, положим

$$\psi(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(x+t)\varphi(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(x+t)\overline{\varphi(t)}\, dt.$$

Из свойств интеграла Фурье–Стилтьеса следует:

$$\psi(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a(x+t)\overline{a(t)}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k^2 \exp(i\omega_k x).$$

Функция $\psi(x)$ обладает следующим свойством: если $\psi(x_0) > 0$, то $x_0 \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus V_\delta$. Это утверждение доказывается так же, как и аналогичное свойство функции $\varphi(x)$.

Выберем n достаточно большим так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{A}_k^2 < \frac{1}{2}\mathcal{A}_0^2.$$

Далее, выберем положительное число $\varepsilon < \frac{1}{2}\mathcal{A}_0^2$ и предположим, что число $\tau \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

(П.2.2.) $$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k^2 |\exp(i\omega_k\tau) - 1| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k^2 \exp(i\omega_k\tau)\\ &= \mathcal{A}_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k^2[\exp(i\omega_k\tau) - 1] + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{A}_k^2 \exp(i\omega_k\tau)\\ &> \mathcal{A}_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k^2 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{A}_k^2 - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k^2 |\exp(i\omega_k\tau) - 1| > \frac{\mathcal{A}_0^2}{2} - \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Поэтому $\tau \in \mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \ominus \mathcal{E} \oplus V_\delta$. Это включение доказывает теорему Боголюбова, т.к. для достаточно малого η каждое решение системы неравенств

(П.2.3.) $$|\exp(i\omega_k\tau) - 1| < \eta, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

удовлетворяет неравенству (П.2.2.) и, наоборот, каждое решение неравенства (П.2.2.) для достаточно малого ε удовлетворяет системе неравенств (П.2.3.).

Поступила в редакцию
29.06.1994