ISSN 0234-5366



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

N 3 [23] -87

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ОИЯИ

JINR RAPID COMMUNICATIONS





Объединенный институт ядерных исследований JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

№ 3[23]-87

KPATKNE COODEMEHNA ONAN JINR RAPID COMMUNICATIONS

Сборник collection



Дубна 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ CONTENTS

А.Т.Филиппов
О локализации канонических преобразований
в теории релятивистских частиц
A.T.Filippov
Gauging of Canonical Transformation in the Relativistic Particle Theory5
A.N.Sissakian, N.B.Skachkov, I.L.Solovtsov, O.Yu.Shevchenko
Infrared Singularities of Fermion Propagator and Their Connection with the Wilson Loop
А.Н.Сисакян, Н.Б.Скачков, И.Л.Соловцов, О.Ю.Шевченко
Инфракрасные особенности фермионного пропагатора
и их связь с петлей Вильсона
N.B.Skachkov, O.Yu.Shevchenko
The Lorents Condition as a Secondary Gauge Condition and Its Application for the Field Quantization
Н.Б.Скачков, О.Ю.Шевченко
Условие Лоренца как вторичное калибровочное условие
и его использование при квантовании полей
С.И.Виницкий, В.И.Коробов, И.В.Пузынин
Уточнение уровней энергии слабосвязанных
вращательно-колебательных состояний мезомолекул ddµ и dtµ
S.I.Vinitsky, V.I.Korobov, I.V.Puzynin
More Accurate Calculation of the Energy Levels of Weakly Bound
Rotation-Vibrational States of Mesic Molecules $dd\mu$ and $dt\mu$
E.F.Hefter, V.G.Kartavenko
Evolution of Cold Dense Nuclear Matter
Э.Ф.Хефтер, В.Г.Картавенко
Эволюция холодного сжатого ядерного вещества
В.А.Кузьмин
Вычисление энергетически-взвешенных моментов
для приближения случайных фаз V.A.Kuzmin
Evaluation of the Energy-Weighted Moments in the Random
Phase Approximation

Н.Н.Боголюбов (мл.), П.А.Поляков, М.А.Тасев	
Теория радиационного затухания электромагнитных волн	1
в релятивистской магнитоактивной плазме в приближении	
"горячей" гидродинамики	
N.N.Bogolubov, Jr., P.A.Polyakov, M.A.Tassev	
The Theory of Radiative Attenuation of Electromagnetic Waves	
in Relativistic Magnetoactive Plasma	
in Hot Hydrodynamics Approximation	

. 41

Краткие сообщения ОИЯИ №3(23)-87 УДК 530.11

О ЛОКАЛИЗАЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

А.Т.Филиппов

Теория свободных релятивистских частиц формулируется посредством локализации линейных канонических симметрий простейшего билинейного лагранжиана. Соответствующая неабелева калибровочная группа содержит репараметризации и преобразования Вейля. Этот подход может быть применен также для построения калибровочной теории частиц со спином и теории струны.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Gauging of Canonical Transformation in the Relativistic Particle Theory

A.T.Filippov

A relativistic theory of particles is formulated by gauging the linear canonical symmetries of the simplest bilinear lagrangian. The resulting non-abelian group includes reparametrizations and Weyl transformations. The approach can be used for constructing a gauge theory of spinning particles as well as for string theories.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Разработка теории суперструн привела к необходимости пересмотра некоторых из основных понятий обычной локальной теории поля. Особое внимание привлекает проблема связи между квантовой теорией одной релятивистской частицы и соответствующей квантовой теорией поля. Дело в том, что переход от квантовой теории одной релятивистской струны ("первично" квантованная теория) к теории квантованного поля взаимодействующих струн ("вторично" квантованная теория) оказался весьма не тривиальным. Например, в работах^{/1-3/} этот переход основывается на новой, более приспособленной к нуждам теории струн формулировке рецепта перехода от одночастичной релятивистской теории к квантовой теории поля. Наиболее существенно в этой формулировке выявление калибровочной природы теории релятивистской частицы, предложенное в работе ^{/4/} (см. также более четкое обсуждение калибровочной группы для частицы со спином в^{/5/}). Калибровочный характер теории проявляется в наличии связей, которые порождают калибровочно-подобные симметрии (репараметризации). Аналогично можно сформулировать и теорию струны ^{/8 /}.

Хотя калибровочная природа релятивистской теории частиц в принципе выяснена, желательно было бы представить соответствующую калибровочную группу в максимально простой и явной, стандартной форме. Кроме того, полезно попытаться найти подход к построению теории частиц и теории струны, более полно использующий калибровочный принцип. Иными словами — получить калибровочно-инвариантную теорию посредством стандартной процедуры локализации некоторой глобальной группы симметрии исходной теории. Эти задачи и решаются в предлагаемом сообщении.

Рассмотрим скалярную частицу в d-мерном пространстве с псевдоевклидовой метрикой. Простейший лагранжиан имеет вид

$$L_{o} = \frac{1}{2}\dot{q}^{2}; \quad \dot{q}^{2} = \dot{q}^{\mu}\dot{q}_{\mu} = (\dot{q}^{i})^{2} - (\dot{q}^{o})^{2}, \quad \mu = 0, 1, ..., d, \quad (1)$$

где q^{μ} -координаты частицы, а точка обозначает дифференцирование по параметру ^t. Несмотря на формальную инвариантность относительно преобразований Лоренца $q^{\mu} \rightarrow L^{\mu}_{\nu} q^{\nu}$, эта теория не является правильной теорией релятивистской частицы. Хорошо известно, что для описания релятивистской частицы с массой ^m необходимо взять лагранжиан $L_0 = m \sqrt{-\dot{q}^2}$. Соответствующее действие инвариантно относительно произвольных репараметризаций. Поэтому в работах ^{/4,6/} было предложено положить в основу требование репараметризационной инвариантности. Тогда лагранжиан для массивной частицы можно взять в виде

 $L_{o} = \frac{1}{2}\dot{q}^{2}/e - em^{2},$

где е-новая переменная, подобная калибровочному полю.

С принципиальной точки зрения, такой подход нельзя признать удовлетворительным. Во-первых, исходная релятивистская динамика предполагается уже известной, она лишь записывается в другой форме. Во-вторых, придается слишком важное значение группе репараметризаций, представляющей сложный математический объект и не имеющей непосредственного отношения к физике. Наконец, даже если признать за полученной моделью статус калибровочной теории, ее формулировка слишком сильно отличается от стандартных, что особенно неприятно при переходе к квантовой теории с взаимодействием. В связи с этим мы предлагаем другой подход к построению теории свободных релятивистских частиц, основанный на локализации очевидных канонических симметрий лагранжиана (1). Определим канонические импульсы $p_{\mu} = \partial L_{o} / \partial \dot{q}^{\mu}$ и запишем лагранжиан (1) в виде

$$L_{0} = p\dot{q} - \frac{1}{2}p^{2} = \frac{1}{2}(p\dot{q} - pq) - \frac{1}{2}p^{2} + \frac{1}{2}(pq)^{2}.$$
 (2)

С точностью до граничных условий, которые всегда легко восстановить, полную производную в правой части (2) можно отбросить. Рассмотрим преобразования, относительно которых действие инвариантно. Как известно, их можно представить в форме

$$\delta p = -\frac{\partial G}{\partial q}, \quad \delta q = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad G = G(p, q; a).$$
 (3)

Здесь a_i — некоторые параметры, которые сначала предполагаются не зависящими от t. Их зависимость от t приведет к нарушению инвариантности относительно (3), причем

$$\delta L_{o} = \frac{1}{2} \dot{a}_{i} (p \partial_{p} + q \partial_{q}) \frac{\partial G}{\partial a_{i}} . \qquad (4)$$

В частном случае однородных канонических преобразований, относительно которых инвариантна и форма $\frac{1}{2}$ (pq-pq), размерность G равна 2, так что

$$p\partial_p G + q\partial_q G = 2G, \qquad \delta L_o = \dot{a}_i \frac{\partial G}{\partial a_i}.$$
 (5)

Сосредоточимся теперь на линейных преобразованиях. Они порождаются квадратичной по р и q функцией G, ее общий вид

$$G = \frac{1}{2}a_1p^2 + a_2(pq) + \frac{1}{2}a_3q^2.$$
 (6)

Соответствующее инфинитезимальное каноническое преобразование есть

$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{a}_{\mathbf{p}} \mathbf{p} - \mathbf{a}_{\mathbf{q}} \mathbf{q}, \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{a}_{\mathbf{1}} \mathbf{p} + \mathbf{a}_{\mathbf{p}} \mathbf{q}. \tag{7}$$

7

Если положить $\Psi^{T} = (p, q)$, то преобразование (7) можно записать в матричном виде

Здесь F — произвольная вещественная бесследовая матрица. Такие генераторы порождают группу SL(2, R) - SU(1, 1). Легко видеть, что лагранжиан L₀ инвариантен лишь относительно ее абелевой подгруппы, определяемой условием $\delta p = 0$, т.е.

$$\delta \mathbf{p} = 0, \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{a}_1 \mathbf{p} \,. \tag{9}$$

Если предположить, что a 1 зависит от t , то согласно (4) получим

 $\delta L_0 = \frac{1}{2} a_1 p^2$ Для компенсации этой добавки введем компенсирующее калибровочное поле ℓ_1 . Новый лагранжиан

$$L_{1} = \frac{1}{2}(pq - pq) - \frac{1}{2}\ell_{1}p^{2}, \qquad (10)$$

инвариантен относительно преобразований с произвольной функцией $a_1(t)$, если при этом

$$\delta \ell_1 = \dot{a}_1. \tag{11}$$

Процедуре перехода от лагранжиана (1) к калибровочно-инвариантному лагранжиану (10) посредством локализации преобразования (9) можно придать совершенно стандартную форму, переписав кинетическую часть лагранжиана L_о в виде

$$L_{o} = \frac{1}{4} \left(\Psi^{T} i \sigma_{2} \frac{d\Psi}{dt} - \frac{d\Psi^{T}}{dt} i \sigma_{2} \Psi \right) + \dots, \qquad (12)$$

где σ_2 — стандартная матрица Паули. Так как генератор преобразования (9) есть матрица $F_1 = a_1 \sigma_-$, где $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$, то вводя калибровочное поле $A = \ell_1 \sigma_-$ и "удлиняя" производную в (12), получим калибровочно-инвариантный лагранжиан

$$L_{1} = \frac{1}{4} \{ \Psi^{T} i \sigma_{g} \left(\frac{d}{dt} - A \right) \Psi - \left[\left(\frac{d}{dt} - A \right) \Psi \right]^{T} i \sigma_{g} \Psi \},$$
(13)

		ь.
- 3		е.
- 4	п	ь

совпадающий с (10). Калибровочные преобразования теперь имеют также стандартный вид. Для линейных канонических преобразований $\Psi' = U\Psi$ имеем $U^{T}i\sigma_{2} U = i\sigma_{2}$. Отсюда следует, что лагранжиан (13) инвариантен относительно этих преобразований, если

 $A' = UAU^{-1} + UU^{-1}$

В нашем простом случае конечное преобразование совпадает с (9), и его матрицу U = U₁ легко написать:

 $U_1 = 1 + a_1 \sigma_-, \quad U_1^{-1} = 1 - a_1 \sigma_-.$

Нетрудно убедиться, что лагранжиан (11) дает теорию релятивистской скалярной частицы с нулевой массой. Легко также понять, что процесс локализации глобальных симметрий в этом случае можно продолжить. Действительно, лагранжиан (10) инвариантен относительно еще одной подгруппы SL(2, R), если допустить линейное преобразование калибровочного "потенциала" ℓ_1 :

$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{a}_2 \mathbf{p}, \qquad \delta \mathbf{q} = \mathbf{a}_2 \mathbf{q}, \qquad \delta \boldsymbol{l}_1 = 2\mathbf{a}_2 \boldsymbol{l}_1 \cdot \mathbf{q}$$
(15)

В этом преобразовании легко узнать растяжения, относительно которых p, q и ℓ_1 имеют соответственно размерности -1, +1, +2. Локализация этого преобразования приводит в итоге к теории с калибровочным полем

$$A = \ell_1 \sigma_- - \ell_2 \sigma_3, \qquad (16)$$

которое преобразуется согласно правилу (14) с матрицей

$$U = e^{-a_2\sigma_3} (1 + a_1 e^{-a_2}\sigma_-).$$
(17)

Легко найти, что лагранжиан (13) сводится к

$$L_{2} = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{1}{2}\ell_{1}p^{2} - \ell_{2}(pq).$$
(18)

Как видно из (17), эта теория — неабелева, просто преобразуется лишь калибровочный потенциал $l_2: \delta l_2 = a_2$.

Неабелеву калибровочную теорию (18) можно квантовать стандартными методами. Наиболее удобно воспользоваться квантованием в расширенном фазовом пространстве ^{/7,8/}. Ввиду возможности появления аномалий, такая теория заслуживает отдельного рассмотрения. Предложенный подход можно попытать-

(14)

ся использовать для описания массивных калибровочных частиц; а также для калибровочной формулировки релятивистской задачи

двух тел (например, если добавить к (2) член $\frac{1}{2}kx^2$, можно прийти

к калибровочной теории релятивистского осциллятора, естественно обобщаемой на случай двух частиц). Так как наша основная цель — струна, мы оставляем эти возможности в стороне.

Сформулированный выше подход легко применить к теории частиц со спином. Простейший лагранжиан имеет вид /4,6/

$$L_{o} = \frac{1}{2}(\dot{pq} - \dot{pq}) - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} - \frac{1}{2}p^{2}, \qquad (19)$$

где ψ^{μ} – грассмановы переменные (однокомпонентные или двухкомпонентные). Группы линейных канонических преобразований в этом случае есть OSp $(1,1/2)^*$. Локализация преобразований выполняется точно так же, как и в случае скалярной частицы. Введем $\Psi^{T} = (p, q, \psi)$ или $\Psi^{T} = (p, q, \psi_1, \psi_2)$ и заменим в (12) матрицу і σ_{0} на матрицу

 $\Gamma = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i1 \end{pmatrix}.$

Построив суперматрицу преобразований симметрии лагранжиана (19) и введя соответствующее калибровочное поле A, можно получить суперкалибровочно-инвариантный лагранжиан (13). В простейшем случае, когда ψ — однокомпонентная грассманова переменная, находим лагранжиан, постулированный в $^{/4,6/}$:

$$L_{1} = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} - \frac{1}{2}\ell p^{2} - \frac{i}{2}\chi(p\psi), \qquad (20)$$

где χ — грассманова часть калибровочного поля. Аналогично строится и более общая суперкалибровочная теория для двух-компонентных грассмановых величин ψ^{μ} . Более подробное обсуж-

^{*} Алгебра этой группы играет чрезвычайно важную роль в новых конструкциях перехода от теории частиц к теории поля, развиваемых в работах /9, 10! Однако происхождение и смысл этой алгебры, по-видимому, имеют иную природу, не связанную непосредственно с каноническим преобразованием.

дение возникающих здесь новых возможностей и формулировка квантовой теории будут опубликованы отдельно. Здесь отметим, что предложенный подход можно применить к теории бозонной и фермионной струны. В первом случае лагранжиан обычной струны Д'Аламбера после локализации линейных канонических преобразований дает стандартную калибровочную теорию релятивистской струны ^{/6, 11 /}. Вероятно, более подробный анализ позволит глубже понять происхождение вейлевой симметрии этой теории (в нашей формулировке теории релятивистской частицы вейлева симметрия (15) также была получена локализацией канонических преобразований). Наконец, явная калибровочноинвариантная теория релятивистской частицы может оказаться полезной для обнаружения новых связей между "первично" и "вторично" квантованными теориями частицы и струны.

За полезные обсуждения и замечания автор благодарен А.П.Исаеву и П.Таунсенду.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Siegel W. Phys. Lett., 1985, 151B, p.391, 396.
- 2. Siegel W., Zwiebach B. Nucl. Phys., 1986, B263, p.105.
- Itoh K. et al. Prog. Theor. Phys., 1986, 75, p.162.
 Hata H. et al. Phys. Lett., 1986, 172B, p.186, 195.
- 4. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. Nucl. Phys., 1977, B118, p.76.
- 5. Sokatchev E. Prepr. JINR E2-10645, Dubna, 1977.
- 6. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. Phys. Lett., 1976, 65B, p.471; Deser S., Zumino B. – Phys. Lett., 1976, 65B, p.369.
- Вилковыский Г.А., Фрадкин Е.С. В сб.: Нелинейные, нелокальные и неперенормируемые теории поля. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
- 8. Monaghan S. Phys. Lett., 1986, 178B, p.231.
- Siegel W., Zwiebach B. Nucl. Phys., 1987, B282, p.125;
 Siegel W. Prepr. UMDEPP 87-60, College Park, 1987.
- 10. Neveu A., West P. Prepr. CERN-TH 4547/86, 4564/86, Geneva, 1986.
- 11. Polyakov A.M. Phys. Lett., 1981, 103B, p.207.

Рукопись поступила 9 марта 1987 года.

Краткие сообщения ОИЯИ №3 (23)-87 УДК 530.145

INFRARED SINGULARITIES OF FERMION PROPAGATOR AND THEIR CONNECTION WITH THE WILSON LOOP

A.N.Sissakian, N.B.Skachkov, I.L.Solovtsov¹, O.Yu.Shevchenko²

> The factorization of infrared singularities of gauge-invariant spinor propagator is proved in the framework of QED. It turns out that this infrared factor coincides with the Wilson loop and accumulates all the dependence on the form of the path of the initial Green function.

> The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Инфракрасные особенности фермионного пропагатора и их связь с петлей Вильсона

А.Н.Сисакян, Н.Б.Скачков, И.Л.Соловцов, О.Ю.Шевченко

Показана факторизация инфракрасных особенностей калибровочно-инвариантного спинорного пропагатора в КЭД. Установлено, что при этом инфракрасный множитель совпадает с петлей Вильсона и аккумулирует всю зависимость от контура исходной функции Грина.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

The present work is devoted to the study of infrared asymptotics of a gauge-invariant (GI) spinor Green function. The interest in this problem comes from the hope that the problem of quark confinement in the framework of QCD can be solved in this way (see, for instance $^{1-4/}$, and the references, therein). Usually the standard fermion propagator $<0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0>$ is studied that, as it is well-known $^{15/}$, is a gauge-dependent quantity. Thus, as it is shown, for example, in $^{16/}$, the infrared asymptotics of such a propagator is defined by the vacuum average of the path-exponential along the unclosed path.

- ⁷ Gomel Politechnical Institute
- ² Saratov State University

At the same time it is known that the infrared behaviour of the complete fermion propagator essentially depends on the gauge choice. Thus, for example, in the Abelian case in the class of covariant *a*-gauges the fermion propagator has a branch point at $p^2 = m^2$, which only at a=3 (Soloviev-Yennie gauge) leads to a pole singularity of the propagator. That is why one can conclude that a consistent study of the gauge-theories should be done on the basis of the gauge-independent quantities. In particular, instead of the standard spinor propagator one can consider a gauge-invariant Green function^{*}

$$G^{GI}(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{C}) = -\langle 0|\mathbf{T}\psi(\mathbf{x})\mathcal{P}\exp\{-ie\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}dz^{\mu}A_{\mu}(z)\{\overline{\psi}(\mathbf{y})|0\rangle.$$
(1)

In contradistinction with the standard propagator the Green function (1) contains the exponential with the path integral taken over the gauge field along an arbitrary path C that connects the points x and y. Our aim consists in studing the infrared behaviour of the path-dependent gauge-invariant propagator (1).

Let us use the representation (1) in a form of the functional integral over the spinor and vector fields

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{C}) =$$

$$= -\int D[\psi, \overline{\psi}] \cdot DA \cdot \psi(\mathbf{x}) \mathscr{P} \exp \{ -ie \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz \,^{\mu}A_{\mu}(z) \} \overline{\psi}(\mathbf{y}) .$$
(2)

Here the integration measure over the gauge field DA includes some gauge condition

$$DA = DA \cdot \delta[f(A)]$$
(3)

the explicit form of which due to the gauge independence of (1) is not essential. Performing in (2) the integration over the fermionic fields we get (with $f(A) = \partial^{\mu}A_{\mu}(\mathbf{x})$)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}) = \int \overline{\mathbf{D}} \mathbf{A} \cdot \delta(\partial^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}) \cdot \frac{\det[\gamma^{\mu} \mathbf{D}_{\mu} - \mathbf{m}]}{\det[\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - \mathbf{m}]} \times \\ \times \exp[-\mathbf{S}_{o}(\mathbf{A})] \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{A}) \cdot \exp[-i\mathbf{e} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}(z)],$$
(4)

^{*} We consider QED in Euclidean space-time.

where $S_0[A]$ is the Euclidean action of the free electromagnetic field $S_0[A] = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$; $D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$, i.e., is a covariant derivative, and G(x, y|A) is the Green function of the electron in an external field A_{μ} , which satisfies the equation

$$[D_{\mathbf{x}} - \mathbf{m}] G(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{A}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

In what follows we shall represent the field A_{μ} in accordance with $^{/7/}$ as a sum of slowly and rapidly varying components $A^{(1)}_{\mu}$ and $A^{(0)}_{\mu}$. Then in (5) we shall make use of the formula $^{/7/}$

$$G(x, y | A^{(0)} + A^{(1)}) \simeq G(x, y | A^{(1)}) \cdot \exp[ie \int_{x}^{y} dz^{\mu} A^{(0)}_{\mu}(z)], \qquad (5)$$

that is valid in the infrared limit. The integration in (5) is performed along the piece of the straight line Π that connects the points x and y:

$$\Pi; \quad z^{\mu} = x^{\mu} + s(y - x)^{\mu}, \quad 0 \le s \le 1.$$
(6)

With account of formula (5) and the approximate relation det $[D - m] \times \det^{-1} [\partial - m] = 1$, that holds for the infrared limit, it is not difficult to show that the propagator (4) can be represented as a product of two factors

$$G^{GI}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C}) = \mathbf{J}^{UV} \mathbf{J}^{IR} .$$
⁽⁷⁾

Here the first factor $J^{UV}(UV$ -ultraviolet) is the quantum Green function obtained only with account of the rapidly varying field $A^{(1)}_{\mu}$. The second factor J^{IR} (IR — infrared) is obtained with account of slowly varying component $A^{(0)}_{\mu}$ only. It reflects the interaction with the soft photons and thus contains the infrared singularities. This factor has the form

$$J^{IR} = \int DA^{(0)} \cdot \exp[-ie \oint_{L} dz^{\mu} A^{(0)}_{\mu}(z)], \qquad (8)$$

where $\oint_{L} dz A_{\mu}^{(0)}(z)$ is the integral over the <u>closed</u> (in the contradistinction with $^{6/}$) path L = C + II of the form

$$L = C + \Pi = \frac{x}{y} + \int_{y}^{x} = \int_{y}^{x}$$

It is not difficult to see that the expression (11) is nothing but the Wilson loop $J^{IR} = W(L)$, where

$$W(L) = \langle 0 | T \exp\{-ie \oint_{L} dz^{\mu} \cdot A^{(0)}_{\mu}(z) \} | 0 \rangle.$$
(9)

Thus, we have arrived to an interesting conclusion that all the properties of the infrared behaviour of the gauge-invariant propagator (1) are accumulated in the Wilson loop (9).

Let us consider, as an example, a particular choice of the path C as the piece of the straight line from the point x up to the point y^* . With such a choice of the path the propagator (1) takes the form

$$G^{GI}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{C} = \mathbf{\Pi}) = - \langle 0 | \mathbf{T} \psi(\mathbf{x}) \times \\ \times \exp\left[ie \int_{0}^{1} da(\mathbf{y} - \mathbf{x}) {}^{\nu} \mathbf{A}_{\nu} (\mathbf{x} + a(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \right] \cdot \overline{\psi}(\mathbf{y}) | 0 \rangle , \qquad (10)$$

where the integration in the exponential is performed along the piece of the straight line $C = \prod_{xy}$ of form (6). It is clear that in this case

$$\oint_{\mathbf{L}} d\mathbf{z}^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} d\mathbf{z}^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{z}) + \int_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} d\mathbf{z}^{\mu} \cdot \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{z}) = 0$$

so $J^{IR} = 1$. Thus, additional infrared singularities (like a branch point) that appear due to the interaction with the "soft" photons do not appear here, and the Fourier transform of the propagator $G^{GI}(x, y | C = \Pi)$

in the infrared limit has a simple pole $G^{GI}(p|C=\Pi) \sim \frac{1}{\hat{p}+m}$. This result exactly agrees with that of the calculation of the infrared asymptotics of the propagator (1) done in $\frac{18}{2}$.

REFERENCES

- 1. Pagels H. Phys.Rev., 1977, D15, p.2991.
- Baker M., Ball Y.S., Zachariasen F. Nucl. Phys., 1981, B186, p.531; Nucl. Phys., 1983, B229, p.445.

* With such a choice of the path C the propagator (1) coinsides with the standard propagator $<0|T\psi(\mathbf{x})\overline{\psi}(\mathbf{y})|_{0>}$ if the fields A, ψ and $\overline{\psi}$ are taken in the

gauge $(r - (\frac{x+y}{2})) = 0$, that is a particular case of the Fock gauge (see $\frac{8}{2}$).

- 3. Arbuzov B.A. Phys.Lett., 1983, B125, p.497.
- 4. Efimov G.V. Infrared Asymptotics and Confinement. JINR Preprint P2-84-716, Dubna, 1984.
- Bogolubov N.N., Shirkov D.V. Introduction into the Theory of Quantized Fields, M., Nauka, 1976.
- 6. Korchemsky G.P., Radyushkin A.V. Infrared Asymptotics of Perturbative QCD. Quark and Gluon Propagators. JINR E2-85-901, Dubna, 1985.
- 7. Popov V.N. Continual Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics, M., Atomizdat, 1976.
- 8. Skachkov N.B., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. JINR Rapid Comm., No.10-85, 1985, p.13; Sov.Jour.Theor. Math. Phys., 1987, v.70, No.4, p.571.

Received on April 20, 1987.

Краткие сообщения ОИЯИ №3(23)-87 УДК 530.145

THE LORENTS CONDITION AS A SECONDARY GAUGE CONDITION AND ITS APPLICATION FOR THE FIELD QUANTIZATION

N.B.Skachkov, O.Yu.Shevchenko*

The quantization of a free electromagnetic field is performed by using a secondary gauge condition. It is proved that in contrast with the standard approach the generating functional of the Green function must contain two δ -functions with the gauge conditions under the sign of the functional integration in configurational space.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Условие Лоренца как вторичное калибровочное условие и его использование при квантовании полей

Н.Б.Скачков, О.Ю.Шевченко*

Осуществлено квантование свободного электромагнитного поля с учетом вторичного калибровочного условия. Доказано, что, в отличие от стандартного подхода, производящий функционал функций Грина должен содержать под знаком функционального интеграла в конфигурационном пространстве две δ -функции с калибровочными условиями. Это приводит к существенной модификации стандартной диаграммной техники.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

In our previous work $^{/1/}$ a general theorem was proved that claims that Yang-Mills field A_{μ} , after imposing on it an arbitrary gauge condition $\Phi(A) = 0$, does satisfy one more complementary condition. This condition in QED has the form **

$$\partial^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{x}) = 0.$$

(1)

Saratov State University.

** Condition (1) holds for a free electromagnetic field that is just quantized in the framework of the perturbation theory. At the presence of the interaction the spinor current enters into the right-hand side of the secondary gauge condition (1) (see 1). In a non-Abelian case (1) is substituted by the condition $\overline{\partial}^{\mu} A_{\mu} = 0$, were $\overline{\partial}_{\mu}$ is the Mandelstam derivative.

Due to the fact that the relation (1) has been derived allowing for the primary gauge condition $\Phi(A) = 0$ together with the equation of motion it has the sense of the secondary constraint and therefore is named by us as the secondary gauge condition. (Let us remind that the secondary constraints by definition $^{2/}$ are obtained from the primary ones taking account of the equations of motion).

The proof of this general theorem, in $^{/1/}$ is based on the existence of the conditions of field decreasing at infinity that have the from

 $A_{\mu}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|^{1+\epsilon}}; \quad \mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{x}_{0}^{2} - \mathbf{x}^{2}}; \quad 0 < \epsilon \leq 1, \quad (2)$

and that are necessary for combining the requirement of the finite of action with the possibility of using the integration by parts, that is in turn necessary for constructing the perturbation theory.

In $^{/1/}$ we have performed a modification of the known methods of the vector field quantization: the Dirac — Bergmann method and the method of the operator quantization by including the secondary gauge condition (1) into the system of constraints. But the most rigorous quantization method is that of the quantization by a functional integral starting directly from the phase space. In the present paper we shall perform such a quantization taking account of the secondary gauge condition (1). While doing this the difference between our approach and Faddeev — Popov method would become clear. It consists, as it will be shown below, in consistency of our quantization procedure by functional method with the physicas condition on the gauge field asymptotics.

Let us perform the quantization procedure for the free electromagnetic field with the Lagrangian density

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} \mathbf{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \mathbf{A}_{\mu}).$$

The corresponding density of the canonical Hamiltonian has the form

$$H(x) = \frac{1}{4} F^{ij}(x) F_{ij}(x) - \frac{1}{2} \pi^{i}(x) \pi_{i}(x) - A_{0}(x) \partial^{i} \pi_{i}(x), \quad (3)$$

where $\pi^{\mu}(\mathbf{x}) = \partial \mathfrak{L}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{A}_{\mu}(\mathbf{x})$ is the canonical momentum. In accordance with the general quantization procedure for the constrained sys-

tems $^{/3-5/}$ we have the following espression for the matrix element of the S-matrix in the extended phase space Γ^* :

$$\begin{aligned} &\langle \operatorname{out} | \mathbf{S} | \operatorname{in} \rangle \sim \int \prod_{\mu} \mathrm{D} A_{\mu} \, \mathrm{D} \pi^{\mu} \, \delta(\phi_{1}(\mathbf{A}, \pi)) \, \delta(\phi_{2}(\mathbf{A}, \pi)) \times \\ &\times \, \delta(\chi_{1}(\mathbf{A}, \pi)) \, \delta(\chi_{2}(\mathbf{A}, \pi)) \cdot \det || \phi_{1}, \chi_{j} ||_{i,j=1,2} \times \\ &\times \, \exp\left[\pi^{\mu} \, \dot{\mathbf{A}}_{\mu} - H_{0}(\mathbf{A}, \pi)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle \operatorname{exp}\left[\pi^{\mu} \, \dot{\mathbf{A}}_{\mu} - H_{0}(\mathbf{A}, \pi)\right], \end{aligned}$$

$$\end{aligned}$$

where $\phi_1 = \pi_0$ is the primary constraint, $\phi_2 = \partial^1 \pi_1$ is the secondary constraint and χ_1, χ_2 are additional gauge conditions that satisfy the relations $\{\chi_1, \chi_2\} = 0$, det $||\phi_1, \chi_1|| \neq 0$.

Let us consider for example the case when the field A_{μ} obeys the temporal gauge condition $\chi_1 = A_0$ (as the primary gauge condition). Then, due to the general theorem $^{\prime 1\prime}$ the field A_{μ} has to obey, on the equations of motion, at the same time the secondary gauge condition (1) that in this particular case, due to the conservation of the condition $\chi_1 = A_0$ in time, takes the form of the Coulomb condition $\chi_2 = \partial^{\mu} A_{\mu} = \partial^{i} A_{i}$. Thus, the system of the second class constraints has the form **

$$\phi_1 = \pi_0 \approx 0$$
 — primary constraint; $\chi_1 = A_0 \approx 0$ — primary gauge (5) condition;

 $\phi_{2} = \partial^{i} \pi_{i} \approx 0 - \text{secondary} \qquad \chi_{2} = \partial^{i} A_{i} \approx 0 - \text{secondary} \qquad (6)$ constraint; gauge condition,

that formally does not differ from an analogous system of constraints used in the framework of the standard approach $\stackrel{4,5}{\rightarrow}$ for the case of the so-called "radiational gauge" ($A_0 = 0$, divA = 0). But there exists an essential difference between our and the standard approaches. Firstly, in the standard spproach one has to use the residual gauge arbitrariness to complete the primary condition $A_0 = 0$ by the condition div $\vec{A} = 0$. As it has been shown by us in $\stackrel{1}{}$, the residual gauge arbitrariness in the gauge $A_0 = 0$ is not compatible with the physical boun-

^{*} As usually the sing "-" means the definition up to the normalization factor that in the general case may appear to be an infinite constant.

^{**} The sing " \approx " means the equivalence to zero in a weak sense, i.e. after opening the Poisson brackets $\frac{12}{2}$.

dary conditions (2). There it has been also shown that the condition $\partial^i A_i^T = 0$ is the sequence of the imposing of uniqually achieved gauge condition $\partial^i A_o = 0$, on the field A_μ and the Maxwell equations only $(A_\mu^T = A_\mu + \partial_\mu \Lambda^T (A, \mathbf{x}))$, where $\Lambda^T(A, \mathbf{x}) = \int_0^\infty d_a \cdot A_o(\mathbf{x}_0 + a, \mathbf{x})$ is the projector on the gauge $A_o^T = 0$. The residual gauge arbitrariness is completely absent in this case.

The next important fact follows from this circumstance: the condition $\chi_2 = \partial^i A_i \approx 0$ is the only possible condition that completes the system $\phi_1 = \pi_0 \approx 0$, $\phi_2 = \partial^i \pi_i \approx 0$, $\chi_1 = A_0 \approx 0$ up to the system of the second class constraints.

Taking into account (6) and combining the constant det $||\phi_i(t, \vec{x}), \phi_j(t, \vec{y})||_{i,j=1,2} = \det ||\delta_{ij} \nabla^2 \delta(\vec{x} - \vec{y})||$ with the normalization factor, we shall obtain instead of (4) the relation

$$< \operatorname{out} | \mathbf{S} | \operatorname{in} > \sim \int \mathbf{D} \mathbf{A}^{\mu} \mathbf{D} \pi_{\mu} \cdot \delta(\pi_{o}) \cdot \delta(\partial^{1} \pi_{i}) \delta(\mathbf{A}_{o}) \times \\ \times \delta(\partial^{1} \mathbf{A}_{i}) \cdot \exp i[\pi^{1} \mathbf{A}_{i} - \mathbf{H}_{o}(\mathbf{A}, \pi)],$$
(7)

Formula (7) itself does not lead to physical consequences. In order to develop the diagram technique, one has to pass to the configurational space performing the integration over the canonical momenta π . Just at this principal step there appears the main difference between our approach and the standard method $^{/3/}$.

Let us remind that in the standard approach the integrals over π_0 and A_0 are easily taken with the help of $\delta(\pi_0)$ and $\delta(A_0)$ functions and then the measure $\prod DA_i$ is reconstructed up to the complete integration measure $\prod DA_{\mu}$ with the help of the integral representation of $\delta(\partial^{i}\pi_{i}): \delta(\partial^{i}\pi_{i}) =$

 $= \int DV \exp[i \int d^4 x V(x) \partial^i \pi_i]$. Thus as a result of the Gauss integration over $\vec{\pi}$, one obtains in the standard approach the following formula:

$$< \operatorname{out} |S| \text{ in } > - \int \prod_{\mu} DA_{\mu} \cdot \delta(\partial^{i} A_{i}) \exp[i \int d^{4}x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)\right)], \quad (8)$$

where A_0 is chosen to be $A_0 \equiv V$.

We consider this prescription to be logically inconsistent because it is based on the substitution of the truly dynamical variable A_0 (that is canonically conjugated to the momentum π_0 and satisfies the physical boundary condition (1)) by the completely arbitrary function V. It leads to the necessity of the correct account of the Gauss law while integration over the canonical momenta. For this purpose we shall use the well-known integral representation for the functional δ -function

$$\delta(f[A]) = \prod_{\mathbf{x}} \delta(f[A(\mathbf{x})]) = \lim_{a \to 0} \prod_{\mathbf{x}} \frac{1}{\sqrt{-2i\pi a}} \exp\left(-\frac{1}{2a} \{f[A(\mathbf{x})]\}^2\right) = (9)$$

- $\lim_{a \to 0} \exp\left(-\frac{1}{2a} \int d^4 \mathbf{x} \{f[A(\mathbf{x})]\}^2\right).$

After performing in (7) the integration over π_0 and using the representation (9) for $\delta(\partial^{i}\pi_{i})$ let us perform the Gauss integration over $\vec{\pi}$. We obtain as a result

$$< \text{out} | S| \text{ in } > \ \int_{\mu} \prod D \mathbb{A}_{\mu} \, \delta(\mathbb{A}_{0}) \, \delta(\partial^{i} \mathbb{A}_{i}) \times$$
⁽¹⁰⁾

× exp[-i
$$\int d^{4}x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) exp[-\frac{i}{2} \int d^{4}x d^{4}y A^{i}(x) K_{ij}(x-y) A^{j}(y)];$$

where the Fourier transform $K_{ii}(\vec{p})$ of the kernel $K_{ii}(x - y)$ of the quadratic form is

$$\widetilde{K}_{ij}(\vec{p}) = \delta_{ij} - \frac{P_i P_j}{\vec{p}^2}.$$
(11)

Due to the condition $\partial^{i} A_{i} = 0$ and the boundary conditions (2), the second term in the right-hand side of (11) gives the zero contribution to (10). Taking account of this circumstance and the fact that due to the condition $A_{o} = 0$ (that must hold at any world point) the next relation $\partial^{i} A_{a} = 0$ takes place, we obtain the next final expression

$$< \text{out} \mid \mathbf{S} \mid \text{in} > \neg \int \prod_{\mu} D\mathbf{A}_{\mu} \,\delta(\mathbf{A}_{o}) \,\delta(\partial^{i} \mathbf{A}_{i}) \exp\left[i \int d^{4} \mathbf{x} \left(-\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{\mu\nu}(\mathbf{x})\right)\right).$$

In (12) in contrast with the standard relation (8) two δ -functions $\delta(A_0)$ and $\delta(\partial^i A_i)$ are put together under the integration sign, which leads to the principle difference of the diagram technical appearing in our approach from the standard one. Really, due to (12) the generation functional of the photon Green functions (that are free in the limit of the sources $J^{\mu} \rightarrow 0$) would have the form

$$\mathbf{G}[\mathbf{J}] \sim \int \prod_{\mu} \mathbf{D} \mathbf{A}_{\mu} \,\delta(\mathbf{n}^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}) \,\delta(\partial^{\mu} \mathbf{A}_{\mu}) \times \mathbf{v}$$

$$\times \exp\left\{i \int d^4 \mathbf{x} \left[-\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \left(\mathbf{x}\right) \mathbf{F}_{\mu\nu} \left(\mathbf{x}\right) + \mathbf{J}^{\mu} \left(\mathbf{x}\right) \mathbf{A}_{\mu} \left(\mathbf{x}\right)\right],\tag{13}\right\}$$

where we have introduced the vector n = (1,0,0,0) to give a covariant form for the formula. With the help of representation (9) for the functional δ -functions $\delta(n^{\mu} A_{\mu})$ and $\delta(\partial^{\mu} A_{\mu})$ we get in a usual way * ^{/6/}

$$G[J] = \exp[-\frac{1}{2}\int d^{4}x d^{4}y J^{\mu}(x)\Delta^{tr}_{\mu\nu}(x-y)J^{\nu}(y)], \qquad (14)$$

where the Fourier transform of the propagator $\Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}$ (x) has the form

$$\widetilde{\Delta}_{\mu\nu}^{\text{tr}}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{p^2} \{ g_{\mu\nu} + \frac{n^2 p_{\mu} p_{\nu} - (np)(n_{\mu} p_{\nu} + n_{\nu} p_{\mu}) + p^2 n_{\mu} n_{\nu}}{(np)^2 - p^2 n^2} \},$$

that coincides with the propagator obtained by us earlier in 11 by the method of the operator quantization. But the method of the quantization, given in this article, is the most rigorous because it starts directly from the physical phase space. So, here a rigorous justification of the new approach 11 to the quantization of gauge fields is given.

Our next publications would be devoted to the application of the propagators obtained in this approach and to the generalization of the method to the non-Abelian case.

REFERENCES

- Skachkov N.B., Shevchenko O.Yu. Proc. of VIII Intern. Sem. on High Energy Probl. (Dubna, 1986), JINR D1,2-86-219, Dubna, 1986.
- Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. Yoshiva Univ., New York, 1964.
- Slavnov A.A., Faddeev L.D. Introduction in Quantum Theory of Gauge Fields, M., Science, 1978.
- 4. Hanson A.J., Regge T., Teitelboim C.— Constrained Hamiltonian Systems. Preprint Princeton University, 1974. Contrib. centro Linceo interdisc di scienze mat No.22, 1976.
- Sundermeyer K.— Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics, v.169, Berlin: Springer-Verlag, 1982.

For this purpose the ordinary normalization condition G(0) = 1 is used.

6. Bogolubov N.N., Shirkov D.V. Introduction to the Theory of Quantized Fields, M., Science, 1984.

Received on April 20, 1987.

УТОЧНЕНИЕ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ СЛАБОСВЯЗАННЫХ ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ МЕЗОМОЛЕКУЛ ddµ И dtµ

С.И.Виницкий, В.И.Коробов, И.В.Пузынин

Выполнены уточненные вариационные расчеты уровней энергии ϵ_{11} слабосвязанных вращательно-колебательных состояний (J = 1, V = 1) мезомолекул dd_{μ} и dt_{μ} . Использованы большее число (до 2000) базисных функций, лучшее распределение степеней независимых переменных, уточненные значения нелинейных параметров, а также более точное значение массы мюона. Получены следующие экстраполированные результаты: $-\epsilon_{11}(dd_{\mu}) = (1,9750 \pm \pm 0,0002)$ зВ и $-\epsilon_{11}(dt_{\mu}) = (0,6604 \pm 0,0002)$ зВ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

More Accurate Calculation of the Energy Levels of Weakly Bound Rotation-Vibrational States of Mesic Molecules dd_{μ} and dt_{μ}

S.I. Vinitsky, V.I.Korobov, I.V.Puzynin

More accurate variational calculations are performed for energy levels: ϵ_{11} of weakly bound rotation-vibrational states ($\mathbf{J} = 1$ and $\mathbf{v} = 1$) of mesic molecules $\mathbf{dd}\mu$ and $\mathbf{dt}\mu$. To this end, use has been made of a great number (up to 2000) of basis functions, a better distribution of powers of independent variables, more accurate values of nonlinear parameters, and of a more accurate value of the muon mass. The results of extrapolation are as follows: $-\epsilon_{11}(\mathbf{dd}\mu) = (1.9750 \pm 0.0002) \text{ eV},$ $-\epsilon_{11}(\mathbf{dt}\mu) = (0.6604 \pm 0.0002) \text{ eV}.$

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

В нашей предыдущей работе $^{1/}$ была развита вариационная схема расчета энергии связи системы трех кулоновских частиц с базисными функциями молекулярного типа в сфероидальной системе координат. С ее помощью были проведены вариационные расчеты и получены следующие оценки для уровней энергии мезомолекул $dd\mu$ и $dt\mu$: $-\epsilon_{11}(dd\mu) = (1,9749 \pm 0,0002)$ эВ и $-\epsilon_{11}(dt\mu) = (0,663 \pm 0,002)$ эВ. Отметим, что, несмотря на то, что в расчете для мезомолекулы $dt\mu$ использовалось до 1500 опорных функций, качество расчета и точность экстраполированного результата уступают вычислениям, выполненным для мезомолекулы dd_{μ} . Это сбъясняется прежде всего (g, u) асимметрией мезомолекулы dt_{μ} и сложностью ее учета. Для повышения качества расчета требуется найти оптимальные распределения степеней независимых переменных ξ, η, R в каждом наборе опорных функций. Кроме того, энергия связи dt_{μ} в три раза меньше, чем dd_{μ} , т.е. значительно ближе к границе континуума, а это требует также более тщательного подбора нелинейных параметров в вариационной волновой функции. Для проведения обработки последних экспериментов по мюонному катализу /2/ необходимо улучшить точность расчетов для мезомолекулы dt_{μ} .

В соответствии с вышеизложенным нами выполнена следующая модификация вариационной схемы /1/ для мезомолекулы dtµ:

1. Найдены лучшие распределения степеней независимых переменных ξ, η, \mathbb{R} и нелинейных параметров в вариационных функциях (см. табл. 1). Это позволило улучшить качество вариационных расчетов в смысле достижения более глубокого минимума вариационного функционала на меньшем числе базисных функций.

2. Проведена модификация программы, позволившая увеличить число опорных функций в предельном расчете до 2000.

Анализ прежних расчетов /1/ для мезомолекулы ddµ с экстраполяционной формулой

$$\epsilon_{11}(\mathbf{n}) = \epsilon_{11} (\infty) + \mathbf{c} \mathbf{n}^{-\alpha},$$

принятой в вариационных расчетах, показал, что сходимость по числу опорных функций близка к квадратичной, т.е. $a \approx 2$. Это свидетельствует о хорошем качестве данного расчета и полученной

Таблица 1

(1)

Значения нелинейных параметров вариационной функции dtu (использовалась следующая система единиц: е = h = m_{tu}=1 $\tilde{m}_{tu} = M_t \tilde{m}_u / (M_t + \tilde{m}_u))^*$ B2 p B1 a 1 as 71 VI Yo Ve dtµ g 2,3339 0,6976 0,0005 0,5200 2,0295 0,7103 0,0051 0,6088 u 1,2177 0,4313 0,0005 0,4313 1,8365 0,6596 0,0507 0,5074 * Значения массы мюона $\tilde{m}_{\mu} = 206,7686 \, \mathrm{m}_{\circ}$, значение массы тритона M. = 5496,918 m. /3/.

25

Таблица 2

для мезомолекулы ddµ (в эВ)				
$-\epsilon_{11}(n_{1})^{/1/}$ m _µ = 206,769 m _e	$-\epsilon_{11}(n)$ $\tilde{m}_{\mu} = 206,7686 m_{e}$			
1,96933	1,96941			
1,97274	1,97284			
1,97368	1,97379			
1,97431	1,97442			
1,97465	1,97475 *			
1,9749 ± 0,0002	1,9750 ± 0,0002			
	$-\epsilon_{11}(n_{1})^{/1/}$ $m_{\mu} = 206,769 m_{e}$ $1,96933$ $1,97274$ $1,97368$ $1,97431$ $1,97465$ $1,9749 \pm 0,0002$			

Сходимость энергии связи - « 11

*Значение было получено с помощью предыдущего расчета с учетом поправки на новую массу мюона m. Значение массы дейтрона M_d= 3670,481 m_e, R_y=13,605804 эВ ^{/8/}.

экстраполяционной оценки. Однако в этих расчетах использовалось округленное значение массы мюона m_и = 206,769 m_e, точность задания которого сопоставима с оценкой точности экстраполированного значения є 11 (ddµ).

Представляет интерес узнать, насколько изменится значение энергии связи ddu при использовании массы мюона с большим числом знаков m_µ = 206,7686m e^{/3/}. Результаты такого исследования приведены в табл. 2. Из таблицы видно, что значения уровней энергии, вычисленные при разных массах m_µ и m_µ для n = 304, 449, 607, 819, отличаются на величину ~10 4 эВ, и это отличие практически не зависит от n. Поэтому мы не проводили трудоемкий расчет с n =1286, а ввели необходимую поправку в значение энергии є 11 (1286), вычисленное при прежнем m. Таким образом, погрешность в вычисленном значении - є 11 энергии связи ddµ сравнима с известной на сегодняшний день точностью масс частиц.

В табл. З приведены результаты уточненных расчетов энергии связи - є 11 мезомолекулы dtµ. В ней же для сравнения даны значения энергии, полученные ранее /1 / Сравнение показывает, что новые результаты являются лучшими, в смысле достижения более глубокого минимума вариационного функционала. Экстраполированное значение ϵ_{11} для новой массы мюона \tilde{m}_{μ} было найдено из условия минимума функционала

$$\Phi(\epsilon_{11}, C, a) = \sum_{i=1}^{m} [\epsilon_{11}(n_i) - \epsilon_{11} - Cn_i^{-a}]^2 / (\beta n_i^{-2}), \qquad (2)$$

Таблица З

n	-e ₁₁ (n) /1/	$-\epsilon_{11}$ (n)	$-\epsilon_{11}(n,\alpha,C,\epsilon_{11})$	()) 🛆
542		0,65114	0,65085	0,00029
568	0,64772	-	_	_
596	_	0,65223	0,65245	-0,00022
844	0,65228	-		_
927		0,65691	0,65702	-0,00011
982	0,65371	_	_	
1483	_	0,65889	0,65903	-0,00014
1495	0,65889	_		_
1513		0,65923	0,65908	0.00015
2084	-	0,65968	0,65969	-0,00001
00	0,663 ± 0,002	0,6604 ± 0,00	002	

Значения энергии связи – є₁₁(эВ) для мезомолекулы dtµ

где m — число серий, β — нормировочный множитель. Этот функционал соответствует экстраполяционной формуле (1), при этом значение показателя $a \approx 2$.



Для наглядности эти результаты представлены на графике (см. рис.). Теоретическая кривая (1)проведена также при значениях параметров є 11, Сиа, найденных из условия минимума функционала (2). Вычисленные точки хорошо ложатся на эту кривую. Тем самым мы достигли такого же качества вариационного расчета, как в мезомолекуле ddµ . Экст-

Результаты вариационных расчетов энергии связи $-\epsilon_{11}(n)$ dtµ: \circ — расчет данной работы, \bullet — точки кривой (1) при значениях параметров $-\epsilon_{11}(\infty)$ = = 0,6604 эВ, C = -1869,2 эВ, a = = 1,9355; \blacktriangle — расчет работы ^{/1/}. раполированное значение энергии равно $-\epsilon_{11}(dt\mu) = (0.6604 \pm 0.0002)$ эВ, что соответствует точности расчетов для $dd\mu$ -мезомолекулы.

Полученные в данной работе экстраполированные значения уровней энергии ϵ_{11} слабосвязанных состояний мезомолекул ddµ и dtµ являются основой для обработки экспериментов по измерению скорости резонансного образования этих молекул /4/.

В заключение авторы благодарят Н.Н.Говоруна за поддержку работы и Л.И.Пономарева за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Виницкий С.И., Коробов В.И., Пузынин И.В. ЖЭТФ, 1986, т.91, с.705; Краткие сообщения ОИЯИ № 19-86, Дубна, 1986, с.40.
- Balin D.V. et al. Phys. Lett., 1984, 141B, p.173; Breunlich W.N. et al. — Invited paper presented at the International Symposium on Muon Catalized Fusion, Tokyo, Japan, Sept. 1-3, 1986; Preprint LBL-22560, Berkley, 1986.
- 3. Cohen E.R. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1976, v.18, p.587; Wapstra A.N., Bos K. Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1977, v.19, p.175.
- 4. Виницкий С.И. и др. ЖЭТФ, 1978, т.74, с.849; Ponomarev L.I., Fiorentini G. — Invited paper presented at the International Symposium on Muon Catalized Fusion, Tokyo, Japan, September 1-3, 1986; Preprint IFUP-TH 27/86, Pisa, 1986.

Краткие сообщения ОИЯИ №3 (23)-87 УДК 539.142

EVOLUTION OF COLD DENSE NUCLEAR MATTER E.F.Hefter *, V.G.Kartavenko

A simple analytical model is presented to describe the time evolution of cold compressed nuclear systems. The inverse meanfield method has been used. A one-dimensional three-level system is analysed in detail. Inverse methods are shown to give us the opportunity to predict the (nonlinear) evolution of cold dense nuclear systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Эволюция холодного сжатого ядерного вещества Э.Ф.Хефтер, В.Г.Картавенко

Представлена простая аналитическая модель для описания эволюции сжатых холодных ядерных систем. Использован метод обратной задачи для среднего поля ядра. Детально проанализирована одномерная трехуровневая система. Показано, что методика обратной задачи позволяет предсказать нелинейную эволюцию холодных сжатых ядерных систем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретический физики ОИЯИ.

1. INTRODUCTION

In recent studies $^{/1'}$ the time evolution of initially compressed nuclear matter has been studied within the time-dependent Hartree-Fock approach. Obviously this problem is of a more general interest $^{/2-6/}$, so that we would like to reconsider it from a different point of view. We should also like to draw attention to the way in which hydrodynamics does predict the production of composites (or clusters), in contrast to the statement of $^{/1'}$, this is possible via a mechanism known for about 150 years.

Starting from hydrodynamical considerations, several groups derived, in differential ways and independently, the soliton-supporting non-

^{*} Springer-Verlag, Heidelberg, FRG

linear Schrödinger and Korteweg — de Vries (KdV) equations at appropriate evolution equations for density distributions in nuclear matter /?-10/.

A more comprehensive and general interpretation of the KdV equation emerged in connection with the application of inverse methods to the nuclear bound state problem, see $^{11/}$ and references therein. This so-called inverse mean-field method (Imefim) has been demonstrated to yield useful information of nuclear radii $^{12/}$, the optical potential $^{13/}$, and on nuclear dynamics $^{14/}$. It has been proposed to describe also the equilibration of finite nuclear systems $^{15/}$.

In this communication, based on the mean field picture, we present a simple analytical model for the time evolution of compressed nuclear matter.

2. BASIC EQUATIONS OF THE INVERSE MEAN FIELD METHOD

By now it is well known that the appropriate procedure for discussing the characteristics of nonrelativistic quantum mechanical systems is to solve the respective time-dependent many-body Schrödinger equation. However, we are not able to handle this problem adequately but for computer experiments. A prominent way of circumventing most of the associated difficulties is not resort to the physically motivated mean-field picture. It assumes that all particles of the system generate a common mean field U(x,t) in which they move rather independently. Thus, the many-body Schrödinger equation is reduced to a set of singleparticle Schrödinger equations:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial \tau^2} + U\Psi_n, \qquad (1)$$

where all symbols have their usual meanings. For the sake of simplicity, below we consider only one-dimensional systems (which, are under the appropriate conditions equivalent to three-dimensional spherically symmetrical ones). Application of inverse methods and of techniques from nonlinear physics leads within Imefim to the notion to use for (conservative) time-dependent problems instead of (1) the following system of coupled equations $^{/11/}$:

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} + U\Psi_n = E_n \Psi_n , \qquad (2)$$

$$2\mathrm{mc}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial(\mathcal{L}_{n}t)}U = 6U\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{h^{2}}{2\mathrm{m}}\frac{\partial^{3}U}{\partial x^{3}}.$$
 (3)

The \mathcal{L}_n are constants which are determined by the initial conditions and N(n = 1,2,...,N) is the number of the bound states.

Details of the Imefim and the derivations of the resulting formulas (2,3) may be taken from /11-15/ and references.

Applying inverse methods, we have to evaluate the function K(x,y) by solving the (Gelfand – Levitan – Marchenko) integral equation /16-19/:

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \int_{\mathbf{x}}^{\infty} B(\mathbf{y}+\mathbf{z}) K(\mathbf{x},\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 0.$$
(4)

The kernal B is determined by the reflection coefficients R(k) (E = $h^2 k^2/2m$) and by the N bound-state eigenvalues (E = $-h^2 \kappa_p^2/2m$):

$$B(z) = \sum_{n=1}^{N} C_{n}^{2}(\kappa_{n}) \exp(\frac{h^{2}\kappa_{n}^{3}t}{m^{2}c} - \kappa_{n}^{2}z) + \frac{1}{(k_{n}^{2})^{2}} \left(\frac{h^{2}k^{3}t}{k_{n}^{2}c} - \frac{1}{(k_{n}^{2})^{2}} - \frac{1}{(k_{n}^{2})^{2}} \right)$$
(5)

The coefficients C_n are uniquely specified by the boundary conditions:

$$C_{n}(\kappa_{n}) = \lim_{x \to \infty} e^{\kappa_{n} x} \Psi_{n}(x, 0)$$
(6)

and the wanted potential U(x,t) is given by:

m 2c

27 -00

$$U(x, t) = -\frac{h^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} K(x, x) .$$
 (7)

By knowing all bound-state energy eigenvalues and reflection coefficients (phase-shifts), the integral equation (4) can be solved only numerically. However, in the case of reflectionless (R(k) = 0) potentials the problem is well known to have the analytical solution (for symmetrical (U(x,0) = U(-x,0)) potentials):

$$U(\mathbf{x}, t) = -\frac{h^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \ln[\det ||\mathbf{M}||] = -\frac{2h^2}{m} \sum_{n=1}^N \kappa_n \Psi_n^2(\mathbf{x}, t),$$

$$\Psi_{\underline{n}}(\mathbf{x},t) = \sum_{k=1}^{N} (M^{-1})_{\underline{n}\underline{k}} \lambda_{\underline{k}}(\underline{x},t) ,$$

$$M_{nk}(x, t) = \delta_{nk} + \frac{\lambda_k \cdot \lambda_n}{\kappa_k + \kappa_n}$$

$$\lambda_{n}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = C_{n}(\kappa_{n}) \exp(-\kappa_{n}\mathbf{x} + \frac{h^{2}\kappa_{n}^{3}\mathbf{t}}{m^{2}c}),$$

$$C_{n}(\kappa_{n}) = \sqrt{2\kappa_{n}} \frac{N}{\prod_{k \neq n}} \left| \frac{\kappa_{n} + \kappa_{k}}{\kappa_{n} - \kappa_{k}} \right|$$

A glance at (8) shows that wave functions, potential and densities are uniquely determined by N energy eigenvalues.

3. THREE-LEVEL SYSTEM

Although there difinitely is some progress in the application of inverse methods to nuclear physics $^{11-15,21/}$, they are not yet too popular. As an illustration for the work of these methods, we consider, in this section, a one-dimensional three-level system in detail. Simplest one-level and two-level systems $^{20/}$ have been analysed earlier. A three-level system may be useful for modelling the evolution of light nuclei, for instance, of oxygen $^{1/}$.

Let us present the main formulas to calculate wave functions of the three-level system $(\kappa_{g} > \kappa_{g} > \kappa_{1})$:

$$\Psi_{1}(\mathbf{x}, t) = (2\kappa_{1}(\frac{\kappa_{2} + \kappa_{1}}{\kappa_{2} - \kappa_{1}})(\frac{\kappa_{3} + \kappa_{1}}{\kappa_{3} - \kappa_{1}}))^{1/2} D^{-1}(\mathbf{x}, t) \times$$

(9)

(8)

×
$$(ch(\xi_2 + \xi_3) - (\frac{\kappa_3 + \kappa_2}{\kappa_3 - \kappa_2}) ch(\xi_3 - \xi_2)),$$

32

$$\begin{split} \Psi_{2}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \left(2\kappa_{2}\left(\frac{\kappa_{2}+\kappa_{1}}{\kappa_{2}-\kappa_{1}}\right)\left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{2}}{\kappa_{3}-\kappa_{2}}\right)\right)^{1/2} \mathrm{D}^{-1} (\mathbf{x}, \mathbf{t}) (\mathrm{sh}(\xi_{3}+\xi_{1}) + \\ &+ \left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{1}}{\kappa_{3}-\kappa_{1}}\right) \mathrm{sh}(\xi_{3}-\xi_{1})), \\ \Psi_{3}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \left(2\kappa_{3}\left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{2}}{\kappa_{3}-\kappa_{2}}\right)\left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{1}}{\kappa_{3}-\kappa_{1}}\right)\right)^{1/2} \mathrm{D}^{-1} (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \\ &\times (\mathrm{ch}(\xi_{2}+\xi_{1}) + \left(\frac{\kappa_{2}+\kappa_{1}}{\kappa_{2}-\kappa_{1}}\right) \mathrm{ch}(\xi_{2}-\xi_{1})), \\ \mathrm{D}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \mathrm{ch}(\xi_{1}+\xi_{2}+\xi_{3}) + \left(\frac{\kappa_{2}+\kappa_{1}}{\kappa_{2}-\kappa_{1}}\right)\left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{1}}{\kappa_{3}-\kappa_{1}}\right)\mathrm{ch}(\xi_{3}+\xi_{2}-\xi_{1}) + \\ &+ \left(\frac{\kappa_{2}+\kappa_{1}}{\kappa_{2}-\kappa_{1}}\right)\left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{2}}{\kappa_{3}-\kappa_{2}}\right)\mathrm{ch}(\xi_{3}+\xi_{1}-\xi_{2}) + \\ &+ \left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{1}}{\kappa_{3}-\kappa_{1}}\right)\left(\frac{\kappa_{3}+\kappa_{2}}{\kappa_{3}-\kappa_{2}}\right)\mathrm{ch}(\xi_{2}+\xi_{1}-\xi_{3}), \\ \xi_{n}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= \kappa_{b}\mathbf{x} - \frac{\mathrm{h}^{2}\kappa_{n}^{3}\mathbf{t}}{\mathrm{m}^{2}\mathbf{c}}, \quad n = 1, 2, 3. \end{split}$$
(9)

 $\lim_{t \to \infty} \Psi_{k}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \sqrt{\kappa_{n}} \operatorname{sech}(\xi_{n} - \xi_{n}^{\circ}), & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

(10)

$$\lim_{t\to\infty} U(x, t) = -\frac{h^2 \kappa^2}{m} \operatorname{sech}^2 \left(\xi_n - \xi_n^\circ\right),$$

$$\xi_{n}^{\circ} = \frac{1}{2} \ln \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\kappa_{n} - \kappa_{k}}{\kappa_{n} + \kappa_{k}} \right)^{2} \prod_{m \neq n}^{N} \left| \frac{\kappa_{n} + \kappa_{m}}{\kappa_{n} - \kappa_{m}} \right| \right).$$

So, for large x and t the time-dependent one-body potential and density distribution are represented by a set of solitary waves. The energy spectrum of an initially compressed system completely determines widths, velocities and phase shifts (ξ_n°) of the solitons.

In (8-10) the constants \mathcal{L}_n entering into (3) should be calculated from the ground state spectrum for a given nuclear system. It leads to a renormalization of the velocities of the solitons. The qualitative picture of the evolution remains unchanged.

The initially compressed system expands so that for large times one observes separate density solitons. This picture is in accordance with the time-dependent Hartree-Fock simulation of the time evolution of a compressed ¹⁶ O nucleus $^{/1/}$. The disassembly shows collective flow and clusterization.

4. SUMMARY

Attention has been drawn to the fact that inverse methods lead to a simple analytical model for the qualitative time evolution of cold compressed nuclear metter. The exact numerical solution could even be applied for a quantitative treatment.

REFERENCES

- 1. Dhar A., Das Gupta S. Phys. Rev., 1984, C30, p.1545.
- 2. Kapusta J.I., Strottman D. Phys. Rev., 1981, C23, p.1282.
- 3. Bertsch G.F., Siemens P.J. Phys.Lett., 1983, 126B, p.9.
- 4. Cugnon J. Phys.Lett., 1984, 135B, p.377.
- 5. Knoll J., Strack B. Phys.Lett., 1984, 149B, p.45.
- 6. Sagawa H., Bertsch G.F. Phys.Lett., 1985, 155B, p.11.
- Khodel V.A. et al. Phys.Lett., 1980, 90B, p.37;
 Yad.Fiz., 1980, 32, p.1249 (in Russian).
- 8. Easson I. Nucl. Phys., 1981, A363, p.69.
- 9. Fowler G.N. et al. Phys.Lett., 1982, 115B, p.268.
- 10. Kartavenko V.G. Yad.Fiz., 1984, 40, p.377 (in Russian).
- Hefter E.F. Acta Phys.Pol., 1984, 65A, p.377; Journ. de Phys., 1984, 45, p.C6-67.
- 12. Hefter E.F. Phys.Rev., 1985, A32, p.1205.
- 13. Hefter E.F. Phys.Rev., 1986, C34. p.1588.
- 14. Hefter E.F., Gridnev K.A. Prog. Theor. Phys., 1984, 72, p.549.
- 15. Hefter E.F. Lett.Nuovo Cim., 1981, 32, p.9.

- 16. Gelfand I.M., Levitan B.M. Izv. AN SSSR, ser.math. 1951, 15, p.309 (in Russian).
- 17. Marchenko V.A. DAN SSSR, 1955, 104, p.695 (in Russian).
- 18. Kay I., Moses H.E. Journ. Appl. Phys., 1956, 27, p.1503.
- 19. Gardner C.S. et al. Comm. Pure and Appl.Math., 1974, 27, p.97.
- 20. Bhatnagar P.L. Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems. Clarendon Press Oxford, 1979.
- 21. Zakhariev B.N., Suzko A.A. Potentsialy i kvantovoe rasseyanie. Energoatomizdat, M., 1985 (in Russian).

Received on February 27, 1987.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ-ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗ

В.А.Кузьмин

На основе спектрального разложения вещественной симметричной матрицы предложен метод вычисления энергетически-взвешенных моментов распределения силы переходов по энергиям возбуждений, определенного в приближении случайных фаз (ПСФ). Показано, что определенные линейные комбинации моментов можно выразить через произведения матриц, входящих в уравнение ПСФ. Полученные результаты используются для выделения двухквазичастичных состояний, наиболее важных для данного типа переходов и для данных остаточных взаимодействий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Evaluation of the Energy-Weighted Moments in the Random Phase Approximation

V.A.Kuzmin

Based on spectral decomposition of the real symmetrical matrix we present method for evaluating the energy-weighted moments of the transition strength distribution over the excitation energies defined in the random phase approximation (RPA). It is shown that certain linear combinations of these moments can be expressed through the product of the RPA matrices. The obtained results are used to select two-quasiparticle states that are most important for given transitions and residual interactions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Интегральные характеристики распределений силы переходов по энергиям возбуждений выражаются через их энергетическивзвешенные моменты /1/:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{k}} = \sum_{i} \omega_{i}^{\mathbf{k}} |\langle i | \mathbf{B} | \mathbf{0} \rangle|^{2}, \qquad (1)$$

где $\omega_i = E_i - E_o$ — разность энергии возбужденного $|i\rangle$ и основного $|0\rangle$ состояний рассматриваемой системы; В — оператор перехода. Кроме того, по вкладу отдельных базисных состояний пространства, на котором определены волновые функции $|0\rangle$ и $|i\rangle$, в энергетически-взвешенные моменты можно выделить наиболее существенные для данной задачи базисные состояния.

Это значительно уменьшает размерности матриц, появляющихся при построении собственных функций гамильтониана системы.

В настоящем сообщении предлагается метод вычисления энергетически-взвешенных моментов для приближения случайных фаз (ПСФ), основанный на спектральном разложении симметричных вещественных матриц. В ПСФ амплитуды переходов из основного на возбужденные однофононные состояния под действием одночастичного оператора перехода В⁻ (и эрмитово-сопряженного к нему оператора В⁺) можно записать в виде

$$b_{i}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(d_{q}^{+} g_{q}^{i} + d_{q}^{-} w_{q}^{i} \right), \qquad (2)$$

где $d_q^{(\pm)}$ — матричный элемент перехода из состояния квазичастичного вакуума в двухквазичастичное состояние, симметризованный (+) и антисимметризованный (-) по индексам одноквазичастичных состояний; g_q^i и w_q^i — сумма и разность фононных амплитуд ψ_q^i и ϕ_q^i ; q — индекс двухквазичастичного состояния. В формуле (2) опущен знак суммирования по q : здесь и ниже подразумевается суммирование по каждой паре совпадающих индексов. Например, для гамов-теллеровских переходов /2 /

$$b_{i}^{(\pm)} = \langle i | \sum_{j=1}^{A} \sum_{\mu=1}^{3} \sigma_{\mu} (j) t_{j}^{\pm} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle j_{n} | | \sigma t^{(+)} | | j_{p} \rangle [u_{j_{n}}^{(+)} g_{j_{n}}^{i} j_{p}^{j} t_{n}^{i} j_{p}^{\pm}]$$

$$\pm u_{j_{n}j_{p}}^{(1)} w_{j_{n}j_{p}}^{(1)}, u_{j_{n}j_{p}}^{(1)} = u_{j_{n}} v_{j_{p}} \pm u_{j_{p}} v_{j_{n}},$$

здесь индексы j_n (j_p) обозначают одночастичные уровни нейтронной (протонной) системы, а u_j и v_j — коэффициенты специализированного преобразования Боголюбова.

Энергии возбуждения однофононных состояний ω_i и фононные амплитуды g i_q и w i_q определяются из однородной системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}^{(+)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{(-)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{g}}^{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{w}}^{\mathbf{i}} \end{vmatrix} = \omega_{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{g}}^{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{w}}^{\mathbf{i}} \end{vmatrix} .$$
(3)

Заглавные латинские буквы обозначают матрицы, размерность которых равна числу учитываемых двухквазичастичных состояний. І и 0 — единичная и нулевая матрицы. В работе ^{/8} / показано, что к виду (3) можно привести любую систему уравнений метода ПСФ с вещественными матричными элементами. Согласно теории пучков квадратичных форм ^{/4} /, если матрица, стоящая в левой части (3) положительно определена, то ω_i — вещественные числа, и существуют ненулевые g_q^i и w_q^i , удовлетворяющие (3). В дальнейшем мы будем предполагать положительную определенность матриц $\mathbb{R}^{(+)}$ и $\mathbb{R}^{(-)}$.

Следуя ^{/8/}, умножим первое из уравнений (3) на R⁽⁻⁾ и, учитывая второе из уравнений (3), получим

$$R^{(-)} R^{(+)} \overset{i}{g} ^{i} - \omega_{i}^{2} \overset{i}{g} ^{i} = 0.$$
 (4)

Так как $\mathbb{R}^{(+)}$ положительно-определенная матрица, то существует единственная симметричная положительно-определенная матрица F, такая, что $^{/5/}$

 $\mathbf{F}\mathbf{F} = \mathbf{R}^{(+)}.$

Приведем линейное, невырожденное преобразование векторов \vec{g}^{i} :

$$\vec{y} = \mathbf{F} \vec{g}^{i}$$
.

Тогда (4) можно переписать в виде

$$\mathbf{F}\mathbf{R}^{(-)}\mathbf{F}\overset{\rightarrow}{\mathbf{y}}^{i} - \omega_{i}^{2}\overset{\rightarrow}{\mathbf{y}}^{i} = 0,$$

где F R⁽⁻⁾ F — вещественная симметричная матрица, собственные векторы которой образуют полную ортонормированную систему $^{/4/}$. Из векторов \vec{y}^{i} можно построить матрицы спектральных проекторов $^{/5/}$

$$\mathbf{E}_{q,q}^{\mathbf{i}},\mathbf{q}'=\mathbf{y}_{q}^{\mathbf{i}}\mathbf{y}_{q}^{\mathbf{i}'}$$

со свойствами

$$E^{i} E^{j} = \delta_{i,j} E^{j},$$

$$\sum_{i}^{j} E^{i} = I,$$

$$\sum_{i}^{j} \omega_{i}^{2k} E^{i} = (FR^{(-)} F)^{k}.$$
(5)

Фононные амплитуды \vec{g}^{1} и \vec{w}^{1} , нормированные условием $\frac{1}{2}(g_{q}^{i} w_{q}^{i'} + g_{q}^{i'} w_{q}^{i}) = \delta_{i,i'}$,

связаны с векторами ў^і соотношениями

$$\vec{g}^{i} = \sqrt{\omega_{i}} F^{-1} \vec{y}^{i}, \quad \vec{w}^{i} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{i}}} F \vec{y}^{i},$$
(6)

где F⁻¹ — матрица, обратная к F.

Энергетически-взвешенные моменты можно выразить через степени матрицы FR⁽⁻⁾F:

$$S_{k}^{(\pm)} = \omega_{i}^{k} b_{i}^{(\pm)2} =$$

$$= \frac{1}{4} \{ \vec{d}^{(+)T} F^{-1} \omega_{i}^{k+1} E^{i} F^{-1} \vec{d}^{(+)} \pm 2 \vec{d}^{(+)T} F^{-1} \omega_{i}^{k} E^{i} F \vec{d}^{(-)} +$$

$$+ \vec{d}^{(-)T} F \omega_{i}^{k-1} E^{i} F \vec{d}^{(-)} \} =$$

$$= \frac{1}{4} \{ \vec{d}^{(+)T} F^{-1} (FR^{(-)} F)^{\frac{k+1}{2}} F^{-1} \vec{d}^{(+)} \pm 2 \vec{d}^{(+)T} F^{-1} (FR^{(-)} F)^{\frac{k}{2}} F \vec{d}^{(-)} +$$

$$+ \vec{d}^{(-)} F (FR^{(-)} F)^{\frac{k-1}{2}} F \vec{d}^{(-)} \}.$$

Здесь $d^{(\pm)T}$ обозначают транспонированные векторы двухквазичастичных амплитуд $d^{(\pm)}$. Так как вычисление полуцелых степеней матриц требует не меньше арифметических действий, чем их диагонализация, то удобнее вычислять линейные комбинации энергетически-взвешенных моментов типа

$$S_{k} = S_{k}^{-} - (-1)^{k} S_{k}^{+},$$
 (7)

в которые входят только целые степени матрицы $FR^{(-)}F$.Матрицы F, F⁻¹ появляются в (7) только как произведения F · F и F · F · 1 равные $R^{(+)}$ и I соответственно. Поэтому для вычисления (7) не надо предварительно определять F. Например,

$$S_{0} = S_{0}^{-} - S_{0}^{+} = -\vec{d}^{(+)}T\vec{d}^{(-)},$$

$$S_{1} = S_{1}^{-} + S_{1}^{+} = \frac{1}{2}(\vec{d}^{(+)}TR^{(-)}\vec{d}^{(+)} + \vec{d}^{(-)}TR^{(+)}\vec{d}^{(-)}).$$

Для вычисления моментов S_k достаточно операций умножения вектора на матрицу и скалярного произведения векторов, а в случае сепарабельных остаточных взаимодействий — только скалярного произведения векторов. По вкладу двухквазичастичных состояний в нижайшие моменты S_k можно выделить наиболее существенные для данного типа переходов и заданных остаточных сил квазичастичные состояния и тем самым значительно уменьшить размерности матриц, входящих в уравнения (3) и (4), что приведет к заметной экономии вычислительных усилий при решении (4). В таблице приводятся относительные изменения в энергетически-взвешенных моментах S_k (k = 0,1,2,3,4) распределения силы гамов-теллеровских переходов на 90Zr $^{/2/}$, вызван-

Таблица

Влияния органичения двухкваз	ичастичного	пространства
на энергетически-взвешенные	моменты ра	спределения
гамов-теллеровских п	переходов на	⁹⁰ Zr

MTbiBae-	Относительные изменения в моментах				a= a+	емя диа- (ализ. (c)
P NIM	0 ₀ - 0 ₀	s ₁ + s ₁	52-52	53 + 53	$S_4 - S_4$	Bpe
84	28,72	594.3	9863,0	$242.4 \cdot 10^{3}$	$5,12 \cdot 10^{5}$	
64	3.10-6	$-3 \cdot 10^{-6}$	-1.10-4	$-2 \cdot 10^{-5}$	-1.10-4	79
56	$-3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$-3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	53
44	$-9 \cdot 10^{-3}$	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$-7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	-2.10-3	25
27	$-5 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	-3,5 . 10-3	3.10-2	1,5.10-2	6
21	$-8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	-7.10-3	$6 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	3
8	$3 \cdot 10^{-2}$	0,15	0,06	0,21	0,17	0,2
	84 64 56 447 21 8	S_0^+ - S_0^+ 84 - 28,72 64 $3 \cdot 10^{-6}$ 56 $-3 \cdot 10^{-3}$ 44 - 9 \cdot 10^{-3} 27 -5 \cdot 10^{-3} 21 -8 \cdot 10^{-3} 8 $3 \cdot 10^{-2}$	s_{0}^{+} Стносительные изме $s_{0}^{-} - s_{0}^{+}$ $s_{1}^{-} + s_{1}^{+}$ 84 28,72 594,3 64 $3 \cdot 10^{-6}$ -3 $\cdot 10^{-6}$ 56 -3 $\cdot 10^{-3}$ 8 $\cdot 10^{-4}$ 44 -9 $\cdot 10^{-3}$ -2,5 $\cdot 10^{-3}$ 27 -5 $\cdot 10^{-3}$ 1,3 $\cdot 10^{-2}$ 21 -8 $\cdot 10^{-3}$ 4 $\cdot 10^{-2}$ 8 $3 \cdot 10^{-2}$ 0,15	b_{0}	ФС 1000000000000000000000000000000000000	ФОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ В МОМЕНТАХ $S_0^ S_0^+$ $S_1^- + S_1^+$ $S_2^ S_2^+$ $S_3^- + S_3^+$ $S_4^ S_4^+$ 8428,72594,39863,0242,4 \cdot 10^35,12 \cdot 10^564 $3 \cdot 10^{-6}$ $-3 \cdot 10^{-6}$ $-1 \cdot 10^{-4}$ $-2 \cdot 10^{-5}$ $-1 \cdot 10^{-4}$ 56 $-3 \cdot 10^{-3}$ $8 \cdot 10^{-4}$ $-3 \cdot 10^{-3}$ $6 \cdot 10^{-4}$ $-2 \cdot 10^{-3}$ 44 $-9 \cdot 10^{-3}$ $-2,5 \cdot 10^{-3}$ $-7 \cdot 10^{-3}$ $5 \cdot 10^{-3}$ $-2 \cdot 10^{-3}$ 27 $-5 \cdot 10^{-3}$ $1,3 \cdot 10^{-2}$ $-3,5 \cdot 10^{-3}$ $3 \cdot 10^{-2}$ $1,5 \cdot 10^{-2}$ 21 $-8 \cdot 10^{-3}$ $4 \cdot 10^{-2}$ $-7 \cdot 10^{-3}$ $6 \cdot 10^{-2}$ $5 \cdot 10^{-2}$ 8 $3 \cdot 10^{-2}$ $0,15$ $0,06$ $0,21$ $0,17$

В первой строке указаны величины моментов S.

ные уменьшением числа учитываемых двухквазичастичных состояний. Каждый раз отбрасывались те состояния, чей удельный вклад в S_k был меньше величины, помещенной в первую графу таблицы. В последней графе показано время, затраченное на численную диагонализацию матрицы $R^{(-)} R^{(+)}$ на ЭВМ CDC-6500 с помощью программы диагонализации произвольных матриц методом вращений ^{/6⁷}. В процессе диагонализации сумма квадратов недиагональных матричных элементов уменьшается обычно в 10^{12} - 10^{14} раз.

Автор выражает признательность профессору В.Г.Соловьеву за поддержку работы и Н.Ю.Шириковой, предоставившей программу диагонализации произвольных вещественных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Bohigas O., Lane A.M., Martorell J. Phys. Rep., 1979, 51, p.268.
- Kuzmin V.A., Soloviev V.G. J. Phys. G, Nucl. Phys., 1984, 10, p.1507.
- 3. Ullah N., Rowe D.J. Nucl. Phys. A, 1971, 163, p.257.
- 4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- 5. Парлетт Р. Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983.
- 6. Eberlein P.J. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1962, 10, p.74.

Рукопись поступила 20 марта 1987 года.

ТЕОРИЯ РАДИАЦИОННОГО ЗАТУХАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ "ГОРЯЧЕЙ" ГИДРОДИНАМИКИ

Н.Н.Боголюбов (мл.), П.А.Поляков, М.А.Тасев

Построена двухжидкостная гидродинамическая теория релятивистской плазмы с учетом торможения зарядов излучением на основании предположения о справедливости в локальных областях релятивистского распределения Максвелла частиц по скоростям (распределения Юттнера-Синга). Найдены декременты радиационного затухания альвеновских, циклотронных и электромагнитных волн.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

The Theory of Radiative Attenuation of Electromagnetic Waves in Relativistic Magnetoactive Plasma in Hot Hydrodynamics Approximation

N.N.Bogolubov, Jr., P.A.Polyakov, M.A.Tassev

Two-fluid theory of hydrodynamics for relativistic plasma is developed taking into account radiative damping of charged particles, where relativistic Maxwell velocity distribution (Juttner-Synge distribution) is assumed. The radiative attenuation decrements for the Alfven cyclotronic and electromagnetic waves are found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Плазменные системы при релятивистских температурах обладают рядом особенностей по сравнению с нерелятивистским случаем. В частности, как было показано в работе^{/1/}, при рассмотрении электромагнитных волн в релятивистской свободной плазме основной причиной их затухания является радиационное торможение зарядов. Целью данной работы является исследование радиационного затухания электромагнитных волн, распространяющихся в релятивистской плазменной системе по направлению вектора индукции внешнего магнитного поля В, в приближении "горячей" жидкостной гидродинамики на основании кинетического уравнения Власова^(2,3), которое в релятивистском случае, с учетом радиационного торможения зарядов, имеет вид ^{/4,5/}:

$$\mathbf{u}^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathbf{a}}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} + \frac{1}{\mathbf{m}_{\mathbf{a}} \mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^{\beta}} \left[\left(\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}}{\mathbf{c}} \mathbf{F}^{\beta \alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{g}_{\mathbf{a}}^{\beta} \right) \mathcal{F}_{\mathbf{a}} \right] = 0.$$
(1)

Здесь \mathcal{F}_a — восьмимерная функция распределения частиц, которая связана с семимерной функцией \mathfrak{l}_a соотношением

$$\mathcal{F}_{a} = f_{a}(\mathbf{x}^{\alpha}, \mathbf{u}^{k}) 2\theta(\mathbf{u}_{o}) \delta(\mathbf{u}_{v}\mathbf{u}^{v} - 1), \qquad (2)$$

 g_a^{β} – сила радиационного торможения частиц, вызванная воздействием электромагнитного поля F^{βa}.

$$g_{a}^{\beta} = \frac{2}{3} \frac{e_{a}^{3}}{m_{a}c^{3}} \frac{\partial F^{\beta a}}{\partial x^{\gamma}} u_{a} u^{\gamma} - \frac{2}{3} \frac{e_{a}^{4}}{m_{a}^{2}c^{5}} F^{\beta a} F_{\gamma a} u^{\gamma} +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{e_{a}^{4}}{m_{a}^{2}c^{5}} (F_{\gamma \sigma} u^{\sigma}) (F^{\gamma a} u_{a}) u^{\beta} ,$$
(3)

греческие индексы пробегают значения 0,1,2,3; латинские — 1,2,3. Индекс а нумерует сорт частиц.

Проинтегрируем кинетическое уравнение (1) по 4-скоростям сначала с весом 1, затем с u^i , тогда получим два уравнения для моментов функции l_a :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \left(\left\langle \frac{\mathbf{u}^{\alpha}}{\mathbf{u}_{o}} \right\rangle_{\mathbf{a}} \mathbf{n}_{\mathbf{a}} \right) = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\left\langle \frac{u^{i} u^{\alpha}}{u_{o}} \right\rangle_{a} n_{a} \right) - \frac{1}{m_{a} c} \left[\frac{e_{a}}{c} F^{i\alpha} \left\langle \frac{u_{\alpha}}{u_{o}} \right\rangle_{a} n_{a} + \left\langle \frac{g_{a}^{i}}{u_{o}} \right\rangle_{n_{a}} \right] = 0, \quad (5)$$

где

 $n_{a} = \int f_{a} d^{3} u.$ (8)

Систему уравнений (4) и (5) необходимо дополнить уравнениями Максвелла, которые в записи через 4-вектор потенциал A^{α} в лоренцевой калибровке имеют вид

$$\mathbf{F}^{\beta a} = \frac{\partial \mathbf{A}^{a}}{\partial \mathbf{x}_{\beta}} - \frac{\partial \mathbf{A}^{\beta}}{\partial \mathbf{x}^{a}}; \qquad \frac{\partial^{2} \mathbf{A}^{a}}{\partial \mathbf{x}_{\beta} \partial \mathbf{x}^{\beta}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{a}, \qquad (9)$$

где

$$J^{a} = c \Sigma e_{a} < u^{a}/u_{o} >_{a} n_{a}.$$
(10)

Система уравнений (4), (5) и (9), (10) незамкнута. Для ее замыкания необходимы дополнительные условия, упрощающие исходную микроскопическую статистическую систему. Обычно для этого постулируют зависимость моментов 2-го порядка функции распределения с моментами 1-го порядка и подбирают подходящие уравнения состояния (см., например,⁶). Однако наличие силы радиационного торможения (6) значительно усложняет ситуацию, так как в уравнении (5) появляются моменты функции f_a 3-го порядка.

Для нахождения замкнутых гидродинамических уравнений воспользуемся идеями метода Энского — Чепмена ^{/3/}. Будем полагать, что функция распределения по скоростям частиц в локальной области имеет вид релятивистского закона Максвелла (распределение Юттнера-Синга ^{/7,8/}):

$$f_{a} = \bar{n}_{a} \alpha_{a} \exp\left[-\alpha_{a} r_{(a)}^{\sigma} u_{\sigma}\right] / 4\pi r_{(a)}^{\circ} K_{2}(\alpha_{a}), \qquad (11)$$

где $r_{(a)} - 4$ -вектор гидродинамической скорости частиц сорта (a), $a_a = m_a c^2 / k_B T_a (k - постоянная Больцмана, T_a - температура), <math>K_2(a_a) - ф$ ункция Макдональда ^{/8/}.

Аналогично тому, как это делается в нерелятивистском случае $^{/8/}$, будем полагать, что функции \bar{n}_a , $\tau^{\alpha}_{(a)}$ и T_a являются достаточно медленно меняющимися функциями координат и времени. Тогда, проводя вычисления, подобные расчетам в $^{/8/}$, для моментов функции (11) находим

$$\langle \frac{u^{\alpha}}{u_{\alpha}} \rangle = \frac{r^{\alpha}}{r^{\circ}}, \qquad (12)$$

$$\langle \frac{u^{i} u^{a}}{u_{0}} \rangle = \frac{1}{r_{0}} (r^{i} r^{a} \frac{K_{3}(a)}{K_{2}(a)} - \frac{g^{ia}}{a}),$$
 (13)

$$<\frac{u^{\sigma}u^{\alpha}u^{i}}{u_{o}}>=-\frac{(g^{i\alpha}\tau^{\sigma}+g^{\alpha\sigma}\tau^{i}+g^{i\sigma}\tau^{\alpha})}{\tau^{\circ}}\cdot\frac{K_{3}(a)}{\alpha K_{2}(a)}+$$
(14)

$$+ \frac{r^{a}r^{i}r^{\sigma}}{r_{o}} \cdot \frac{K_{4}(a)}{K_{2}(a)},$$

43

где индекс (а) для простоты записи опущен, g^{ia} — метрический тензор ($g^{oo} = 1$; $g^{ii} = -1$; $g^{a\beta} = 0$, если $a \neq \beta$), $K_{\nu}(a)$ — функции Макдональда.

Подставляя (12)-(14) в уравнения (4), (5), получим следующую систему гидродинамических уравнений для каждой компоненты плазмы (для ионов и электронов):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \left(\frac{\mathbf{n} \tau^{\alpha}}{\tau^{\circ}}\right) = 0, \qquad (15)$$

$$\tau^{\circ} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} \left[\left(\epsilon + \mathbf{P}\right) \frac{\tau^{\alpha} \tau^{\mathbf{i}}}{\tau_{\circ}} - \mathbf{g}^{\mathbf{i}\alpha} \frac{\mathbf{P}}{\tau_{\circ}}\right] =$$

$$= \mathbf{n} \mathbf{e} \mathbf{F}^{\mathbf{i}\alpha} \tau_{\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\mathbf{e}^{3}}{\mathbf{m}^{2} \mathbf{c}^{4}} \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathbf{i}\alpha}}{\partial \mathbf{x}^{\gamma}} \left(\tau^{\gamma} \tau_{\alpha} \left(\epsilon + \mathbf{P}\right) - \mathbf{P} \mathbf{g}^{\gamma}_{\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{\mathbf{e}^{4}}{\mathbf{m}^{3} \mathbf{c}^{6}} \left[\mathbf{F}_{\gamma\sigma} \mathbf{F}^{\gamma\alpha} \tau_{\alpha} \tau^{\mathbf{i}} \tau^{\sigma} \left(\frac{\mathbf{d}}{a} \left(\epsilon + \mathbf{P}\right) - \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{c}^{2}\right) -$$

$$- \mathbf{F}^{\mathbf{i}\alpha} \mathbf{F}_{\gamma\alpha} \tau^{\gamma} \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{c}^{2} - \mathbf{F}_{\gamma\sigma} \mathbf{F}^{\gamma\alpha} \left(\mathbf{q}^{\mathbf{i}}_{\alpha} \tau^{\sigma} + \mathbf{g}^{\sigma}_{\alpha} \tau^{\mathbf{i}} + \mathbf{g}^{\mathbf{i}\sigma} \tau_{\alpha}\right) \frac{\epsilon + \mathbf{P}}{a} \right], \qquad (16)$$

$$\mathbf{r} \mathbf{q} \mathbf{e}$$

$$\epsilon + \mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{c}^2 \,\mathbf{K}_3(a) \,/ \,\mathbf{K}_2(a), \tag{17}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{c}^2 / \boldsymbol{a} \,. \tag{18}$$

Система уравнений (16)-(18), совместно с уравнениями Максвелла (9), образует замкнутую систему уравнений, с помощью которой в рассматриваемом приближении могут быть исследованы различные плазменные процессы. Так, например, рассмотрим распространение электромагнитных волн в пространственно однородной бесконечной плазме при наличии внешнего магнитного поля с индукцией В. Направим координатную ось Z вдоль вектора В и рассмотрим распространение электромагнитной волны с пространственным волновым вектором k || В. Для этого линеаризуем систему уравнений (9), (16)-(18) относительно малых отклонений всех величин от равновесия и, решая линеаризованную систему стандартным способом, полагая, что все возмущенные величины изменяются по гармоническому закону exp(-ikaxa), аналогично /6/, находим следующее дисперсионное уравнение для электромагнитных волн соответственно с правой и левой круговой поляризацией:

$$\omega^{2} - k^{2} c^{2} = \Sigma \omega_{p}^{2} \frac{n_{o} mc^{2}}{\epsilon_{o} + P_{o}} [\omega - i\frac{2}{3} \frac{r_{o}}{c} (\frac{\omega^{2}(\epsilon_{o} + P_{o}) - P_{o}(\omega^{2} - k^{2}c^{2})}{n \cdot mc^{2}})]/$$
(19)

$$[\omega \neq \omega_{\rm B} \frac{\rm nmc^2}{\epsilon_{\rm o} + P_{\rm o}} - i\frac{2}{3} \frac{r_{\rm o}}{c} \omega_{\rm B}^2 (\frac{\rm nmc^2}{\epsilon_{\rm o} + P_{\rm o}} + \frac{1}{\alpha_{\rm o}})],$$

где $\omega = \mathbf{k}_{o}\mathbf{c}$ — комплексная частота, $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|$, $\omega_{p} = 4\pi e^{2} n_{o}/m$ плазменная частота, $\omega_{B} = eB/mc$ — циклотронная частота, $\mathbf{r}_{o} = e^{2}/mc^{2}$, $a_{o} = mc^{2}/\mathbf{k}_{B}T_{o}$; \mathbf{n}_{o} , \mathbf{T}_{o} , e_{o} , \mathbf{P}_{o} — соответственно плотность, температура, плотность энергии и давление в равновесном состоянии. Индекс суммирования по сортам частиц (ионам и электронам) для простоты записи опущен.

Выражение для плотности энергии ϵ_0 при нерелятивистских температурах, когда $\alpha >> 1$, согласно (17), (18) имеет вид

$$\epsilon_{o} = \mathbf{n}_{o} \mathbf{m} \mathbf{c}^{2} , \qquad (20)$$

а при ультрарелятивистских температурах, когда a << 1,

$$\epsilon_{o} = n_{o} mc^{2} \cdot 3/a.$$
⁽²¹⁾

Далее будем полагать, что массы ионов m_i много больше массы m_e электронов и, кроме этого, что температура ионов нерелятивистская ($a_i >> 1$), а электронов — ультрарелятивистская ($a_e << 1$). Тогда из дисперсионного уравнения (19) для действительной частоты $\omega' = Re\omega$ и декремента радиационного затухания $\gamma = -Im\omega$ находим:

1. Альвеновские волны.

Если $\omega << \omega_{\rm Bi}$ и $\omega << \omega_{\rm B} \cdot a/4$, то при kc << $|\omega|$ имеем

$$\omega' = kc \left(\frac{\omega_{p \, i}^{2}}{\omega_{B \, i}^{2}} + \frac{4\omega_{p}^{2}}{a\omega_{B}^{2}}\right)^{-1/2}, \qquad (22)$$

$$\gamma = + \frac{1}{3} \frac{r_{o}}{c} \omega_{p}^{2} \left(\frac{\omega_{p \, i}^{2}}{\omega^{2}} + \frac{4\omega_{p}^{2}}{a\omega_{B}^{2}}\right)^{-1/2}, \qquad (23)$$

где индексом i помечены величины, относящиеся к ионной компоненте плазмы, а величины без индексов относятся к электронной компоненте.

2. Ионно-циклотронные волны.

Если $\omega \rightarrow \omega_{Bi}$ и kC >> $|\omega|$, то

 $\omega = \omega_{-1}$

(24)

$$\gamma = -\frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2 \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c^2} \frac{\omega_{Bi}}{a\omega_B}.$$
(25)

3. Электронно-циклотронные волны. Если $\omega \rightarrow \omega_{\rm p} \cdot a/4$, kc>> ω , то

$$\omega' = \omega_{\rm B} \cdot a/4 , \qquad (26)$$

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{r_{\rm o}}{c} \frac{\omega_{\rm B}^2}{a} . \qquad (27)$$

4. Высокочастотные электромагнитные волны. Если $|\omega| >> \omega_{\rm B} \cdot a/4$ и $\omega_{\rm D}$; kc $>> \omega_{\rm B} \cdot a/4$ и $\omega_{\rm D}$, что

$$\omega'^{2} = k^{2} c^{2} + \omega_{p1}^{2} + \omega_{p}^{2} \alpha/4, \qquad (28)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{r_0}{c} \omega_p^2 . \tag{29}$$

В заключение укажем, что дисперсионные выражения (22), (24), (26) и (28) совпадают с аналогичными выражениями ^{/6/}, но в отличие от результатов этой работы рассмотренные типы волн затухают.

Радиационное затухание электронно-циклотронных и высокочастотных электромагнитных волн в нерелятивистской плазме рассматривалось также в работе 9 . Интересно отметить, что по сравнению с нерелятивистским случаем, радиационное затухание циклотронных волн в ультрарелятивистской плазме (27) увеличилось в 1/a раз, а радиационное затухание высокочастотных электромагнитных волн (29) осталось неизменным.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Кузьменков Л.С., Поляков П.А. ЖЭТФ, 1982, 82, с.139.
- 2. Власов А.А. Теория многих частиц. М.: Гостехиздат, 1950.
- Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: ОГИЗ, 1946.
- 4. Кузьменков Л.С. ДАН СССР, 1978, 241, с.322.
- 5. Кузьменков Л.С., Поляков П.А. ЖЭТФ, 1982, 82, с.139.
- 6. Hyun S., Kennel C. J. Plasma Phys., 1978, 20, p.281.
- Де Гроот С., ван Леувен В., ван Верт Х. Релятивистская кинетическая теория. М.: Мир, 1983.
- Очелков Ю.П. и др. Релятивистская кинетика и гидродинамика. М.: Атомиздат, 1979.
- 9. Кузьменков Л.С., Поляков П.А., Подосенов П.Б. ВМУ, 1982, сер.3, 23, № 6, с.62.

Рукопись поступила 26 февраля 1987 года.