1994 г. сентябрь — октябрь *т. 49, вып. 5(299)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 536.75

Н. Н. БОГОЛЮБОВ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Н. Н. Боголюбов (мл.), Д. П. Санкович

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Введение

Статистическая механика занимает выдающееся место в творчестве Н.Н. Боголюбова и в его научном наследии. Выдающимся является и место Н.Н. Боголюбова в этом сложном и богатом своими многочисленными приложениями разделе математической физики. Глубокие математические познания и поразительная физическая интуиция позволили Боголюбову внести столь значительный вклад в статистическую механику, что ее современное состояние во многом определяется именно его фундаментальными результатами.

Отправной точкой для Н.Н. Боголюбова в исследовании широкого круга вопросов статистической механики послужили результаты, полученные им по абстрактной теории динамических систем и, в особенности, по нелинейной механике. К разработке проблем статистической механики Боголюбов обратился впервые в 1939 году в совместной со своим учителем и соавтором, академиком Н.М. Крыловым (1879–1955) работе “Об уравнениях Фоккера–Планка, выводящихся в теории возмущений методом, основанным на спектральных свойствах пертурбационного гамильтониана”. Начиная с 1945 года, проблемы статистической механики в различных их аспектах стали доминирующими в творчестве Боголюбова. Этим проблемам были посвящены основные усилия выдающегося ученого вплоть до последних дней его жизни.

Исследования Н.Н. Боголюбова по статистической механике охватывают почти все ее вопросы, включающие обоснование статистической механики, равновесную статистическую механику классических и квантовых систем, неравновесную статистическую механику. В этом обзоре мы дадим сведения о важнейших на наш взгляд результатах Боголюбова по статистической механике и приведем перечень некоторых работ отечественных и зарубежных ученых, развивающих эти результаты. Очевидно, что этот перечень нельзя даже приблизительно считать достаточно полным. Детальное изучение научного творчества Боголюбова и его влияние на развитие отдельных разделов статистической механики еще ждет своего глубокого исследования.

§ 2. Теория открытых систем

К первому кругу вопросов статистической механики, которые привлекли внимание Боголюбова, относится фундаментальная задача о взаимодействии двух подсистем или, точнее, задача о поведении механической системы (классической или квантовой), уравнения движения которой могут быть точно проинтегрированы, находящейся под воздействием внешнего возмущения. В качестве последнего может быть взята либо зависящая от времени внешняя случайная возмущающая сила, либо может быть рассмотрена более общая ситуация, когда наша невозмущенная система взаимодействует с другой макроскопической системой (т.н. термостатом). Задача описания стохастических свойств системы, взаимодействующей с окружением, составляет в современной терминологии предмет теории открытых систем ("open systems") [101]. Решение подобной задачи в разных ее вариантах постоянно привлекало внимание Боголюбова, начиная с отмеченной во Введении первой работы [14] на эту тему.

В [14] рассмотрена проблема вывода фундаментальных для статистической механики уравнений Фоккера–Планка как приближенных уравнений, основанных на спектральных свойствах гамильтониана возмущений. При этом существенно, что этой работой был открыт путь для пересмотра основ теории стохастических систем, в которой к тому времени не существовало метода последовательного вывода стохастических уравнений типа уравнения Фоккера–Планка как приближенных уравнений в единой схеме классической или квантовой механики без каких-либо априорных допущений о существовании вероятностей переходов из одного состояния рассматриваемой динамической системы в другое.

Боголюбовым и Крыловым рассматривалась механическая система S с N степенями свободы, которая подвергалась малому возмущению. Невозмущенный гамильтониан представляет собой N различных нормальных колебаний с собственными частотами ω_n:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(p_n^2 + \omega_n q_n^2),$$

где q_n – нормальная координата, а p_n – сопряженный ей канонический импульс. Энергия возмущений представлена в виде

$$\Gamma_t = f(t)V(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N),$$

где V – полином по $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$, а $f(t)$ есть сумма гармонических составляющих

$$f(t) = \sum_{\nu} a_\nu \cos(\nu t + \theta_\nu),$$

причем a_ν, θ_ν постоянны. Предполагается, что соседние частоты ν стремятся друг к другу и в пределе

$$\sum_{0\le\nu\le\omega} a_\nu^2 \to \int_0^\omega I(\nu)\,d\nu.$$

$I(\nu)$ – спектральная интенсивность возмущающей силы. Фазы θ_ν независимы в смысле теории вероятностей и их значения между 0 и 2π равновероятны.

При статистическом описании рассматриваемой системы вводится плотность вероятности $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t, q_1, \dots, p_N, \dots, \theta_\nu, \dots)$, которая удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = [H_0, \mathcal{D}] + f(t)[V, \mathcal{D}], \tag{1}$$

где $[\ldots,\ldots]$ – скобка Пуассона. Предполагается (начальное условие к уравнению (1)), что $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(t=0) = \Psi\rho_0$, где $\rho_0 = \rho_0(q_1,\ldots,p_N)$ – плотность вероятности, характеризующая распределение вероятностей возможных значений канонических переменных при $t=0$, а Ψ – постоянная.

Рассмотрим выражение

$$\rho_t = \rho(t,q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N) = \int\cdots\int_0^{2\pi}\prod_\nu d\theta_\nu \mathcal{D}(t,q_1,\ldots,p_N,\ldots,\theta_\nu,\ldots),$$

сводящееся к ρ_0 при $t=0$. Какому уравнению удовлетворяет величина ρ_t, представляющая вероятность того, что канонические переменные, независимо от фаз θ_ν, принимают значения $q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N$ в момент времени t?

Представим гамильтониан Γ_t в виде

$$\Gamma_t = f(t)\sum_{n_1,\ldots,n_N} U_{n_1,\ldots,n_N}(J_1,\ldots,J_N)e^{i(n_1\omega_1+\cdots+n_N\omega_N)t}e^{i(n_1\varphi_1+\cdots+n_N\varphi_N)},$$

где сумма содержит лишь конечное число членов и $U_{n_1,\ldots,n_N}$ являются полиномами по $\sqrt{J_1},\ldots,\sqrt{J_N}$. Заключаем, что

$$\mathcal{D}_t = \rho_0\Psi + \int_0^t [\Gamma_t,\mathcal{D}_t]\,dt.$$

Здесь новые переменные “действие-угол” J,φ введены вместо q,p соотношениями

$$p_k = \sqrt{2J_k\omega_k}\cos(\omega_k t+\varphi_k), \qquad q_k = \sqrt{\frac{2J_k}{\omega_k}}\sin(\omega_k t+\varphi_k).$$

Далее Боголюбов и Крылов рассматривают класс динамических переменных, зависящих лишь от переменных действия $E(J_1,\ldots,J_N)$. Для отыскания средних значений таких переменных достаточно знать функцию

$$\sigma_t = \sigma(t,J_1,\ldots,J_N) = \int\cdots\int_0^{2\pi}\rho_t\,d\varphi_1\ldots d\varphi_N.$$

Задача состоит в получении замкнутого уравнения эволюции для этой величины. В работе показано, что в первом неисчезающем приближении по гамильтониану возмущений Γ_t требуемое уравнение есть уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial\sigma_t}{\partial t} = \sum_{n,m}\frac{\partial}{\partial J_n}\left(A_{nm}\frac{\partial\sigma_t}{\partial J_m}\right),$$

где коэффициенты

$$A_{nm} = \frac{\pi}{4}\sum_{(s)} s_n s_m |U_{(s)}|^2 I\{(s\omega)\}$$

выражаются через амплитуды $U_{(s)}$ и спектральные интенсивности гамильтониана возмущений Γ_t. В качестве иллюстрации рассмотрен случай, когда система S состоит из одного гармонического осциллятора, а $\Gamma_t = \lambda f(t)q$. В этом случае в первом приближении найдено, что

$$\sigma_t(E) = \int_0^\infty \sigma_0(E')P(t,E,E')\,dE',$$

$$P(t,E,E') = \frac{1}{2\pi^2\alpha t}\iint_0^{2\pi} d\varphi\,d\varphi'\,\Phi\left(\frac{\sqrt{E}\cos\varphi+\sqrt{E'}\cos\varphi'}{\sqrt{\alpha t}}\right),$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}\lambda^2 I(\omega), \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2} - xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Боголюбов и Крылов распространяют метод вывода приближенного уравнения Фоккера–Планка на квантовый случай. При этом для квантовых средних соответствующего оператора плотности $P_t(\alpha) = \langle\alpha|\rho_t|\alpha\rangle$ получено уравнение Фоккера–Планка вида

$$\frac{dP_t(\alpha)}{dt} = \sum_{\alpha'} A_{\alpha\alpha'}[P_t(\alpha') - P_t(\alpha)],$$

где

$$A_{\alpha\alpha'} = \frac{\pi}{2\hbar^2}\left|\langle\alpha|V|\alpha'\rangle\right|^2 I\{\nu(\alpha,\alpha')\}.$$

Важно то, что в общем виде получено приближенное уравнение для плотности системы S одинаково пригодное как в классическом, так и в квантовом случаях. Показано как обобщить данную схему на случаи более общей энергии возмущений чем $f(t)V$.

Дальнейшее развитие исследование задачи о поведении системы, подверженной внешнему случайному воздействию, нашло в замечательных послевоенных работах Боголюбова [16], [19]. Им рассмотрены задачи о влиянии случайной силы на гармонический вибратор и об установлении статистического равновесия в системе, связанной с термостатом.

Рассмотрим гармонический вибратор с уравнением колебаний вида

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t), \tag{2}$$

где сила $f(t)$ представляется конечной суммой из N членов

$$f(t) = \sum_{\nu} a_\nu \cos(\nu t + \varphi_\nu).$$

Предполагается как и выше, что N фазовых углов φ_ν – независимые равномерно распределенные по окружности случайные величины. a_ν и ν – данные вещественные числа, зависящие от N так, что при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$:

$$\sum_{0<\nu<\alpha} a_\nu^2 \to \int_0^\alpha I(\nu)\,d\nu; \qquad \sum_\nu a_\nu^2 \to \int_0^\infty I(\nu)\,d\nu,$$

где $I(\nu)$ – некоторая неотрицательная симметричная непрерывная функция ν, интегрируемая в интервале $0 < \nu < \infty$. Пусть $x(t) = \{q(t), v(t)\}$ – состояние вибратора, то есть совокупность его координаты и скорости. Совокупность состояний вибратора $\{x(t)\}$ $(-\infty < t < \infty)$ есть некоторый стохастический процесс. Боголюбов доказывает следующую теорему.

Теорема 2.1. *Если $F(\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n)$ некоторая функция, определенная для всех вещественных значений своих аргументов, интегрируемая в смысле Римана по любому конечному $2n$-мерному параллелепипеду и удовлетворяющая неравенству*

$$\left|F(\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n)\right| \le A\exp\left\{K\sum_{q=1}^{n}(|\xi_q| + |\eta_q|)\right\},$$

где A, K – некоторые положительные постоянные, если $t_1,\ldots,t_n$ произвольные фиксированные числа, удовлетворяющие неравенству $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, то при $N \to \infty$ математическое ожидание $\mathrm{E}\{F(q(t_1),v(t_1),\ldots,q(t_n),v(t_n))\}$ стремится к пределу

$$\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t_1,\ldots,t_n,\xi_1 - q_p(t_1),\eta_1 - v_p(t_1),\ldots,\xi_n - q_p(t_n),\eta_n - v_p(t_n)) \times F(\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n)\,d\xi_1\ldots d\eta_n,$$

где

$$q_p(t) = q(0)\cos\omega t + \omega^{-1}v(0)\sin\omega t,$$
$$v_p(t) = -q(0)\omega\sin\omega t + v(0)\cos\omega t,$$
$$\Phi(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{D}^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}R(\xi,\eta)},$$

$R(\xi,\eta)$ – *квадратичная форма относительно переменных* $\xi_1,\eta_1,\ldots,\xi_n,\eta_n$, *коэффициенты которой являются элементами матрицы обратной матрице коэффициентов квадратичной формы*

$$Q(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu I(\nu)\left|\sum_{r=1}^{n}\int_0^{t_r} d\tau e^{i\nu\tau}\frac{\xi_r\sin\omega(t_r-\tau)+\omega\eta_r\cos\omega(t_r-\tau)}{\omega}\right|^2,$$

а $\mathcal{D}$ – *детерминант* $Q(\xi,\eta)$.

Применив этот результат для случая функции F равной 1 в некотором произвольном фиксированном параллелепипеде и равной 0 вне его получаем предельный ($N\to\infty$) стохастический процесс $\{X(t)\}$ ($-\infty < t < \infty$), характеризуемый плотностями распределения вероятностей $\Phi(t_1,\ldots,t_n,\xi_1-q_p(t_1),\ldots,\eta_n-v_p(t_n))$ случайных величин $\xi_1 = q(t_1), \eta_1 = v(t_1), \ldots, \xi_n = q(t_n), \eta_n = v(t_n)$. Вообще говоря, этот процесс не является марковским. Однако, рассматривая случай, когда $I(\nu)$ может быть аппроксимирована постоянной величиной I^*, Боголюбов показывает, что рассматриваемый стохастический процесс становится марковским, а плотность вероятности $\rho(t,q,v)$ для распределения переменных $q = q(t)$, $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial q} - \omega^2 q\frac{\partial\rho}{\partial v} - \frac{\pi}{4}I^*\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} = 0.$$

Боголюбов рассматривает также случай, когда сила $f(t)$ в (2) формально зависит от малого параметра ε: $f(t)\to\varepsilon f(t)$. В этом случае доказано, что на интервалах времени $t \geq a\varepsilon^{-2}$, где a – сколь угодно мало, наш стохастический процесс также является марковским, а соответствующая функция распределения $\rho_a(t,E)$ для переменной действия E удовлетворяет стандартному уравнению Фоккера–Планка. Более того, оказывается, что если постоянная a выбрана достаточно малой, то при $\varepsilon\to 0$ наш стохастический процесс может быть аппроксимирован чисто динамическим процессом – синусоидальными собственными колебаниями – на интервале времени $0 < t < a\varepsilon^{-2}$.

Один из основных принципов статистической механики состоит в том, что в системе, связанной с термостатом, устанавливается статистическое равновесие. Однако, данный принцип чрезвычайно трудно проиллюстрировать даже на каком-либо частном примере. А ведь проблема макроскопической необратимости является, по-видимому, ключевым пунктом наших представлений о физической реальности. В работе [19] Боголюбов как раз и исследовал эту проблему, исходя из микроскопических, обратимых уравнений классической механики.

В качестве системы S взят обычный гармонический вибратор с гамильтонианом

$$H_s = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2),$$

а в качестве системы Σ (термостат) – совокупность весьма большого числа N гармонических вибраторов с гамильтонианом

$$H_\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(p_n^2 + \omega_n^2 q_n^2).$$

Гамильтониан взаимодействия системы S и термостата Σ взят в виде

$$H_{S\Sigma} = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_n q,$$

где α_n – некоторые постоянные, ε – малый параметр. Предполагается, что при $t = 0$ переменные q и p имеют заданное значение q_0 и p_0, а переменные термостата $\{q_n, p_n\}$ – случайные величины с законом распределения, характеризующимся плотностью вероятности гиббсовского канонического ансамбля

$$\rho_{\Sigma}^{0} = \exp\left[\frac{1}{kT}(\Psi - H_{\Sigma})\right],$$

где k – постоянная Больцмана. Пусть при $N \to \infty$ справедливы также следующие соотношения, соответствующие переходу к непрерывному спектру:

$$\sum_{0<\omega_n<\nu} \frac{\alpha_n^2}{\omega_n^2} \to \int_0^{\nu} J(\omega)\,d\omega, \qquad \sum_{\omega_n>\nu} \frac{a_n^2}{\omega_n^2} \to \int_0^{\infty} J(\omega)\,d\omega$$

для любого $\nu > 0$. $J(\omega)$ – некоторая непрерывная неотрицательная функция, суммируемая на интервале $(0,\infty)$. Тогда Боголюбов доказывает, что существует предельная $(N \to \infty)$ плотность вероятности распределения $\rho_S = \rho(t,q,p)$ случайных величин $q = q_t$, $p = p_t$, представляющих координату и импульс системы S в момент времени $t > 0$. При достаточно малом ε функция ρ_S может быть аппроксимирована функцией вида

$$(3) \qquad \rho_S^0 = \rho_0(t,E) = \frac{\omega}{4\pi^2(1-e^{-2\varepsilon^2\delta t})kT_0} \times \int_0^{2\pi} d\theta \exp\left\{-\frac{1}{kT(1-e^{-2\varepsilon^2\delta t})}\left[E + E_0 e^{-2\varepsilon^2\delta t} - 2\sqrt{EE_0}e^{-\varepsilon^2\delta t}\cos\theta\right]\right\},$$

где

$$E = H_S = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \qquad \delta = \frac{\pi}{4}J(\omega)$$

в том смысле, что фиксируя произвольно малое $\alpha > 0$ и произвольно большое β, получаем равномерно по отношению к t в интервале $\alpha\varepsilon^{-2} < t < \beta\varepsilon^{-2}$

$$\frac{1}{\Delta t_\varepsilon}\int_t^{t+\Delta t_\varepsilon} (\rho_S - \rho_S^0)\,dt \to 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

для любой последовательности $\{\Delta t_\varepsilon\}$ такой, что $\varepsilon^2 \Delta t_\varepsilon \to 0$, $\Delta t_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Из (3) видно, что ρ_S^0 удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\pi}{2}\varepsilon^2 kT J(\omega)\frac{\partial}{\partial E}\left\{E\left(\frac{\partial\rho}{\partial E} + \frac{\rho}{kT}\right)\right\},$$

а при $t \to \infty$: $\rho_S^0 \to (2\pi kT)^{-1}\omega e^{-E/kT}$ (функция канонического распределения Гиббса). При $t \to 0$: $\rho_S^0 \to (2\pi)^{-1}\omega\delta(E - E_0)$, где

$$E_0 = \frac{1}{2}(p_0^2 + \omega^2 q_0^2).$$

Данное утверждение является первым и до сих пор, по-видимому, единственным строгим утверждением о процессе установления статистического равновесия в системе связанной с термостатом.

Дальнейшее детальное исследование проблемы возможности стохастического процесса в динамической системе, на которую оказывает влияние большая система, было осуществлено Боголюбовым в 70-х годах и опубликовано в работе [73]. В этой работе в рамках классической механики рассмотрена кинетика и гидродинамика малой системы S, например, просто отдельной частицы, слабо взаимодействующей с большой системой Σ. В случае одной частицы ее лиувиллиан $\widehat{\mathcal{L}}_S^0 = -v_0\partial/\partial r_0$, а лиувиллиан взаимодействия этой частицы с частицами термостата Σ имеет вид

$$\widehat{\mathcal{L}}_{S\Sigma} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\Phi(r_0 - r_j)}{\partial r_0}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v_0} - \frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial v_j}\right),$$

где $\Phi(r)$ – некая радиально-симметричная функция, пропорциональная малому параметру, m – масса частицы S, M – масса какой-либо частицы из Σ. Напомним, что оператор Лиувилля (лиувиллиан) $\widehat{\mathcal{L}}$ можно определить с помощью скобок Пуассона $\widehat{\mathcal{L}}\mathcal{D} = [H, \mathcal{D}]$, где H – гамильтониан, а $\mathcal{D}$ – произвольная функция в соответствующем фазовом пространстве. В [73] рассмотрен также важный частный случай, когда взаимодействие между S и Σ частицами можно определить как взаимодействие непроницаемых шаров: $\Phi(r) \to \infty$ при $r < a$, $\Phi(r) = 0$ при $r \geq a$, a – расстояние между центрами частиц в момент соударения. Боголюбовым получено приближенное кинетическое уравнение для приведенного распределения вероятности в S системе $f_t(S)$. Это есть немарковское уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \widehat{\mathcal{L}}_S^0 f_t + \int_0^t K(t-\tau) f_\tau \, d\tau. \tag{4}$$

Ядро $K(t)$ в (4) есть определенная сложная функция, являющаяся средним по равновесному гиббсовскому распределению термостата. Дальнейшая задача состоит в упрощении или явном вычислении этого ядра в конкретных случаях. Боголюбову удалось получить такое выражение для $K(t)$, в которое уже явно входят переменные S и Σ систем в максимально разделенном виде. При этом возникает необходимость вычисления равновесных средних только по термостатным переменным Σ, что и проводится далее в работе. Получено явное выражение для $K(t)$ в случае взаимодействия непроницаемых шаров и в случае кулоновского взаимодействия между S и Σ. В работе рассмотрены два случая начальных данных, когда при $t = 0$ функция распределения всей системы $S + \Sigma$ есть $\mathcal{D}_0(S,\Sigma) = f_0(S)\mathcal{D}_{eq}(\Sigma)$ и когда $\mathcal{D}_0(S,\Sigma) = h(S)\mathcal{D}_{eq}(S,\Sigma)$, где $\mathcal{D}_{eq}(\Sigma)$ и $\mathcal{D}_{eq}(S,\Sigma)$ – равновесные распределения для Σ и для $S+\Sigma$ соответственно. Второй из этих случаев необходим для рассмотрения модели непроницаемых шаров. В этой модели Боголюбовым выведено линеаризованное уравнение Навье–Стокса и вычислены его коэффициенты. В гидродинамическом приближении получены явные выражения для равновесных временных корреляционных средних.

Методы Боголюбова исследования задачи о взаимодействии “малой” и “большой” подсистем послужили мощным стимулом для многих авторов в решении этой проблемы. Различные ее аспекты рассматривались как отечественными, так и зарубежными учеными (см., например, [93], [101], [110], [112], [113], [115], [116]).

Одним из важных для физики примеров взаимодействия двух подсистем является задача о взаимодействии частицы с квантовым полем. В этом случае обычно рассматривают гамильтониан $H = H_p + H_\nu + H_{int}$, в котором H_p соответствует собственной энергии частицы (или, более общо, S подсистеме), H_ν – энергия квантового (фононного) поля Σ, H_{int} – энергия взаимодействия S и Σ. Обычно квантовое поле записывают в виде

$$H_\nu = \frac{1}{2}\sum_q \hbar\omega_q(\widehat{b}_q\widehat{b}_q^+ + \widehat{b}_q^+\widehat{b}_q),$$

где ω_q – частота осцилляторов, $\widehat{b}_q$, $\widehat{b}_q^+$ – операторы с перестановочными соотношениями статистики Бозе–Эйнштейна. Для нерялитивистской частицы $H_p = p^2/2m$. Типичная форма энергии взаимодействия имеет вид

$$H_{int} = \sum_q (u_q e^{iqr}\widehat{b}_q + u_q^* e^{-iqr}\widehat{b}_q^+),$$

где u_q, $u_q^* \sim V^{-1/2}$. V – объем системы, в котором происходит взаимодействие S и Σ подсистем.

В работе [39] Боголюбов изучил данную модель с помощью особой формы теории возмущений в т.н. случае адиабатической связи, когда в качестве малого возмущения рассматриваются не энергия взаимодействия, а кинетическая энергия поля, то есть формально можно считать, что $u_q = \varepsilon B_q$, а $\hbar\omega_q = \varepsilon^2\nu_q$, где ε – малый параметр. Данная форма теории возмущений была разработана Боголюбовым совместно с С.В. Тябликовым [37]. Идея метода состоит в специальной замене переменных в исходном гамильтониане, при которой в преобразованном гамильтониане $\widetilde{H}$ уже не будет содержаться одна из канонически сопряженных переменных, отвечающая системе. Физически это соответствует трансляционной инвариантности исходного гамильтониана. Выражение для $\widetilde{H}$ получается в виде ряда по степеням ε. Волновое уравнение $(H - E)\Psi = 0$ решается теперь с помощью обычной схемы теории возмущений. Боголюбов находит энергию основного состояния и эффективную массу частицы в первом приближении, уточняя соответствующие результаты С.И. Пекара (1946) и Л.Д. Ландау, С.И. Пекара (1948).

В 1978 году [74] Н.Н. Боголюбов изучает кинетические аспекты задачи о взаимодействии динамической системы с фононным полем. Полный гамильтониан системы $S + \Sigma$ имеет вид

$$H_t = H(t, S, \Sigma) = \Gamma(t, S) + \sum_k [C_k(t, S)b_k + C_k^+(t, S)b_k^+] + H(\Sigma), \tag{5}$$

где $\Gamma(t, S)$ – собственный гамильтониан системы S,

$$H(\Sigma) = \sum_k \hbar\omega_k b_k^+ b_k, \qquad \omega_k > 0$$

– собственный гамильтониан фононного поля. Если в (5) выбрать

$$\Gamma(t, S) = \frac{p^2}{2m} + e^{\varepsilon t}E(t)r,$$
$$C_k(t, S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}}\mathcal{L}(k)\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}e^{ikr}, \qquad \mathcal{L}^*(k) = \mathcal{L}(k),$$

r, p – положение и импульс электрона, $\mathcal{L}(k)$, ω_k – радиально симметричные функции волнового вектора $k = (2\pi L^{-1}n_1, 2\pi L^{-1}n_2, 2\pi L^{-1}n_3)$, $L^3 = V$, $n_i \in \mathbb{Z}$, то мы имеем теорию полярона, то есть электрона, движущегося в ионном кристалле. Фактор $e^{\varepsilon t}$ введен для реализации представления об адиабатическом включении взаимодействия в отдаленном прошлом.

Боголюбов рассматривает в качестве исходного уравнение Лиувилля для статистического оператора $\mathcal{D}_t$ системы $S + \Sigma$:

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{D}_t}{\partial t} = H_t\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t H_t$$

при начальном условии

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(S)\mathcal{D}(\Sigma), \qquad \mathcal{D}(\Sigma) = z^{-1}e^{-\beta H(\Sigma)},$$
$$z = \mathrm{Tr}_{(\Sigma)}\, e^{-\beta H(\Sigma)}, \qquad \mathrm{Tr}_{(S)}\,\rho(S) = 1, \qquad \mathrm{Tr}_{(\Sigma)}\,\mathcal{D}(\Sigma) = 1.$$

С помощью специального метода решения соответствующих уравнений движения Боголюбов строит обобщенное кинетическое уравнение (точное!) для приведенного статистического оператора S системы $\rho_t(S) = \mathrm{Tr}_{(\Sigma)}\,\mathcal{D}_t$, в которое уже явно не входят фононные операторы b_k, b_k^+. С помощью этого общего уравнения Боголюбов исследует более детально модель полярона, рассматривая в качестве первого приближения случай малых воздействий. Для вейлевского символа $W_t(p) = \mathrm{Tr}_{(S)}[\delta(q-p)\rho_t(S)]$ приведенного статистического оператора $\rho_t(S)$ получено следующее приближенное кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned}(6)\qquad \frac{\partial W_t(p)}{\partial t} - E(t)\frac{\partial W_t(p)}{\partial p} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk\frac{\mathcal{L}^2(k)}{2\omega_k(1-e^{-\beta\hbar\omega_k})}\\ &\times [W_t(p+\hbar k) - e^{-\beta\hbar\omega_k}W_t(p)]\delta[T(p+\hbar k) - T(p) - \hbar\omega_k]\\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk\frac{\mathcal{L}^2(k)}{2\omega_k(1-e^{-\beta\hbar\omega_k})}[W_t(p+\hbar k)e^{-\beta\hbar\omega_k} - W_t(p)]\\ &\times \delta[T(p+\hbar k) - T(p) + \hbar\omega_k].\end{aligned}$$

Если $T(p) = p^2/2m$, то (6) есть не что иное, как обычное уравнение Больцмана, интегральные члены в правой части которого соответствуют однофононному испусканию и поглощению. В дальнейшем идея получения обобщенного кинетического уравнения для электрон-фононной системы активно развивалась различными авторами для различных конкретных моделей (см., например, обзор [79] и работу [102]).

В работах [80], [83] Н.Н. Боголюбов совместно с Н.Н. Боголюбовым (мл.) развили функциональный вариационный метод исследования поляронной модели. Введена важная для возможных аппроксимаций линейная модель полярона. Предложен специальный метод т.н. T-произведений для вычисления термодинамических равновесных характеристик данной задачи. Подробно вычисляются корреляционные функции, функции Грина и свободная энергия. На основе вариационной техники рассмотрена возможность сведения обычного поляронного гамильтониана к аппроксимирующему точно решаемому модельному гамильтониану. Использование метода расчета от T-произведений, предложенного Боголюбовым, оказывается гораздо проще и эффективнее, чем сходное вычисление с помощью континуальных интегралов Фейнмана [97], [103].

В 1990 году Боголюбов возвращается к проблеме полярона [85]. Используя специальный вариационный принцип и существенно упрощая методы своей работы [39], Боголюбов строит теорию полярона во втором по малому параметру ε адиабатической аппроксимации порядке теории. При этом попутно он получает следующую изящную формулу для эффективной массы полярона M в вариационном приближении:

$$M = m + \frac{1}{3(2\pi)^3}\int df\frac{f^2\mathcal{L}^2(f)}{\omega_f^4}\left|\int dx\varphi_0^2(x)e^{-ifx}\right|^2,$$

где $\varphi_0(x)$ – решение соответствующей вариационной задачи.

§ 3. Кинетическая теория и гидродинамика

В 1946 году появляются замечательные работы Боголюбова [20]– [22], в которых сформулирован способ решения проблем кинетики, исходя из механики совокупности молекул.

Основы кинетической теории были заложены более ста лет назад Максвеллом (1866) и Больцманом (1872). Опубликование в 1902 году “Основных принципов статистической механики” Дж. Гиббсом ознаменовало рождение нового раздела физики – статистической механики.

Классические методы кинетической теории, восходящие к Больцману, построены на полном пренебрежении корреляций между динамическими состояниями пар молекул (гипотеза молекулярного хаоса) и к тому же рассматривают динамический процесс инерциального движения молекул и стохастический процесс их соударений как неинтерферирующие, ввиду чего в кинетическом уравнении к конвекционному члену член соударений приписывается чисто феноменологически. Боголюбов предлагает метод решения проблем кинетики и гидродинамики, позволяющий получать кинетические и гидродинамические уравнения с единой, последовательно микроскопической точки зрения. С помощью этого метода можно уточнять формулы классической кинетической теории наподобие того, как для случая статистического равновесия это делается в теории Урсела–Майера. Боголюбов впервые вводит важное в неравновесной статистической механике понятие сокращенного описания, связанное с представлением о временах релаксации исходной системы многих взаимодействующих частиц. Фактически появление работ Боголюбова по неравновесной статистической механике классических систем ознаменовало новый этап развития статистической механики, этап, на котором статистическая механика стала одним из важнейших разделов математической физики.

Боголюбов рассматривает совокупность N одинаковых одноатомных классических молекул, заключенных в некотором конечном, макроскопическом объеме V. Динамическое состояние каждой i-ой молекулы определяется ее положением $q_i = (q_i^{(\alpha)})$ и импульсом $p_i = (p_i^{(\alpha)})$, $\alpha = 1, 2, 3$. Динамическая эволюция системы полностью определена каноническими уравнениями

$$\frac{\partial q_i^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\alpha)}}, \qquad \frac{\partial p_i^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\alpha)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Гамильтониан H обычно рассматривается как сумма индивидуальных энергий молекул T и взаимных потенциалов пар молекул Φ:

$$H = \sum_{s=1}^{N} H_s(x_1, x_2, \ldots, x_s);$$

$$H_s = \sum_{i=1}^{s} T(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le s} \Phi(|q_i - q_j|).$$

Обычно $T(p) = p^2/2m$ – кинетическая энергия молекулы. В соответствии с идеей статистического описания вводится функция распределения всей системы

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(t, x_1, \ldots, x_N),$$

где $x_i = (q_i, p_i)$. Далее Боголюбов вводит s-частичные функции распределения

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) = V^s \int \cdots \int_{\Omega_V} \mathcal{D}(t, x_1, \ldots, x_N)\, dx_{s+1} \ldots dx_N,$$

где Ω_V – фазовое пространство одной молекулы. Кинетическое уравнение – уравнение для F_1 (иногда для F_2). Основной вопрос кинетической теории состоит в получении замкнутого уравнения для одночастичной функции распределения, то есть такого уравнения, куда бы не входили высшие ($F_2, F_3, \dots$) функции распределения. Используя методы, ранее разработанные им в нелинейной механике, Боголюбов дает последовательный рецепт построения кинетических уравнений, из которых в дальнейшем естественно возникают уравнения гидродинамики.

Прежде всего с помощью уравнения Лиувилля для $\mathcal{D}$ и определения s-частичных функций распределения F_s просто выводится так называемая цепочка уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ-иерархия), являющаяся точной системой зацепляющихся уравнений для F_s. В термодинамическом пределе ($N \to \infty$, $V \to \infty, n \equiv N/V = \text{const}$) она имеет вид:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = [H_s, F_s] + n \int_{\Omega} dx_{s+1} \left[\sum_{i=1}^{s} \Phi(|q_i - q_{s+1}|), F_{s+1} \right].$$

Здесь

$$H_s = H_s(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} T(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le s} \Phi(|q_i - q_j|),$$

$[\dots, \dots]$ – скобка Пуассона.

Боголюбов, применяя схему функциональных производных, использованную им для случая статистического равновесия [25], показывает как можно изучать функции F_s и уравнения для них путем введения производящего функционала:

$$L_N(t, u) = \int \cdots \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_N \mathcal{D}(t, x_1, \dots, x_N) \prod_{j=1}^{N} (1 + vu(x_j)),$$

где $u(x)$ – произвольные регулярные функции, заданные на всем фазовом пространстве Ω одной молекулы и достаточно быстро стремящиеся к нулю при возрастании $|q|$, $|p|$; $v = n^{-1}$.

Исходя из иерархии ББГКИ, Боголюбов получает формальные выражения для F_s через F_1 и т.н. оператор соударений $S_t^{(s)}$: $S_t^{(s)} \psi(x_1, \dots, x_s) = \psi(X_1, \dots, X_s)$, где $X_j(t, x_1, \dots, x_s)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) – решение уравнений Гамильтона для s молекул, находящихся при $t = 0$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_s$ фазового пространства. Для F_1 выполняется формально точное уравнение, являющееся так же, как и выражение для F_s, рядом по степеням n. Кинетическое уравнение первого приближения для пространственно однородного случая $F_1(t, q, p) = w(t, p)$ есть при этом классическое уравнение Больцмана.

Боголюбов, используя выведенное им приближенное кинетическое уравнение, приходит к уравнениям гидродинамики. При этом удается строить поправки как к уравнению состояния, так и к коэффициентам вязкости и теплопроводности, расположенным по степеням плотности. В стационарном случае схема Боголюбова приводит к известным разложениям Урсела–Майера (1941). Используя разложение по степеням малости энергии взаимодействия, Боголюбов получает в качестве первого приближения уравнения Ландау и Власова. Боголюбов также рассматривает случай кулоновского взаимодействия молекул.

При выводе кинетических уравнений Боголюбов также предложил т.н. принцип ослабления корреляций, в котором условие ослабления корреляций используется в качестве граничного условия, благодаря чему явная структура интеграла столкновений получается уже на динамическом уровне:

$$S_{-\tau}^{(s)}\left\{F_s - \prod_{j=1}^{s} F_1(t, x_j)\right\} \to 0 \quad \text{при } \tau \to \infty,$$

где $S_{-\tau}^{(s)}$ заменяет координаты $q_1, \ldots, q_s$ координатами $q_1 - p_1\tau/m, \ldots, q_s - p_s\tau/m$, соответственно.

Использование при выводе кинетических и гидродинамических уравнений схемы метода усреднения нелинейной механики естественно привело Боголюбова к понятию иерархии времен релаксации. В эволюции s – частичных функций распределения имеется два процесса – "медленный" процесс изменения одночастичной функции распределения с эффективной длительностью порядка $t_r = vu_{cp}^{-1}r_0^{-2}$ (r_0 – радиус взаимодействия молекул, u_{cp} – средняя скорость молекулы) и "быстрый" процесс синхронизации корреляционных функций с эффективной длительностью порядка $t_k = r_0 u_{cp}^{-1}$. Таким образом при $t \gg t_k$ s-частичная функция распределения $F_s(t, x_1, \ldots, x_s)$ синхронизуется через одночастичную функцию $F_1(t, x)$:

$$F_s \sim \prod_{j=1}^{s} F_1.$$

Аналогично, рассматривая эволюцию $F_1(t, x)$ мы опять замечаем два процесса – "медленный" процесс изменения гидродинамических функций ρ, U, θ (плотность, скорость, кинетическая энергия) и "быстрый" процесс изменения F_1. Быстрый процесс проявляется в синхронизации F_1 с гидродинамическими функциями за время порядка t_r. Итак, при $t < t_k$ мы имеем чисто динамический процесс, описываемый в рамках механики совокупности молекул, при $t > t_k$ мы можем воспользоваться кинетическими уравнениями в той или иной форме, а при $t > t_r$ уже наступает т.н. гидродинамический этап эволюции и мы можем использовать уравнения гидродинамики.

Заметим, что идея времен релаксации появилась в контексте статистической механики впервые в работе Боголюбова [19] при изучении процесса стохастической эволюции гармонического осциллятора, находящегося во внешнем случайном поле (см. § 2).

Проблема строгого вывода кинетических уравнений и уравнений гидродинамики из законов движения системы большого числа частиц в последнее десятилетие привлекает исключительное внимание физиков и математиков. Ряд тонких результатов в этом направлении получен в работах [96], [99], [104], [109], [114]. В целом же данная проблема выглядит исключительно трудной и еще далека от своего удовлетворительного решения.

Рассматривая системы большого числа частиц, для получения точных термодинамических соотношений необходимо совершать в рассматриваемой системе термодинамический предельный переход. Боголюбов уделял большое внимание строгому математическому обоснованию такого предельного перехода к бесконечному числу степеней свободы в бесконечном объеме для классических систем [36], [69].

Пусть $\{F_s^{(N)}(q_1, \ldots, q_s; V_N)\}$; $N = 1, 2, \ldots$; $s = 1, 2, \ldots N$ последовательность равновесных функций распределения (корреляционых функций) системы N классических частиц, заключенных в объеме V_N и взаимодействующих парным образом с потенциалом $\Phi(r)$. Области V_N можно представлять себе сферами объема vN, $v =$ const.

Как известно,

$$F_s^{(N)} = \frac{V_N^s}{Q(N,V_N)} \int \cdots \int_{V_N} \exp\left[-\frac{1}{\theta} \sum_{1\le i<j\le N} \Phi(|q_i - q_j|)\right] dq_{s+1}\dots dq_N,$$

где

$$Q(N,V_N) = \int \cdots \int_{V_N} \exp\left[-\frac{1}{\theta} \sum_{1\le i<j\le N} \Phi(|q_i - q_j|)\right] dq_1\dots dq_N.$$

Боголюбовым доказано, что [36]: при выполнении определенных условий, связанных со свойствами потенциала $\Phi(r)$ (в частности, положительность и наличие твердой сердцевины), у систем с достаточно малыми плотностями существуют предельные функции распределения

$$F_s(q_1,\dots,q_s;v) = \lim_{\substack{N\to\infty\\ v=\mathrm{const}}} F_s^{(N)}(q_1,\dots,q_s;V_N) \qquad \forall s=1,2,\dots,$$

которые удовлетворяют системе дифференциально-интегральных уравнений

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_i^{(\alpha)}} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial W_s}{\partial q_i^{(\alpha)}} F_s + \frac{1}{\theta v}\int_{E'} \frac{\partial \Phi(|q_i - q_{s+1}|)}{\partial q_i^{(\alpha)}} F_{s+1}\, dq_{s+1} = 0,$$
$$W_s = \sum_{1\le i<j\le s} \Phi(|q_i - q_j|); \qquad s=1,2,\dots; \qquad i=1,2,\dots,s; \qquad \alpha=1,2,3$$

в той части пространства $q_1, q_2, \dots, q_s$, в которой $|q_i - q_j| > r_0$, $(1\le i<j\le s)$, а r_0 – диаметр непроницаемой сердцевины частицы, то есть $\Phi(r)=\infty$ при $r<r_0$. Доказана также теорема о том, что при определенных условиях эти предельные функции F_s образуют решение системы уравнений Майера – Монтролла. Отметим, что в статье [36] впервые было начато математически строгое изучение термодинамического предельного перехода для корреляционных средних.

Позднее [69] Боголюбов с соавторами, используя более слабые ограничения на потенциал парного взаимодействия $\Phi(r)$, доказал существование и единственность предельных (в термодинамическом пределе) функций распределения и их аналитическую зависимость от плотности в случае равновесного состояния бесконечных систем частиц. Исследование было проведено на основе теории канонического ансамбля. Рассматривалась система уравнений Кирквуда–Зальцбурга (1947), которым, наряду с уравнениями Майера–Монтролла, удовлетворяют корреляционные функции. В банаховом пространстве B, элементами которого являются столбцы измеримых ограниченных функций s переменных $(s=1,2,\dots)$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & (q_1) & & \\ f_2 & (q_1, & q_2) & \\ f_3 & (q_1, & q_2, & q_3) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_s \left[A^{-s} \sup_{(q_1,\dots,q_s)} |f_s(q_1,q_2,\dots,q_s)|\right],$$

A - некоторая положительная постоянная, доказано существование и единственность решения системы уравнений Кирквуда–Зальцбурга, являющегося голоморфной функцией от v^{-1} в области

$$|a(v)| < 2, \qquad |v|^{-1} < \frac{1}{2e^{2b+1}J},$$

где

$$a(v) = \lim_{N\to\infty} vM \frac{Q(M-1, V_N)}{Q(M, V_N)}, \qquad J = \int \left| e^{-\frac{\Phi(q)}{\theta}} - 1 \right| dq < \infty,$$

а $b > 0$ такая положительная постоянная, что при всех s и любых

$$q_1, \ldots, q_s : U_s(q_1, \ldots, q_s) \geq -s\theta b$$

(условие устойчивости взаимодействия).

В связи с проблемами кинетической теории отметим важную работу Боголюбова [72], в которой показано, что уравнение Больцмана–Энскога, описывающее кинетику системы, состоящей из упругих шаров диаметра a и которое всегда рассматривалось как приближенное уравнение в случае малой плотности, имеет такие микроскопические решения, которые соответствуют точному движению частиц. Уравнение Больцмана–Энскога для одночастичной функции распределения в пространстве координат r и скоростей v имеет вид:

$$(7) \qquad \frac{\partial f(t, r_1, v_1)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f(t, r_1, v_1)}{\partial r_1} = na^2 \int_{(v_{2,1}\sigma)\geq 0} (v_{2,1}\sigma)\{f(t, r_1, v_1^*) \times f(t, r_1 + a\sigma, v_2^*) - f(t, r_1, v_1) f(t, r_1 - a\sigma, v_2)\}\, d\sigma\, dv_2,$$

где σ – единичный вектор на трехмерной сфере, $v_{2,1} = v_2 - v_1$, $v_1^* = v_1 + \sigma(v_{2,1}\sigma)$, $v_2^* = v_2 - \sigma(v_{2,1}\sigma)$. Боголюбов показал, что (7) имеет точное решение

$$f(t, r, v; \Gamma) = n^{-1} \sum_{j=1}^{N} \delta(r - q_j(t))\delta(v - w_j(t)),$$

где Γ – множество начальных значений в пространстве координат и скоростей N шаров, а $q_j(t)$, $w_j(t)$ – решение гамильтоновых уравнений движения этих шаров, взаимодействующих только через упругие столкновения.

Результаты Боголюбова по неравновесной и равновесной теории классических статистических систем являются основой многочисленных современных методов статистической механики [91], [94], [116]. Фундаментальная монография Боголюбова “Проблемы динамической теории в статистической физике”, наряду с “Лекциями по теории газов” Больцмана и гиббсовскими “Основными принципами статистической механики” на многие годы определила развитие статистической физики, являясь учебником для начинающих исследователей и источником новых идей для активно действующих специалистов.

§ 4. Квантовая статистическая механика

В 1947 году Н.Н. Боголюбов обращает свои научные интересы на проблемы квантовой статистической механики. Совместно с К.П. Гуровым [24] он проводит обобщение метода построения кинетических уравнений на квантовый случай слабого взаимодействия. Рассматривается система N квантовых частиц с декартовыми координатами $q_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N;\ \alpha = 1, 2, 3)$. В квантовой механике имеют дело с операторами, действующими на волновые функции $\psi(q_1, \ldots, q_s)$ $(s \leq N)$ совокупности из s частиц, которые предполагаются в [55] тождественными, одноатомными и бесспиновыми и заключены в объеме V. Эти операторы сокращенно представляются с помощью выражений вида $A(1,2,\ldots,s)$, где в качестве аргументов $1,2,\ldots,s$ фигурируют координаты $q_1,q_2,\ldots,q_s$.

Вся статистика такой системы с гамильтонианом

$$H=\sum_{i=1}^{N}T(p_i)+\sum_{1\le i<j\le N}\Phi(|q_i-q_j|),$$

где

$$T(p)=p^2/2m=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_q$$

есть кинетическая энергия одной молекулы, а $\Phi(r)$ – потенциал взаимодействия пары молекул, задается оператором квантовой плотности $\mathcal{D}(1,2,\ldots,N)$ с условием нормировки $\operatorname{Tr}\mathcal{D}=1$, который удовлетворяет известному уравнению Лиувилля–фон Неймана

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t}=[H,\mathcal{D}]=H\mathcal{D}-\mathcal{D}H.$$

И в квантовом случае Боголюбов вводит понятие s-частичных операторов квантовой плотности $F_1(1), F_2(1,2),\ldots, F_s(1,2,\ldots,s),\ldots$, определяя их соотношениями

$$F_s(1,2,\ldots,s)=V^s\operatorname{Tr}_{(s+1,\ldots,N)}\mathcal{D}(1,2,\ldots,N),\qquad s=1,2,\ldots.$$

Эти операторы удовлетворяют в бесконечном объеме цепочке точных уравнений

$$\frac{\partial F_s}{\partial t}=[H_s,F_s]+v^{-1}\operatorname{Tr}_{(s+1)}\Big[\sum_{1\le j\le s}\Phi(j,s+1),F_{s+1}\Big]. \tag{8}$$

Как и в классической механике N частиц задача состоит в получении замкнутого (кинетического уравнения для $F_1(1)$. Боголюбов и Гуров вводят вместо операторов плотностей $F_2, F_3,\ldots$ операторы корреляционных отклонений $g_2, g_3,\ldots$ соотношениями

$$\begin{aligned}F_2(1,2)&=\gamma_2F_1(1)F_1(2)+\varepsilon g_2(1,2),\\ F_3(1,2,3)&=\gamma_3F_1(1)F_1(2)F_1(3)+\frac12\varepsilon\gamma_3\{g_2(1,2)F_1(3)\\ &\quad+g_2(2,3)F_1(1)+g_2(1,3)F_1(2)\}+\varepsilon^2g_3(1,2,3),\ldots,\end{aligned}$$

где $\gamma_3=(1+P_{1,s}+\cdots+P_{s-1,s})\ldots(1+P_{1,2})$ – оператор симметризации, а $P_{i,j}$ – оператор, переставляющий i и j в аргументах следующего после него оператора, ε – формальный малый параметр у $\Phi(r)$. Далее, используя идеи классического случая [22], производится обрыв цепочки точных уравнений (8) в любом по ε порядке. В [24] получено кинетическое уравнение второго по ε приближения в пространственно–однородном случае, когда отсутствует т.н. квантовое вырождение (то есть рассмотрена область температур выше температуры образования бозеконденсата).

Проблема построения кинетики неидеальных систем бозевских частиц тесно связана с вопросом об их равновесных свойствах. Построение микроскопической теории сверхтекучести, являющейся фундаментальным свойством бозевских систем, привлекло к себе внимание Боголюбова в 1947 году. В этом же году в печати появились две работы Боголюбова [23], [27], в которых дана замечательная по простоте и последовательности приближенная схема метода вторичного квантования в применении к модели неидеального бозе–газа.

Явление сверхтекучести было открыто П.Л. Капицей в 1938 году. Оказалось, что ниже абсолютной температуры $2,19^0$ жидкий гелий HeII становится состоящим как бы из двух компонент: сверхтекучей, совершенно лишенной вязкости, и нормальной. При уменьшении температуры количество сверхтекучей компоненты возрастает. Феноменологическая теория, объясняющая это явление, была предложена Тиссой в 1938 году и в несколько иной форме в 1941 году Л.Д. Ландау. Ландау эмпирически ввел предположение о характере спектра элементарных возбуждений в жидком гелии, состоящем из двух ветвей: фононной, где $\varepsilon(p) = cp$ и ротонной, где $\varepsilon(p) = \Delta + (p - p_0)^2/2\mu$ (Δ, c, p_0 – некоторые постоянные, μ – эффективная масса). Именно фононный характер спектра при малых импульсах и обеспечивает возможность образования "связанного" коллектива бозонов, совершающего сверхтекучее движение. Боголюбову принадлежит заслуга микроскопического доказательства того, что при некоторых условиях в слабонеидеальном газе Бозе–Эйнштейна "вырожденный конденсат" может двигаться без трения относительно элементарных возбуждений с произвольной, достаточно малой скоростью $u \le \min_{(p)} \varepsilon(p)/|p|$. В идеальном газе, где не учитывается взаимодействие между бозонами $\varepsilon(p) = p^2/2m$, $\min_{(p)} \varepsilon(p)/|p| = 0$ и явление сверхтекучести отсутствует. Кроме того Боголюбов получил выражение для спектра $\varepsilon(p)$ элементарных возбуждений, из которого следует вывод о единстве спектра фонон–ротонных возбуждений.

Рассматриваемая Боголюбовым система представляет совокупность бесспиновых тождественных частиц и описывается в представлении вторичного квантования гамильтонианом

$$H = H_0 + H_1 = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p + \frac{1}{V} \sum_{p,q,k} \nu(k) a_p^+ a_q^+ a_{p+k} a_{q-k}, \tag{9}$$

где a_p^+, a_p – бозе-операторы рождения и уничтожения бозона с импульсом $p \cdot \nu(k) = \nu(|k|)$ – фурье-образ потенциала парного взаимодействия $\Phi(r)$ двух бозонов. Предполагается, что $\nu(k)$ зависит от формально малого параметра ε. Когда $\varepsilon = 0$ мы имеем случай идеального газа и при нулевой температуре в такой системе все частицы выпадают в конденсат, то есть имеют нулевой импульс (Эйнштейн): $N_0 = N$. При малых ε это будет не так, однако, ввиду того, что в этом случае $N_0 = \langle a_0^+ a_0 \rangle$ весьма велико по сравнению с I, выражение $a_0 a_0^+ - a_0^+ a_0 = 1$ должно быть "мало" по сравнению с самими a_0 и a_0^+ и поэтому можно считать a_0 и a_0^+ обычными числами, пренебрегая их неперестановочностью (эта идея в общем виде была высказана П. Дираком в 1932 году). Ввиду малости N_f/N $(f \ne 0)$ Боголюбов считает далее a_f, a_f^+ "малыми" по сравнению с a_0, a_0^+, оставляет только слагаемые в гамильтониане H_1, в которых количество операторов a_f, a_f^+ $(f \ne 0)$ не больше двух. При этих допущениях из (9) получается следующий модельный гамильтониан Боголюбова:

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2}\frac{N^2}{V}\nu(0) + \frac{N_0}{V}\sum_{p\ne0} \nu(p) a_p^+ a_{-p}^+ \\ & + \frac{N_0}{V}\sum_{p\ne0} \nu(p) a_{-p} a_p + \sum_{p\ne0}\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{N_0}{V}\nu(p)\right] a_p^+ a_p. \end{aligned} \tag{10}$$

Гамильтониан (10), имеющий простой квадратичный вид, легко приводится к диагональной форме

$$H = H^0 + \sum_{p\ne0} \varepsilon(p) b_p^+ b_p,$$

где

$$
(11)\qquad \begin{aligned}
H^0 &= \frac{N^2}{2V}\nu(0) + \frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\left[\varepsilon(p) - \frac{p^2}{2m} - \frac{N_0}{V}\nu(p)\right],\\
\varepsilon(p) &= \sqrt{p^4/4m^2 + \frac{N_0}{V}\nu(p)\frac{p^2}{m}},
\end{aligned}
$$

а “новые” бозе-операторы b_p, b_p^+ связаны со “старыми” a_p, a_p^+ линейным каноническим преобразованием. Спектр (11) обладает свойством сверхтекучести и имеет фононно-ротонный характер. Таким образом, в боголюбовской теории сверхтекучести фактически сделаны два предположения: существование в неидеальном бозе-газе конденсата при достаточно низких температурах и наличие слабого отталкивательного взаимодействия, мало разрушающего этот конденсат вблизи абсолютного нуля температур.

В дальнейшем Боголюбов изучил влияние членов третьего порядка по отношению к a_p, a_p^+ $(p \neq 0)$, отброшенных в (10) [31]. Для средних чисел заполнения элементарных возбуждений $\overline{n}_p$ им было получено кинетическое уравнение первого приближения и найдено равновесное распределение, имеющее стандартный вид

$$
\overline{n}_p = \frac{1}{e^{\theta^{-1}[\varepsilon(p)-(pu)]} - 1},
$$

где u – произвольный вектор, но такой, что $|u| \leq \min_{(p)} \varepsilon(p)/|p|$.

Заметим, что линейное каноническое преобразование, введенное Боголюбовым при исследовании модели неидеального бозе-газа, нашло широкое применение в математической физике и до сих пор составляет предмет многочисленных исследований (см., например, [88], [100]).

В 1963 году [64] Боголюбов дал последовательный вывод уравнений гидродинамики сверхтекучей идеальной жидкости, исходя из уравнений движения системы одинаковых бозе-частиц, и получил на этом пути т.н. гидродинамическое приближение для функций Грина. Он обобщил вывод уравнений гидродинамики для нормальной жидкости [24] на случай наличия сверхтекучей компоненты. Система уравнений гидродинамики для сверхтекучей жидкости представлена Боголюбовым в виде:

$$
(12)\qquad \begin{aligned}
&m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r^{(\alpha)}}\left\{m\left(v_s v_n - \frac{v_n^2}{2}\right) + \Lambda + U\right\} = 0,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial r^{(\beta)}}\{\rho_s v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\beta)}\} - ia(\xi^* - \xi) = 0,\\
&m\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_n v_n^{(\alpha)}) + \sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial r^{(\beta)}}(\rho_s v_s^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} + \rho_n v_n^{(\alpha)} v_n^{(\beta)})\right\}\\
&\qquad + \frac{\partial P}{\partial r^{(\alpha)}} + \rho\frac{\partial U}{\partial r^{(\alpha)}} - ima^*(\xi^* - \xi)v_s^{(\alpha)} = 0,\\
&\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \sum_{\beta}\frac{\partial}{\partial r^{(\beta)}}(\rho v_n^{(\beta)} S) = 0,
\end{aligned}
$$

где ρ, ρ_s, ρ_n – плотности жидкости, ее сверхтекучей и нормальной компонент ($\rho = \rho_s + \rho_n$), v_s, v_n – скорости сверхтекучей и нормальной компонент, $P = \rho^2\partial F/\partial\rho$ – давление, энтропия $S = -\partial F/\partial\theta$, $\Lambda = F + \rho\partial F/\partial\rho$, $F = F(\rho,\theta)$ – свободная энергия, U – внешнее поле, а ξ, ξ^* связаны с источниками частиц, $a = |\langle\psi(t,r)\rangle|$ и $\psi(t,r)$

– бозевский оператор уничтожения. Ранее в случае $U = 0, \xi = 0$ эту систему получил Ландау (1941), исходя из феноменологических соображений. Ландау использовал квантование уравнений гидродинамики, не учитывая статистики. При этом из его теории следовало существование энергетической щели, фононов, ротонов и т.д., что делало правдоподобным объяснение сверхтекучести квантовой гидродинамикой. Однако из метода Ландау следовало, что He^3, как и He^4, испытывает фазовый переход, и поэтому конденсация Бозе-Эйнштейна не является его причиной. Фейман [106] показал, что "квантовая гидродинамика не предсказывает спектра возбуждений, как это ранее полагали Ландау и другие исследователи", поскольку "гидродинамика Ландау должна приводить к множеству низколежащих возбуждений, так что эта теория не объясняет сверхтекучести. Ошибка Ландау состоит в том, что, неявно предполагая различимость частиц, он пренебрег эффектами статистики" [97].

Боголюбов, линеаризуя гидродинамические уравнения (12) вблизи покоящегося состояния статистического равновесия получил т.н. "акустические" уравнения и связал гидродинамические величины, получаемые из линеаризованных уравнений, с функциями Грина. При этом были получены явные выражения для функций Грина $\ll a_k, a_{-k} \gg_E$ и $\ll a_k, a_k^+ \gg_E$ и, в частности, было установлено, что эти функции имеют полюса, соответствующие двум типам элементарных возбуждений $\varepsilon = c_0 p$ и $\varepsilon = c_1 p$, где c_0 стремится к обычной скорости звука как при $\rho_s \to 0$, так и при $\theta \to 0$, а c_1 – специфическая для сверхтекучей жидкости скорость "второго звука", стремящегося к 0 при $\rho_s \to 0$.

Таким образом, Боголюбов дал микроскопическое объяснение явления сверхтекучести в He^4, связанного с образованием термодинамически устойчивого конденсата в этой системе при достаточно низких температурах и построил систему гидродинамических уравнений во всей области температур. Теория Боголюбова дала возможность последовательно описать энергетический спектр сверхтекучей системы и объяснить соотношения между сверхтекучей и нормальной компонентами. Глубокая физическая интуиция позволила Боголюбову сделать блестящее предположение о том, что силы отталкивания между бозонами благоприятствуют сверхтекучести, а силы притяжения – препятствуют. Этот вывод Боголюбова выходит далеко за рамки рассмотренной им модели и в дальнейшем (см., например, [94]) послужил основой для введения такого важного понятия классической и квантовой статистики как устойчивость взаимодействия.

В 1949 году Н.Н. Боголюбов обобщил свои результаты, связанные с построением молекулярной теории сверхтекучести и теории полярной модели металла (совместно с С.В. Тябликовым [35], [37], [38]) в монографии [34]. Данная книга явилась первым систематическим изложением основных положений методов статистической механики квантовых систем (метод статистических операторов комплексов молекул и тесно связанный с ним метод приближенного вторичного квантования). Боголюбов при этом отошел от общепринятой схемы изложения, тесно связав представление вторичного квантования с теорией статистических операторов. Метод Боголюбова построения секулярного уравнения для полярной модели существенно улучшил метод Гайтлера–Лондона и по своей сути явился специальной формой метода Ритца. Для решения полученного секулярного уравнения Боголюбов использовал метод приближенной ортогонализации пробных волновых функций и, соответственно, метод теории возмущений для определения энергетического спектра задачи. В [34] установлены важные соотношения, связывающие фермионные, бозонные и спиновые операторы. Построено решение секулярных уравнений во втором и третьем порядках. Существенно, что именно третье приближение дает возможность изучения свойств электрического тока. Методы, разработанные в [34], послужили основой дальнейшего активного развития микроскопической теории ферромагнетизма. Кроме того, идея, что при определенных предпосылках можно представить энергетический спектр фермиевской системы в виде совокупности элементарных возбуждений, подчиняющихся статистике Бозе, послужила базой для построения Боголюбовым микроскопической теории сверхтекучести и частично реабилитировала квантовую гидродинамику Ландау.

Явление сверхпроводимости было экспериментально обнаружено основателем физики низких температур, голландским ученым Камерлинг–Онессом в 1911 году. Оно состоит в том, что некоторые металлы, если их сильно охладить (для чистого металла до температур от $0,35^\circ K$ у гафния до $8^\circ K$ у ниобия, у сплавов ниобия с оловом – до $18^\circ K$), полностью теряют сопротивление электрическому току. Феноменологическая теория сверхпроводимости была построена Ф. и Г. Лондонами в 1935 году и улучшена Пиппардом в 1953 году. Но эта теория не давала механизма явления и вопрос о микроскопическом объяснении сверхпроводимости, исходя из основных начал квантовой механики, оставался открытым. В 1950 году Фрелих высказывал смелую идею о том, что явление сверхпроводимости определяется главным образом взаимодействием электронов с фононами (колебаниями кристаллической решетки), то есть тем самым взаимодействием, которое в нормальных условиях по теории Блоха обуславливает обычное электросопротивление металла. Фрелих предложил модельный гамильтониан, носящий его имя:

$$
\begin{aligned}
H &= H_B + H_F + H_{BF},\\
H_B &= \sum_q \omega(q) b_q^+ b_q,\\
H_F &= \sum_{q;\sigma} E(q) a_{q,\sigma}^+ a_{q,\sigma},\\
H_{BF} &= g \sum_{p,q;\sigma} \sqrt{\frac{\omega(q)}{2V}} \left[a_{p,\sigma}^+ a_{p+q,\sigma} b_q^+ + a_{p+q,\sigma}^+ a_{p,\sigma} b_q\right],
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $a_{p,\sigma}^+$, $a_{p,\sigma}$ – ферми-операторы с импульсом p и спином σ, b_q^+, b_q – бозе-операторы, V – объем, g – константа связи, $E(q)$ – энергия электрона, $\omega(q)$ – энергия фонона.

Динамическая система, описываемая гамильтонианом (13), весьма сложна для математического изучения. Фрелиху не удалось решить сформулированную им задачу и построить микроскопическую теорию сверхпроводимости. Хотя предсказанная им обратная пропорциональность температуры фазового перехода из нормального состояния в сверхпроводящее квадратному корню из массы атома решетки ("изотопический" эффект) обнадежила физиков в справедливости гипотезы Фрелиха.

Следующий шаг в построении микроскопической теории сверхпроводимости был сделан Шафротом и Блаттом (1954). Эти ученые развили представление о важности парных корреляций электронов, приводящих к образованию своеобразных "квазимолекул", состоящих из двух электронов и поэтому подчиняющихся статистике Бозе. Появление конденсата в системе квазимолекул и есть по их мнению возникновение сверхпроводимости. Поскольку конденсатная квазимолекула имеет нулевой полный импульс, то электроны, ее составляющие, имеют противоположные импульсы. Для образования таких квазимолекул по Шафроту, Батлеру и Блатту необходимо эффективное фрелиховское притяжение двух электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми.

В дальнейшем Купер (1956) и Бардин, Купер, Шриффер (1957) построили модельный гамильтониан, в котором взаимодействие электронов через фононы заменено прямым взаимодействием электронов. Для упрощения учитывалось взаимодействие только между парами электронов с нулевым суммарным импульсом. Используя вариационный принцип, было установлено, что энергии возбужденных состояний отделены щелью от энергии основного состояния, что и дает сверхпроводимость.

Еще до того как в Москве стала известна подробная работа Бардина, Купера и Шриффера в конце сентября 1957 года Боголюбову удалось показать, что метод, разработанный им в теории сверхтекучести, может быть обобщен и на исходную для сверхпроводимости модель Фрелиха [46].

Рассматривая гамильтониан (13), Боголюбов с помощью метода компенсации опасных диаграмм, отвечающих рождению из вакуума пары частиц с противоположными импульсами и спинами, получил формулы для расчета основного сверхпроводящего состояния и его возмущений фермиевского типа со щелью. В работе [44] Боголюбов исследовал явление сверхпроводимости, исходя из гамильтониана прямого взаимодействия электронов Бардина

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{q;s} E(q) a^+_{q,s} a_{q,s} - \frac{J}{V} \sum_{\substack{q_1, q_2 \\ q_1', q_2'}} \theta(q_1)\theta(q_2)\theta(q_1')\theta(q_2') \\
\times \Delta(q_1 + q_2 - q_1' - q_2') a^+_{q_1,-1/2} a^+_{q_2,1/2} a_{q_1',1/2} a_{q_2',-1/2},
\end{aligned}
$$

где

$$
\theta(q) = \begin{cases} 1, & E(q_F) - \omega < E(q) < E(q_F) + \omega; \\ 0, & |E(q) - E(q_F)| > \omega; \end{cases} \qquad \Delta(q) = \begin{cases} 1, & q = 0; \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}
$$

$E(q)$ – радиально симметричная функция, J, ω – параметры Бардина. Используя метод суммирования диаграмм определенного класса и метод приближенного вторичного квантования, Боголюбов получил результаты Бардина, Купера, Шриффера, в частности, выражение для щели ($\theta = 0$):

$$
E(q_F) = 2\omega \exp(-1/\rho), \qquad \text{где } \rho = \frac{J}{2\pi^2} \left(k^2 \frac{\partial k}{\partial E} \right)_{k=q_F}.
$$

В работах [43], [58], [59] Боголюбов с соавторами дал асимптотически точное (в термодинамическом пределе) решение модели БКШ теории сверхпроводимости

$$
H = \sum_q T_q a^+_q a_q - \frac{1}{2V} \sum_{p,q} J(p,q) a^+_p a^+_{-p} a_{-q} a_q, \tag{14}
$$

где $p = (k, \sigma)$, k – импульс, σ – спиновой индекс, $T_q = q^2/2m - \mu$, μ – химический потенциал, $J(p,q) = J(q,p) = -J(-p,q)$ – действительная функция. Замечательно, что точное решение модели с гамильтонианом (14) положило основу для дальнейшего развития целого направления, т.н. метода аппроксимирующего гамильтониана [89], [90]. Совместно с В.В. Толмачевым и Д.В. Ширковым [50] Боголюбов исследовал влияние кулоновского отталкивания электронов на сверхпроводимость.

Таким образом, в работах Н.Н. Боголюбова, независимо от работ Бардина, Купера и Шриффера, была построена последовательно микроскопическая теория сверхпроводимости ферми-систем. В 1958 году на основе этого представления Боголюбов открыл новый фундаментальный эффект сверхтекучести ядерной материи [48], являющийся основой современной теории ядра.

Исследования модельных задач в теории сверхпроводимости привело Боголюбова к формулировке специального метода компенсации опасных диаграмм и вариационного принципа в проблеме многих тел – принципа Хартри–Фока–Боголюбова [51]–[53], когда минимум энергии находят на более широком чем в методе Хартри–Фока классе функций, включающих волновые функции пар частиц.

В последние годы Н.Н. Боголюбов с учениками снова вернулся к проблеме сверхпроводимости, сделав попытку применить развитые им ранее методы к объяснению т.н. высокотемпературной сверхпроводимости [84], [86], [87]. Полученные в этих работах результаты представляются важными как с точки зрения развития методов Боголюбова в приложении к конкретным моделям, претендующим на микроскопическое описание высокотемпературной сверхпроводимости, так и с точки зрения возможности использования традиционных механизмов к объяснению этого весьма нетривиального явления.

Рассматривая вопрос об асимптотически точном решении задачи, описываемой модельным гамильтонианом БКШ [58], Боголюбов применил специальный технический прием, когда в исходный гамильтониан взаимодействия (14) вводится дополнительный оператор νU, где

$$U = \frac{1}{2}\sum_q h_q(a_{-q}a_q + a_q^+ a_{-q}^+), \qquad \nu \geq 0.$$

Этот оператор играет вспомогательную роль при отборе нужных решений, обеспечивающих наличие сверхпроводящей фазы при достаточно низких температурах. В окончательных результатах полагают $\nu = 0$. Этот на первый взгляд чисто технический прием дал возможность Боголюбову разработать мощный метод теории фазовых переходов, известный теперь как метод квазисредних Боголюбова [62], [63].

Идея метода квазисредних основана на том, что в задачах статистической механики, благодаря наличию аддитивных законов сохранения всегда имеется т.н. вырождение. Например, в случае ферромагнетика Гейзенберга при температурах ниже точки Кюри величина суммарного вектора намагничения отлична от нуля, направление же его может быть взято произвольно. В этом смысле состояние статистического равновесия является вырожденным. Аналогичная ситуация имеет место и в других системах, допускающих фазовый переход: сверхпроводники, сверхтекучие бозевские системы и т.д. Во всех этих системах при достаточно низких температурах добавление к гамильтониану бесконечно малых источников, снимающих вырождение (и, соответственно, нарушающих тот или иной аддитивный закон сохранения), вызывает конечное приращение средних значений динамических переменных. Эти идеи Боголюбов формулирует в виде общего принципа [62]. Пусть мы имеем некоторую макроскопическую систему с гамильтонианом H. Добавим к H бесконечно малые члены, соответствующие полям или источникам и нарушающие аддитивные законы сохранения, и получим таким образом некоторый гамильтониан $H_{\nu,\nu\to 0}$. Тогда, если все средние значения получают лишь бесконечно малые приращения, будем говорить, что рассматриваемое состояние статистического равновесия не вырождено. В противном случае, когда

$$\prec A \succ \equiv \lim_{\nu\to 0}\langle A\rangle_{H_\nu} \neq \langle A\rangle,$$

будем говорить о вырождении. Величина $\prec A \succ$ называется квазисредней. Важно, что при определении квазисредней, следует сначала выполнить термодинамический предельный переход $V \to \infty$, а затем уже устремить ν к нулю.

Боголюбов указывает, что при использовании обычной техники теории возмущений для случая вырожденных состояний статистического равновесия, следует прежде всего снять вырождение, или, что то же самое, рассматривать функции Грина, построенные из квазисредних, а не из обычных средних. В соединении с развитым Боголюбовым методом двухвременных температурных функций Грина [57] метод квазисредних, по-существу, является универсальным средством изучения систем, основное состояние которых неустойчиво относительно малых возмущений. Боголюбов доказал, что при спонтанном нарушении симметрии в системе всегда возникает дальний порядок, то есть фазовый переход. В частности, в модели неидеального бозе-газа, Боголюбов получил фундаментальный строгий результат, известный как теорема об особенностях типа $1/q^2$. Согласно этой теореме функции Грина имеют особенности типа const $/q^2$ в окрестности $q = 0$. Более точно имеет место неравенство:

$$\left| \ll a_q, a_q^+ \gg_{E=0} \right| \geq \frac{\rho_0 \mu}{4\pi \rho q^2},$$

где $\rho_0 = V^{-1} \langle a_0^+ a_0 \rangle$ – плотность конденсанта, ρ – плотность числа частиц в системе, μ – масса бозона. Данная теорема позволила решить принципиальный вопрос о структуре энергетического спектра низколежащих элементарных возбуждений в неидеальных бозе- и ферми-системах, а также доказать отсутствие фазового перехода в одно- и двумерных моделях. Метод квазисредних Боголюбова является конструктивным и достаточно общим методом теории фазовых переходов. Этот метод нашел широкое применение в теории поля [92], [108], [111], где на его основе получен такой впечатляющий результат, как построение единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В последнее время метод квазисредних получил новое развитие в теории фазовых переходов [105], [107]. В частности специальная форма этого метода позволила дать строгое доказательство бозе-конденсации для ряда нетривиальных моделей неидеального бозе-газа [95], [98].

Многие вопросы квантовой статистической механики, изучению которых Н.Н. Боголюбов посвятил свои многолетние усилия, нашли подробное освещение в книге [82]. Эта книга является одним из лучших и наиболее последовательных изложений квантовой статистики в современной научной литературе.

Подводя итог нашего краткого обзора научной деятельности Н.Н. Боголюбова в области статистической физики, следует безусловно отметить не только его выдающийся вклад в развитие буквально всех основных направлений этого раздела математической физики, но и огромные заслуги Боголюбова в становлении целых научных школ по статистической механике в нашей стране (Москва, Дубна, Киев, Ленинград, Львов) и за ее пределами (Бельгия, Болгария, Вьетнам, Германия, Голландия). Трудно найти отечественного специалиста по статистической механике, не считающего себя в той или иной мере учеником Николая Николаевича, и еще сложнее найти научную работу по статистической механике, в которой так или иначе не использовались бы фундаментальные идеи и методы Н.Н. Боголюбова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. Les mesures invariantes et la transitive. Paris: C.R. Acad. 1935. V. 201. №27. P. 1454–1456.

[2] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. Sur quelques theoremes de la theorie generale de la mesure. Paris: C.R. Acad. Sci. 1935. V. 201. №22. P. 1002–1003.

[3] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. Les mesures invariantes et transitives dans la mecanique non-lineare // Матем. сб. 1936. V. 1. №5. P. 707–710.

[4] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. Sur les proprietes ergodique de l'eguation de Smoluchovsky // Bull. Soc. math. France. 1936. V. 64, fs. 1/2. P. 49–56.

[5] Боголюбов Н. Н., Крилов Н. М. Загальна теорія міри в нелінійній механіці // Збірник праць з нелінійноїмеханіки. Записки кафедри математично фізики нституту будівельної механіки АН УРСР. Т. 3. 1937. С. 55–112.

[6] Боголюбов Н. Н., Крилов Н. М. Наслідки дії статистичної зміни параметрів на рух динамічних консервативних систем протягом досить тривалих періодів часу.Т. 3: Ibid., 1937.

[7] Боголюбов Н. Н., Крилов Н. М. Наслідки дії статистичної зміни параметрів в дносно ергодичних властивостей динамічних неконсервативних систем.Т. 3: Ibid., 1937.

[8] Боголюбов Н. Н., Крилов Н. М. Про повторювані ітерації зі змінними параметрами.Т. 3: Ibid., 1937.

Список литературы содержит работы Н.Н. Боголюбова по статистической механике [1]–[87] и некоторые работы, содержащие применение и развитие результатов Боголюбова [88]–[116].

[9] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. La theorie generale de la mesure dans sen application a l'etude des systemes dynamigues de la mecanigue non-lineaire // Ann. Math., Ser. 2. 1937. V. 38. №1. P. 65–113.

[10] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. Sur les probabilites en chaine. Paris: C.R. Acad. Sci. 1937. V. 204. №19. P. 1386–1388.

[11] Bogoluboff N. N., Kriloff N. M. Sur les proprietes ergodigues des suites de probabilites en chaine.V. 204: Ibid., 1937.

[12] Боголюбов Н. Н. Про деякі ергодичні властивості суцільних груп перетворень // Наук. зап. Київ. держ. ун-ту. 1939. Т. 4, вып. 5. №4. С. 45–52.

[13] Боголюбов Н. Н., Крилов Н. М. Про деякі проблеми ергодичної теорії стохастичних систем // Зап. каф. фізики АН УРСР. 1939. Т. 4. С. 243–287.

[14] Боголюбов Н. Н., Крилов Н. М. Про рівняння Фоккера-Планка, що виводяться в теорії пертурбацій методом, основаным на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана.Т. 4: Ibid., 1939.

[15] Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Об асимптотических неравенствах, приложимых к некоторым вопросам статистической динамики систем с весьма большим числом степеней свободы // Наук. зап. мех.-матем. фак. Київ. держ. ун-ту. 1941. Т. 5. С. 49–68.

[16] Боголюбов Н. Н. О влиянии случайной силы на гармонический вибратор // Уч. зап. МГУ. 1945. Т. 77, физика, кн. 3. С. 51–73.

[17] Боголюбов Н. Н. О некоторых предельных распределениях для сумм,зависящих от произвольных фаз: Ibid.

[18] Боголюбов Н. Н. Статистическая теория возмущений: Ibid.

[19] Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.

[20] Боголюбов Н. Н. Кинетические уравнения // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. №8. С. 691–702 ;// J. Phys. 1946. Т. 10. №3. С. 265–274.

[21] Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Л.: Гос.техн.-Теоретич. изд., 1946.

[22] Боголюбов Н. Н. Разложения по степеням малого параметра в теории статистического равновесия // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. №8. С. 681–690 ;// J. Phys. 1946. Т. 10. №3. С. 257–264.

[23] Боголюбов Н. Н. К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР, сер. физ. 1947. Т. 11. №1. С. 77–90 ;// УФН. 1967. Т. 93. С. 552–564.

[24] Боголюбов Н. Н., Гуров К. П. Кинетические уравнения в квантовой механике // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. №7. С. 614–628.

[25] Боголюбов Н. Н. Метод функціональних похідних в статистичній механіці І. Теорія стаціонарних станів // Зб. праць Ін-ту матем. АН УРСР. 1947. №8. С. 177–190.

[26] Боголюбов Н. Н. Методи нелінійної механіки в статистичній фізиці // Ювілейний збірник, присв. 30-річчю Великої Жовтневої соціалістичної революції. Київ: Вид-во АН УРСР. 1947.

[27] Боголюбов Н. Н. Энергетические уровни неидеального Бозе-Эйнштейновского газа // Вестн. МГУ. 1947. №7. С. 43–56.

[28] Bogolubov N. N. On the Theory of Superfluidity // J. Phys. 1947. V. 11. №1. P. 23–32.

[29] Боголюбов Н. Н. До теорії надплинності // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР. 1948. №9. С. 89–103.

[30] Боголюбов Н. Н. Застосування методів нелінійної механіки до проблем кінетики // Зб. праць Ін-ту буд. мех. 1948. №8. С. 3–17.

[31] Боголюбов Н. Н. Кинетические уравнения в теории сверхтекучести // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. №7. С. 622–630.

[32] Боголюбов Н. Н. Рівняння гідродинаміки в статистичной механіці // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР. 1948. №10. С. 41–59.

[33] Bogoluboff N. N. Zur Theorie der Superflussigheit // Sowjetwissenshaft. 1948. №1. P. 162–176.

[34] Боголюбов Н. Н. Лекції з квантової статистики. Питання стат. механіки квантових систем. Київ: Рад. школа, 1949.

[35] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. Метод теории возмущений вырожденного уровня в полярной модели металла // Вестн. МГУ. 1939. №3. С. 35–48.

[36] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И. О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия // ДАН СССР. 1949. Т. 66. С. 321–324.

[37] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. Об одном применении теории возмущений к полярной модели металла // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. №3. С. 251–255.

[38] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. Приближенный метод нахождения низких энергетических уровней электронов в металле: Ibid.

[39] Боголюбов Н. Н. Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // Укр. матем. журнал. 1950. Т. 2. №2. С. 3–24.

[40] Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих Бозе-частиц // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. №2. С. 129–139.

[41] Боголюбов Н. Н., Зубрев Д. Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле // Укр. матем. журнал. 1955. Т. 7. №1. С. 5–17.

[42] Боголюбов Н. Н. Уравнения с вариационными производными в проблемах статистической физики и квантовой теории поля // Вестн. МГУ. 1955. Т. 4/5, юбил. вып. С. 115–124.

[43] Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. К теории фазового перехода // Препринт ОИЯИ ЛТФ Р-110. 1957. С. 1–11 ;// ДАН СССР. 1957. Т. 117. №5. С. 788–791.

[44] Боголюбов Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости. III // Препринт ОИЯИ ЛТФ Р-99. 1957. С. 1–13 ;// ЖЭТФ. 1958. Т. 34. №1. С. 73–79.

[45] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. Приближенные методы вторичного квантования в квантовой теории магнетизма // Изв. АН СССР, сер. физ. 1957. Т. 21. №6. С. 849–853.

[46] Bogolubov N. N. On a New Method in the Theory of Superconductivity. I // Preprint JINR LTPh, R-94. 1957. P. 1–15 ;// Nuovo Cimento. 1958. V. 7. P. 794–805 ;// ЖЭТФ. 1958. V. 34. №1. P. 58–65.

[47] Боголюбов Н. Н. Вопросы теории сверхтекучести Бозе- и Ферми-систем // Вестн. АН СССР. 1958. №4. С. 25–29.

[48] Боголюбов Н. Н. К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи // ДАН СССР. 1958. Т. 119. №1. С. 52–55.

[49] Боголюбов Н. Н. К теории сверхпроводящего состояния // Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки. 1958. №1. С. 3–11.

[50] Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Матем. ин-т АН СССР им. В.А. Стеклова. Отд. теорет. физ., Р-139, 1958. М.: Изд-во АН СССР. 1958. С. 1–164.

[51] Боголюбов Н. Н. О принципе компенсации и методе самосогласованного поля // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Р-267. 1958. С. 1–49 ;// УФН. 1959. Т. 67. №4. С. 549–580.

[52] Боголюбов Н. Н. Об одном вариационном принципе в задаче многих тел // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Р-136. 1958. С. 1–11 ;// ДАН СССР. 1958. Т. 119. №2. С. 244–246.

[53] Боголюбов Н. Н., Соловьев В. Г. Об одном вариационном принципе в проблеме многих тел // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Р-262. 1958. С. 1–6 ;// ДАН СССР. 1959. Т. 124. №5. С. 1011–1014.

[54] Боголюбов Н. Н. Основные принципы теории сверхтекучести и сверхпроводимости // Вестн. АН СССР. 1958. №8. С. 36–46.

[55] Bogolubov N. N. Investigations of the Many-Body Problem and their Application to the Theory of Nuclear Matter // Proc. of the 2nd Internat. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy Gtneva, 1–13 Sept., 1958. V. 30: Fundament. Physics. Gtntva, United Nations. 1958. P. 59–64.

[56] Bogoluboff N. N. Uber die Verwendung von Variationsableitungen bei Problem der Statistischen Physik und der Quantentheorie der Felder // Fertschr. Phys. 1958. V. 6. №7/8. P. 426–435.

[57] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике // ДАН СССР. 1959. Т. 129. №1. С. 53–56.

[58] Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. №1. С. 120–129.

[59] Боголюбов Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости // Препринт ОИЯИ ЛТФ. МИАН, Р-511. 1960. С. 1–99.

[60] Боголюбов Н. Н. Разложение по степеням малого параметра в теории статистического равновесия // Хилл Т. Статистическая механика. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит. 1960.

[61] Bogolubov N. N. On Some Problems of the Theori of Superconductivity // Physica, suppl. to V. 26. 1960. P. S1–S16.

[62] Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Д-781. 1961. С. 1–123.

[63] Боголюбов Н.Н. О принципе ослабления корреляций в методе квазисредних // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Р-549. 1961. С. 1–149.

[64] Боголюбов Н.Н. К вопросу о гидродинамике в сверхтекучей жидкости // Препринт ОИЯИ ЛТФ, Р-1395 1963. С. 1–41.

[65] Боголюбов Н.Н. Уравнения гидродинамики в статистической механике // Уленбек Дж. Форд Дж. Лекции по статистической механике: Пер. с англ. М.: Мир. 1965. С. 281–303.

[66] Bogolubov N.N. A Study of the Dynamical Theorie in Statistical Physics. Dehli: Hindustan Publ., 1965.

[67] Bogolubov N.N. The Correlation Function in the Theory of Superconductivity. Киев: Наукова думка, 1967.

[68] Боголюбов Н.Н. О теории квазисредних // Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка. 1968.

[69] Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хапет Б.И. Математическое описание равновесного состояния классических систем, основанное на каноническом формализме // ТМФ. 1969. Т. 1. №2. С. 251–274.

[70] Боголюбов Н.Н. Избранные труды: В 3-х т.Т. 1. Киев: Наукова думка, 1969 ;Т. 2, 1970 ;Т. 3, 1971.

[71] Боголюбов Н.Н., Владимиров В.С. Математические проблемы теории поля и квантовой статистики // Вестн. АН СССР. 1973. Т. 6. С. 113–116.

[72] Боголюбов Н.Н. Микроскопические решения уравнения Больцмана-Энскога в кинетической теории для упругих шаров // ТМФ. 1975. Т. 24. №2. С. 242–247.

[73] Bogolubov N.N. On the Stochastic Processes in the Dynamical Systems // Preprint JINR LTPh, 17–10514. 1977. P. 1–130 ;// ЭЧАЯ. 1978. V. 9. №4. P. 501–579.

[74] Bogolubov N.N. Kinetic Eguations for the Electron-Phonon System // Preprint JINR, 17–11822. 1978. P. 1–70.

[75] Боголюбов Н.Н. Избранные труды по статистической физике. М.: Изд-во МГУ, 1979.

[76] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Обобщенное кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем // Препринт ОИЯИ, Д–12831. 1979. С. 337–362 ;// ТМФ. 1980. Т. 43. №1. С. 3–17.

[77] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н.(мл.) Введение в квантовую статистическую механику, Ч. 1. Дубна, 1980.

[78] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Введение в квантовую статистическую механику, Ч.2. Аспекты вторичного квантования и модельные системы в квантовой статистической физике. Дубна, 1980.

[79] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем // ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. №2. С. 245–300.

[80] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Аспекты теории полярона // Препринт ОИЯИ, Р-17-82-65. 1981. С. 1–132.

[81] Боголюбов Н.Н. О некоторых проблемах, связанных с обоснованием статистической механики // Препринт ОИЯИ, Д-17-81-758. 1982. С. 9–18.

[82] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.

[83] Bogolubov N.N., Bogolubov N.N. (Jr.) Some Approaches to Polaron Theorie // Found. Phus. 1985. V. 15. №11. P. 1079–1177.

[84] Bogolubov N.N., Aksenov V.L., Plakida N.M. On the Theory of Superconductivity in a Model of Oxide Metals // Preprint JINR, D17-88-76. 1988. P. 1–8.

[85] Bogolubov N.N. Some remarks on the Polaron Theory // Preprint JINR, E2-90-535. 1990. P. 1–20.

[86] Боголюбов Н.Н., Москаленко В.А. К вопросу о существовании сверхпроводимости в модели Хаббарда // Краткие сообщения ОИЯИ. 1990. №544. С. 1–28 ;// ТМФ. 1991. Т. 86. №1. С. 16–30.

[87] Боголюбов Н.Н., Москаленко В.А. Сверхпроводящее состояние модели Хаббарда // ДАН СССР. 1991. Т. 316. №5. С. 1107–1111.

[88] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.

[89] Боголюбов Н.Н.(мл.) Метод исследования модельных гамильтонианов. М.: Наука, 1974.

[90] Боголюбов Н.Н.(мл.) и др. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София: Изд-во БАН, 1981.

[91] Боголюбов Н.Н.(мл.), Садовников Б.И. Некоторые вопросы статистической механики. М.: Высшая школа, 1975.

[92] Вайнберг С. Идейные основы единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий // УФН. 1980. Т. 132. №2. С. 201–217.

[93] Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.

[94] Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.

[95] Санкович Д. П. Гаусова доминантность и фазовые переходы в системах с непрерывной симметрией // ТМФ. 1989. Т. 79. №3. С. 460–471.

[96] Синай Я. Г. Эргодические свойства газа одномерных твердых шариков с бесконечным числом степеней свободы // Функ. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. №1. С. 41–50.

[97] Фейнман Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1975.

[98] Bogolubov N. N. (Jr.), Sankovich D. P. Upper bound on the twopoint correlation function of a system of coupled anharmonic oscillators // Mod. Phys. Lett. B. 1991. V. 5. №1. P. 51–56.

[99] Boldrigini C., Pellegrinotti A., Triolo L. Convergence to a stationary states for infinite harmonic systems // J. Stat. Phys. 1983. V. 30. P. 123–155.

[100] Bratteli O., Robinson D. W. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. V. 2. New-York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[101] Davies E. B. Quantum Theory of Open Systems. London: Academic Press, 1976.

[102] Devreese J. The Polaron and the Boltzmann Eguation // Comm. JINR. 1979, D-12831. P. 363–381.

[103] Devreese J. T., Brosens F. and Evrard R. Canonical transformations for the exact diagonalization of a linear polaron model // Proc. of the 5-th Intern. Symp. on Topics of Stat. Mech. Dubna. 1989.

[104] Dobrushin R. L., Suhov Yu. M. On the problem of the mathematical foundation of the Gibbs postulate in classical statistical mechanics // Math. Probl. in Theor. Phys. Lecture Notes in Physics. V. 80. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. 1978. P. 325–340.

[105] Dyson F. J., Lieb E. N. and Simon B. Phase Transitions in Quantum Spin Systems with Isotopic and Non-Isotopic Interactions // J. Stat. Phys. 1978. V. 18. P. 335–383.

[106] Feinman R. P. Application of Quantum Mechanics to Liquid Helium // Progress in Low Temperature Physics / ed. C.J. Corter. V. 1. New York. 1955.

[107] Fröhlich J. The pure phases (harmonic functions) of generalized processes or: mathematical physics of phase transitions and symmetry breaking // Bull. of Amer. Math. Soc. 1978. V. 84. №2. P. 165–192.

[108] Goldstone J. Field Theories of Superconductor Solutions // Nuovo Cimento. 1961. V. 19. №1. P. 154–162.

[109] Goldstein S., Lebowitz J. L. Ergodic properties of an infinite system of particles moving independenty in a periodic field // Comm. Math. Phys. 1974. V. 37. №1. P. 1–18.

[110] Haake F. Statistical Treatment of open Systems by Generalized Master Equation // Springer Tracts in Modern Physics. 1973. V. 66. P. 1–98.

[111] Higgs P. W. Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons // Phys. Rev. 1966. V. 145. №4. P. 1156–1163.

[112] Jaynes E. T. Informational theory and statistical mechanics. I // Phys. Rev. 1957. V. 106. №4. P. 620–630.

[113] Jaynes E. T. Ibid. II // Phys. Rev. 1957. V. 108. №2. P. 171–190.

[114] Lanford O. E., Lebowitz J. L. Time evolution and ergodic properties of harmonic systems // Dynamical systems, theory and applications, Lecture Notes in Physics. V. 38. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Yerlag. 1975. P. 144–177.

[115] Nakajima S. On Quantum theory of transport phenomena // Progr. Theor. Phys. 1958. V. 20. P. 948–957.

[116] Zwanzig R. Statistical mechanics of irreversibility. Lectures in theoretical physics (Boulder). V. 3. New York–London: Interscience publ., 1960.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
29.06.1994