1994 г. сентябрь — октябрь *т. 49, вып. 5(299)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

21 августа 1994 года исполнилось 85 лет со дня рождения выдающегося математика и физика-теоретика современности, академика Николая Николаевича Боголюбова. Редакция включила в данный том журнала серию обзорных статей, охватывающих ряд важных направлений его научного творчества и написанных коллегами и учениками Николая Николаевича.

УДК 517.9

О ВКЛАДЕ Н.Н. БОГОЛЮБОВА В ТЕОРИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.В. Аносов

Влияние Н. Н. Боголюбова на развитие теории динамических систем было многосторонним в тематическом отношении и разнообразным по своему характеру. Имеются очевидные случаи прямого влияния: работа была посвящена некоторому вопросу теории динамических систем и впоследствии продолжалась или учитывалась другими авторами. Имеются случаи не столь очевидного косвенного влияния на работы, посвященные другой теме. Имеются и такие случаи, когда работа Н. Н. Боголюбова не оказала того прямого или косвенного влияния, какое по своему содержанию она могла бы оказать. (В какой-то степени это, увы, почти неизбежная обратная сторона медали, лицевая сторона которой – редкое разнообразие научных интересов. Но были и другие причины. С конца 30-х гг. надолго прекратились контакты с зарубежными коллегами. Далее, Н. Н. Боголюбов и его учитель и постоянный соавтор Н. М. Крылов обычно публиковали подробные статьи там, где работали. С одной стороны, это естественно, но, с другой стороны, едва ли кто-нибудь станет искать работы по эргодической теории в "Трудах Института строительной механики" (Киев), если только он не будет знать заранее, что там стоит поискать. И наконец, почему-то Н. Н. Боголюбов (до своего переезда в Москву) и Н. М. Крылов почти не публиковались в московских изданиях, в том числе и в "Докладах АН СССР", куда, казалось бы, Н. М. Крылов как академик мог представлять свои работы и работы своих учеников и где было бы естественно анонсировать результаты исследований, подробное изложение которых предназначалось для издания с не совсем подходящим названием.)

Я говорю здесь и о тех, и о других, и о третьих случаях, насколько они мне известны. Ради удобства изложения я иногда позволял себе изменять формулировки. Но это не меняет существа дела – переход от одних формулировок к другим не представлял никаких трудностей уже в то время, когда публиковались обсуждаемые работы Н. Н. Боголюбова.

Благодарю А. М. Степина за обсуждение этой статьи.

1. Между теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и теорией динамических систем нет сколько-либо четкой границы, даже такой, которая была бы условной, но более или менее общепризнанной. Несомненно, что некоторые более "абстрактные" вопросы относятся к теории динамических систем, и к ней же приходится относить и многие совершенно конкретные вопросы, явно не имеющие прямого отношения к дифференциальным уравнениям,– например, об итерациях отображения комплексной плоскости, задаваемого многочленом второго порядка. Но бывает и так, что некий вопрос относят к той или иной из этих теорий просто по традиции, причем традиции в разных местах могут быть разными.

Подобную неопределенность можно отметить в связи с рядом работ Н. Н. Боголюбова, посвященных развитию и обоснованию метода осреднения, инвариантным многообразиям (у самого Н. Н. Боголюбова и его последователей чаще встречается термин "интегральное многообразие"), методу ускоренной сходимости. (В творчестве Н. Н. Боголюбова эти темы появились в связи с развитием асимптотических методов нелинейной механики и оттого оказались тесно связанными друг с другом. У самого него эти связи всегда сохранялись, но и при их сохранении темы все-таки различны). Куда бы ни относить эти исследования Н. Н. Боголюбова, в настоящей статье о них не будет речи, поскольку при планировании настоящего выпуска "Успехов" было решено посвятить им другие статьи. Впрочем, в связи с инвариантными многообразиями я все-таки сделаю одно замечание о, так сказать, косвенном влиянии соответствующей части первой главы небольшой монографии Н. Н. Боголюбова [Бог1] (эта глава воспроизведена в более распространенной книге [БогМит1]).

Как известно, первыми из инвариантных многообразий были обнаружены и исследованы локальные устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических[1] положений равновесия и периодических траекторий, а также неподвижных и периодических точек отображений. Были рассмотрены и неавтономные аналоги этих объектов. Но, повидимому, до Н. Н. Боголюбова никто не рассматривал сразу целого семейства таких многообразий[2]. Конечно, у него это было сделано применительно к интересующей его задаче об инвариантном торе, причем не совсем явно, так что стоит остановиться на этом чуть подробнее.

В [Бог1] фигурируют инвариантные многообразия различных типов. Во-первых, инвариантный тор (не обязательно двумерный); его построение и исследование свойств лежащих на нем траекторий является основной целью исследования. Во-вторых, устойчивое и неустойчивое многообразия W^s, W^u этого тора. В-третьих, "сильно" устойчивые и "сильно" неустойчивые многообразия (во всем фазовом пространстве) различных траекторий, лежащих на торе; "сила" здесь состоит в том,

[1] Это слово употребляется здесь в том же общем смысле, как это стало обычным в теории гладких динамических систем (но как это отнюдь не практиковалось в то время, когда впервые появились инвариантные многообразия) – гиперболичность включает экспоненциальную устойчивость как частный случай.

[2] Задним числом можно сказать, что некоторое исключение представляют работы Г. А. Хедлунда и Э. Хопфа о геодезических потоках на многообразиях отрицательной кривизны (30-е гг.). Но в то время эти авторы исходили из геометрической специфики своей задачи и, насколько мне известно, не задумывались над связью с локальной теорией дифференциальных уравнений. Так что эта линия развития, имея более старинное происхождение – об орициклах и орисферах знали создатели неевклидовой геометрии – долго оставалась в стороне от интересующей нас темы.

что скорость сближения или разбегания траекторий на этом многообразии намного больше, чем скорость изменения расстояния между траекториями на торе. Изложение ведется в аналитическом стиле, вообще свойственном Н. Н. Боголюбову, однако я опишу, как можно геометрически понимать основные этапы построения тора. (Формально при этом я нарушу порядок изложения в [Бог1]). Сперва строятся W^s и W^u, а тор получается как их пересечение. (Здесь не исключается случай асимптотически устойчивого тора; в этом случае, в современных терминах, тор совпадает с W^u). Построение же W^s и W^u – это, по существу, построение некоторых семейств многообразий, которые позднее оказываются "сильно" устойчивыми и "сильно" неустойчивыми многообразиями траекторий, лежащих на торе; W^s и W^u являются просто объединениями соответствующих семейств. Наконец, если бы речь шла не о семействах многообразий, а просто о "сильно" устойчивом (неустойчивом) многообразии для одной траектории, то это был бы уже изученный к тому времени вопрос локальной теории[3]. Во избежание недоразумения повторяю, что формально в [Бог1] все это изложено на другом языке и в ином порядке: вначале выписываются и исследуются интегральные уравнения, определяющие тор, а W^s и W^u появляются позднее. Но эти интегральные уравнения распадаются на две группы, и одну из них (после тривиальных изменений) можно интерпретировать как определяющую W^s, а другую – W^u. Такая перефразировка, будучи по существу эквивалентной построению [Бог1], является более наглядной.

Н. Н. Боголюбов подчеркивал "прагматическое" значение инвариантных многообразий – они позволяют как бы разделить движения различных типов и тем самым снизить размерность задачи; кроме того, по сравнению с индивидуальными решениями инвариантное многообразие "является образованием, более стабильным по отношению к малым изменениям правых частей уравнений". Этим и вызвано обращение к инвариантным многообразиям в [Бог1]. Позднее та же мысль была отчетливо высказана в докладе Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского на Киевском международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в 1961 г. [БогМит2]. (Оттуда и взята приведенная цитата. Словосочетания "разделение движений" там нет, но по существу говорится о нем). Под "инвариантными многообразиями" тогда понимались в первую очередь инвариантные торы (и их неавтономные аналоги, которыми занимался Ю. А. Митропольский), но после того как данная мысль была отчетливо высказана, естественно подумать о "прикладном" значении также и других типов инвариантных многообразий (тем более что в доказательствах такое их значение уже начинало проступать).

---

[3]В доказательстве в [Бог1] применяется метод, ранее использовавшийся в локальной теории О. Перроном (отчасти еще А. М. Ляпуновым). Повидимому, Н. Н. Боголюбов придумал его самостоятельно – у него нет упоминания, что в иной (и более простой) ситуации нечто подобное уже встречалось, а ведь обычно он отмечал подобные случаи. Впрочем, ведь и И. Г. Петровский, который несколькими годами ранее занимался локальной теорией, не знал, что часть его результатов уже была получена тем же О. Перроном. Что же удивительного, что от внимания Н. Н. Боголюбова ускользнули работы, связь с которыми была не столь заметной. Одному человеку невозможно за всем уследить, а во время написания [Бог1] Н. Н. Боголюбов был одинок в идейном отношении. (Что, кстати, относится и к И. Г. Петровскому на протяжении значительной части его научной деятельности). Научного коллектива вокруг него тогда еще не сложилось; с другой стороны, если вначале Н. Н. Боголюбов работал вместе со своим учителем Н. М. Крыловым и кроме того тогда еще бывали контакты с зарубежными коллегами, то [Бог1] уже выходила за круг деятельности Н. М. Крылова, а контакты прекратились.

Как видно, кроме того, что было ясно выраженной целью работ [Бог1] и [БогМит2], в них можно найти еще некоторое предвосхищение двух идей, которые позднее, выступив в отчетливом и явном виде, сыграли заметную роль в развитии теории динамических систем – идеи о семействах устойчивых и неустойчивых многообразий, связанных с гиперболичностью, и идеи центрального многообразия. Если влияние [Бог1] и [БогМит2] на дальнейшее развитие того направления, к которому они относятся, было очевидным, то по поводу этих двух идей читатель вправе спросить, в какой степени содержащиеся в [Бог1], [БогМит2] предвосхищения способствовали формированию новых концепций? Ведь у гиперболической теории основными были другие истоки и ее первый провозвестник С. Смейл вначале едва ли много знал о работах Н. Н. Боголюбова, а центральное многообразие, как показывает название первой посвященной ему статьи В. А. Плисса [Пли], "вызревало" в недрах теории устойчивости.

Что касается центральных многообразий, в [Пли] имеется прямая ссылка на [Бог1] в связи с использованием аналогичного интегрального уравнения (и тоже, как ни странно, нет упоминаний о Перроне). Кроме того, "прагматический" подход В. А. Плисса к центральным многообразиям перекликается со сказанным выше о "прагматическом" значением инвариантных торов, но конечно у В. А. Плисса были свои основания для такой точки зрения. (С этой позиции не имеет значения, единственно ли центральное многообразие или нет. Теперь это кажется смешным, но в то время меня,– и, вероятно, не только меня,– шокировала неединственность центрального многообразия. В. А. Плисса она не шокировала, и он оказался прав).

Что касается гиперболической теории, то о прямом влиянии в данном случае едва ли можно говорить. Но косвенное влияние в какой-то степени было. Будучи не только очевидцем, но и участником соответствующих событий, сошлюсь на собственный опыт[4]. Я знал первую главу [Бог1] – ведь моя кандидатская диссертация была посвящена осреднению и кое в чем связана с первой главой [Бог1] (хотя и не с той ее частью, где существенны инвариантные торы). Был я знаком и с локальной теорией, каковое знакомство вначале ознаменовалось самостоятельным "открытием" теоремы Адамара – Перрона, – я был здесь не первым и не последним,– но затем приобрело более серьезный характер. К этому времени появилась теорема Д. М. Гробмана – Ф. Хартмана о локальной грубости гиперболических положений равновесия и неподвижных точек. В 1961 г. на том же симпозиуме в Киеве С. Смейл сформулировал гипотезу о грубости гиперболических автоморфизмов тора и геодезических потоков на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны. К весне следующего года мне удалось ее доказать, и это сыграло заметную роль в формировании гиперболической теории (см. замечания С. Смейла в [См]). Насколько я помню свои тогдашние размышления, чувствовалась аналогия этой гипотезы с теоремой Д. М. Гробмана – Ф. Хартмана, но эта аналогия не вызывала доверия – ведь теорема была явно локальной, а гипотеза глобальной. Я все-таки задумывался , не может ли здесь быть какой-то "настоящей" связи, несмотря на это "принципиальное различие". Я бы тогда не смог сказать, чего ради я порой вспоминаю (где-то "на краю сознания") о первой главе [Бог1] – какое отношение она имеет к этому вопросу? То отношение, что (как я теперь понимаю) там в другой обстановке было успешно преодолено (вернее, попросту не возникло)

[4]Здесь я говорю не обо всем процессе формирования новых концепций и даже не о своем участии в нем, а только о влиянии на меня (уж об этом-то я знаю), которое в этом отношении оказала работа [Бог1].

это "принципиальное различие": метод объективно восходит к локальной теории (и связан с гиперболичностью), а результат не такой уж локальный,– значит, так бывает!

Вероятно, в других статьях будут упомянуты проведенные позднее исследования отдельных компактных (замкнутых или имеющих край) инвариантных многообразий M, обладающих свойством нормальной гиперболичности. (Поведение траекторий в трансверсальных к M направлениях является гиперболическим и движения там происходят быстрее, чем сближение или разбегание траекторий на самом M. Как раз о таком их поведении и шла речь выше, когда говорилось об инвариантном торе из [Бог1].) Не останавливаясь подробнее на этих исследованиях, отмечу только следующее. Некоторые из авторов, работающих в этом направлении, пришли туда из уже сложившейся к тому времени гиперболической теории или, во всяком случае, несомненно находились под ее влиянием. Поэтому они с самого начала руководствовались соответствующей идеологией и пользовались соответствующими приемами. В связи с работами этих авторов может возникнуть вопрос: понятно, что постановки соответствующих задач можно считать развитием постановок, имевшихся в [Бог1], [Бог Мит2], но можно ли здесь говорить о преемственности также и в отношении методов, коль скоро последние (как сами эти авторы отмечают) заимствованы из гиперболической теории? (Тем более что часто используется метод, который в локальной теории восходит к Ж. Адамару и является альтернативным по отношению к методу О. Перрона). Ответ, по-моему, состоит в том, что в тех случаях, когда не было прямого влияния, можно говорить о косвенном влиянии, поскольку без него не обошлось при возникновении гиперболической теории.

2. Самая известная работа Н. Н. Боголюбова по теории динамических систем (по той части последней, о которой говорится в настоящей статье) – это его совместная с Н. М. Крыловым работа об инвариантных мерах топологического потока $\{\varphi_t\}$ в метрическом компакте E. Она сразу приобрела широкую известность – с одной стороны, ее содержание этого вполне заслуживало, с другой – внешние обстоятельства способствовали ознакомлению с ней широкого круга математиков у нас и за рубежом: работа анонсировалась в "Докладах Парижской Академии наук" и докладывалась на Международной топологической конференции в Москве в 1935 г., а полная публикация была осуществлена одновременно на Украине [КБ1] и за рубежом [КВ] (русский перевод имеется в [КБ2]; кроме того, работа подробно изложена в [НСт]). Ранее в эргодической теории исходили из того, что динамическая система имеет инвариантную меру. (Это могло проверяться для конкретной системы или класса систем; основной пример – инвариантность $2n$-мерной меры Лебега для гамильтоновых систем с n степенями свободы и соответствующей меры на многообразии постоянной энергии. Это могло постулироваться – в "абстрактной" эргодической теории с самого начала говорится что-нибудь вроде "пусть дана система с инвариантной мерой"). Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов внесли в эргодическую теорию новую струю, доказав существование инвариантных мер для широкого класса топологических динамических систем[5],

[5]Справедливости ради надо сказать, что еще до [КБ1] – [КБ2] вопрос о существовании инвариантной меры начал обсуждаться в чисто метрическом контексте (метрическом в смысле теории меры). Но и сейчас результаты, полученные в этом направлении, занимают какое-то промежуточное положение: формулировки условий бывают не лишены изящества, но практическая проверка их выполнения затруднительна.

а также рассмотрев совокупность всех инвариантных мер, которые имеет данная система.

Говоря о результатах [КБ1]–[КБ2] подробнее, их можно разделить на две группы. (Под "мерой" в настоящем п. всегда понимается "нормированная мера").

1) а) $\{\varphi_t\}$ имеет инвариантную меру.

б) Всякая такая мера является либо линейной комбинацией эргодических мер, либо пределом таких комбинаций (в смысле слабой сходимости; таковая означает слабую сходимость мер как функционалов, см. ниже).

При доказательстве а) в [КБ1] – [КБ2] используются следующие результаты функционального анализа (тогда относительно новые, а ныне классические и элементарные). Меру μ на E можно рассматривать как положительный линейный функционал на пространстве $C(E)$ непрерывных функций $E \to \mathbb{R}$:

$$f \mapsto \int_E f d\mu,$$

который принимает значение 1 на функции, тождественно равной 1. Множество $M(E)$ (нормированных) мер выпукло и компактно в смысле слабой (точнее,* -слабой) сходимости функционалов.

Рассмотрим меры $\mu_{T,x}$, связанные в этом смысле с функционалами

$$f \mapsto \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\varphi_t x)dt \tag{1}$$

(x – фиксированная точка E). Легко проверить, что слабая предельная (при $T \to \infty$) точка этих мер является инвариантной мерой. Так доказывается а). Что касается б), то в [КБ1] – [КБ2] б) получается в тесной связи со второй группой результатов, приводимой ниже.

Сразу же началось обсуждение других подходов к 1). Этот вопрос оказался связанным с начавшимся тогда же в функциональном анализе углубленным анализом выпуклости (которая, конечно, использовалась в нем с самого начала) и связанных с нею понятий, а также различных аспектов положительности. Как можно судить по нескольким работам Н. Н. Боголюбова, помещенным в том же томе "Избранных трудов", что и [КБ2], он в то время интересовался этой тематикой, получил некоторые результаты и принимал во внимание соответствующий подход при доказательстве некоторых результатов, связанных с теорией марковских процессов[6]. Однако окончательные результаты по указанным общим вопросам функционального анализа оказались связанными с другими именами (в СССР это в первую очередь М. Г. Крейн и Л.В.Канторович, а за границей – группа японских авторов, включая такого известного математика, как Ш. Какутани. Я не говорю здесь об их предшественниках, к числу которых относятся Г. Фрейденталь и Ф. Рисс). Видимо, к тому времени, когда пришла пора подводить итоги, интересы Н. Н. Боголюбова полностью переключились на

[6] Между прочим, в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по теории марковских процессов был получен один из ранних вариантов равномерной эргодической теоремы. Об этом уместно упомянуть в статье, где много говорится об эргодической теории, но по существу данная теорема используется не в теории динамических систем, а в теории вероятностей, так что в настоящей статье я ограничусь упоминанием.

статистическую физику. (Кроме того, я думаю, что его по большей части вполне устраивала "положительность" в смысле обычной положительности функций, чего и по сей день достаточно для большинства применений).

Применительно к а) обсуждения дали следующее. Рассмотрим сперва динамическую систему с дискретным временем (или, как я предпочитаю говорить, каскад[7]) $\{\varphi^n\}$, получающийся при итерировании гомеоморфизма $\varphi\colon E \to E$ (и обратного гомеоморфизма φ^{-1}). В этом случае существование инвариантной меры следует из теоремы А. Н. Тихонова о неподвижной точке непрерывного отображения выпуклого компакта в себя, примененной к отображению

$$M(E) \to M(E), \qquad \mu \mapsto \mu \circ \varphi.$$

(Это сразу заметили несколько человек). Для потока $\{\varphi_t\}$ нужны несложные дополнительные рассуждения (например, можно взять предельную точку инвариантных мер для $\{\varphi_{\frac{1}{2^n}}\}$). Естественно, далее, спросить, нельзя ли доказать существование инвариантной меры в том случае, когда речь идет не о непрерывном действии в E групп $\mathbb{Z}$ (каскад) или $\mathbb{R}$ (поток), а для действия более общих групп преобразований. Первый шаг в этом направлении сделал А. А. Марков [М], доказавший существование инвариантной меры у любой коммутативной группы гомеоморфизмов (более общо, у любого семейства коммутирующих замкнутых отображений) компакта (не обязательно метризуемого). Группа или семейство могут иметь произвольную мощность и никакой топологией не снабжаются[8]. А наиболее принципиальный шаг сделал сам Н. Н. Боголюбов [Бог2], [Бог3], понявший, что основную роль здесь играет введенное лет за 10 до того Дж. фон Нейманом свойство аменабельности.

Об аменабельных группах см. [Гр]. Это название появилось довольно поздно. В [Бог2], [Бог3] они называются банаховыми группами, поскольку характеризуются тем, что на них существуют банаховы средние, инвариантные относительно групповых сдвигов[9]. В то время других определений аменабельности еще не было. А ведь построение банахова среднего неконструктивно и существенно использует аксиому выбора. Можно придать ему откровенно трансфинитный характер, привлекая трансфинитную индукцию; можно слегка завуалировать этот характер, пользуясь теоремой Хана – Банаха о продолжении линейного функционала. Но так или иначе,

---

[7]Название "каскад", конечно, выбрано по контрасту с "потоком". Ниже будет идти речь о "динамических системах с неклассическим временем", т.е. о действии в E групп, отличных от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$. Если считаться с наличием таких более общих объектов, то выражение "динамическая система с дискретным временем" может означать только то, что группа дискретна, а не то, что она есть $\mathbb{Z}$.

[8]Реально переход к группам произвольной мощности повышает общность только в случае неметризуемого E. Как заметил С. В. Фомин [Ф], в произвольной группе гомеоморфизмов метризуемого компакта E имеется такая счетная подгруппа, что всякая мера на E, инвариантная относительно этой подгруппы, инвариантна относительно всей группы.

[9]Ныне принято включать в определение аменабельной группы еще требование локальной компактности. (Когда же этого не делают, то все равно данное требование фигурирует почти в каждой формулировке). В [Бог2], [Бог3] такого требования нет. Но хотя для целей этой работы его не нужно, сколько-либо продвинутая теория аменабельных групп получается в настоящее время при добавлении указанного требования, которое к тому же выполняется едва ли не во всех интересных примерах. Поэтому я буду считать, что аменабельность подразумевает локальную компактность.

у человека, не слишком склонного к теоретико-множественной математике, впечатление от тогдашнего определения аменабельности может (если не должно) быть кислым: какое отношение к "реальным" (с точки зрения математика классического стиля) свойствам группы имеет возможность или невозможность осуществления на ней некоей трансфинитной конструкции? Вероятно, Дж. фон Нейман считал, что свойство аменабельности все-таки вполне "реально", но, введя это понятие в связи с работами Ф. Хаусдорфа, С. Банаха и А. Тарского по теории меры, он к этой теме не возвращался. Работа Н. Н. Боголюбова появилась лет за 10 (если не более) до того, как аменабельностью занялись всерьез. Возможно, это был первый случай, когда аменабельность оказалась существенной в вопросе "неоклассического" характера. (И в то же время это была самая теоретико-множественная работа Н. Н. Боголюбова).

Можно добавить, что если для любого непрерывного действия локально компактной группы G на любом компакте E существует инвариантная мера, то G аменабельна. Теперь это, по-видимому, является общеизвестным фактом. Нужное рассуждение по другому поводу приведено в [Гр], параграф 3.3, и воспроизведено ниже. (А. М. Степин обратил внимание, что оно до некоторой степени похоже на обращение построения инвариантной меры, данного в [Бог2], [Бог3]. В излагаемой ниже редакции это особенно ясно. Сам Н. Н. Боголюбов данного вопроса не обсуждает. А.М.Степин сообщил мне также, что если G – счетная дискретная группа, то здесь можно заменить "компакт" на "метризуемый компакт"[10]. Соответствующее рассуждение длиннее, и в нем используются соображения, более далекие от [Бог2], [Бог3]; я его не привожу). Отсюда видно принципиальное значение аменабельности в задаче об инвариантной мере.

К сожалению, эта работа осталась незамеченной не только на Западе, но и у нас. О последнем свидетельствует статья С. В. Фомина, посвященная обобщению результатов [КБ1] – [КБ2] на более общие группы преобразований. В том, что касается существования инвариантной меры, С. В. Фомин получил менее общий результат, нежели тот, который был опубликован в [Бог2], [Бог3] десятью годами раньше. Ясно, что ни сам он, ни представивший его работу А. Н. Колмогоров либо не знали, либо забыли о работе Н. Н. Боголюбова.

Теперь известны другие (но эквивалентные) определения аменабельности, которые даже у человека с самыми "классическими" наклонностями не создают никаких дискомфортных ощущений. Первое из них предложил Е. Фелнер в 1955 г. В нем идет речь о некоторых системах подмножеств группы, которые теперь называют фелнеровскими системами. Они играют в некоторых отношениях примерно такую же роль, какую играют отрезки $[-T, T]$ для $\mathbb{R}$ – по множествам фелнеровской системы можно осреднять; при сдвиге на фиксированный элемент группы среднее по достаточно боль-

[10] В [Бог2], [Бог3] компакт E предполагается метризуемым, хотя по существу этого не нужно. Правда, при переходе к неметризуемым компактам возникают некоторые тонкости с понятием меры, согласованной с топологией. В данном случае нужно по-прежнему рассматривать те конечные меры, которые биективно соответствуют положительным линейным функционалам на $C(E)$; тонкости связаны с уточнением области определения и некоторых свойств этих мер. (Непосредственно указанным функционалам биективно соответствуют так называемые бэровские меры, которые при желании можно единственным образом продолжить до регулярных (и конечных) борелевских мер, причем таким путем получаются все меры последнего типа. Меры этих двух типов, равно как и исходные функционалы, называют также мерами Радона.) Вероятно, Н. Н. Боголюбов не видел необходимости рассматривать неметризуемые компакты и заниматься соответствующим уточнением понятия меры.

шим множествам почти не меняется; банаховы средние суть некие (неконструктивные) пределы таких осреднений; во многих случаях вместо этих неконструктивных предельных средних можно использовать более конструктивные объекты[11]. Так, чтобы доказать существование инвариантной меры для аменабельной группы гомеоморфизмов E, надо просто повторить рассуждения [КБ1] – [КБ2], заменив средние по $[-T, T]$ средними по подмножествам из фелнеровской системы. Подобное доказательство – непосредственное обобщение [КБ1] – [КБ2] – по-моему, является наиболее естественным с "неоклассической" точки зрения, но оно стало возможным только спустя примерно 15 лет после публикации [Бог2]. Вместо этого в [Бог2], [Бог3] проводится другое рассуждение, явно использующее инвариантные банаховы средние. Будучи, стало быть, выдержанным в ином стиле, оно тоже выглядит в наши дни вполне современным (в нем можно усмотреть зачаток теоремы Н. Риккерта (1967 г.) о неподвижной точке для аффинного действия аменабельной группы на выпуклом компакте в локально выпуклом линейном топологическом пространстве).

Приведу вкратце в модернизированном виде рассуждения Н. Н. Боголюбова и упомянутое выше доказательство необходимости аменабельности. Ограничимся вначале случаем дискретной G. Ниже $B(G)$ – пространство ограниченных функций на G с нормой $\|F\| = \sup |F(x)|$. Заметим, что G действует на $B(G)$ посредством отображения $(g, F) \mapsto {}_gF$, где ${}_gF(h) = F(g^{-1}h)$. Если же G действует на компакте E посредством гомеоморфизмов $\{\varphi_g\}$, то G действует на $C(E)$ посредством отображения $(g, f) \mapsto {}_gf$, где ${}_gf(x) = f(\varphi_g^{-1}x)$.

(i). Пусть аменабельная G действует на компакте E. Чтобы построить инвариантную меру на E, достаточно построить такое эквивариантное (относительно указанных действий G в $C(E)$ и $B(G)$) линейное отображение $\Phi\colon C(E) \to B(G)$, которое переводит 1 в 1 и $f \geq 0$ в $\Phi f \geq 0$. Действительно, тогда можно определить функционал μ на $C(E)$, которому отвечает инвариантная мера, как $\mu(f) = I(\Phi f)$, где I – левоинвариантное среднее на G (т.е. в $B(G)$). Чтобы построить Φ, возьмем какую-нибудь (нормированную) меру m на E (например, сосредоточенную в точке) и положим $(\Phi f)(g) = \int f(\varphi_g x) dm(x)$.

(ii). Наоборот, пусть известно, что при любом действии G на любом компакте E имеется инвариантная мера. Чтобы построить левоинвариантное среднее I на G, достаточно построить такой компакт E, такое действие G на E и такое эквивариантное отображение $\Psi\colon B(G) \to C(E)$, что $\Psi 1 = 1$ и $\Psi F \geq 0$ при $F \geq 0$. Действительно, тогда можно положить $I(F) = \int (\Psi F)(x) d\mu(x)$, где μ – какая-нибудь инвариантная мера. В качестве E возьмем множество всех положительных нормированных линейных функционалов на $B(G)$, снабженное $*$-слабой топологией. Если $x \in E$, то определим функционал $\varphi_g x$ как $(\varphi_g x)(F) = x({}_{g^{-1}}F)$. Наконец, положим $(\Psi F)(x) = x(F)$.

В общем случае локально компактной G вместо $B(G)$ используется пространство $UCB_r(G)$ право-равномерно непрерывных ограниченных функций. (Право-равномерная непрерывность функции F означает, что для любого $\varepsilon > 0$ имеется такая окрестность $U(\varepsilon)$ единицы группы, что $|F(g) - F(hg)| < \varepsilon$ при всех $g \in G$, $H \in U(\varepsilon)$). Это существенно для (ii) (тогда как в (i) можно использовать и более широкое про-

[11] С точки зрения последовательного конструктивизма они, конечно, тоже неконструктивны, но повидимому могут считаться "эффективными" в том смысле, как этот термин употреблял Н. Н. Лузин. "Повидимому" здесь сказано потому, что лузинская "эффективность" не является строго формализованным понятием.

странство – $L^\infty(G)$ или пространство $CB(G)$ ограниченных непрерывных функций). Существование левоинвариантного среднего на $UCB_r(G)$ – одно из эквивалентных определений аменабельности (эквивалентность более обычному условию существования левоинвариантного среднего на $L^\infty(G)$ или $CB(G)$ не является самоочевидным фактом, но доказана в [Гр]).

Что касается б), то геометрия выпуклых множеств также позволяет получить этот результат иначе, чем в [КБ1] – [КБ2]. Уже в [Бог2], [Бог3] отмечено, что эргодические меры – это просто крайние точки выпуклого компакта инвариантных мер. (Для более общих групп преобразований здесь возникает некоторая тонкость, связанная с тем, что различные варианты понятия эргодичности, совпадающие в случае "классического времени" (пробегающего $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$), могут не совпадать в случае более общих групп преобразований; см. далее. Отождествление эргодических мер с крайними точками отвечает одному из этих вариантов). С этой точки зрения б) оказывается частным случаем доказанной позднее теоремы М. Г. Крейна – Д. П. Мильмана о крайних точках[12]. О свойствах группы преобразований при этом вообще не приходится говорить (повторяю – не приходится говорить после того, как эргодические меры отождествлены с крайними точками выпуклого компакта инвариантных мер), а доказательство б) отсоединяется от второй группы результатов. (С другой стороны, связь с ними представляет интерес и сама по себе.)

Собственно, в [КБ1]–[КБ2] имеется несколько более сильное утверждение, чем б). Оказывается, инвариантная мера может быть представлена в виде некоторого интеграла от эргодических мер. При подходе с позиций геометрии выпуклых множеств здесь нужна уже не теорема М. Г. Крейна – Д. П. Мильмана, а теорема Г. Шоке – Э. Бишопа – К. де Лю. Информацию об этом см. в [Фе], гл. 10.

3. Вторая группа результатов [КБ1]–[КБ2] связана со следующими новыми понятиями. Для эргодической инвариантной меры μ определяется ее эргодическое множество как множество точек $x \in E$, для которых

в) При любых $f \in C(E)$ фигурирующее в (1) временнóе среднее стремится при $T \to \infty$ к $\int_E f d\mu$;

г) $\mu(U) > 0$ для любой окрестности U точки x.

Точка, для которой при любой $f \in C(E)$ существует предел временнóго среднего (1), называется квазирегулярной. Для такой точки этот предел имеет вид $\int_E f d\mu$, где μ – некоторая инвариантная мера, однако не обязательно эргодическая. Если она эргодическая, то точка называется транзитивной, а если выполняется г), то точкой плотности. При выполнении обоих этих условий точка называется регулярной[13], так что регулярные точки суть точки объединения всех эргодических множеств. В этих

[12] В [Бог2], [Бог3] используется некая более ранняя теорема Прайса, а чтобы "подогнать" рассматриваемую ситуацию под эту теорему, проводится небольшое дополнительное построение.

[13] Из определения следует, что движение регулярной точки по ее траектории обладает некоторым свойством "повторяемости". Регулярная точка x устойчива по Пуассону и, более того, для любой ее окрестности U траектория $\varphi_t x$ проводит в U при $|t| \le T$ не менее чем некоторую не зависящую от T долю общего времени:

$$\inf_{T>0} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\{t; |t| \le T, \varphi_t x \in U\} > 0$$

(mes – мера Лебега).

терминах вторая группа результатов в основном сводится к тому, что

2) Множество нерегулярных точек имеет меру нуль относительно любой инвариантной меры.

Кроме того, дается характеризация замыкания множества регулярных точек в иных терминах: это есть так называемый минимальный центр притяжения рассматриваемой динамической системы[14]. Он определяется как наименьшее замкнутое множество, обладающее тем свойством, что для любой его окрестности U и любой траектории $\varphi_t x$ средняя доля времени, проводимого $\varphi_t x$ в U при $|t| \leq T$ (т.е. среднее в (1), в котором за f взята характеристическая функция множества U), стремится к 1 при $T \to \infty$.

Разбиение множества регулярных точек[15] на эргодические множества, отвечающие различным эргодическим мерам, представляет собой наиболее сильную реализацию идеи о разложении динамической системы на эргодические компоненты. (Ту же идею можно реализовать и в чисто метрическом контексте; будучи более общей[16], такая реализация оказывается и более слабой).

Насколько известно, доказательства 2), в отличие от 1), не подвергались столь же значительному пересмотру с иных позиций; возможность обобщения тоже не анализировалась столь же полно.

При переходе от "классического" времени к "неклассическому" (будем в связи с этим писать $\{\varphi_g\}$ вместо $\{\varphi_t\}$) понятие эргодичности расщепляется на два. По традиции будем сейчас использовать слова "метрическая неразложимость меры μ" вместо "эргодичности μ". Как и обычно, речь идет о том, что если измеримое множество A инвариантно относительно $\{\varphi_g\}$, то либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(E \setminus A) = 0$. Варианты связаны с тем, что инвариантность A здесь можно понимать либо буквально ($A = \varphi_g(A)$ при всех g), либо как "инвариантность по модулю множеств меры 0": при любых g мера симметрической разности $\mu(A \,\Delta\, \varphi_g(A)) = 0$. Второй вариант инвариантности слабее, а потому второй вариант метрической неразложимости формально сильнее. Он эквивалентен тому, что μ является крайней точкой выпуклого компакта инвариантных мер. В классической ситуации (действие $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$) оба варианта метрической неразложимости совпадают; более того, они совпадают, если группа преобразований – локально компактная со счетной базой. (Мера при этом может быть и не конечной, а σ -конечной). Однако в общем случае они могут не совпадать. В [Ф] приведен соответствующий пример, принадлежащий А. Н. Колмогорову. Особенностью этого примера является то, что в нем имеется много инвариантных мер, но нет разбиения фазового пространства на эргодические множества. При каких условиях на группу

---

[14] Данное название предложено Г. Ф. Хильми, который по другому поводу обратил внимание на данный объект (см. [НСт]). Оно стало общепринятым, быть может потому, что намекает на связь с биркгофовским центром; и действительно, минимальный центр притяжения содержится в биркгофовском центре и может быть меньше него. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов не вводили специального названия для минимального центра притяжения, а говорили, что "движения $\varphi_t x$ являются статистически асимптотическими к замыканию множества регулярных точек".

[15] Поскольку в метрических вопросах множествами меры 0 обычно пренебрегают, 2) позволяет говорить о разбиении всего фазового пространства на эргодические компоненты.

[16] Впрочем, основной метрический результат такого рода можно получить как следствие результатов [КБ1] – [КБ2], поскольку сравнительно несложно доказать, что при соответствующих условиях измеримая динамическая система изоморфна некоторой топологической системе в метрическом компакте. См. [Ок].

(или, может быть, на действие) все-таки остается в силе результат Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова о разбиении на эргодические компоненты, мне неизвестно.

Выше речь шла об обобщениях, связанных с переходом от "классического" времени к "неклассическому". Фазовое пространство оставалось компактом (большей частью метризуемым). Другое направление связано с некомпактными фазовыми пространствами; время при этом остается "классическим". Такая динамическая система может не иметь конечных инвариантных мер. Дж. Окстоби и С. Улам указали необходимое и достаточное условие существования последних для динамической системы в полном сепарабельном метрическом пространстве. Грубо говоря, оно состоит в том, что некоторая точка проводит много времени в некотором компакте. В этом случае, как показал С. В. Фомин, сохраняются все основные результаты [КБ1]–[КБ2].

Хорошее изложение теории Н. М. Крылова – Н. Н. Боголюбова и некоторых последующих работ (но не вопросов, связанных с неклассическим временем) имеется в [Ок].

В общем случае теория ничего больше не говорит о свойствах инвариантных мер. Дело в том, что они могут быть самыми различными. Так, в одном случае эргодическая мера может быть сосредоточена в одной точке, в другом – быть положительной для всех открытых подмножеств E (тогда траектории почти всех точек всюду плотны) и обладать свойствами "квазислучайного" характера (перемешивание, положительная энтропия и т.д.). Во втором случае анализ подобных свойств меры относится к эргодической теории, тогда как обращение к ней в предыдущем случае было бы бессодержательным. Поэтому имеются исследования о существовании инвариантных мер с теми или иными интересными свойствами у динамических систем того или иного специального типа. Как мы увидим, Н. Н. Боголюбов косвенным образом оказался причастен к одной серии таких работ.

4. Равновесная статистическая физика основана на использовании распределения Гиббса. Это есть некоторая мера μ_N в фазовом пространстве системы, состоящем из N частиц, причем N очень велико, так что те физические величины, которые относятся к единице массы или объема, должны вычисляться "в термодинамическом пределе", когда $N \to \infty$ и соответственно увеличивается также и объем системы. С математической точки зрения естественно попытаться поступить так: с самого начала взять систему с бесконечным числом частиц и пользоваться мерой μ в соответствующем фазовом пространстве, которая в естественном смысле является предельной для μ_N (в связи с чем μ называют предельным гиббсовским распределением или предельной гиббсовской мерой для бесконечной системы). Реализация этого подхода не проста, но теперь он продвинут настолько, что начинают сказываться его достоинства. А первым шагом в этом направлении была опубликованная в 1949 г. небольшая заметка Н. Н. Боголюбова и Б. И. Хацета [БХ], модифицированное изложение которой было позднее включено в статью Н. Н. Боголюбова, О. Я. Петрины и Б. И. Хацета [БХП]. К сожалению, эти работы не сразу привлекли внимание математиков, которые пришли к исследованию соответствующего круга вопросов, отправляясь, в общем, от других задач и моделей, нежели Н. Н. Боголюбов и его соавторы. Но теперь новаторская роль [БХ] признана.

Хотя никаких свидетельств об этом нет, мне кажется, что у Н. Н. Боголюбова постановке вопроса о предельных распределениях в какой-то степени способствовал тот факт, что 10 годами ранее он обдумывал с различных позиций вопрос об инвариантных мерах в динамических системах (и, в частности, тоже проводил там некий предельный переход, – конечно, намного более простой).

Читатель может недоумевать по поводу этого небольшого экскурса в статистическую физику, поскольку настоящая статья посвящена вкладу Н. Н. Боголюбова не в эту науку, а в теорию динамических систем. Но дело в том, что некий аналог предельных гиббсовских распределений как бы перешел в теорию динамических систем.

Рассмотрим простейший пример статфизической системы – бесконечную (в обе стороны) одномерную цепочку, состоящую из частиц, каждая из которых может находиться лишь в одном из k возможных состояний. Состояние всей системы описывается двусторонне бесконечной последовательностью символов, каждый из которых может быть любым числом от 1 до k: последовательность $a = \{a_i\}$ описывает состояние цепочки, при котором i-ая частица находится в a_i-м состоянии. Совокупность Ω_k всевозможных таких последовательностей естественным образом снабжается топологией и оказывается метризуемым компактом. Сдвиг всей цепочки на 1 шаг налево (при котором не меняются состояния сдвигаемых частиц) описывается гомеоморфизмом $\sigma : \Omega_k \to \Omega_k$, переводящим a_i в b_i, где $b_i = a_{i+1}$. (После сдвига на i-м месте окажется частица, которая была $(i+1)$-ой и находилась в a_{i+1}-ом состоянии; теперь это состояние i-ой частицы). Энергия всей цепочки, скорее всего, бесконечна, но разумно считать, что можно говорить о конечном вкладе в эту энергию, "вносимом" каждой частицей как вследствие ее собственного состояния, так и вследствие ее взаимодействия с другими частицами, и что этот вклад не меняется при сдвиге цепочки. Сдвигами можно любую частицу перегнать на нулевое место, так что все определяется некоторой функцией $f(a)$, выражающей вклад нулевой частицы (он, вообще говоря, зависит от всей последовательности $a = \{a_i\}$, а не только от a_0). При достаточно естественных предположениях об f намеченная выше программа построения предельного гиббсовского распределения реализуется (см., напр., начало [Боу]; в данном случае, в отличие от более реалистических моделей, не возникает сколько-либо серьезных трудностей). Полученная мера μ в Ω_k оказывается трансляционно инвариантной, т.е. $\mu \circ \sigma = \mu$. (Сдвиг цепочки ничего не меняет). Посмотрим теперь на все это с иной точки зрения. Итерации σ (и σ^{-1}) образуют некоторую динамическую систему в Ω_k, и мы построили для нее обширное семейство инвариантных мер, зависящих (как от параметра конструкции) от функции $f : \Omega_k \to \mathbb{R}$. (Рассматриваемые с этой точки зрения, эти меры по-прежнему называются гиббсовскими). Суть здесь не в том, что мы построили много инвариантных мер – из других соображений известно, что класс всех инвариантных мер в данном случае огромен и далеко не исчерпывается гиббсовскими мерами. Суть в том, что гиббсовские меры, заведомо очень важные для статфизики, представляют значительный интерес также и для эргодической теории (априори это не очевидно). Их свойства удается изучить весьма полно и они оказываются интересными; кроме того, многие меры, представляющие интерес совершенно независимо от соображений "гиббсовского" типа, оказываются гиббсовскими мерами. Так что построение гиббсовских мер (или, может быть, лучше сказать: выделение гиббсовских мер среди всех инвариантных мер) – это своего рода подарок теории динамических систем от статистической физики.

В данном случае один и тот же объект является и динамической системой, и системой статфизики. Это, конечно, редкое совпадение. Я. Г. Синай модифицировал построение гиббсовских мер для динамических систем таким образом, что необходимость в таком совпадении отпала. Неизвестно, какими свойствами обладают эти меры для произвольных динамических систем, но для систем с гиперболическим поведением траекторий их значение примерно таково же, как и в предыдущем примере. Сам Я. Г. Синай рассмотрел гиббсовские меры для систем Аносова [Си], Р. Боуэн – для локально максимальных ("базисных") гиперболических множеств [Боу], Е. А. Сатаев – для аттракторов типа аттрактора Лоренца [Са].

5. Наконец, надо сказать несколько слов о работе Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [КБВер1], [КБВер2]. В ней доказана теорема, которую теперь называют "вероятностной эргодической теоремой". К сожалению, эта работа осталась практически незамеченной, и вероятностную эргодическую теорему спустя несколько лет переоткрыли на Западе (литературные ссылки см. у П. Халмоша [Х]). Доказательство, данное в [КБВер1], [КБВер2], фактически основано на конструкции косого произведения. (Такое же доказательство приводит и П. Халмош, который, как известно, всегда старался подобрать наилучший вариант изложения). Надо оговориться, что формально в [КБВер1], [КБВер2] рассматривались только косые произведения над каскадом Бернулли (не обязательно с конечным или счетным числом состояний). Однако на доказательстве это не сказывается.

Обычно косые произведения связывают с именем Х. Анзаи [An], рассмотревшего некоторые интересные примеры динамических систем, получающихся с помощью данной конструкции, и предложившего для нее само название "косое произведение" (по аналогии с одноименным топологическим понятием). Однако Х. Анзаи знал о более ранней работе Дж. фон Неймана, построившего с помощью конструкции косого произведения первый пример унитарно эквивалентных, но метрически не сопряженных эргодических динамических систем. (По установившейся позднее терминологии, это был первый пример системы с квазидискретным спектром). Более того, у Х. Анзаи указано, что пример Дж. фон Неймана стимулировал один из параграфов [An]. Сам Дж. фон Нейман не опубликовал своего примера, но (не говоря уже, что он приведен у Анзаи), уже в опубликованной ранее [An] статье П. Р. Халмоша [Hal] говорится не только о нем, но и вообще о системах с квазидискретным спектром (только еще без этого названия).Позднее П. Р. Халмош подробно изложил исследование этих систем, проведенное Дж. фон Нейманом и им, в книге [Х], раздел "Обобщенные собственные значения".

Таким образом, введение косых произведений у Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, с одной стороны, и Дж. фон Неймана, П.Р.Халмоша и Х.Анзаи – с другой, было связано с различными целями – доказательство некоторого общего результата или открытие неожиданного явления. В настоящее время косые произведения достаточно часто употребляются по обоим поводам, но в течение ряда лет использование их в доказательстве вероятностной эргодической теоремы было единственным примером их привлечения для получения "положительного" общего результата[17].

[17]Во второй раз косые произведения сыграли роль "общего" характера, повидимому, только когда В. А. Рохлин обнаружил следующий факт: эргодические автоморфизмы широкого класса пространств с мерой (пространств Лебега) метрически изоморфны некоторым косым произведениям над любыми своими факторавтоморфизмами. Все необходимое для доказательства этого факта имелось в [Р1], но повидимому только позднее – в [Р2] – В. А. Рохлин явно сформулировал этот факт (и добавил те несколько фраз, которые надо добавить к [Р1] для законченного доказательства).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Бог1] Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН СССР, 1945.

[БогМит1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.

[БогМит2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР. 1963. С. 93–154.

[Пли] Плисс В. А. Принцип сведéния в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №6. С. 1297–1324.

[См] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. №1. С. 113–185.

[КБ1] Крилов М. М., Боголюбов М. М. Загальна теорія міри та ii застосування до вівчения динамичніх систем нелінійній механіці // Збірник праць з нелінійної механіки. Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. Т. 3. 1937. С. 55–112.

[КВ] Kryloff N., Bogoliuboff N. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire // Ann. Math. 1937. V. 38. №65–113.

[КБ2] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Общая теория меры в нелинейной механике // Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. I. Киев: Наукова думка. 1969. С. 411–463.

[НСт] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат 1949.

[М] Марков А. А. Некоторые теоремы об абелевых множествах // ДАН СССР. 1936. Т. 1. №8. С. 299–302.

[Ф] Фомин С. В. О мерах, инвариантных относительно некоторой группы преобразований // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1950. Т. 14. №3. С. 261–274.

[Бог2] Боголюбов М. М. Про деякі ергодичні властивості суцільних груп претворень // Наукві записки КДУ ім. Т.Г. Шевченко. Фізико-матем. збірник. 1939. Т. 4. №3. С. 45–53.

[Бог3] Боголюбов Н. Н. О некоторых эргодических свойствах непрерывных групп преобразований // Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. I. Киев: Наукова думка. 1969. С. 561–569.

[Гр] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973.

[Фе] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.

[Ок] Окстоби Д. Эргодические множества // УМН. 1953. Т. 8. №3. С. 75–97.

[БХ] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И. О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия // ДАН СССР. 1949. Т. 66. №3. С. 321–324 Боголюбов Н. Н. // Избранные труды. Т. II. Киев: Наукова думка. 1970. С. 494–498.

[БХП] Боголюбов Н. Н., Петрина О. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // ТМФ. 1969. Т. 1. №2. С. 251–274.

[Боу] Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.

[Си] Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН. 1972. Т. 27. №4. С. 21–64.

[Са] Сатаев Е. А. Инвариантные меры для гиперболических отображений с особенностями // УМН. 1992. Т. 47. №1. С. 147–202.

[КБВер1] Крилов М. М., Боголюбов М. М. Наслідкі дії статистичної зміни параметрів на рух динамічних консервативних систем протягом досить трівалих периодів часу // Записки кафедри математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР. 1937. Т. 3. С. 119–135.

[КБВер2] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Результат действия статистического изменения параметров на движение динамических консервативных систем в течение достаточно длительного времени // Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. I. Киев: Наукова думка. 1969. С. 464–479.

[X] Халмош П. Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1959.

[An] Anzai H. Ergodic skew product transformations on the torus // Osaka Math. J. 1951. V. 3. №1. P. 83–99.

[Hal] Halmos P. R. Measurable transformations // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. №11. P. 1015–1034.

[P1] Рохлин В. А. Избранные вопросы метрической теории динамических систем // УМН. 1949. Т. 4. №2. С. 57–128.

[P2] Рохлин В. А. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1960. Т. 15. №4. С. 3–26.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
29.04.1993